Programtervező informatikus BSc, C szakirány
Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

1. (1-2 hét) Valószínűségek kiszámítása (ismétlés: kombinatorika); feltételes valószínűség és Bayes-tétel, diszkrét valószínűségi változók

Elmélet

Definíció (Ismétlés nélküli permutáció). n (különböző) elem egy sorrendje. A lehetőségek száma:

$$n!.$$

Definíció (Ismétléses permutáció). n (nem feltétlen különböző) elem egy sorrendje, ahol az egyforma elemeket nem különböztetjük meg (tfh. az n elem közül $k_1, \ldots, k_r$ darab megegyezik). A lehetőségek száma:

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli kombináció). n (különböző) elem közül k számú ($k \leq n$) elem egyszerre történő kiválasztása (sorrend nem számít, nincs visszatevés). A lehetőségek száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses kombináció). n (különböző) elemből visszatevéses eljárással k számú ($k \leq n$) elem kiválasztása (sorrend nem számít). A lehetőségek száma:

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Definíció (Ismétlés nélküli variáció). n (különböző) elem közül kiválasztott valamely k számú ($k \leq n$) elem egy sorrendje (nincs visszatevés). A lehetőségek száma:

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Definíció (Ismétléses variáció). n (különböző) elem közül visszatevéses eljárással kiválasztott valamely k számú ($k \leq n$) elem egy sorrendje. A lehetőségek száma:

$$n^k.$$

A valószínűség a matematikai fogalma annak, hogy mekkora esély van valamire, például egy ászt kihúzni egy kártyapakliból, vagy egy piros golyót kihúzni egy színes golyókkal teli zsákból. A klasszikus valószínűség azokat az eseteket nézi, amikor minden egyes lehetséges kimenetelhez ugyanakkora esély tartozik. Például, ha egy szabályos dobókockával dobunk, akkor ugyanakkora az esély arra, hogy 1, 2, 3, 4, 5, vagy 6-ost dobjunk. Ekkor egy tetszőleges esemény valószínűsége megadható a kedvező kimenetelek és az összes lehetséges kimenetelek számának hányadosával:

Klasszikus valószínűség: Az A esemény valószínűsége megadható úgy, mint $P(A) = \dfrac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetel száma}}$.

Természetesen a későbbiekben ennél bonyolultabb esetekkel is fogunk találkozni, de az alapfogalmak megértéséhez ez a véges sok lehetőséget tartalmazó egyszerű modell is elegendő.

Definícó (Feltételes valószínűség).

Ha B bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy A bekövetkezik? $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad$ ha $P(B) \neq 0$

Definíció (Események függetlensége).
A és B események függetlenek, ha
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A esemény bekövetkezése nem befolyásolja B esemény bekövetkezését, és fordítva).

Definícó (Teljes eseményrendszer).

$B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha **1)** $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$–re **2)** $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

Teljes valószínűség tétele:
Legyen $B_1, B_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j).$$

Bayes-tétel:
Legyen $B_1, ..., B_n, ...$ teljes eseményrendszer, A tetszőleges esemény, $P(B_j) > 0$ minden j-re. Ekkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Valószínűségi változók:

A kísérletek megfigyelése során bekövetkező különböző elemi eseményekhez különböző számértékeket rendelünk, például a mérőeszköz által mutatott értéket vagy két kocka dobásakor azoknak az összegét. Ekkor előfordulhat, hogy két különböző elemi eseményhez is rendelhetünk azonos számértéket, pl. két kocka dobásakor a ⚂⚄ és ⚃⚃ dobásokhoz is 8-ast rendelünk. Ezt a hozzárendelést nevezzük valószínűségi változónak, ami tehát egy függvény az elemi események halmazán, és így számszerűsíti a kísérlet eredményét.

Definíció (X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye)**.** $F_X(x) = P(X < x)$.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$;
- monoton növő;
- balról folytonos;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Állítás Tetszőleges X valószínűségi változó esetén $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$; $P(a < X \leq b) = F(b+) - F(a+)$; $P(X = b) = F(b+) - F(b)$.

Diszkrét eloszlások:

Definíció (Diszkrét valószínűségi változó)**.** Értékkészlete legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, azaz $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ elemekből áll. Eloszlása: $p_i := P(X = x_i) = P(\omega : X(\omega) = x_i)$ $(i = 1, \dots)$

Feladatok

1.1. Feladat. Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

Megoldás

Az első bástya 64 helyre kerülhet. Ekkor a lefedett mező sorába és oszlopába már nem kerülhet újabb bástya, így a következőt már csak 7 sor és 7 oszlop valamelyikébe tehetjük le, ami 49 lehetőség. Minden újabb bástya letételével még egy újabb sor és oszlop kerül lefedésre. Tehát ezután sorra $36, 25, 16, 9, 4$, és 1 lehetőség van a következő bástyák letételére. Viszont a bástyák letevésének sorrendjét így figyelembe vettük, pedig mind a 8 bástya egyforma, külsőleg nem megkülönböztethető. Így le kell osztanunk a lerakott bástyák permutációinak számával, azaz 8!-sal. Tehát összesen $\frac{64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}{8!} = 40320 = 8!$ féleképp tehetjük le a bástyákat. A végeredményt közvetlenül is megkaphatjuk, ha oszloponként (ill. soronként) nézzük a bástyák helyét.

1.2. Feladat. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

Megoldás

Az első számjegyet az $1, 2, \dots, 9$ számjegyek közül, a többi számjegyet a $0, 1, 2, \dots, 9$ számjegyek közül választhatjuk. Így az összes esetek száma $9 \cdot 10^5$. Kedvező esetek száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, mert itt visszatevés nélkül választunk, a sorrend számít, illetve arra figyelünk, hogy az első számjegy ne lehessen 0. Tehát a keresett valószínűség $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 10^5} = \frac{136080}{900000} = 0{,}1512$.

