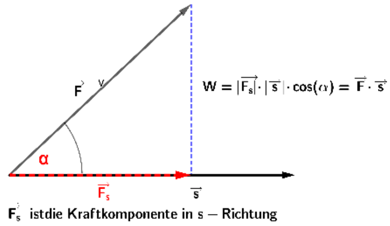
4. Das Skalarprodukt

4.1. Definitionsgleichung

Zum Einstieg ein kurzer Exkurs in die Welt der Physik. Dort ist bekannt, dass die Arbeit $\boldsymbol{W}$ sich aus dem Produkt der Kraftkomponente $\overrightarrow{\mathbf{F_s}} = |\overrightarrow{\mathbf{F}}| \cdot \mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha})$ und dem Weg $\overrightarrow{\mathbf{s}}$ berechnet. Als Formel ergibt sich:



$$W = F_s \cdot s = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot cos(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Der **Winkel** $\boldsymbol{\alpha}$ ist der Winkel, den die beiden Vektoren $\vec{\boldsymbol{F}}$ und $\vec{\boldsymbol{s}}$ miteinander einschließen.

Da die Größen Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ und Weg $\vec{\boldsymbol{s}}$ gerichtete Größen, also Vektoren sind, die Arbeit $\boldsymbol{W}$ allerdings eine Zahl (Skalar) spricht man vom Skalarprodukt zweier Vektoren, dessen Ergebnis eine **Zahl** ist.

Definition Skalarprodukt
Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Vektoren und ist α $(0 \leq \alpha \leq 180^0)$ der Winkel, den die beiden Vektoren miteinander einschließen, dann ist $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = |\vec{\boldsymbol{u}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\alpha})$ das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Beispiel 1 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Winkel $\alpha = 10{,}89^0$.

Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit Hilfe der Definitionsgleichung.

□ Lösung:

$|\vec{u}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ und $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$. Somit gilt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{24} \cdot cos(10{,}89) = 18{,}0$$

Übung 1

Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit Hilfe der Definitionsgleichung.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \alpha = 19{,}44^0$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}: \alpha = 90^0$

□ Lösung:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot cos(19{,}44) = \sqrt{65} \cdot \sqrt{5} \cdot cos(19{,}44) \approx 17$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot cos(90) = \sqrt{50} \cdot \sqrt{62} \cdot cos(90) = 0$

4.2 Koordinatenform des Skalarprodukts

Ist der Winkel α den die beiden Vektoren einschließen nicht bekannt, gibt es eine zweite Möglichkeit, dass Skalarprodukt nur mit Hilfe der Vektorkoordinaten zu berechnen.

Koordinatenform Skalarprodukt

Sind die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gegeben, dann errechnet sich das Skalarprodukt mit Hilfe ihrer Koordinaten durch:

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

Beispiel 2 Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit Hilfe der Koordinatenform

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□ Lösung:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 = 7$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$

4.3 Berechnung des eingeschlossenen Winkels $\boldsymbol{\alpha}$

In manchen Szenarien interessiert uns der eingeschlossene Winkel zweier Vektoren. Mit Hilfe der beiden Gleichungen $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$ und $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\alpha)}$ für das Skalarprodukt können wir folgern: $\boldsymbol{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\alpha) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$

Wenn wir nun die entstandene Gleichung nach $\cos(\alpha)$ umstellen, dann ergibt sich:

$$\boldsymbol{cos(\alpha) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$$

Beispiel 3 Berechne den von Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eingeschlossenen Winkel.

□ Lösung:

$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{45} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{45}} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 73{,}8^0}.$

4.4 Eigenschaften und Gesetze des Skalarprodukts

I.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	(Kommutativgesetz)
II.	$(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ für $r \in \mathbb{R}$	
III.	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$	(Distributivgesetz)
IV.	$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2 > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$	
V.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$	($\perp$ bedeutet senkrecht/orthogonal/Winkel 90°)

Beweis: Der Beweis der Gesetze erfolgt direkt aus der Definition.

Exemplarisch der Beweis für V.:

" $\Rightarrow$ ": $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha) = 0$, Da $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ folgt $cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$

" $\Leftarrow$ ": $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \alpha = 90^0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(90^0) = 0$

qed.

Übung 2 Prüfe, ob die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zueinander orthogonal sind.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$

□ Lösung:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind orthogonal $\vec{u} \perp \vec{v}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind orthogonal $\vec{u} \perp \vec{v}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 13 \Rightarrow$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht orthogonal $\vec{u} \not\perp \vec{v}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 11 + (-2) \cdot 3 = 0 \Rightarrow$ $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind orthogonal $\vec{u} \perp \vec{v}$

Übung 3

Untersuche, was bei der Berechnung des Skalarprodukts falsch gemacht wurde.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

□ Lösung:

a) Beim Skalarprodukt ist das Ergebnis **immer** eine Zahl (ein Skalar)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 2 - 4 + 6 = 7$$

b) Rechnung unvollständig (Addition fehlt), da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$

Übung 4

a) Gib je zwei Vektoren an, die zu dem Vektor $\vec{v}$ orthogonal sind.

(1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Begründe, dass es zu einem gegebenen Vektor unendlich viele orthogonale Vektoren gibt.

□ Lösung:

a) (1) $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Da es immer unendlich viele Vielfache von Vektoren gibt.

Übung 5

Untersuche, ob die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ mit $A(3|1|2), B(3|0|-3), C(7|3|-4)$ und $D(6|3|0)$ zueinander orthogonal sind. Welche Aussagen kann man über das Viereck machen?

□ Lösung:

$\vec{d_1} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{d_2} = \vec{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 + 6 - 18 = 0$

$\Rightarrow \vec{d_1} \perp \vec{d_2}$

$\Rightarrow$ entweder Drachenviereck, Quadrat oder Raute

da $|\vec{d_1}| \neq |\vec{d_2}|$ $\rightarrow$ Drachenviereck

Übung 6

Bestimme für den Dreieckspunkt C die dritte Koordinate so, dass das Dreieck ΔABC mit $A(10|8|0)$, $B(6|11|1)$ und $C(2|8|c_3)$ rechtwinklig ist.

□ Lösung:

$A(10|8|0)$

$B(6|11|1)$

$C(2|8|c_3)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ c_3-1 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} \stackrel{!}{=} 0$

$4 \cdot (-4) + 9 - 1 \cdot (c_3 - 1) = 0$

$-16 + 9 - c_3 + 1 = 0$

$-c_3 = 16 - 9 - 1$

$c_3 = -6$

$\Rightarrow C(2|8|-6)$

Vorüberlegung

Finde einen Vektor $\vec{n}$, der orthogonal zu den beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.

Dazu müssen die folgenden Gleichungen gelten:
$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und
$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$