

# Algoritmer och komplexitet inom kommutativ algebra & algebraisk geometri

Omparametrisering av kurvor, semigrupper,  
implicit notation & multiplicitetsföljder

Peter Waher

`peterwaher@hotmail.com`

`https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\_kurvor`

13 november 2015

# Outline

- 1 Plana algebraiska kurvor
  - Introduktion - kurvor
  - Omparametrisering

# Outline

- 1 Plana algebraiska kurvor
  - Introduktion - kurvor
  - Omparametrisering
- 2 Semigrupper
  - Introduktion - semigrupper
  - Beräkning av konduktören
  - Polynomringen  $\mathbb{C}[t]$  och dess delringar
  - Semigrupper för  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$

# Outline

- 1 Plana algebraiska kurvor
  - Introduktion - kurvor
  - Omparametrisering
- 2 Semigrupper
  - Introduktion - semigrupper
  - Beräkning av konduktören
  - Polynomringen  $\mathbb{C}[t]$  och dess delringar
  - Semigrupper för  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$
- 3 Implicit notation

# Outline

- 1 Plana algebraiska kurvor
  - Introduktion - kurvor
  - Omparametrisering
- 2 Semigrupper
  - Introduktion - semigrupper
  - Beräkning av konduktören
  - Polynomringen  $\mathbb{C}[t]$  och dess delringar
  - Semigrupper för  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$
- 3 Implicit notation
- 4 Multiplicitetsföljder
  - Uppblåsningar

# Plana algebraiska kurvor

## 1 Plana algebraiska kurvor

# Plana algebraiska kurvor

- 1 Plana algebraiska kurvor
  - 1 Introduktion

# Plana algebraiska kurvor

- ① Plana algebraiska kurvor
  - ① Introduktion
  - ② Omparametrisering



# Vad är en plan kurva?

## Definition

En **plan kurva**  $C$  är en delmängd i  $\mathbb{C}^2$  sådan att det finns två kontinuerliga funktioner  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  och  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sådana att  $C = \{(f(t), g(t)) : t \in \mathbb{C}\}$ .  $(f, g)$  är en **parametrisering** av  $C$ . Om  $C$  kan parametriseras av två analytiska funktioner  $f$  och  $g$  kallas  $C$  **analytisk**. Om den kan parametriseras av två polynom kallas  $C$  för **algebraisk**. Om den kan parametriseras av två formella potensserier kallas  $C$  **algebroid**.

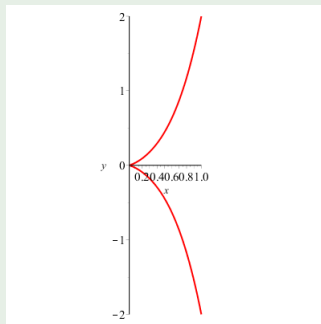
# Kurvor i det Euklidiska planet

Traditionellt har man ofta studerat plana kurvor i det *Euklidiska planet*. I detta fall är kurvan parametriserad av reellvärda funktioner  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Exempel

$$C(t) = (t^2, t^3 + t^7)$$

Not: För att förenkla notationen kan vi identifiera kurvan  $C$  med en viss parametrisering  $(f, g)$ , även om parametriseringen inte är unik. Detta görs enklast genom att identifiera kurvan med funktionen  $C : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $C(t) = (f(t), g(t))$ . Notera dock att kurvan som sådan och en av dess parametriseringar är två olika objekt.



# Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

- 1 Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:

# Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

- ① Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:
  - ① Analytiska funktioner kan skrivas som formella potensserier kring den punkt vi studerar.

# Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

- ① Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:
  - ① Analytiska funktioner kan skrivas som formella potensserier kring den punkt vi studerar.
  - ② Formella potensserier kan approximeras av polynom med önskad noggrannhet.

# Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

- ① Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:
  - ① Analytiska funktioner kan skrivas som formella potensserier kring den punkt vi studerar.
  - ② Formella potensserier kan approximeras av polynom med önskad noggrannhet.
- ② Kurvan går genom *origo*:  $C(0) = \mathbf{0}$

# Reguljära och singulära kurvor

## Definition

Om en kurva  $C$  har en parametrisering  $(f, g)$  sådan att  $f'(0) \neq 0$  eller  $g'(0) \neq 0$  kallas kurvan **reguljär**. Annars kallas kurvan **singulär**.

Not: Bara för att  $f'(0) = 0$  och  $g'(0) = 0$  i en parametrisering  $(f, g)$  av en kurva  $C$ , betyder inte det att kurvan är singulär. Det kan ju finnas en parametrisering av samma kurva där någon av derivatorna är nollskilda. Exempelvis är  $(t^3, t^3)$  och  $(t, t)$  två olika parametriseringar av samma kurva. I det första exemplet är derivatorna 0 i origo medan de i det andra exemplet båda är nollskilda.

# Ordning och grad

## Definition

**Ordningen** av ett polynom eller en potensserie  $f(t) = \sum a_i t^i \neq 0$  är det minsta heltalet  $k$  sådant att koefficienten  $a_k$  är nollskild, och skrivs  $\mathbf{o}(f)$ . **Graden** för motsvarande polynom är det största heltalet  $k$  sådant att koefficienten  $a_k$  inte är noll, och skrivs  $\deg(f)$ .



# Varför omparametrisera?

- 1 För utritande av kurvor spelar parametriseringen inte så stor roll.
- 2 Vill man beräkna  $y(x) = g(f^{-1}(x))$  eller  $x(y) = f(g^{-1}(y))$ , står man genast inför en mängd problem.

# Omparametrisering av kurvor

## Sats

*Om  $C = C(t) = (f(t), g(t))$  är en komplex analytisk, algebroid eller algebraisk kurva, samt att  $f(0) = g(0) = 0$ , kan kurvan  $C$  omparametriseras på formen  $C^*(t) = (\pm t^n, g^*(t))$  eller på formen  $C^*(t) = (f^*(t), \pm t^n)$  i ett område kring  $t = 0$ , där  $f(t)$  och  $g(t)$  är formella potensserier. Dessutom gäller att  $\mathbf{o}(f^*) \geq n$  eller att  $\mathbf{o}(g^*) \geq n$ . Om  $f(t)$  och  $g(t)$  är reellvärda, kan också omparametriseringen göras reellvärd.*

Not: Från *Weierstrass Preparation Theorem* kan man få att en sådan omparametrisering existerar. Dock presenteras inte en metod över hur en sådan omparametrisering kan tas fram.

# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

- 2 Vi väljer  $\phi(t)$  sådan att:

# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

- 2 Vi väljer  $\phi(t)$  sådan att:

- 1 Analytisk kring  $t = 0$ .

# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

- 2 Vi väljer  $\phi(t)$  sådan att:

- 1 Analytisk kring  $t = 0$ .
- 2  $\phi(0) = 0$

# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

- 2 Vi väljer  $\phi(t)$  sådan att:

- 1 Analytisk kring  $t = 0$ .

- 2  $\phi(0) = 0$

- 3  $\mathbf{o}(\phi) = 1 \implies \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$

# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

- 2 Vi väljer  $\phi(t)$  sådan att:

- 1 Analytisk kring  $t = 0$ .

- 2  $\phi(0) = 0$

- 3  $\mathbf{o}(\phi) = 1 \implies \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$

- 4  $\phi(t), f(t), g(t)$  reellvärda  $\implies C^*(t)$  reellvärd.



# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

- 2 Vi väljer  $\phi(t)$  sådan att:

- 1 Analytisk kring  $t = 0$ .

- 2  $\phi(0) = 0$

- 3  $\mathbf{o}(\phi) = 1 \implies \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$

- 4  $\phi(t), f(t), g(t)$  reellvärda  $\implies C^*(t)$  reellvärd.

- 3 Med början i  $a_1$  (som har  $n$  lösningar), löses koefficienterna  $a_i$  ut ur  $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$  för att uppfylla ovanstående.

# Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

- 1 Vi skapar en omparametrisering via komposition med  $\phi(t)$ :

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

- 2 Vi väljer  $\phi(t)$  sådan att:

- 1 Analytisk kring  $t = 0$ .

- 2  $\phi(0) = 0$

- 3  $\mathbf{o}(\phi) = 1 \implies \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$

- 4  $\phi(t), f(t), g(t)$  reellvärda  $\implies C^*(t)$  reellvärd.

- 3 Med början i  $a_1$  (som har  $n$  lösningar), löses koefficienterna  $a_i$  ut ur  $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$  för att uppfylla ovanstående.

- 4 Finns precis en lösning i det generella fallet som uppfyller ovanstående, samt satsens, krav.

# Reparametrize()

```
Reparametrize := proc(x, y, Variable, t0 , MaxDegree,  
    Branch, AllowNegation)
```

- 1 Algoritm som omparametriserar en algebraisk kurva med given noggrannhet.

# Reparametrize()

```
Reparametrize := proc(x, y, Variable, t0 , MaxDegree,  
    Branch, AllowNegation)
```

- 1 Algoritm som omparametriserar en algebraisk kurva med given noggrannhet.
- 2 Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/kurvor.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/kurvor.mw)

# Reparametrize()

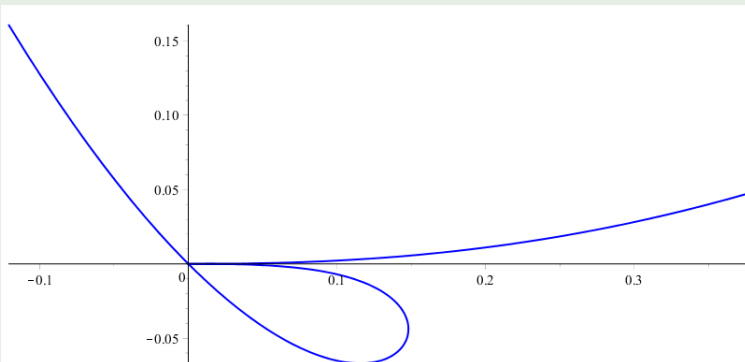
```
Reparametrize := proc(x, y, Variable, t0 , MaxDegree,  
    Branch, AllowNegation)
```

- ① Algoritm som omparametriserar en algebraisk kurva med given noggrannhet.
- ② Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/kurvor.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/kurvor.mw)
- ③ Text-version finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/Functions/Reparametrize.txt](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/Reparametrize.txt)

# Reparametrize - exempel 1 (1/4)

## Exempel

Kurvan  $(t^2 + t^3, t^5 + t^6)$  har en singularitet i  $t = 0$ . Dessutom passerar kurvan genom origo då  $t = -1$ .



# Reparametrize - exempel 1 (2/4)

## Exempel

Först ber vi Maple att parametrisera om kurvan kring  $t = 0$ :

```
> Reparametrize(t^3+t^2,t^6+t^5,t,0,10,0,false);
```

Elapsed Time: 0.016 s.

$$\left[ t^2, t^5 - \frac{3}{2}t^6 + \frac{21}{8}t^7 - 5t^8 + \frac{1287}{128}t^9 - 21t^{10} \right]$$

## Reparametrize - exempel 1 (3/4)

### Exempel

Därefter vill vi ha en omparametrisering kring  $t = -1$ :

```
> Reparametrize(t^3+t^2, t^6+t^5, t, -1, 10,  
  0, false);
```

Elapsed Time: 0.016 s.

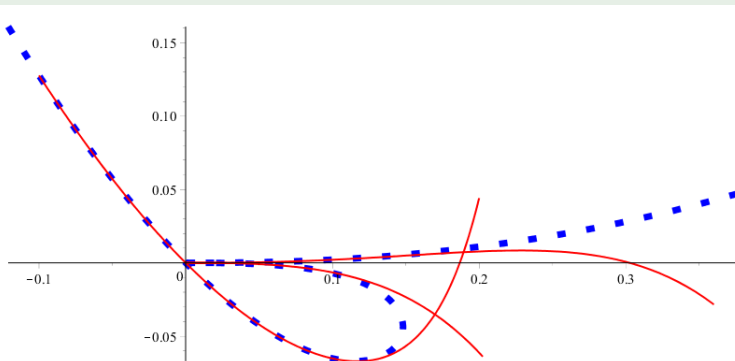
$$\left[ t, 163438 t^{10} + 29070 t^9 + 5304 t^8 + 1001 t^7 + 198 t^6 + 42 t^5 + \right. \\ \left. + 10 t^4 + 3 t^3 + 3 t^2 - t \right]$$



# Reparametrize - exempel 1 (4/4)

## Exempel

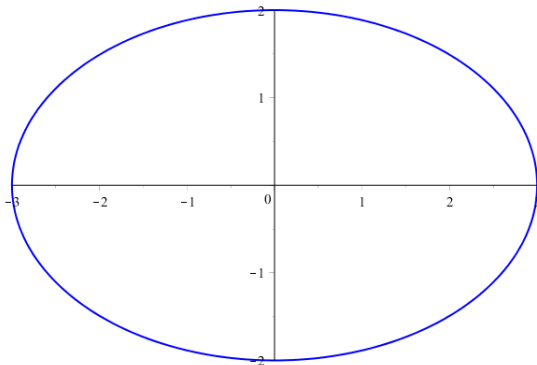
Nedan kurvan  $C(t) = (t^2 + t^3, t^5 + t^6)$ , med omparametriseringarna kring  $t = 0$  och  $t = -1$ .



