

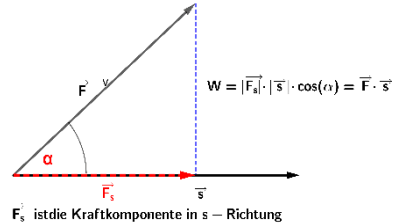
4. Das Skalarprodukt

4.1. Definitionsgleichung

Zum Einstieg ein kurzer Exkurs in die Welt der Physik. Dort ist bekannt, dass die Arbeit W sich aus dem Produkt der Kraftkomponente $\vec{F}_s = |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha)$ und dem Weg \vec{s} berechnet. Als Formel ergibt sich:

$$W = F_s \cdot s = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Der **Winkel α** ist der Winkel, den die beiden Vektoren \vec{F} und \vec{s} miteinander einschließen.



Da die Größen Kraft \vec{F} und Weg \vec{s} gerichtete Größen, also Vektoren sind, die Arbeit W allerdings eine Zahl (Skalar) spricht man vom Skalarprodukt zweier Vektoren, dessen Ergebnis eine **Zahl** ist.

Definition Skalarprodukt

Sind \vec{u} und \vec{v} zwei Vektoren und ist α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$) der Winkel, den die beiden Vektoren miteinander einschließen, dann ist $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$ das Skalarprodukt der Vektoren \vec{u} und \vec{v} .

Beispiel 1 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Winkel $\alpha = 10,89^\circ$.

Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit Hilfe der Definitionsgleichung.

□ Lösung:

$$|\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \text{ und } |\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24}. \text{ Somit gilt}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{24} \cdot \cos(10,89) = 18,0$$

Übung 1

Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit Hilfe der Definitionsgleichung.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \alpha = 19,44^\circ$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \alpha = 90^\circ$

4.2 Koordinatenform des Skalarprodukts

Ist der Winkel α den die beiden Vektoren einschließen nicht bekannt, gibt es eine zweite Möglichkeit, dass Skalarprodukt nur mit Hilfe der Vektorkoordinaten zu berechnen.

Koordinatenform Skalarprodukt

Sind die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gegeben, dann errechnet sich das Skalarprodukt mit Hilfe ihrer Koordinaten durch:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Beispiel 2 Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit Hilfe der Koordinatenform

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□ Lösung:

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 = 7$$

$$\text{b) } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$$

4.3 Berechnung des eingeschlossenen Winkels α

In manchen Szenarien interessiert uns der eingeschlossene Winkel zweier Vektoren. Mit Hilfe der beiden Gleichungen $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ und $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$ für das Skalarprodukt können wir folgern: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Wenn wir nun die entstandene Gleichung nach $\cos(\alpha)$ umstellen, dann ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Beispiel 3 Berechne den von Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eingeschlossenen Winkel.

□ Lösung:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14}; |\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{45} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{45}} \Rightarrow \alpha = 73,8^\circ.$$

4.4 Eigenschaften und Gesetze des Skalarprodukts

- | | | |
|------|---|---|
| I. | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ | (Kommutativgesetz) |
| II. | $(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ für $r \in \mathbb{R}$ | |
| III. | $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$ | (Distributivgesetz) |
| IV. | $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2 > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ | |
| V. | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ | (\perp bedeutet senkrecht/orthogonal/Winkel 90°) |

Beweis: Der Beweis der Gesetze erfolgt direkt aus der Definition.

Exemplarisch der Beweis für V.:

$$" \Rightarrow ": \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = 0, \text{ Da } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ folgt } \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$" \Leftarrow ": \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(90^\circ) = 0$$

qed.

Übung 2 Prüfe, ob die Vektoren \vec{u} und \vec{v} zueinander orthogonal sind.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$

Übung 3

Untersuche, was bei der Berechnung des Skalarprodukts falsch gemacht wurde.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

Übung 4

a) Gib je zwei Vektoren an, die zu dem Vektor \vec{v} orthogonal sind.

(1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (3) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (4) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Begründe, dass es zu einem gegebenen Vektor unendlich viele orthogonale Vektoren gibt.

Übung 5

Untersuche, ob die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ mit $A(3|1|2)$, $B(3|0|-3)$, $C(7|3|-4)$ und $D(6|3|0)$ zueinander orthogonal sind. Welche Aussagen kann man über das Viereck machen?

Übung 6

Bestimme für den Dreieckspunkt C die dritte Koordinate so, dass das Dreieck $\triangle ABC$ mit $A(10|8|0)$, $B(6|11|1)$ und $C(2|8|c_3)$ rechtwinklig ist.

Vorüberlegung

Finde einen Vektor \vec{n} , der orthogonal zu den beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.

Dazu müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$