Algoritmer och komplexitet inom kommutativ algebra & algebraisk geometri

Omparametrisering av kurvor, semigrupper, implicit notation & multiplicitetsföljder

Peter Waher

peterwaher@hotmail.com
https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor

$\mathfrak{L}_2$

18 november 2015

Outline

Outline

Outline

Outline

Plana algebraiska kurvor

Plana algebraiska kurvor
Introduktion

Vad är en plan kurva?

Definition

En **plan kurva** C är en delmängd i $\mathbb{C}^2$ sådan att det finns två kontinuerliga funktioner $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ och $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sådana att $C = \{(f(t), g(t)) : t \in \mathbb{C}\}$. (f, g) är en **parametrisering** av C. Om C kan parametriseras av två analytiska funktioner f och g kallas C **analytisk**. Om den kan parametriseras av två polynom kallas C för **algebraisk**. Om den kan parametriseras av två formella potensserier kallas C **algebroid**.

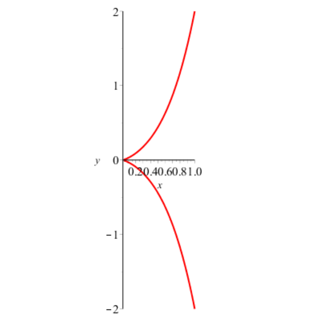
Kurvor i det Euklidiska planet

Traditionellt har man ofta studerat plana kurvor i det *Euklidiska planet*. I detta fall är kurvan parametriserad av reellvärda funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exempel

$$C(t) = (t^2, t^3 + t^7)$$

Not: För att förenkla notationen kan vi identifiera kurvan C med en viss parametrisering (f, g), även om parametriseringen inte är unik. Detta görs enklast genom att identifiera kurvan med funktionen $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $C(t) = (f(t), g(t))$. Notera dock att kurvan som sådan och en av dess parametriseringar är två olika objekt.



Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

1. Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:

Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

1. Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:
    1. Analytiska funktioner kan skrivas som formella potensserier kring den punkt vi studerar.

Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

1. Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:
    1. Analytiska funktioner kan skrivas som formella potensserier kring den punkt vi studerar.
    2. Formella potensserier kan approximeras av polynom med önskad noggrannhet.

Förenklingar

Förenklingar vi kan göra om vi studerar en plan kurva lokalt:

1. Tillräckligt att studera *algebraiska* kurvor:
    1. Analytiska funktioner kan skrivas som formella potensserier kring den punkt vi studerar.
    2. Formella potensserier kan approximeras av polynom med önskad noggrannhet.
2. Kurvan går genom *origo*: $C(0) = \mathbf{0}$

Reguljära och singulära kurvor

Definition

Om en kurva C har en parametrisering (f, g) sådan att $f'(0) \neq 0$ eller $g'(0) \neq 0$ kallas kurvan **reguljär**. Annars kallas kurvan **singulär**.

Not: Bara för att $f'(0) = 0$ och $g'(0) = 0$ i en parametrisering (f, g) av en kurva C, betyder inte det att kurvan är singulär. Det kan ju finnas en parametrisering av samma kurva där någon av derivatorna är nollskilda. Exempelvis är (t^3, t^3) och (t, t) två olika parametriseringar av samma kurva. I det första exemplet är derivatorna 0 i origo medan de i det andra exemplet båda är nollskilda.

Ordning och grad

Definition

Ordningen av ett polynom eller en potensserie $f(t) = \sum a_i t^i \neq 0$ är det minsta heltalet k sådant att koefficienten a_k är nollskild, och skrivs $\mathbf{o}(f)$. **Graden** for motsvarande polynom är det största heltalet k sådant att koefficienten a_k inte är noll, och skrivs $\deg(f)$.

Plana algebraiska kurvor

Plana algebraiska kurvor
Omparametrisering

Varför omparametrisera?

1. För utritande av kurvor spelar parametriseringen inte så stor roll.
2. Vill man beräkna $y(x) = g(f^{-1}(x))$ eller $x(y) = f(g^{-1}(y))$, står man genast inför en mängd problem.