## Reparametrize - exempel 2 (1/6)

### Exempel

Ellipsen  $(3 \sin(t), 2 \cos(t))$  är reguljär, men vi kan parametrisera om kurvan ändå för att illustrera axelbyte.



# Reparametrize - exempel 2 (2/6)

## Exempel

Första omparametriseringen gör vi kring  $t = 0$ :

```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,0,10,0,false);
```

Elapsed Time: 0.015 s.

$$\left[ t, 2 - \frac{1}{9}t^2 - \frac{t^4}{324} - \frac{t^6}{5832} - \frac{5t^8}{419904} - \frac{7t^{10}}{7558272} \right]$$

# Reparametrize - exempel 2 (3/6)

## Exempel

Andra omparametriseringen gör vi kring  $t = \pi$ :

```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,Pi,10,0,false);
```

Elapsed Time: 0.016 s.

$$\left[ t, -2 + \frac{1}{9}t^2 + \frac{t^4}{324} + \frac{t^6}{5832} + \frac{5t^8}{419904} + \frac{7t^{10}}{7558272} \right]$$

# Reparametrize - exempel 2 (4/6)

## Exempel

Tredje omparametriseringen gör vi kring  $t = \frac{\pi}{2}$ . Notera hur omparametriseringarna skiljer från  $t = 0$  och  $t = \pi$ , jämfört med  $t = \pm \frac{\pi}{2}$ :

```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,(1/2)*Pi,  
10,0,false);
```

Elapsed Time: 0.016 s.

$$\left[ 3 - \frac{3}{8}t^2 - \frac{3t^4}{128} - \frac{3t^6}{1024} - \frac{15t^8}{32768} - \frac{21t^{10}}{262144}, t \right]$$

# Reparametrize - exempel 2 (5/6)

## Exempel

Fjärde omparametriseringen gör vi kring  $t = -\frac{\pi}{2}$ :

```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,-(1/2)*Pi,  
10,0,false);
```

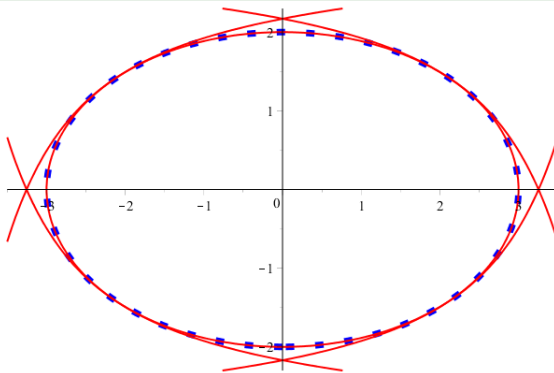
Elapsed Time: 0.015 s.

$$\left[ -3 + \frac{3}{8}t^2 + \frac{3t^4}{128} + \frac{3t^6}{1024} + \frac{15t^8}{32768} + \frac{21t^{10}}{262144}, t \right]$$

## Reparametrize - exempel 2 (6/6)

### Exempel

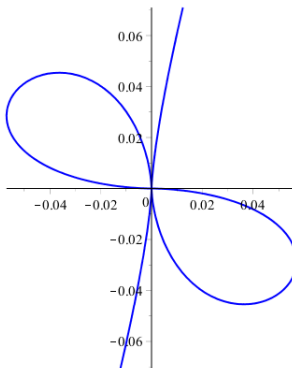
Nedan kurvan  $C(t) = (3 \sin(t), 2 \cos(t))$ , med de fyra omparametriseringarna kring  $t = 0$ ,  $t = \pi$  och  $t = \pm \frac{\pi}{2}$ :



## Reparametrize - exempel 3 (1/5)

### Exempel

Kurvan  $(t^3(t-1)^3(t+1)^3, t^5(t-1)^2(t+1)^2)$  har singulariteter i  $t = 0, 1, -1$  av ordningar 2, 1, 1 respektive.





# Reparametrize - exempel 3 (2/5)

## Exempel

Vi analyserar hur omparametriseringarna uppför sig i dessa tre singulariteter. Första omparametriseringen gör vi kring  $t = 0$ :

```
> Reparametrize(t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,  
  t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,t,0,15,0, false);
```

Elapsed Time: 0.031 s.

$$[t^3, -1428 t^{15} - 273 t^{13} - 55 t^{11} - 12 t^9 - 3 t^7 - t^5]$$

# Reparametrize - exempel 3 (3/5)

## Exempel

Därefter kring  $t = 1$ :

```
> Reparametrize(t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,  
  t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,t,1,15,0,false);
```

Elapsed Time: 0.063 s.

$$\left[ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{4} t^3 - \frac{9}{4} t^4 + \frac{207 \sqrt{4} t^5}{64} - 21 t^6 + \frac{150183 \sqrt{4} t^7}{4096} \\ & - \frac{137655 t^8}{512} + \frac{66893079 \sqrt{4} t^9}{131072} - 3978 t^{10} + \frac{132735945771 \sqrt{4} t^{11}}{16777216} \\ & - \frac{8385901667 t^{12}}{131072} + \frac{70379121262905 \sqrt{4} t^{13}}{536870912} \\ & - \frac{4345965 t^{14}}{4} + \frac{78087826643607459 \sqrt{4} t^{15}}{34359738368}, t^2 \end{aligned} \right]$$

## Reparametrize - exempel 3 (4/5)

### Exempel

Och sist kring  $t = -1$ :

```
> Reparametrize(t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,  
  t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,t,-1,15,0,true);
```

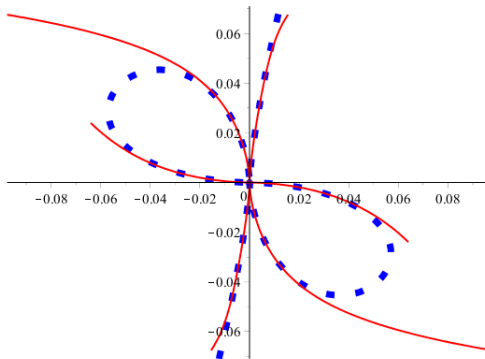
Elapsed Time: 0.047 s.