1.3. Feladat. Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tök) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

Megoldás

a) A 3 kihúzott lap közül $\binom{3}{1} = 3$-féleképp dönthetjük el, hogy melyik legyen a piros színű. Ezután feltehető, hogy az első húzott lap piros, a többi nem. Mivel visszatevéses a mintavétel, ezért piros lap húzásának valószínűsége mindig $\frac{8}{32}$, nem piros lap húzásának valószínűsége pedig $\frac{24}{32}$. Tehát a keresett valószínűség: $\binom{3}{1} \cdot (\frac{8}{32})^1 \cdot (\frac{24}{32})^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64} = 0{,}4219$.

b) Kényelmesebb most a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: nincsen piros a húzott lapok között. Ennek valószínűsége $\binom{3}{0} \cdot (\frac{8}{32})^0 \cdot (\frac{24}{32})^3 = \frac{27}{64}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0{,}5781$.

1.4. Feladat. Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

a) egyformák a párok?

b) különbözőek a párok?

Megoldás

a) 10 balos és 10 jobbos cipő van. Mi a valószínűsége, hogy a 4 kihúzott között van balos és jobbos is? Célszerű most is a komplementer esemény valószínűségét kivonni 1-ből. A komplementer esemény: vagy 4 balosat húztunk, vagy 4 jobbosat. Ennek valószínűsége: $2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{28}{323}$ vagy $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} + \frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{28}{323}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{28}{323} = 0{,}9133$.

b) Most is érdemes a komplementer esemény valószínűségét kiszámítani. Komplementer esemény: nincs pár a 4 cipő között. Ha így akarom a cipőket kiválasztani, akkor az elsőt 20-féleképp választhatom ki, a másodikat 18-féleképp (az első és párja kiesik), a harmadikat 16-féleképp és a negyediket 14-féleképp. Összes eset: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$. Tehát a komplementer esemény valószínűsége $\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{224}{323}$ vagy másképp okoskodva: kiválasztunk 10 párból a 4 párat először, majd ezek balosát ill. jobbosát $\frac{\binom{10}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323}$. Tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{224}{323} = 0{,}3065$.

1.5. Feladat. $\star$ n dobozba véletlenszerűen helyezünk el n golyót úgy, hogy bármennyi golyó kerülhet az egyes dobozokba.

a) Mi a valószínűsége, hogy minden dobozba kerül golyó?

b) Annak mi a valószínűsége, hogy pontosan egy doboz marad üresen?

Megoldás

Vegyük észre hogy a probléma kitűzése nem határozza meg teljesen egyértelműen hogy milyen valószínűségi modellt kell használni, ugyanis nem írja elő hogy milyen módon helyezzük a golyókat a dobozokba, s azt sem rögzíti hogy megkülönböztetett vagy azonos golyókról van szó. Mindenesetre feltesszük hogy a dobozok meg vannak különböztetve (habár a feladat kitűzése ezt sem rögzíti).

a) <u>1. Értelmezés:</u> A golyókat megkülönböztetjük (ez nem feltétlenül jelenti, hogy a golyók fizikailag különbözőek, már az is megkülönböztetés, hogy ha egymás után rakjuk őket a dobozokba, s így első, második stb., golyóról lehet beszélni). Ilyenkor, hacsak a feladat explicite nem ír elő mást, a "véletlenszerűen" szó értelmezése az, hogy minden golyót egymástól függetlenül, azonos $(1/n)$ valószínűséggel helyezünk a dobozokba.
Tekintsük az $n = 2$ esetet, egyszerűség kedvéért. A valószínűségi tér természetes módon egy szorzattér, $\Omega = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, ahol a Descartes szorzat első komponense azt kódolja el, hogy az első golyó az 1-es vagy a 2-es dobozba kerül, a második komponens ugyanezt teszi a második golyóval. Például $\omega = (2, 1)$ azt jelenti, hogy az első golyó a 2-es, a második golyó az 1-es dobozba került. Összesen $2 \cdot 2 = 4$ kimeneti lehetőség van, és a függetlenségi feltevés miatt mindegyik $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ valószínűségű.
Általánosan: n megkülönböztetett golyót n dobozba n^n féleképpen tudjuk betenni (ismétléses variáció). A kedvező esetek száma $n!$, azaz a lehetséges permutációk száma. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{minden dobozban van egy golyó}) = \frac{n!}{n^n}.$$

<u>2. Értelmezés:</u> Ha a golyók nincsenek megkülönböztetve, és a berakási folyamat sem utal rá, akkor úgy is okoskodhatunk, hogy csupán a végeredményt látjuk és a valószínűségi terünket az összes lehetséges kimenet halmazaként definiáljuk. Vegyük észre, hogy az $n = 2$ esetben az 1. Értelmezéssel ellentétben most mindössze 3 lehetőségünk van:
(a) az első dobozban két golyó, a másodikban semmi;
(b) mindkét dobozban egy golyó;

(c) első dobozban semmi, a másodikban kettő.

Struktúrájában ez a valószínűségi tér nagyon más mint az előző, nemcsak az elemek száma különbözik, de nincs Descartes szorzat struktúrája sem. A "véletlenszerűen" szó elvileg értelmezhető úgy is, hogy a három lehetséges kimenet egyenlő valószínűségű. Így például $1/3$ annak a valószínűsége hogy mindkét dobozba egy-egy golyó került, míg az első értelmezés szerint ugyanez a valószínűség $1/2$.

Általánosan: n nem megkülönböztetett n dobozba $\binom{2n-1}{n}$ féleképpen tudjuk betenni (ismétléses kombináció). [Rendezzük az n dobozt sorba, ekkor $n-1$ válaszfal keletkezik közöttük. Az összes esetek száma az n golyó és az $n-1$ válaszfal sorrendjeinek száma, ami egy ismétléses permutáció: $\frac{\big(n+(n-1)\big)!}{n!\cdot(n-1)!} = \binom{2n-1}{n}$.] A kedvező esetek száma 1, azaz minden dobozba egy golyó kerül. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{minden dobozban van egy golyó}) = \frac{1}{\binom{2n-1}{n}}.$$

A két értelmezés közötti döntés nem matematikai hanem modellezési probléma; sokszor azonban a matematikusnak kell rámutatni a felhasználónál arra, ha esetleg a probléma nincs kellő pontossággal megfogalmazva. Rögzítsük le azonban, hogy az esetek túlnyomó többségében az első értelmezés felel meg a "véletlenszerűen" köznapi fogalmának.