Omparametrisering av kurvor

Sats

Om $C = C(t) = (f(t), g(t))$ är en komplex analytisk, algebroid eller algebraisk kurva, samt att $f(0) = g(0) = 0$, kan kurvan C omparametriseras på formen $C^*(t) = (\pm t^n, g^*(t))$ eller på formen $C^*(t) = (f^*(t), \pm t^n)$ i ett område kring $t = 0$, där $f(t)$ och $g(t)$ är formella potensserier. Dessutom gäller att $\mathbf{o}(f^*) \geq n$ eller att $\mathbf{o}(g^*) \geq n$. Om $f(t)$ och $g(t)$ är reellvärda, kan också omparametriseringen göras reellvärd.

Not: Från *Weierstrass Preparation Theorem* kan man få att en sådan omparametrisering existerar. Dock presenteras inte en metod över hur en sådan omparametrisering kan tas fram.

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

2. Vi väljer $\phi(t)$ sådan att:

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

2. Vi väljer $\phi(t)$ sådan att:
    1. Analytisk kring $t = 0$.

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

2. Vi väljer $\phi(t)$ sådan att:
    1. Analytisk kring $t = 0$.
    2. $\phi(0) = 0$

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

2. Vi väljer $\phi(t)$ sådan att:
   1. Analytisk kring $t = 0$.
   2. $\phi(0) = 0$
   3. $\mathbf{o}(\phi) = 1 \Longrightarrow \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

2. Vi väljer $\phi(t)$ sådan att:
   1. Analytisk kring $t = 0$.
   2. $\phi(0) = 0$
   3. $\mathbf{o}(\phi) = 1 \implies \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$
   4. $\phi(t), f(t), g(t)$ reellvärda $\implies C^*(t)$ reellvärd.

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

2. Vi väljer $\phi(t)$ sådan att:
    1. Analytisk kring $t = 0$.
    2. $\phi(0) = 0$
    3. $\mathbf{o}(\phi) = 1 \implies \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$
    4. $\phi(t), f(t), g(t)$ reellvärda $\implies C^*(t)$ reellvärd.
3. Med början i a_1 (som har n lösningar), löses koefficienterna a_i ut ur $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$ för att uppfylla ovanstående.

Översikt bevis

Beviset av satsen går igenom följande steg:

1. Vi skapar en omparametrisering via komposition med $\phi(t)$:

$$C^*(t) = (f^*(t), g^*(t)) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

2. Vi väljer $\phi(t)$ sådan att:
    1. Analytisk kring $t = 0$.
    2. $\phi(0) = 0$
    3. $\mathbf{o}(\phi) = 1 \implies \mathbf{o}(f(\phi)) = \mathbf{o}(f) \wedge \mathbf{o}(g(\phi)) = \mathbf{o}(g)$
    4. $\phi(t), f(t), g(t)$ reellvärda $\implies C^*(t)$ reellvärd.
3. Med början i a_1 (som har n lösningar), löses koefficienterna a_i ut ur $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$ för att uppfylla ovanstående.
4. Finns precis en lösning i det generella fallet som uppfyller ovanstående, samt satsens, krav. □

Reparametrize()

```
Reparametrize := proc(x, y, Variable, t0 , MaxDegree,
    Branch, AllowNegation)
```

1. Algoritm som omparametriserar en algebraisk kurva med given noggrannhet.

Reparametrize()

```
Reparametrize := proc(x, y, Variable, t0 , MaxDegree,
    Branch, AllowNegation)
```

1. Algoritm som omparametriserar en algebraisk kurva med given noggrannhet.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/kurvor.mw`

Reparametrize()

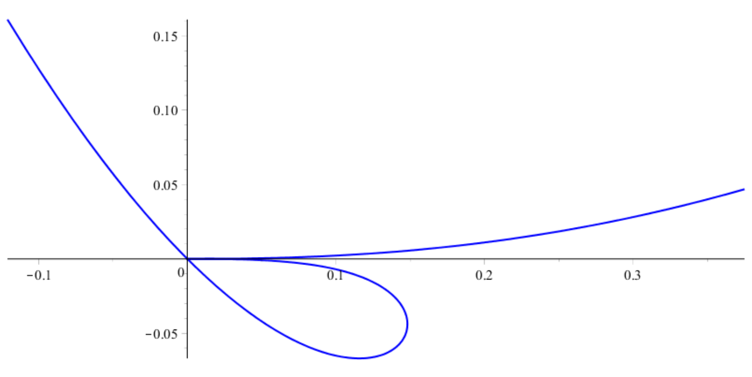
```
Reparametrize := proc(x, y, Variable, t0 , MaxDegree,
    Branch, AllowNegation)
```

1. Algoritm som omparametriserar en algebraisk kurva med given noggrannhet.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/kurvor.mw`
3. Text-version finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/Reparametrize.txt`

Reparametrize - exempel 1 (1/4)

Exempel

Kurvan $(t^2 + t^3, t^5 + t^6)$ har en singularitet i $t = 0$. Dessutom passerar kurvan genom origo då $t = -1$.



