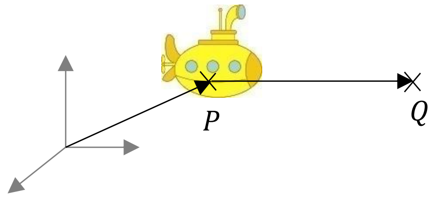
5. Geraden im Raum

Einführungsbeispiel:

Ein U-Boot bewegt sich näherungsweise auf einer geradlinigen Bahn mit konstanter Geschwindigkeit.
Es befindet sich zu Beginn im Punkt $P(1|2|-3)$ und eine Sekunde später im Punkt $Q(3|7|-3)$.



a) Welche Punkte passiert das U-Boot? Nenne mindestens zwei.
b) Wie lassen sich alle möglichen Punkte des U-Bootes durch eine Gerade im Raum beschreiben?

□ ***Lösung:***

a) Zunächst benötigen wir den Ortsvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ *und den Verbindungsvektor* $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$.

$\vec{x}=\vec{p}+1\cdot\overrightarrow{PQ}=$

$\vec{x}=\vec{p}+3\cdot\overrightarrow{PQ}=$

$\vec{x}=\vec{p}+2\cdot\overrightarrow{PQ}=$

Weitere Punkte:

b) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass wir Punkte des U-Boots erhalten, wenn wir zum Ortsvektor $\vec{p}$ des Startpunktes ein Vielfaches des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PQ}$ addieren.
Wir erhalten die folgende Gleichung für alle Punkte X, welche das U-Boot passiert mit $r\in\mathbb{R}$:

$$\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\overrightarrow{PQ}$$

bzw. mit der Benennung der Geraden mit g:

$$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$$

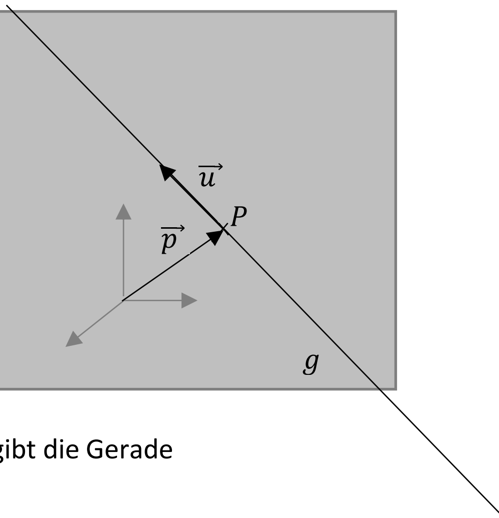
Diese Gleichung beschreibt den Verlauf einer Geraden. Allgemein gilt:

Definition: Geraden im Raum

Durch einen Punkt P und einen Vektor $\vec{u}\neq\vec{0}$ ist eine Gerade g bestimmt.
Die Gerade g kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$g\colon \vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u} \quad \text{mit} \quad r\in\mathbb{R}$$

Diese Gleichung bezeichnet man als **Parametergleichung** der Geraden g mit dem Parameter r.
Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor** und der Vektor $\vec{u}$ **Richtungsvektor**.



Eine Gerade g kann durch mehrere Gleichungen beschrieben werden, z.B. gibt die Gerade

$$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4{,}5\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2{,}5\\0\end{pmatrix}$$

dieselbe Gerade wie in unserem Einführungsbeispiel an. (Warum?)

Übung 1 (Verschiedene Parameterdarstellungen)

Die Gerade g geht durch die Punkte $A(3|1|-2)$ und $B(-2|4|-7)$.

a) Gib eine Parameterdarstellungen der Geraden g an.
b) Beschreibe, wie man weitere Parameterdarstellungen der Geraden erhalten kann und gib einige an.

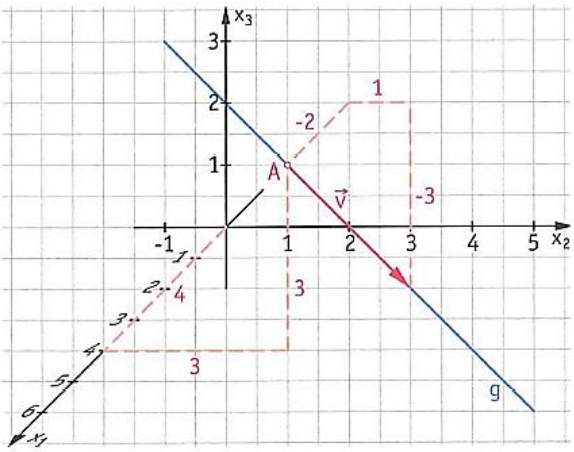
Übung 2 (Zeichnen einer Geraden)

Rechts wurde die Gerade g mit der Parameterdarstellung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gezeichnet. Erkläre die Vorgehensweise und zeichne ebenso die Gerade h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$



Übung 3 (Punktprobe)

Überprüfe, ob der Punkt $A(-7|-5|8)$ auf der folgenden Geraden g liegt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Übung 4

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bestimme diejenigen Punkte auf g, die sich für $t = 2$, $t = 4$ und $t = -5$ ergeben.

Übung 5

Fülle die Lücken so aus, so dass der Punkt R auf der Geraden g liegt.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R(-1|-3,5|\quad)$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{pmatrix}$, $R(4|5|\quad)$

Übung 6

Die Gerade g geht durch die Punkte A und B. Gib jeweils eine Parameterdarstellung für g an. Zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem und prüfe rechnerisch, ob der Punkt P auf g liegt.

a) $A(-2|5|3), B(2|-3|1), P(-14|29|9)$
b) $A(5|-3|-1), B(2|-1|2), P(-1|1|6)$

Übung 7

Gegeben sind die Punkte $A(11|1|6)$ und $B(5|-1|2)$.

Wie muss der Parameter gewählt werden?

a) Stelle eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte A und B verläuft.
   Gib die Koordinaten zweier Punkte auf der Geraden g an, die <u>zwischen</u> A und B liegen.
b) Untersuche, ob es einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten auf der Geraden g gibt.

Der Vektor muss die Form $\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$ haben.