$$\left[ \frac{1}{2} \sqrt{4} t^3 + \frac{9}{4} t^4 + \frac{207 \sqrt{4} t^5}{64} + 21 t^6 + \frac{150183 \sqrt{4} t^7}{4096} \right. \\ + \frac{137655 t^8}{512} + \frac{66893079 \sqrt{4} t^9}{131072} + 3978 t^{10} + \frac{132735945771 \sqrt{4} t^{11}}{16777216} \\ + \frac{8385901667 t^{12}}{131072} + \frac{70379121262905 \sqrt{4} t^{13}}{536870912} \\ \left. + \frac{4345965 t^{14}}{4} + \frac{78087826643607459 \sqrt{4} t^{15}}{34359738368}, -t^2 \right]$$

## Reparametrize - exempel 3 (5/5)

### Exempel

Ritar vi sedan ut originalparametriseringen av kurvan tillsammans med de tre omparametriseringarna får vi följande intressanta bild:



# Semigrupper

## 2 Semigrupper

# Semigrupper

- ② Semigrupper
  - ① Modulär aritmetik

# Semigrupper

- ② Semigrupper
  - ① Modulär aritmetik
  - ② Semigrupper

# Semigrupper

- ② Semigrupper
  - ① Modulär aritmetik
  - ② Semigrupper
  - ③ Numeriska semigrupper



# Semigrupper

- ② Semigrupper
  - ① Modulär aritmetik
  - ② Semigrupper
  - ③ Numeriska semigrupper
  - ④ Konduktören

# Semigrupper

## ② Semigrupper

- ① Modulär aritmetik
- ② Semigrupper
- ③ Numeriska semigrupper
- ④ Konduktören
- ⑤  $\mathbb{C}[t]$  och dess delringar

# Semigrupper

## ② Semigrupper

- ① Modulär aritmetik
- ② Semigrupper
- ③ Numeriska semigrupper
- ④ Konduktören
- ⑤  $\mathbb{C}[t]$  och dess delringar
- ⑥ Semigrupper för  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$

# Modulär aritmetik

## Definition

Heltalen  $m \in \mathbb{Z}^+$  och  $n \in \mathbb{Z}^+$  sägs vara **relativt prima** om  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  samt  $p \mid m \wedge p \mid n \implies p = 1$ .

# Modulär aritmetik

## Definition

Heltalen  $m \in \mathbb{Z}^+$  och  $n \in \mathbb{Z}^+$  sägs vara **relativt prima** om  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  samt  $p \mid m \wedge p \mid n \implies p = 1$ .

## Lemma

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima och  $0 < a < m$  gäller att  $[a \cdot n]_m \neq 0$ .*

# Modulär aritmetik

## Definition

Heltalen  $m \in \mathbb{Z}^+$  och  $n \in \mathbb{Z}^+$  sägs vara **relativt prima** om  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  samt  $p \mid m \wedge p \mid n \implies p = 1$ .

## Lemma

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima och  $0 < a < m$  gäller att  $[a \cdot n]_m \neq 0$ .*

## Lemma

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima och  $0 < a, b < m$  gäller:*

$$[a \cdot n]_m = [b \cdot n]_m \iff a = b$$

# Semigrupper

## Definition

För en **semigrupp**  $G$ , med den implicit definierade binära operatören  $+$  gäller:

$$a \in G \wedge b \in G \implies (a + b) \in G$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

# Generatorer av semigrupp

## Definition

En serie tal  $n_1, \dots, n_k$  **genererar** semigruppen  $G$  om

$$G = \left\{ \sum_{a_i \neq 0} a_i \cdot n_i : a_i \in \mathbb{N}, \text{ inte alla } a_i = 0 \right\}$$

Detta skrivs även  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ .

Not: Notera att med multiplikation med ett positivt heltal inom en semigrupp avses repetitiv användning av additionsoperatörn.



# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m - 1)(n - 1)$ , men inte talet  $c - 1$ .*

# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m-1)(n-1)$ , men inte talet  $c-1$ .*

Översikt av bevis:

# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m-1)(n-1)$ , men inte talet  $c-1$ .*

Översikt av bevis:

①  $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$ .

# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m-1)(n-1)$ , men inte talet  $c-1$ .*

Översikt av bevis:

- 1  $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$ .
- 2 Antag att  $m < n$ .

# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m-1)(n-1)$ , men inte talet  $c-1$ .*

Översikt av bevis:

- 1  $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$ .
- 2 Antag att  $m < n$ .
- 3 Uppdelning av  $\mathbb{N}$  i segment om  $m$  tal vardera.

# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m-1)(n-1)$ , men inte talet  $c-1$ .*

Översikt av bevis:

- 1  $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$ .
- 2 Antag att  $m < n$ .
- 3 Uppdelning av  $\mathbb{N}$  i segment om  $m$  tal vardera.
- 4 Stryk alla tal i  $[0]_m$ , därefter  $[n]_m, [2n]_m, \dots, [(m-1)n]_m$ .

# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m-1)(n-1)$ , men inte talet  $c-1$ .*

Översikt av bevis:

- 1  $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$ .
- 2 Antag att  $m < n$ .
- 3 Uppdelning av  $\mathbb{N}$  i segment om  $m$  tal vardera.
- 4 Stryk alla tal i  $[0]_m$ , därefter  $[n]_m, [2n]_m, \dots, [(m-1)n]_m$ .
- 5 Alla tal större än eller lika med  $(m-1)n$  ur  $\mathbb{N}$

# Konduktören för $\langle m, n \rangle$ ( $m, n$ relativt prima)

## Sats

*Om  $m$  och  $n$  är relativt prima innehåller semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$  alla tal större än eller lika med  $c = (m-1)(n-1)$ , men inte talet  $c-1$ .*

Översikt av bevis:

- 1  $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$ .
- 2 Antag att  $m < n$ .
- 3 Uppdelning av  $\mathbb{N}$  i segment om  $m$  tal vardera.
- 4 Stryk alla tal i  $[0]_m$ , därefter  $[n]_m, [2n]_m, \dots, [(m-1)n]_m$ .
- 5 Alla tal större än eller lika med  $(m-1)n$  ur  $\mathbb{N}$
- 6 Det högsta ostrukna talet, är således  $(m-1)n - m$ .



# Numerisk semigrupp

## Definition

En **numerisk semigrupp**  $G$  är en speciell form av semigrupp, där även följande villkor gäller:

$$\begin{aligned} G &\subseteq \mathbb{N} \\ \|\mathbb{N} \setminus G\| &< \infty \end{aligned}$$

# Numerisk semigrupp

## Definition

En **numerisk semigrupp**  $G$  är en speciell form av semigrupp, där även följande villkor gäller:

$$\begin{aligned} G &\subseteq \mathbb{N} \\ \|\mathbb{N} \setminus G\| &< \infty \end{aligned}$$

## Lemma

$G = \langle m, n \rangle$  där  $m$  och  $n$  är relativt prima, är en numerisk semigrupp.