b) Ha a golyókat megkülönbözőztetjük, akkor - mint előbb - az n golyót n dobozba n^n féleképpen tudjuk letenni (ismétléses variáció). A kedvező esetek számát a következőképpen kaphatjuk: az üres dobozt n féleképpen, a dobozt melyben 2 golyó lesz pedig $n-1$ féleképpen választhatjuk ki. Az n golyót $n!$ féleképpen tehetjük le, viszont kétféleképpen is eljuthatunk ugyanahhoz az elrendezéshez, hiszen a 2 golyós dobozban bármelyik jöhetett a most üres dobozból. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{pontosan egy doboz marad üresen}) = \frac{n(n-1)\frac{n!}{2}}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}n!}{n^n}.$$

Ha a golyókat nem különbözőztetjük meg, akkor az n golyót n dobozba $\binom{2n-1}{n}$ féleképpen tudjuk betenni (ismétléses kombináció). A kedvező esetek számát a következőképpen kaphatjuk: az üres dobozt n féleképpen, a dobozt melyben 2 golyó lesz pedig $n-1$ féleképpen választhatjuk ki. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{pontosan egy doboz marad üresen}) = \frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}.$$

1.6. Feladat. Egy boltban 10 látszólag egyforma számítógép közül 3 felújított, a többi új. Mi a valószínűsége, hogy ha veszünk 5 gépet a laborba, akkor pontosan 2 felújított lesz közöttük?

Megoldás

A 10 gépből 3 felújított, 7 új. Tehát a 3 felújított gép közül kell 2-t kiválasztani, illetve a 7 új gép közül kell a maradék hármat kiválasztani. A kiválasztás sorrendje nem számít, és visszatevés nélküli a mintavétel. A kedvező esetek száma: $\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{3} = 3\cdot 35 = 105$. Összes esetek száma: $\binom{10}{5} = 252$. Tehát a keresett valószínűség $\frac{105}{252} = 0{,}4167$. (Hipergeometriai eloszlás $N = 10, M = 3, n = 5$ paraméterekkel.)

1.7. Feladat. Ha a 6 karakteres jelszavunkat véletlenszerűen választjuk a 10 számjegy és a 26 karakter közül, akkor mi a valószínűsége, hogy pontosan 3 szám lesz benne?

Megoldás

$\binom{6}{3} = 20$-féleképp lehet a 6 karakterből a 3 szám helyét kiválasztani. Ezután feltehető, hogy az első 3 karakter szám, az utolsó 3 karakter betű. Számjegy választásának valószínűsége $\frac{10}{36}$, betűé $\frac{26}{36}$. A keresett valószínűség tehát $\binom{6}{3}\cdot(\frac{10}{36})^3\cdot(\frac{26}{36})^3 = 0{,}1615$. (Binomiális eloszlás $n = 60, p = \frac{10}{36}$ paraméterekkel.)

1.8. Feladat. Az ötöslottónál adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szelvénnyel játszva öttalálatosunk lesz, illetve hogy legalább négyesünk lesz. Mi a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros? (Hogy viszonylik ez a visszatevéses esethez?)

Megoldás

Annak a valószínűsége, hogy ötösünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\binom{90}{5}}$.

Annak a valószínűsége, hogy legalább négyesünk lesz: $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}$.

Annak a valószínűsége, hogy minden kihúzott szám páros: $\frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0,028$.

A visszatevéses esetben (tehát, mikor egy számot többször is kihúzhatunk) annak a valószínűsége, hogy párosakat húzunk: $\left(\frac{45}{90}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,031$. Bár a két érték közel van egymáshoz, a visszatevés nélküli esetben kisebb a valószínűség, mert ott fogynak a páros számok a választás során.

1.9. Feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

Megoldás

Legyen A esemény az, hogy mindkét dobás hatos, B pedig, hogy legalább az egyik hatos. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$$

1.10. Feladat. 41 millió ötöslottó-szelvényt töltenek ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy 5-ös találat?

Megoldás

$$P(\text{legalább egy ötös találat lesz a 41M-ból}) = 1 - P(\text{nem lesz ötös találat a 41M-ból}) \overset{\text{függetlenség}}{=}$$

$$= 1 - P(\text{egy embernek nem lesz ötös találata})^{41\cdot 10^6} = 1 - \left(1 - \frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}}\right)^{41\cdot 10^6} \approx 0,6066.$$

1.11. Feladat. 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej található). Egy érmét véletlenszerűen kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

Megoldás

Jelölje A azt az eseményt, hogy 10 dobásból 10 fej, B_1 azt, hogy jó érmével dobtunk, illetve B_2 azt, hogy hamis érmével dobtunk. Ekkor:

$$P(B_1) = \frac{99}{100}; \qquad P(A|B_1) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{2^{10}}$$
$$P(B_2) = \frac{1}{100}; \qquad P(A|B_2) = 1$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{100}}{\frac{1}{1024}\cdot\frac{99}{100} + 1\cdot\frac{1}{100}} \approx 0.9118.$$

1.12. Feladat. Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel (az esélye, hogy ekkor eltalálja a helyes választ $\frac{1}{3}$). Ha helyesen válaszolt, mennyi a valószínűsége, hogy tudta a helyes választ?

Megoldás

Jelölje A azt az eseményt, hogy helyesen válaszolt, B_1 azt, hogy tudta a választ, illetve B_2, hogy nem tudta a választ. Ekkor:

$$P(B_1) = p; \qquad P(A|B_1) = 1$$
$$P(B_2) = 1 - p; \qquad P(A|B_2) = \frac{1}{3}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p + \frac{1}{3}\cdot(1-p)} = \frac{3p}{2p+1}$$

1.13. Feladat. Egy számítógépes program két független részből áll. Az egyikben $0,2$, a másikban $0,3$ a hiba valószínűsége. Ha a program hibát jelez, akkor mi a valószínűsége, hogy mindkét rész hibás?

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

- A - a program hibát jelez;
- B_1 - egyik rész sem hibás;
- B_2 - pontosan az egyik rész hibás;
- B_3 - mindkét rész hibás.

