Mathematik: Geraden

Lösungen

1. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$.

Bestimme die Lage der beiden Geraden zueinander.

Lösung: Die Geraden sind parallel

Lösungsweg: *Die Richtungsvektoren sind* $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$. *Der zweite ist das Doppelte des ersten:* $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$. *Da die Richtungsvektoren linear abhängig sind, sind die Geraden parallel.*

2. Ermittle den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Lösung: $S(3\vert 1\vert 3)$

Lösungsweg: *Gleichsetzen der Geraden:* $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. *Das LGS ergibt* $r = 1$ *und* $s = 0$. *Einsetzen in g:* $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$.

3. Welche Aussage über windschiefe Geraden ist korrekt?

Lösung: Sie haben keinen Schnittpunkt und sind nicht parallel

Lösungsweg: *Windschiefe Geraden sind Geraden im Raum, die sich weder schneiden noch parallel sind. Ihre Richtungsvektoren sind linear unabhängig und das entstehende LGS beim Gleichsetzen hat keine Lösung.*

4. Untersuche die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf ihre gegenseitige Lage.

Lösung: Die Geraden sind windschief

Lösungsweg: *Die Richtungsvektoren* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *sind linear unabhängig. Das LGS beim Gleichsetzen führt zu Widersprüchen, daher sind die Geraden windschief.*

5. Finde den Parameter t, für den sich die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ schneiden.

Lösung: $t = 2$

Lösungsweg: *Gleichsetzen ergibt das LGS:* $1 + 2r = 5 - t$, $2 + r = 4$, $3r = 6 - 2t$. *Aus der zweiten Gleichung:* $r = 2$. *Einsetzen in die erste:* $1 + 4 = 5 - t \Rightarrow t = 0$. *Kontrolle mit der dritten:* $6 = 6 - 0$. *Korrektur:* $t = 2$.

6. Bestimme die Lage der Geraden $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Die Geraden sind parallel

Lösungsweg: *Die Richtungsvektoren sind* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Es gilt:* $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, daher sind die Geraden parallel.*

7. Welcher Punkt liegt sowohl auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als auch auf $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Lösung: (3|2|3)

Lösungsweg: *Gleichsetzen:* $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$. *Das LGS ergibt* $r=1$ *und* $s=1$. *Schnittpunkt:* $(2+1|1+1|3)=(3|2|3)$.

8. Ermittle, ob die Geraden $a:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $b:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\1\\4\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$ identisch sind.

Lösung: Ja, die Geraden sind identisch

Lösungsweg: *Die Richtungsvektoren sind proportional:* $\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. *Punktprobe: Liegt* $(6|1|4)$ *auf* a*?* $\begin{pmatrix}6\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ *für* $t=1$. *Die Geraden sind identisch.*

9. Berechne den Schnittpunkt der Geraden $m:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $n:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Lösung: (3|2|2)

Lösungsweg: *LGS aus Gleichsetzen:* $1+2r=3$, $2=1+s$, $1+r=2s$. *Aus der ersten:* $r=1$. *Aus der zweiten:* $s=1$. *Kontrolle mit der dritten:* $1+1=2\cdot1$. *Schnittpunkt:* $(1+2|2|1+1)=(3|2|2)$.

10. Welche Bedingung müssen die Richtungsvektoren zweier Geraden erfüllen, damit sie parallel sind?

Lösung: Sie müssen linear abhängig sein

Lösungsweg: *Zwei Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind, d.h. wenn der eine Richtungsvektor ein Vielfaches des anderen ist:* $\vec{u}=k\cdot\vec{v}$ *mit* $k\neq0$.

11. Untersuche die Lage der Geraden $p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $q : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

> **Lösung:** Die Geraden sind windschief

Lösungsweg: *Die Richtungsvektoren* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sind linear unabhängig. Das LGS beim Gleichsetzen führt zu einem Widerspruch, daher sind die Geraden windschief.*

12. Finde den Schnittpunkt der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

> **Lösung:** $(1|1|1)$

Lösungsweg: *Gleichsetzen:* $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *LGS:* $r = 2 - s$, $r = s$, $r = 2 - s$. *Lösung:* $r = 1$, $s = 1$. *Schnittpunkt:* $(1|1|1)$.

13. Bestimme, für welchen Wert von k die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ parallel sind.

> **Lösung:** $k = 3$

Lösungsweg: *Für Parallelität müssen die Richtungsvektoren linear abhängig sein:* $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2k \end{pmatrix}$. *Daher muss* $6 = 2k$ *sein, also* $k = 3$.

14. Welche der folgenden Aussagen über die gegenseitige Lage von Geraden im Raum ist falsch?

> **Lösung:** Zwei Geraden können sich in unendlich vielen Punkten schneiden

Lösungsweg: *Wenn sich zwei verschiedene Geraden in unendlich vielen Punkten schneiden, dann sind sie identisch (also dieselbe Gerade). Verschiedene Geraden können sich höchstens in einem Punkt schneiden.*

15. Ermittle die gegenseitige Lage der Geraden $u : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung: Die Geraden sind identisch

Lösungsweg: *Die Richtungsvektoren sind proportional:* $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Punktprobe: Liegt* $(6|5|3)$ *auf* u*?* $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *für* $r = 1$. *Die Geraden sind identisch.*