Zadanie 3

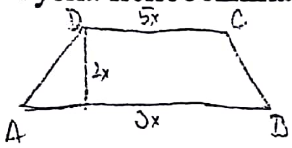
priamy dôkaz – vychádzame z toho že z A vyplýva $B_1, B_2 \dots$
nepriamy dôkaz – vytvoríme obmenu $B' \Rightarrow A'$ potom postupujeme priamo
dôkaz sporom $A \Rightarrow B$ sa zneguje → negované neplatí teda musí platiť veta pôvodná

Úloha 1

Opíšte druhy dôkazov výroku a matematickej vety typu $A \Rightarrow B$.

Úloha 2

V lichobežníku ABCD platí v : a : c = 2 : 3 : 5, obsah S = 512cm^2. Dokážte, že výška lichobežníka v = 16cm.



$$512 = \frac{(3x+5x)\cdot 2x}{2}$$

~~512 = 8x~~
~~x = 64~~

128 : 192 : 320
$\boxed{16 : 24 : 40}$
16!

$512 = (3x+5x)\cdot x$
$512 = 8x^2$
$x^2 = 64$
$x = 8$

$v = 2 \cdot x$
$v = 2 \cdot 8$
$v = 16$

Úloha 3

Pre akú hodnotu m $\in$ R výraz $a(m) = \dfrac{12-m}{m+3}$ nadobúda

a) hodnoty z intervalu < -1; 0)
b) hodnoty väčšie ako výraz m

a)

$$\frac{12-m}{m+3} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{12-m}{m+3} < 0$$

$$\frac{12-m}{m+3} + 1 \geq 0 \qquad \frac{12-m}{m+3} < 0$$

$$\frac{12-\cancel{m}+\cancel{m}+3}{m+3} \geq 0$$

n. b. = −3, 12

− + −
−3 12

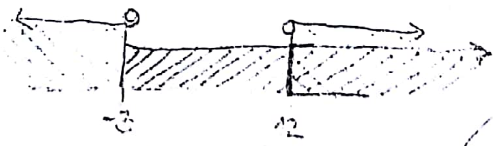
$m \in (-\infty, -3) \cup (12, \infty)$

$$\frac{15}{m+3} \geq 0$$

n b = −3

− +
−3

$m \in (-3, \infty)$



$m \in (12, \infty)$

b)

$$\frac{12-m}{m+3} > m$$

$$\frac{12-m}{m+3} - m > 0$$

$$\frac{12-m-m^2+3m}{m+3} > 0$$

$$\frac{-m^2-4m+12}{m+3} > 0 \quad /(-1)$$

$$\frac{m^2+4m-12}{m+3} < 0$$

$$\frac{(m+6)(m-2)}{m+3}$$

− + − +
−6 −3 2

$m \in (-\infty, -6) \cup (-3, 2)$

Zadanie č. 2

úloha č. 3

$~~x_0~~$ $[0; -1]$

max pre $x = 1$

$H(f) = (-\infty; 0\rangle$

$$a(x - x_0)^2 = y$$

$$a(x-1)^2 = y$$

$$a(-1)^2 = -1$$

$$a = -1$$

$$f: \; y = -(x-1)^2$$

Zadanie č. 3

úloha č. 2

Lichobežník ABCD

$v : a : c = 2 : 3 : 5$

$v = 16\,cm$ - dokážte

$S = 512\,cm^2$

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$v = 2x$

$a = 3x$

$c = 5x$

$$S = \frac{3x + 5x}{2} \cdot 2x$$

$$S = 4x \cdot 2x$$

$$S = 8x^2 \qquad 512 = 8x^2$$

$$x^2 = 64 \qquad x = 8$$

$v = 2 \cdot 8 = 16\,cm$ //

úloha č. 3

$m \in R$

$$a(m) = \frac{12-m}{m+3}$$

a) $a(m) \in \langle -1; 0)$

b) $a(m) > m$

a) $$\frac{12-m}{m+3} \geq -1 \;\wedge\; \frac{12-m}{m+3} < 0$$

$$\frac{12-m}{m+3} + 1 \geq 0 \;\wedge\; \frac{12-m}{m+3} < 0$$

$$\frac{12-m+m+3}{m+3} \geq 0 \;\wedge\; \frac{12-m}{m+3} < 0$$

$$\frac{15}{m+3} \geq 0 \;\wedge\; \frac{12-m}{m+3} < 0$$

$$m \in (-3; \infty) \cap [(-\infty; -3) \cup (12; \infty)]$$

$-$ $+$ $-$

-3 12

$$m \in (12; \infty)$$

Scanned by CamScanner

b) $\frac{12-m}{m+3} > m$ $\qquad \frac{12-m}{m+3} - m > 0$

$$\frac{12-m-m^2-3m}{m+3} > 0 \qquad \frac{-m^2-4m+12}{m+3} > 0$$

$$\frac{m^2+4m-12}{m+3} < 0$$

$$\frac{(m+6)(m-2)}{m+3} < 0$$

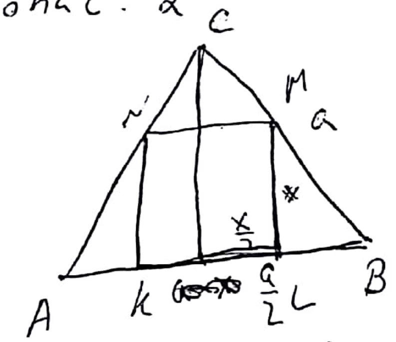
$-$ $+$ $-$ $+$

-6 $\quad -3$ $\quad 2$

$$m \in (-6; -3) \cup (2; \infty)$$

Zadanie č. 4

úloha č. 2



$x = a(2\sqrt{3}-3)$ - dokázať

$$\frac{v_a}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}-\frac{x}{2}}$$

$$\frac{v_a}{x} = \frac{a}{a-x}$$

$$v_a^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$v_a^2 = \frac{3a^2}{4} \qquad v_a = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{x} = \frac{a}{a-x}$$

$$\frac{\sqrt{3}a}{2x} = \frac{a}{a-x}$$

$$\sqrt{3}a(a-x) = 2ax$$

$$\sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}ax = 2ax$$

$$\sqrt{3}a^2 = 2ax + \sqrt{3}ax$$

$$\sqrt{3}a^2 = x(2a+\sqrt{3}a)$$

$$x = \frac{\sqrt{3}a^2}{2a+\sqrt{3}a}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}a^2}{a(2+\sqrt{3})} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}a(2-\sqrt{3})}{4-3}$$

$$x = a(2\sqrt{3}-3)$$

MO 4:
TYPY DÔKAZOV

Priamy dôkaz:

- spočíva vo vytváraní sledu pravdivých implikácií tvaru: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$

axiómy
alebo dokázané tvrdenie

napr.
Dokážte, že platí: $\forall n \in N : 2/n \Rightarrow 2/n^2$.

Dôkaz priamo:
$2/n \Rightarrow \exists k \in N : n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2.2k^2; 2k^2 \in N; n^2 = 2l, l \in N \Rightarrow 2/n^2$ ČBTD

Nepriamy dôkaz:

- dokazujeme ním iba vety tvaru implikácie
- spočíva v tom, že dokážeme platnosť obmenenej vety (priamo) ekvivalentné
  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$

→ implikácia a jej obmenená majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu
→ namiesto implikácie môžme dokazovať jej obmenu

napr.
Dokážte, že platí: $\forall n \in N : 2/n^2 \Rightarrow 2/n$.

Dôkaz nepriamo:
V_{obm}: $\forall n \in N : 2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$

$2 \nmid n \Rightarrow n = 2k+1, k \in N \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow$
$n^2 = 2l + 1, l \in N \Rightarrow 2 \nmid n^2$ ČBTD

Dôkaz sporom:

- ukážem nepravdivosť negovaného výroku a dôjdem k sporu $\Rightarrow$ pôvodný výrok teda platí

napr.
Dokážte, že platí: $\forall n \in N ; 3/n \Rightarrow 3/n^2$

Dôkaz sporom:
V': $3/n \wedge 3 \nmid n^2$
$3/n \Rightarrow \exists k \in N ; n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 \Rightarrow n^2 = 3.3k^2; l \in N \Rightarrow n^2 = 3l \Rightarrow 3/n \Rightarrow$ spor s tvrdením, že $3 \nmid n^2$

negácia neplatí, teda pôvodný výrok platí

Matematická indukcia:

- vlastnosť sa dedí z predchádzajúceho na nasledujúceho
- môžeme robiť na matematických vetách, ktoré sú definované na množine prirodzených čísel alebo na množine tvaru $\{m, m+1, m+2, m+3, \ldots\} m \in N$, alebo na množine párnych čísel, na množine čísel deliteľných tromi ... → jednoznačne musím vedieť určiť nasledovníka

- **spočíva v dvoch krokoch:**

1. dokážem platnosť vety pre najmenšie možné n
2. = Indukčný krok – predpokladám platnosť vety pre n-tý prvok (indukčný predpoklad a z toho odvodím platnosť aj pre nasledujúci prvok (n+1)
   $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

<u>napr.</u>

Dokážte, že platí: $\forall n \in N$; $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Dôkaz matematickou indukciou:

1° n=1 $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ platí

2° $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

$V(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

plati ???:

$V(n+1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$n(n+1) + 2n + 2 = n^2 + n + 2n + 2$
$n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + 3n + 2$
$n^2 + 3n + 2 = n^2 + 3n + 2$ platí

Zadanie 4

funkcia je každá množina usporiadaných dvojíc $[x,y] \in M$ pre ktoré platí ku každému $x \in M$ $\exists$ práve jedno $y \in R$ tak, že platí $[x,y] \in f$; $y = f(x)$

$D(f)$ -> aspoň jedno $y \in R$ ~~[x,y]∈f~~; $y=f(x)$

Úloha 1

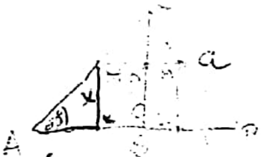
$H(f)$ -> aspoň jedno $y \in R$ ~~[x,y]∈f~~; $y=f(x)$

Definujte funkciu na množine R, vymenujte spôsoby jej určenia. Definujte vlastnosti funkcie na množine $M \subset D(f)$ a ilustrujte tieto vlastnosti na grafe.

spojitosť, monotónnosť, ohraničenosť, extrémy

Úloha 2

Do rovnostranného trojuholníka ABC so stranou a je vpísaný štvorec KLMN . Dokážte, že štvorec KLMN má stranu veľkosti $a(2\sqrt{3}-3)$.



$|AK| = \frac{a-x}{2}$

$tg\,60^\circ = \frac{x}{\frac{a-x}{2}}$

$\sqrt{3} = \frac{2x}{a-x}$

$\sqrt{3}\cdot(a-x) = 2x$

$\sqrt{3}a - \sqrt{3}x = 2x$

$\sqrt{3}a = \sqrt{3}x + 2x$

$\sqrt{3}a = x\cdot(\sqrt{3}+2)$

$x = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}+2}\cdot\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} =$

$\Rightarrow x\ \frac{3a-2a\sqrt{3}}{-1} =$

$x = -3a + 2a\sqrt{3}$

$x = a(2\sqrt{3}-3)$!

Úloha 3

S akou pravdepodobnosťou náhodne vybrané číslo menšie ako 1000

a) je párne alebo je deliteľné 5

b) nie je párne a nie je deliteľné 5?

a) $\frac{500}{1000}\ \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ párne

$\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\ \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}$!

$\frac{200}{1000}\ \frac{2}{10}\ \frac{1}{5}$ del. 5

b) $\frac{500}{1000} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

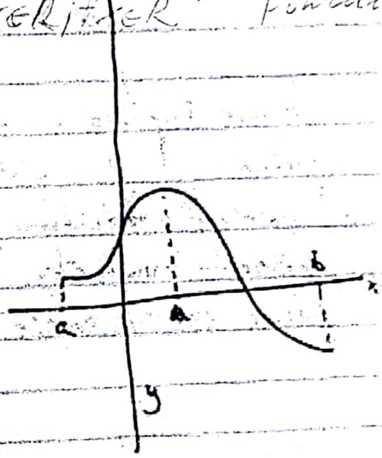
$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\quad \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\frac{800}{1000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

množina usporiadaných dvojíc x, y, ktorá patria karteziánskemu súčinu R×R, taká že ku každému x v celom čísle existuje najviac jedno y reálne $f=\{[x,y]\in R\times R;\ \forall x\in R\ \exists$ práve $y\in R\}$

④ Funkcia

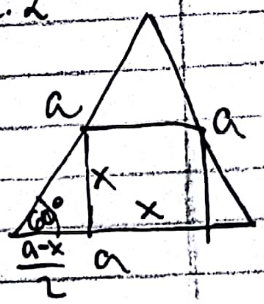
- predpis, ktorý každému x z D priradí práve jedno y z H
  $\dots R \qquad\qquad R$
- spôsoby určenia: množinou usporiadaných dvojíc (alebo tabuľkou)
  ~~ak~~ určení ako obor pravdivosti rovnice $g=\{[x,y]\in R^2; y=\sqrt{x}\}$
  rovnice, vymenovaním prvkov $\qquad g: y=\sqrt{x},\ x\in R_0^+$
  slovným popisom $\qquad D(f)$ – množina všetkých $x\in R$ takých, že ku každému x existuje práve y
  grafom $\qquad$ aby usporiadaná dvojica patrila funkcii
  $D(f)=\{\cancel{x}\in R; y\in R\}$



- vlastnosti fcie na $M\subset D$: $(a,b)=M$
  1) Párnosť: $\quad M\ \ \forall x\in M: \exists -x\in M$
     a) párna: $\forall x\in \cancel{R}: f(-x)=f(x)$
     b) nepárna: $\forall x\in M: f(-x)=-f(x)$
  2. Rast, klesanie – monotónnosť
     a) rastúca: ~~$\forall x\in M; x_2$~~
     $\iff \forall x_1,x_2\in M; x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
     b) kles. $\quad \forall x_1,x_2\in M; x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
     c) prostá $\forall x_1,x_2\in M; x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
  3. Ohraničenosť
     a) zhora: $\exists k\in R; f(x)\leq k$ $\quad$] oboje = ohraničená
     b) zdola: $\exists d\in R; f(x)\geq d$
  4. Extrémy:
     a) maximum: $a\in M; \forall x\in M; f(x)\leq f(a)$, $x\neq a$ (keď iba $\geq \Rightarrow$ ostré)
     b) minimum: $b\in M; \forall x\in M; f(x)\geq f(b)$, $x\neq b$
  5. Obory

periodická $\iff \exists p>0, \forall x\in M: x\in M$ ~~$\Rightarrow$~~ p
$\Rightarrow x+k\cdot p\in M$
$f(x)=f(x+k\cdot p)$
$\iff p$

Úl. 2



$$tg\,60^\circ=\frac{x}{\frac{a-x}{2}}$$

$$\sqrt{3}=\frac{2x}{a-x}$$

$$\sqrt{3}a-\sqrt{3}x=2x$$

$$\sqrt{3}a=2x+\sqrt{3}x$$

$$\frac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}}=x$$

$$x=\frac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}a-3a}{4-3}=a\cdot(2\sqrt{3}-3)$$

Scanned by CamScanner

Rastúca: Funkcia f sa nazýva rastúca na množine M ($M \subset Df$), keď $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Klesajúca: keď $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(rastúca, klesajúca)
Prostá keď $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ohraničenosť $\Rightarrow$ Funkcia f sa nazýva ohraničená
a, zdola $\Leftrightarrow \exists d \in R: \forall x \in M$ ($M \subset Df$): $f(x) \geq d$
b, zhora $\Leftrightarrow \exists h \in R: \forall x \in M$ ($M \in Df$): $f(x) \leq h$
c, ohraničená $\Rightarrow$ keď je ohraničená zhora a zdola

Maximum: v bode a maximum $\Leftrightarrow \forall x \in M$ ($M \subset Df$): $f(x) \leq f(a)$
Minimum v bode b minimum $\Leftrightarrow \forall x \in M$ ($M \subset Df$): $f(x) \geq f(b)$

[redacted] ak existuje $p > 0$, že pre $\forall k \in Z$ platí
1, ak je definovaná pre číslo x, tak je definovaná aj pre číslo $x + kp$
2, pre $\forall x \in Df \Rightarrow$ platí $f(x) = f(x + kp)$

$\Leftrightarrow$ $p > 0$ $\forall x \in M \Rightarrow x + k + p$
$- f(x) =$

$\Leftrightarrow \exists p > 0; \forall x \in M: x \in M \Rightarrow x + kp \in M$
$f(x) = f(x + k)$
$\Leftrightarrow \exists p > 0; \forall x \in M: x = f(x + kp)$
$f(x) = f(x + kp)$

Scanned by CamScanner

[2,A
2,2

[redacted]: funkciu (f) na množine R, rozumieme predpis ktorý každému x z množiny R priradí práve jedno reálne číslo

- množina usporiadaných dvojíc x,y, ktorá patrí karteziánskemu súčinu R×R, taký že ku každému $x\in R$ existuje najviac jedno $y\in R$

$f=\{[x,y]\in R\times R;\ \forall x\in R\ \exists!\,1\,y\in R: y=f(x)\}$

[redacted]: $Df=\{\forall x\in R;\ \exists!\,1\,y\in R: y=f(x)\}$

[redacted]: $H(f)=\{\forall y\in R\ \exists$ aspoň $1\,x\in R: y(f x)\}$

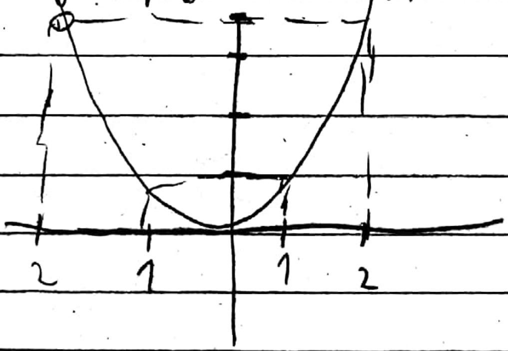
[redacted]:

1, vymenovaním prvkov $f=\{[1,2],[3,4]\}$
2, obor pravdivosti rovnice $f: y=3x+4 \Rightarrow f=\{[x,y]\in R\times R: y=3x+4\}$
3, slovným opisom
4, grafom
5, tabuľkou

[redacted]

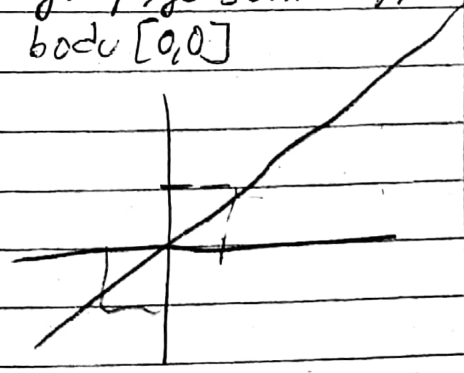
Párna

- funkciu nazývame párnou
keď a, $\forall x\in D(f)\ \exists -x\in D(f)$
$f(-x)=f(x)$
- graf je somerný podľa osi y



Nepárna

- |||
a, $\forall x\in D(f)\ \exists -x\in Df$
$f(-x)=-f(x)$
- graf je somerný podľa ~~osi~~ bodu [0,0]



$/2 \vee /5$ $\quad 1 \ldots 999$

$P(A \cup B) \; P(A) + P(D) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) \; \frac{499}{999} + \frac{199}{999} - \frac{99}{999} = 59{,}90$

$b) \; X_2 \wedge X_5$

$\cancel{P(A \cap B)} = \frac{500}{999} \cdot \frac{201}{999} = 40{,}17$

$l = \{[x, y] \in R \times R ; \forall x \in R\}$

Gymnázium J. M. Hurbana v Čadci MATEMATIKA

Zadanie 5

Úloha 1

Vysvetlite pojmy hypotéza, axióma, výrok, negácia výroku. Uveďte operácie s výrokmi.

- $\wedge$ konjunkcia
- $\vee$ disjunkcia
- $\Rightarrow$ implikácia
- $\Leftrightarrow$ ekvivalencia

Úloha 2

Dokážte, že $\sqrt{16+\sqrt{17}} > \sqrt{16-\sqrt{17}} + 1$.

$$16+\sqrt{17} > 16-\sqrt{17} - 2\sqrt{16-\sqrt{17}} + 1$$

$$2\sqrt{17} > -2\sqrt{16-\sqrt{17}} + 1$$

Úloha 3

$$2\sqrt{17} - 1 > -2\sqrt{16-\sqrt{17}} \quad /^2$$

$$68 - 4\sqrt{17} + 1 > 4(16-\sqrt{17})$$

$$68 - 4\sqrt{17} + 1 > 64 - 4\sqrt{17}$$

$$69 > 64$$

platí

Súčet troch čísel, ktoré tvoria aritmetickú postupnosť, je 30. Ak zmenšíme stredný člen o 4, vznikne geometrická postupnosť. Aké sú to čísla?

$$a_1 + a_2 + a_3 = 30$$

$$3a_1 + 3d = 30$$

$$a_1 + d = 10$$

$$d = 10 - a_1$$

$$\frac{a_2 - 4}{a_1} = \frac{a_3}{a_2 - 4}$$

$$a_{1,2} = \frac{20 \pm 16}{2}$$

$$d_1 = 10 - 18 = -8$$

Scanned by CamScanner

Zadanie č. 4
úloha č. 3
vybrané číslo $x < 1000$
a) párne alebo deliteľné 5
b) nie je párne a nie je deliteľné 5

$$p(A) = \frac{500 + 100}{1000} = \frac{600}{1000} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$p(B) =$

$$P_1(\text{nie je párne}) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$$

$$P_2(\text{je nie je deliteľné}) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$$

$$P_1 \cap P_2 = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Zadanie č. 5
úloha č. 2

$$\sqrt{16+\sqrt{17}} > \sqrt{16-\sqrt{17}} + 1$$

$$16+\sqrt{17} > 16-\sqrt{17} + 2\sqrt{16-\sqrt{17}} + 1$$

$$2\sqrt{17} - 1 > 2\sqrt{16-\sqrt{17}}$$

$$4 \cdot 17 - 4\sqrt{17} + 1 > 4(16-\sqrt{17})$$

$$4 \cdot 17 - 4\sqrt{17} + 1 > 4 \cdot 16 - 4\sqrt{17}$$

$$4 \cdot 17 - 4 \cdot 16 + 1 > 0$$

$$4(17-16) + 1 > 0$$

$$4 + 1 > 0$$

$$5 > 0$$

úloha č. 3

$a_{n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} = 30$

$a_n - 4$ G.P.

$a_n - d + a_n + a_n + d = 30 \qquad 3a_n + \cancel{2d} = 30 \qquad a_n = 10$

$\cancel{3a_n = \frac{30 - 2d}{3}}$

$$\frac{a_n - 4}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n - 4} \qquad \frac{a_n - 4}{a_n - d} = \frac{a_n + d}{a_n - 4}$$

$(a_n - 4)^2 = a_n^2 - d^2$

$a_n^2 - 8a_n + 16 = a_n^2 - d^2$

$\cancel{-8 \cdot \frac{30-2d}{3} + 16 = -d^2}$

$\cancel{-8(30-2d) + 48 = -3d^2}$

$\cancel{3d^2 + 16d - 192 = 0}$

$\cancel{D = 256 + 2304}$

$-80 + 16 = -d^2$

$-64 = -d^2$

$d = \mp 8$

$2; 10; 18$

$18; 10; 2$

Zadanie č. 6

úloha č. 2

$\log(1 + \frac{1}{2}) + \log(1 + \frac{1}{3}) + \log(1 + \frac{1}{4}) + \ldots + \log(1 + \frac{1}{2001}) = \log 1001$

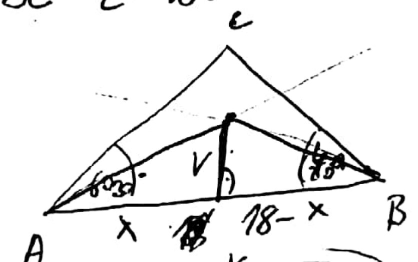
$\log (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \ldots (1 + \frac{1}{2001}) = \log 1001$

$\log \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2002}{2001} = \log 1001$

$\log \frac{2002}{2} = \log 1001 \qquad \log 1001 = \log 1001$

úloha č. 3

$\triangle ABC \quad c = 18\,cm \quad \alpha = 60° \quad \beta = 40°$



$tg\,20 = \dfrac{r}{\frac{18 tg30 - r}{tg30}}$

$\cancel{\sin 30 =}$

$tg\,30 = \frac{r}{x} \qquad tg\,20 = \frac{r}{18 - x}$

$x = \frac{r}{tg30} \qquad tg\,20 = \dfrac{r}{18 - \frac{r}{tg30}}$

$tg\,20 = \frac{tg30\,r}{18tg30 - r} \qquad 18\,tg30 \cdot tg20 - tg20r = tg30r$

$18\,tg30 \cdot tg20 = r\,(tg30 + tg20) \qquad r = \frac{18\,tg30 \cdot tg20}{tg30 + tg20}$

$r = 4{,}02\,cm$

Úl. 2.

$$\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\log\left(1+\frac{1}{4}\right)+\dots+\log\left(1+\frac{1}{2001}\right)=\log 1001$$

$$\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\log\frac{5}{4}+\dots+\log\frac{2001}{2000}+\log\frac{2002}{2001}=\log 1001$$

$$\log\left(\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{5}{\cancel{4}}\cdot\dots\cdot\frac{\cancel{2001}}{\cancel{2000}}\cdot\frac{2002}{\cancel{2001}}\right)=\log 1001$$

$$\log\frac{2002}{2}=\log 1001$$

$$\log 1001=\log 1001$$

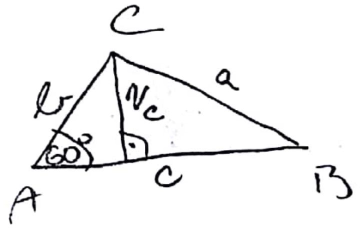
Úl. č. 3

$c=18\,cm$ $\alpha=60°$ $\beta=40°$ $\gamma=\pi-\alpha-\beta=80°$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$a=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

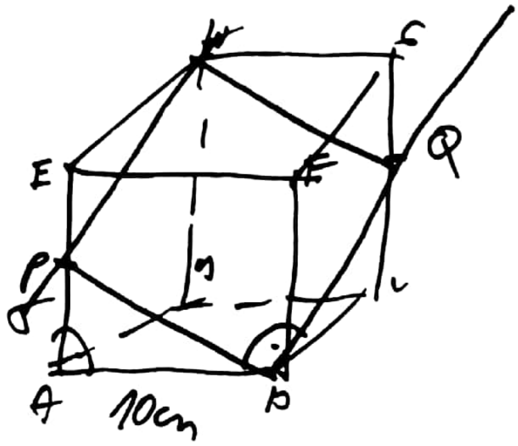
$$a=15{,}83\,cm \qquad b=11{,}75\,cm$$



$$v_c=b\cdot\sin\alpha \qquad \rho=\frac{S}{o(s)}$$

$$v_c=10{,}18\,cm$$

$$\rho=\frac{\frac{c\cdot v_c}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{c\cdot v_c}{a+b+c}=4{,}02\,cm$$



$10^2+5^2=$

125

$x^2=\sqrt{125}$

a) $\dfrac{2\sin 2x-\sin 4x}{2\sin 2x+\sin 4x}=\mathrm{tg}^2 x$

$\dfrac{2\cdot 2\sin x\cdot\cos x-2\sin 2x\cdot\cos 2x}{4\sin x\cdot\cos x+2\sin 2x\cdot\cos 2x}=\dfrac{4\sin x\cdot\cos x-4\sin x\cdot\cos x\cdot(\cos^2x-\sin^2x)}{4\sin x\cdot\cos x+4\sin x\cos x\cdot(\cos^2x-\sin^2x)}$

$=\dfrac{4\sin x\cdot\cancel{\cos x}\cdot(1-(\cos^2x+\sin^2x))}{4\sin x\cancel{\cos x}\cdot(1+\cos^2x-\sin^2x)}=\dfrac{\cancel{2}\sin^2x}{\cancel{2}\cos^2x}=\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}=\mathrm{tg}$

$\dfrac{\cos 2x}{\mathrm{ctg}^2x-\mathrm{tg}^2x}=\dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

$\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cancel{\mathrm{ctg}}\ \dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}-\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\dfrac{\cos^4x-\sin^4x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}}=\dfrac{\cancel{(\cos^2x-\sin^2x)}\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x}{\cancel{(\cos^2x-\sin^2x)}\cdot(\cos^2x+\sin^2x)}$

$\sin^2x\cdot\cos^2x$

$\dfrac{1}{4}\sin^2 2x=\cancel{\dfrac{4}{4}}\sin^2x\cdot\cos^2x$

Zadanie 6

$a, b, c \in R \wedge a \neq 0$ 1. výpočet diskriminantu, ak $D > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \Rightarrow 3$ intervaly

$ax^2 + bx + c > 0$ x_1 -||- < 0

Úloha 1

Uveďte tvar kvadratickej rovnice a nerovnice a vysvetlite metódy ich riešenia.

