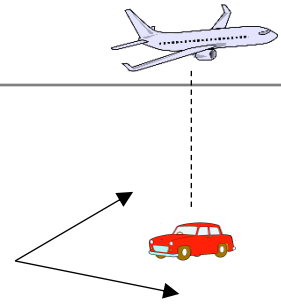


## 2. Punkte im Raum / Koordinatensystem

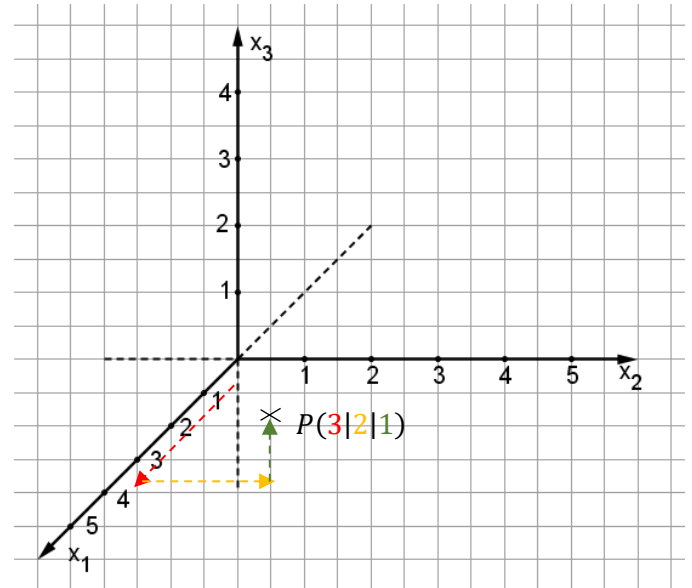
### Einführungsbeispiel:

Ein Koordinatensystem liegt auf dem Boden. So können die Koordinaten eines Spielzeugautos bestimmt werden.  
Welche Koordinaten hat das Spielzeugflugzeug?



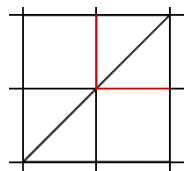
Um die Lage eines Punktes im Raum anzugeben, benötigt man ein Koordinatensystem mit drei Achsen. Im Weiteren werden die Koordinatenachsen mit  $x_1$ -Achse,  $x_2$ -Achse und  $x_3$ -Achse oder mit  $x$ -Achse,  $y$ -Achse und  $z$ -Achse bezeichnet und werden wie rechts abgebildet eingezeichnet.

Ein Punkt wird im Dreidimensionalen mit drei Koordinaten angegeben, z.B.  $P(3|2|1)$ .  
Um den Punkt  $P$  einzuzichnen, beginnen wir im Koordinatenursprung  $O(0|0|0)$ , gehen drei Einheiten in Richtung  $x_1$ , zwei Einheiten in Richtung  $x_2$  und eine Einheit in Richtung  $x_3$ .



### Erklärung:

Betrachten wir ein Ausschnitt aus dem Gitternetz des Koordinatensystems. Hier besteht das



große Quadrat mit der Seitenlänge 1cm aus vier gleichgroßen kleinen Quadraten mit der Seitenlänge  $\frac{1}{2}$  cm (rot eingezeichnet).

Die **Länge der Diagonalen** in einem dieser kleinen Quadrate beträgt nach dem Satz

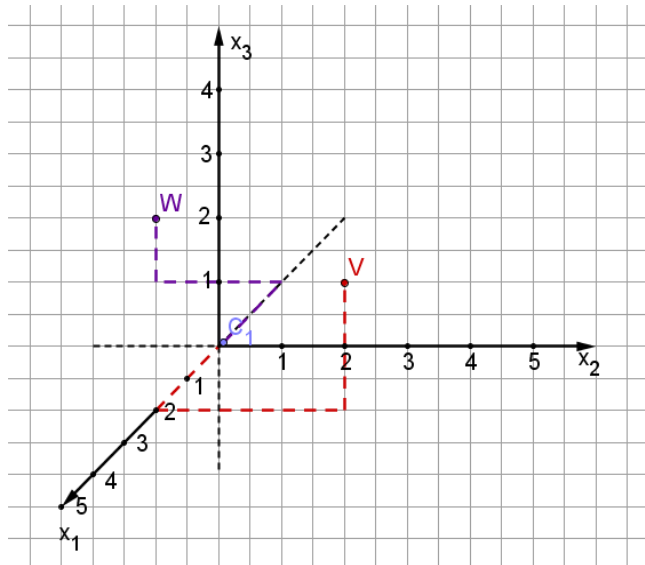
des Pythagoras  $d = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Diese **Diagonale** hat aber gerade die **Richtung der perspektivischen  $x_1$ -Achse bzw. x-Achse**.

