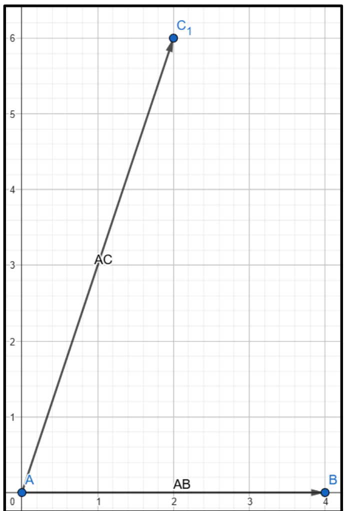
Das Skalar und Vektorprodukt

Heute wollen wir uns eine neue Art der Verknüpfung von Vektoren anschauen. Wir kennen jetzt schon das Addieren, sowie das Subtrahieren von Vektoren. Jetzt wollen wir noch zusätzlich lernen, wie man Vektoren miteinander multipliziert.

Vektoren können auf zwei unterschiedliche Weisen multipliziert werden. Zwischen beiden Verfahren gibt es große Unterschiede und unterschiedliche Zwecke, weshalb wir sie uns nacheinander anschauen.

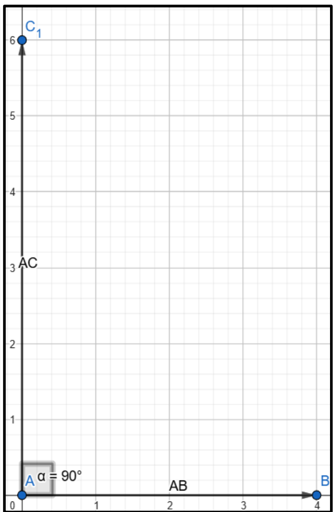
Das Skalarprodukt

Grundlegend erstmal. Wozu brauchen wir das? Das Skalarprodukt hat tolle Fähigkeiten, darunter kann es uns zeigen, wie „ähnlich“ zwei Vektoren zueinander sind. Dazu hier ein paar kleine Bilder:



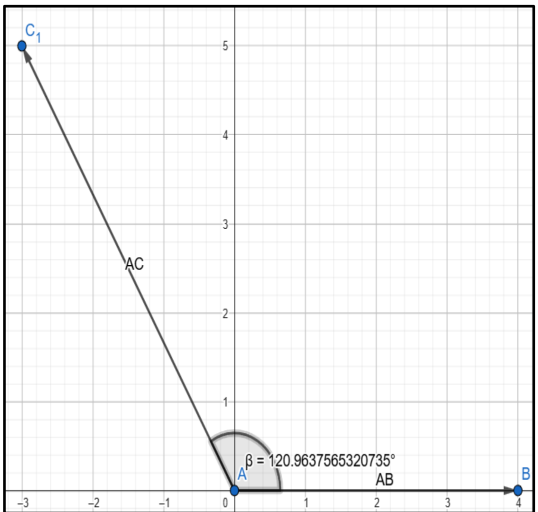
Auf diesem Bild sehen wir zwei Vektoren. Der Winkel α zwischen diesen beiden Vektoren liegt zwischen

$$0 < \alpha < 90^0$$



Auf diesem Bild sehen wir zwei Vektoren. Der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren beträgt genau:

$$\alpha = 90°$$



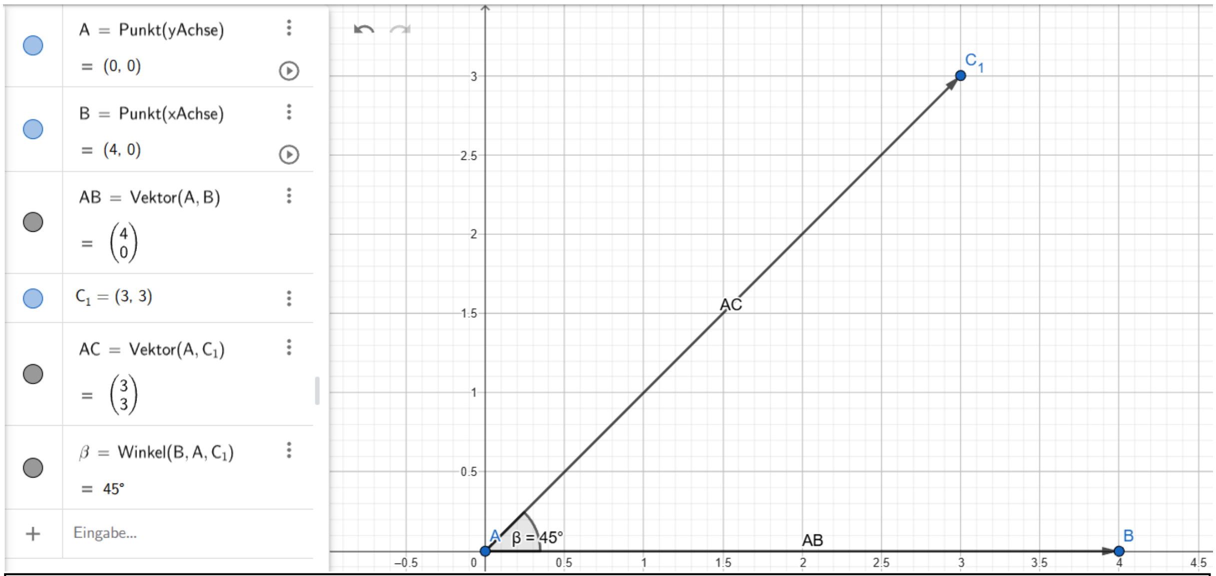
Auf diesem Bild sehen wir zwei Vektoren. Der Winkel α zwischen diesen beiden Vektoren liegt zwischen

$$90 < \alpha < 180°$$

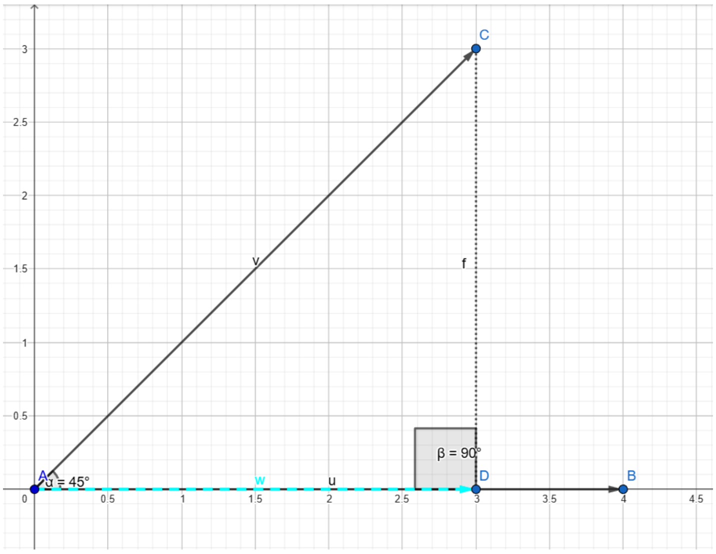
Vektoren sind durch zwei Eigenschaften charakterisiert. Zum einen durch ihre Länge und zum anderen die Richtung, in die sie zeigen. Über beide Eigenschaften kann das Skalarprodukt eine Aussage treffen. Auch dazu gibt es wieder ein paar Formeln und Bedeutungssätze.

Was genau ist denn jetzt das Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ist definiert als **eine** Zahl. Und je nachdem, wie diese aussieht, gibt sie uns Auskünfte über die beiden Vektoren.

Geometrische Darstellung des Skalarproduktes:

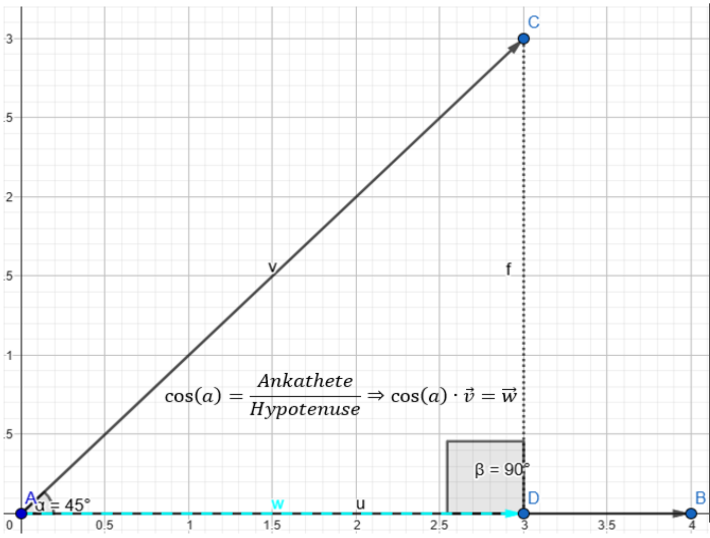


Hier gibt es eine einfache Darstellung von zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$. Diese beiden Vektoren zeigen nicht in die gleiche Richtung und haben nicht die gleiche Länge. Sie stehen aber in einem 45°-Winkel zueinander



Auf diesem Bild sehen wir nun ein paar Details mehr.

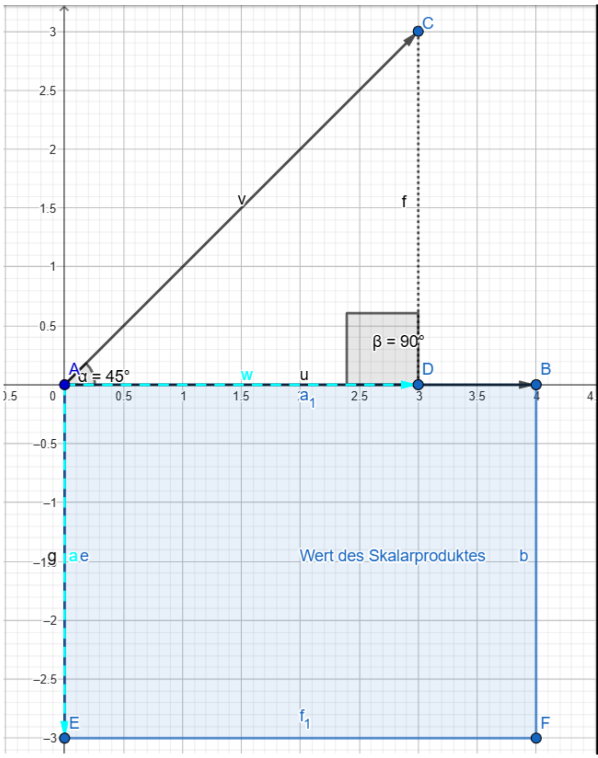
In Türkis abgebildet liegt ein neuer Vektor. Ein sogenannter Projektionsvektor. Er wird dadurch charakterisiert, dass er auf dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ liegt und seine Länge so gewählt ist, dass wir eine senkrechte Linie zwischen Ende des Projektionsvektors und Ende des Vektors $\overrightarrow{AC}$ ziehen können.



Wollen wir doch einmal schauen, wie wir diesen Projektionsvektor in seiner Länge bestimmen können.

Wir gehen hier über die Regeln der Kosinus-Berechnung. Daraus folgt, dass der Vektor $\vec{w} = cos(a) \cdot \vec{v}$

Wer sich jetzt fragt, wozu wir das brauchen, der findet gleich die Antwort auf der nächsten Seite:



Und jetzt sind wir beim Skalarprodukt. Wir können es allgemein so definieren, dass es der Flächeninhalt des Rechtecks ist, das zwischen Projizierungsvektor und AB-Vektor aufgespannt wird.