Úloha 2

Dokážte, že $\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\log\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log\left(1+\frac{1}{2001}\right)=\log 1001$

$\log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \log 5 - \log 4 + \ldots \log 2002 - \log 2001 = \log 1001$

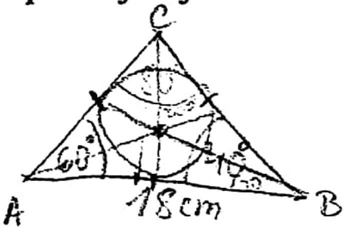
$-\log 2 + \log 2002 = \log 1001$

$\log \frac{2002}{2} = \log 1001$

$\log 1001 = \log 1001$ ✓

Úloha 3

V trojuholníku ABC je c = 18cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 40°$. Vypočítajte polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC.



$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$ $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\frac{15}{\sin 80} = \frac{a}{\sin 60}$ $\frac{b}{\sin 40} = \frac{15,83}{\sin 60°}$

$\boxed{b = 11,75}$

$S = \rho\sigma$

$S\triangle =$

$\boxed{15,83} = \frac{9\sqrt{3}}{0,98} = a$

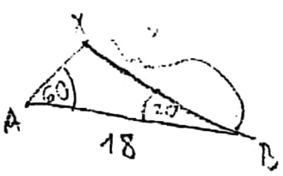
$r_c = b \cdot \sin\alpha \Rightarrow 11,75 \cdot \sin 60$

$\boxed{r = \frac{2S}{O}} \Rightarrow$ kde O obvod $\triangle$, S = obsah $\triangle$ $\frac{47\sqrt{3}}{8}$

$S = \rho\sigma$

$S =$

$2S = \frac{47\sqrt{3}}{8} \cdot 18 \doteq 183,16$



$\frac{m \cdot c}{\sin\gamma} = 2r$

$r = \frac{183,16}{45,58} \doteq 4,018$

cca 4 cm!

6) Kvadratická rovnica a ner.

Rovnica: tvar $ax^2+bx+c=0$; $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (koeficienty)

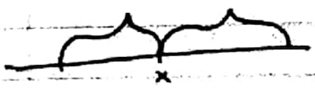
- ak $a=1 \Rightarrow$ normovaná kv. rovnica
- ax^2 - kvadratický člen
  bx - lineárny člen
  c - absolútny člen
- $b=0 \Rightarrow ax^2+c=0 \rightarrow$ kv.r. bez abs. člena] v neúplnom tvare
- $c=0 \Rightarrow ax^2+bx=0 \rightarrow$ rýdzo kv.r.

Riešenie

1) rýdzo kvadratická

$ax^2+c=0$

$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$; $-\frac{c}{a} \geq 0$



$P=\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$

2) bez abs. člena

$ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

$x=0 \vee x=-\frac{b}{a}$

$P=\left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$

3) úplná kvadratická

a) rozkladom na súčin

$x^2+4x-21=0$

$(x-3)(x+7)=0$

$P=\{-7,3\}$

b) doplnením na štvorec

$x^2+4x-21=0$

$(x^2+4x+4)-4-21=0$

$(x+2)^2-25=0$

$\cancel{(x+2)^2=25}$

$(x+2-5)(x+2+5)=0$

$(x-3)(x+7)=0$

c) cez diskriminant

$ax^2+bx+c=0 \quad / \cdot 4a$

$4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0$

$((2ax)^2+2(abx)+b^2)-b^2+4ac=0$

$(2ax+b)^2=b^2-4ac$

$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$D=b^2-4ac > 0 \Rightarrow 2$ rieš.

$< 0 \Rightarrow \emptyset$

$= 0 \Rightarrow 1$ rieš. = dvojnásobný

Nerovnica: metóda nulových bodov
rozklad na súčin] vždy riešime intervaly

Úsekový tvar priamky

$ax + by + c = 0$

$ax + by = -c \;/ : (-c) \quad c \neq 0$

p, q - úseky, kt. vytína na o_x, o_y

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

$$\frac{x}{p} \; \textcircled{+} \; \frac{y}{q} = 1$$

vrastúca, keď je tam - pretína - o_y

$p: ax + by + c = 0$, $q: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ } rovnobežné

⇒ kolmé - skalárny súčin $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$

Výroky

- je oznámenie o ktorom vieme rozhodnúť či je pravdivé alebo nepravdivé

označenie: A, B, C

pravdivostná hodnota: pravdivý 1 p
nepravdivý 0 n

operácie: A: $2 > 5$ ... 0
B: mám červený sveter ... 0

[redacted] - popiera tvrdenie pôvodného výroku

B': nemám červený sveter

[redacted] - $A \wedge B$ - je zložený výrok, kt. je pravdivý ak súčasne sú oba výroky pravdivé

[redacted] - $A \vee B$ - je zložený výrok, kt. je pravdivý ak je aspoň jeden z výrokov pravdivý (alebo)

[redacted] - $A \Rightarrow B$ - je nepravdivá, ak z pravdy vyplýva nepravda (Ak ... tak/potom)

[redacted] - $A \Leftrightarrow B$ - je pravdivá ak majú oba výroky rovnakú pravdivostnú hodnotu (práve vtedy)

De Morganové pravidlá (negácia)

$(A \wedge B)' = A' \vee B'$

$(A \vee B)' = A' \wedge B'$

$(A \Rightarrow B)' = (A' \vee B)' = A \wedge B'$

tautológia: výroková formula/ zložený výrok, kt. má v každom riadku 1

kontradikcia: -//- 0

(5) Výroky

Hypotéza - domnienka, tvrdenie ktorej momentálne nevieme priradiť pravdivostnú hodnotu („Na Marse ∄ existujú živé bytosti.")

Axióma - tvrdenie, ktoré je označené za samozrejmé (ako evidentné), bez podrobnosti pravdivé ↪ nedokazujeme („Štvorec má ∀ 4 strany rovnako dlhé)

Výrok - oznamovacia veta, o ktorej má zmysel uvažovať, či je alebo nie je pravdivá. Pravdivý výrok → priradená pravdivostná hodnota 1, Nepravdivý v. → -"- 0

- môže byť vyj. slovným vyj., zápismi (matematické výroky), symbolicky...

Negácia výroku - výrok, kt. popiera pravdivosť iného tvrdenia

↪ má opačnú pravdivostnú hodnotu

↪ musí zahŕňať ∀ ostatné možnosti

Konjunkcia - považuje sa za pravdivú ⟺ sú pravdivé oba výroky

$A \wedge B$ „a"

Disjunkcia - pravdivý aspoň jeden

$A \vee B$ „alebo"

Ostrá disjunkcia - pravdivý práve jeden

$A \veebar B$ „buď - alebo"

Implikácia - pravdivá A ∧ pravdivá B ✓ $A \Rightarrow B$

nepravdivá A ∧ pravdivá B ✓ „ak - tak"

nepravdivá A ∧ nepravdivá B ✓

pravdivá A ∧ nepravdivá B ✗

Ekvivalencia - oba výroky majú zhodnú pravd. hodnotu

$A \Leftrightarrow B$ „a zároveň", „vtedy a len vtedy keď"

Úl. 2

$$\sqrt{16+\sqrt{17}} > \sqrt{16-\sqrt{17}} + 1 \quad /()^2$$

$$\cancel{16}+\sqrt{17} > \cancel{16}-\sqrt{17} + 2\cdot\sqrt{16-\sqrt{17}} + 1$$

$$2\cdot\sqrt{17} - 1 > 2\cdot\sqrt{16-\sqrt{17}} \quad /()^2$$

$$428 - \cancel{4\cdot\sqrt{17}} + 1 > 424 - \cancel{4\cdot\sqrt{17}}$$

$$429 > 424$$

Scanned by CamScanner

Zadanie 7

$D(f)=R$
$H(f)=R$

klesá alebo rastie podľa a
nie je ohraničená; nemá max ani min
ak a=0 tak y=b → konštantná f

grafom je vždy priamka

Úloha 1

$y = ax+b$
$a, b \in R$

Uveďte rovnicu lineárnej funkcie, načrtnite jej graf a vymenujte jej vlastnosti.

Úloha 2

Dokážte, že pre prípustné hodnoty $x \in R$ platia rovnosti

a) $\dfrac{2\sin 2x - \sin 4x}{2\sin 2x + \sin 4x} = tg^2 x$

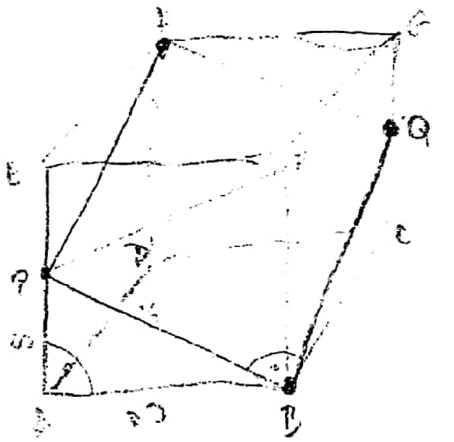
b) $\dfrac{\cos 2x}{\cot g^2 x - tg^2 x} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

$\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \Rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x$

$\dfrac{\sin^2 x \cos^2 x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 \cos^2$

Úloha 3

Daná je kocka ABCDEFGH, kde |AB|=10cm, bod Q je stred hrany CG a bod P je stred hrany AE. Vypočítajte vzdialenosť priamok PH a BQ a vo vhodne zvolenej rovine túto vzdialenosť znázornite.



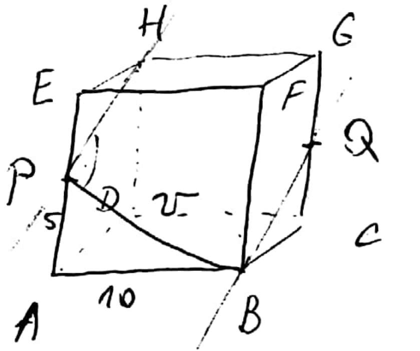
úloha č. 3
kocka ABCDEFGH

$|AB| = 10$ cm

$Q = \frac{1}{2}|CG|$

$P = \frac{1}{2}|AE|$

$\rho\, v\,(\overrightarrow{PH}; \overrightarrow{BQ})$



$v^2 = 5^2 + 10^2$

$v^2 = 25 + 100$

$v^2 = 125$ $\quad v = \sqrt{125}$

Zadanie 8.
úloha č. 2

a) $\forall n \in N \quad 3|(n-2) \Rightarrow 6|(n^2-5n+6)$

$(n-2) = 3k \quad k \in N \qquad n^2-5n+6 = (n-3)(n-2)$

$n = 3k+2 \qquad (3k+2-3)(3k+2-2)$

$3|(n-2) \Rightarrow [3|(n^2-5n+6) \wedge 2|(n^2-5n+6)] \quad (3k-1)\cdot 3k \quad 9k^2-3k \quad k=2c$

$3|(n-2) \Rightarrow [3|(n-3)(n-2) \wedge 2|(n-3)(n-2)] \quad 3(3k^2-k) \quad k=2c+1$

$3(3\cdot 4c^2-2c) \quad 3(3(4c^2+4c+1)-2c+1$

$3\cdot(12c^2-2c) \quad 3(12c^2+12c+3-2c+1)$

$3\cdot 2(6c^2-c) \quad 3(16c^2+10c+4)$

$2\cdot 3(8c^2+5c+2)$

Zadanie 7.

úloha č. 2

$x \in R$

a) $\frac{2\sin 2x - \sin 4x}{2\sin 2x + \sin 4x} = tg^2 x$

$$\frac{2\sin 2x - 2\sin 2x\cos 2x}{2\sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x} = tg^2 x$$

$$\frac{\cancel{2\sin 2x}(1-\cos 2x)}{\cancel{2\sin 2x}(1+\cos 2x)} = tg^2 x$$

$\sin 2x \neq 0$

$x \neq k\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = tg^2 x$$

$\cos 2x \neq -1$

$2x \neq \pi + k2\pi$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\frac{\cancel{2}\sin^2 x}{\cancel{2}\cos^2 x} = tg^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x$$

b) $\frac{\cos 2x}{\cot g^2 x - tg^2 x} = \frac{1}{4}\sin^2 2x$

$$\frac{\cos 2x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$\frac{\cos 2x}{\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}} = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

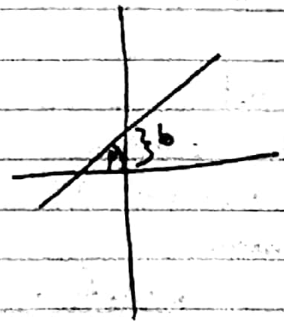
$$\frac{(\cancel{\cos^2 x - \sin^2 x})(\sin^2 x\cos^2 x)}{(\cancel{\cos^2 x - \sin^2 x})\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}} = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{4} = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

$$\frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

7 Lineárna funkcia

· tvar $y = ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$
· graf je priamka ~~...~~
· konštantná fcia - $a=0 \Rightarrow y=b$ ($f \parallel x$)
· vyjadruje priamu úmernosť
· a je zároveň smernica graf. fcie - určuje sklon



1. Párnosť
   · párna - iba konštantné (príp. s abs. hodnotou)
   · nepárna - len ak sa $b=0$
   · prostá - $\forall$ okrem konštantných
2. Monotónnosť
   · rast - ak $a>0$
   · klesanie - ak $a<0$
3. Ohraničenosť - len konštantná
4. Extrémy - len konštantná
5. Obory

$D = \mathbb{R}$
$H = \mathbb{R}$

Ul. 2. a)

$$\frac{2\sin 2x - \sin 4x}{2\sin 2x + \sin 4x} = tg^2 x$$

$$\frac{4\sin x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x}{4\sin x\cos x + 2\sin^2 x\cos 2x} = tg^2 x$$

$$\frac{4\sin x\cos x - 4\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{4\sin x\cos x + 4\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = tg^2 x$$

$$\frac{\cancel{4\sin x\cos x}\cdot(1 - \cos^2 x + \sin^2 x)}{\cancel{4\sin x\cos x}(1 + \cos^2 x - \sin^2 x)} = tg^2 x$$

$$\frac{1 - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x}{1 + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x} = tg^2 x$$

$$\frac{2\sin^2 x}{2 - 2\sin^2 x} = tg^2 x$$

$$\frac{\cancel{2}\cdot\sin^2 x}{\cancel{2}\cdot(1 - \sin^2 x)} = tg^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x$$ ✓

Zadanie 8

$D(f) = R$
$H(f) = R^+$ alebo R^-

Úloha 1 $ax^2+bx+c=0$

Uveďte rovnicu kvadratickej funkcie, vysvetlite pomocou grafu jej D(f), H(f) a vlastnosti funkcie.

Úloha 2

Dokážte, že a) $\forall n \in N: \; 3|(n-2) \Rightarrow 6|(n^2-5n+6)$

b) $\forall a,b,c \in N: \; a|b \wedge a|(b-c) \Rightarrow a|c$

$\exists c \in N,\; n-2 = 3c \Rightarrow n = 3c+2 \Rightarrow 3/(3c+2)^2 - 5.(3c+2)+6$

$d = 9c^2+12c+4-15c-10+6$

$= 9c^2-3c = 3/d$

$d = 3(3c^2-c)$

b) $a|b \Leftrightarrow \exists k \in Z$ $b=ka$

$a|(b-c) \Leftrightarrow \exists k \in Z;\; b-c = la \Rightarrow \frac{b-c}{a} = l$

$\frac{b}{a} - \frac{c}{a} = l = \frac{ka}{a} - \frac{c}{a} = l$ $a|c$ ✓

Úloha 3

Ak sa zvýši počet prvkov o 4, zväčší sa počet kombinácií 2. triedy 3-krát. Koľko je prvkov?

$C_2(n+4) = 3 \cdot C_2(n)$

$\frac{(n+4)!}{(n+2)! \cdot 2!} = \frac{3n!}{(n-2)! \cdot 2!} \Rightarrow \frac{(n+4)\cdot(n+3)(n+2)!}{(n+2)! \cdot 2!} = \frac{3n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(n-2)! \cdot 2!}$

$\frac{(n+4)\cdot(n+3)}{2} = \frac{3n(n-1)}{2} \; /\cdot 2 \Rightarrow (n+4)\cdot(n+3) = 3n(n-1)$

$n^2+3n+4n+12 = 3n^2-3n$

$-2n^2+10n+12 = 0 \quad /\cdot(-2)$

$n^2-5n+6=0$

$D = 25+24$

$D = 49$

$\sqrt{D} = 7$

$n_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2} < \begin{matrix} 6 \checkmark \\ \cancel{-1} \end{matrix}$

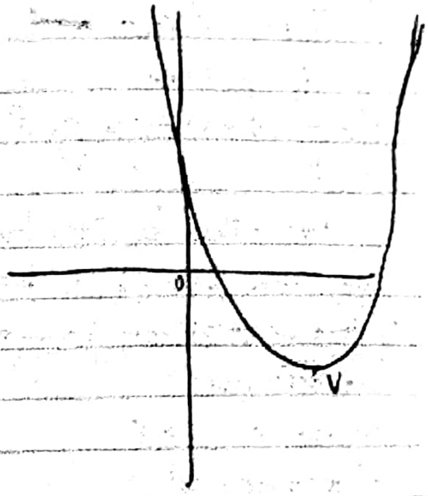
$n = 6$

⑧ Kvadratická fcia

- tvar $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- grafom je parabola – v prípade záporného a → ∩

$V[v_1, v_2]$; $(x - v_1)^2 = \pm 2p(y - v_2)$

$V\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$



1. Párnosť

párna: $b, c = 0$

nepárna: $\emptyset$

2. Monotónnosť

rast $p > 0$; (v_1, ∞) prostá $\emptyset$

$p < 0$; $(-\infty, v_1)$

kles. $p > 0$; $(-\infty, v_1)$

$p < 0$; (v_1, ∞)

3. Ohraničenosť

zhora $p > 0 \Rightarrow \emptyset$

$p < 0 \Rightarrow (v_2, \infty)$

zdola $p > 0 \Rightarrow (-\infty, v_2)$

$p < 0 \Rightarrow \emptyset$

4. Extrémy

maximum $\emptyset$ $(p > 0)$

$x = v_1$ $(p < 0)$

minimum $x = v_1$ $(p > 0)$

$\emptyset$ $(p < 0)$

5. Obory

$D = \mathbb{R}$

H: $p > 0$, $H = \langle v_2, \infty)$

$p < 0$, $H = (-\infty, v_2\rangle$

úl. č. 2 $3 \mid (n-2) \Rightarrow 6 \mid (n^2 - 5n + 6) \Rightarrow 6 \mid (n-2)(n-3)$

$\Rightarrow 3 \mid (n-2) \cdot (n-3) \wedge 2 \mid (n-2 \cdot n-3)$

$a/b \wedge a/(b-c) \Rightarrow a/c$

$a/b-c=x \Rightarrow a/b-x=c \Rightarrow a/c$

$b=a\cdot k \quad x=a\cdot l \qquad a/a\cdot k-a\cdot l=c \qquad a/a\cdot(k-l)=c$

Úl. č. 3

$$3\cdot\binom{n}{2}=\binom{n+4}{2}$$

$$\frac{3n!}{2!(n-2)!}=\frac{(n+4)!}{2!(n+2)!}$$

$$\frac{3n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{2!}\cdot\cancel{(n-2)!}}=\frac{(n+4)\cdot(n+3)\cdot\cancel{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{2!}\,\cancel{(n+2)(n+1)n}\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}$$

$$3n(n-1)=(n+4)\cdot(n+3)$$

$$3n^2-3n=n^2+7n+12$$

$$2n^2-10n-12=0$$

$$n^2-5n-6=0$$

$$(n-6)\cdot(n+1)=0$$

$n=6 \qquad \cancel{n=-1} \qquad n>k$

Zadanie 8.

úloha č. 2

b) $\forall a,b,c \in N: a/b \wedge a/(b-c) \Rightarrow a/c \Rightarrow$

$\Rightarrow b = k\cdot a \wedge b-c = l\cdot a \Rightarrow c = z\cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow k\cdot a - c = l\cdot a \Rightarrow c = z\cdot a \Rightarrow c = a\cdot k - a l \Rightarrow c = z a \Rightarrow$

$\Rightarrow c = a(k-l) \Rightarrow c = z\cdot a$

$(k-l) = z \in N$

úloha. č. 3

$m+4 \quad 3C(2; m+4)$

$C(2;m) = x \qquad C(2;m) = \dfrac{C(2;m+4)}{3}$

$C(2;m+4) = 3x \qquad \dfrac{m(m+1)}{2} = \dfrac{(m+4)(m+5)}{6}$

$3m^2 + 3m = m^2 + 9m + 20$

$2m^2 - 6m - 20 = 0$

$m^2 - 3m - 10 = 0$

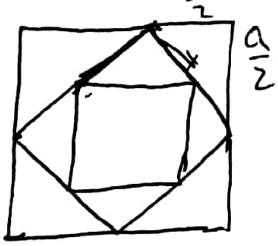
$(m-5)(m+2) = 0$

$m = 5$ //

$m \in N \quad m \neq -2$

Zadanie č. 9

úloha. č. 2



$x^2 = \dfrac{a^2 + a^2}{4} \qquad q = \dfrac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{a}{1}}$

$x^2 = \dfrac{1}{2}a^2$

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \qquad q = \dfrac{\sqrt{2}a}{2a}$

$q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$o_i = 4\cdot a_i \qquad q = \dfrac{2\sqrt{2}a_i}{4a_i}$

$o_{i+1} = 2\sqrt{2}a_i$

$q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$S = a^2 \quad q^2 = \dfrac{1}{2} = q$ – postupnosti S

úloha č. 3

$q \in R$

$r: y = x + q$ dotyčnica

ku $k: x^2 + y^2 - 10x - 12y + 53 = 0$

$k: (x-5)^2 + (y-6)^2 = -53 + 25 + 36$

$k: (x-5)^2 + (y-6)^2 = 8$

$v(r; S) = r \quad S = [5; 6]$

$$v = \frac{|-5+6-q|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$$

$v = |1 - q| = \sqrt{16}$

$v = |1 - q| = \sqrt{16}$

$q_1 = 1 + \sqrt{16} \quad q_1 = 1 + 4 = 5$

$q_2 = 1 - \sqrt{16} \quad q_2 = 1 - 4 = -3$

Zadanie č. 10

úloha č. 2

a) $\forall a, b, c \in N: a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(bx + yc) \quad x, y \in Z$

$b = k \cdot a \wedge c = l \cdot a \Rightarrow (bx + yc) = t \cdot a$

$-\,||\,- \Rightarrow (k \cdot ax + l \cdot ay) = t \cdot a \quad t \in Z$

$a(kx + ly) = t \cdot a$

$kx + ly = t \in Z$

b) $\forall x, y \in R^+: (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

$(x+y)\left(\frac{y+x}{xy}\right) \geq 4$

$\frac{(x+y)^2}{xy} - 4 \geq 0 \qquad \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{xy} \geq 0$

$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \geq 0 \qquad \frac{(x-y)^2}{(xy)} \geq 0$

$\to \oplus$

$\to \oplus$

Zadanie 9

$f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ak $a=0$ a $d=0$ nepriama úmernosť – je to druh lin. lom.

$= \frac{b}{cx} = \frac{k}{x}$

asymptoty: $y: \frac{bc}{ce}$; $-\frac{a}{c}$

$S = [-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}]$ $x = -\frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$

Úloha 1

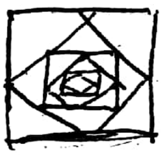
Uveďte rovnicu nepriamej úmernosti, lineárnej lomenej funkcie a vysvetlite ich vzájomný vzťah.

Úloha 2

Uvažujme o postupnosti štvorcov : štvorec $A_2B_2C_2D_2$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_1B_1C_1D_1$, štvorec $A_3B_3C_3D_3$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_2B_2C_2D_2$, atď.

Označme o_i obvod štvorca $A_iB_iC_iD_i$, s_i obsah štvorca $A_iB_iC_iD_i$. Dokážte, že postupnosti

$\{o_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú geometrické a určte ich kvocient.



$o_1 = 4a$

$o_2 = 4 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$o_3 = 4 \cdot \frac{a}{2} = 2a$

$o_4 = a\sqrt{2}$

$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|A_2B_2|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

$x^2 = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$S_1 = a^2$

$S_2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

$S_3 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$

$y = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2a^2}{16} = \frac{a^2}{8}$

$q = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Úloha 3

Pre ktoré hodnoty parametra $q \in R$ je priamka r: $y = x + q$ dotyčnicou ku kružnici k: $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 53 = 0$?

$x^2 + (x+q)^2 - 10x - 12(x+q) + 53 = 0$

$x^2 + x^2 + 2xq + q^2 - 10x - 12x - 12q + 53 = 0$

$2x^2 + x \cdot (2q - 22) + q^2 - 12q + 53 = 0$

$D = (2q-22)^2 - 8(q^2 - 12q + 53)$

$= 4q^2 - 88q + 484 - 8q^2 + 96q - 424$

$-4q^2 + 8q + 60$

$q^2 - 2q - 15$

$D = 4 + 60$

$64 \quad \sqrt{D} = 8$

$q_1, q_2 = \frac{2 \pm 8}{2}$; $q_1 = 5$, $q_2 = -3$

$q = 5$ a -3

Scanned by CamScanner

9) Nepriama úmernosť a lin. lom. fcia

Nepriama úmernosť

· tvar fcie: $y = \frac{k}{x}$

· grafom je hyperbola (ak $k>0 \Rightarrow$ 1., 3. kvadrant, ak $k<0 \Rightarrow$ 2., 4. kvadrant)

Lineárna lomená fcia

· tvar fcie: $y=\frac{ax+c}{bx+d}$, $a,b,c,d \in R$, $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$

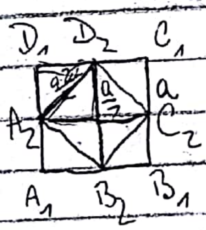
· grafom je hyperbola

· funkciu možno upraviť na tvar $y-n=\frac{k}{x-m}$; $S[m,n]$ - stred hyperboly

$x=m$, $y=n$ - asymptoty.

Lineárna lomená fcia je vlastne nepriama úmernosť s posunutím.

Ul. č. 2



$a \quad \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \frac{a}{2}$

$\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \quad q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\{o_i\}_{i=1}^{\infty} = \{4a_i\}_{i=1}^{\infty} \quad q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$4a \quad 2\cdot a\cdot\sqrt{2} \quad 2a$

$\frac{a\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot \overset{2}{\cancel{4}} = 2a\sqrt{2}$

$\cancel{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 2a$

$\{S_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i^2\}_{i=1}^{\infty} \quad q=\frac{1}{2} \quad \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

$a^2 \quad \frac{a^2}{2} \quad \frac{a^2}{4} \quad \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}$

Úl. č. 3:

$$x^2+y^2-10x-12y+53=0$$
$$y=x+q$$

$D=0$

↳ dotyčnica

$$x^2+(x+q)^2-10x-12\cdot(x+q)+53=0$$
$$x^2+x^2+2xq+q^2-10x-12x-12q+53=0$$
$$2x^2+(2q-22)\cdot x+q^2-12q+53=0$$
$$D=(2q-22)^2-4\cdot 2\cdot(q^2-12q+53)$$
$$0=4q^2-88q+484-8q^2+96q-424$$
$$0=-4q^2+8q+60$$
$$0=q^2-2q-15$$
$$0=(q-5)\cdot(q+3)$$
$$q_1=5 \qquad q_2=-3$$

Zadanie 10

ex. funkcia je určená $f: y = a^x$ pričom $D(f) = R^+ - \{1\}$ - exponenciálna

log funkcia je $f: y = \log_a x$ - logaritmická funkcia

$y = x$

Úloha 1

Definujte exponenciálnu a logaritmickú funkciu, pomocou grafov vysvetlite ich vlastnosti a vzťah inverznosti.

Úloha 2

Dokážte, že a) $\forall a,b,c \in N: \ a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(bx+yc) \qquad x,y \in Z$

b) $\forall x,y, \in R^+: \ (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$

a) $b = a k \wedge c = a.l \Rightarrow bx + cy = akx + aly \Rightarrow a(kx + ly) \Rightarrow$

$c / an + bn$ ✓

b) $\frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 \geq 4$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} \geq \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$

Úloha 3

V rovnobežníku je súčet strán a + b = 25, uhol pri vrchole B je $\beta = 60^\circ$, dĺžka uhlopriečky AC je $5\sqrt{7}$. Vypočítajte dĺžky strán rovnobežníka a jeho obsah.

