Gegenseitige Lage von Geraden – Übung, Aufgaben und Zusatz

Ü1 Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Untersuche die Lage der Geraden g jeweils zu den folgenden Geraden $h,\ k$ und l mit $t \in \mathbb{R}$:

(1) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) k geht durch die Punkte $A(5|7|5)$ und $B(6{,}5|6{,}5|7)$

(3) l geht durch die Punkte $P(5|-5|0)$ und $Q(7|-4|-8)$

Lösung:

(1) 1. Lineare Abhängigkeit der beiden RV prüfen mit $k \in \mathbb{R}$:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 = k \\ -1 = -3k \Rightarrow k = 3 \\ 4 = 3k \Rightarrow k = \frac{4}{3} \ ↯ \end{matrix}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Schnitt oder windschief

2. Gleichsetzen der beiden Geraden ($g = h$ oder $g \cap h$)

$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} \text{I.} & 2 + 3s = 1 + 2t \\ \text{II.} & -4 - s = -3 - t \\ \text{III.} & 1 + 4s = 3 + t \end{matrix} \leadsto \begin{matrix} \text{I.} & 3s - 2t = -1 \\ \text{II.} & -s + t = 1 \\ \text{III.} & 4s - t = 2 \end{matrix} \ \text{II}+\text{III} \leadsto \begin{matrix} \text{I.} & 3s - 2t = -1 \\ \text{II.} & -s + t = 1 \\ \text{III.} & 3s = 3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{s = 1}$

$\Rightarrow -1 + t = 1 \Rightarrow \boxed{t = 2}$

$\Rightarrow 3 - 4 = -1$ ✓ $\Rightarrow$ es gibt einen Schnittpunkt

3. Schnittpunkt bestimmen

einsetzen von z.B. s in g:

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(5|-5|5)$

(2) k geht durch die Punkte $A(5|7|5)$ und $B(6{,}5|6{,}5|7)$

0. Aufstellen der Geraden k durch die Punkte A und B

(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 6{,}5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor berechnet

(b) Stützvektor der Geraden auswählen, z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ $k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

1. Lineare Abhängigkeit der beiden RV prüfen mit $k \in \mathbb{R}$:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 = 1{,}5k \Rightarrow k = 2 \\ -1 = -0{,}5k \Rightarrow k = 2 \\ 4 = 2k \Rightarrow k = 2 \ ✓ \end{matrix}$ $\Rightarrow$ linear Abhängig $\Rightarrow$ parallel oder sogar identisch

2. Punktprobe von A in g:

$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \leadsto \begin{matrix} 5 = 2 + 3s \Rightarrow s = 1 \\ 7 = -4 - s \Rightarrow s = -11 \ ↯ \\ 5 = 1 + 4s \end{matrix}$ $\Rightarrow$ parallel (und nicht identisch)

(3) ℓ geht durch die Punkte $P(5|-5|0)$ und $Q(7|-4|-8)$

0. Aufstellen der Geraden ℓ:

(a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor benutzen

(b) $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

1. lineare Abhängigkeit der beiden RV prüfen mit $k \in \mathbb{R}$:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 = -2k & & \lightning \\ -1 = -k & \Rightarrow k = 1 & \\ 4 = 8k & & \lightning \end{matrix}$ Linear unabhängig $\Rightarrow$ Schnitt oder windschief

2. $g = \ell$:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} \text{I.} & 2+3s = 5-2t \\ \text{II.} & -4-s = -5-t \\ \text{III.} & 1+4s = 0+8t \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{I.} & 3s+2t = 3 \\ \text{II.} & -s+t = -1 \quad |\cdot 4 \\ \text{III.} & 4s-8t = -1 \end{matrix} \Big]+ \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{I.} & 3s+2t = 3 \\ \text{II.} & -s+t = -1 \\ \text{III.} & -4t = -5 \end{matrix} \Rightarrow t = \frac{5}{4} \Rightarrow -s + \frac{5}{4} = -1 \Rightarrow s = \frac{9}{4} \Rightarrow \lightning$ $\Rightarrow$ windschief

Ü2 Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Gib gegebenenfalls die Koordinaten ihres Schnittpunktes an. Dabei gilt jeweils $r, s \in \mathbb{R}$.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

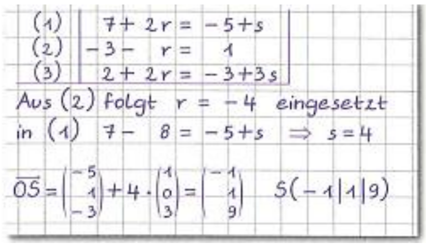
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
h geht durch die Punkte $P(17|-38|24)$ und $Q(12|-23|14)$

d) g geht durch die Punkte $P(-7|2|2)$ und $Q(-6|4|1)$
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $S(-5|1|4)$ b) parallel, nicht identisch c) identisch d) windschief

Ü3 Kristin berechnet den Schnittpunkt der Geraden (siehe rechts)
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.
Überprüfe ihre Rechnung und korrigiere gegebenenfalls ihre Fehler.



Lösung:

Tipp: Kristin hat etwas vergessen.

Ü4 Eine Flugüberwachung ortet gleichzeitig zwei Sportflugzeuge. Bezogen auf ein lokales Koordinatensystem (Einheit 1 km), in dessen Ursprung die Flugüberwachung liegt, können die Flugrouten durch folgende Parameterdarstellungen der Geraden g und h beschrieben werden:
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -2{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}6 \\ -3{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ -2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.
Untersuche, ob es auf diesen Flugrouten möglicherweise zu einer Kollision kommen kann.

Lösung:

$S(9{,}8|-5{,}2|2{,}5)$
Theoretisch kann es zu einer Kollision kommen. (Da man aber nicht weiß, wie schnell die Sportflugzeuge sind, kann nicht gesagt werden, ob sie gleichzeitig an diesem Punkt sind.)