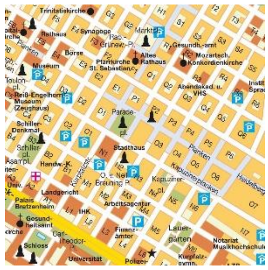
3. Vektoren und ihre Rechenregeln

Einführungsbeispiel:

Mannheim wird aufgrund seiner Straßenanordnung in der Innenstadt auch Quadratestadt genannt.

Du möchtest von den Lauergärten zum Rathaus. Zeichne auf den Stadtplan zwei verschiedene Wege ein.

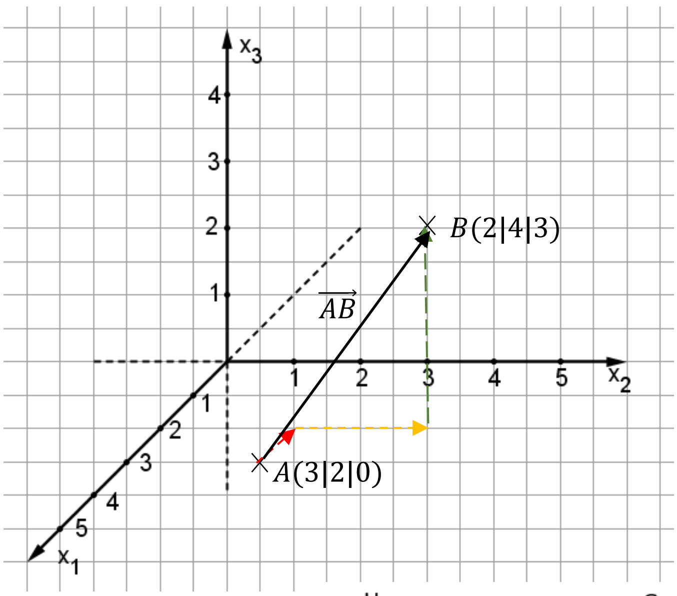


Mithilfe von Koordinaten haben wir bisher nur die Lage von Punkten in einem Koordinatensystem beschrieben. Nun möchten wir damit **Verschiebungen** oder **Wege** beschreiben.

Um von dem Punkt $A(3|2|0)$ zum Punkt $B(2|4|3)$ zu gelangen, muss man vom Punkt A aus eine Einheit entgegen der Richtung der x_1-Achse, zwei Einheiten in Richtung der x_2-Achse und drei Einheiten in Richtung der x_3-Achse.

Diese Verschiebung bezeichnet man als **Vektor** und man schreibt kurz

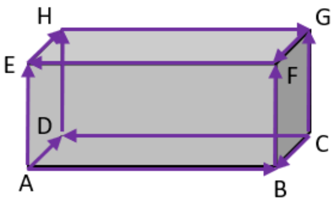
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ beschreibt nicht nur, wie man vom Punkt A zum Punkt B kommt, sondern auch wie man z.B. vom Punkt $C(1|1|2)$ zu $D(0|3|5)$ kommt. Vektoren sind also im Raum **frei verschiebbar**. Man schreibt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Übung 1 Zeichne C, D und den Vektor $\overrightarrow{CD}$ in das bereits vorhandene KS ein.

Übung 2 Welche der auf dem Quader eingezeichneten Pfeile gehören jeweils zu demselben Vektor?



Definition: Vektoren

Mithilfe von Vektoren lassen sich Verschiebungen beschreiben. Sie bestehen immer aus einer **Richtung** und einer **Länge** und sind frei im Raum verschiebbar.

Einen **Verbindungsvektor** zwischen einem Punkt A und B erhält man allgemein, wenn man die Differenz zwischen B und A bildet („Spitze minus Schaft").

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ heißt **Gegenvektor** zu $\overrightarrow{AB}$. Er hat dieselbe Länge aber die entgegengesetzte Richtung.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Den Vektor vom Koordinatenursprung $O(0|0|0)$ zu einem Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ nennt man **Ortsvektor** und bezeichnet man mit $\overrightarrow{OP}$ oder kurz $\vec{p}$. Er wird in einer Spalte geschrieben.