Úl. 2 a) $a/b \Rightarrow b = ak \qquad a/c \Rightarrow c = al$

$$a/(bx+cy) \Rightarrow a/(akx+aly) \Rightarrow a/a\cdot(kx+ly)$$

b) $(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4 \qquad x;y \in R^+$

$$(x+y)\cdot\left(\frac{x+y}{xy}\right) \geq 4$$

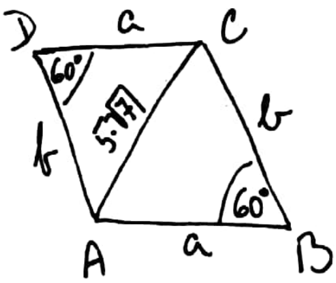
$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

$$x^2+2xy+y^2 \geq 4xy$$

$$x^2-2xy+y^2 \geq 0$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Úl. 3



$$a+b=25$$

$$a=25-b$$

$$(5\cdot\sqrt{7})^2 = (25-b)^2+b^2-\cancel{2}\cdot(25-b)\cdot b\cdot \overset{\frac{1}{2}}{\cos 60^\circ}$$

$$25\cdot 7 = 625-50b+b^2+b^2-25b+b^2$$

$$0 = 3b^2-75b+450$$

$$0 = b^2-25+150$$

$$0=(b-15)\cdot(b-10)$$

$$b_1 = 15 \qquad b_2 = 10$$

$$a_1 = 10 \qquad a_2 = 15$$

$$S = \cancel{2}\cdot\frac{a\cdot b\cdot \sin 60^\circ}{\cancel{2}}$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 150$$

$$\underline{\underline{S = 75}}$$

Scanned by CamScanner

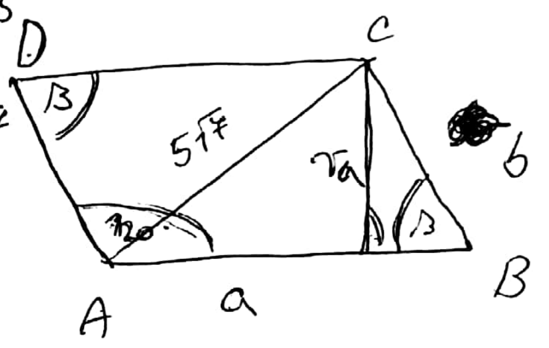
Zadanie 10.

úloha č. 3

$a+b=25$

$\beta = 60°$

$AC = 5\sqrt{7}$



$\cos\beta = \frac{v_a}{b}$

$v_a = b \cdot \cos\beta$

$\cancel{\cos\beta = \frac{a^2+b^2-u_c^2}{2ab}}$

$\cancel{\cos 60 = \frac{a^2+b^2-25\cdot 7}{2ab}}$

$\cancel{\frac{1}{2} = \frac{(25-b)^2+b^2-175}{2(25-b)}}$

$\cancel{25-b = 625-50b+b^2+b^2-175}$

$\cancel{0 = 2b^2-49b+425}$

$\cancel{D = 2401} -$

$a+b=25$

$a = 25-b$

$u_c^2 = a^2+b^2-2ab\cos 60$

$175 = a^2+b^2-2ab\cdot\frac{1}{2}$

$175 = a^2+b^2-ab$

$175 = (25-b)^2+b^2-(25-b)\cdot b$

$175 = 625-50b+b^2+b^2-25b+b^2$

$3b^2-75b+450=0$

$D = 5625-5400$

$D = 225$

$b_{1,2} = \frac{75 \mp 15}{6}$

$b_1 = 15 \quad a_1 = 10$

$b_2 = 10 \quad a_2 = 15$

$S = a \cdot v_a$

$S = a \cdot b \cdot \cos\beta$

$S = 15 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$

$S = 75\ cm^2$

Scanned by CamScanner

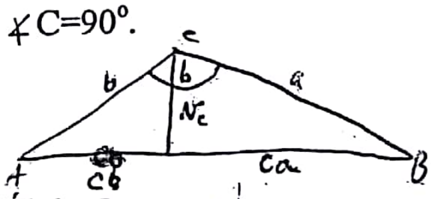
Zadanie 11

Úloha 1

Definujte aritmetickú a geometrickú postupnosť a uveďte konkrétny príklad oboch postupností. Popíšte základné vzťahy v týchto postupnostiach.

Úloha 2

Odvoďte Euklidove vety o výške v_c a odvesne a v trojuholníku ABC, ak $\measuredangle C=90°$.



$\frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \Rightarrow v_c^2 = c_a \cdot c_b$

$c_a \cdot c_b = v_c^2$

$a^2 = c_a^2 + v_c^2$

$a^2 = c_a^2 + c_a \cdot c_b$

$a^2 = c_a \cdot (c_a + c_b)$

$\boxed{a^2 = c_a \cdot c}$

Úloha 3

a) Daná je základná množina Z a jej podmnožiny A, B, C:

$A = \{n \in N;\ 3|n \wedge n-10 < 0\}$ $\{3, 6, 9\}$

$B = \{n \in N; |n-4| < 3\}$ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{n \in N;\ n^2 - 2n - 3 \leq 0\}$ $= \{1, 2, 3\}$

$Z = \{n \in N;\ n \leq 10\}$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$(A \cup B) = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

$(A \cup B) \cap C = \{2, 3\}$

Určte vymenovaním prvkov množinu $[(A \cup B) \cap C]'_Z$ $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) Znázornite pomocou Vennovych diagramov množinu $(A \cup B) - (B \cap C'_U)$.

Geometrická postupnosť

Postupnosť sa nazýva geometrická $\exists q \in R$ (kvocient), taký že $\forall n \in N: a_{n+1} = a_n \cdot q$ $(q \neq 0)$

1, vzťah pre n-tý člen

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$ $\quad a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

2, vzťah pre ľubovoľné členy

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{a_1 \cdot q^{r-1}}{a_1 \cdot q^{s-1}} = q^{r-s}$$

3, vzťah pre súčet n-členov

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \cdot n \quad q = 1$$

4, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + a_{n+1}}$ => geometrický priemer

Aritmetická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická ak $\exists d \in R: \forall n \in N$:
$a_{n+1} = a_n + d$ d=diferencia

1, vzťah pre n-tý člen

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + 2d \qquad a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$a_4 = a_1 + 3d$$

2, vzťah pre 2 rôzne členy

$$a_r = a_1 \cdot (r-1) d$$
$$a_s = a_1 - (s-1) \cdot d$$
$$a_r - a_s = (r-1)\cdot d - (s-1)\cdot d$$
$$a_r - a_s = (r-s)\cdot d$$

3, súčet n-členov aritmetickej postupnosti

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

4, $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ => každý člen aritmetickej postupnosti je aritmetickým priemerom predchádzajúceho čísla a nasledujúceho

5 7 9

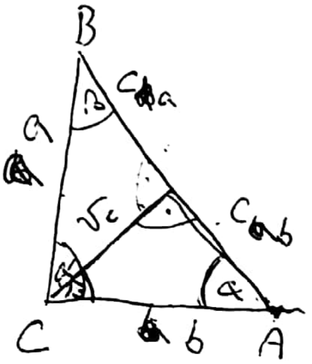
$5 + 9 = 14 : 2 = \underline{\underline{7}}$

$d = 2$
$a_1 = 1$
$a_2 = 1 + 2 = 3$
$a_3 = 1\cancel{5}$
7

$a_1 = 1$
$a = 3$
3, 4,

Zadanie č. 11

úloha číslo 2.



$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\sin\alpha = \frac{c_a}{a}$ $\qquad \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a} \quad a^2 = c \cdot c_a$

$tg\,\alpha = \frac{v_c}{c_b}$

$tg\,\alpha = \frac{c_a}{v_c}$ $\qquad \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \quad v_c^2 = c_b \cdot c_a$

úloha č. 3 $\qquad n \leq 10$

$A = \{n \in N;\ 3|n \wedge n-10<0\} = \{3; 6; 9\}$

$B = \{n \in N;\ |n-4|<3\} = \{2;3;4;5;6\}$

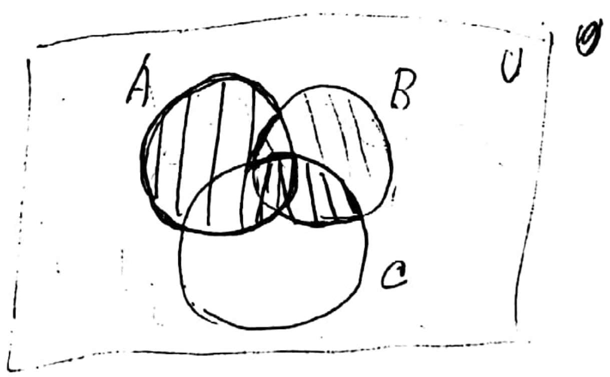
$C = \{n \in N;\ n^2-2n-3 \leq 0\} = \{1;2;3\}$ $\qquad A \cup B = \{2;3;4;5;6;9\}$

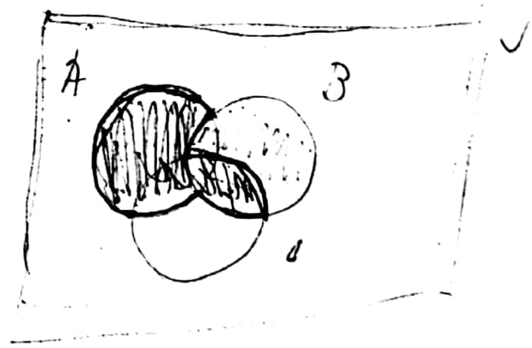
$(n-3)(n+1) \leq 0$

$Z = \{n \in N;\ n \leq 10\} = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ $\qquad (A \cup B) \cap C = \{2;3\}$

a) $[(A \cup B) \cap C]'_Z = \{1;4;5;6;7;8;9;10\}$

b) venovými diagramami znázornite $(A \cup B) - (B \cap C'_U)$



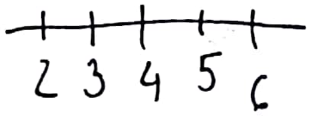


Úl. 3

$A = \{n \in N;\ 3/n \wedge n - 10 < 0\}$ $\quad n - 10 < 0$ $\quad n < 10$ $\quad 3/n$

$A = \{3; 6; 9\}$

$B = \{n \in N;\ |n-4| < 3\}$



$B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

$C = \{n \in N;\ n^2 - 2n - 3 \leq 0\}$ $\quad n^2 - 2n - 3 \leq 0$

$(n-3)\cdot(n+1) \leq 0$

$C = \{1; 2; 3\}$

$Z = \{n \in N;\ n \leq 10\}$ $\quad Z = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

a) $[(A \cup B) \cap C]'_Z$

$A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 9\}$

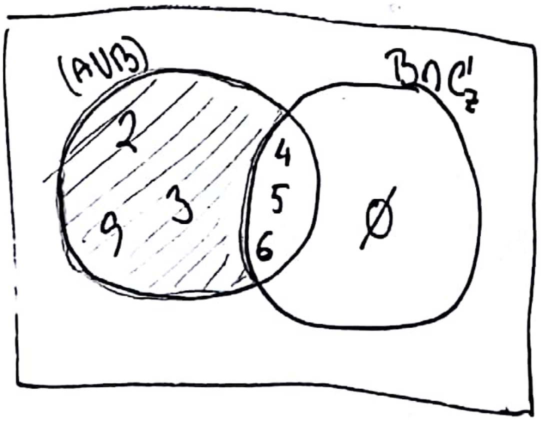
$(A \cup B) \cap C = \{2; 3\}$

$[(A \cup B) \cap C]'_Z = \{1; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

b) $(A \cup B) - (B \cap C'_Z)$

$B \cap C'_Z = \{4; 5; 6\}$ $\quad C'_Z = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$(A \cup B) - (B \cap C'_Z) = \{2; 3; 9\}$



11) Ar. a geom. postupnosť

↗ množina izolovaných bodov

Postupnosť = f-cia, ktorej D je $\mathbb{N}$ alebo $M \subset \mathbb{N}$ typu $M = \{1,2,3,\dots,k\}$

a) Konečná = $\{1,2,3,\dots,k\}$ $\quad \{a_n\}_{n=1}^{k}$

b) Nekonečná: $\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ $\quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

· zápis - vymenovaním prvkov

- vzorcom pre n-tý člen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- rekurentne $a_{n+1} = ka_n + b$

Aritmetická postupnosť

· $\exists d \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} = a_n + d$, d-diferencia

$$a_n = \{a_1 + (n-1)d\}_{n=1}^{\infty}$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 9$

$a_4 + a_5 + a_6 = 72$

$a_5 + a_{11} = -0{,}2$

$a_4 + a_6 = 2{,}6$

Pr: $\{2n + 18\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = 20$, $a_2 = 22$, $a_3 = 24$

Geometrická postupnosť

$\exists q \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, q-kvocient

$a_1 - a_2 + a_3 = 9$

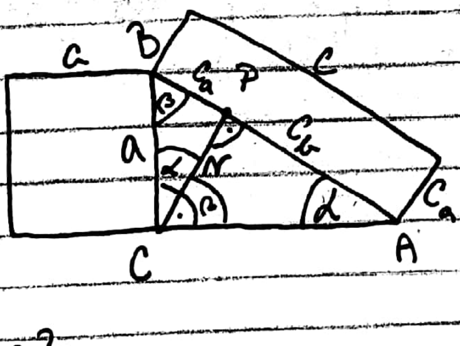
$a_4 - a_5 + a_6 = 72$

a) $s_n = a_1 \cdot n$, $q = 1$

b) $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Pr: $\{3^{n-2}\}_{n=1}^{\infty}$

Úl. 2



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c_b} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{c_a}{v}$$

$$\frac{v}{c_b} = \frac{c_a}{v}$$

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$

$$a^2 = v^2 + c_a^2$$

$$a^2 = c_a \cdot c_b + c_a^2$$

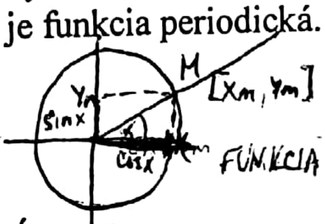
$$a^2 = c_a \cdot (c_b + c_a)$$

$$a^2 = c_a \cdot c$$

Zadanie 12

Úloha 1

Na jednotkovej kružnici definujte funkcie sinx, cosx . Pomocou ich grafov vymenujte vlastnosti týchto funkcií. Na príklade týchto funkcií vysvetlite, kedy je funkcia periodická.



sinx

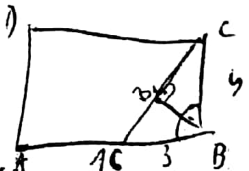
nech $x \in R$ (uhol)
bod $M[x_m, y_m]$ je bod na jednotkovej kružnici priradený k číslu x
FUNKCIA $y = \sin x$ priradí číslu x y-ovú súradnicu bodu M teda y_m

cosx

→ Funkcia $y = \cos$ priradí číslu $x \rightarrow x_m$ (x-ovú súradnicu bodu M)

Úloha 2

Daný je obdĺžnik ABCD, v ktorom a = 6, b = 4, |SC| = 5, kde S je stred strany AB. Dokážte, že pomer $|SB_1| : |B_1C| = 9 : 16$, kde B_1 je päta kolmice zostrojená z vrcholu B na úsečku SC.

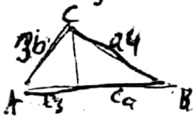


$|SB_1| : |B_1C| = 9:16$

$a^2 = c \cdot c_a$
$9 = 5 \cdot c_a$
$c_a = \frac{9}{5}$

$b^2 = c \cdot c_b$
$16 = 5c_b$
$c_b = \frac{16}{5}$

$\frac{\frac{9}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$



Úloha 3

1) Nech výroky A, B sú pravdivé a výrok C je nepravdivý. Zistite, ktorý zložený výrok je pravdivý: a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B')$ – 0 nepravdivý
b) $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$ → 1

2) Rozhodnite o pravdivosti výrokov a vyjadrite ich negáciu
a) $\forall a,b \in R: \ a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ → nepravdivý (záporné čísla)
b) $\forall a,b \in R^+ : a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ → pravdivý

Negácia:
a) $(a=b \Leftrightarrow a^2=b^2)' = [(a=b \wedge a^2 \neq b^2) \vee (a^2=b^2 \wedge a \neq b)]$
b) $(a<b \Rightarrow a^2<b^2)' = (a<b \Rightarrow a^2 \geq b^2)$

12 sin, cos

Uhol - prienik dvoch polrovín, charakterizovaný polpriamkami $\vec{VA}$, $\vec{VB}$

Oblúková miera - $\pi = 180°$; ~~začiat~~

- ~~bod~~, začiatok, B je na pravej x-ovej poloosi

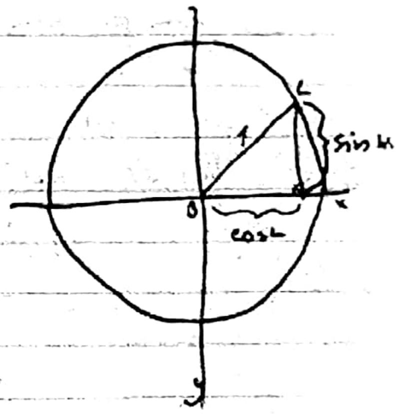
Jednotková kružnica - $k([0,0], r=1)$

fcia sínus nazýv. časť fcie, ktorej patria $\forall$ usporiad. dvojice $[u, y^L]$, $u \in \mathbb{R}$

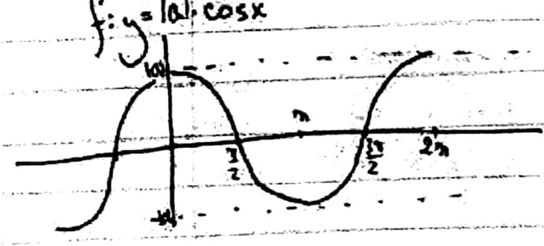
$\sin u = y^L$

$\cos u = x^L$

fcia kosínus - " - $[u, x^L]$



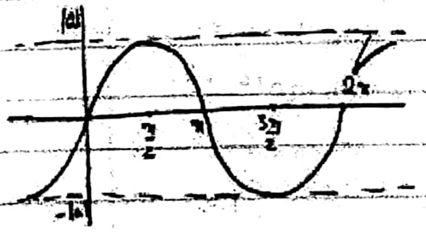
$f: y = |a| \cdot \cos x$



1. párna
2. rast $(\pi, 2\pi) + 2k\pi$
   kles. $(0, \pi) + 2k\pi$
3. ohr. shora $y = |a|$
   zdola $y = -|a|$
4. extrémy max $x = 2k\pi$
   min $x = \pi + 2k\pi$
5. Obor $D(f) = \mathbb{R}$
   $H(f) = \langle -|a|, |a| \rangle$

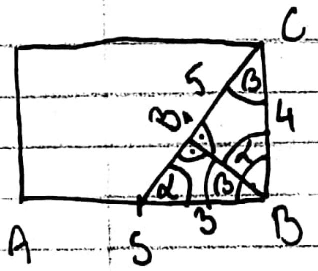
+kladné, záp. kvadranty

$f: y = |a| \sin x$



1. nepárna
2. rast $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) + 2k\pi$
   klesanie $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
3. ohr. y = - " -
5. Obor - " -

Úl. 2



$|SB_1| : |B_1C| = 9 : 16$

$|SB_1| = \frac{9}{5}$ $\qquad |B_1C| = \frac{16}{5}$

$\sin \alpha = \frac{4}{5}$ $\qquad \sin \beta = \frac{3}{5}$

$\frac{\frac{9}{5}}{3} = \sin \beta$ $\qquad \frac{\frac{16}{5}}{4} = \sin \alpha$

$\frac{\frac{9}{5}}{3} = \frac{3}{5}$ $\qquad \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}$

$\frac{\cancel{5} \cdot 9}{\cancel{5}} = 9$ $\qquad \frac{\cancel{5} \cdot 16}{\cancel{5}} = 16$

$9 = 9$ $\qquad 16 = 16$

Úl. 3

1) a)

A	B	C	B'	$A \Rightarrow B$	$A \wedge B'$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B')$
1	1	0	0	1	0	0

b)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$
1	1	0	1	1	1	0	1	1

2) a) $A = [a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2]$ 0

$A' = [(a \neq b \Rightarrow a^2 = b^2) \vee (a = b \Rightarrow a^2 \neq b^2)]$

b) $B = [a < b \Rightarrow a^2 < b^2]$ 1

$B' = [a < b \wedge a^2 > b^2]$

Gymnázium J. M. Hurbana v Čadci

MATEMATIKA

Zadanie 13

stredná priečka: úsečka spájajúca stredy dvoch strán Δ

výška - úsečka ktorá je kolmá a končí v jednom z bodov

ťažnica: vrchol-stred → ťažnice = ťažisko

Úloha 1

Popíšte dôležité úsečky a ich vlastnosti v trojuholníku. Uveďte vzťahy medzi stranami a uhlami všeobecného trojuholníka.

v rovnostrannom Δ $v_a = v_b = v_c$

→ výšky na stranách majú rovnakú veľkosť

v pravouhlom - každá odvesna je výškou na druhú odvesnu

v tupouhlom niektoré výšky ležia mimo Δ

Úloha 2

Dokážte, že postupnosť $\left\{\dfrac{5n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna a zhora ohraničená.

Úloha 3

Určte a, $b \in R$ tak, aby graf funkcie f : $y = a.\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) + b$ prechádzal bodmi A=[2π; 8] , B=[0; 2] . Ako musíte zmeniť hodnotu čísla b, aby graf funkcie f prechádzal bodom O=[0,0] ?

$8 = a \cdot \sin(180° - 90°) + b$

$2 = a \cdot \sin(-90°) + b$

$8 = 2a + 2$

$6 = 2a$

$\boxed{a = 3}$

$2 + a = b$

$2 + 3 = \boxed{5}$

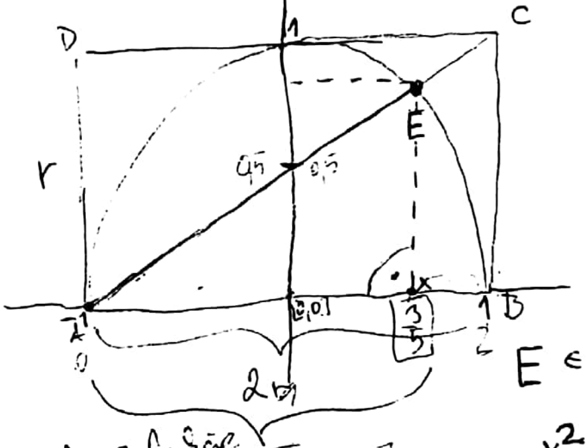
10

Scanned by CamScanner

Úloha 2:

Zvolíme si $r = 1$

$1^2 + 2^2 = \sqrt{5} \Rightarrow$ uhlopriečka



kružnica: $k: x^2 + y^2 = 1$

$f: y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ — rez pretína y os!

$E \in (k \cap f) \quad x^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow$ prienik kružnice s funkciou

$x^2 + \frac{x^2}{4} + 2\frac{x}{4} + \frac{1}{4} = 1 \,/ \cdot 4$

$4x^2 + x^2 + 2x + 1 = 4$

$5x^2 + 2x - 3 = 0$

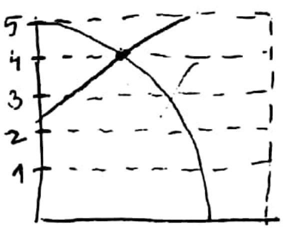
$D = 4 + 60 = 64$

$\sqrt{D} = \sqrt{64} = \boxed{8}$

predpis funkcie

$x = -1$, $y = 0$
$x = 0$, $y = \frac{1}{2}$
$x = 1$, $y = 1$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{10} \Rightarrow \boxed{-1}, \boxed{\frac{3}{5}}$



$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\frac{3}{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$!?

$|AE| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{3{,}2}$

$|AC| = \sqrt{5}$

$\frac{|AE|}{|AC|} = 0{,}8!$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \quad \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}$

AE =

$1 + \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{5} \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

$\frac{8}{5} = |AE|$

$|AX| = \frac{8}{5}$

$\frac{8}{5}$ do rovnice $y = \frac{\frac{3}{5}}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{4}{5}$

$|AE| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$

$AE = \sqrt{3{,}2}$

$AC = \sqrt{5}$

2,23

$\sqrt{5} - \sqrt{3{,}2} \Rightarrow$ 2,447

13) Trojuholník

- prienik 3 polrovín, hraničné priamky ho definujú

1. Strany - hraničné priamky
2. Výšky - výška je kolmica, spustená cez ~~bod~~ vrchol na protiľahlú stranu △
   - ~~nemusia~~ ich priesečník (ortocentrum) nemusí patriť do △ (tupouhlé)
3. Ťažnice - ~~p~~ úsečka, prechádzajúca ~~zo~~ vrcholu △ do stredu protiľahlej strany
   - navzájom sa pretínajú v pomere 2:1 v ťažisku
   - ~~p~~ v prípade ~~A~~ rovnoramenného △ sa jedna z výšok rovná ťažnici, u rovnostranného △ všetky
4. Stredné priečky - úsečka, prepájajúca stredy strán, ktorá nemá spoločný bod
   - má polovičnú dĺžku ako strana, ~~ktorej sa nedotýka~~ a je s ňou rovnobežná

$\alpha+\beta+\gamma=180$, $a+b>c\ \dots$, oproti najväčšiemu ∢ je najdlhšia strana

Sínusová veta: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$; R-polomer opísaného △

Kosínusová veta: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$

Úl. 2 $\left\{\frac{5n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \frac{4}{3}\quad \frac{9}{4}\quad \frac{14}{5}\quad \frac{19}{6}\ \dots$

je rastúca

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=5$ zhora ohraničená č. 5

Úl. 3 $f: y=a\cdot\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+b$ $\qquad A=[2\pi;8]\quad B=[0;2]$

$8=a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+b$

$8=a+b$

$8-a=b$

$2=a\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+8-a$

$2=-2a+8$

$-6=-2a$

$a=3$

$b=5$

$0=3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+b$

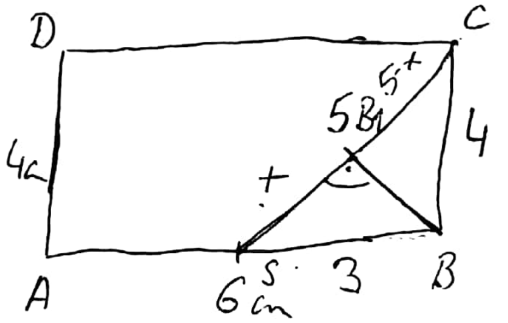
$0=-3+b$

$b=3$

Zadanie č. 12

úloha č. 2

$|SB_1| : |B_1C| = 9:16$ - dokázať



$9 = x \cdot 5$

$x = \frac{9}{5}$ $\quad |SB_1| = \frac{9}{5}$

$\frac{|SB_1|}{|B_1C|} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{9 \cdot 5}{16 \cdot 5} = \frac{9}{16}$ $\quad |B_1C| = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5}$

úloha č. 3

1) $A, B = 1 \quad C = 0$

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B')$ $\quad (1 \Rightarrow 1) \Leftrightarrow (1 \wedge 0)$

$1 \quad 0$

$0 / 1$

b) $[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$

$[1 \wedge (1 \vee 0)] \Leftrightarrow [(1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0)]$

$1 \wedge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \vee 0$

$0 \quad\quad 1$

$0 / 1$

2) a) $\forall a, b \in R: a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ - nepravdivý výrok

a') $\exists a, b \in R$ $\quad (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$

$(a = b \wedge a^2 \neq b^2) \vee (a \neq b \wedge a^2 = b^2)$

b) $\forall a, b \in R^+: a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ pravdivý výrok

b') $\exists a, b \in R^+: \; a < b \wedge a^2 \geq b^2$

Scanned by CamScanner

Zadanie 13

úloha č. 2

$\left\{\frac{5n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna a zhora ohraničená

$a_n > a_{n+1}$ $\quad \frac{5n-1}{n+2} > \frac{5n+5-1}{n+3}$

$(5n-1)(n+3) > (5n+4)(n+2)$

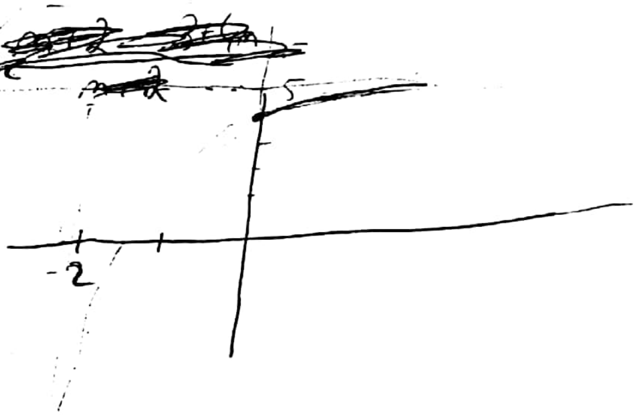
$5n^2 + 15n - n - 3 > 5n^2 + 10n + 4n + 8$

$14n - 3 > 14n + 8$

$-3 > 8$

$\frac{5n-1}{n+2} =$

$= \frac{5(n+2) - 11}{n+2} = 5 - \frac{11}{n+2}$



$5 \geqslant \frac{5n-1}{n+2}$ $\quad 5n+10 \geqslant 5n-1$

$10 \geqslant -1$

$4 \geqslant \frac{5n-1}{n+2}$ $\quad 4n+8 \geqslant 5n-1$

$9 \geqslant n$

úloha č. 3

$a, b \in R \quad f: y = a\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + b$

$A \in f = [2\pi, 8]$ $\quad 8 = a\sin\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + b \quad 8 = a\sin\frac{\pi}{2} + b \quad 8 = a + b$

$B \in f = [0; 2]$ $\quad 2 = a\sin\left(\frac{0}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + b \quad 2 = -a + b$

$10 = 2b \quad b = 5$

$a = 3$

ako musíme zmeniť b aby graf prechádzal O[0;0]

$f: y = 3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 5$

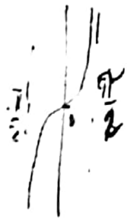
$0 = 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b \quad 0 = -3 + b$

$b = 3$

Scanned by CamScanner

Zadanie 14

- grafom je tangentoida



Úloha 1

Definujte funkciu tg x aj s použitím jednotkovej kružnice. Pomocou grafu popíšte jej vlastnosti.