# Konduktör

## Definition

I varje numerisk semigrupp  $G$  finns det ett tal  $c_G$  sådant att följande villkor uppfylls:

$$\begin{array}{rcl} c_G & \in & G \\ n > c_G & \implies & n \in G \\ c_G - 1 & \notin & G \end{array}$$

$c_G$  kallas för **konduktören** för  $G$ .

# Konduktör

## Definition

I varje numerisk semigrupp  $G$  finns det ett tal  $c_G$  sådant att följande villkor uppfylls:

$$\begin{array}{rcl} c_G & \in & G \\ n > c_G & \implies & n \in G \\ c_G - 1 & \notin & G \end{array}$$

$c_G$  kallas för **konduktören** för  $G$ .

$c = (m-1)(n-1)$  där  $m$  och  $n$  är relativt prima, är konduktör för den numeriska semigruppen  $G = \langle m, n \rangle$ .

$$\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$$

### Sats

*Om semigruppen  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$ .*

$$\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$$

### Sats

*Om semigruppen  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$ .*

Översikt av trivialt bevis:

$$\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$$

### Sats

*Om semigruppen  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$ .*

Översikt av trivialt bevis:

①  $\gcd(G) = \gcd(n_1, \dots, n_k) = d.$

$$\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$$

### Sats

*Om semigruppen  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$ .*

Översikt av trivialt bevis:

- ①  $\gcd(G) = \gcd(n_1, \dots, n_k) = d$ .
- ②  $d > 1 \implies \|\mathbb{N} \setminus G\| = \infty$



# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

Översikt av bevis:

# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

Översikt av bevis:

- 1 Ändlig mängd tal i  $G$  som genererar semigruppen.

# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

Översikt av bevis:

- 1 Ändlig mängd tal i  $G$  som genererar semigruppen.
- 2  $\hat{M}$  mängden av alla ändliga mängder av generatorer.

# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

Översikt av bevis:

- 1 Ändlig mängd tal i  $G$  som genererar semigruppen.
- 2  $\hat{M}$  mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
- 3  $\hat{M}' = \{\|M\| : M \in \hat{M}\}$

# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

Översikt av bevis:

- 1 Ändlig mängd tal i  $G$  som genererar semigruppen.
- 2  $\hat{M}$  mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
- 3  $\hat{M}' = \{\|M\| : M \in \hat{M}\}$
- 4  $k = \inf \hat{M}'$  existerar.

# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

Översikt av bevis:

- 1 Ändlig mängd tal i  $G$  som genererar semigruppen.
- 2  $\hat{M}$  mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
- 3  $\hat{M}' = \{\|M\| : M \in \hat{M}\}$
- 4  $k = \inf \hat{M}'$  existerar.
- 5  $\exists M_- \in \hat{M} : \|M_-\| = k$

# Minimalt generatorsystem

## Sats

*För varje numerisk semigrupp  $G$  finns ett minimalt generatorsystem  $n_1, \dots, n_k$ , sådant att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$ . Detta system är unikt för  $G$ .*

Översikt av bevis:

- ① Ändlig mängd tal i  $G$  som genererar semigruppen.
- ②  $\hat{M}$  mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
- ③  $\hat{M}' = \{\|M\| : M \in \hat{M}\}$
- ④  $k = \inf \hat{M}'$  existerar.
- ⑤  $\exists M_- \in \hat{M} : \|M_-\| = k$
- ⑥  $N_- \in \hat{M} \wedge \|N_-\| = k \implies N_- = M_-$



$$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle \{n_i\} \rangle \text{ numerisk}$$

### Sats

*Om  $n_1, \dots, n_k$  är heltal sådana att  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$  så gäller att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är en numerisk semigrupp.*

$$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle \{n_i\} \rangle \text{ numerisk}$$

### Sats

*Om  $n_1, \dots, n_k$  är heltal sådana att  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$  så gäller att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är en numerisk semigrupp.*

Översikt av bevis:

- 1 Anta  $n_1 < \dots < n_k$

$$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle \{n_i\} \rangle \text{ numerisk}$$

### Sats

*Om  $n_1, \dots, n_k$  är heltal sådana att  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$  så gäller att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är en numerisk semigrupp.*

Översikt av bevis:

- ① Anta  $n_1 < \dots < n_k$
- ②  $\langle [n_2]_{n_1}, \dots, [n_k]_{n_1} \rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$

$$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle \{n_i\} \rangle \text{ numerisk}$$

## Sats

*Om  $n_1, \dots, n_k$  är heltal sådana att  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$  så gäller att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är en numerisk semigrupp.*

Översikt av bevis:

- ① Anta  $n_1 < \dots < n_k$
- ②  $\langle [n_2]_{n_1}, \dots, [n_k]_{n_1} \rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
- ③  $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \leq b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$

$$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle \{n_i\} \rangle \text{ numerisk}$$

## Sats

Om  $n_1, \dots, n_k$  är heltal sådana att  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$  så gäller att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

- ① Anta  $n_1 < \dots < n_k$
- ②  $\langle [n_2]_{n_1}, \dots, [n_k]_{n_1} \rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
- ③  $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \leq b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
- ④  $b_j = \sum_{i=2}^k b_{i,j} \cdot n_i \in G, [b_j]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$

$$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle \{n_i\} \rangle \text{ numerisk}$$

## Sats

Om  $n_1, \dots, n_k$  är heltal sådana att  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$  så gäller att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

- ① Anta  $n_1 < \dots < n_k$
- ②  $\langle [n_2]_{n_1}, \dots, [n_k]_{n_1} \rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
- ③  $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \leq b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
- ④  $b_j = \sum_{i=2}^k b_{i,j} \cdot n_i \in G, [b_j]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
- ⑤  $0 \leq b_j < n_1 \sum_{i=2}^k n_i \leq (k-1)n_1 n_k = B$

$$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle \{n_i\} \rangle \text{ numerisk}$$

## Sats

Om  $n_1, \dots, n_k$  är heltal sådana att  $\gcd(n_1, \dots, n_k) = 1$  så gäller att  $G = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$  är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

- ① Anta  $n_1 < \dots < n_k$
- ②  $\langle [n_2]_{n_1}, \dots, [n_k]_{n_1} \rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
- ③  $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \leq b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
- ④  $b_j = \sum_{i=2}^k b_{i,j} \cdot n_i \in G, [b_j]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
- ⑤  $0 \leq b_j < n_1 \sum_{i=2}^k n_i \leq (k-1)n_1 n_k = B$
- ⑥  $S_B = \{m \cdot n_1, \dots, (m+1) \cdot n_1 - 1\} \subset G$ , där  $m \cdot n_1 \geq B$

# FindConductor()

`FindConductor := proc(Generators)`

- 1 Algoritmen som beräknar konduktören för en numerisk semigrupp givet dess generatorer.