Reparametrize - exempel 1 (2/4)

Exempel

Först ber vi Maple att parametrisera om kurvan kring $t = 0$:

```
> Reparametrize(t^3+t^2,t^6+t^5,t,0,10,0,false);

Elapsed Time: 0.016 s.
```

$$\left[t^2, t^5 - 3/2\, t^6 + \frac{21\, t^7}{8} - 5\, t^8 + \frac{1287\, t^9}{128} - 21\, t^{10}\right]$$

Reparametrize - exempel 1 (3/4)

Exempel

Därefter vill vi ha en omparametrisering kring $t = -1$:

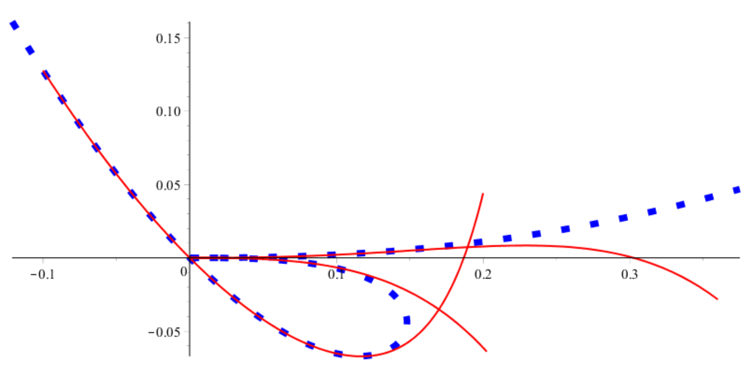
```
> Reparametrize(t^3+t^2, t^6+t^5, t, -1, 10,
    0, false);

Elapsed Time: 0.016 s.
```

$$\left[t, 163438\,t^{10} + 29070\,t^9 + 5304\,t^8 + 1001\,t^7 + 198\,t^6 + 42\,t^5 + \right.$$
$$\left. + 10\,t^4 + 3\,t^3 + 3\,t^2 - t\right]$$

Reparametrize - exempel 1 (4/4)

Exempel

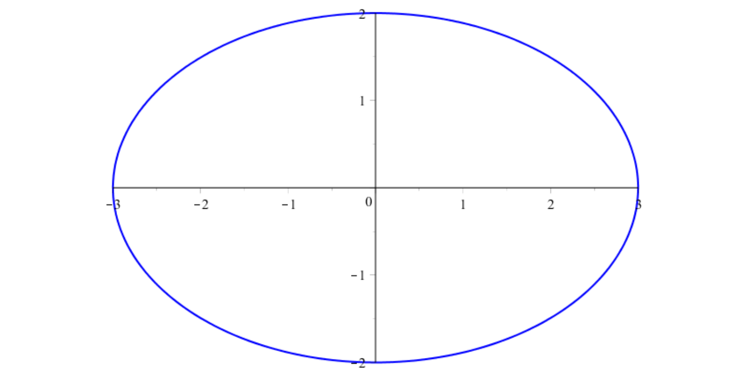
Nedan kurvan $C(t) = (t^2 + t^3, t^5 + t^6)$, med omparametriseringarna kring $t = 0$ och $t = -1$.



Reparametrize - exempel 2 (1/6)

Exempel

Ellipsen $(3\sin(t), 2\cos(t))$ är reguljär, men vi kan parametrisera om kurvan ändå för att illustrera axelbyte.



