Bil-model med eksogen skrotning

Peter Stephensen, DREAM

January 2, 2026

1 Indledning

Her opstilles en model med eksogen skrotning. I afsnit 2 forklares modellen. I afsnit 3 opstilles det samlede lignings-system. I afsnit 4 gives et bud på hvordan man kan kalibrere og forecaster modellen med samme metode som MAKRO anvender.

2 Model

Vi betragter biler af forskellige typer q (f.eks. el-, benzin-, dieselbil). For hver type antager vi at der er mange ens leasing-firmaer. Bilerne er kapitalapparat i disse firmaer (og optræder derfor ikke i husholdningernes formue). Firmaerne lejer bilerne ud til husholdningerne til leasing-prisen $p^L_{q,a,t}$ hvor a er alder og t er tid. Et antal nye biler $Q_{q,0,t}$ købes af leasing-firmaerne primo t til den eksogene nypris $P^{\text{new}}_{q,t}$.

Vi antager fuldkommen konkurrence mellem leasing-firmaerne, således at ren profit konkurreres ned[1]. På investeringstidspunktet t skal det derfor for hver bil af type q gælde at:

$$P^{\text{new}}_{q,t} = \sum_{v=t}^{\infty} \left(p^L_{q,v-t,v} - c_{q,v-t,v}\right) S_{q,v-t,v} \frac{R_v}{R_t}$$

hvor $c_{q,a,t}$ er løbende omkostninger[2] og $S_{q,a,t}$ er andelen af en kohorte der stadig kører på vejene ved alder a. Det gælder at

$$S_{q,a,t} = \prod_{s=0}^{a} s_{q,s,t-s}$$

[1] Man kunne relativt let antage imperfekt konkurrence a la Dixit-Stiglitz og derved indføre en markup. Love-of-variety virker meget relevant for biler og forskellige makup'er for forskellige bil-typer kunne måske hjælpe i kaliberingen.

[2] Jeg tror brændelsomkostninger bør indgå her. Brændselspriserne bør sætte sig i priserne på brugte biler, jvf. nedenfor.

hvor $s_{q,a,t}$ er den eksogene overlevelsessandsynlighed. Vi antager at $S_{q,0,t} = 1$ og at der findes A således at $S_{q,a,t} = 0$ for $a > A$. Tilbagediskonteringsfaktoren R_t er defineret ved:

$$R_t = \prod_{v=0}^{t} \frac{1}{1+r_v}$$

Bestanden af biler følger ligningen:

$$Q_{q,a,t} = s_{q,a,t} Q_{q,a-1,t-1} + M_{q,a,t} - X_{q,a,t}$$

hvor $M_{q,a,t}$ er import af brugte biler og $X_{q,a,t}$ er eksport af brugte biler.

Værdien af en bil for leasing-firmaet (ny eller brugt) er primo periode t givet ved:

$$P_{q,a,t} = \sum_{v=t}^{\infty} \left(p^L_{q,a+v-t,v} - c_{q,a+v-t,v} \right) \frac{S_{q,a+v-t,v}}{S_{q,a,t}} \frac{R_v}{R_t} \tag{2.1}$$

Det fremgår at

$$P_{q,0,t} = P^{\text{new}}_{q,t}$$

Man kan tænke på $P_{q,a,t}$ som prisen på et brugtbilsmarked mellem leasing-firmaerne. Da alle firmaerne er ens vil der ikke være handel i symmetrisk ligevægt.

Ud fra (2.1) kan det vises at:

$$P_{q,a+1,t+1} = \frac{1+r_{t+1}}{s_{q,a+1,t+1}} \left(P_{q,a,t} - \left(p^L_{q,a,t} - c_{q,a,t} \right) \right) \tag{2.2}$$

Dette kan også skrives som

$$p^L_{q,a,t} = c_{q,a,t} + \frac{r_{t+1} P_{q,a,t} + \Big(P_{q,a,t} - P_{q,a+1,t+1} \Big) + \left(1 - s_{q,a+1,t+1} \right) P_{q,a+1,t+1}}{1+r_{t+1}} \tag{2.3}$$

således at leasing-prisen er et klassisk user-cost-koncept (løbende omkostninger + renter + værditab + tab ved skrotning).

