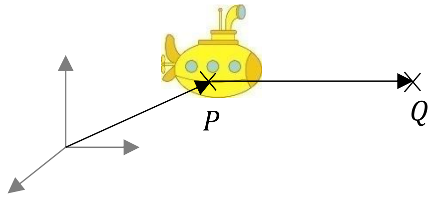
5. Geraden im Raum

Einführungsbeispiel:

Ein U-Boot bewegt sich näherungsweise auf einer geradlinigen Bahn mit konstanter Geschwindigkeit.
Es befindet sich zu Beginn im Punkt $P(1|2|-3)$ und eine Sekunde später im Punkt $Q(3|7|-3)$.



a) Welche Punkte passiert das U-Boot? Nenne mindestens zwei.
b) Wie lassen sich alle möglichen Punkte des U-Bootes durch eine Gerade im Raum beschreiben?

□ ***Lösung:***

a) Zunächst benötigen wir den Ortsvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ *und den Verbindungsvektor* $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$.

$\vec{x}=\vec{p}+1\cdot\overrightarrow{PQ}=$ $\qquad$ $\vec{x}=\vec{p}+3\cdot\overrightarrow{PQ}=$

$\vec{x}=\vec{p}+2\cdot\overrightarrow{PQ}=$ $\qquad$ *Weitere Punkte:*

b) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass wir Punkte des U-Boots erhalten, wenn wir zum Ortsvektor $\vec{p}$ des Startpunktes ein Vielfaches des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PQ}$ addieren.
Wir erhalten die folgende Gleichung für alle Punkte X, welche das U-Boot passiert mit $r\in\mathbb{R}$:

$$\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\overrightarrow{PQ}$$

bzw. mit der Benennung der Geraden mit g:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$$

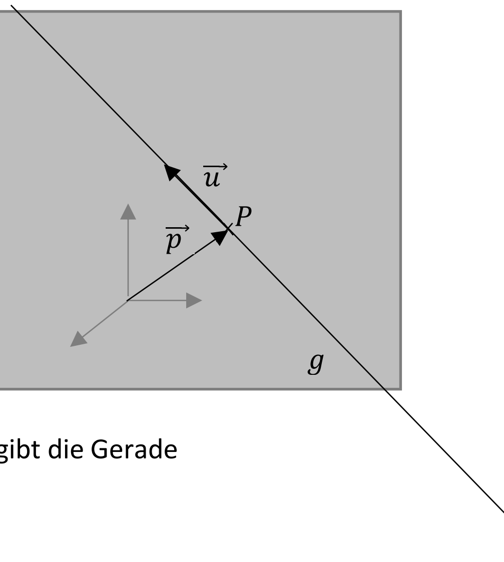
Diese Gleichung beschreibt den Verlauf einer Geraden. Allgemein gilt:

Definition: Geraden im Raum

Durch einen Punkt P und einen Vektor $\vec{u}\neq\vec{0}$ ist eine Gerade g bestimmt.
Die Gerade g kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$g:\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}\quad\text{mit}\quad r\in\mathbb{R}$$

Diese Gleichung bezeichnet man als **Parametergleichung** der Geraden g mit dem Parameter r.
Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor** und der Vektor $\vec{u}$ **Richtungsvektor**.



Eine Gerade g kann durch mehrere Gleichungen beschrieben werden, z.B. gibt die Gerade

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4{,}5\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2{,}5\\0\end{pmatrix}$$

dieselbe Gerade wie in unserem Einführungsbeispiel an. (Warum?)

Übung 1 (Verschiedene Parameterdarstellungen)

Die Gerade g geht durch die Punkte $A(3|1|-2)$ und $B(-2|4|-7)$.

a) Gib eine Parameterdarstellungen der Geraden g an.
b) Beschreibe, wie man weitere Parameterdarstellungen der Geraden erhalten kann und gib einige an.

