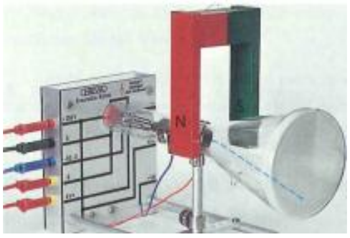
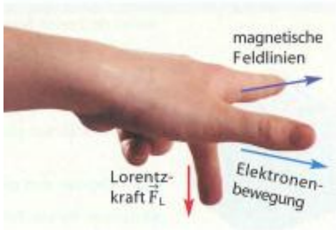
5. Das Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt

Wieder zunächst ein Physik Exkurs:

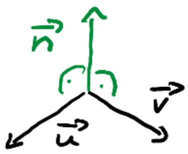


Bewegen sich in einem Magnetfeld elektrisch geladene Teilchen quer zu den Feldlinien des Magnetfeldes, so werden sie abgelenkt. Das Magnetfeld übt also auf frei bewegliche elektrische Ladungen eine Kraft F_L aus, die nach den niederländischen Forscher Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) Lorentzkraft genannt wird.
Sie ist orthogonal zu den Feldlinien und orthogonal zur Bewegungsrichtung der Elektronen. Ihre Richtung kann man mit der sogenannten Linke-Hand-Regel bestimmen.



Zur Bestimmung der Lorentzkraft sucht man also einen Vektor, der zu zwei gegebenen Vektoren orthogonal ist. Dieses Problem taucht in vielen weiteren Anwendungen aus Physik und Technik sowie auch in der Geometrie häufig auf.

Beispiel 1 Bestimme zu den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ einen Vektor $\vec{n}$, der zu beiden Vektoren orthogonal ist.



□ ***Lösung:*** *Für den Vektor $\vec{n}$ muss gelten:*

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -3n_1 + n_2 + 2n_3 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -n_1 + 2n_2 - n_3 = 0$$

Betrachten wir die beiden entstandenen Gleichungen, so erhalten wir ein LGS:

$$\begin{array}{l} (I) \; -3n_1 + n_2 + 2n_3 = 0 \\ (II) \; -n_1 + 2n_2 - n_3 = 0 \end{array}$$

*Dieses LGS ist **überbestimmt**, das heißt es besitzt mehr Variablen (3) als Gleichungen (2).*
Das heißt man erhält hier unendlich viele Lösungen.
*Da nur ein Vektor gesucht ist, können wir **eine der Variablen festlegen**, z.B. setzen wir für* $\boxed{n_3 = 1}$.
Dann ergibt sich das LGS

$$\begin{array}{ll} (I) \; -3n_1 + n_2 + 2 = 0 & | -2 \\ (II) \; -n_1 + 2n_2 - 1 = 0 & | +1 \\ \hline (I) \; -3n_1 + n_2 = -2 & \cdot(-2) \\ (II) \; -n_1 + 2n_2 = 1 & + \\ \hline 5n_1 \qquad = 5 & \end{array}$$

Wir erhalten $\boxed{n_1 = 1}$ *und durch Einsetzen in die Gleichung* (I) $\boxed{n_2 = 1}$.

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ist als orthogonal zu* $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Bemerkung: *Alle Vielfache von* $\vec{n}$ *sind orthogonal zu* $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Übung 1 Berechne jeweils einen orthognalen Vektor $\vec{n}$ zu den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 3n_1 + 2n_2 - n_3 = 0$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_1 + n_2 + 2n_3 = 0$

$\text{I.} \quad 3n_1 + 2n_2 - n_3 = 0$
$\text{II.} \quad n_1 + n_2 - 2n_3 = 0$

setze $\boxed{n_3 = 1}$ $\rightsquigarrow$ $\text{I} \quad 3n_1 + 2n_2 - 1 = 0$
$\text{II} \quad n_1 + n_2 + 2 = 0$

$\rightsquigarrow$ $\text{I} \quad 3n_1 + 2n_2 = 1$ $\quad \text{I} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)$ $]+$
$\text{II} \quad n_1 + n_2 = -2$

$\rightsquigarrow$ $\text{I.} \quad 3n_1 + 2n_2 = 1$ $\quad \Rightarrow 3 \cdot 5 + 2n_2 = 1 \Rightarrow \boxed{n_2 = -7}$
$\text{II.} \quad -\tfrac{1}{2} n_1 = -\tfrac{5}{2} \Rightarrow \boxed{n_1 = 5}$

$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) und c) analog

Der Vektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

ist ebenfalls eine Lösung des LGS und wird als **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** bezeichnet. In den folgenden Kapiteln werden wir den sogenannten **Normalenvektor** genauer untersuchen. Gemeint ist damit vorgreifend ein auf zwei Vektoren bezogener orthogonaler Vektor $\vec{n}$.

Beispiel 2 Berechne das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ an.

□ ***Lösung:*** $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-1) \\ -3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Das folgende Rechenschema erleichtert die Berechnung des Kreuzprodukts:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \cancel{-3} & \cancel{-1} \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-1) \\ -3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Da jedes Vielfache von $\vec{n}$ orthogonal zu den Vektoren liegt, können wir auch $\vec{n^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wählen.

Übung 2 Berechne das Vektorprodukt der beiden Vektoren. Versuche, wenn möglich wie in Beispiel 2 einen Faktor aus dem gefundenen Vektor zu eleminieren und vergleiche mit deinen Lösungen aus Übung 1.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 - 3\cdot 2 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ -1-6 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

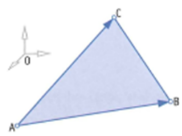
b) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 5\cdot 4 \\ 5\cdot 3 - 2\cdot 2 \\ 2\cdot 4 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{n^*} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{n} = 3\cdot\vec{n^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Geometrische Verwendung des Kreuzprodukts

Flächeninhalt eines Dreiecks ΔABC

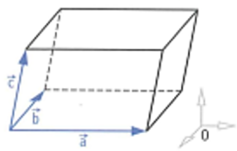
$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$



Volumen eines Spats, welcher durch die Vektoren a, b und c aufgespannt wird. (Ein Spat ist ein Körper mit sechs Seitenflächen, wobei gegenüberliegende Seiten kongruente Parallelogramme sind.)

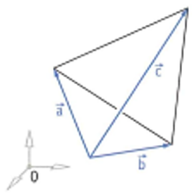
$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$

(Spatprodukt)



Volumen einer dreiseitigen Pyramide, welche durch die Vektoren a, b und c aufgespannt wird

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$



Übung 3 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQR mit $P(-3|1|4), Q(2|-5|8), R(6|8|-5)$.

$P(-3|1|4)$; $Q(2|-5|8)$ und $R(6|8|-5)$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot (-9) - 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 - 5 \cdot (-9) \\ 5 \cdot 7 - (-6) \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 81 \\ 89 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \left| \begin{pmatrix} 26 \\ 86 \\ 89 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{26^2 + 81^2 + 89^2} = \sqrt{16613} \approx 123,12 \text{ LE}$$

$$A_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \cdot 123,12 = 61,56 \text{ FE}$$