Det fremgår af (2.1) at $P_{q,A+1,t} = 0$ idet $S_{q,a} = 0$ for $a > A$. Fra (2.2) har vi da at:

$$P_{q,A,t} = p^L_{q,A,t} - c_{q,A,t}$$

Husholdningerne efterspørger et aggregat af biler H_t og andet Z_t :

$$H_t = \mu_t^H \left(\frac{P_t^H}{P_t^C}\right)^{-E} \frac{Y_t^H}{P_t^C}$$

$$Z_t = \mu_t^Z \left(\frac{P_t^Z}{P_t^C}\right)^{-E} \frac{Y_t^H}{P_t^C}$$

$$P_t^H H_t + P_t^Z Z_t = Y_t^H$$

hvor Y_t^H er husholdningernes løbende indkomst (vi ser bort fra formue i dette simple eksempel).

Den aggregerede efterspørgsl efter biler af type q er givet ved:

$$D_{q,t} = \gamma_{q,t}^D \left(\frac{P_{q,t}^D}{P_t^H}\right)^{-F_H} H_t$$

$$P_t^H H_t = \sum_q P_{q,t}^D D_{q,t}$$

Efterspørgslen efter en bil af alder a er givet ved

$$Q_{q,a,t} = \gamma_{q,a,t}^Q \left(\frac{p_{q,a,t}^L}{P_{q,t}^D}\right)^{-F_D} D_{q,t}$$

$$P_{q,t}^D D_{q,t} = \sum_{a=0}^{A} p_{q,a,t}^L Q_{q,a,t}$$

En faldende fordelingsparameter $\gamma_{q,a,t}^Q$ i a modellerer at husholdningerne foretrækker nye biler.

Vi antager at udenlandske leasing-firmaer efterspørger indenlandske biler i følge Armington-funktionen:

$$X_{q,a,t} = \overline{X}_{q,a,t} \left(\frac{P_{q,a,t}}{\overline{P}_{q,a,t}^X}\right)^{-E_X}$$

hvor $\overline{P}_{q,a,t}^X$ er det gennemsnitlige prisniveau på eksportmarkederne og $\overline{X}_{q,a,t}$ er en proxy for markedsstørrelse.

Hvis de indenlandske leasing-firmaer importerer brugte biler antager vi at prisen $P_{q,a,t}^M$ er voksende i antallet af importerede biler:

$$P_{q,a,t}^M = \overline{P}_{q,a,t}^M \left(\frac{M_{q,a,t}}{\overline{M}_{q,a,t}}\right)^{\beta_M}$$

hvor $\overline{P}^{M}_{q,a,t}$ er det gennemsnitlige prisniveau på importmarkederne og $\overline{M}_{q,a,t}$ er en proxy for markedsstørrelse. Dette kan ses som et resultat af søgeadfærd. Så længe $P^{M}_{q,a,t} < P_{q,a,t}$ kan det betale sig at importere flere biler. Vi antager derfor at der importeres så meget at $P^{M}_{q,a,t} = P_{q,a,t}$, eller

$$M_{q,a,t} = \overline{M}_{q,a,t} \left(\frac{P_{q,a,t}}{\overline{P}^{M}_{q,a,t}} \right)^{\frac{1}{\beta_M}}$$

3 Samlet model

Antag at modellen er defineret for $t \geq t_0$. Den samlede model ser således ud:

Leasing-firma

$$Q_{q,a,t} = s_{q,a} Q_{q,a-1,t-1} + M_{q,a,t} - X_{q,a,t}, \, 0 < a \leq A \tag{3.1}$$

$$P_{q,a+1,t+1} = \frac{1+r_{t+1}}{s_{q,a+1,t+1}} \left(P_{q,a,t} - \left(p^{L}_{q,a,t} - c_{q,a,t} \right) \right), \, 0 \leq a < A \tag{3.2}$$