Reparametrize - exempel 2 (2/6)

Exempel

Första omparametriseringen gör vi kring $t = 0$:

```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,0,10,0,false);

Elapsed Time: 0.015 s.
```

$$\left[t, 2 - 1/9\,t^2 - \frac{t^4}{324} - \frac{t^6}{5832} - \frac{5\,t^8}{419904} - \frac{7\,t^{10}}{7558272}\right]$$

Reparametrize - exempel 2 (3/6)

Exempel

Andra omparametriseringen gör vi kring $t = \pi$:

```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,Pi,10,0,false);

Elapsed Time: 0.016 s.
```

$$\left[t, -2 + 1/9\, t^2 + \frac{t^4}{324} + \frac{t^6}{5832} + \frac{5\, t^8}{419904} + \frac{7\, t^{10}}{7558272}\right]$$

Reparametrize - exempel 2 (4/6)

Exempel

Tredje omparametriseringen gör vi kring $t = \frac{\pi}{2}$. Notera hur omparametriseringarna skiljer från $t = 0$ och $t = \pi$, jämfört med $t = \pm\frac{\pi}{2}$:

```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,(1/2)*Pi,
    10,0,false);

Elapsed Time: 0.016 s.
```

$$\left[3 - 3/8\,t^2 - \frac{3\,t^4}{128} - \frac{3\,t^6}{1024} - \frac{15\,t^8}{32768} - \frac{21\,t^{10}}{262144}, t\right]$$

Reparametrize - exempel 2 (5/6)

Exempel

Fjärde omparametriseringen gör vi kring $t = -\frac{\pi}{2}$:

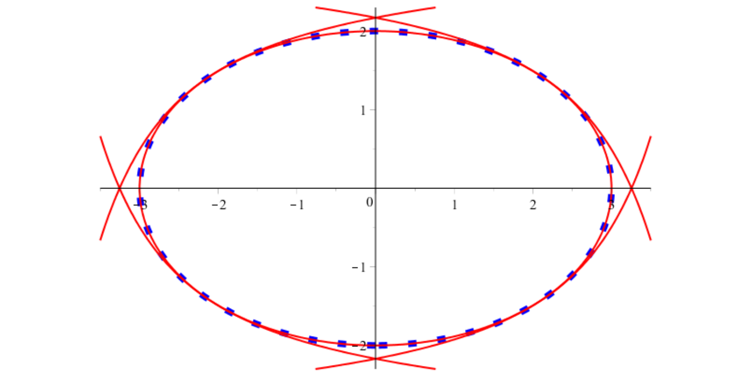
```
> Reparametrize(3*sin(t),2*cos(t),t,-(1/2)*Pi,
    10,0,false);

Elapsed Time: 0.015 s.
```

$$\left[-3 + 3/8\,t^2 + \frac{3\,t^4}{128} + \frac{3\,t^6}{1024} + \frac{15\,t^8}{32768} + \frac{21\,t^{10}}{262144}, t\right]$$

Reparametrize - exempel 2 (6/6)

Exempel

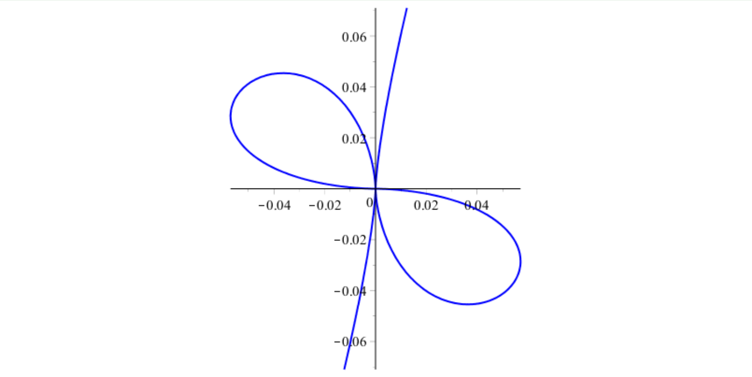
Nedan kurvan $C(t) = (3\sin(t), 2\cos(t))$, med de fyra omparametriseringarna kring $t = 0$, $t = \pi$ och $t = \pm\frac{\pi}{2}$:



Reparametrize - exempel 3 (1/5)

Exempel

Kurvan $\left(t^3(t-1)^3(t+1)^3, t^5(t-1)^2(t+1)^2\right)$ har singulariteter i $t = 0, 1, -1$ av ordningar 2, 1, 1 respektive.