## FindConductor()

`FindConductor := proc(Generators)`

- 1 Algoritm som beräknar konduktören för en numerisk semigrupp givet dess generatorer.
- 2 Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/semigrupper.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw)

## FindConductor()

`FindConductor := proc(Generators)`

- 1 Algoritmen som beräknar konduktören för en numerisk semigrupp givet dess generatorer.
- 2 Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/semigrupper.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw)
- 3 Text-version finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/Functions/FindConductor.txt](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindConductor.txt)

# Generalisering möjlig?

## Exempel

Vi beräknar konduktören för

$$\langle 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7 \rangle = \langle 30, 42, 70, 105 \rangle:$$

```
> FindConductor([2*3*5,2*3*7,2*5*7,3*5*7]);
```

Elapsed Time: 0.000 s.

384

Konduktören blir i detta exempel  $384 = 2^7 \cdot 3$ . Som man kan se i detta exempel verkar det inte finnas någon enkel självklar generalisering av formeln för konduktören av  $\langle m, n \rangle$ , då  $m$  och  $n$  är relativt prima ( $c = (m-1)(n-1)$ ).

# Stor semigrupp

## Exempel

I följande exempel illustreras fördelen med att beräkningen av konduktören genomförs utan att motsvarande semigrupp genereras:

```
> FindConductor([2139,2398,3321]);
```

Elapsed Time: 8.062 s.

277188

Konduktören för  $\langle 2139, 2398, 3321 \rangle$  är alltså 277188, dvs. lite mer än 129 ggr större än den minsta generatoren (2139). Beräkningen av motsvarande semigrupp kommer att ta betydligt mer tid (326.313 s). Utskriften av semigruppen kan också krascha Maple (vilket den gjorde i mitt fall).

# FindSemiGroup()

FindSemiGroup := proc(Generators)

- 1 Algoritmen som genererar semigruppen och dess konduktör, givet dess generatorer.

# FindSemiGroup()

```
FindSemiGroup := proc(Generators)
```

- 1 Algoritmen som genererar semigruppen och dess konduktör, givet dess generatorer.
- 2 Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/semigrupper.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw)

# FindSemiGroup()

`FindSemiGroup := proc(Generators)`

- 1 Algoritmen som genererar semigruppen och dess konduktör, givet dess generatorer.
- 2 Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/semigrupper.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw)
- 3 Text-version finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/Functions/FindSemiGroup.txt](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindSemiGroup.txt)

# Enkel semigrupp

## Exempel

Det första exemplet beräknar  $\langle 15, 10, 6 \rangle$ :

```
> FindSemiGroup([15,10,6]);
```

Elapsed Time: 0.000 s.

$$[30, \{6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}]$$

Vi får att konduktören är 30 och att

$$\langle 15, 10, 6 \rangle = \{6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, \dots\}$$

där “...” betyder “alla heltal som kommer därefter”.



# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

## Delringar till $\mathbb{C}[t]$

### Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

### Exempel

Gäller inte generellt.  $x \cdot \mathbb{C}[x, y]$  har inte ett ändligt antal generatorer:

$$xy^2 \notin \mathbb{C}[x, xy]$$

$$xy^3 \notin \mathbb{C}[x, xy, xy^2]$$

$$xy^4 \notin \mathbb{C}[x, xy, xy^2, xy^3]$$

...

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (1/4)

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (1/4)

- 1  $p_1$  bland de polynom i  $S$  av lägst grad.

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (1/4)

- 1  $p_1$  bland de polynom i  $S$  av lägst grad.
- 2  $p_{i+1}$  väljs bland  $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \dots, p_i]$  av lägst grad.

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (1/4)

- 1  $p_1$  bland de polynom i  $S$  av lägst grad.
- 2  $p_{i+1}$  väljs bland  $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \dots, p_i]$  av lägst grad.
- 3  $\deg(p_{i+1}) > \deg(p_i)$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (1/4)

- ①  $p_1$  bland de polynom i  $S$  av lägst grad.
- ②  $p_{i+1}$  väljs bland  $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \dots, p_i]$  av lägst grad.
- ③  $\deg(p_{i+1}) > \deg(p_i)$
- ④  $S_1 = \mathbb{C}[p_1] \subsetneq \dots \subsetneq S_n = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n] \subsetneq \dots \subseteq S \subset \mathbb{C}[t]$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (1/4)

- ①  $p_1$  bland de polynom i  $S$  av lägst grad.
- ②  $p_{i+1}$  väljs bland  $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \dots, p_i]$  av lägst grad.
- ③  $\deg(p_{i+1}) > \deg(p_i)$
- ④  $S_1 = \mathbb{C}[p_1] \subsetneq \dots \subsetneq S_n = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n] \subsetneq \dots \subseteq S \subset \mathbb{C}[t]$
- ⑤  $l_i = \deg(S_i) \implies l_1 \subsetneq \dots \subsetneq l_i \subsetneq \dots \subseteq \mathbb{N}$



# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (2/4)

①  $\bar{l}_i = \{[d]_m : d \in l_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$ , där  $m = \deg(p_1)$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (2/4)

- 1  $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$ , där  $m = \deg(p_1)$
- 2  $\bar{I}_1 \subseteq \dots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}_m$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (2/4)

- ①  $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$ , där  $m = \deg(p_1)$
- ②  $\bar{I}_1 \subseteq \dots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}_m$
- ③  $\exists N : \bar{I}_i = \bar{I}_N, \forall i \geq N$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (2/4)

- ①  $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$ , där  $m = \deg(p_1)$
- ②  $\bar{I}_1 \subseteq \dots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}_m$
- ③  $\exists N : \bar{I}_i = \bar{I}_N, \forall i \geq N$
- ④  $Q_i = \{q \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N] : \deg(q) \equiv i \pmod{m}\}$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (2/4)

- ①  $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$ , där  $m = \deg(p_1)$
- ②  $\bar{I}_1 \subseteq \dots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}_m$
- ③  $\exists N : \bar{I}_i = \bar{I}_N, \forall i \geq N$
- ④  $Q_i = \{q \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N] : \deg(q) \equiv i \pmod{m}\}$
- ⑤  $\forall [i]_m \in \bar{I}_N, 0 \leq i < m : Q_i \neq \emptyset$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (3/4)

$$\textcircled{1} \deg(Q_i) \subset \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (3/4)

- ①  $\deg(Q_i) \in \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
- ②  $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$  ledande koefficient 1.