$$P_{q,0,t} = P^{\text{new}}_{q,t} \tag{3.3}$$

$$P_{q,A,t} = p^{L}_{q,A,t} - c_{q,A,t} \tag{3.4}$$

Husholdning

$$H_t = \mu^{H}_{t} \left(\frac{P^{H}_{t}}{P^{C}_{t}} \right)^{-E} \frac{Y^{H}_{t}}{P^{C}_{t}} \tag{3.5}$$

$$Z_t = \mu^{Z}_{t} \left(\frac{P^{Z}_{t}}{P^{C}_{t}} \right)^{-E} \frac{Y^{H}_{t}}{P^{C}_{t}} \tag{3.6}$$

$$P^{H}_{t} H_t + P^{Z}_{t} Z_t = Y^{H}_{t} \tag{3.7}$$

$$D_{q,t} = \gamma^{D}_{q,t} \left(\frac{P^{D}_{q,t}}{P^{H}_{t}} \right)^{-F_H} H_t \tag{3.8}$$

$$P^{H}_{t} H_t = \sum_{q} P^{D}_{q,t} D_{q,t} \tag{3.9}$$

$$Q_{q,a,t} = \gamma^{Q}_{q,a,t} \left(\frac{p^{L}_{q,a,t}}{P^{D}_{q,t}} \right)^{-F_D} D_{q,t} \tag{3.10}$$

$$P^D_{q,t}D_{q,t} = \sum_{a=0}^{A} p^L_{q,a,t}Q_{q,a,t} \tag{3.11}$$

Udenrigshandel

$$X_{q,a,t} = \overline{X}_{q,a,t}\left(\frac{P_{q,a,t}}{\overline{P}^X_{q,a,t}}\right)^{-E_X}$$

$$M_{q,a,t} = \overline{M}_{q,a,t}\left(\frac{P_{q,a,t}}{\overline{P}^M_{q,a,t}}\right)^{\frac{1}{\beta_M}}$$

4 Kalibrering og forecasting

Vi skal have data for $\left(Y^H_t, P^Z_t, Z_t\right)$ på top-niveau og $\left(c_{q,a,t}, P_{q,a,t}, Q_{q,a,t}, M_{q,a,t}, X_{q,a,t}, r_t\right)$ nederst i nestet. Som nævnt ovenfor tror jeg kun det giver mening hvis $c_{q,a,t}$ indeholder brændselsomkostninger (og det tror jeg ikke det gør i den nuværende model - hvilket måske forklarer at det er lidt svært at få modellen til at give mening). $P_{q,0,t}$ er ny-pris og $P_{q,a,t}$, $a > 0$, priser på brugte biler. Antag vi har data for $t = 1,..,T$, bil-typer $q = 1,..,Q$ og aldre $a = 0,..,A$.

Ud fra (3.1) kan vi beregne $s_{q,a,t}$ og derfor $S_{q,a,t}$. Derefter kan vi beregne user-cost $p^L_{q,a,t}$ ud fra (3.2)-(3.4).

Jeg vil foreslå vi kalibrerer efterspørgselssystemet (3.5)-(3.11) på samme måde som MAKRO. Historisk beregner vi $P^D_{q,t}$, P^H_t og P^C_t som kædeprisindeks og $D_{q,t}$ og H_t som tilsvarende kædemængdeindeks. Herefter er det lige ud af landevejen at kalibrere μ^H_t, μ^Z_t, $\gamma^D_{q,t}$ og $\gamma^Q_{q,a,t}$ ud fra (3.5), (3.6), (3.8) og (3.10).

Hvis vi har data for 10 eller flere år bliver det muligt at analysere og forecaste parametrene. Man kunne f.eks teste om man historisk kan antage seperabilitet:

$$\mu^H_t = \mu^H$$

$$\mu^Z_t = \mu^Z$$

$$\gamma^D_{q,t} = \gamma^D_{q,t}$$

$$\gamma^Q_{q,a,t} = \gamma^Q_{q,a}$$

Parameteren $\gamma^D_{q,t}$ ville da stå for ind-/udfasningen af biltyper mens $\gamma^Q_{q,a}$ ville stå for aldersstrukturen når en type er faset helt ind. Forecasting af $\gamma^D_{q,t}$ vil spille en central rolle i fremskrivningen af el-biler.