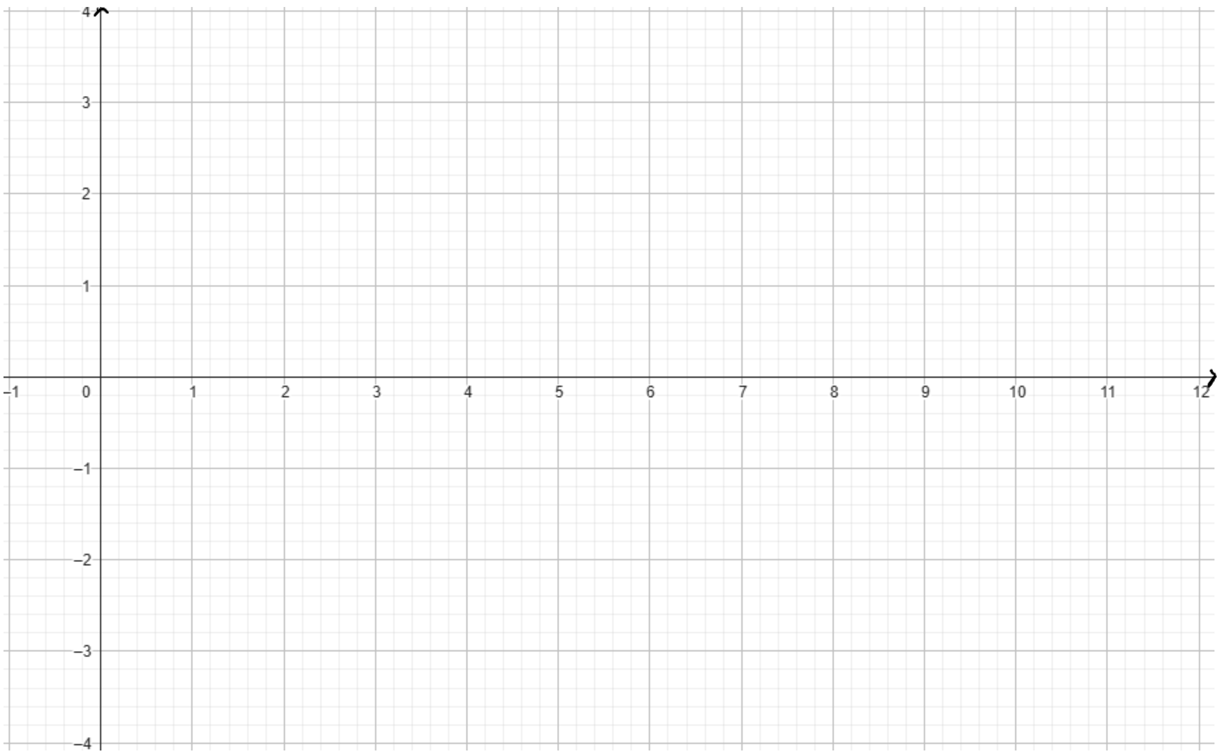
Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist dabei derjenige, auf welchem der Projizierungsvektor liegt.

Übungen zur graphischen Darstellung

Übung 1:

Bestimme graphisch den Wert des Skalarproduktes. Gehe dabei so vor, dass du die gegebenen Vektoren vom Ursprung aus einzeichnest. Bestimme anschließend zeichnerisch den Projektionsvektor und bestimme daraus das Skalarprodukt.

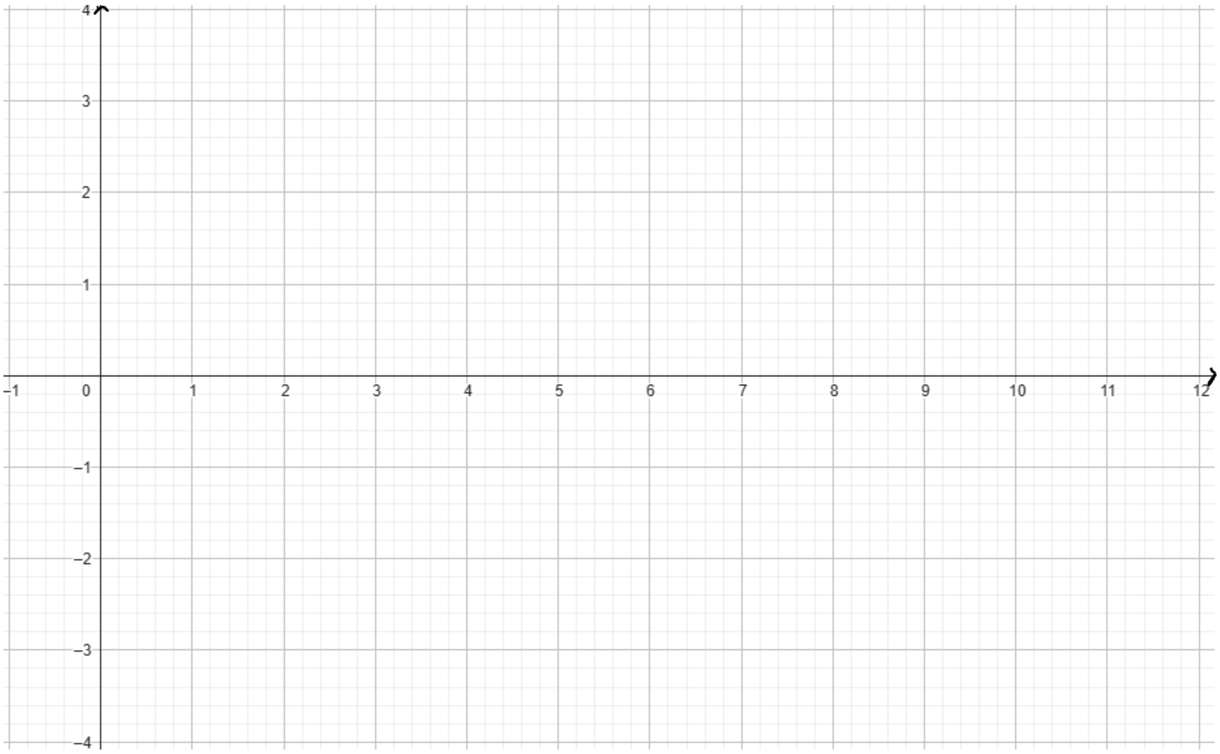
Geg: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