Ekkor

$$\begin{aligned}
&P(B_1) = P(\text{sem az első, sem a második}) = (1-0,2)(1-0,3) = 0,56 && P(A|B_1) = 0\\
&P(B_2) = P(\text{pontosan az egyik}) = 0,2(1-0,3) + 0,3(1-0,2) = 0,14 + 0,24 = 0,38; && P(A|B_2) = 1\\
&P(B_3) = 0,06; && P(A|B_3) = 1
\end{aligned}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{1 \cdot 0,06}{0 \cdot 0,56 + 1 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,06} = \frac{0,06}{0,44} \approx 0,1364.$$

1.14. Feladat. Egy számítógép processzorát 3 üzemben készítik. 20% eséllyel az elsőben, 30% eséllyel a másodikban és 50% eséllyel a harmadikban. A garanciális hibák valószínűsége az egyes üzemekben rendre 10%, 4%, illetve 1%. Ha a gépünk processzora elromlott, akkor mi a valószínűsége, hogy az első üzemben készült?

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

- A - a processzorunk elromlott;
- B_1 - a processzorunk az első üzemben készült;
- B_2 - a processzorunk a második üzemben készült;
- B_3 - a processzorunk a harmadik üzemben készült.

Ekkor

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= 0,2; & P(A|B_1) &= 0,10\\
P(B_2) &= 0,3; & P(A|B_2) &= 0,04\\
P(B_3) &= 0,5; & P(A|B_3) &= 0,01
\end{aligned}$$

Alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 0,2 + 0,04 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,5} \approx 0,5405$$

1.15. Feladat. Tegyük fel, hogy az új internet-előfizetők véletlenszerűen választott 20%-a speciális kedvezményt kap. Mi a valószínűsége, hogy 10 ismerősünk közül, akik most fizettek elő, legalább négyen részesülnek a kedvezményben?

Megoldás

Legyen X az a valószínűségi változó, mely megadja a speciális kedvezményt kapó ismerőseink számát. Ekkor ez egy olyan visszatevéses mintavételként kezelhető feladat, mely paramétereire $p = \frac{1}{5}$ és $n = 10$. Így pedig

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) =\\
&= 1 - \left[\binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7\right]\\
&= 1 - \left[\binom{10}{0}4^{10} + \binom{10}{1}4^9 + \binom{10}{2}4^8 + \binom{10}{3}4^7\right]\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \approx 0,1209.
\end{aligned}$$

1.16. Feladat. Egy tétel áru 1% selejtet tartalmaz. Hány darabot kell találomra kivennünk és megvizsgálnunk, hogy a megvizsgált darabok között legalább 0,95 valószínűséggel selejtes is legyen, ha az egyes kiválasztott darabokat vizsgálatuk után visszatesszük?

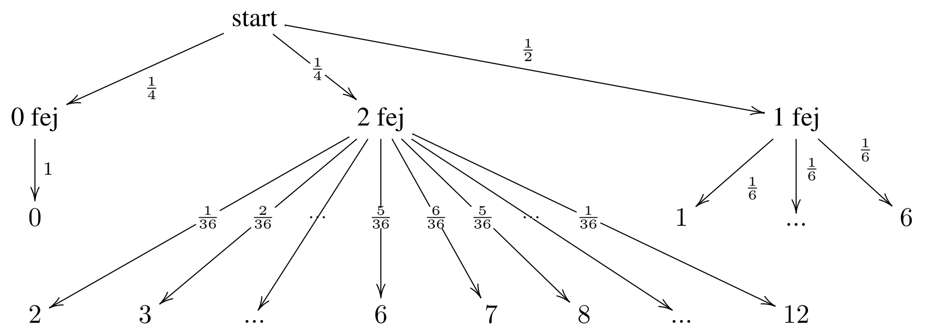
Megoldás

Legyen X = a selejtes áruk száma a vizsgált darabok közt. Ekkor
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^n > 0,95 \iff 0,05 > 0,99^n \iff n > \frac{\ln 0,05}{\ln 0,99} \approx 298,07 \iff n \geq 299.$

1.17. Feladat. Dobjunk egy kockával annyiszor, ahány fejet dobtunk két szabályos érmével. Jelölje X a kapott számok összegét. Adjuk meg X eloszlását!

Megoldás

Esetszétbontással érdemes. Annak a valószínűsége, hogy 0,1,2 fejet dobunk rendre 1/4, 1/2, 1/4. Az összegek 0 és 12 közé eshetnek, attól függően, hogy hány fejet dobtunk.



$P(X = 0) = \frac{1}{4} \cdot 1$
$P(X = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$
$P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36}$
$\vdots$
$P(X = 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{36}$
$P(X = 7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{36}$
$\vdots$
$P(X = 12) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36}$
mert ha Y jelöli 2 szabályos kockával dobva a dobott számok összegét, akkor $P(Y = k) = \frac{k-1}{36}$, ha $2 \leq k \leq 7$ és $P(Y = k) = \frac{13-k}{36}$, ha $12 \geq k \geq 7$.

1.18. Feladat. Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámok legkisebbikét. Adjuk meg X eloszlását!

Megoldás

Jelentse $X = k$ azt, hogy a legkisebb kihúzott szám k. Ez $1 - 86$-ig bármelyik szám lehet. Ezek alapján, ha tudjuk, hogy k a legkisebb:

$$P(X = k) = \frac{\binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}},$$

mert a maradék 4 kihúzott szám $k + 1$ és 90 közé eshet.

1.19. Feladat. Egy érmével dobva (tfh. p a fej valószínűsége), jelölje X az első azonosakból álló sorozat hosszát. (Azaz pl., ha a sorozat FFI..., akkor $X = 2$.) Adjuk meg X eloszlását!

Megoldás

Tegyük fel, hogy k-szor dobtunk egymás után fejet. Ez akkor lesz pontosan k hosszú sorozat, ha a k fej után közvetlenül írást dobtunk. Ugyanez fordítva is kell, hogy teljesüljön, azaz k írás után 1 fej kell. Ezek alapján az eloszlás:

$$P(X = k) = p^k(1 - p) + (1 - p)^k p$$

1.20. Feladat. Legyenek az X diszkrét valószínűségi változó értékei $-2, 1, 3$, a következő valószínűségekkel:

$$P(-2) = 1/2, \quad P(1) = 1/3, \quad P(3) = 1/6.$$

Számoljuk ki az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!