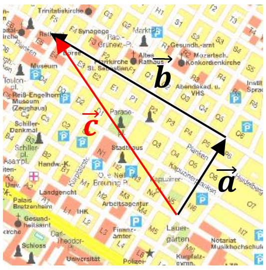
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Übung 3 Bei einer Verschiebung wird der Punkt P auf den Punkt Q abgebildet. Gib den Vektor an, der diese Verschiebung beschreibt. Wie lautet der dazugehörige Gegenvektor?

a) $P(-3|4|12), Q(4|-2|8)$
b) $P(25|-33|18), Q(28|-37|21)$
c) $P(-8|2|4), Q(11|-7|15)$
d) $P(-8|0|-8), Q(0|-8|0)$

Zurück zum Einführungsbeispiel:

Rechts abgebildet ist mit den schwarzen Vektoren ein möglicher Weg von den Lauergärten zum Rathaus. Der sich daraus ergebende Luftweg ist mit einem roten Vektor gekennzeichnet.



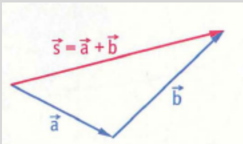
Man schreibt: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Rechenregeln für Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

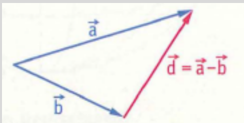
(a) Die **Summe** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet man, indem man die einzelnen Koordinaten der Vektoren addiert.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 + (-4) \\ 1 + (-2) \\ -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



(b) Analog erhält man die Koordinaten des **Differenzvektors.**

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ 1 - (-2) \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$



(c) Das **Vielfache** eines Vektors berechnet man, indem man jede Koordinate des Vektors multipliziert, z.B. mit dem Vierfachen.

$$4 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

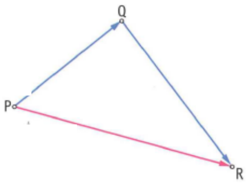
(d) Eine Summe bzw. Differenz von Vielfachen von Vektoren nennt man **Linearkombination**. So sind z.B. $2\vec{a} + 3\vec{b}$ oder $\vec{a} - 2\vec{b}$ Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

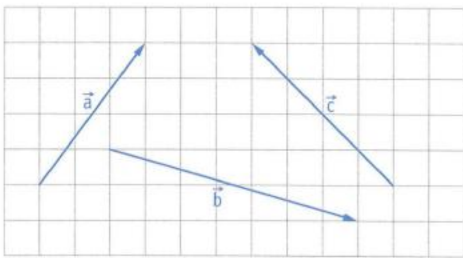
Dreiecksregel

Im Koordinatensystem gilt für alle Punkte P, Q und R: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



Übung 4 Gegeben sind Pfeile der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Zeichne einen Pfeil des angegebenen Vektors.

a) $\vec{a} + \vec{b}$
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
c) $\vec{a} - \vec{c}$
d) $\vec{c} - \vec{b}$
e) $\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$
f) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$



Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Lineare Unabhängigkeit

Linearkombination:

Eine Summe $\boldsymbol{k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + k_3\overrightarrow{x_3}}$ mit $\boldsymbol{k_1, k_2, k_3} \in \mathbb{R}$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\boldsymbol{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}$ und $\boldsymbol{\overrightarrow{x_3}}$**.**

Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\boldsymbol{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}$ und $\boldsymbol{\overrightarrow{x_3}}$ sind **linear unabhängig,** wenn die Gleichung $\boldsymbol{k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + k_3\overrightarrow{x_3} = \vec{0}}$ nur die **triviale Lösung** $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k_3 = 0}$ hat.

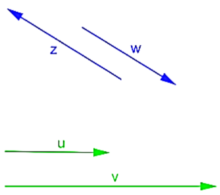
Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $\boldsymbol{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}$ und $\boldsymbol{\overrightarrow{x_3}}$ sind **linear abhängig,** wenn die Gleichung $\boldsymbol{k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + k_3\overrightarrow{x_3} = \vec{0}}$ neben der **trivialen Lösung** mindestens noch eine nichttriviale Lösung hat.

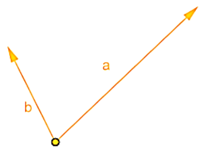
Anschaulich bedeutet dies:

Sind **zwei** Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$linear abhängig, dann sind sie **parallel** (**kollinear**).

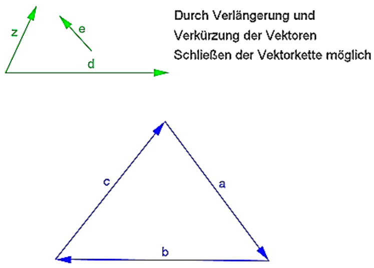
Sind **drei** Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ **linear abhängig,** liegen sie in einer **Ebene** (**komplanar).**



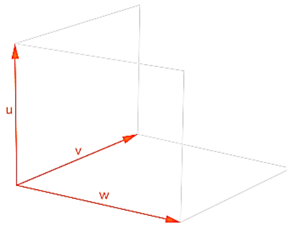
Linear abhängige Vektoren



Linear unabhängige Vektoren



Linear abhängige Vektoren



Linear unabhängige Vektoren

Beispiel Prüfe die Vektoren $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit.