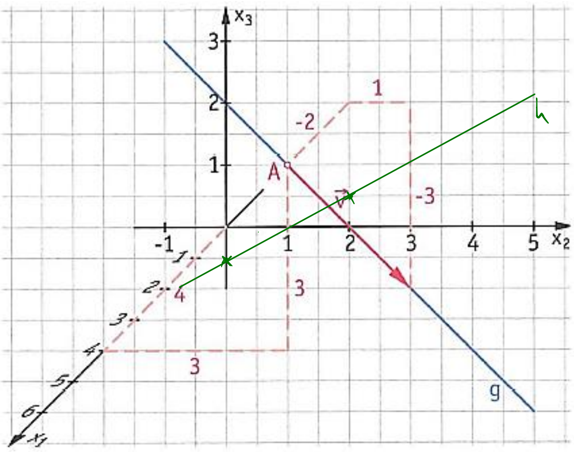
Übung 2 (Zeichnen einer Geraden)

Rechts wurde die Gerade g mit der Parameterdarstellung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gezeichnet. Erkläre die Vorgehensweise und zeichne ebenso die Gerade h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$



Übung 3 (Punktprobe)

Überprüfe, ob der Punkt $A(-7|-5|8)$ auf der folgenden Geraden g liegt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Übung 4

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bestimme diejenigen Punkte auf g, die sich für $t = 2$, $t = 4$ und $t = -5$ ergeben.

Übung 5

Fülle die Lücken so aus, so dass der Punkt R auf der Geraden g liegt.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R(-1|-3{,}5|1{,}5)$ $r = -\frac{3}{2}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $R(4|5|1)$ $r = 1$

Übung 6

Die Gerade g geht durch die Punkte A und B. Gib jeweils eine Parameterdarstellung für g an. Zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem und prüfe rechnerisch, ob der Punkt P auf g liegt.

a) $A(-2|5|3), B(2|-3|1), P(-14|29|9)$
b) $A(5|-3|-1), B(2|-1|2), P(-1|1|6)$

Übung 7

Gegeben sind die Punkte $A(11|1|6)$ und $B(5|-1|2)$.

a) Stelle eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte A und B verläuft.
Gib die Koordinaten zweier Punkte auf der Geraden g an, die zwischen A und B liegen.
b) Untersuche, ob es einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten auf der Geraden g gibt.

Wie muss der Parameter gewählt werden?

Der Vektor muss die Form $\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$ haben.

Ü1

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

- mithilfe eines anderen Stützvektors (Punkt auf der Geraden)
- Vielfaches des RV

Ü2

Skizze siehe Arbeitsblatt

Ü3

$\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

I. $-7 = 3 + r \cdot 5$
II. $-5 = -1 + 2r$
III. $8 = 2 - 3r$

$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & -10 = 5r \\ \text{II} & -4 = 2r \\ \text{III} & 6 = -3r \end{array}\right\} \Rightarrow r = -2$

Punkt A liegt auf der Geraden

Ü4

$P_1(-3|8|-8)$; $P_2(-7|14|-16)$; $P_3(11|-13|20)$

Ü5

siehe Arbeitsblatt

Ü6

a) Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} -14 \\ 29 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} -14 = -2 + 4r \Rightarrow r = -3 \\ 29 = 5 - 8r \Rightarrow r = -3 \\ 9 = 3 - 2r \Rightarrow r = -3 \end{array}$ $\Rightarrow$ P liegt auf g

b) Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ –

Gerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} -1 = 5 - 3s \Rightarrow s = 2 \\ 1 = -3 + 2s \Rightarrow s = 2 \\ 6 = 1 + 3s \Rightarrow s = \frac{2}{3} \end{array}$ ↯ Widerspruch $\Rightarrow$ P nicht auf g

Ü7

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

$r = 0 \rightarrow$ Punkt A
$r = 1 \rightarrow$ Punkt B

Wähle $r = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ etc.

b) $\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{I. } k = 11 - 6r \\ \text{II. } k = 1 - 2r \\ \text{III } k = 6 - 4r \end{array} \rightarrow -\frac{k-6}{4} = r$

$\Rightarrow k = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{k-6}{4}\right)$

$k = 1 + \frac{2k+12}{4} \quad | \cdot 4$

$4k = 4 + 2k - 12 \quad | -2k \rightarrow 2k = -8 \Rightarrow \boxed{k = -4}$

$\Rightarrow r = -\frac{-4-6}{4} = \frac{5}{2}$