Megoldás

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le -2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } -2 < x \le 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, & \text{ha } 1 < x \le 3 \\ 1, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

Programtervező informatikus BSc, C szakirány
Valószínűségszámítás és statisztika gyakorlat

1. (3-4 hét) Várható érték, szórás, abszolút folytonos eloszlások, függetlenség, aszimptotikus tulajdonságok

Elmélet

Definíció (Diszkrét valószínűségi változó várható értéke)**.** Jelölése: EX.
Legyen X diszkrét valószínűségi változó, amely az x_1,x_2,... értékeket veszi fel, p_1,p_2,... valószínűségekkel, ekkor

$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, ha a végtelen összeg abszolút konvergens.

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, melyre $p_i = P(X = x_i)$, ekkor $EX^2 = \sum_{x_i} {x_i}^2 p_i$.

Állítás Ha EX és EY véges, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor
$E(aX + b) = aEX + b$ és
$E(X + Y) = EX + EY$.

Definíció (X szórásnégyzete)**.** $D^2X = E[(X - EX)]^2 = EX^2 - E^2X$

Definíció (X szórása)**.** $DX = \sqrt{D^2X}$

Nevezetes diszkrét eloszlások:

Név (paraméterek)	Értékek (k)	$P(X = k)$	EX	D^2X
Indikátor (p) (= Binomiális (1, p))	$0, 1$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Binomiális (n, p)	$0, 1, ..., n$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson (λ)	$0, 1, ...$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Geometriai vagy Pascal (p) (= Negatív binomiális (1, p))	$1, 2, ...$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Negatív binomiális (n, p)	$n, n+1, ...$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
Hipergeometriai (N, M, n)	$0, 1, ..., n$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$

Abszolút folytonos eloszlások:

Definíció (Abszolút folytonos valószínűségi változó)**.** Ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
Ilyenkor $f(x)$-et sűrűségfüggvénynek hívjuk. (Megjegyzés: Az f sűrűségfüggvény létezéséhez szükséges (de nem elégséges), hogy F folytonos legyen (azaz $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re).)

Tétel. *Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor $f(x) = F'(x)$; $f(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; $P(X = x) = 0$ $\forall x$-re;*
$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Definíció (Várható érték)**.** Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, ekkor

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$, ha az integrál létezik.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Név (paraméterek)	Értékek	Eloszlásfüggvény (F)	Sűrűségfüggvény (f)	EX	D^2X
Standard normális $N(0,1)$	$(-\infty,\infty)$	$\Phi(x)=$ táblázatban	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x\in\mathbb{R}$	0	1
Normális N(m,σ^2)	$(-\infty,\infty)$	visszavezethető $\Phi(x)$-re	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x\in\mathbb{R}$	m	σ^2
Egyenletes E$[a,b]$	$[a,b]$	$\begin{cases}0 & \text{ha } x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 1 & \text{ha } b<x\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális Exp(λ)	$(0,\infty)$	$\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma $\Gamma(\alpha,\lambda)$	$(0,\infty)$	nincs zárt elemi képlet	$\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & \text{ha } x\ge 0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Normális eloszlás standardizálása: Legyen $X\sim N(m,\sigma^2)$, ekkor $\frac{X-m}{\sigma}\sim N(0,1)$.

Függetlenség:

Definíció (Valószínűségi változók függetlesége). Az $X_1,X_2,\dots X_n$ valószínűségi változók függetlenek, ha bármely $I_1,I_2,\dots,I_n$ intervallumra $P(X_1\in I_1,\dots,X_n\in I_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i\in I_i)$
Megjegyzés: Független valószínűségi változók függvényei is függetlenek lesznek.

Tétel (Valószínűségi változók függetlensége). *(i) Az $X_1,X_2,\dots X_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha együttes eloszlásfüggvényük megegyezik eloszlásfüggvényeik szorzatával, azaz $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$ $\forall x$-re.*
(ii) Az $X_1,X_2,\dots X_n$ diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha
$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)$ $\forall x_i$*-re.*
(iii) Az $X_1,X_2,\dots X_n$ abszolút folytonos valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek ha
$f(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ $\forall x_i$*-re.*

Definíció (X és Y kovarianciája). $cov(X,Y)=E(XY)-EXEY$

Definíció (X és Y korrelációja). $R(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{DXDY}$

Ha X és Y függetlenek $\Rightarrow cov(X,Y)=0$, de fordítva nem igaz.
$D^2(aX+b)=a^2D^2X, \quad D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2cov(X,Y)$

Egyenlőtlenségek:

Tétel (Markov-egyenlőtlenség). *Legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton növő pozitív függvény, $X\ge 0$ valószínűségi változó, melyre $EX<\infty$ és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(X\ge\varepsilon)\le\frac{E\left(g(X)\right)}{g(\varepsilon)}$$

Spec., ha $g(x)=x$, akkor

$$P(X\ge\varepsilon)\le\frac{EX}{\varepsilon}$$

Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség). *Legyen X tetszőleges valószínűségi változó, melyre $D^2X<\infty$ és $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{D^2X}{\varepsilon^2}$$

Aszimptotikus tulajdonságok:

Tétel (Nagy számok törvénye (NSZT)). *Legyenek $X_1,X_2,\dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, $EX_1=m<\infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m \qquad \text{1 valószínűséggel.}$$

Tétel (Centrális határeloszlás tétel (CHT)). *Legyenek $X_1,X_2,\dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, $EX_1=m$, $D^2X_1=\sigma^2<\infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1) \qquad \text{gyengén,}$$

azaz

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}<x\right)\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\Phi(x)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Feladatok

1.1. Feladat. Tegyük fel, hogy a 3 valószínűségszámítás gyakorlatra rendre 15, 20, illetve 25 diák jár. Várhatóan mekkora egy véletlenszerűen kiválasztott diák csoportja?