Úloha 2

Je daný obdĺžnik ABCD, |AB| = 2r, |AD| = r. Nad priemerom úsečky AB je opísaná polkružnica. Dokážte, že pätina uhlopriečky obdĺžnika neleží v danej polkružnici.

Úloha 3

Pri zisťovaní veku poslucháčov jednej študijnej skupiny na vysokej škole boli zistené tieto hodnoty: 18, 19, 18, 18, 19, 18, 20, 21, 20, 21, 22, 22, 18, 18, 18, 19, 19, 18, 19, 20. Vypočítajte priemerný vek poslucháčov, modus, medián. Výsledky znázornite graficky.

18 - 8
19 - 5
20 - 3
21 - 2
22 - 2

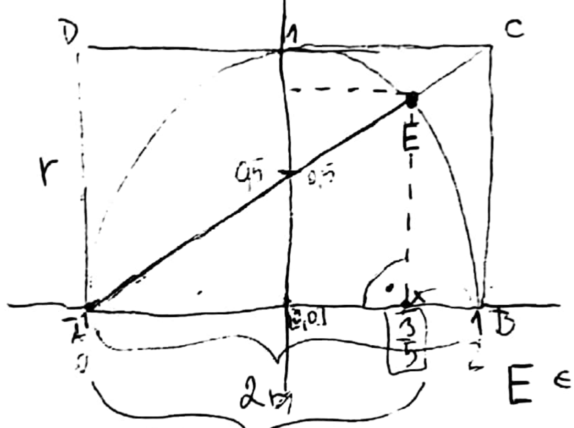
priemerný vek : 19,25 => $\frac{\text{spoč. všet}}{\text{počet ľudí}}$
modus : 18 - najčastejšie
medián 19 - stredná hodnota

$$\frac{19 + 19}{2}$$

Úloha 2:

Zvolíme si $r = 1$

$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}$ => uhlopriečka



kružnica: $k: x^2 + y^2 = 1$

$f: y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ — rez pretla y os!

$E \in (k \cap f) \quad x^2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ => pretnutie kružnice s funkciou

$x^2 + \frac{x^2}{4} + 2\frac{x}{4} + \frac{1}{4} = 1 / \cdot 4$

predpis funkcie
[a]ab
~~y = ax + b~~
$-\cancel{\frac{1}{2}ax + b}$

$x = -1$	$y = 0$
$x = 0$	$y = \frac{1}{2}$
$x = 1$	$y = 1$

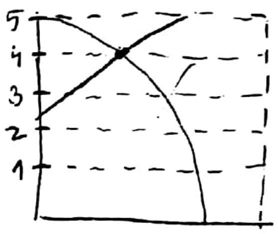
$4x^2 + x^2 + 2x + 1 = 4$

$5x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$\sqrt{D} = \sqrt{64} = \boxed{8}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{10} \Rightarrow \boxed{-1}, \boxed{\frac{3}{5}}$



$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\frac{3}{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$!?

$|AE| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{3{,}2}$

$|AC| = \sqrt{5}$

$\frac{|AE|}{|AC|} = 0{,}8!$

AE =

$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$ ... $\frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}$

$\boxed{\frac{2}{5}}$

$1 + \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{5}\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

$\frac{8}{5} = |AE|$

$|AX| = \frac{8}{5}$

$\frac{8}{5}$ do rovnice $y = \frac{\frac{3}{5}}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{4}{5}$

$|AE| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$

$AE = \sqrt{3{,}2}$

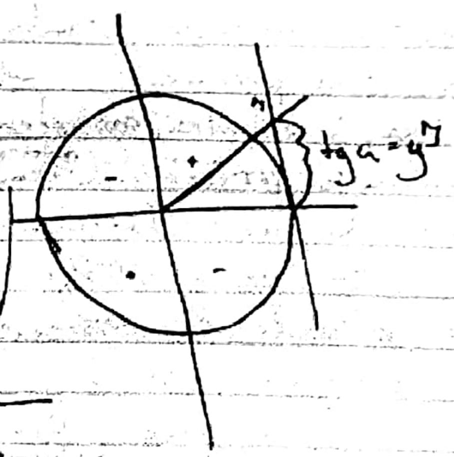
$AC = \sqrt{5}$

2,23

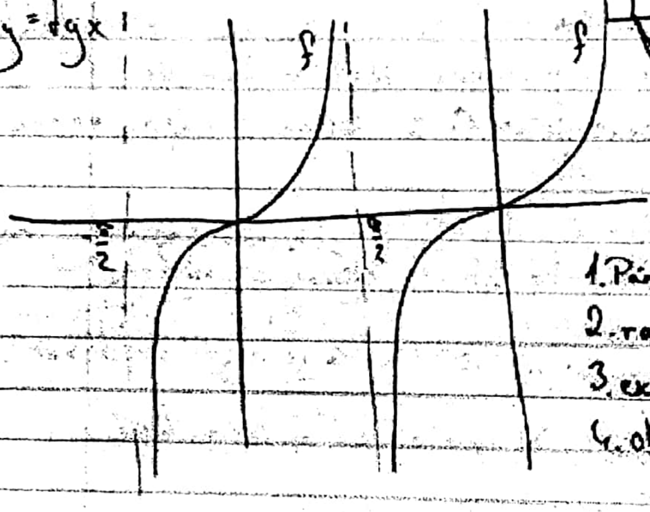
$\sqrt{5} - \sqrt{3{,}2} \Rightarrow 0{,}447$

(14) Tangens

- ~~F~~ časť fcie $y = \frac{\sin x}{\cos x}$
- ~~V~~ časť fcie, ktorej patria ~~F~~ usp. dvojice $[a, y^M]$, $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$



$f: y = tg\,x$

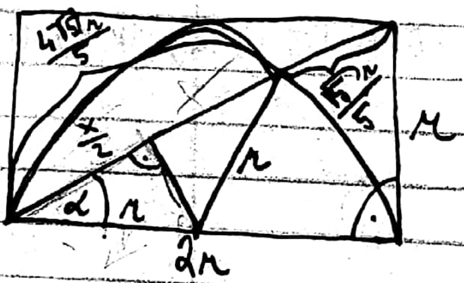


1. Párnosť - nepárna
2. rast ~~neD~~ na periode
3. extrémy $\emptyset$
4. ohran. $\emptyset$
5. Obory

$D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

$H(f) = \mathbb{R}$

Úl. č. 2



$u = \sqrt{5} \cdot r$

$\frac{u}{5} = \frac{\sqrt{5}r}{5}$

$\cos\alpha = \frac{2r}{\sqrt{5}r} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{r} = \frac{x}{2r}$

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{x}{2r}$

$\frac{4r}{\sqrt{5}} = x$

$\frac{4r}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\cdot\sqrt{5}r}{5}$

Scanned by CamScanner

Úl. 3

18 19 18 18 19 18 20 21 20 21 22 22 18 18 18 19 19 18 19 20

8.18 5.19 3.20 2.21 2.22 $n = 20$

18 18 18 18 18 18 18 18 19 $\boxed{19\ 19}$ 19 19 20 20 20 21 21 22 22

$mod(x) = 18$ $med(x) = 19$

$$\overline{x} = \frac{8 \cdot 18 + 5 \cdot 19 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 2 \cdot 22}{20} = 19{,}25$$

Zadanie 15

a, každé dve strany navzájom [illegible]

b,

c, každé dve susedné uhly navzájom [illegible]

Úloha 1

Klasifikujte mnohouholníky podľa:

a) veľkosti vnútorných uhlov

a) súvisu s kružnicou opísanou, vpísanou mnohouholníku.

b) veľkosti strán

Popíšte, ako by ste realizovali výpočet obsahu konvexného n-uholníka a uveďte vzťahy pre výpočet obsahu trojuholníka, známych štvoruholníkov a pravidelných n-uholníkov.

$s = \frac{a+b+c}{2}$

$S_\triangle : \frac{a \cdot v_a}{2}$; $\frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$; HERONOV VZOREC ⇒ $s = \frac{a+b+c}{2}$ .. $S = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$ $S = \frac{\alpha}{2}$

$S_\square = a \cdot b$

$S_\square = a \cdot v_a$

$S_n = n \cdot \frac{a \cdot \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}$

$v_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}$

$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$

$S_n = \frac{a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}}{2}$

Úloha 2

Pre členy aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$a_4 + a_7 + a_{10} = 15$, $a_5 + a_8 + a_{11} = 9$.

Zistite a dokážte, či existuje také k, aby $a_k = 0$ a také m, aby $a_m = 1$.

Úloha 3

a) Pre ktorú cifru g je číslo 68 036 540 547 80g 750 deliteľné 450? ⇒ 9, 5, 10

4! ... 750 je deliteľné 10 a 5, aby bolo 9 ⇒ cif. súč / 9!

b) Vyškrtnite z čísla 790 461 308 754 021 980 653 021 štyri číslice tak, aby novovzniknuté číslo bolo deliteľné 12 a bolo čo najmenšie.

~~7~~9~~0~~ 4~~6~~1

12

musí byť 3 a 4

cif. súč. / posledné dvojčíslie

15) Mnohouholníky

- uzavretá lomená čiara spolu s časťou roviny, ktorú obkolesuje
- prienik viacerých polrovín

a) podľa veľkosti uhlov · pravidelné, nepravidelné

Konvexné - všetky uhly $< 180°$ - spojnica $\forall$ 2 bodov patrí mnohouholníku

Nekonvexné - aspoň 1 uhol > 180

b) podľa kružníc

Tetivové - strany ~~vytvárajú~~ tvoria tetivy na opís. kružnici ~~(pravidelné, obdĺžnik, trojuholník)~~

Dotyčnicové - strany tvoria dotyčnice vpís. kružnici

c) podľa veľkosti strán

Pravidelné

Nepravidelné

Výpočet obsahu konvexného n-uholníka

- rozdeliť na malé časti ($\triangle$, $\square$, ...)

Heronov vzorec

$$S_\triangle = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\square} = a \cdot b$$

$$S_{\text{▱}} = a \cdot v_a$$

$$S_n = n \cdot \frac{a \cdot \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = v_a$$

Úl. č. 2

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 15$$
$$a_5 + a_8 + a_{11} = 9$$

$$a_1 + 3d + a_1 + 6d + a_1 + 9d = 15$$
$$a_1 + 4d + a_1 + 7d + a_1 + 10d = 9$$

$$3a_1 + 18d = 15 \quad / \cdot (-1)$$
$$3a_1 + 21d = 9$$

$$3d = -6$$
$$d = -2$$

$$3a_1 + 18 \cdot (-2) = 15$$
$$3a_1 = 51$$
$$a_1 = 17$$

$a_9 = 0$ neexistuje

$$a_n = a_1 - 2 \cdot (n-1)$$
$$1 = 17 - 2n + 2$$
$$2n = 18$$
$$n = 9$$

$$a_9 = 1$$

Zadanie č. 15

úloha č. 2

A. P.

$a_4 + a_7 + a_{10} = 15 \quad a_5 + a_8 + a_{11} = 9$

$k, m \in R \quad a_k = 0 \quad a_m = 1$

$a_1 + 3d + a_1 + 6d + a_1 + 9d = 15 \quad a_1 + 4d + a_1 + 7d + a_1 + 10d = 9$

$3a_1 + 18d = 15$ $\cancel{a_1 = 5 - 6d}$

$\cancel{a_1 + 6d = 5}$

$3a_1 = 15 - 18d$

$a_1 = 5 - 6d$

$a_1 = 17$

$3a_1 + 21d = 9$

$15 - 18d + 21d = 9$

$3d = -6$

$d = -2$

$a_k = 0 \quad a_1 + (k-1)d = 0$

$17 + (k-1)(-2) = 0$

$17 - 2k + 2 = 0$

$2k = 19 \quad k = \frac{19}{2}$ neexistuje

$a_m = 1$

$a_1 + (m-1)d = 1$

$17 - 2m + 2 = 1$

$2m = 18 \quad m = 9$

úloha č. 3

a) 68 036 540 547 80g 750 deliteľné 450

9/1/50 → 59,00 68 $g = 4$

b) 790 461 308 754 021 980 653 ~~02~~7 4 čísl. ce

/12

Scanned by CamScanner

Ul. č. 3

450 · 68 036 540 547 80g 750

$9 \cdot 50$

$3\cdot3 \quad 5 \cdot 10$

$5 \cdot 2$

$6+8+3+6+5+4+5+4+7+8+7+5$

$= 68$

2/ je párne

5/ končí 0

3/ ?

$6+8 = 14$

$g=1 \quad \Sigma 15 \quad 3/15$

$g=4 \quad \Sigma 9 \quad 3/9$

$g=7 \quad \Sigma 12 \quad 3/12$

~~7~~90 4~~6~~1 308 754 021 980 653 ~~0~~2 ~~1~~

$7+9+4+6+1+3+8+7+5+4+2+1+9+8+6+5+3+2$

$= 90$

4/32

12

$3 \cdot 4$

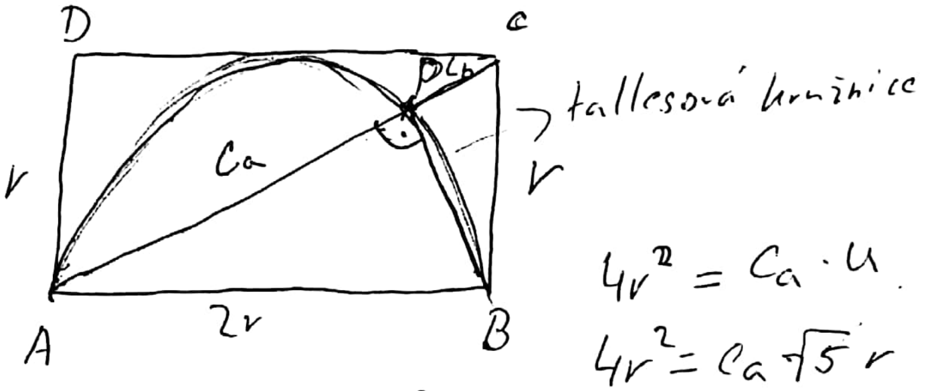
$90-15 = 75$

3/75

70 413 087 540 219 806 532

Zadanie č. 14.

úloha č. 2



$$u^2 = 4r^2 + r^2$$
$$u^2 = 5r^2$$
$$u = \sqrt{5}\,r$$

$$4r^2 = c_a \cdot u$$
$$4r^2 = c_a \sqrt{5}\,r$$
$$\frac{4r}{\sqrt{5}} = c_a$$

$$r^2 = c_b \sqrt{5}\,r$$
$$\frac{r}{\sqrt{5}} = c_b$$

$$\frac{c_b}{u} = \frac{\frac{r}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}r}{1}} = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5} \qquad c_b = \frac{1}{5}u \,//$$

úloha č. 3

18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 21, 22, 22

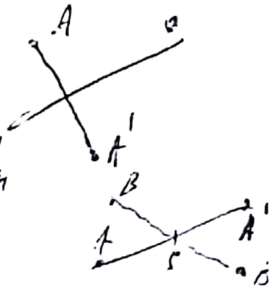
$$\bar{x} = \frac{8\cdot 18 + 5\cdot 19 + 3\cdot 20 + 2\cdot 21 + 2\cdot 22}{20} = 19{,}25$$

$\mathrm{mod}(x) = 18$

$\mathrm{med}(x) = 19$

Zadanie 16

Osová súmernosť je zobrazenie v rovine [illegible], ktorým [illegible] priradí [illegible] body
(štvorec, kruh, rovnostranný Δ, [illegible])
Stredová súmernosť je zobrazenie, ktoré bodu
S priradí [illegible] ~~a [illegible]~~



Úloha 1

Definujte osovú a stredovú súmernosť a popíšte ich vlastnosti. Uveďte príklady útvarov osovo a stredovo súmerných. Preveďte zobrazenie bodu a priamky v stredovej a osovej súmernosti a popíšte vzájomnú polohu vzoru a obrazu priamky.

Úloha 2

Dokážte, že dané tri čísla

a) $\sin 2x, \cos x, \frac{1}{2tgx}$, $x \in (0 ; \pi)$ tvoria tri nasledujúce členy geometrickej postupnosti $\Rightarrow q = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2tgx}}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}}{\cos x} = \frac{\cos x}{2\sin x\cos x} = \cancel{\ldots}$

b) log16, log8, log4 tvoria tri nasledujúce členy aritmetickej postupnosti

$d = \log 8 - \log 16 = \log 4 - \log 8$

$d = \log\frac{2}{8} = \log\frac{1}{2}$

Úloha 3

Riešte sústavu lineárnych rovníc vzhľadom na parameter $a \in R$. Určte, pre akú hodnotu parametra a sú oba korene sústavy kladné.

$3x + 2ay = 1$
$(3a - 1)x - ay = 1$

$3x + 2ay = 1$
~~$3ax - x - ay = 1$~~
$(3a-1)2x - 2ay = 2$
$3x + (3a-1)2x = 3$
$x + 6ax = 3 \quad x(6a+1) = 3$
$x = \frac{3}{6a+1}$

podmienka
$6a+1 = 0$
$6a = -1$
$\boxed{a = -\frac{1}{6}}$

$3\left(\frac{3}{6a+1}\right) + 2ay = 1$
$\frac{9}{6a+1} + 2ay = 1$
$9 + 12a^2y + 2ay = 6a + 1$
$12a^2y + 2ay + 9 = 6a + 1$
$y(12a^2 + 2a) = 6a - 8$
$y = \frac{2(6a-9)}{2a(6a+1)} = y \; \frac{3a-4}{6a+1}$

Zadanie č. 16

úloha č. 2

a) $\sin 2x, \cos x, \frac{1}{2\operatorname{tg}x}$ $x \in (0;\pi)$ G. P.

$$\frac{\cos x}{\sin 2x} = \frac{\frac{1}{2\operatorname{tg}x}}{\cos x}$$

$$\frac{\cos x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2\operatorname{tg}x\cos x} \qquad \frac{1}{2\sin x} = \frac{1}{2\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x} \qquad \frac{1}{2\sin x} = \frac{1}{2\sin x}$$

b) $\log 16, \log 8, \log 4$ A. P.

$$\log 8 - \log 16 = \log 4 - \log 8$$

$$\log\frac{8}{16} = \log\frac{4}{8} \qquad \log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{2}$$

úloha č. 3

$a \in R$ $x, y > 0$

$$3x + 2ay = 1 \qquad x = \frac{1-2ay}{3}$$

$$(3a-1)x - ay = 1$$

$$(3a-1)\left(\frac{1-2ay}{3}\right) - ay = 1$$

$$a(1-2ay) \cancel{\mp} \frac{1-2ay}{3} - ay = 1$$

$$3a - 6a^2y - 1 + 2ay - 3ay = 3$$

$$-6a^2y - ay = 4 - 3a$$

$$y(-6a^2 - a) = 4 - 3a$$

$$y = \frac{4-3a}{-6a^2-a} \qquad y = \frac{3a-4}{6a^2+a}$$

$$x = \frac{1-2a\left(\frac{3a-4}{6a^2+a}\right)}{3}$$

$$x = \frac{1-2a\frac{3a-4}{a(6a+1)}}{3}$$

$$x = \frac{1-\frac{6a-8}{6a+1}}{3}$$

$$x = \frac{\frac{6a+1-6a+8}{6a+1}}{\frac{3}{1}}$$

$$6a^2 + a = 0$$

$$a(6a+1) = 0$$

$$a = 0 \quad a = -\frac{1}{6}$$

$$x = \frac{9}{18a+3}$$

$$x = \frac{3}{6a+1}$$

1) $a \neq -\frac{1}{6}; 0$

$$k = \left\{\left[\frac{3}{6a+1}; \frac{3a-4}{6a^2+a}\right]\right\}$$

2) $a = 0, -\frac{1}{6}$

$$0 = 4$$

$$k = \emptyset$$

$$\frac{3}{6a+1} > 0 \ \wedge \ \frac{3a-4}{6a^2+a} > 0$$

$+ \ - \quad + \ - \quad - \quad +$

$-\frac{1}{6} \qquad 0 \qquad \frac{4}{3}$

$$x \in \left(-\frac{1}{6}; \infty\right) \cap \left[\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; \infty\right)\right]$$

$$x \in \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$$

Zadanie 17

úloha č 2

$$\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$$ vekurentné urcenie, ohraničenost -

$\cancel{1 \geq \frac{1}{n(n+1)}}$ $\quad \cancel{n^2+n \geq 1}$ $\quad \cancel{n^2+n-1 \geq 0}$

$\cancel{D = 1+4}$

$$0 \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad 0 \leq 1 \,//$$

zdola 0

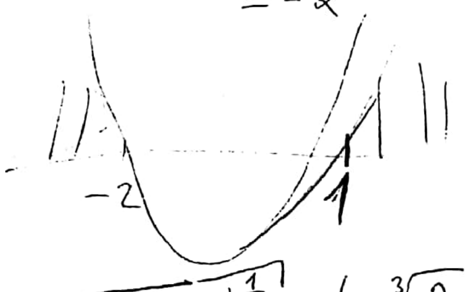
$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{n(n+1)}$$

$$n^2+n \geq 2$$

$$n^2+n-2 \geq 0$$

$$D = 1+8$$

$$D = 9 \quad n_{1,2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$
$$= -2$$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \qquad a_1 = \frac{1}{2} \,//$$

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot a_n$$

úloha č.3

a) $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$

$\cancel{2^x \sqrt[3]{4^x \, 0{,}125^{\frac{1}{x}}} = 16\sqrt[3]{4}}$

$\cancel{2^{3x} \cdot 4^x \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = 16 \cdot 4}$

$\cancel{8^x \cdot 4^x \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = 16 \cdot 4}$

$\cancel{32^x \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = 16 \cdot 4}$

$$\sqrt{2^x \cdot 4^{\frac{x}{3}} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3x}}} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$2^{\frac{x}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{6}} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{6x}} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{125}{100} =$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\log_2 5\right)}$$

$$\log_2 2^{\frac{x}{2}} + \log_2 4^{\frac{x}{6}} + \log_2 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{6x}} = \log_2 4\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}x \cdot \log_2 5 = \frac{2}{3}$$

$$x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_2 5\right) = \frac{2}{3}$$

Scanned by CamScanner

Planimetria - oblasť matematiky, ↳ študuje geom. útvary v rovine

(16) Stredová a osová súmernosť

Zhodné zobrazenie

+ ~~Planim~~

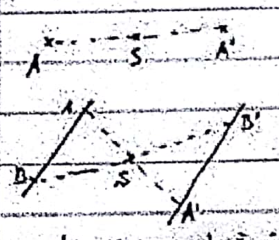
- zobrazenie Z v E_2 nazývame zhodným zobrazením v E_2 <=> pre ∀ body $A, B \in E_2$ a ich obrazy $A_1 = Z(A)$, $B_2 = Z(B)$; $|AB| = |A_1B_1|$

Stredová súmernosť

- zobrazenie S v E_2, ktoré priradí 1, bodu S ten istý bod
  2, ∀ bodu $X \neq S$ bod X' tak, že S je stredom úsečky XX'

Pr.

↳ štvorec, ∀ pravid. n-uholníky ($n = 2k$), kruh, kružnica ...



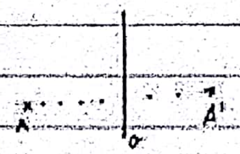
↳ sú rovnobežné

- je daná a) stredom S (jednoznačne určené)
  b) dvojicou $[AA'] \in Z(S)$
- samodružný bod - $S = S'$ (aj útvar | aj priamka, $S \in p$)

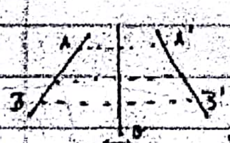
Osová súmernosť

- zobrazenie O v E_2 s osou o, ktoré priradí:
  1, každému $X \in o$ bod $X' = X$ (os o je samodružná)
  2, -"- $X \notin o$ bod X' tak, že $\overleftrightarrow{XX'} \perp o$ a stred priamky $\overleftrightarrow{XX'} \in o$

Pr.



↳ štvorec, obdĺžnik, ∀ pravid. n-uholníky ($n = 2k+1$), kružnica, deltoid



↳ ak $\overleftrightarrow{AB} \parallel o \Rightarrow \overleftrightarrow{A'B'} \parallel o$

↳ ak $\overleftrightarrow{AB} \nparallel o \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \cap o = \overleftrightarrow{A'B'} \cap o$

Úl. č. 2

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; $\cos x$; $\frac{1}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{2\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{2 \sin x}$

$q = \frac{\cancel{\cos x}}{2 \cdot \sin x \cdot \cancel{\cos x}} = \frac{1}{2 \sin x}$ $\qquad q = \frac{\frac{\cancel{\cos x}}{2 \cdot \sin x}}{\cancel{\cos x}} = \frac{1}{2 \sin x}$

$\log 16 \quad \log 8 \quad \log 4 \qquad d = \log \frac{1}{2}$

$\log 16 + d = \log 8 \qquad \log 16 + \log \frac{1}{2} = \log (16 \cdot \frac{1}{2}) = \log 8$

$\log 8 + \log \frac{1}{2} = \log (8 \cdot \frac{1}{2}) = \log 4$

Úl. č. 3

$3x+2ay=1$

$(3a-1)x-ay=1$

$$3x+2ay=(3a-1)x-ay$$

$$4x+3ay-3ax=0$$

$$y=\frac{3ax-4x}{3a}$$

$$3x+2\cancel{a}\cdot\left(\frac{3ax-4x}{3\cancel{a}}\right)=1$$

$$3x+\frac{6ax-8x}{3}=1 \quad /\cdot 3$$

$$9x+6ax-8x=3$$

$$x+6ax=3$$

$$x=\frac{3}{1+6a}$$

$$y=\frac{\frac{3}{1+6a}\cdot(3a-4)}{3a}=\frac{\cancel{3}\cdot(3a-4)}{\cancel{3}a\cdot(1+6a)}=\frac{3a-4}{a\cdot(1+6a)}$$

$y>0 \wedge x>0$

$$\frac{3a-4}{a\cdot(1+6a)}>0 \qquad a_0=0;\ -\frac{1}{6};\ \frac{4}{3}$$

$a\neq 0;\ -\frac{1}{6}$

$\frac{-}{+}\ominus$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{-}{-}\oplus$ | 0 | $\frac{-}{+}\ominus$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{+}{+}\oplus$

$$K_1=\left(-\frac{1}{6};0\right)\cup\left(\frac{4}{3};\infty\right)$$

$$\frac{3}{1+6a}>0 \Rightarrow 1+6a>0 \qquad a>-\frac{1}{6} \qquad K_2=\left(-\frac{1}{6};\infty\right)$$

$$K_1\cap K_2=\left(-\frac{1}{6};0\right)\cup\left(\frac{4}{3};\infty\right)=K$$

úsečka - ak body $A \neq B$, $A \in p'$, $B \in p$ - prienik dvoch polpriamok

Zadanie 17

uhol - je časť roviny určený dvoma polpriamkami so spoločným začiatkom

rovinný pás - časť roviny ohraničená dvoma rovnobežkami → prienik polrovín

Δ - jeden zo základných rovinných geo útvarov - prienik troch polrovín

Úloha 1

kružnica - rez kužeľovej plochy rovinou

Definujte geometrické útvary (úsečka, uhol, rovinný pás, trojuholník, kružnica, kruh, rovnobežník, lichobežník) pomocou množinových operácií alebo pomocou charakteristickej vlastnosti.

kruh: množina bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od pevného bodu (stredu kružnice) je menšia alebo rovná polomeru; hranicu tvorí kružnica

rovnobežník: štvoruholník, ktd. protiľahlé strany sú rovnobežné a majú rovnakú dĺžku

lichobežník je štvoruholník s dvoma rovnobežnými a dvoma rôznobežnými stranami

Úloha 2

Dokážte, že postupnosť $\left\{ \frac{1}{n.(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Nájdite rekurentné určenie postupnosti.

