Mathematik: Geraden

Lösungsblatt

AUFGABEN_CREATOR v2.0

July 24, 2025

Lösungen

1. Stelle eine Parametergleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte $A(2|1|3)$ und $B(5|4|1)$ verläuft.

Lösung: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungsweg: *Der Richtungsvektor ist* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Mit dem Stützvektor* A *ergibt sich:* $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Überprüfe, ob der Punkt $P(8|7|-1)$ auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt.

Lösung: Ja, für $r = 2$

Lösungsweg: *Setze* P *gleich der Geradengleichung:* $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Aus der ersten Koordinate:* $8 = 2 + 3r \Rightarrow r = 2$. *Überprüfung:* $y = 1 + 3 \cdot 2 = 7$ *und* $z = 3 + (-2) \cdot 2 = -1$

3. Bestimme den Punkt auf der Geraden $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ für den Parameter $t = -3$.

Lösung: $(-5|5|-9)$

Lösungsweg: *Setze $t = -3$ in die Geradengleichung ein:* $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-6\\2+3\\0-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\\-9\end{pmatrix}$

4. Welcher Parameterwert s führt dazu, dass der Punkt $Q(0|4|7)$ auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ liegt?

Lösung: $s = 3$

Lösungsweg: *Setze Q gleich der Geradengleichung:* $\begin{pmatrix}0\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$. *Aus der ersten Koordinate:* $0 = 3 - s \Rightarrow s = 3$. *Überprüfung:* $y = 1 + 3 = 4$ *und* $z = 1 + 6 = 7$

5. Ermittle den Richtungsvektor der Geraden durch die Punkte $M(4|0|-2)$ und $N(1|3|4)$.

Lösung: $\begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix}$

Lösungsweg: *Der Richtungsvektor ist* $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix}1-4\\3-0\\4-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix}$

6. Welche der folgenden Parametergleichungen beschreibt dieselbe Gerade wie $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$?

Lösung: $h : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Lösungsweg: *Der Punkt* $(3|6|1)$ *liegt auf* g *für* $r = 1$*:* $(1+2|2+4|3-2) = (3|6|1)$. *Der Richtungsvektor* $(1|2|-1)$ *ist ein Vielfaches von* $(2|4|-2)$, *nämlich die Hälfte. Daher beschreiben beide Gleichungen dieselbe Gerade.*

7. Finde die fehlende z-Koordinate des Punktes $R(6|1|?)$, damit er auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegt.

Lösung: $z = 7$

Lösungsweg: *Aus* $6 = 2 + 2r$ *folgt* $r = 2$. *Aus* $1 = 3 - r$ *folgt* $r = 2$ *(Bestätigung). Für die* z*-Koordinate:* $z = 1 + 3 \cdot 2 = 7$

8. Bestimme eine Parametergleichung der Geraden durch $A(0|5|2)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösungsweg: *Eine Parametergleichung hat die Form* $g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$, *wobei* $\vec{p}$ *der Stützvektor (hier* A*) und* $\vec{u}$ *der Richtungsvektor ist.*

9. Welcher Punkt liegt auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $t = 0$?

Lösung: $(3|1|-2)$

Lösungsweg: *Für* $t = 0$ *ergibt sich:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Dies ist der Stützvektor der Geraden.*

10. Ermittle den Parameter r, für den sich der Punkt $(7|0|8)$ auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt.

Lösung: $r = 2$

Lösungsweg: *Aus der ersten Koordinate:* $7 = 1 + 3r \Rightarrow r = 2$. *Überprüfung:* $y = 4 + (-2) \cdot 2 = 0$ *und* $z = 2 + 3 \cdot 2 = 8$

11. Stelle eine Parametergleichung für die Gerade auf, die durch die Punkte $P(2|3|1)$ und $Q(2|3|-5)$ verläuft.

Lösung: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lösungsweg: *Der Richtungsvektor ist* $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3-3 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$. *Die Gerade verläuft parallel zur z-Achse.*

12. Überprüfe, ob der Punkt $S(4|-1|3)$ auf der Geraden $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt.

Lösung: Ja, für $s = 2$

Lösungsweg: *Setze S gleich der Geradengleichung:* $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Aus der ersten Koordinate:* $4 = 6 - s \Rightarrow s = 2$. *Überprüfung:* $y = 1 - 2 = -1$ *und* $z = 1 + 2 = 3$

13. Bestimme den Punkt auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ für $r = -2$.

Lösung: $(-3|-10|6)$

Lösungsweg: *Setze* $r = -2$ *ein:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 0-10 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$

14. Welche Aussage über Parametergleichungen von Geraden ist korrekt?

Lösung: Eine Gerade kann durch unendlich viele verschiedene Parametergleichungen beschrieben werden

Lösungsweg: *Eine Gerade kann durch verschiedene Stützvektoren (beliebige Punkte auf der Geraden) und verschiedene Richtungsvektoren (Vielfache des ursprünglichen Richtungsvektors) dargestellt werden. Daher gibt es unendlich viele Parametergleichungen für dieselbe Gerade.*

15. Finde einen zweiten Punkt auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, wenn ein Punkt $(5|2|1)$ bereits bekannt ist.

Lösung: $(6|5|-1)$

Lösungsweg: *Der bekannte Punkt entspricht* $t = 0$. *Für* $t = 1$ *ergibt sich:* $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-1\end{pmatrix}$