Megoldás

Legyen X a valószínűségszámítás gyakorlatra járó diákok száma. Ekkor
$P(X=15)=15/60=1/4$
$P(X=20)=20/60=1/3$
$P(X=25)=25/60=5/12$
Így a várható érték $EX=15\cdot 1/4+20\cdot 1/3+25\cdot 5/12=(45+80+125)/12=250/12=20,83.$

1.2. Feladat. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

Megoldás

Legyen X a sikeres dobások száma az n dobásból. Ekkor X egy p paraméterű binomiális eloszlást követ, melyre $p=\frac{11}{36}$ a sikeres dobás valószínűsége (hiszen P(nincs hatos)=$\frac{25}{36}$). Így X várható értéke $EX=np$, azaz várhatóan $\frac{11}{36}n$ sikeres dobásunk lesz.

1.3. Feladat. Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettőn 1-es, kettőn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerűen m lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

Megoldás

Legyen X_i annak az indikátora, hogy mindkét i feliratú lap bent marad az m lap kivétele után, azaz

$$X_i=\begin{cases}1, & \textit{ha mindkét } i \textit{ feliratú lap bent marad}\\ 0, & \textit{különben.}\end{cases}$$

Ekkor

$$p=P(X_i=1)=\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}.\qquad \left(\textit{Legyen}\binom{n}{k}:=0,\ \textit{ha } n<k.\right)$$

Legyen X a dobozban maradt párok száma az m lap kivétele után. Ekkor $X=X_1+X_2+\cdots+X_N$, melynek várható értéke

$$EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_N=Np=N\frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}}=\frac{(2N-m)(2N-1-m)}{2(2N-1)}.$$

1.4. Feladat. Mennyi az ötöslottón kihúzott

a) számok összegének várható értéke?

b) páros számok számának várható értéke?

Megoldás

a) Egy húzásnál a várható érték $1\cdot\frac{1}{90}+2\cdot\frac{1}{90}+\cdots+90\cdot\frac{1}{90}=\frac{1+2+\ldots+90}{90}=45,5$. Öt szám kihúzása esetén pedig az összeg várható értéke $5\cdot 45,5=227,5$.

b) A lottón kihúzott (páros és páratlan) számok számának várható értéke 5, azaz E(párosak száma)$+E$(páratlanok száma) $=5$. Mivel ugyanannyi páros és páratlan szám közül választhatunk, így E(párosak száma) $=E$(páratlanok száma). Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha a E(párosak száma) $=2,5$.

Más megoldás: Jelölje X a kihúzott páros számok darabszámát. Ekkor X hipergeometrikus eloszlást követ $N=90$, $K=45$ és $m=5$ paraméterekkel, így $EX=m\dfrac{K}{N}=5\dfrac{45}{90}=2.5$.

1.5. Feladat. Egy adott területről származó talajmintákban a spórák száma Poisson-eloszlású. A minták harmadában egyáltalán nincs spóra. Mi a valószínűsége annak, hogy egy mintában a spórák száma egynél több? Mekkora a spórák számának várható értéke és szórása?

Megoldás

Legyen X a spórák száma a vizsgált mintában. Ekkor $X \sim Poisson(\lambda)$.
$P(X=0) = e^{-\lambda} = \frac{1}{3}$, *így* $\lambda = -\ln\dfrac{1}{3} = \ln 3 \approx 1,099$.
$P(X>1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - (1 \cdot e^{-\ln 3} + \ln 3 \cdot e^{-\ln 3}) \approx 0,3$.
$EX = \lambda = \ln 3$ *és* $DX = \sqrt{\ln 3} \approx 1,048$.

1.6. Feladat. Tegyük fel, hogy egy számítógép meghibásodási időpontja 0 és 10 év között van és itt geometriai modellel írható le. Határozzuk meg a jelenség eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Legyen az X valószínűségi változó a meghibásodás időpontja, azaz X a [0,10] intervallumból veheti fel értékeit. Ekkor $P(X<0)=0$, mivel a meghibásodás időpontja nem lehet negatív. Hasonlóan $P(X<10)=1$, mivel feltételezésünk szerint a számítógép 10 éven túl nem üzemelhet hibamentesen. Ha viszont $0<x<10$, akkor $P(X<x)=\frac{x}{10}$, mivel a meghibásodás valószínűsége arányos a szakasz hosszával.

Ekkor az eloszlásfüggvény a következő alakú: $F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & ha \;\; x \le 0 \\ \frac{x}{10} & ha \;\; 0 < x \le 10 \\ 1 & ha \;\; 10 < x \end{cases}$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük a $[0,10]$ intervallumon.

1.7. Feladat. Legyen $0 < Y < 3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x) = cx^3$. Mennyi c és $P(-1 < Y < 1)$?

Megoldás

Mivel $Y<3$, így $P(Y \ge 3) = 1 - F(3-) = 0$, tehát $F(3-) = 1$, vagyis

$$1 = \max_{x \in (0,3]} cx^3 = c \cdot 3^3 = 27c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{27}.$$

Tudjuk, hogy -1-ben az eloszlásfüggvény 0 értéket vesz fel, emiatt $P(-1<Y<1) = F(1) - F(-1) = \dfrac{1}{27} - 0.$

1.8. Feladat. Legyen X egy abszolút folytonos valószínűségi változó a $[0,c]$ intervallumon, sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}x^2, & \text{ha } \; 0 \le x < c \\ 0, & \text{ha } \; x < 0 \; \text{ vagy } \; x \ge c. \end{cases}$$

Határozza meg c-t és X eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Mivel a sűrűségfüggvény integrálja $=1$ a $[0,c]$ intervallumon, így $1 = \displaystyle\int_0^c \frac{1}{9}t^2\,dt = \frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^c = \frac{1}{9}\frac{c^3}{3}$, *amiből* $c=3$.

Felhasználva, hogy az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálfüggvénye:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{9}t^2\,dt = \left[\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27} \quad 0 < x \le 3, \; \text{így } F(x) = P(X<x) = \begin{cases} 0, & ha \;\; x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{27}, & ha \;\; 0 < x \le 3 \\ 1, & ha \;\; x > 3 \end{cases}$$

1.9. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét valamint várható értékét!