$a_1 = \frac{1}{1\cdot(2)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$a_{100} = \frac{100}{1\cdot(101)} = \ldots \doteq 0{,}01$! blíži sa k 0 !

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}} \Rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n\cdot(n+1)}} = \frac{n+2}{n}$

$\boxed{a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n}$

Úloha 3

Riešte v množine R rovnice

a) $\sqrt{2^x.\sqrt[3]{4^x.0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$

b) $\frac{3}{2}\log\frac{x^2}{10} + \log\frac{100}{x^3} - \log\frac{\sqrt{10}}{x} = -2$

$\rightarrow \left(2^x\left(2^{2x}\cdot 2^{-\frac{3}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}x} \cdot 2^{-\frac{1}{2x}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$2^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2x}} = 2^{2+\frac{1}{3}}$

$\frac{x}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2x} = 2 + \frac{1}{3} \quad / \cdot 6x$

$3x^2 + 2x^2 - 3 = 12x + 2x$

$5x^2 - 14x - 3 = 0$

$D = 196 + 60 = 256$

$\sqrt{D} = 16$

$x_{1/2} = \frac{14 \pm 16}{10} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{5} \end{cases}$

$\log(\ldots) + \log\frac{100}{x^3} - \log\frac{\sqrt{10}}{x} = -2$

$\frac{\frac{x^3}{\sqrt[2]{1000}} \cdot \frac{100}{x^3}}{\frac{\sqrt{10}}{x}}$ $\quad \frac{\frac{10^2}{10^{\frac{3}{2}}}}{\frac{10^{\frac{1}{2}}}{x}} = \frac{10^{\frac{1}{2}} x}{10^{\frac{1}{2}}}$

$\log x = -2$

$\boxed{10^{-2} = x}$

Usečka: prienik 2 polpriamok
$\{\forall x \in E_2 ; x \in \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BA}\}$
Uhol: časť roviny určený 2 polpriamkami so spoločným začiatkom
$\{\forall x \in E_2 : x \in \alpha \wedge \beta ; \alpha, \beta$ - polroviny ; $p \nparallel q\}$
rovinný pas: prienik 2 polrovín ; časť roviny -> množina bodov ohraničená 2 rovnobežkami
trojuholník: prienik 3 polrovín ; jeden z najjednoduchších rovinných geometrických útvarov
~~Kružnica~~: $\{\forall x \in E_2 ; x \in \alpha \wedge \beta \wedge \gamma ; \alpha, \beta, \gamma$ - polroviny $p \nparallel q \nparallel r\}$
Kružnica: množina všetkých bodov X pre ktoré platí body X ležia v jednej rovine ; $|XS| = r$
$\{\forall x \in E_2 : |XS| = r\}$
Kruh: množina všetkých bodov X pre ktoré platí body X ležia v 1 rovine $|XS| \leq r$
$\{\forall x \in E_2 : |XS| \leq r\}$
rovnobežník prienik 2 rovinných pásov, ktoré nie sú ~~rovnobežné~~ rôznobežné
$\{\forall x \in E_2 : X \in \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta$ -> polroviny $p \parallel q \parallel o)$
lichobežník: geometrický útvar, ktorého ... zo 4 ramien a 2 základy sú navzájom rovnobežné
$\{\forall x \in E_2 ; X \in \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta$ ... $\}$

17 Geometrické útvary

Planimetria ...

~~(Vymenuj množinové operácie)~~
~~1. Bod: p,q sú priamky, bod = p∩q~~
~~2. Priamka: čiara jednoznačne určená 2 bodmi~~
~~3. Uhol: φ, ψ sú polroviny, uhol = φ∩ψ, ich ramená sú hraničné priamky p,q, p∦q~~
~~4. Rovinný pás: φ,ψ sú polroviny, rov. pás = φ∩ψ, ohraničujú ho hr. priamky p,q, i. p∥q~~
~~5. Trojuholník: φ, ψ, α sú polroviny, Δ = φ∩ψ∩α ... p,q,r: p∦q∦r~~
~~6. Kružnica: {X ∈ E₂ : |SX| = r, S ∈ E₂, r ∈ R⁺}~~
~~7. Kruh: {X ∈ E₂~~

1. Bod = $\{X \in E_2 : x \in (p \cap q), p,q$ sú priamky$\}$
2. Úsečka = $\{\forall X \in E_2 : X \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}\}$
3. Uhol = $\{\forall X \in E_2 : X \in \alpha \cap \beta, \alpha, \beta$ - polroviny, $p \nparallel q\}$
4. $\Delta = \{\forall X \in E_2 : X \in \alpha \cap \beta \cap \gamma, \alpha, \beta, \gamma$ - polroviny, $p \nparallel q \nparallel r\}$
5. Kružnica $= \{\forall X \in E_2 : |XS| = r\}$
6. Kruh $= \{\forall X \in E_2 : |XS| \leq r\}$
7. Rovnobežník $= \{\forall X \in E_2 : X \in \alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \delta$ - polroviny, $p \parallel r \cap q \parallel s\}$
8. Lichobežník $= \{\forall X \in E_2 : X \in \alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \delta$ - polroviny, $p \parallel r\}$

Ú. č. 2

$$\left\{\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20}$$

zhora ohraničená $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1+0} = 0$$

zdola ohraničená 0

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} \quad \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \quad \frac{1}{n+2}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}$$

Úl. č. 3

b) $\frac{3}{2}\log\frac{x^2}{10}+\log\frac{100}{x^5}-\log\frac{\sqrt{10}}{x}=-2$

$\log\frac{x^3}{\sqrt{10^3}}+\log\frac{100}{x^3}-\log\frac{\sqrt{10}}{x}=-2$

$\log\frac{\cancel{x^3}\cdot 100}{\sqrt{10^3}\cdot\cancel{x^3}}-\log\frac{\sqrt{10}}{x}=-2$

$\log\frac{10^2\cdot 10^{-\frac{3}{2}}}{x^{-1}\cdot 10^{\frac{1}{2}}}=-2$

$\log x\cdot 10^{2-2}=-2$

$\log x=-2$

$x=10^{-2}$

$\log\left(\frac{x^2}{10}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{x^3}{\sqrt[2]{10^3}}$

a) $\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{2^{2x}\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{1}{x}}}}=\sqrt[3]{2^7}$

$\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{2^{2x}\cdot 2^{-\frac{3}{x}}}}=\sqrt[3]{2^7}$

$\sqrt{2^x\cdot 2^{\frac{2x-\frac{3}{x}}{3}}}=\sqrt[3]{2^7}$

$2^{\frac{x+\frac{2x-\frac{3}{x}}{3}}{2}}=2^{\frac{7}{3}}$

$\frac{x+\frac{2x-\frac{3}{x}}{3}}{2}=\frac{7}{3}\quad /\cdot 3\cdot 2\cdot x$

$5x^2-3=14x$

$5x^2-14x-3=0$

$D=196+4\cdot 3\cdot 5$

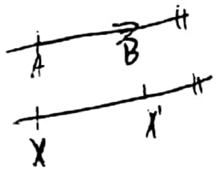
$D=256\qquad\sqrt{D}=16$

$x_{1,2}=\frac{14\pm 16}{10}\quad\begin{cases}3\\-0{,}2\end{cases}$

Scanned by CamScanner

Posunutie

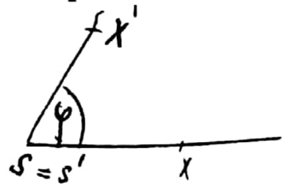
Zadanie 18 – orientovaná úsečka je úsečka AB so začiatočným bodom a koncovým
– majú rovnakú dĺžku a sú súhlasne orientované



Úloha 1

Definujte posunutie a otočenie a popíšte ich vlastnosti. Predveďte zobrazenie bodu a priamky v posunutí a otočení, popíšte vzájomnú polohu vzoru a obrazu.

OTÁČANIE – má začiatočné a koncové rameno
Bod S = stred otáčania, uhol φ = uhol otáčania



Úloha 2

Kužeľ s polomerom podstavy 4cm a výškou 6cm je rozdelený rovinou rovnobežnou s podstavou na dve časti rovnakého objemu. Dokážte, že obvod kruhu, ktorý je rezom, je $4\pi\sqrt[3]{4}$.

Úloha 3

Určte hodnoty ostatných goniometrických funkcií bez výpočtu uhla x, ak $\operatorname{cotg} x = -\frac{8}{15}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Určte hodnoty sin 2x a cos 2x.

$\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{8}{15}$

$\sin x = \frac{\cos x}{-\frac{8}{15}} = \frac{15\cos x}{-8}$

$2\sin x \cdot \cos x$

$2 \cdot \frac{15}{8}\cos x$

$-\frac{15}{4}\cos^2 x$

$\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos x} = -\frac{15}{4} \quad /:\cos^2 x$

$2\,tg\, x = -\frac{15}{4}$

$tg\, x = -\frac{15}{8}$

$\cos^2 x - \sin^2 x$

$\Rightarrow \cos^2 x$

$\cos^2 x - \frac{225\cos^2 x}{64}$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \frac{225\cos^2 x}{64}$

$-\sin^2 x = -\frac{225\cos^2 x}{64}$

$64 = \frac{225\cos^2 x}{-\sin^2 x}$

$\frac{64}{225} = \frac{\cos^2 x}{-\sin^2 x}$

$\frac{8}{15} = \operatorname{cotg} x$!

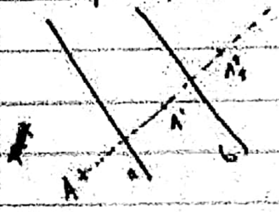
(18) Posunutie a otočenie
Planimetria
Zhodné zobrazenie

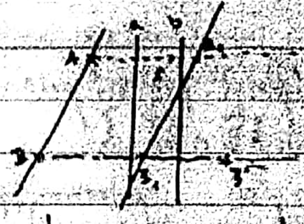
Posunutie (translácia)
· vzn. zložením 2 osových súmerností s navzájom rovnobežnými rôznymi osami
$T = O_a \circ O_b$, $a \parallel b$, $a \neq b$

$T_{a,b}$

∟ jednoznačne určené 1) 2 osami posunutia
2) $[X, X_1']$

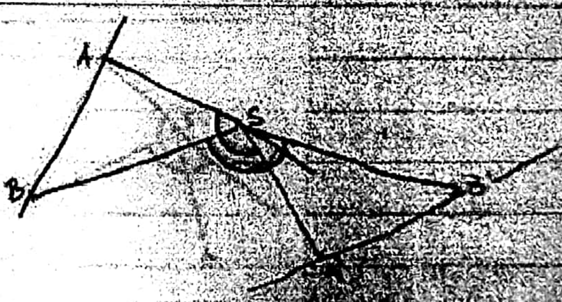
∟ $|ab| = d$, $|AA_1'| = 2d$





∟ zachovaná rovnobežnosť

Otočenie (rotácia)
· zobrazenie R v E, $R = \{[X, Y], X, Y \in E_2, |SX| = |SY|, |\measuredangle XSY| = \alpha, X \neq S\}$
S - stred otáčania
α - uhol rotácie (orientovaný) $R_{S,\alpha}$
· zloženie 2 osových súmerností s rôznobežnými osami $R = O_a \circ O_b$ ~~Xb~~
· keď $a \perp b \Rightarrow$ stredová súmernosť
záleží na poradí



Úl. č. 2

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{3} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 6}{3} = 32\pi$

$V = 2V_1 = 32\pi = 2 \cdot \frac{\pi r_1^2 v_1}{3}$

$48 = r_1^2 v_1$

$48 = \frac{16 r_1^3}{36}$

$108 = r_1^3$

$r_1 = 3 \cdot \sqrt[3]{4}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{6} = \frac{r_1}{v_1}$

$v_1 = \frac{4 r_1}{6}$

$\frac{12\sqrt[3]{4}}{6} = 2\sqrt[3]{4}$

$4\pi\sqrt[3]{4}$

$V_1 = V_2 \Rightarrow V = 2V_1$

Zad. 3

$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{8}{15}$ $\quad \cos x = -\frac{8}{15} \sin x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\quad \cos x = -\frac{8}{17}$

$\frac{64}{225} \sin^2 x + \sin^2 x = 1$

$\frac{289}{225} \sin^2 x = 1$ $\quad \sin 2x = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$

$\sin^2 x = \frac{225}{289}$ $\quad \sin 2x = 2 \cdot \frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{8}{17}\right)$

$\sin x = \frac{15}{17}$ $\quad \sin 2x = -\frac{240}{289}$

wzn.

$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$\Rightarrow \sin x \oplus$

$\cos x \ominus$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = \frac{64}{289} - \frac{225}{289}$

$\cos 2x = -\frac{161}{289}$

22. *Vymenujte základné zhodne zobrazenia v rovine.*
Objasnite pojmy posunutie, otočenie, stred otočenia, orientovaný uhol a jeho veľkosť, uhol otočenia.
Popíšte postup pri otočení bodu A okolo bodu S (S ≠ A) o ± 60°.

Základné zhodné zobrazenia v rovine:
- osová súmernosť
- stredová súmernosť
- otáčanie
- posúvanie

Posunutie dané vektorom posunutia $\overrightarrow{AA'}$ je zhodné zobrazenie v rovine, ktoré:
- a) $\forall\ X \rightarrow X'; \overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'}$

Otáčanie dané stredom O a uhlom α je zhodné zobrazenie v rovine, ktoré:
- a) $O \rightarrow O' = O$
- b) $\forall\ X \neq O \rightarrow X \rightarrow X'$ tak že $|O,X'| = |O,X| \wedge |\sphericalangle X'OX| = \alpha$

Bod O nazývame stred otočenia a orientovaný uhol α uhol otočenia.

Orientovaný uhol:
- je uhol, v ktorom je určený aj smer otáčania(kladný proti smeru hodinových ručičiek, záporný v smere hodinových ručičiek)
- orientovaným uhlom AVB nazývame usporiadanú dvojicu polpriamok $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ so spoločným bodom V, pričom polpriamku $\overrightarrow{VA}$ nazveme počiatočným ramenom uhla a polpriamku $\overrightarrow{VB}$ nazveme koncovým ramenom uhla.
  Bod V je vrcholom orientovaného uhla.
- základná veľkosť orientovaným uhlom AVB je veľkosť uhla, ktorý opíše polpriamka pri otočení z polohy začiatočného ramena VA do polohy koncového ramena VB proti pohybu hodinových ručičiek (v kladnom zmysle).
  Pre základnú veľkosť orientovaného uhla platí:
  $0 \leq \varphi < 2\pi$ resp. $0° \leq \varphi < 360°$

Veľkosť orientovaného uhla AVB so základnou veľkosťou φ je hodnota $x = \varphi + 2k\pi$ resp. $x = \varphi + k \,.\, 360°;\ k \in Z$

Otočenie bodu A okolo bodu S (S ≠ A) o ± 60°:
- zostrojíme kružnicu so stredom v bode S a polomerom |SA| a uhol veľkosti 60°, pričom 1 jeho rameno je polpriamka SA a 2. rameno bude otočené o 60° proti smeru hodinových ručičiek (resp. v smere hod. ručičiek)
- tam, kde 2. rameno pretne kružnicu dostaneme bod A′ otočený o + 60° (resp. bod A′′ otočený o - 60°)

21. *Objasnite pojmy osová súmernosť, os súmernosti, osovo súmerný útvar. Popíšte osi súmernosti obdĺžnika, štvorca, kosoštvorca, rovnoramenného lichobežníka.*

Osová súmernosť daná osou o je zhodné zobrazenie v rovine, ktoré:
- a) $\forall\ X \in o \rightarrow X' = X$
- b) $\forall\ X \notin o \rightarrow X \rightarrow X'$ tak že o je os úsečky $|X, X'|$

Os súmernosti:
- je os (priamka), ktorou je daná osová súmernosť, resp. je to os podľa ktorej je daný osovo súmerný útvar

Útvar U sa nazýva osovo súmerný ak existuje os súmernosti, v ktorej $U \rightarrow U' = U$ (je sám sebe obrazom).

Osovo súmerné útvary:
- obdĺžník (súmerný podľa 2 osi súmernosti – osi strán)
- štvorec (súmerný podľa 4 osi súmernosti – osi strán + priamky na ktorých ležia uhlopriečky)
- kosoštvorec (súmerný podľa 2 osi súmernosti – priamky, na ktorých ležia uhlopriečky)
- rovnoramenný lichobežník (súmerný podľa 1 osi súmernosti – os základne)

Zadanie 19

postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, ak existuje také číslo d, že pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} = a_n + d$

d - diferencia

$a_n = a_1 + (n-1).d$ - vzťah medzi prvým a ľubovoľným členom

$a_r = a_s + (r-s).d$ - vzťah medzi dvomi ľubovoľnými členmi

Úloha 1

Definujte postupnosť, uveďte spôsoby určenia postupnosti a vlastnosti postupnosti, graf postupnosti.

Úloha 2

$10^x = 10^{-2}$ $10^x = 10^{\frac{2}{2}}$ $5^x = 5^{-3}$ $x = -3$

Dané sú výrazy : $V = \log 0{,}01 + 2\log 10\sqrt[4]{10} + \log_5 \frac{1}{125} - \ln e^3$

$6^x = 6^{\frac{3}{2}}$ $7^x = 7^{-2}$ $0{,}5^x = 0{,}5^{-3}$ $10^x = 10^3$

$$U = \log_6 \sqrt{216} + \log_7 \frac{1}{49} - \log_{0,5} 8 - \log \frac{1}{0{,}001}$$

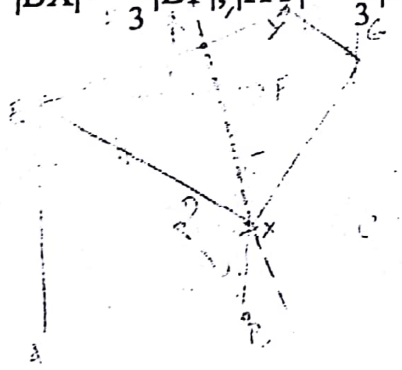
Dokážte, že $V + U = -6$

$V: -2;\ -3;\ \frac{2}{2};\ -3 \Rightarrow -\frac{10}{2} + \frac{-5}{2} \Rightarrow -\frac{11}{2}$ $\Rightarrow -\frac{11}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{12}{2} = \underline{-6}$

$U: \frac{3}{2} - 2 - 3 + 3 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$

Úloha 3

Daná je kocka ABCDEFGH. Zostrojte prienik roviny BDH s rovinou XYE, kde $|BX| = \frac{1}{3}|BF|$, $|HY| = \frac{2}{3}|HG|$.



Postupnosť:

Def: Postupnosť je funkcia definovaná na množine N
$\forall n \in N \to a_n$ (člen postupnosti)

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ⇓ nekonečná postupnosť

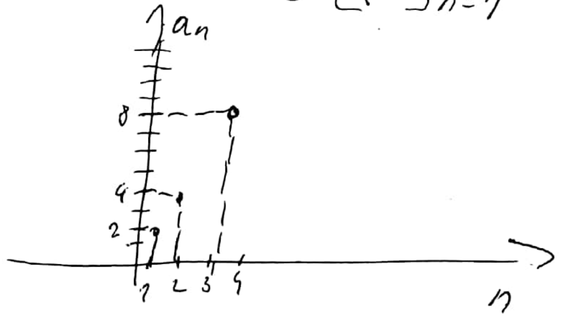
$\{a_n\}_{n=1}^{2}$ ⇓ konečná postupnosť

$2, 4, 6, 8, 10 \ldots a_n$ $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$
$a_1\ a_2\ a_3$

$1, 3, 5, 7, \Rightarrow \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$

Spôsoby určenia:

a, vymenovaním prvkov ~~2, 4, 6, 8, 10~~ 2, 4, 8, 16, 32
b, pomocou n-tého člena $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$
c, graficky



grafom je množina izolovaných bodov $[n, a_n]$, $n \in N$, $a_n \in R$

Vlastnosti postupnosti: postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je

a, rastúca, ak $\forall n \in N: a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} - a_n > 0)$
b, klesajúca, ak $\forall n \in N: a_{n+1} < a_n$ $(a_{n+1} - a_n < 0)$
c, neklesajúca ak $\forall n \in N: a_{n+1} \geq a_n$
d, nerastúca ak $\forall n \in N: a_{n+1} \leq a_n$
e, konštantná ak $\forall n \in N: a_{n+1} = a_n$
f, nemonotónna napr. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ $-1, 1, -1, 1, -1$

Ohraničená postupnosť:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola ak $\exists d \in R : \forall n \in N : a_n \geq d$

ohraničená zhora ak $\exists h \in R \ \forall n \in N \ a_n \leq h$

$\rightarrow$ ak je ohraničená zhora a zdola, tak je ohraničená

Limita postupnosti: nazývame limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ak pre $\forall \varepsilon > 0 ; \varepsilon \in R^+ \ \exists n_0 \in N ; \forall n \geq n_0$ platí $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$|a_n - a| < \varepsilon$

Zápis limity $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

· Postupnosť, ktorá má limitu sa nazýva konvergentná

, ktorá nemá limitu sa nazýva divergentnou

Každá postupnosť má najviac 1 limitu

Veta: Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu b

Potom a, $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \underline{\underline{a \pm b}}$

b, ~~lim~~ $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = \underline{\underline{a \cdot b}}$

c, ak $b_n \neq 0$ pre $\forall n \in N : \{\frac{a_n}{b_n}\} : \lim \{\frac{a_n}{b_n}\} = \frac{\lim(a_n)}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$

d, $c \in R \ \{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{c \cdot a}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

19) Postupnosti

- fcia, ktorej D je N (alebo podmnožina N typu $\{1,2,3,4..k\}$)
- Nekonečná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- Konečná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{k}$
- spôsoby určenia: vymenovaním prvkov
  - vzorcom pre n-tý člen
  - rekurentným zápisom
- grafom je ~~ug~~ množina navzájom izolovaných bodov $[n, a_n]$, $n \in N$, $a_n \in R$

Vlastnosti: ~~vzdica~~

1) Monotónnosť
   - rast $\Leftrightarrow$ pre $\forall n \in N$: $a_n < a_{n+1}$
   - klas $\Leftrightarrow$ — " — ; $a_n > a_{n+1}$
   - Neklesajúca $\Leftrightarrow$ $a_n \leq a_{n+1}$
   - Nerastúca $\Leftrightarrow$ $a_n \geq a_{n+1}$

   } monotónne

   Nemonotónna napr $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ $-1, 1, -1, 1, -1 \ldots$

   Konštantné $a_n = a_{n+1}$

2) Ohraničenosť
   - zdola $\Leftrightarrow$ $\exists d \in R$, pre $\forall n \in N$; $a_n \geq d$
   - ~~zd~~ zhora $\Leftrightarrow$ $\exists h$ — " — ; $a_n \leq h$

   ] ohraničená

3) LIMITA ? (možno)

č. 2

$= \log 0{,}01 + 2 \cdot \log 10 \cdot \sqrt[4]{10} + \log_5 \frac{1}{125} - \ln e^3$

$= \log 10^{-2} + \log 10^{\frac{5}{2}} + \log_5 5^{-3} - \ln e^3$

$= -2 + \frac{5}{2} - 3 - 3 = \frac{5}{2} - 8 = -\frac{11}{2}$

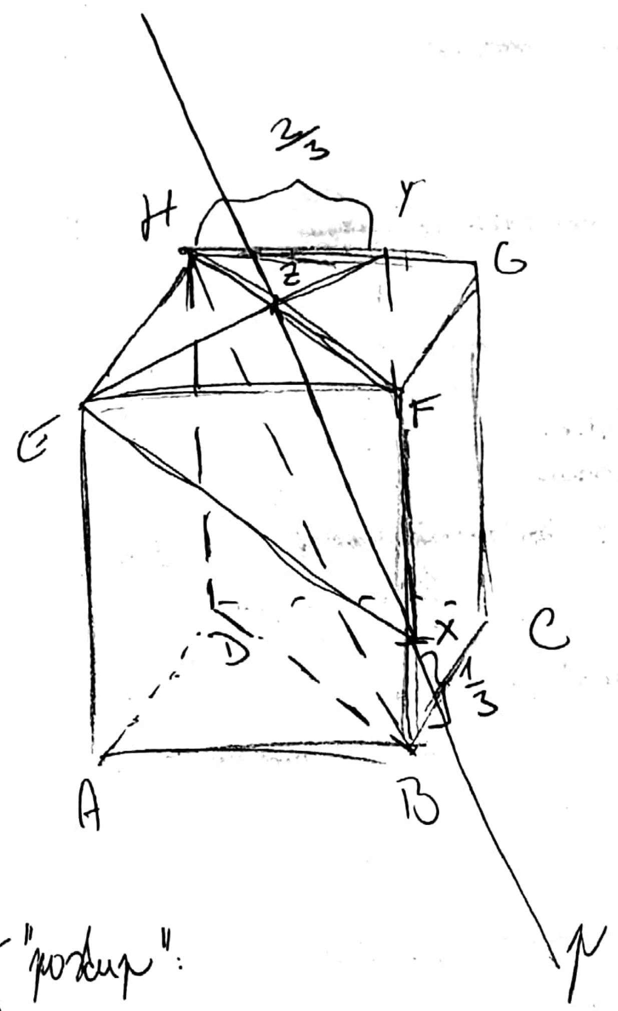
$U = \log_6 \sqrt{216} + \log_7 \frac{1}{49} - \log_{0{,}5} 8 - \log \frac{1}{0{,}001}$

$= \log_6 6^{\frac{3}{2}} + \log_7 7^{-2} - \log_{0{,}5} 0{,}5^{-3} - \log 10^3$

$= \frac{3}{2} - 2 + 3 - 3 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$U + V = -\frac{1}{2} - \frac{11}{2} = -\frac{12}{2} = -6$

Úl. č. 3



$\overleftrightarrow{BDH} \cap \overleftrightarrow{XYE} = p$

Prípadný "postup":

! rovina $\overleftrightarrow{BDH}$ nepredstavuje len $\triangle BDH$

preto aj HF je súčasť tejto roviny (dokonca aj BF)

1) $HF \parallel DB$

2) $EY \cap HF = Z$

3) $\overleftrightarrow{ZX} = p$

4) $p = \overleftrightarrow{BDH} \cap \overleftrightarrow{XYE}$

uhol dvoch priamok: $\cos\alpha = \dfrac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Zadanie 20

kolmosť: spoločná vlastnosť → dvoch priamok ak uhol, ktorý zvierajú je pravý

→ dvoch rovín, ak kolmica priamky jednej z nich je rovnobežná s druhou rovinou

bod je priesečník rovín ak po dosadení jeho súradníc do rovnice roviny dostaneme platnú rovnosť

Úloha 1

Objasnite obsah pojmov uhol dvoch priamok, uhol priamky s rovinou, uhol dvoch rovín, kolmosť priamok a rovín, kolmý priemet bodu do roviny a priamky.