Übung 2:

Bestimme graphisch den Wert des Skalarproduktes. Gehe dabei so vor, dass du die gegebenen Vektoren vom Ursprung aus einzeichnest. Bestimme anschließend zeichnerisch den Projektionsvektor und bestimme daraus das Skalarprodukt.

Geg: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$



Definitionen und Gleichungen:

Merke:

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Vektoren und ist $\alpha(0 \leq \alpha \leq 180^0)$ der Winkel, den die beiden Vektoren miteinander einschließen, dann **ist** $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)}$ das Skalarprodukt beider Vektoren

Eigenschaften und Gesetze für das Skalarprodukt

I. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

II. $(r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

III. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$

IV. $\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 > 0$ für $\vec{a} \neq 0$

V. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b} \neq 0$

Definitionssätze

1. Ist das Skalarprodukt 0 für zwei Vektoren ungleich null, dann sind die Vektoren Orthogonal
2. Hat das Skalarprodukt einen positiven Wert, dann ist der Winkel zwischen ihnen spitz
3. Hat das Skalarprodukt einen negativen Wert, dann ist der Winkel zwischen ihnen stumpf

Beispiel:

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Winkel $\alpha = 10{,}89°$. Berechne das Skalarprodukt der Vektoren mit Hilfe der Definitionsgleichung

Lösung:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)} \cdot \sqrt{(2^2 + 2^2 + 4^2)} \cdot \cos(10{,}89°)$$

$$= \sqrt{14} \cdot \sqrt{24} \cdot \cos(10{,}89°) = 18{,}00020521 \approx 18$$

Übungen zum Skalarprodukt über die Definitionsgleichung

Übung 1:

Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren mit der Definitionsgleichung:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = 19{,}44^0$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha = 90^0$

Die Koordinatenform des Skalarprodukts

Nun kann es passieren, dass wir den Winkel nicht gegeben bekommen, aber trotzdem das Skalarprodukt berechnen wollen. Dafür gibt es eine andere Möglichkeit. Die sogenannte Koordinatenform. Sie hat die gleiche Zahl zum Ergebnis, funktioniert aber etwas anders in der Rechnung

Merke:

Koordinatenform Skalarprodukt

Sind die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gegeben, dann errechnet sich das Skalarprodukt mit Hilfe ihrer Koordinaten durch:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Berechnung des Winkels zwischen beiden Vektoren:

Durch die beiden Definitionsgleichungen können wir den Winkel berechnen:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

Demnach gilt:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos(\alpha) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Formel:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$$

Übungen Skalarprodukt Koordinatenform und Winkel

Übung 1:

Überprüfe, ob die Vektoren $\vec{u}\ und\ \vec{v}$ orthogonal zueinander sind. Wenn nicht, dann berechne den Winkel:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ -0{,}25 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ -1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übung 2

Was ist hier der Fehler?