Reparametrize - exempel 3 (2/5)

Exempel

Vi analyserar hur omparametriseringarna uppför sig i dessa tre singulariteter. Första omparametriseringen gör vi kring $t = 0$:

```
> Reparametrize(t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,
    t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,t,0,15,0, false);

Elapsed Time: 0.031 s.
```

$$\left[t^3, -1428\,t^{15} - 273\,t^{13} - 55\,t^{11} - 12\,t^9 - 3\,t^7 - t^5\right]$$

Reparametrize - exempel 3 (3/5)

Exempel

Därefter kring $t = 1$:

```
> Reparametrize(t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,
    t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,t,1,15,0,false);

Elapsed Time: 0.063 s.
```

$$\Big[1/2\sqrt{4}t^3 - 9/4\,t^4 + \frac{207\sqrt{4}t^5}{64} - 21\,t^6 + \frac{150183\sqrt{4}t^7}{4096} - \frac{137655\,t^8}{512} + \frac{66893079\sqrt{4}t^9}{131072} - 3978\,t^{10} + \frac{132735945771\sqrt{4}t^{11}}{16777216} - \frac{8385901667\,t^{12}}{131072} + \frac{70379121262905\sqrt{4}t^{13}}{536870912} - \frac{4345965\,t^{14}}{4} + \frac{78087826643607459\sqrt{4}t^{15}}{34359738368}, t^2\Big]$$

Reparametrize - exempel 3 (4/5)

Exempel

Och sist kring $t = -1$:

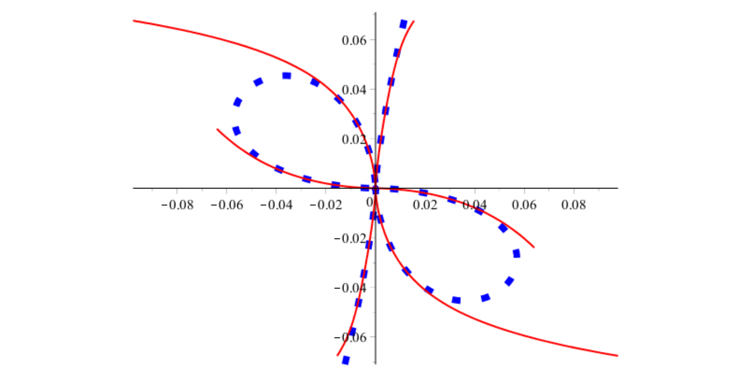
```
> Reparametrize(t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,
    t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,t,-1,15,0,true);

Elapsed Time: 0.047 s.
```

$$\left[1/2\sqrt{4}t^3 + 9/4\,t^4 + \frac{207\sqrt{4}t^5}{64} + 21\,t^6 + \frac{150183\sqrt{4}t^7}{4096} + \frac{137655\,t^8}{512} + \frac{66893079\sqrt{4}t^9}{131072} + 3978\,t^{10} + \frac{132735945771\sqrt{4}t^{11}}{16777216} + \frac{8385901667\,t^{12}}{131072} + \frac{70379121262905\sqrt{4}t^{13}}{536870912} + \frac{4345965\,t^{14}}{4} + \frac{78087826643607459\sqrt{4}t^{15}}{34359738368}, -t^2\right]$$

Reparametrize - exempel 3 (5/5)

Exempel

Ritar vi sedan ut originalparametriseringen av kurvan tillsammans med de tre omparametriseringarna får vi följande intressanta bild:



Plana algebraiska kurvor

Semigrupper
Introduktion

Modulär aritmetik

Definition

Heltalen $m \in \mathbb{Z}^+$ och $n \in \mathbb{Z}^+$ sägs vara **relativt prima** om $m \geq 2$, $n \geq 2$ samt $p \mid m \wedge p \mid n \Longrightarrow p = 1$.

Modulär aritmetik

Definition

Heltalen $m \in \mathbb{Z}^+$ och $n \in \mathbb{Z}^+$ sägs vara **relativt prima** om $m \geq 2$, $n \geq 2$ samt $p \mid m \wedge p \mid n \implies p = 1$.

Lemma

Om m och n är relativt prima och $0 < a < m$ gäller att $[a \cdot n]_m \neq 0$.

Modulär aritmetik

Definition

Heltalen $m \in \mathbb{Z}^+$ och $n \in \mathbb{Z}^+$ sägs vara **relativt prima** om $m \geq 2$, $n \geq 2$ samt $p \mid m \wedge p \mid n \Longrightarrow p = 1$.

Lemma

Om m och n är relativt prima och $0 < a < m$ gäller att $[a \cdot n]_m \neq 0$.