Megoldás

Legyen Z a középponttól való távolság. Ekkor $0 \le Z \le 1$, így itt $F(r) = P(Z<r) = \frac{r^2\pi}{1^2\pi} = r^2$ *, így*

$$F(r) = \begin{cases} 0, & ha \; r \le 0 \\ r^2, & ha \; 0 < r \le 1 \\ 1, & ha \; 1 < r \end{cases}$$

Ebből deriválással adódik, hogy $f(r) = F'(r) = 2r$ a $[0,1]$-en, így

$$f(r) = \begin{cases} 0, & ha \; r \le 0 \text{ és } r > 1 \\ 2r, & ha \; 0 < r \le 1 \end{cases}$$

$$EZ = \int_0^1 r \cdot 2r \, dr = \left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

1.10. Feladat. Tapasztalatok szerint az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásáig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ez a távolság átlagosan 6000 km. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott robogó

a) kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik?

b) több, mint 6500 km megtétele után hibásodik meg?

c) 4000 km-nél több, de 6000 km-nél kevesebb út megtétele után hibásodik meg?

d) Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?

Megoldás

Legyen X az első meghibásodásig megtett út. Ekkor $X \sim Exp(\lambda)$, ahol $\lambda = \frac{1}{6000}$.

a) $P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}4000} \approx 0,4866$

b) $P(X > 6500) = 1 - P(X < 6500) = e^{-\frac{1}{6000}6500} \approx 0,3385$

c) $P(4000 < X < 6000) = P(X < 6000) - P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}6000} - (1 - e^{-\frac{1}{6000}4000}) \approx 0,1455$

d) $0,2 = P(X < c) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}c}$, *azaz* $0,8 = e^{-\frac{1}{6000}c}$, *amiből* $c = -6000 \ln(0,8) \approx 1338,86$.

1.11. Feladat. Egy tehén napi tejhozamát normális eloszású valószínűségi változóval, $m = 22,1$ liter várható értekkel és $\sigma = 1,5$ liter szórással, modellezzük.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon a tejhozam 23 és 25 liter közé esik?

b) Mekkora valószínűséggel esik a napi tejhozam $m - \sigma$ es $m + \sigma$ közé?

$(\Phi(0,6) = 0,7257, \Phi(1,93) = 0,9732, \Phi(1) = 0,8413)$

Megoldás

Legyen X a napi tejhozam. Ekkor $X \sim N(22,1; 1,5^2)$.

a) $P(23 < X < 25) = P(X < 25) - P(X < 23) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{25-m}{\sigma}\right) - P(X < 23) = P\left(\frac{X-22,1}{1,5} < \frac{25-22,1}{1,5}\right) - P(X < 23) = \Phi\left(\frac{25-22,1}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{23-22,1}{1,5}\right) = \Phi(1,93) - \Phi(0,6) = 0,9732 - 0,7257 = 0,2475.$

b) $P(m - \sigma < X < m + \sigma) = P(X < m + \sigma) - P(X < m - \sigma) = \Phi\left(\frac{(m+\sigma)-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(m-\sigma)-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826.$ *Vagyük észre, hogy ez az eredmény sem m-től sem σ-tól sem függ.*

1.12. Feladat. Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető.

Megoldás

Legyen X egy termék meghibásodásának ideje. Ekkor $X \sim N(10, 2^2)$

$$0,1 = P(X < c) = P\left(\frac{X - 10}{2} < \frac{c - 10}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c - 10}{2}\right)$$

$$c = 2 \cdot \Phi^{-1}(0,1) + 10 = 2 \cdot (-\Phi^{-1}(0,9)) + 10 = -2 \cdot 1,28 + 10 = 7,44.$$

Tehát akár 7 év garanciát is adhatunk ebben az esetben.
Standard normális eloszás eloszlásfüggvényének értékei: `https://zempleni.elte.hu/stdnormelo.pdf`

1.13. Feladat. Legyen X egyenletes eloszlású az $[1, 4]$ intervallumon Számítsuk ki $(X - 1)^2$ várható értékét!

Megoldás

Ha $X \sim Egyenletes[1,4]$, *akkor* $Y = X - 1 \sim Egyenletes[0,3]$. *Ekkor*

$$E(X-1)^2 = EY^2 = \int_0^3 y^2 \frac{1}{3}\, dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 3$$

Más megoldás:

$$E(X-1)^2 = D^2(X-1) + E^2(X-1) = \frac{(3-0)^2}{12} + \left(\frac{0+3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$$

1.14. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók mindkettő 0 várható értékkel és 1 szórással. Legyen $W = X - Y$. Számítsa ki W várható értékét és szórását!

Megoldás

$EW = EX - EY = 0$ *és* $DW = \sqrt{D^2X + D^2Y} = \sqrt{2}$

1.15. Feladat. Adjon meg véges sok értéket felvehető (X) ill. végtelen sok értéket felvehető (Y) diszkrét valószínűségi változókat melyeknek szórása 1!

Megoldás

Például: Legyen $P(X=-1) = \frac{1}{2}, P(X=1) = \frac{1}{2}$ *ill.* $Y \sim Poisson(1)$.

1.16. Feladat. Legyen $X \sim N(2, \sqrt{5}^2)$ és $Y \sim N(5, 3^2)$ függetlenek és legyen $W = 3X - 2Y + 1$. Számítsa ki
a) EW-t és D^2W-t, ill.
b) $P(W \leq 6)$-ot!
($\Phi(1) = 0,8413$)

Megoldás

a) $EW = 3EX - 2EY + 1 = 6 - 10 + 1 = -3$ *és*
$D^2W = D^2(3X - 2Y) = D^2(3X) + D^2(-2Y) = 3^2D^2X + (-2)^2D^2Y = 9D^2X + 4D^2Y = 45 + 36 = 81$
b) Mivel független normális eloszlású valószínűségű változók összege is normális eloszlású, és $3X \sim N(6,\ 3^2 \cdot \sqrt{5}^2)$ *továbbá* $-2Y \sim N(-10,\ (-2)^2 \cdot 3^2)$, *így* $W \sim N(-3, 9^2)$.

$$P(W \leq 6) = P\left(\frac{W-(-3)}{9} < \frac{6-(-3)}{9}\right) = \Phi(1) = 0,8413$$

1.17. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók, melyre $D^2X < \infty$ és $D^2Y < \infty$.
a) Mutassa meg, hogy $X + Y$ és X kovarianciája egyenlő X szórásnégyzetével!
b) Számolja ki $X + Y$ és X korrelációját!