$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\boldsymbol{k_3}$	$\boldsymbol{rS}$	
1	3	-1	0	$\mid \cdot 2$
1	-1	3	0	-
2	1	3	0	-
1	3	-1	0	
0	4	-4	0	$\mid \cdot 5$ -
0	5	-5	0	$\mid \cdot 4$
1	3	-1	0	
0	4	-4	0	
0	0	0	0	

Aus der letzten Zeile folgt, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Somit folgt auch direkt, dass die drei Vektoren linear abhängig sind. Der Vollständigkeit halber kann die Lösung angegeben werden (setze $k_3 = \lambda$ und dann rückwärts einsetzen) mit $(k_1; k_2; k_3) = (-2\lambda; \lambda; \lambda) = \lambda \cdot (-2; 1; 1)$ und im speziellen dann auch für $\lambda = 1$: $(k_1; k_2; k_3) = (-2; 1; 1)$.

Bemerkung

Oft interessiert uns nur, ob zwei Vektoren linear abhängig bzw. unabhängig sind. In diesem Fall können wir obige Überlegungen wie folgt konkretisieren:

Zwei Vektoren $\overrightarrow{x_1}$ und $\overrightarrow{x_2}$ sind **linear abhängig,** wenn sie Vielfache voneinander sind.
Getestet werden kann dies durch die Gleichung $\boldsymbol{\overrightarrow{x_1} = k \cdot \overrightarrow{x_2}}$.
Gibt es eine Lösung für $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so sind die beiden Vektoren linear abhängig, ansonsten **linear unabhängig**.

Beispiel Untersuche ob die Vektoren $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit.

□ Lösung: $\overrightarrow{x_1} = k \cdot \overrightarrow{x_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -1 = 2k \\ 2 = -4k \\ -3 = 6k \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k = -1/2 \\ k = -1/2 \\ k = -1/2 \end{array}$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

Definition: Länge eines Vektors

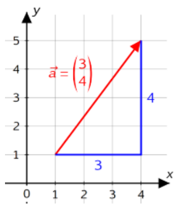
In der analytischen Geometrie bezeichnet man die Länge eines Vektors $\vec{a}$ als **Betrag von $\vec{a}$.** Für den Betrag des Vektors schreibt man: $|\vec{a}|$. Es gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

Der Abstand zweier Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ berechnen wir mithilfe des Betrags von $\overrightarrow{PQ}$ und es gilt:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Beispiel aus dem $\mathbb{R}^2$ (analog in $\mathbb{R}^3$):



Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras gilt:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{LE}$$

Übungen

1 Bestimme aus den Koordinaten der Punkte A und B den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und gib jeweils den Gegenvektor $\overrightarrow{BA}$ an.

a) $A(2|3|4), B(5|4|5)$ b) $A(3|3|1), B(2|1|0)$

c) $A(3|1|2), B(2|-2|-4)$ d) $A(4|-3|-1), B(2|-2|-2)$

2 Fülle die Lücken passend aus.

a) $A(\ \ |2|2)$, $B(3|\ \ |-1)$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \ \end{pmatrix}$ b) $A(-1|\ \ |-4)$, $B(1|3|\ \ )$, $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 Verbinde die geeigneten Punkte A und B mit einem passenden Vektor.

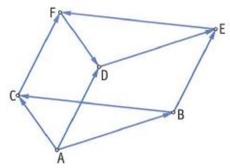
$A(2\|0\|-1)$	$B(5\|2\|2)$	$A(5\|-1\|-1)$	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$B(4\|0\|0)$	$A(3\|3\|3)$
$B(3\|-1\|-2)$	$A(5\|2\|2)$	$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$B(4\|4\|5)$

4 Gegeben ist ein Punkt A und ein Vektor $\vec{v}$, der eine Verschiebung beschreibt.
Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes A' von A bei der angegebenen Verschiebung.

a) $A(5|3|-1)$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $A(6|4|-3)$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $A(4{,}2|1{,}3|-2{,}5)$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6{,}4 \\ 4{,}1 \\ -8{,}4 \end{pmatrix}$ d) $A(2|-5|1)$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

5 Wie viele verschiedene Vektoren sind in der Abbildung rechts dargestellt?
Nenne die Pfeile, die zum gleichen Vektor gehören.