Für eine Längeneinheit (LE) ergibt sich also (meist) für die  $x$ -Achse  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  cm und für die  $y$  und  $z$  Achsen jeweils 1 cm.

### Definition: Dreidimensionales (kartesisches) Koordinatensystem

Bei einem Koordinatensystem mit drei Achsen ist es üblich, dass die  $x_1$ -Achse nach vorne, die  $x_2$ -Achse nach rechts und die  $x_3$ -Achse nach oben zeigt. Die Lage eines Punktes  $P$  gibt man mit den Koordinaten  $P(p_1|p_2|p_3)$  an.

(Bemerkung: Die Achsen werden auch mit  $x$ ,  $y$  und  $z$  bezeichnet.)

**Beispiel**


Um den Punkt  $V(2|3|2)$  zu zeichnen geht man um 2 LE in  $x_1$ -Richtung, dann um 3 LE in  $x_2$ -Richtung und schließlich um 2 LE in  $x_3$ -Richtung.

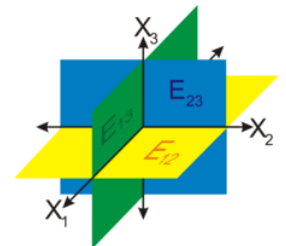
Der Punkt  $W$  könnte die Koordinaten  $W(-2|-2|1)$  haben.

**Besondere Punkte im Koordinatensystem**

- Punkte auf der  $x_1$ -Achse haben die Koordinaten  $P(p_1|0|0)$
- Punkte auf der  $x_2$ -Achse haben die Koordinaten  $P(0|p_2|0)$
- Punkte auf der  $x_3$ -Achse haben die Koordinaten  $P(0|0|p_3)$

**Es gibt drei Koordinatenebenen:**

- $x_1x_2$ -Ebene: sie ist durch die  $x_1$ -Achse und die  $x_2$ -Achse festgelegt ( $x_3$  überall 0)
- $x_2x_3$ -Ebene: sie ist durch die  $x_2$ -Achse und die  $x_3$ -Achse festgelegt ( $x_1$  überall 0)
- $x_1x_3$ -Ebene: sie ist durch die  $x_1$ -Achse und die  $x_3$ -Achse festgelegt ( $x_2$  überall 0)



**Übung 1:** Zeichne ein eigenes Koordinatensystem auf Papier (achte auf eine korrekte Skalierung) und zeichne ein:  $O(0|0|0)$ ,  $A(0|3|4)$ ,  $B(4|-1|5)$ ,  $C(1|0|-2)$ ,  $D(-2|1|3)$ .

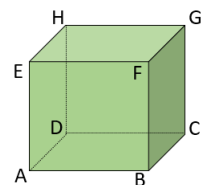
□ Lösung: vgl. geogebra

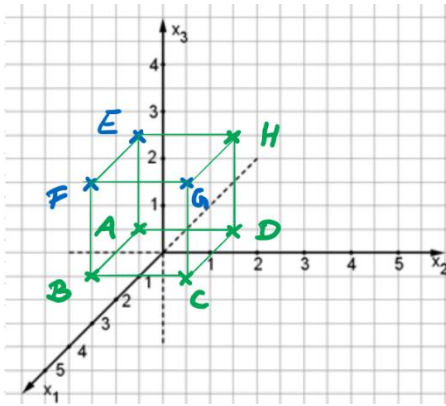
**Übung 2** Ein Würfel  $ABCDEFGH$  hat die Ecken  $A(-1|-1|0)$ ,  $B(1|-1|0)$ ,  $C(1|1|0)$ ,  $D(-1|1|0)$  und  $H(-1|1|2)$ .

- Zeichne den Würfel in ein dreidimensionales Koordinatensystem.
- Gib die Koordinaten der Ecken  $E$ ,  $F$  und  $G$  an.