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (3/4)

- ①  $\deg(Q_i) \in \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
- ②  $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$  ledande koefficient 1.
- ③  $n_i \in \mathbb{N} : \deg(q_i) = i + n_i \cdot m$



# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icke trivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (3/4)

- 1  $\deg(Q_i) \in \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
- 2  $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$  ledande koefficient 1.
- 3  $n_i \in \mathbb{N} : \deg(q_i) = i + n_i \cdot m$
- 4 Godtyckligt  $f \in S$ .

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (3/4)

- ①  $\deg(Q_i) \in \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
- ②  $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$  ledande koefficient 1.
- ③  $n_i \in \mathbb{N} : \deg(q_i) = i + n_i \cdot m$
- ④ Godtyckligt  $f \in S$ .
- ⑤  $\deg(f) \in \bar{I}_N \implies \exists [j]_m \in \bar{I}_N, 0 \leq j < m : \deg(f) \equiv j \pmod{m}$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (4/4)

$$\textcircled{1} \exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (4/4)

- ①  $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m =$   
 $j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
- ②  $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N] \subset S$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (4/4)

- ①  $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
- ②  $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N] \subset S$
- ③  $f - f_0 \in S \wedge \deg(f - f_0) < \deg(f)$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (4/4)

- ①  $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
- ②  $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N] \subset S$
- ③  $f - f_0 \in S \wedge \deg(f - f_0) < \deg(f)$
- ④  $f_0, \dots, f_l \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N]$

# Delringar till $\mathbb{C}[t]$

## Sats

*För varje icketrivial delring  $S \subset \mathbb{C}[t]$ , sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$  som genererar  $S$ , dvs.  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ .*

Översikt motsatsbevis: (4/4)

- ①  $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
- ②  $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N] \subset S$
- ③  $f - f_0 \in S \wedge \deg(f - f_0) < \deg(f)$
- ④  $f_0, \dots, f_l \in \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N]$
- ⑤  $\deg(f) > \deg(f - f_0) > \dots > \deg(f - \sum f_j)$

# Semigruppen av ordningar

Betrakta  $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$ , där  
 $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ :



# Semigruppen av ordningar

Betrakta  $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$ , där  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ :

- 1  $G_S$  är en semigrupp.

# Semigruppen av ordningar

Betrakta  $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$ , där  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ :

- 1  $G_S$  är en semigrupp.
- 2  $G_S$  kan vara större än  $\langle \mathbf{o}(p_1), \dots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

# Semigruppen av ordningar

Betrakta  $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$ , där  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ :

- 1  $G_S$  är en semigrupp.
- 2  $G_S$  kan vara större än  $\langle \mathbf{o}(p_1), \dots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

## Exempel

- 1  $S = \mathbb{C}[t^2, t^4 + t^5]$

# Semigruppen av ordningar

Betrakta  $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$ , där  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ :

- ①  $G_S$  är en semigrupp.
- ②  $G_S$  kan vara större än  $\langle \mathbf{o}(p_1), \dots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

## Exempel

- ①  $S = \mathbb{C}[t^2, t^4 + t^5]$
- ②  $(t^4 + t^5) - (t^2)^2 = t^5 \in S \implies 5 \in G_S$

# Semigruppen av ordningar

Betrakta  $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$ , där  $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ :

- ①  $G_S$  är en semigrupp.
- ②  $G_S$  kan vara större än  $\langle \mathbf{o}(p_1), \dots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

## Exempel

- ①  $S = \mathbb{C}[t^2, t^4 + t^5]$
- ②  $(t^4 + t^5) - (t^2)^2 = t^5 \in S \implies 5 \in G_S$
- ③  $\langle \mathbf{o}(p_1), \mathbf{o}(p_2) \rangle = \langle 2 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle = \{2, 4, 5, 6, \dots\} = G_S$

## Sökning efter polynom

För att beräkna vilka tal som finns i  $G_S$  behöver vi systematiskt gå igenom de möjligheter vi har att kombinera nya polynom från generatorerna  $\{p_i\}$ . Polynom som kan generera polynom av nya ordningar, och som inte är kända sedan tidigare, kan göras på två sätt:

## Sökning efter polynom

För att beräkna vilka tal som finns i  $G_S$  behöver vi systematiskt gå igenom de möjligheter vi har att kombinera nya polynom från generatorerna  $\{p_i\}$ . Polynom som kan generera polynom av nya ordningar, och som inte är kända sedan tidigare, kan göras på två sätt:

- 1 Antingen genom att två kända polynom multipliceras med varandra. I detta fallet blir ordningen av det nya polynomet summan av ordningarna för de individuella polynomen.

## Sökning efter polynom

För att beräkna vilka tal som finns i  $G_S$  behöver vi systematiskt gå igenom de möjligheter vi har att kombinera nya polynom från generatorerna  $\{p_i\}$ . Polynom som kan generera polynom av nya ordningar, och som inte är kända sedan tidigare, kan göras på två sätt:

- 1 Antingen genom att två kända polynom multipliceras med varandra. I detta fallet blir ordningen av det nya polynomet summan av ordningarna för de individuella polynomen.
- 2 Alternativt kan två kända polynom av samma ordning adderas till varandra, med möjlig föregående skalär multiplicering av det ena, så att termen motsvarande den aktuella ordningen elimineras från svaret. I detta fallet blir ordningen av svaret beroende av de ingående polynomen.



# FindSemiGroupFromPolynomialRing()

```
FindSemiGroupFromPolynomialRing := proc(
    PolynomialGenerators, Variable)
```

- 1 Algoritmen som beräknar semigruppen för en delring  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n] \subset \mathbb{C}[t]$  och returnerar dess generatorer. Den kan också returnera hur generatorerna härletts.