Úloha 2

Odvoďte vzorec pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = -c + a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -c + a\frac{b^2}{4a^2}$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$

$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$

$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Úloha 3

Dané sú funkcie :

a) $f : y = \log_2 (x - 3) + 5$ určte množinu, na ktorej existuje ku f inverzná funkcia a zapíšte jej rovnicu

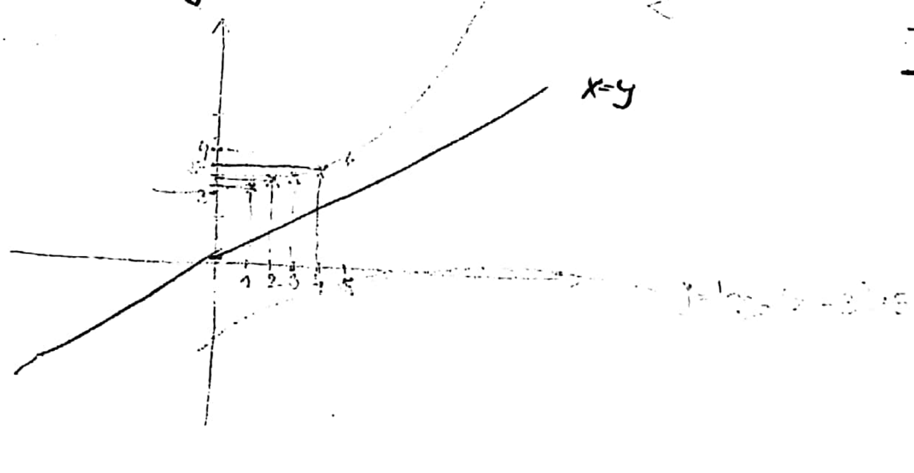
b) $g : y = \dfrac{x+1}{-2x+3}$, určte asymptoty funkcie a všetky $x \in D(g)$, pre ktoré je $g(x) > 0$.

a) f^{-1}: $x = \log_2 (y - 3) + 5$

$x - 5 = \log_2 (y - 3)$

$2^{x-5} = y - 3$

$2^{x-5} + 3 = y$



$g: y = \frac{x+1}{-2x+3}$

$-2x + 3 \neq 0$

$-2x \neq -3$

$x \neq \frac{3}{2}$

$y = \frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$

$\frac{x+1}{-2x+3} > 0$

$-1 \quad \frac{3}{2}$

$x \in \left(-1; \frac{3}{2}\right)$

Ш.с.2

$ax^2 + bx + c = 0 \quad /:a$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \qquad D = b^2 - 4ac$

$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0$

$\left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right) = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

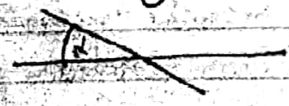
Scanned by CamScanner

20) Analytická geometria

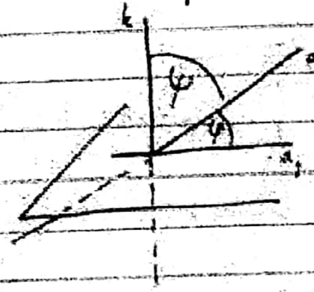
- časť geometrie, kt. študuje vlastnosti útvarov a vzťahy medzi nimi

Uhol 2 priamok = uhol ich smerových (alebo normálových) vektorov

$$\cos \varphi = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right|, \text{ kde } \langle 0°; 90° \rangle$$



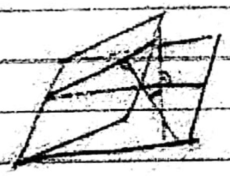
Uhol priamky a roviny = uhol priamky a jej pravouhlého priemetu v rovine (preložím rovinu priamkou kolmo na orig. rovinu)



$$\cos \psi = \sin \varphi = \left| \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} \right|$$

Uhol 2 rovín => preložím rovinu kolmo na obe a priesečnicu rovín
= uhol normálových vektorov vznikajúcich priamok

$$\cos \varphi = \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \right|$$



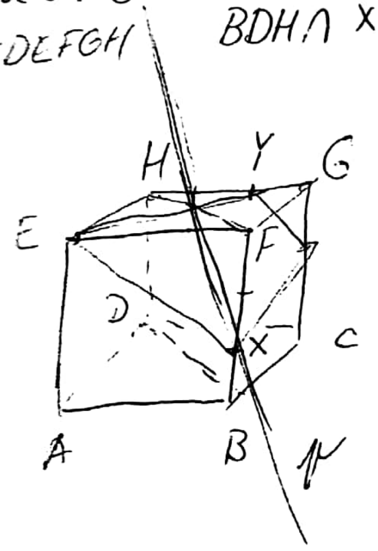
Priamka a rovina sú na seba kolmé <=> $\vec{n}$ roviny = $\vec{s}$ priamky

Kolmý priemet bodu do roviny - cez bod spustím kolmicu na rovinu, priesečník kolmice a roviny = priemet

Zadanie 19

úloha č. 3

ABCDEFGH $\quad BDH \cap XYE \quad |BX| = \frac{1}{3}|BF| \quad |HY| = \frac{2}{3}|HG|$



Zadania 20

úloha č. 2 vzorec ~~k~~ kvadratickej rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

úloha č. 3

a) $f: y = \log_2(x-3) + 5$ inverzná f^{-1}

$D(f) = (3; \infty)$

$f^{-1}: x = \log_2(y-3) + 5 \qquad f^{-1}: x - 5 = \log_2(y-3)$

$f^{-1}: 2^{x-5} = y - 3 \qquad f^{-1}: y = 2^{x-5} + 3$

---

b) $g: y = \frac{x+1}{-2x+3} \qquad x \in D(g) \quad g(x) > 0 \qquad D(f) = R - \{\frac{3}{2}\}$

$g: y = \frac{x+1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{-2(x-\frac{3}{2})} \qquad g: y = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{2(x-\frac{3}{2})}$

$g: y = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4x-6}$

$y = -\frac{1}{2} \quad x = \frac{3}{2}$

$\frac{x+1}{-2x+3} > 0 \qquad x \in (-1; \frac{3}{2})$

$-$ $\quad + \quad -$

$-1 \qquad \frac{3}{2}$

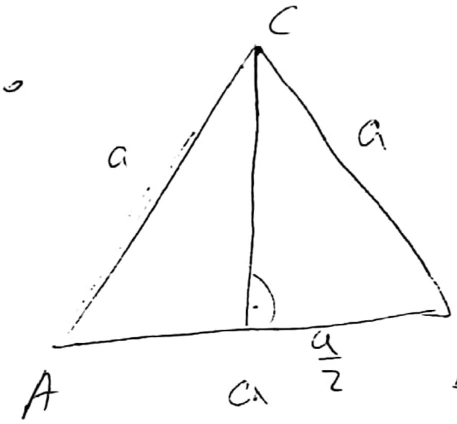
Scanned by CamScanner

Zadanie 21

úloha č. 2

S = obsah Δ rovnostranného

$o = 2\sqrt[4]{27S^2}$ - dokázať



$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$v^2 = \frac{3a^2}{4}$

$v = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$S = \frac{\frac{a\cdot\sqrt{3}a}{2}}{\frac{2}{1}}$ $\quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad a^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}}$

$a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}$

$o = 3a$ $\quad o = 3\sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}$

$o = 3\sqrt{\sqrt{\frac{16S^2}{3}}}$ $\quad o = 3\sqrt[4]{\frac{16S^2}{3}}$

$o = 2\sqrt[4]{27\cdot S^2}$

úloha č. 3

$s \in R$

$sx^2 + s + x - 2x^2 - 2sx = 0$ $\quad$ aspoň 1 riešenie

$x^2(s-2) + x(1-2s) + s = 0$

$s = 2$ $\quad -3x + 2 = 0$

$x = \frac{2}{3}$ //

$D = (1-2s)^2 - 4(s-2)\cdot s$

$D = 1 - 4s + 4s^2 - 4s^2 + 8s$

$D = 4s + 1$ $\quad 4s + 1 \geq 0$ $\quad s \geq -\frac{1}{4}$

$x_{1,2} = \frac{2s - 1 \mp \sqrt{4s+1}}{2(s-2)}$ $\quad s = -\frac{1}{4}$

$x = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{3}$ //

Zadanie 21

MATEMATIKA

Úloha 1

Definujte kružnicu ako množinu bodov určitej vlastnosti a odvoďte jej stredovú aj všeobecnú rovnicu. Popíšte vzájomnú polohu priamky a kružnice. Uveďte spôsob zistenia vzájomnej polohy priamky a kružnice.

Úloha 2

Ak S je obsah rovnostranného trojuholníka a O je jeho obvod, dokážte, že $2\sqrt[4]{27S^2} = O$.

Úloha 3

Pre ktoré hodnoty parametra $s \in R$ má rovnica $sx^2 + s + x - 2x^2 - 2sx = 0$ aspoň jedno riešenie? Vyjadrite ho.

1) Kružnica

$k = \{X \in E_2 ; |XS| = r, r \in \mathbb{R}^+ \wedge S \in E_2\}$

$k(S, r)$

Stredový tvar $(x-s_1)^2+(y-s_2)^2=r^2$, $S[s_1, s_2]$

Všeobecný tvar $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$(x+\frac{1}{2}a)^2+(y+\frac{1}{2}b)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2-4c) \Rightarrow S[-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b]$

$\Rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

Vzájomná poloha priamky a kružnice

a) nemá spoločný bod

b) sečnica má 2 spoločné body

c) dotyčnica má 1 spoločný bod a v ňom je kolmá na polomer

$T[x_0, y_0] \in p \wedge T \in k$: $(x_0-s_1)(x-s_1)+(y_0-s_2)(y-s_2)=r^2$

Ako?

osamostatním x alebo y z priamky a dosadím do kružnice

2

$v^2=a^2-\frac{a^2}{4}$

$v^2=\frac{3a^2}{4}$

$v=\frac{\sqrt{3}a}{2}$

$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

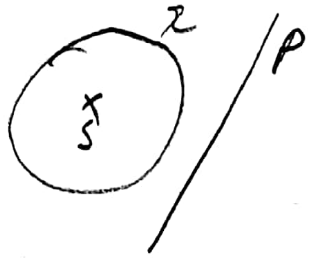
$2\cdot\sqrt[4]{27\cdot\frac{a^4\cdot 3}{16}}=3a$

$2\cdot\sqrt[4]{\frac{a^4\cdot 81}{16}}=3a$

$\cancel{2}\cdot\frac{a\cdot 3}{\cancel{2}}=3a$

$3a=3a$

Uzajamni položaj:



p = nesečnica

$p \cap k = \emptyset$

t = dotičnica

$p \cap k = \{T\}$

$D<0 \rightarrow$ nesečnica

$D=0$ dotičnica

s = sečnica $D>0 \rightarrow$ sečnica

$p \cap k = \{A, B\}$

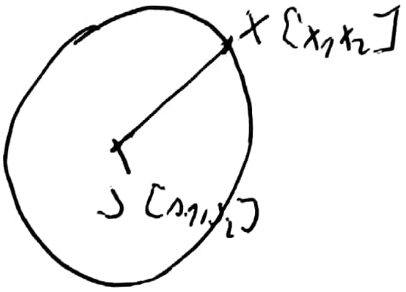
$k: x^2+y^2+ax+by+c=0$

$p: ax+by+c=0$

y izrazim a dosadim do k

Kružnica: množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od stredu S konštantnú nenulovú vzdialenosť r (polomer kružnice)

$k: \{X \in E_2; |SX| = r\}, r > 0$



$\vec{SX} = [x_1 - s_1; x_2 - s_2]$

$|SX| = \sqrt{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2}$

$\boxed{r^2 = (x-s_1)^2 + (y-s_2)^2}$ → stredová rovnica

$k: (x-1)^2 + (y-2) = 3^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 25$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$ → doplnením na štvorec získame zo všeobecnej rovnice → stredovú

Scanned by CamScanner

1) Kružnica

$k = \{X \in E_2 ; |XS| = r, r \in \mathbb{R}^+ \wedge S \in E_2\}$

$k(S, r)$

Stredový tvar $(x-s_1)^2+(y-s_2)^2=r^2$, $S[s_1, s_2]$

Všeobecný tvar $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$(x+\frac{1}{2}a)^2+(y+\frac{1}{2}b)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2-4c) \Rightarrow S[-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b]$

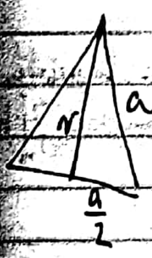
$\Rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

Vzájomná poloha priamky a kružnice
a) nemá spoločný bod
b) sečnica má 2 spoločné body
c) dotyčnica má 1 spoločný bod a v ňom je kolmá na polomer

$T[x_0,y_0] \in p \wedge T \in k$: $(x_0-s_1)(x-s_1)+(y_0-s_2)(y-s_2)=r^2$

Ako?
· osamostatním x alebo y z priamky a dosadím do kružnice

2.



$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$v^2 = \frac{3a^2}{4}$

$v = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$2\cdot\sqrt[4]{27\cdot\frac{a^4\cdot 3}{16}} = 3a$

$2\cdot\sqrt[4]{\frac{a^4\cdot 81}{16}} = 3a$

$\cancel{2}\cdot\frac{a\cdot 3}{\cancel{2}} = 3a$

$3a = 3a$

úl. 3

$sx^2 - 2x^2 + x - 2sx + s = 0$

$(s-2)x^2 + (1-2s)x + s = 0$

$D = (1-2s)^2 - 4s \cdot (s-2)$

$D = 1 - 4s + 4s^2 - 4s^2 + 8s$

$D = 1 + 4s$

$1 + 4s \geq 0$

$s \geq -\frac{1}{4}$

$\left(-\frac{1}{4} - 2\right)x^2 + \left(1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right)x - \frac{1}{4} = 0$

$\left(-\frac{9}{4}\right)x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

$D = +\frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$

$x = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{18}{4}} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 9_3} = \frac{1}{3}$

Zadanie 22

Úloha 1

Vysvetlite pojmy prvočíslo, zložené číslo, nesúdeliteľné čísla, NSD, NSN čísel.
Uveďte kritériá deliteľnosti prirodzených čísel.

Úloha 2

Dokážte, že pre prípustné hodnoty x je výraz konštantný:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)\cdot \mathrm{cotg}\, x$$

Úloha 3

Na stranách AB a DC obdĺžnika ABCD sú body E a F zvolené tak, že AFCE je kosoštvorec. Vypočítajte dĺžku úsečky EF, ak viete, že $|AB| = 4$ a $|BC| = 3$.

Zadanie 22

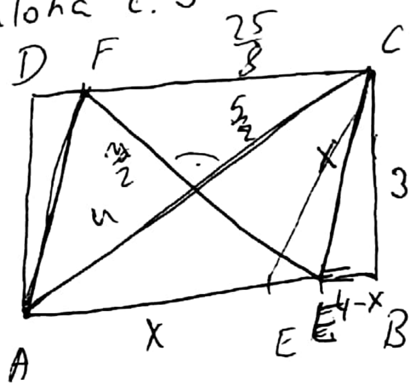
úloha č. 2

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)\cot g\, x=\left(\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}\right)\cot g\, x\,\cdot$$

$$=\left(\frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{2}\sin \cancel{x}\cos x}+\frac{\cancel{2}\sin x\cos x}{\cancel{2}\cos^2 x}\right)\cot g\, x = 2\, tg\, x\cdot \cot g\, x = \cancel{1}\, 2$$

$$x\neq k\frac{\pi}{2}$$

úloha č. 3



$$|AB|=4 \quad |BC|=3$$

$$x^2=9+(4-x^2)$$

$$x^2=9+16-8x+x^2$$

$$x=\frac{25}{8}$$

$$u^2=\cancel{3}\,9+16$$

$$u=5$$

$$\frac{625}{64}=\frac{y^2}{4}+\frac{25}{4}$$

$$\frac{y^2}{4}=\frac{625-1625}{64} \qquad \frac{y^2}{4}=\frac{225}{64} \qquad y^2=\frac{225}{16}$$

$$y=\frac{15}{4}\,//$$

Zadanie 23

úloha č. 2

$$2\,C(m;\,2m-1)=C(m,2m)$$

$$2\,\frac{(2m-1)!}{m!\,(2m-1-m)!}=\frac{(2m)!}{m!\,(2m-m)!} \qquad \frac{2(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}=\frac{(2m)!}{m!\,m!}$$

$$\frac{2(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}=\frac{2\cancel{m}\,(2m-1)!}{m!\,\cancel{m}(m-1)!} \qquad \frac{2(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}=\frac{2(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}$$

úloha č. 3

rovnoramenného $\triangle$

AB. $A=[2;4]$ $B[-2;6]$ $C[c_1; c_2]$

$v(C;AB) = 2\sqrt{5}$

$S_{AB} = [0;5]$

$v(C;AB) = \sqrt{c_1^2 + (c_2-5)^2}$

$|AC| = |AB|$ $\sqrt{(c_1-2)^2+(c_2-4)^2} = \sqrt{(c_1+2)^2+(c_2-6)^2}$

5

$\sqrt{c_1^2+(c_2-5)^2} = 2\sqrt{5}$

$c_1^2 - 4c_1 + \cancel{4} + c_2^2 - 8c_2 + 16 = \cancel{c_1^2} + 4c_1 + 4 + \cancel{c_2^2} - 12c_2 + 36$

$8c_1 = +4c_2 - 20$

$c_1 = \frac{c_2}{2} - \frac{5}{2} = \frac{c_2-5}{2}$

$\frac{(c_2-5)^2}{4} + (c_2-5)^2 = 4\cdot 5$

$\frac{5(c_2-5)^2}{4} = 4\cdot 5$

$\cancel{\frac{(c_2-5)^2}{2} = 20}$

$\cancel{(c_2-5)^2 = 40}$

$(c_2-5)^2 = 16$

$c_2 - 5 = \mp 4$

$\cancel{c_2^2 - 10c_2 + 25 = 40}$

$\cancel{c_2^2 - 10c_2 - 15 = 0}$

$c_2 - 5 = 4$ $\quad$ $c_2 - 5 = -4$

$c_2 = 9$ $\quad$ $c_2 = 1$

$\cancel{D = 100 + 60}$

$c_2 = 9$ $\quad c_1 = \frac{9-5}{2} = 2$ $\qquad c_2 = 1$ $\quad c_1 = -2$

Prvočísla: súvšetky prirodzené čísla, ktoré majú práve dvojrôzne delitele - číslo 1 a seba samého

Zložené čísla: da sa vozložiť na súčin prvočísel

Nesúdeliteľné čísla: sú prirodzené čísla, ktorých najväčší spoločný deliteľ je číslo 1. t.j. nemajú iného spoločného deliteľa okrem 1

Súdeliteľnosť: majú aspoň 1 spoločný deliteľ okrem -

Najväčší spoločný deliteľ: je najväčšie prirodzené číslo, ktoré je deliteľom čísla a a zároveň deliteľom čísla b. Zapisujem NSD(a, b)

Najmenší spoločný násobok: a, b je najmenšie nenulové prirodzené číslo, ktoré je ~~deliteľom~~ deliteľné číslo a a zároveň číslom b

Zadanie 23

nájsť!

~~...~~ podmnožina množiny rovnakých výsledkov náhodného ... pravdepodobnosť

$\emptyset$ - jav nemožný - [0] ... náhodného javu je ...

Ω - jav istý = [1]

Úloha 1

javy sú nezávislé ak na uskutočnenie jedného nemá vplyv na ten druhý

$\Leftrightarrow$ ak $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Popíšte základné pojmy v pravdepodobnosti : jav, istý jav, nemožný jav (uveďte konkrétne príklady). Uveďte Laplaceovu schému, vzťah pre výpočet pravdepodobnosti nezávislých javov a pre opačný jav.

Laplaceova schéma: $P(A) = \frac{m}{n}$ kde m = počet javov priaznivých (všetkých) / n = počet javov náhodného pokusu

Úloha 2

Dokážte , pre každé prirodzené číslo n platí

2. C(n, 2n-1) = C(n, 2n)

$L = 2 \cdot C(n, 2n-1) = 2 \cdot \frac{(2n-1)!}{n! \cdot (2n-1-n)!} \quad \boxed{2 \cdot \frac{(2n-1)!}{n! \cdot (n-1)!}}$

$P = C(n, 2n) = \frac{2n!}{n! \cdot (2n-n)!} = \frac{2n(2n-1)!}{n! \cdot n!} = \frac{2\cancel{n} \cdot (2n-1)!}{n! \cdot \cancel{n}(n-1)!} = \boxed{\frac{2(2n-1)!}{n!(n-1)!}}$

Úloha 3

Vypočítajte súradnice vrchola C rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB, kde A = [2; 4], B = [-2; 6] a vzdialenosť bodu C od strany AB je $v = 2\sqrt{5}$.

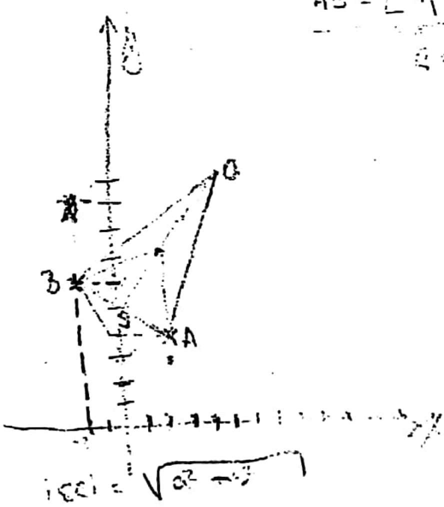
$\vec{AB} = [-4, 2] = \vec{n}_{AB}[2, 4]$ $\quad \vec{SC} = [c_1 - 0, c_2 - 5]$

$S = [0, 5]$

$2x + 4y + c = 0$

$20 + c = 0$

$20 = -c$



$2c_1 + 4c_2 - 20 = 0$

$2c_1 = -4c_2 + 20$

$c_1 = -2c_2 + 10$

$C_1 \; c_1 = -14 + 10, \; c_1 = 4$

$C_2 \; c_1 = -6 + 10, \; c_1 = 4$

$-5 = 4c_2^2 - 40c_2 + 100 + c_2^2 - 10c_2$

$0 = 5c_2^2 - 50c_2 + 105 \quad /:5$

$0 = c_2^2 - 10c_2 + 21$

$D = 100 - 84$

$D = 16$

$\sqrt{D} = 4 \quad c_2 = \frac{10 \pm 4}{2}$

$|SC| = \sqrt{c_1^2 + ...}$

$2\sqrt{5} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 10c_2 + 25}$

$20 = c_1^2 + c_2^2 - 10c_2 + 25$

$-5 = c_1^2 + c_2^2 - 10c_2$

$-5 = (-2c_1 + 10)^2 + c^2 - 10c_2$

$c_1 = -4$

$\cancel{(2n)! \cdot (n)! = (2n-1)! \cdot (n-1)!}$

$\cancel{2n(2n-1)! \cdot n \cdot (n-1)! = (2n-1)! \cdot (n-1)!}$

Úl. č. 2 $\quad 2 \cdot \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$

$$\frac{2\cdot(2n-1)!}{(n-1)!\cdot n!} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$$

$$\frac{2\cdot(2n-1)!}{n\cdot(n-1)!\cdot(n-1)!} = \frac{2n\cdot(2n-1)!}{n^2\cdot(n-1)!\cdot(n-1)!}$$

$$\frac{2\cdot n^2\cdot(2n-1)!}{(n-1)!\cdot(n-1)!} = \frac{2n^2\cdot(2n-1)!}{(n-1)!\cdot(n-1)!}$$

Úl. č. 3: $A=[2;4]$ $B=[-2;6]$ $C=[c_1;c_2]$

$|AB;C| = 2\cdot\sqrt{5}$ $\quad |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$

$= \cancel{v}$

$$|\overleftrightarrow{AB};C| = \frac{|a\cdot c_1+b\cdot c_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\cdot\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(c_1-2)^2+(c_2-4)^2} = \sqrt{(c_1+2)^2+(c_2-6)^2}$$

$\vec{AB} = \vec{s}_{AB} = B-A = [-4;2]$

$\vec{n}_{AB} = [-2;-4]$

$\cancel{c_1^2}-4c_1+\cancel{4}+\cancel{c_2^2}-8c_2+16 = \cancel{c_1^2}+4c_1+\cancel{4}+\cancel{c_2^2}-12c_2+36$

$-8c_1+4c_2 = 20$

$c_2-2c_1=5$

$c_2 = 5+2c_1$

$\overleftrightarrow{AB}: -2x-4y+20=0$

$x+2y-10=0$

$$\frac{|c_1+2\cdot(5+2c_1)-10|}{\sqrt{5}} = 2\cdot\sqrt{5}$$

$|c_1+4c_1+10-10| = 2\cdot 5$

$5c_1 = 10$

$c_1 = 2$

$c_2 = 9$ $\quad C=[2;9]$

Úl. č. 1: jav: alebo udalosť nastáva pri pokuse
je predmetom nášho sledovania

napr. pokus: hod kockou
množina javov: padnutie č. 1; 2; 3; 4; 5 a 6

nemožný jav – nikdy nenastane
napr. pri hode kockou (ak ide o klasickú 6-hrannú)
nikdy nepadne číslo 7
$\Rightarrow$ nemožný jav: padnutie č. 7

istý jav – môže nastať vždy
napr. pri hode kockou padne číslo menšie ako 7
$\Rightarrow$ istý jav: číslo ktoré padne < 7

Laplaceova schéma: $P(A) = \frac{m_A}{m}$ – počet priaznivých výsledkov (čo chceme); m – všetky možné výsledky

zovšeobecnenie $P(A) = \sum P_j$
P_j – pravdepodobnosti priaznivých výsledkov pre jav A

pre opačný jav: $P(A') = 1 - P(A)$

pre nezávislé javy: Bernoulliho schéma
↳ jav A s pravdepodobnosťou p
pravdepodobnosť že pri n-násobnom opakovaní pokusu jav A nastane práve k-krát

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$k \in N$
$k \in \langle 0; n-1 \rangle$

$$P(A) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{opačné udalosti ku A}}$$

~~Úl. č. 2~~

$C(n\ k) = C_k(n) = \binom{n}{k}$

$\cancel{C(n, 2n-1) = C(n, 2n)}$

$\cancel{\binom{n}{2n-1} = \binom{n}{2n}} \quad \cancel{\frac{2n-1}{n} = \frac{2n}{n}}$

$\cancel{\frac{n!}{(2n-1)! \cdot (n-2n+1)!} = \frac{n!}{(2n)! \cdot (n-2n)!}} \quad \frac{(2n-1)!}{n! \cdot (1-n)!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot (-n)!}$

PRAVDEBODOBNOSŤ JAVUA

- označujeme (P(A))
- je definovaná ako súčet pravdepodobností výsledkov priaznivých javu A, čiže $P(A)=\sum_{\omega \in A} p(\omega)$

$\omega \in A$, hovoríme, že výsledok ω je priaznivý javu +

ak má pokus n rovnako pravdepodobných výsledkov tak $\boxed{P(A)=\frac{n_A}{n}}$ $n(A) \Rightarrow$ počet výsledkov priaznivých javu ~~bole~~ A

Laplacova schéma

Z tejto definície vyplýva, že:

pravdepodobnosť nemožného javu sa rovná 0 čiže $P(\emptyset)=0$

pravdepodobnosť istého javu sa rovná 1, čiže $(P(\Omega)=1$

-pravdepodobnosť ľubovoľného javu ~~sa rovná~~ platí $0 \leq P(A) \leq 1$

JAV: alebo udalosť nastáva pri pokuse je predmetom nášho sledovania

napr: pokus hod kockou

množina javov: padnutie 1, 2, 3, 4, 5, 6

nemožný jav: nikdy nenastane

$\Rightarrow$ napr: pri hode kockou nepadne číslo 7

istý jav: môže nastať vždy

napr: pri kocke padne číslo ~~a~~ 7

Preopačný jav: $P(A')=1-P(A)$

Nezávislé javy: Bernoulliho schéma

$\Rightarrow$ jav A s pravdepodobnosťou p pravdepodobnosť že pri násobnom opakovaní pokusu JAV A nastane práve ~~k~~-krát

$k \in N$

$k \in \langle 0, n-1 \rangle$

$$(P(A)=\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$\Rightarrow$ opačné pravdepodobnosti ku a

Gymnázium J. M. Hurbana v Čadci - usporiadaná k-tica ... MATEMATIKA

Množina bez opakovania $V_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Zadanie 24

permutácie $P = n!$

→ do skupiny vyberieme všetky n prvky a meníme len poradie

Kombinácie k-členná kombinácia z n prvkov ... je ...

$C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Úloha 1

Vysvetlite pojmy variácie bez opakovania a s opakovaním, permutácie, kombinácie, vzťahy pre ich výpočet a príklady z praxe.

Úloha 2

Dokážte, že $\forall x, y \in R^+ : \frac{x^4+y^4}{2} \geq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2}$ $\Rightarrow \frac{x^4+y^4}{2} \geq \frac{x^4+y^3x+x^3y+y^4}{4}$

$2x^4+2y^4 \geq x^4+y^3x+x^3y+y^4$

$x^4+y^4 \geq y^3x+x^3y$

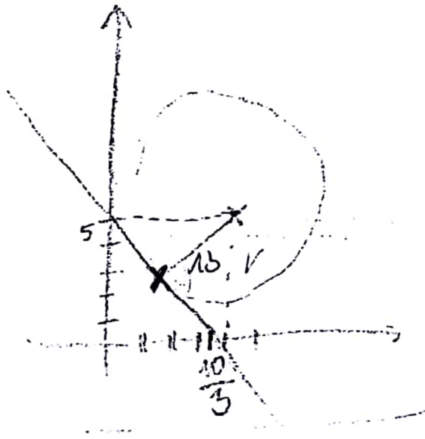
$x^4-x^3y-y^3x+y^4 \geq 0$

$x^3(x-y) - y^3(x-y) \geq 0$

$(x^3-y^3)\cdot(x-y) \geq 0$

Úloha 3

Zistite, ktorá kružnica so stredom S = [5; 4] sa dotýka priamky 3x + 2y – 10 = 0 a vypočítajte súradnice ich spoločného bodu.