□ Lösung:

- Die Punkte lassen sich wie folgt in ein dreidimensionales Koordinatensystem eintragen:

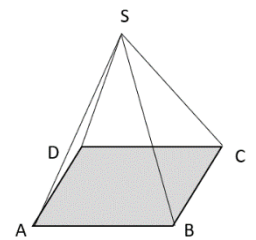




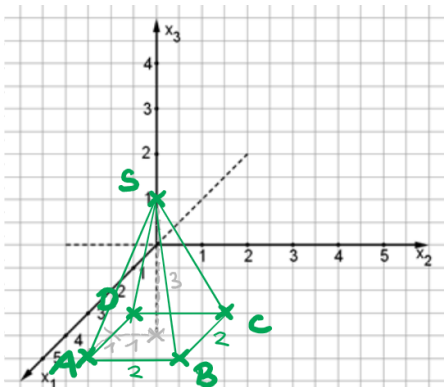
- b)  $E$  liegt 2 Einheiten über  $A$ :  $E(-1|-1|2)$   
 $F$  liegt 2 Einheiten über  $B$ :  $F(1|-1|2)$   
 $G$  liegt 2 Einheiten über  $C$ :  $G(1|1|2)$

*Achtung! Die Koordinaten von  $E$ ,  $F$  und  $G$  können nicht direkt im Koordinatensystem abgelesen werden, sondern können nur im Vergleich zu den gegebenen Punkten bestimmt werden.*

**Übung 3** Eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche  $ABCD$  und der Spitze  $S(2|1|2)$  hat die Höhe  $3\text{cm}$ . Die Strecke  $\overline{AB}$  ist  $2\text{cm}$  lang. Bestimme mögliche Koordinaten der Eckpunkte  $A, B, C$  und  $D$ . (Angaben in  $\text{cm}$ )

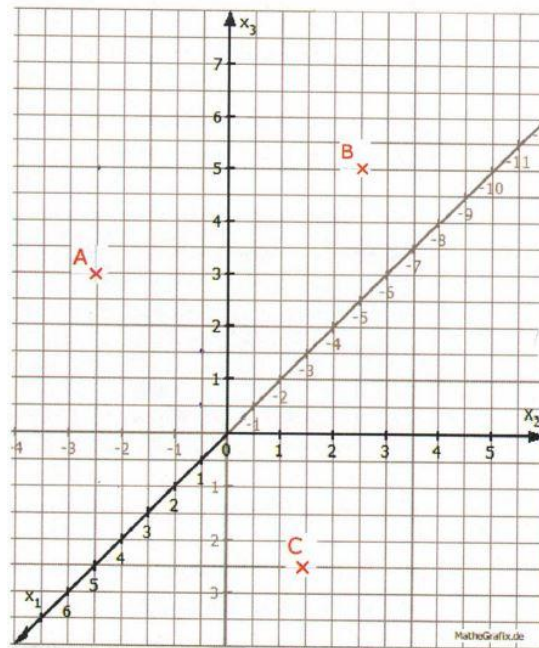


□ Lösung:



Zeichne  $S$  in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Um den Punkt  $A$  zu erhalten, gehe 3 Einheiten nach unten, 1 nach links und 1 nach vorne. Ergänze die weiteren Punkte: (Dies ist eine mögliche Lösung, die Pyramide kann auch um die Höhenachse gedreht)

**Aufgabe 2** Im gegebenen Koordinatensystem sind die Punkte A,B und C eingetragen. Ohne Hilfslinien lassen sich die Koordinaten dieser Punkte nicht eindeutig ablesen.



- a) Kreuze für A,B und C jeweils an, wenn die Punkte die angegebenen Koordinaten haben können
- |   |                                      |   |  |
|---|--------------------------------------|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> A(2 -1,5 4) | <input type="checkbox"/> A(-2 -3 2)  | <input checked="" type="checkbox"/> A(0 -2,5 3) | <input type="checkbox"/> A(4 3 3)              |
| <input checked="" type="checkbox"/> B(0 2,5 5)  | <input type="checkbox"/> B(-5 0 2,5) | <input type="checkbox"/> B(3 4 6)               | <input checked="" type="checkbox"/> B(5 5 7,5) |
| <input checked="" type="checkbox"/> C(5 4 0)    | <input type="checkbox"/> C(2 3 -1,5) | <input checked="" type="checkbox"/> C(-1 1 -3)  | <input type="checkbox"/> C(0 3 -2)             |
- b) Fülle die Lücken so aus, dass die Koordinaten mit der Lage der Punkte A,B und C übereinstimmen:
- A(1| -2 | 3,5 )    A( 5 |0| 5,5 )    A(-4 | -4,5 | 1)
- B(- 4 | 0,5 | 3 )    B( 4 | 4,5 | 7 )    B( 5 |5| 7,5 )
- C( 5 | 4 | 0)