Megoldás

a)

$$\begin{aligned} cov(X+Y, X) &= E(X+Y)X - E(X+Y)EX = EX^2 + E(YX) - E^2X - EYEX = \\ &= EX^2 - E^2X + E(YX) - EYEX = cov(X,X) + cov(Y,X) = D^2(X) \end{aligned}$$

b)

$$corr(X+Y, X) = \frac{cov(X+Y,X)}{D(X+Y)DX} = \frac{D^2X}{\sqrt{D^2X + D^2Y}DX} = \frac{DX}{\sqrt{D^2X + D^2Y}}$$

1.18. Feladat. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0,9 valószínűséggel nagyobb legyen 99,5 g-nál, ha feltételezzük, hogy az egyes táblák tömege egymástól független? ($\Phi(1{,}28) = 0{,}8997$)

Megoldás

Legyen X *egy tábla csokoládé tömege,* $X \sim N(100, 3^2)$. *Ekkor* n *tábla csokoládé átlagos tömege* $\overline{X} \sim N(100, \frac{9}{n})$, *mivel* $D^2(\overline{X}) = D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{n \cdot 9}{n^2} = \frac{9}{n}$.

$$0{,}9 = P(\overline{X} > 99{,}5) = 1 - P(\overline{X} < 99{,}5) = 1 - P\left(\frac{\overline{X}-100}{\frac{3}{\sqrt{n}}} < \frac{-0{,}5 \cdot \sqrt{n}}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{6}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1{,}28) = 0{,}8997 \approx 0{,}9$, *így* $1{,}28 = \frac{\sqrt{n}}{6}$. *Ebből következik, hogy* $n = (6 \cdot 1{,}28)^2 = 58{,}9$, *azaz legalább* 59 *csokit kell egy dobozba csomagolni.*

1.19. Feladat. Egy scannelt kép átlagos mérete 600KB, 100KB szórással. Mi a valószínűsége, hogy 80 ilyen kép együttesen 47 és 48MB közötti tárhelyet foglal el, ha feltételezzük, hogy a képek mérete egymástól független?
$(\Phi(1{,}12) = 0{,}8686)$

Megoldás

Jelölje X egy kép eloszlását $\mu = 600$KB várható értékkel és $\sigma = 100$KB szórással. Legyen S_n n db ilyen valószínűségi változó összege ($n = 80$). A centrális határeloszlás tétel szerint

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \to Z \text{ ha } n \to \infty, \text{ ahol } Z \sim N(0,1).$$

Tehát

$$P(47000 \le S_n \le 48000) = P\left(\frac{47000 - 80 \cdot 600}{\sqrt{80} \cdot 100} \le \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{48000 - 80 \cdot 600}{\sqrt{80} \cdot 100}\right) \approx$$

$$\approx P(-1,12 \le Z \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,12) = 0,5 - (1 - \Phi(1,12)) = 0,5 - (1 - 0,8686) = 0,3686 = 36,9\%$$

1.20. Feladat. Egy szoftver frissítéséhez 68 file-t kell installálni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórású ideig töltődnek.
a) Mi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül?
b) A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány file-ból állhat ez a frissítés?
$(\Phi(2,42) = 0,992, \Phi(1,645) = 0,95)$

Megoldás

Legyen X egy fájl telepítési ideje $\mu = 10$ mp várható értékkel és $\sigma = 2$ mp szórással. Jelölje S_n n db fájl telepítési idejének az összegét ($n = 68$).
a) Használva a Centrális Határeloszlás Tételt,

$$P(\textit{teljes frissítés lezajlik 12 percen belül}) = P(S_n < 720) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{720 - 680}{2\sqrt{68}}\right) \approx \Phi(2,42) = 99,2\%$$

b)

$$0,95 = P(S_n < 600) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1,645) = 0,95$, így $1,645 = \dfrac{600 - 10n}{2\sqrt{n}}$, vagyis

$$3{,}29\sqrt{n} = 600 - 10n \;\; / \; y := \sqrt{n}$$
$$3{,}29y = 600 - 10y^2$$
$$10y^2 + 3{,}29y - 600 = 0$$
$$\to y_1 = 7{,}58, y_2 = -7{,}91$$
$$y = \sqrt{n} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{n} = 7{,}58$$

Így következik, hogy $n = 57{,}51$, azaz legfeljebb 57 fájlból állhat a frissítés.

1.21. Feladat. Legyen egy X pozitív valószínűségi változó várható értéke $EX = 3$ és szórása $DX = 3$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel vesz fel a változó 13-at vagy annál nagyobb értéket! Mennyi a valószínűség pontos értéke, ha feltesszük, hogy az eloszlás exponenciális?

Megoldás

Markov-egyenlőtlenséggel: $P(X \ge 13) \le \dfrac{EX}{13} = \dfrac{3}{13} \approx 0{,}23$
A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 10$ értékre használva

$$P(X \ge 13) = P(X - 3 \ge 13 - 3) = P(X - 3 \ge 10) \le P(|X - 3| \ge 10) \le \frac{D^2X}{10^2} = \frac{9}{100} = 0,09$$

Ha X exponenciális eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$, így

$$P(X \ge 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - (1 - e^{-\frac{13}{3}}) = e^{-\frac{13}{3}} = 0,013$$

1.22. Feladat. Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől?

Megoldás

A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 1$ értékre használva

$$P(|X - 40| \geq 1) \leq \frac{D^2 X}{1^2} = \frac{0,2^2}{1^2} = 0,04$$

Vagyis legfeljebb 0,04 annak a valószínűsége, hogy a vezeték rövidebb, mint 39 *m ill. hosszabb, mint* 41 *m.*