$2y = 10 - 3x$

$y = 5$

$2y - 10 = 0$

$2y = 10$

$y = 5$

$(x-5)^2 + (y-4)^2 = r^2$

$S[5,4]$ $\quad p: 3x + 2y - 10 = 0$

$r = |Sp| = \frac{|3\cdot5+2\cdot4-10|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|15+8-10|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \boxed{\sqrt{13}}$

$k: (x-5)^2 + (y-4)^2 = 13$

$T \in k \cap p: \quad (x-5)^2 + (y-4)^2 = 13$

$3x + 2y - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{10-3x}{2}}$

$(x-5)^2 + \left(\frac{10-3x}{2} - 4\right)^2 = 13$

$x^2 - 10x + 25 + \frac{4-12x+9x^2}{4} = 13 \quad / \cdot 4$

$4x^2 - 40x + 100 + 4 - 12x + 9x^2 = 52$

$13x^2 - 52x + 52 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$T = [2, 2]$

5) Kombinatorika

Variácie bez opakovania

- nech $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $\mathcal{M}$ je n-prvková konečná množina;
  variácie k-tej triedy z n-prvkovej množiny $\mathcal{M}$ bez opakovania sa naz. $\forall$ usporiadaná k-tica, ktorej zložky sú navzájom rôzne prvky z $\mathcal{M}$
- počet variácií: $V_k(n)$, $V(k,n)$ $\quad V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Do rady žiakov zvolili 7 žiakov. Koľkými rôznymi spôsobmi môžu zastať 3 pozície?

$n = 7$, $k = 4$ $\quad V_4(7) = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$

Permutácie bez opakovania

- $P(n) = V_k(n)$; $k = n$ $\quad P(n) = n!$

Variácie s opakovaním $V'_k(n)$

~~variácie~~ $\forall$ usporiadaná k-tica zostavená z prvkov mn. $\mathcal{M}$

~~V...~~

Permutácie s opakovaním $\quad P'_{k_1 \ldots k_n}(k) = \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}$

- $\forall$ usporiadané k-tice, v ktorých 1. prvok z mn. $\mathcal{M}$ sa opakuje k_1-krát, druhý k_2-krát ... k_n-tý prvok n-krát
- z k_1 prvkov prvého druhu, k_2 prvkov druhého druhu, ... k_n prvkov n-tého druhu

8 študentov v 3 izbách – 2x 3-posteľové, 1x 2-posteľová. Počet spôsobov?

$k = 8$ $\; k_1 = 3$ $\; k_2 = 3$ $\; k_3 = 2$ $\quad P'_{3,3,2}(8) = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$!

Kombinácie bez opakovania

- $\forall$ k-prvková podmnožina množiny $\mathcal{M}$ $\quad C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

  $C_k(n)$, $C(k,n)$

Vytváranie k-členných družstiev

Scanned by CamScanner

Př. č. 3

$k: (x-5)^2+(y-4)^2=r^2$

$x^2-10x+25+y^2-8y+16=r^2$

$x^2+y^2-10x-8y+41-r^2=0$

$t: 3x+2y-10=0$

$y=\frac{10-3x}{2}$

$x^2+\left(\frac{10-3x}{2}\right)^2-10x-8\left(\frac{10-3x}{2}\right)+41-r^2=0$

$x^2+\frac{100-60x+9x^2}{4}-10x-40+12x+41-r^2=0$

$x^2+25-15x+\frac{9}{4}x^2-10x-40+12x+41-r^2=0$

$k: (x-5)^2+(y-4)^2=13$

$S=[5;4]$

$t: 3x+2y-10=0$

$T=[2;2]$

$\frac{13}{4}x^2-13x+26-r^2=0$

$D=169-4\cdot\frac{13}{4}\cdot(26-r^2)$

$=13r^2-169$

$D=0$

$0=13r^2-169$

$169=13r^2$

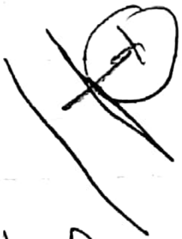
$r^2=13$

$x=\frac{13}{\frac{13}{2}}=\frac{26}{13}=2$

$y=\frac{10-3\cdot 2}{2}=\frac{4}{2}=2$

$(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$

$p: 3x+2y-10=0$



$p=c$

$r(S,p)=\frac{|15+8-10|}{\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\frac{13\sqrt{13}}{}$

$r(S,p)=\frac{|15+8-10|}{\sqrt{9+4}}=$

$(x-5)^2+(y-4)=13$

$y=\frac{10-3x}{2}$

$(x-5$

$x^2-10x+25+\frac{100-60x+9x^2}{4}-8\cdot\frac{10-3x}{2}+16=13$

$x^2-10x+\cancel{25}+\cancel{25}-15x+\frac{9}{4}x^2-\cancel{40}+12x+3=0$

$\frac{13}{4}x^2+13x+13=0$

$D=13^2-\cancel{4}\cdot\frac{13}{\cancel{4}}\cdot 13$

$D=169$

$(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$ $\quad x^2-10x+25+\frac{100-60x+9x^2}{4}+5\,8$

$Sp=\frac{|15+8-10|}{\sqrt{9+4}}=\underline{\underline{\sqrt{13}}}$.

$y=\frac{10-3x}{2}$

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2}$$

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geq \frac{x^4+xy^3+x^3y+y^4}{4} \quad |:4$$

$$2x^4+2y^4 \geq x^4+xy^3+x^3y+y^4$$
$$x^4+y^4 \geq xy^3+x^3y$$
$$x^4-x^3y+y^4-xy^3 \geq 0$$

$$x^3(x-y)+y^3(y-x) \geq 0$$

$$x^3(x-y)-y^3(x-y) \geq 0$$
$$(x-y)^2(x^3-y^3) \geq 0$$

$$(x-y)$$

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2}$$

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geq \frac{x^4+xy^3+yx^3+y^4}{4} \quad /4$$

$$2x^4+2y^4 \geq x^4+xy^3+yx^3+y^4$$
$$x^4-xy^3+y^3-yx^3 \geq 0$$

$$x^3(x-y)-y^3(x-y) \geq 0$$

$$(x-y) \cdot (x^3-y^3) \geq 0$$
$$(x-y)^2 \cdot (x^2+xy+y^2) \geq 0$$

① Variacie bez opakovania
- nech M je neprázdna množina, ktorá obsahuje n-prvkov
- každá k-tica vybraná z množiny M, tak že sa žiaden prvok neopakuje sa nazýva variacia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania.

Vzťah: $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Variacie s opakovaním
je usporiadaná k-tica zostavená z n prvkov, tak, že každý prvok sa vyskytuje k-krát

Vzťah $V_k(n) = n^k$

Do valy žiakov zvolili 7 žiakov: Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme z ~~zostavit~~ 3 pozície

$$V_3(7) = \frac{7!}{4!}$$

Štátnu poznávaciu značku 3 písmená 4 číslice

$$p = V_3'(28) - V_4(10) = 28^3 \cdot 10^4$$

Permutacie - špeciálny prípad variacii
- vypadujeme usporiadanie, všetky možné usporiadania zo všetkých prvkov

$$P = n!$$

permutacie s opakovaním: missispi

$$P(k_1, k_2, k) = \frac{n!}{k_1! k_2!}$$

Pr: ABC, PE
Všetky možné poradia ich
zoradenia

$P = n!$

$\neq A$

Kombinácie – nech M ~~je nepra~~ konečná
množina s n-prvkami
→ každá k-prvková podmnožina vytvorená
z n prvkov, tak že sa prvky neopakujú, sa
nazýva kombinácia k-tej triedy n-prvkov
bez opakovania $C(k,n) = \frac{n!}{(k-n)!\,k!}$

Koľko je vo mužstve ma 20 hráčov — Koľko zostavú?
- 13 útočníkov → 3 - útočníci
5 obrancov — 2 - obrancovia
2 brankárov — 1 - brankár

$P = \binom{13}{3} \cdot \binom{5}{2}$

Zadanie 25

n! - faktoriál

$n! = n.(n-1).(n-2)$

$5 = 5.(5-1).(5-2)\ldots$

kombinačné číslo $= \binom{n}{k}$

čítame n nad k

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Úloha 1

Vysvetlite pojmy: n!, kombinačné číslo, uveďte vlastnosti kombinačných čísel.

vlastnosti

$\binom{n}{1} = n$ $\quad \binom{n}{n} = 1$ $\quad \binom{n}{0} = 1$

$\binom{0}{0} = 1$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Úloha 2

V pravouhlom trojuholníku s preponou c je daná odvesna a = 4 cm a ťažnica $t_a = 6$ cm. Dokážte, že $t_a : t_b = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Úloha 3

Sú dané priamky a: $(1-p)x - 12y + 3 - q = 0$, b: $x - 3y + 5 = 0$. Určte ich vzájomnú polohu vzhľadom na parametre p, q.

Ú. č. 3

$a: (1-p)x - 12y + 3 - q = 0 \quad \vec{n_a} = [1-p; -12] \quad \vec{s_a} = [12; 1-p]$

$b: x - 3y + 5 = 0 \quad \vec{n_b}\,[1; -3] \quad \vec{s_b}\,[3; 1]$

$\vec{s_a} = k \cdot \vec{s_b}$

$x: \quad 12 = k \cdot 3 \Rightarrow k = 4$

$y: \quad 1 - p = k \cdot 1 \qquad k = 4$

$1 - p = 4$

$p = -3$

$a \equiv b \quad p = -3$

$c_a = k \cdot c_b$

$3 - q = k \cdot 5 \quad k = 4$

$3 - q = 20$

$q = -17$

$a \parallel b \quad p = -3 \quad q = (-\infty; -17) \cup (-17; \infty)$

$\vec{s_a} \neq k \cdot \vec{s_b} \Rightarrow p \neq -3 \qquad q = \mathbb{R}$

$p = (-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$

$(1-p)x - 12y + 3 - q = 0$

$x - 3y + 5 = 0$

$x = 3y - 5$

$(1-p)(3y-5) - 12y + 3 - q = 0$

$3y - 5 - 3py + 5p - 12y + 3 - q = 0$

$y \cdot (-3p - 9) - 2 - q + 5p = 0$

$y = \dfrac{5p - 2 - q}{3p + 9}$

$x = \cancel{3} \cdot \dfrac{5p - 2 - q}{\cancel{3} \cdot (p+3)} - 5$

$x = \dfrac{5p - 2 - q - 5p - 15}{p + 3}$

$x = \dfrac{-17 - q}{p + 3}$

25) Kombinačné číslo a faktoriál

$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1$

$0! = 1$

faktoriál je tiež počet permutácií z n prvkou

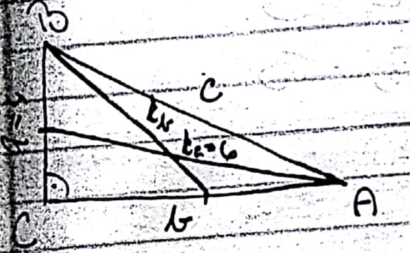
k-tej triedy z n prvkovej množiny

Kombinačné číslo - počet kombinácií o k prvkoch z n prvkov

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,n!} = \binom{n}{n-k} \quad , n \geq k$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \text{pascalov } \triangle$$

Úl. č. 2



$2^2 + b^2 = 6^2$

$b^2 = 32$

$b = \sqrt{32} = 4\cdot\sqrt{2}$

$4^2 + (2\cdot\sqrt{2})^2 = t_b^2$

$t_b^2 = 24$

$t_b = \sqrt{24} = 2\cdot\sqrt{6}$

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{6}{2\cdot\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Scanned by CamScanner

MO 26:

METRICKÉ VZŤAHY

Metrika

- niečo, čo je merateľné → uhly a vzdialenosti

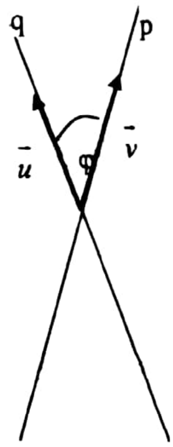
E_2:

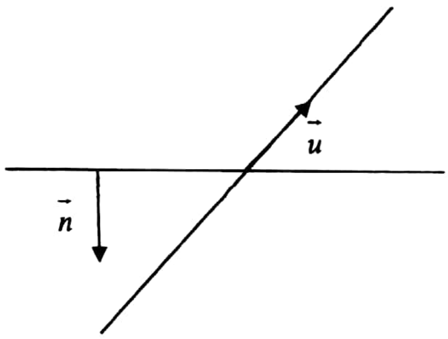
Vzdialenosť 2 bodov

- vytvoríme vektor, veľkosť vektora = vzdialenosť dvoch bodov
- $A[a_1, a_2]$
  $B[b_1, b_2]$
  $\overrightarrow{AB} = (B\text{-}A) = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (u, v)$
  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{u^2 - v^2}$ = vzdialenosť dvoch bodov A, B

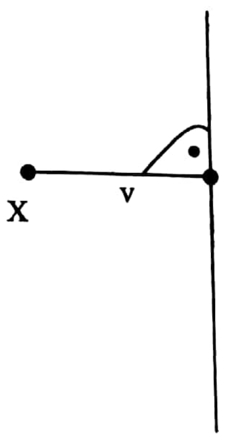
Uhol 2 priamok v rovine

- za uhol 2 priamok považujeme vždy ten menší uhol
  → absolútna hodnota v čitateli, pretože uvažujeme o ostrom uhle
- $\vec{u}, \vec{v}$ → sú smerové vektory
- $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$
- ak poznáme normálové vektory → počítame rovnako
- ak poznáme 1 smerový a 1 normálový vektor
  → jeden si vyjadríme ako druhý





Vzdialenosť bodu od priamky:



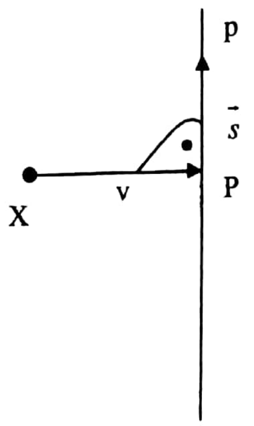
p: $ax + by + c = 0$

$X[x_1; x_2]$

$$v = \frac{|ax_1 + bx_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

E_3:

Vzdialenosť bodu od priamky:



p: $x = a_1 + t.s_1$
$y = a_2 + t.s_2$
$z = a_3 + t.s_3$; $t \in R$

$X[x_1; x_2; x_3]$

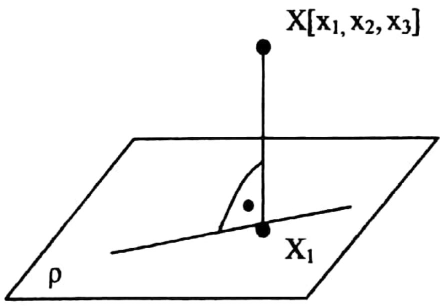
$\overrightarrow{XP} = (P - X) =$
$= (a_1 + t.s_1 - x_1;\ a_2 + t.s_2 - x_2;\ a_3 + t.s_3 - x_3)$

→ keď skalárny súčin = 0, je to kolmica

$\overrightarrow{XP} \cdot \vec{s} = 0$

→ zo sústavy rovníc vyjadríme t ⇒
vypočítame konkrétne $\overrightarrow{XP}$ a potom $|\overrightarrow{XP}|$

Vzdialenosť bodu od roviny:



X_1 – kolmý priemet bodu X do roviny ρ

všeobecná rovnica:
ρ: $ax + by + cz + d = 0$

→ na parametrickú neexistuje vzorec vzdialenosti

$$v = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Uhol 2 rovín:

- 2 normálové vektory (priamky p a roviny ρ)

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_p} . \overrightarrow{n_\rho}|}{|\overrightarrow{n_p}| |\overrightarrow{n_\rho}|}$$

Uhol priamky a roviny:

- smerový vektor priamky a normálový vektor roviny

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{u_p} . \overrightarrow{n_\rho}|}{|\overrightarrow{u_p}| |\overrightarrow{n_\rho}|}$$

úl. č. 2

$$10 \begin{cases} 6+3+1 \cdot 3 \\ 6+2+2 \cdot 3 \\ 5+4+1 \cdot 3 \\ 5+3+2 \cdot 3 \\ 4+4+2 \cdot 3 \\ 4+3+3 \cdot 3 \end{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 18 = \frac{18}{216} = 0{,}08\overline{33}$$

$$\Rightarrow 8{,}33\,\%$$

$$9 \begin{cases} 6+2+1 \cdot 3 \\ 5+2+2 \cdot 3 \\ 5+3+1 \cdot 3 \\ 4+3+2 \cdot 3 \\ 3+3+3 \cdot 1 \end{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 13 = \frac{13}{216} = 0{,}06018$$

$$\Rightarrow 6{,}02\,\%$$

4 4 2 2

Úl. č. 3

b) $\frac{2}{x} - 2 \le \frac{3}{x+1}$

$\frac{2-2x}{x} - \frac{3}{x+1} \le 0$

$\frac{(2-2x)\cdot(x+1) - 3x}{x\cdot(x+1)} < 0$

$\frac{\cancel{2x}+2-2x^2-\cancel{2x}-3x}{x\cdot(x+1)} \le 0$

$\frac{-2x^2-3x+2}{x\cdot(x+1)} \le 0$

$\frac{(x+2)\cdot(x-\frac{1}{4})}{x\cdot(x+1)} \le 0$

$x_0 = -2; -1; 0; \frac{1}{4}$

$\frac{+}{+}\oplus$, $\frac{-}{+}\ominus$, $\frac{-}{-}\oplus$, $\ominus$, $\frac{+}{+}\oplus$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad \frac{1}{4}$

$x \ne 0; -1$

$K = \langle -2; -1) \cup (0; \frac{1}{4}\rangle$

$-2x^2-3x+2=0$

$2x^2+3x-2=0$

$D = 9+16 = 25$

$\sqrt{D} = 5$

$x_{1,2} = \frac{-3\pm 5}{4} \Big\langle {-2 \atop \frac{1}{4}}$

Úl. č. 3

a) $\frac{|2x-2|}{2-x} < 1$

$x \ne 2$

$2x-2=0$

$x=1$

a) $(-\infty; 1)$ $\quad 2-2x$

b) $\langle 1; \infty)$ $\quad 2x-2$

a) $\frac{2-2x}{2-x} - 1 < 0$

$\frac{2-2x-2+x}{2-x} < 0$

$\frac{-x}{2-x} < 0$

$x_0 = 0; 2$

$\frac{+}{+}\oplus$, $\frac{-}{+}\ominus$, $\frac{-}{-}\oplus$

$0 \quad 2$

$K_1 = (0; 1)$

b) $\frac{2x-2}{2-x} - 1 < 0$

$\frac{2x-2-2+x}{2-x} < 0$

$\frac{3x-4}{2-x} < 0$

$x_0 = \frac{4}{3}; 2$

$\frac{-}{+}\ominus$, $\oplus$, $\frac{+}{-}\ominus$

$\frac{4}{3} \quad 2$

$K_2 = \langle 1; \frac{4}{3}) \cup (2; \infty)$

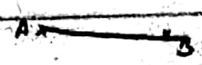
$K = K_1 \cup K_2 = (0; \frac{4}{3}) \cup (2; \infty)$

26 Analytika - vzdialenosti

a) v rovine

b) v priestore

1. bod - bod = dĺžka úsečky AB



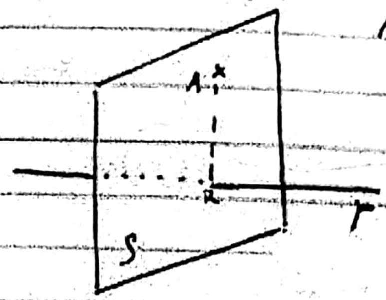
$$|AB| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$$

2. bod - priamka

↳ cez bod A spustím na priamku p kolmicu

↳ cez bod A preložím rovinu kolmú na priamku

$A \in \rho,\ \rho \perp p$

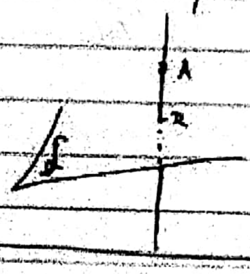


$$|A,p| = \frac{|a_1 a + a_2 b + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$p: ax+by+c=0$

3. bod - rovina

↳ cez bod A spustím kolmicu na rovinu



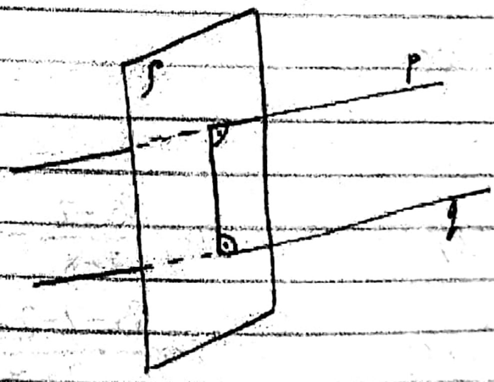
$$|A\rho| = \frac{|a_1 a + a_2 b + a_3 c + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\rho: ax+by+cz+d=0$

4. 2 rovnobežné priamky

↳ zvolím bod na jednej z nich a spustím kolmicu na druhú

↳ cez obe priamky preložím kolmú rovinu



Gymnázium J. M. Hurbana v Čadci

MATEMATIKA

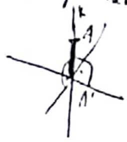
Zadanie 26

Stereometria

vzdialenosť bodu od priamky určíme ako vzdialenosť bodu od priamky v rovine

označujeme $|AP|$

vzdialenosť bodu A od roviny ρ – je vzdialenosť bodu A od pravouhlého priemetu A' do ρ

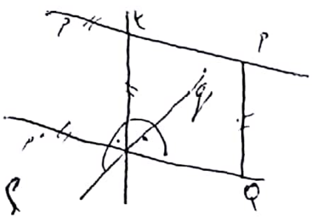


Úloha 1

je úsečka $|AB|$ A, B

Objasnite pojem vzdialenosť dvoch bodov, vzdialenosť bodu od priamky, bodu od roviny, vzdialenosť rovnobežných priamok a rovín, vzdialenosť priamky a roviny s ňou rovnobežnej. Načrtnite dané situácie v ľubovoľnom rovnobežnom premietaní.

→ vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky od tejto roviny



Úloha 2

Dokážte, že pri hode troma farebnými kockami je hodiť súčet 10 pravdepodobnejšie ako hodiť súčet 9.

1 2 6	6	2 3 4	6	
1 3 5	6	3 3 3	1	
1 4 4	3			
5 2 2	3			25

6 1 3	6
6 2 2	3
5 4 1	6
5 3 2	6
4 3 3	3
4 4 2	3

27

Úloha 3

Riešte a) v množine R $\dfrac{|2x-2|}{2-x} < 1$

b) v množine Z $\dfrac{2}{x} - 2 \leq \dfrac{3}{x+1}$

b) $2(x+1) - 2x(x+1) \leq 3x$

$2x + 2 - 2x^2 - 2x \leq 3x$

$-2x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$D = 9 + 16$

$D = 25$

$\sqrt{D} = 5$

b) $\dfrac{2}{x} - 2 \leq \dfrac{3}{x+1}$ $\Big/ -\dfrac{3}{x+1}$

$\dfrac{2}{x} - 2 - \dfrac{3}{x+1} \leq 0$

$\dfrac{2x + 2 + 2x(x+1) - 3x}{x(x+1)} \leq 0$

$\dfrac{2x + 2 - 2x^2 - 2x - 3x}{x(x+1)} \leq 0$

$\dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x(x+1)} \geq 0$

$D = 9 - 4 \cdot (2 \cdot (2)) = 9 + 16$

$\dfrac{2x-2}{2-x} < 1$

$\dfrac{2x-2}{2-x} - 1 < 0$

$\dfrac{2x - 2 - 2 + x}{2-x} < 0$

$\dfrac{3x-4}{2-x} \leq 0$

$\dfrac{2-2x}{2-x} < 1$

$\dfrac{2 - 2x - 2 + x}{2-x} < 0$

$\dfrac{-x}{2-x}$

$x \in (0, 2)$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=}^{n} (x - \bar{x})^2}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1} (x - \bar{x})^2}$$

Gymnázium J. M. Hurbana v Čadci MATEMATIKA

Zadanie 27

št. súbor: množina prvkov s l. majú spoločné vlastnosti
ar. priemer: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 \dots x_n}{n}$
modus: hodnota s najväčšou početnosťou
medián - prostredná hodnota
smerodajná odchýlka: druhá odmocnina rozptylu
rozptyl: priemer druhých mocnín odchýlok od aritmetického priemeru

Úloha 1

Definujte základné pojmy: štatistický súbor, aritmetický priemer, modus, medián, smerodajná odchýlka, rozptyl.
Uveďte spôsoby zobrazovania štatistického súboru - rôzne druhy grafov (polygón, histogram).

Úloha 2

Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo a platí : $a^3 + 1 \geq a + a^2$

Úloha 3

Vysvetlite postup, ako zostrojíte tetivový štvoruholník ABCD, ak sú dané tieto jeho prvky:
$|AB| = 5cm, |AC| = 8cm, |AD| = 7cm, \beta = 120^o$.

1.) $A \in E_2$
2.) $k_1; k_4 (A, 5$
3.) $k_2 (A, 8)$
4.) $k_3 (A, 7)$
5.) $B \in k_1$
6.) $|\sphericalangle ABC| = 120°$
7.) $C \in k_2$

TETIVOVÝ ▱ => opísaná ○ => osi strán

8.) osi strán AB; AC
9.) priesečník osí S
10.) $k_1 (S; |SA|)$

Úl. č. 1 štatistický súbor – konečná neprázdna množina
– jej prvky sú napr. osoby, veci, udalosti

aritmetický priemer – $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

– je charakteristikou polohy => okolo neho sú rozmiestnené jednotlivé hodnoty $x_1, \dots, x_n$

– $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i n_i$ => vážený aritmetický priemer

váha

modus – mod(x) – najčastejšie sa vyskytujúci prvok v súbore
medián – med(x) – prostredný prvok (hodnota) v súbore ak je usporiadaný vzostupne

charakteristika polohy

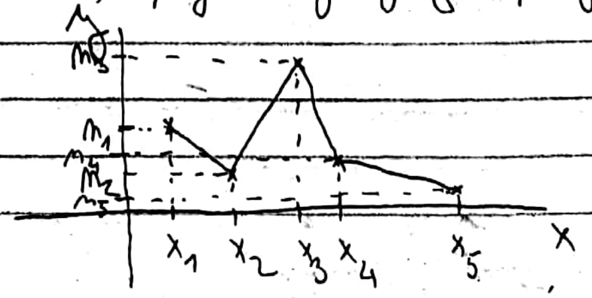
smerodajná odchýlka – určuje ako veľmi sa hodnoty v súbore odchyľujú od aritmetického priemeru

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

rozptyl – určuje veľkosť odchýlky

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

zobrazovanie: 1) spojnicový graf (polygón početností)



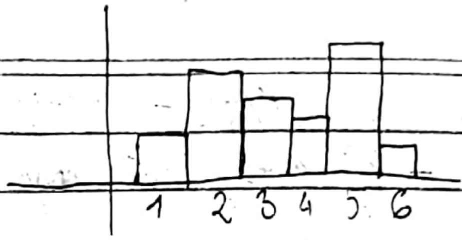
os x = hodnoty $x_1, \dots, x_n$
os y = početnosti $n_1, \dots, n_n$

relatívne početnosti $\nu_1, \dots, \nu_n$

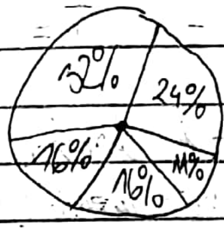
$$\nu_n = \frac{n_n}{n}$$

Scanned by CamScanner

2, stĺpcový (histogram)



3, kruhový diagram



Úl. č. 2

$a^3+1 \geq a+a^2$ $\quad a \in \mathbb{R}^+$

$\cancel{(a+1)}\cdot(a^2-a+1) \geq a\cdot\cancel{(a+1)}$

$(a^2-a+1) \geq a$

$a^2-2a+1 \geq 0$

$(a-1)(a-1) \geq 0$ $\quad$ platí

$a_0 = 1$

$a \in \langle 1; \infty)$

Úl. č. 3

$|AB| = 5cm$ $\quad |AC| = 8cm$ $\quad |AD| = 7cm$ $\quad \beta = 120°$

1. AB
2. $C \in k_1(A; 8)$
3. BX; $ABX = \beta = 120°$
4. $C \in k_1 \cap BX$
5. $D \in G = \{X; AXC = (180° - \beta)\}$
6. $D \in k_2(A; 7)$
7. $D \in k_2 \cap G$
8. DC

tetivový štvoruholník

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

Zadanie 28

Objem telesa je kladné číslo priradené telesu:
- zhodné telesá majú rovnaké objemy
- ak je teleso súčasťou druhého telesa potom je jeho objem je menší ako objem druhého telesa

Úloha 1

Povrch telesa: je mierou jeho hranice
- vyjadruje súčet obsahov plôch stien a podstáv

Vysvetlite pojem povrch telesa, objem telesa. Uveďte príklady telies a vzorce pre výpočet ich objemu a povrchu. Uveďte, ktoré z telies sú rotačné.

kváder: $V = S_p \cdot v$, $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$

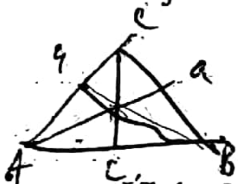
ihlan: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$, $S = S_p + S_{pl}$

rotačný valec: $V = \pi r^2 v$, $S = 2\pi r(r+v)$

guľa: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$

Úloha 2

Dokážte, že v trojuholníku ABC platí: $\frac{3}{4} O < t_a + t_b + t_c$, kde O je obvod trojuholníka ABC.



