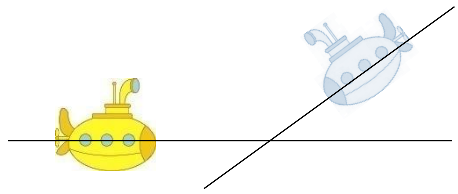
6. Gegenseitige Lage von Geraden

Einführungsbeispiel:



Der Kurs des U-Bootes aus dem letzten Beispiel kann durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden ($r \in \mathbb{R}$).

Der Kurs eines zweiten U-Bootes kann durch die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden ($t \in \mathbb{R}$). Kreuzen sich die Kurse der beiden U-Boote?

□ ***Lösung:*** *Die beiden Kurse kreuzen sich, wenn sich die dazugehörigen Geraden* ***schneiden****. Wenn die Geraden g und h einen gemeinsamen Schnittpunkt S haben, dann liegt S sowohl auf der Geraden g als auch auf der Geraden h. Es gibt also für beide Geradengleichungen einen Parameter r, bzw. t, der eingesetzt den Ortsvektor des Schnittpunktes S ergibt.*

Wir wollen also überprüfen, ob es r und $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

Wie in der Analysis werden die beiden Funktionen gleichgesetzt, um den Schnittpunkt zu finden!

$$g = h$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir formen um, indem alle Vektoren mit Parameter nach links und alle Vektoren ohne Parameter nach rechts gebracht werden:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassen und zeilenweiseschreiben ergibt das folgende LGS:

$$\begin{array}{rrl} 2r & +2t & = 6 \\ 5r & -t & = 3 \\ & t & = 2 \end{array}$$

Das LGS hat 3 Gleichungen und 2 Unbekannte. Als Lösungen erhalten wir $t = 2$ und $r = 1$ und überprüfen alle Gleichungen, indem wir $t = 2$ und $r = 1$ einsetzen (Probe ✔).
Setzt man nun t und r in die jeweilige Geradengleichung ein, so erhalten wir den Ortsvektor des Schnittpunktes S:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \left(\text{bzw. } \vec{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Antwort: *Die beiden Kurse schneiden sich im Punkt $\boldsymbol{S(3|7|-3)}$. Die U-Boot Kurse kreuzen sich folglich.*

Geraden müssen sich nicht immer schneiden, dies werden wir im nächsten Beispiel sehen.
Vorüberlegung: Wie können Geraden im Raum noch zueinanderstehen? 🤔

Beispiel: Gegeben ist die Gerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wobei $t \in \mathbb{R}$. Untersuche die Lage der Geraden k zu **a)** $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und **b)** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

□ ***Lösung:*** *a) Wie im Einführungsbeispiel, könnten wir die beiden Geraden k und h gleichsetzen und überprüfen, ob sie einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Doch wir vergleichen erst einmal die beiden Richtungsvektoren. Diese sind Vielfache voneinander (**linear abhängig**), denn:*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

*Die Geraden sind also **parallel** zueinander! Ob sie sogar identisch sind, finden wir mit einer **Punktprobe** heraus. Setze dazu den Ortsvektor von k in die Geradengleichung von h ein:*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} r & = & -0{,}25 \\ r & = & -4 \\ r & = & 2 \end{matrix} \qquad ↯$$

*Für r ergeben sich widersprüchliche Ergebnisse, die Geraden sind also **parallel und nicht identisch**.*

b) Die Richtungsvektoren von k und g sind linear unabhängig:

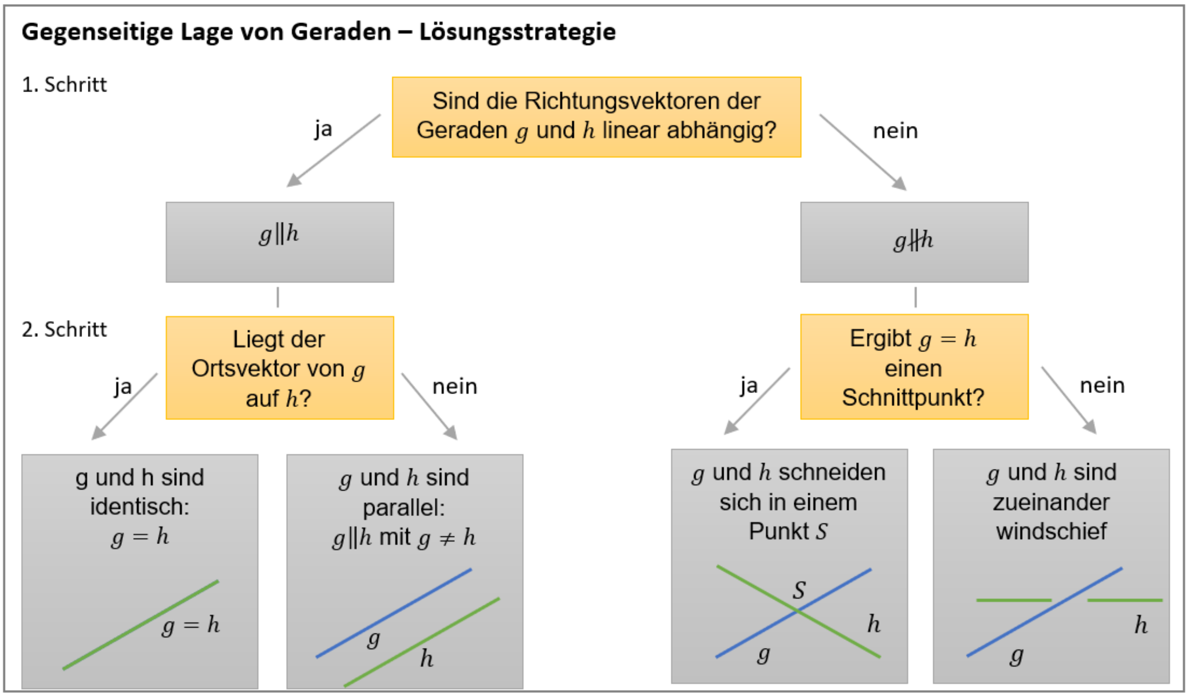
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ für kein } k \in \mathbb{R} \text{ erfüllt.}$$

Wir setzen die beiden Geraden also wieder gleich und erstellen ein LGS:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen widersprechen sich (rechne nach): ↯

*Die Geraden sind also weder parallel noch schneiden sie sich, sie sind **windschief.***



Gegenseitige Lage von Geraden – Übungen

Ü1 Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Untersuche die Lage der Geraden g jeweils zu den folgenden Geraden h, k und l mit $t \in \mathbb{R}$:

(1) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) k geht durch die Punkte $A(5|7|5)$ und $B(6{,}5|6{,}5|7)$

(3) l geht durch die Punkte $P(5|-5|0)$ und $Q(7|-4|-8)$

Ü2 Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Gib gegebenenfalls die Koordinaten ihres Schnittpunktes an. Dabei gilt jeweils $r, s \in \mathbb{R}$.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

h geht durch die Punkte $P(17|-38|24)$ und $Q(12|-23|14)$

d) g geht durch die Punkte $P(-7|2|2)$ und $Q(-6|4|1)$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ü3 Kristin berechnet den Schnittpunkt der Geraden (siehe rechts)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Überprüfe ihre Rechnung und korrigiere gegebenenfalls ihre Fehler.

$$\begin{array}{l|l} (1) & 7 + 2r = -5 + s \\ (2) & -3 - r = 1 \\ (3) & 2 + 2r = -3 + 3s \end{array}$$

Aus (2) folgt $r = -4$ eingesetzt in (1) $7 - 8 = -5 + s \Rightarrow s = 4$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad S(-1|1|9)$

Ü4 Eine Flugüberwachung ortet gleichzeitig zwei Sportflugzeuge. Bezogen auf ein lokales Koordinatensystem (Einheit 1 km), in dessen Ursprung die Flugüberwachung liegt, können die Flugrouten durch folgende Parameterdarstellungen der Geraden g und h beschrieben werden:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -2{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}6 \\ -3{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ -2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Untersuche, ob es auf diesen Flugrouten möglicherweise zu einer Kollision kommen kann.