

Задачи для 1 курса, часть 1

1. Задачи на обработку последовательности

В следующих задачах предполагается, что в файле записана последовательность чисел неизвестной длины (возможно, пустая). Требуется за один просмотр файла и без запоминания последовательности в массиве определить требуемую характеристику последовательности.

Программа должна содержать функцию, которая получает в качестве параметра имя файла (или указатель на файл) и возвращает требуемое значение. Функция `main` запрашивает с клавиатуры имя файла, обращается к функции и выводит результат на экран.

1. Сумма и произведение чисел из последовательности.
2. Среднее арифметическое чисел из последовательности.
3. Количество чисел, больших предыдущего.
4. Есть ли в последовательности число X .
5. Номер последнего числа, равного X .
6. Все ли элементы последовательности равны между собой.
7. Является ли последовательность возрастающей, убывающей.
8. Удовлетворяют ли элементы последовательности данному рекуррентному соотношению $c_1 a_{i+1} + c_2 a_i + c_3 a_{i-1} = b$.
9. Количество различных элементов неубывающей последовательности.
10. Номер первого числа, равного максимуму из всех чисел.
11. Номер последнего числа, равного минимуму из всех чисел.
12. Количество чисел, равных минимальному.
13. Среднее квадратическое отклонение от среднего арифметического. $D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M)^2$, где M — среднее арифметическое.

14. Экспоненциально взвешенное среднее: $S = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \sum_{i=1}^n x_i \lambda^{n-i}$, где $0 < \lambda < 1$ — параметр, вводимый с клавиатуры.

15. Величину максимального отклонения элементов последовательности от среднего значения.
16. Количество возрастающих участков последовательности.
17. Длину наибольшего постоянного участка.
18. Длину наибольшего возрастающего участка.
19. Максимальное расстояние между локальными минимумами.
20. Максимальную сумму подряд идущих элементов последовательности.
21. Последовательность чисел представляет собой коэффициенты многочлена по возрастанию степеней. Вычислить многочлен и его производную в точке x .
22. Последовательность чисел представляет собой коэффициенты многочлена по убыванию степеней. Вычислить многочлен и его производную в точке x .

2. Задачи на работу с массивами

Решения следующих задач должны содержать функцию, которая получает в качестве параметров имя массива и его длину и без использования дополнительных массивов выполняет необходимые действия.

Функция `main` должна заполнить массив числами из файла. Для определения длины массива предусматривается два варианта: 1) по значению первого числа в файле, 2) непосредственным подсчетом количества чисел в файле. Результат также выводится в файл.

0. Решить все задачи предыдущего раздела, заменив последовательность на массив значений.
1. Симметричны ли значения элементов массива?
2. Переставить элементы массива в обратном порядке.
3. Циклически сдвинуть элементы массива на одну позицию вправо.
4. Сравнить два неупорядоченных целочисленных массива A и B как числовые множества: $A = B$ и $A \subset B$.
5. Удалить из массива все отрицательные значения, а оставшиеся уплотнить (сдвинуть) с сохранением исходного порядка к началу массива.
6. Циклически сдвинуть элементы массива на K позиций вправо с затратой $O(N)$ действий (N — длина массива)
7. Каждый элемент массива заменить на полусумму соседей (кроме первого и последнего)
8. Назовем x -отрезком группу подряд идущих элементов массива, каждый из которых равен x . Для заданного числа x заменить элементы каждого x -отрезка на полусумму элементов, прилегающих к этому отрезку справа и слева. Если x -отрезок расположен в начале или конце массива, считать второй крайний элемент равным нулю.
9. Сгруппировать положительные элементы массива в его начале, а отрицательные — в конце с сохранением их порядка.

10. Получить массив биномиальных коэффициентов для степени N , последовательно вычисляя строки треугольника Паскаля (можно использовать только один массив).
11. Элементы массива не убывают. Двоичным поиском определить позицию, где в этот массив можно вставить данное число x .
12. Даны два неубывающих массива. Построить третий неубывающий массив, который является объединением первых двух.
13. Пусть в массиве последовательно записаны цифры некоторого длинного десятичного числа. Реализовать функции "прибавляющие единицу" и "вычитающие единицу" из такого числа.

3. Задачи на разбор чисел и битовые операции

1. Вычислить представление числа $1/N$ в виде десятичной дроби (начало и период) (то же для числа M/N).
2. Возвести число в степень N за не более чем $2 \log_2 N$ умножений.
3. Вывести в файл все подмножества множества $\{1, \dots, N\}$.
4. Вывести в файл все k -элементные подмножества мн-ва $\{1, \dots, N\}$.
5. Найти наибольший общий делитель двух целых чисел.
6. Определить четность произвольной перестановки N чисел.
7. Вычислить первые N простых чисел.
8. Разложить натуральное число на простые множители
9. Вывести значение целого числа N в "словесной форме".
10. Проверить четность количества единиц в двоичном представлении данного целого числа.
11. Найти первые N целых чисел, у которых младший байт является зеркальным отражением следующего байта.
12. Определить позицию самой старшей единицы в битовом представлении данного целого числа.
13. Написать функции, записывающие 0 или 1 в указанный бит данного целого числа и оставляющие остальные биты без изменения.

4. Задачи на сортировку массивов

Решение должно содержать отдельную функцию для сортировки массива, функцию для проверки массива на упорядоченность, функцию для чтения массива из файла и функцию для генерирования случайного массива указанной длины. Также нужно определить и вывести время, затраченное на сортировку массива.

Алгоритмы сортировки массивов:

1. Простая сортировка обменами.
2. Пузырьковая сортировка.
3. Сортировка просеиванием.
4. Вставка с последовательным поиском.
5. Вставка с бинарным поиском.
6. Сортировка слиянием. (см. задачу 8 для массивов).
7. Быстрая сортировка (quicksort).
8. Линейная сортировка целого массива.
9. Сортировка целого массива группировкой с последовательным упорядочиванием битов.

5. Задачи на обработку множества точек

В следующих задачах предполагается, что в файле записано несколько пар чисел, которые можно рассматривать как координаты множества точек на плоскости или как координаты множества концов отрезков на прямой.

1. Множество точек определяет ломаную. Имеет ли она самопересечения?
2. Множество точек определяет многоугольник. Является ли он выпуклым?
3. Множество точек определяет многоугольник. Для данной точки определить где она расположена относительно этого многоугольника: внутри, снаружи, на границе.
4. Дано множество отрезков на прямой. Принадлежит ли отрезок $[a, b]$ их объединению?
5. Дано множество отрезков на прямой. Найти точку, которая принадлежит наибольшему количеству отрезков, определить это количество.
6. Дано множество точек. Найти центр и радиус минимального круга, который содержит все эти точки.
7. Дано множество отрезков на прямой. Выбрать из него и вывести те отрезки, объединение которых дает отрезок наибольшей длины.
8. Даны центры равномерно растущих кругов на плоскости. При столкновении друг с другом столкнувшиеся круги прекращают свой рост. Найти радиусы кругов, когда процесс роста остановится полностью.
9. Дано множество точек на плоскости. Построить выпуклую оболочку этого множества.