$\frac{2}{3} t_a + \frac{2}{3} t_b > c$

$\frac{2}{3} t_b + \frac{2}{3} t_c > a$

$\frac{2}{3} t_a + \frac{2}{3} t_c > b$

$\frac{4}{3} t_a + \frac{4}{3} t_b + \frac{4}{3} t_c > a + b + c$

$\frac{4}{3}(t_a + t_b + t_c) > a + b + c \quad / \cdot 3$

$4(t_a + t_b + t_c) > 3O \quad / : 4$

$t_a + t_b + t_c > O \frac{3}{4}$

Úloha 3

Napíšte rovnicu kružníc, ktoré sa dotýkajú priamok p: $2x - 3y - 10 = 0$, q: $3x - 2y + 5 = 0$.
Stred kružnice leží na priamke m: $4x - 5y - 3 = 0$.

$r = \frac{|2s_1 - 3s_2 - 10|}{\sqrt{13}}$ $\quad r = \frac{|3s_1 - 2s_2 + 5|}{\sqrt{13}}$

$4s_1 - 5s_2 - 3 = 0 \Rightarrow s_1 = \frac{5s_2 + 3}{4}$

$\left|2 \cdot \frac{5s_2 + 3}{4} - 3s_2 - 10\right| = \left|3 \cdot \frac{5s_2 + 3}{4} - 2s_2 + 5\right|$

$2 \cdot \frac{5s_2 + 3}{4} - 3s_2 - 10 = 3\frac{5s_2 + 3}{4} - 2s_2 + 5 \quad / \cdot 4$

$10s_2 + 6 - 12s_2 - 40 = 15s_2 + 9 - 8s_2 + 20$

$-2s_2 - 34 = 7s_2 + 29$

$9s_2 = -63$

$\boxed{s_2 = -7}$

$s_1 = \frac{5 \cdot (-7) + 3}{4} = \boxed{-8}$

$r = \frac{|-16 + 21 - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

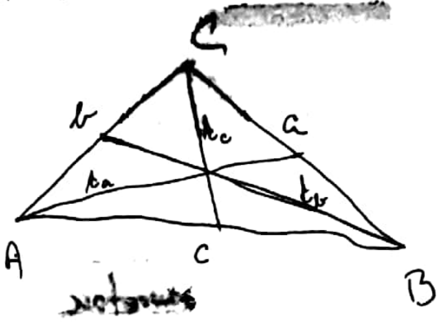
$k_1: (x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}$

$\boxed{s_1 = 2}$

$r = \frac{|4 \cdot 3 \ldots|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$

$k_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}$

Úl. č. 2



$$\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_c > b$$
$$\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b > c$$
$$\frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_b > a$$

trojuholníková nerovnosť

$$\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_b > a+b+c$$

$$\frac{4}{3}t_a + \frac{4}{3}t_b + \frac{4}{3}t_c > a+b+c \quad / \cdot \frac{3}{4}$$

$$t_a + t_b + t_c > \frac{3}{4}\cdot \underbrace{(a+b+c)}_{o}$$

Úl. č. 3 $\quad a: 2x-3y-10=0 \quad b: 3x-2y+5=0 \quad c: 4x-5y-3=0$

$S=[s_1; s_2]$

$|S;a| = |S;b| = r$

$$\frac{|2s_1 - 3s_2 - 10|}{\cancel{\sqrt{4+9}}} = \frac{|3s_1 - 2s_2 + 5|}{\cancel{\sqrt{4+9}}}$$

$S \in c$

$\Rightarrow 4s_1 - 5s_2 - 3 = 0$

$\Rightarrow s_1 = \frac{3+5s_2}{4}$

$$\left|\cancel{2}\cdot \frac{3+5s_2}{\cancel{4}\,2} - 3s_2 - 10\right| = \left|3\cdot\frac{3+5s_2}{4} - 2s_2 + 5\right|$$

$$\frac{|3+5s_2-6s_2-20|}{2} = \frac{|9+15s_2-8s_2+20|}{4}$$

$$4\cdot|-17-s_2| = 2\cdot|7s_2+29|$$

$$2|-17-s_2| = |7s_2+29|$$

$(-\infty; -17)$	$-17-s_2$	$-7s_2-29$
$\langle -17; -\frac{29}{7})$	$17+s_2$	$-7s_2-29$
$\langle -\frac{29}{7}; \infty)$	$17+s_2$	$7s_2+29$

i) $(-17-s_2)\cdot 2 = -7s_2 - 29$ $\qquad 5s_2 = 5$

$-34 - 2s_2 = -7s_2 - 29$ $\qquad s_2 = 1$

Scanned by CamScanner

28) Telesá, vzorce na povrch, objem

Stereometria - zaoberá sa geometrickými útvarmi v priestore

Povrch telesa - súčet obsahov mnohouholníkov, tvoriacich hranicu telesa

Objem telesa - ~~súčet~~ objem časti priestoru, ohraničenej ~~mnohouholníkmi~~ a ~~útvarov~~ množinou mnohouholníkov

A) Telesá ihlanovitého typu = kolmé a šikmé

Povrch - súčet ~~pod~~ obsahov podstáv a bočných stien

Objem - obsah podstavy násobený výškou

Hranol: kocka $V = a^3$, $P = 6a^2$ kváder $V = a \cdot b \cdot c$, $P = 2(a \cdot b + b \cdot c + ac)$

B) Telesá ihlanovitého typu

Ihlan:

3-boký $V = S_p \cdot \frac{v}{6}$; P - súčet S trojuholníkov +

n-boký $V = S_p \cdot \frac{v}{3}$

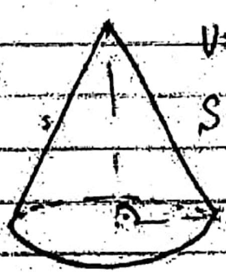
Zrezaný ihlan $V = \frac{v}{3}\left(P_1 + \sqrt{P_1}\sqrt{P_2} + P_2\right)$

C) Rotačné telesá - vznikli rotáciou 2D objektu okolo osi

Valec - obdĺžnik Kužeľ - Δ Zrezaný kužeľ - pravouhlý lichobežník

$V = \pi r^2 v$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$

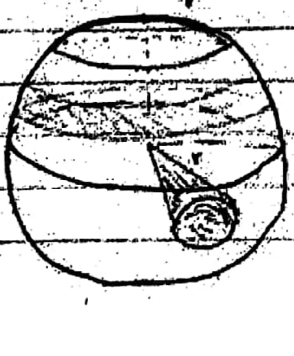


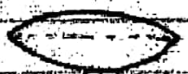
$V = \frac{\pi r^2 v}{3}$

$S = \pi r^2 + \pi r s$

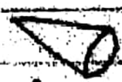
$V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

Guľa - polkruh





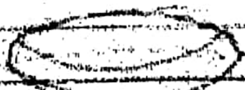
Guľový odsek



Guľový výsek

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$S = 4\pi r^2$



Guľový pás

Gymnázium J. M. Hurbana v Čadci MATEMATIKA

Zadanie 29

~~Zobrazenie v rovine~~ je zhodné zobrazenie, ak obraz XY je X'Y' ~~platí |XY| = |X'Y'|~~

- obrazom priamky AB je priamka A'B'

zhodnosť Δ - dva Δ sú zhodné práve vtedy keď sa kryjú. vyplývajú

veta sss každé dva Δ sa zhodujú vo všetkých 3 stranách, sú zhodné

Úloha 1

usu: -||- v jednej strane a uhloch priľahlých sú zhodné

sus -||- v dvoch stranách a uhle nimi zovretom sú zhodné

Definujte zhodnosť a podobnosť útvarov. Uveďte vety o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov. Vysvetlite využitie pomeru podobnosti pri zmene dĺžky úsečky.

podobnosť Δ - Δ ABC je podobný Δ A'B'C' ak existuje $k \in R$ že $|A'B'| = k|AB| \wedge |B'C'|$ ↳ koeficient (pomer) podobnosti

veta uu - každé 2 Δ sa zhodujú v 2 uhloch sú podobné

sus - -||- zhodujú sa v pomere dĺžok dvoch strán a uhle zovretom, sú podobné

Úloha 2

Ssu - -||- zhodujú sa v pomere dĺžok dvoch strán a uhle ležiacom oproti väčšej z nich

Dokážte, že

a) pre každé prirodzené číslo n platí: ak číslo n dáva pri delení číslom 15 zvyšok 7, potom číslo 8n dáva pri delení číslom 5 zvyšok 1

$8n = 8(15k+7) = 120k + 56 = 5(24k+11) + 1$

b) súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 =$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) \Rightarrow 3|$

Úloha 3

Určte a, b∈R tak, aby graf funkcie $y = a.\log_2(x+1) + b$ prechádzal bodmi $A = [3; 1]$, $B = \left[-\frac{7}{8}; -9\right]$. Zistite, či bod $C = [-3; -5]$ leží na grafe tejto funkcie. Ako treba zmeniť zápis funkcie f, aby $D(f) = (0, \infty)$?

$y = a\log_2(x+1) + b$

$1 = a\log_2(3+1) + b$

$-9 = a\log_2\left(-\frac{7}{8}+1\right) + b$

$1 = a\log_2(4) + b \Rightarrow 1 = 2a + b \Rightarrow b = 1 - 2a$

$-9 = a\log_2\left(\frac{1}{2^{-3}}\right) + b \Rightarrow -9 = -3a + b$

$-9 = -3a + 1 - 2a$

$-10 = -5a$

$a = 2$

$1 = 2 \cdot 2 + b$

$y = 2\log_2(x+1) - 3$

$y = -5 = 2\log_2(-2) - 3 \Rightarrow$ ne

$D(f) = (-1, \infty) \Rightarrow$ teraz

TERAZ: $D(f) = (0, \infty)$

$f: y = 2\log_2 x - 3$

Úl. č. 2

a) $n = 15k + 7 \Rightarrow 8n = 5l + 1$

$n = 15q + 7 \Rightarrow 8n = 120q + 56 \Rightarrow 8n = 5\cdot(24q + 11) + 1$

$= 5l + 1$

b) $a^3 + b^3 + c^3$

$(b-1)^3 + b^3 + (b+1)^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 + b^3 + b^3 + 3b^2 + 3b + 1$

$= 3b^3 + 6b = 3\cdot(b^3 + 3b) / 3$

$3 / a^3 + b^3 + c^3$

Úl. č. 3

$f: y = a\cdot\log_2(x+1) + b$

$A[3;1]$

$1 = a\cdot\log_2 4 + b$

$1 = 2a + b$

$b = 1 - 2a$

$B[-\frac{7}{8}; -9]$

$-9 = a\cdot\log_2\frac{1}{8} + b$

$-9 = -3a + 1 - 2a$

$-10 = -5a$

$a = 2$

$b = -3$

$f: y = 2\log_2(x+1) - 3$

$D(f) = (-1; \infty)$

$y = 2\cdot\log_2 x - 3$

$D(f) = (0; \infty)$

$C[-3; -5]$

$-5 = 2\cdot\log_2(-2) - 3$

$-2 \not> 0$

$C \notin f$

2

(29) Podobnosť a zhodnosť △

Podobnosť - dva útvary sú podobné, ak pomery dĺžok dvojíc odpovedajúcich si úsečiek sa rovnajú ($\exists\, k \in \mathbb{R}$; k - koeficient podobnosti)

- zväčšenie - $k > 1$
- zmenšenie - $k < 1$
- zhodnosť - $k = 1$

△:

Podobnosť: uu - zhodujú sa v 2 uhloch, každé 2, SSU Každé 2 trojuholníky, ktoré sa zhodujú v pomere dĺžok 2 strán a uhle ležiacom oproti väčšej z nich sú podobné

sus - v pomere 2 strán a uhle nimi zvieranom

Zhodnosť: sss - v 3 stranách

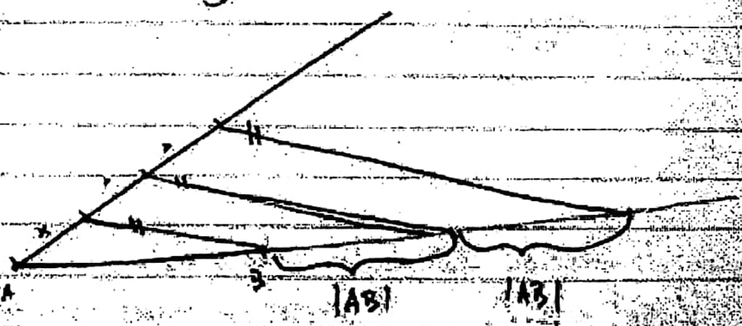
sus - v 2 stranách a uhle nimi zvieranom

usu - v 2 uhloch a strane pri nich medzi nimi

Ssu - v strane oproti uhlu a ešte 1 strane

Využitie pomeru podobnosti pri zmene dĺžky úsečky

Mám $\overline{AB}$, chcem, aby bola 3x dlhšia



Zhodnosť: práve vtedy, keď ich možno premiestniť, tak že sa kryjú (splývajú) $\triangle ABC \cong \triangle KLM$

Zhodnosť: Hovoríme, že 2 △ sú zhodné práve vtedy, keď ich možno premiestniť, tak že sa kryjú (splývajú)
Potom píšeme $\triangle ABC \cong \triangle KLM$
O zhodnosti trojuholníkov sa presvedčujeme tak, že zisťujeme zhodnosť niektorých strán a uhlov.

Veta SSS: Každé 2 trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú vo všetkých 3 stranách

Veta USU -//-, ktoré sa zhodujú v jednej strane a uhlov priľahlých k tejto strane, sú zhodné.

Veta SUS -//, ktoré sa zhodujú v 2 stranách a uhle nimi zovretom

Veta SSU: -//-, ktoré sa zhodujú v 2 stranách a uhle ležiacom oproti väčšej z nich, sú zhodné.

Podobnosť: $A'B'C'$ je podobný trojuholníku ABC, ak existuje také reálne číslo k, že platí

$$c' = kc \quad \wedge \quad a' = ka \quad \wedge \quad b' = ka$$

Číslo k sa nazýva **koeficient podobnosti**

$k > 1 \Rightarrow$ zväčšenie
$k < 1 \Rightarrow$ zmenšenie
$k = 1$;

O podobnosti trojuholníkov sa presvedčujeme, že zisťujeme podobnosť niektorých strán a zhodnosť niektorých uhlov

Veta UU: Každé 2 trojuholníky, ktoré sú podobné sa zhodujú v 2 uhlov

Veta SUS = -//- ktoré sa zhodujú v pomere dĺžok 2 strán a uhle nimi zovretom sú podobné.

Veta SSU = //- ktoré sa zhodujú v pomere 2 stranách a uhle ležiacom oproti väčšej z nich sú podobné

Zadanie 30

vš. zápis: $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x \dots = d_2$
$a_3x \dots = d_3$

a, b, c, d - koeficienty
x, y, z = neznáme

sčítacia metóda, porovnávacia, dosadzovacia

Úloha 1

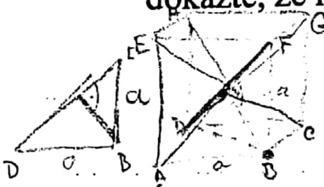
Vysvetlite metódy riešenia sústav lineárnych rovníc o troch neznámych a sústavy lineárnej a kvadratickej rovnice. Analyzujte možné riešenia týchto sústav.

↳ Využijeme dosadzovaciu metódu, z lin. rovnice dosadíme do kvad.

$x^2 = y$
$y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$
$x^2 - 5 = 0$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

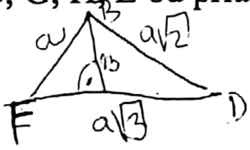
Úloha 2

Daná je kocka ABCDEFGH. Vyjadrite vzdialenosť bodu B od priamky DF a dokážte, že i vzdialenosť bodov A, C, G, H, E od priamky DF je rovnaká .



$v = \frac{a\cdot b}{c}$

$v = \frac{a\cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \boxed{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$



Úloha 3

a) Upravte výraz a výsledok zapíšte v tvare mocniny:

$$\frac{3^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3x^2}\right)^{-1}\cdot\sqrt{9x}\cdot\sqrt[3]{9}}{3^{6}\cdot\left(\sqrt{\frac{9}{x}}\right)^{-1}\cdot 9^{-\frac{3}{2}}} = \frac{3^{-2}\cdot 3x^2\cdot 3x^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{3^{6}\cdot 3^{-1}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-3}} = \dots$$

$$\Rightarrow 3^{-\frac{4}{3}}\cdot x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{81}}$$

b) Určte výraz m, ak $\log_x m = 2\log_x(a-2) + 3\log_x(a+2) - 2\log_x(a^2-4)$

$\log_x m = \log_x(a-2)^2 + \log_x(a+2)^3 - \log_x(a^2-4)^2$

$\log_x m = \log_x \frac{(a-2)^2\cdot(a+2)^3}{(a^2-4)^2}$

$m = \frac{(a-2)^2\,(a+2)^3}{(a^2-4)^2}$

$m = \frac{\cancel{(a-2)^2}\cdot(a+2)^{\cancel{3}}}{\cancel{(a-2)^2}\cdot\cancel{(a+2)^2}}$

$m = a + 2$!

$$\begin{aligned} x+4y+3z &= 18 \\ -11y-4z &= -34 \quad /.(-7) \\ -7y-10z &= -44 \quad /.(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+4y+3z &= 18 \\ \Rightarrow \quad 77y+28z &= 238 \\ -77y-110z &= -484 \end{aligned}$$

1. a 2. rovnicu odpíšeme a 2. rovnicu pripočítame k tretej.

$$\begin{aligned} x+4y+3z &= 18 \\ 77y+28z &= 238 \quad / \text{ pripocitame k 3. rovnici} \\ -77y-110z &= -484 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+4y+3z &= 18 \\ \Rightarrow \quad 77y+28z &= 238 \\ -82z &= -246/:(-82) \Rightarrow z=3 \text{ a dosadime do 2. rov.} \end{aligned}$$

$$77y+28\cdot 3=238 \Rightarrow 77y=154 \Rightarrow y=2$$

Následne z=3 aj y=2 dosadíme do 1. rovnice

$$x+4\cdot 2+3\cdot 3=18 \Rightarrow x+17=18 \Rightarrow x=1$$

Skúšku správnosti vykonáme dosadením vypočítaných hodnôt do všetkých troch rovníc.

Riešením danej sústavy rovníc je usporiadaná trojica [*x*,*y*,*z*]=[1, 2, 3].

Príklad 2:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 18 \\ \Rightarrow \quad -11y - 4z &= -34 \\ 3x + 5y - z &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 18 \quad /.(\text{-}3) \text{ a pripocitame k 3. rov.} \\ -11y - 4z &= -34 \\ 3x + 5y - z &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 18 \\ \Rightarrow \quad -11y - 4z &= -34 \\ -7y - 10z &= -44 \end{aligned}$$

Prvú rovnicu odpíšeme. Aby sme pred neznámou y dostali v druhej a tretej rovnici navzájom opačné čísla, tak druhú rovnicu násobíme číslom (-7) a tretiu rovnicu číslom 11.

Sústavy troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi

Rovnicu tvaru $ax + by + cz = d$, kde a ≠ 0 alebo b ≠ 0 alebo c ≠ 0 nazývame **lineárnou rovnicou s troma neznámymi *x, y, z.***

Trojicu čísel x_0, y_0, z_0 nazývame riešením vyššie uvedenej rovnice, ak platí:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

Rovnice tvaru

$$\begin{gathered} ax + by + cz = d, \text{ kde } a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \text{ alebo } c \neq 0 \\ ex + fy + gz = h, \text{ kde } e \neq 0 \text{ alebo } f \neq 0 \text{ alebo } g \neq 0 \\ ix + jy + kz = l, \text{ kde } i \neq 0 \text{ alebo } j \neq 0 \text{ alebo } k \neq 0 \end{gathered}$$

nazývame **sústavou troch lineárnych rovníc s troma neznámymi *x, y, z.***

Trojicu čísel x_0, y_0, z_0 nazývame riešením vyššie uvedenej sústavy rovníc, ak platí:

$$\begin{gathered} ax_0 + by_0 + cz_0 = d, \text{ kde } a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \text{ alebo } c \neq 0 \\ ex_0 + fy_0 + gz_0 = h, \text{ kde } a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \text{ alebo } c \neq 0 \\ ix_0 + jy_0 + kz_0 = l, \text{ kde } a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \text{ alebo } c \neq 0 \end{gathered}$$

Pri riešení sústavy troch rovníc s troma neznámymi najčastejšie využívame:

1. **Gaussovu eliminačnú metódu;**
2. **Cramerovo pravidlo;**
3. **dosadzovacia metódu.**

Gaussovu eliminačnú metóda:

Táto metóda spočíva v postupnej úprave sústavy rovníc na tzv. **trojuholníkový tvar**, kde v druhej rovnici je eliminovaná prvá neznáma a v tretej rovnici je eliminovaná prvá a druhá neznáma.

Samotný **postup riešenia sústavy rovníc pomocou Gaussovej eliminačnej metódy** si ukážeme na príklade.

Príklad 1:

Riešte danú sústavu rovníc s neznámymi x, y, z ∈ R:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 2 \\ -x - 4y - 3z &= -18 \\ 3x + 5y - z &= 10 \end{aligned}$$

Riešenie:

Kvôli jednoduchšiemu počítaniu sa snažíme mať ako prvú rovnicu tú z troch rovníc, ktorú dokážeme najjednoduchšie upraviť na tvar s koeficientom 1 pred prvou neznámou (prípadne pred inou neznámou a vtedy by sme museli vymeniť poradie neznámych).

V našom prípade si na prvé miesto presunieme 2. rovnicu vynásobenú číslom (-1).

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 2 \\ -x - 4y - 3z &= -18 \quad /.(\text{-}1) \text{ a vymenime s 1. rov.} \\ 3x + 5y - z &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 18 \\ \Rightarrow 2x - 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 5y - z &= 10 \end{aligned}$$

Prvú rovnicu odpíšeme.(-2)-násobok prvej rovnice pripočítame k druhej rovnici (tým eliminujeme neznámu x v druhej rovnici) a (-3)-násobok prvej rovnice pripočítame k tretej rovnici (tým eliminujeme neznámu x v tretej rovnici).

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 18 \quad /.(\text{-}2) \text{ a pripocitame k 2. rov.} \\ 2x - 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 5y - z &= 10 \end{aligned}$$

---

30) Sústavy

A 3 lineárne rovnice o 3 neznámych

- riešením je usp. trojica čísel, ktorá vyhovuje ∀ 3 rovniciam

Gaussova

① Eliminačná metóda - spočíva v úprave sústavy na trojuholníkový tvar

napr.: $2x+4y+3z=33$ - riešenie nájdeme spätným chodom

$0x-3y+2z=3$

$0x\ 0y\ 5z=15$

- celý postup úprav môžeme zaznamenať v schéme maticového zápisu

$x+2y-3z=-1$

$-3x+y-2z=2$

$2x+3y+2z=11$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \cdot 3 \; \mathrm{I}+\mathrm{II} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \\ 0 & 7 & -11 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \cdot(-2) \; \mathrm{I}+\mathrm{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 13 \end{array}\right) \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}$$

② Sčítacia metóda - sčítam vhodné násobky vhodných rovníc

I $x+2y+3z=4$

II $2x+3y+4z=5$

III $3x+4y+5z=6$

- ak mi vyjde $P=R$, jednu neznámu si dosadím a ostatné dopočítam

$(-2)\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II}$:

$0x-y-2z=-3$

$(-3)\mathrm{I}+\mathrm{III}$

$0x-2y-4z=-6$

$y+2z=3$

$2y+4z=6$

$0=0$

$P=R$

$x=0$

I $2y+3z=4 \Rightarrow y=\frac{4-3z}{2}$

II $3y+4z=5 \Rightarrow y=\frac{5-4z}{3}$

$\frac{4-3z}{2}=\frac{5-4z}{3}$

$12-9z=10-8z$

$2=z$

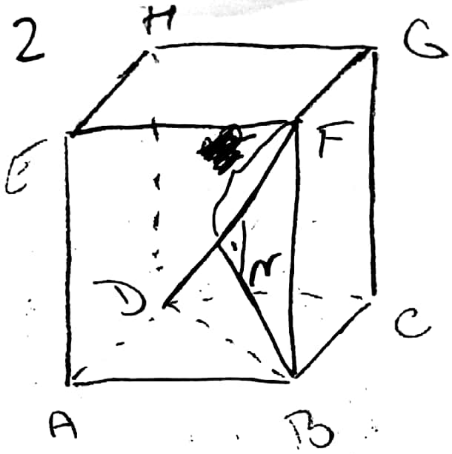
$y=\frac{4-6}{2}=-1$

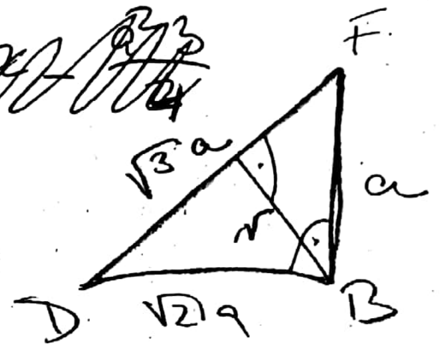
B Pri 2 rovniciach

③ Dosadzovacia metóda

- vyjadrím x z prvej, dosadím do II, odtiaľ to vyjadrím

Úl. č. 2





$$\frac{\sqrt{2}a^2}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}ar}{\cancel{2}} = S_\Delta \;\Big/ \cdot 2$$

$$\sqrt{2}a^{\cancel{2}} = \sqrt{3}\cancel{a}r$$

$$r = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$$

Platí to aj pre ostatné vrcholy, pretože keď si to nakreslíme tak vždy vznikne pravouhlý trojuholník so stranami $a = a$ $b = \sqrt{2}a$ $c = \sqrt{3}a$ a výška trojuholníka na stranu c predstavuje túto vzdialenosť

Úl. č. 3

a) $$\frac{3^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3x^2}\right)^{-1}\cdot\sqrt{9x}\cdot\sqrt[3]{9}}{3^6\cdot\left(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{x}}\right)^{-1}\cdot 9^{\frac{3}{2}}} = \frac{3^{-2}\cdot 3x^2\cdot 3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{3^6\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-1}\cdot 3^3}$$

$$= 3^{-2}\cdot 3\cdot 3\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-6}\cdot 3\cdot 3^{-3}\cdot x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{22}{3}}\cdot x^2$$

b) $$\log_x m = 2\log_x(a-2) + 3\cdot\log_x(a+2) - 2\cdot\log_x(a^2-4)$$

$$\log_x m = \log_x \frac{(a-2)^2\cdot(a+2)^3}{(a^2-4)\cdot(a^2-4)}$$

$$\log_x m = \log_x \frac{\cancel{(a-2)^2}\cdot(a+2)^{\cancel{3}}}{\cancel{(a-2)}\cdot\cancel{(a+2)}\cdot\cancel{(a-2)}\cdot\cancel{(a+2)}}$$

$$\log_x m = \log_x(a+2)$$

$$m = (a+2)$$