6 Berechne die folgenden Linearkombinationen mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) $2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\frac{1}{2}\vec{c} - 3\vec{a}$ c) $-\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$

7 Q ist der Punkt, der sich ergibt, wenn man den Punkt P am Punkt A spiegelt. Berechne jeweils die Koordinaten des fehlenden Punktes. (Tipp: Skizze)

a) $P(2|4|3)$, $A(0|2|-1)$, $Q(\ \ |\ \ |\ \ )$

b) $A(2|9|-3), Q(-1|0|3)$, $P(\ \ |\ \ |\ \ )$

8 Berechne den Ortsvektor des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AB}$.

a) $A(1|2|4), B(6|5|9)$, $M(\ \ |\ \ |\ \ )$

b) $A(2|2|4), B(-4|0|10)$, $M(\ \ |\ \ |\ \ )$

Den Ortsvektor der **Mitte zwischen zwei Punkten** A und B erhält man, in dem man die Ortsvektoren der Punkte A und B addiert und diese Summe halbiert:
$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

9 Prüfe die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix}$

10 Eine dreiseitige Pyramide hat die Grundfläche ABC mit $A(1|-1|-2)$, $B(5|3|-2)$, $C(-1|6|-2)$ und die Spitze $S(2|3|4)$.

a) Zeichnen Sie die Pyramide.

b) Bestimmen Sie die Spaltenvektoren der Seitenkanten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AS}$.

c) M sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$. Wie lautet der Vektor $\overrightarrow{AM}$?

11 Berechne die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

12 Berechne den Abstand der Punkte $A(4|7|-3)$ und $B(1|-4|5)$

13 Untersuche, ob das Dreieck ABC mit $A(1|-2|2)$, $B(3|2|1)$, $C(3|0|3)$ gleichschenklig ist.

14 Berechne die Länge der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC mit $A(4|2|-1)$, $B(10|-8|9)$, $C(4|0|1)$. Bestimme anschließend den Abstand der Ecken des Dreiecks vom Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

15 Bestimme einen Vektor, der die gleiche Richtung wie der Vektor $\vec{a}$, aber die Länge 1 hat.

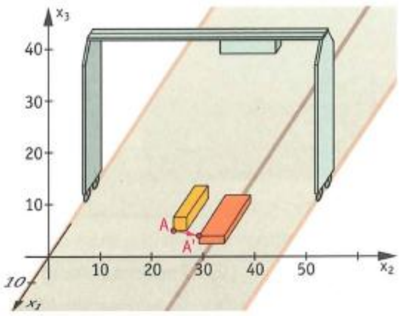
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einen "normierten Vektor" erhält man folgendermaßen:

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

16 In einem Containerbahnhof werden Container mithilfe eines Containerkrans auf Eisenbahnwaggons verladen. Bei geeigneter Wahl eines räumlichen Koordinatensystems (Einheiten in m) denken wir uns die Ecke A eines Containers im Punkt $A(-10|21|0)$. Der Container soll auf einen Eisenbahnwaggon verladen werden, der parallel zum Container steht. Dabei wird der Container so verschoben, dass sein Eckpunkt A auf den Punkt $A'(-5|28|1{,}5)$ des Waggons fällt.



a) Zur Steuerung des Krans muss angegeben werden, um wie viele Einheiten dieser den Container jeweils in Richtung der x_1-Achse, in Richtung der x_2-Achse und in Richtung der x_3-Achse-Achse bewegen muss. Welche Werte erhält man? Der Eckpunkt G des Containers liegt vor der Verschiebung im Punkt $G(-17|23{,}5|0{,}5)$. Gebe die Koordinaten seines Bildpunktes G' nach der Verschiebung an.

Die Verschiebung von A nach A' kann man durch einen Pfeil von A nach A' beschreiben. Die Länge dieses Pfeils gibt die Entfernung des Ausgangspunktes A von A' der Verschiebung an. Bestimme die Länge des Pfeils von A nach A'.

17 Die Punkte $A(1|2|1)$, $B(3|2|-1)$, $C(1|4|-1)$ und $D\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|-\frac{5}{3}\right)$ sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

a) Zeige, dass die Pyramide ein Tetraeder ist. b) Berechne die Oberfläche des Tetraeders.