Lemma

Om m och n är relativt prima och $0 < a, b < m$ gäller:

$$[a \cdot n]_m = [b \cdot n]_m \Longleftrightarrow a = b$$

Semigrupper

Definition

För en **semigrupp** G, med den implicit definierade binära operatorn $+$ gäller:

$$a \in G \wedge b \in G \Longrightarrow (a+b) \in G$$

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Generatorer av semigrupp

Definition

En serie tal $n_1, \ldots, n_k$ **genererar** semigruppen G om

$$G = \left\{ \sum_{a_i \neq 0} a_i \cdot n_i : a_i \in \mathbb{N}, \text{ inte alla } a_i = 0 \right\}$$

Detta skrivs även $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$.

Not: Notera att med multiplikation med ett positivt heltal inom en semigrupp avses repetitiv användning av additionsoperatorn.

Konduktören för $\langle m, n \rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n \rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c - 1$.

Konduktören för $\langle m, n \rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n \rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c-1$.

Översikt av bevis:

Konduktören för $\langle m, n \rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n \rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c - 1$.

Översikt av bevis:

1. $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$.

Konduktören för $\langle m, n \rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n \rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c - 1$.

Översikt av bevis:

1. $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$.
2. Antag att $m < n$.

Konduktören för $\langle m, n \rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n \rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c - 1$.

Översikt av bevis:

1. $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$.
2. Antag att $m < n$.
3. Uppdelning av $\mathbb{N}$ i segment om m tal vardera.

Konduktören för $\langle m, n\rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n\rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c-1$.

Översikt av bevis:

1. $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$.
2. Antag att $m < n$.
3. Uppdelning av $\mathbb{N}$ i segment om m tal vardera.
4. Stryk alla tal i $[0]_m$, därefter $[n]_m$, $[2n]_m$, $\ldots$, $[(m-1)n]_m$.

Konduktören för $\langle m, n \rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n \rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c - 1$.

Översikt av bevis:

1. $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$.
2. Antag att $m < n$.
3. Uppdelning av $\mathbb{N}$ i segment om m tal vardera.
4. Stryk alla tal i $[0]_m$, därefter $[n]_m$, $[2n]_m$, $\ldots$, $[(m-1)n]_m$.
5. Alla tal större än eller lika med $(m-1)n$ ur $\mathbb{N}$

Konduktören för $\langle m, n \rangle$ (m, n relativt prima)

Sats

Om m och n är relativt prima innehåller semigruppen $G = \langle m, n \rangle$ alla tal större än eller lika med $c = (m-1)(n-1)$, men inte talet $c - 1$.

Översikt av bevis:

1. $\mathbb{Z}_m = \langle [n]_m \rangle$.
2. Antag att $m < n$.
3. Uppdelning av $\mathbb{N}$ i segment om m tal vardera.
4. Stryk alla tal i $[0]_m$, därefter $[n]_m$, $[2n]_m$, $\ldots$, $[(m-1)n]_m$.
5. Alla tal större än eller lika med $(m-1)n$ ur $\mathbb{N}$
6. Det högsta ostrukna talet, är således $(m-1)n - m$. $\square$

Numerisk semigrupp

Definition

En **numerisk semigrupp** G är en speciell form av semigrupp, där även följande villkor gäller:

$$\begin{aligned} G &\subseteq \mathbb{N} \\ \|\mathbb{N} \setminus G\| &< \infty \end{aligned}$$

Numerisk semigrupp

Definition

En **numerisk semigrupp** G är en speciell form av semigrupp, där även följande villkor gäller:

$$\begin{aligned} G &\subseteq \mathbb{N} \\ \|\mathbb{N} \setminus G\| &< \infty \end{aligned}$$

Lemma

$G = \langle m, n \rangle$ där m och n är relativt prima, är en numerisk semigrupp.

Konduktör

Definition

I varje numerisk semigrupp G finns det ett tal c_G sådant att följande villkor uppfylls:

$$\begin{array}{rcl} c_G & \in & G \\ n > c_G & \Longrightarrow & n \in G \\ c_G - 1 & \notin & G \end{array}$$

c_G kallas för **konduktören** för G.

Konduktör

Definition

I varje numerisk semigrupp G finns det ett tal c_G sådant att följande villkor uppfylls:

$$\begin{array}{rcl} c_G & \in & G \\ n > c_G & \Longrightarrow & n \in G \\ c_G - 1 & \notin & G \end{array}$$

c_G kallas för **konduktören** för G.