# FindSemiGroupFromPolynomialRing()

```
FindSemiGroupFromPolynomialRing := proc(
    PolynomialGenerators, Variable)
```

- ① Algoritm som beräknar semigruppen för en delring  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n] \subset \mathbb{C}[t]$  och returnerar dess generatorer. Den kan också returnera hur generatorerna härletts.
- ② Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/semigrupper.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw)

# FindSemiGroupFromPolynomialRing()

```
FindSemiGroupFromPolynomialRing := proc(
    PolynomialGenerators, Variable)
```

- ① Algoritm som beräknar semigruppen för en delring  $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_n] \subset \mathbb{C}[t]$  och returnerar dess generatorer. Den kan också returnera hur generatorerna härletts.
- ② Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/semigrupper.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw)
- ③ Text-version finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/Functions/FindSemiGroupFromPolynomialRing.txt](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindSemiGroupFromPolynomialRing.txt)

# Enkelt exempel

## Exempel

```
> FindSemiGroupFromPolynomialRing([t^4+t^5,  
    t^6+t^7],t,true,true);
```

$$p_1 = t^5 + t^4$$

$$p_2 = t^7 + t^6$$

$$p_1^3 - p_2^2 = t^{15} + 2t^{14} + t^{13}$$

$$[4, 6, 13]$$

```
> FindSemiGroup([4,6,13]);
```

$$[16, \{4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16\}]$$

# Implicit notation

## 3 Implicit notation

# Implicit notation

- ③ Implicit notation
  - ① Introduktion

# Implicit notation

- ③ Implicit notation
  - ① Introduktion
  - ② Sökalgoritm

# Implicit notation

## Definition

En **implicit ekvation** för en plan kurva  $C \subset \mathbb{C}^2$  är en ekvation av typen  $F(x, y) = 0$ , för en funktion  $F : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}$  sådan att funktionens nollställen precis motsvarar  $C$ .



# Implicit notation

## Definition

En **implicit ekvation** för en plan kurva  $C \subset \mathbb{C}^2$  är en ekvation av typen  $F(x, y) = 0$ , för en funktion  $F : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}$  sådan att funktionens nollställen precis motsvarar  $C$ .

Givet en algebraisk plan kurva, och en parametrisering till  $C$ :

$C(t) = (p_x(t), p_y(t))$  ska vi söka efter en funktion

$F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  sådan att  $F(p_x(t), p_y(t)) = 0, \forall t$ .

# Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

# Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

- 1 Bara två polynom som indata.

# Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

- 1 Bara två polynom som indata.
- 2 Maximal grad istf. maximal ordning.

# Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

- 1 Bara två polynom som indata.
- 2 Maximal grad istf. maximal ordning.
- 3 Sökning efter kombinationer som blir noll.

# Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

- 1 Bara två polynom som indata.
- 2 Maximal grad istf. maximal ordning.
- 3 Sökning efter kombinationer som blir noll.
- 4 Den kombination av lägst grad ger den bästa implicita ekvationen.

# Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

- 1 Bara två polynom som indata.
- 2 Maximal grad istf. maximal ordning.
- 3 Sökning efter kombinationer som blir noll.
- 4 Den kombination av lägst grad ger den bästa implicita ekvationen.
- 5  $F(x, y) = 0$  innehåller hela  $C(t)$ , per konstruktion.

# Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

- 1 Bara två polynom som indata.
- 2 Maximal grad istf. maximal ordning.
- 3 Sökning efter kombinationer som blir noll.
- 4 Den kombination av lägst grad ger den bästa implicita ekvationen.
- 5  $F(x, y) = 0$  innehåller hela  $C(t)$ , per konstruktion.
- 6  $F(x, y)$  är av minimal grad, så  $F(x, y)$  kan inte vara produkten av två polynom  $G(x, y) \cdot H(x, y)$ , där  $C(t)$  är nollställe till den ena, men inte den andra.



## FindImplicitNotation()

```
FindImplicitNotation := proc(Xp, Yp, Variable,  
    MaxDegree)
```

- 1 Algoritmen söker efter den implicita ekvationen till en parametriserad plan kurva.

## FindImplicitNotation()

```
FindImplicitNotation := proc(Xp, Yp, Variable,  
    MaxDegree)
```

- 1 Algoritmen söker efter den implicita ekvationen till en parametriserad plan kurva.
- 2 Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/implicit\\_notation.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/implicit_notation.mw)

## FindImplicitNotation()

```
FindImplicitNotation := proc(Xp, Yp, Variable,  
    MaxDegree)
```

- 1 Algoritmen som söker efter den implicita ekvationen till en parametriserad plan kurva.
- 2 Maple-kod finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/implicit\\_notation.mw](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/implicit_notation.mw)
- 3 Text-version finns i [https://github.com/PeterWaher/Algebraiska\\_kurvor/blob/master/Functions/FindImplicitNotation.txt](https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindImplicitNotation.txt)

# Elementärt första exempel

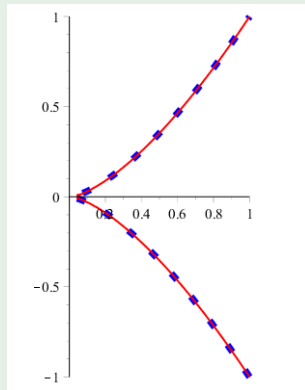
## Exempel

Följande exempel beräknar den implicita funktionen till kurvan  $C(t) = (t^2, t^3)$ :

```
> FindImplicitNotation(t^2,
    t^3, t, 30, true);
Elapsed Time: 0.000 s.
```

$$x^3 - y^2 = 0$$

Kurvan  $C(t)$  motsvaras alltså av  $x^3 - y^2 = 0$ .



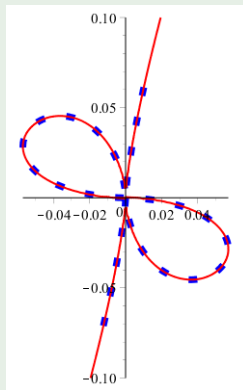
# Rosett

## Exempel

```
> FindImplicitNotation(
    t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,
    t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,
    t, 150, true);
```

Elapsed Time: 1.266 s.

$$x^9 - 9x^8y + 36x^7y^2 - 84x^6y^3 + 126x^5y^4 - 126x^4y^5 + 84x^3y^6 - 36x^2y^7 + 9xy^8 - y^9 + x^4y^3 = 0$$



# Multiplicitetsföljder

## 4 Multiplicitetsföljder

# Multiplicitetsföljder

- ④ Multiplicitetsföljder
  - ① Uppblåsningar

# Multiplicitetsföljder

- ④ Multiplicitetsföljder
  - ① Uppblåsningar
  - ② Multiplicitetsföljder



# Multiplicitetsföljder

- ④ Multiplicitetsföljder
  - ① Uppblåsningar
  - ② Multiplicitetsföljder
  - ③ Funktionsfamiljer

# Multiplicitetsföljder

- ④ Multiplicitetsföljder
  - ① Uppblåsningar
  - ② Multiplicitetsföljder
  - ③ Funktionsfamiljer
  - ④ Komplexitet