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$

Übung 3:

Untersuche, ob die Diagonalen des Vierecks ABCD mit $A(3|1|2), B(3|0|-3), C(7|3|-4)$ und $D(6|3|0)$ zueinander orthogonal sind. Welche Aussagen kann man über das Viereck machen?

Das Vektorprodukt

Nun kommen wir zur zweiten Möglichkeit, Vektoren miteinander zu multiplizieren. Bei dieser neuen Rechnung entsteht immer ein **neuer Vektor,** der orthogonal zu den beiden anderen Vektoren steht.

Erklärung des Vektorproduktes

Wir wollen also einen neuen Vektor finden. Nenne wir diesen einfach $\vec{x}$. Dieser soll senkrecht zu den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ stehen. Die Bedingungen sind also, dass das Skalarprodukt zwischen Vektor $\vec{x}$ und $\vec{u}$, sowie zwischen $\vec{x}$ und $\vec{v}$ gleich null ist. Bauen wir dazu zwei Gleichungen:

I. $\vec{u} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

II. $\vec{v} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

I. $-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

II. $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Suchen wir uns mal eine aus.

$x_3 = 1$

I. $-3x_1 + x_2 = -2 \mid \cdot (-2)$

II. $-x_1 + 2x_2 = 1$

Daraus folgt:

I. $6x_1 - 2x_2 = 4$

II. $-x_1 + 2x_2 = 1$

---

i. $5x_1 = 5 \mid : 5$

$x_1 = 1$

ii. $-1 + 2x_2 = 1 \mid + 1$

$2x_2 = 2 \mid : 2$

$x_2 = 1$

Wir haben jetzt einen möglichen Vektor gefunden. Jedes Vielfache dieses Vektors ist dabei auch orthogonal zu den ursprünglichen Vektoren: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jetzt hat man nicht immer Lust, ein Gleichungssystem zu lösen, weshalb wir ein neues Mittel einführen wollen. Das Vektorprodukt.

Eigenschaften des Vektorproduktes/Kreuzproduktes

Für linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **im Raum** gilt:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ wird Kreuzprodukt genannt.
2. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Berechnungen des Vektorproduktes

Das Vektorprodukt wird wie folgt berechnet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Nun ist auch diese Rechnung eher kompliziert. Es gibt da eine kleine Merkhilfe, wie wir ein solches Vektorprodukt berechnen. Wir können folgende Hilfe nehmen:

Das Vektorprodukt kann wie folgt berechnet werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cancel{a_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cancel{b_3} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Rechengesetze für das Vektorprodukt

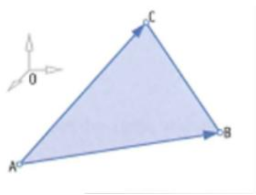
VI. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

VII. $(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ für $r \in \mathbb{R}$

VIII. $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$

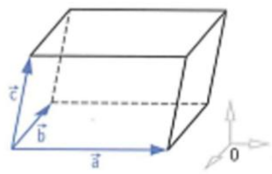
Geometrische Verwendung des Kreuzproduktes

Flächeninhalt eines Dreiecks ΔABC:



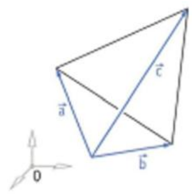
$$A = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Volumen eines Spats, welcher durch die Vektoren a, b und c aufgespannt wird. (Ein Spat ist ein Körper mit sechs Seitenflächen, wobei gegenüberliegende Seiten kongruente Parallelogramme sind.



$$V = |\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$$

Volumen einer dreiseitigen Pyramide, welche durch die Vektoren a, b und c aufgespannt wird.



$$V = \frac{1}{6}|\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$$

Übungen zum Vektorprodukt/Kreuzprodukt

Übung 1:

Berechne für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ das Vektorprodukt

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Übung 2:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bilde folgende Kreuzprodukte

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{a} \times \vec{c}$

c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Übung 3:

Beweise: Für jeden Vektor $\vec{a}$ des Raumes gilt: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

Übung 4:

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQR mit P(-3|1|4), Q(2|-5|8), R(6|8|-5)