$c = (m-1)(n-1)$ där m och n är relativt prima, är konduktör för den numeriska semigruppen $G = \langle m, n \rangle$.

$\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$

Sats

Om semigruppen $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$.

$\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$

Sats

Om semigruppen $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$.

Översikt av trivialt bevis:

$\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$

Sats

Om semigruppen $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ *är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen* $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$.

Översikt av trivialt bevis:

1. $\gcd(G) = \gcd(n_1, \ldots, n_k) = d$.

$\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$

Sats

Om semigruppen $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ är numerisk så är den största gemensamma delaren av talen $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$.

Översikt av trivialt bevis:

1. $\gcd(G) = \gcd(n_1, \ldots, n_k) = d$.
2. $d > 1 \Longrightarrow \|\mathbb{N} \setminus G\| = \infty$ $\square$

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Översikt av bevis:

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Översikt av bevis:

1. Ändlig mängd tal i G som genererar semigruppen.

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Översikt av bevis:

1. Ändlig mängd tal i G som genererar semigruppen.
2. $\widehat{M}$ mängden av alla ändliga mängder av generatorer.

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Översikt av bevis:

1. Ändlig mängd tal i G som genererar semigruppen.
2. $\widehat{M}$ mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
3. $\widehat{M}' = \{\|M\| : M \in \widehat{M}\}$

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Översikt av bevis:

1. Ändlig mängd tal i G som genererar semigruppen.
2. $\widehat{M}$ mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
3. $\widehat{M}' = \{\|M\| : M \in \widehat{M}\}$
4. $k = \inf \widehat{M}'$ existerar.

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Översikt av bevis:

1. Ändlig mängd tal i G som genererar semigruppen.
2. $\widehat{M}$ mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
3. $\widehat{M}' = \{\|M\| : M \in \widehat{M}\}$
4. $k = \inf \widehat{M}'$ existerar.
5. $\exists M_- \in \widehat{M} : \|M_-\| = k$

Minimalt generatorsystem

Sats

För varje numerisk semigrupp G finns ett minimalt generatorsystem $n_1, \ldots, n_k$, sådant att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Detta system är unikt för G.

Översikt av bevis:

1. Ändlig mängd tal i G som genererar semigruppen.
2. $\widehat{M}$ mängden av alla ändliga mängder av generatorer.
3. $\widehat{M}' = \{\|M\| : M \in \widehat{M}\}$
4. $k = \inf \widehat{M}'$ existerar.
5. $\exists M_- \in \widehat{M} : \|M_-\| = k$
6. $N_- \in \widehat{M} \wedge \|N_-\| = k \Longrightarrow N_- = M_-$ $\square$

Plana algebraiska kurvor

Semigrupper
Konduktören

$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle\{n_i\}\rangle$ numerisk

Sats

Om $n_1, \ldots, n_k$ är heltal sådana att $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ så gäller att $G = \langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ är en numerisk semigrupp.

$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle\{n_i\}\rangle$ numerisk

Sats

Om $n_1, \ldots, n_k$ är heltal sådana att $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ så gäller att $G = \langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

1. Anta $n_1 < \ldots < n_k$

$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle\{n_i\}\rangle$ numerisk

Sats

Om $n_1, \ldots, n_k$ är heltal sådana att $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ så gäller att $G = \langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

1. Anta $n_1 < \ldots < n_k$
2. $\left\langle [n_2]_{n_1}, \ldots, [n_k]_{n_1} \right\rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$

$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle\{n_i\}\rangle$ numerisk

Sats

Om $n_1, \ldots, n_k$ är heltal sådana att $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ så gäller att $G = \langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

1. Anta $n_1 < \ldots < n_k$
2. $\left\langle [n_2]_{n_1}, \ldots, [n_k]_{n_1} \right\rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
3. $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \leq b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$

$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle\{n_i\}\rangle$ numerisk

Sats

Om $n_1, \ldots, n_k$ är heltal sådana att $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ så gäller att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

1. Anta $n_1 < \ldots < n_k$
2. $\left\langle [n_2]_{n_1}, \ldots, [n_k]_{n_1} \right\rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
3. $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \leq b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
4. $b_j = \sum_{i=2}^{k} b_{i,j} \cdot n_i \in G, [b_j]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$

$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle\{n_i\}\rangle$ numerisk

Sats

Om $n_1, \ldots, n_k$ är heltal sådana att $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ så gäller att $G = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

1. Anta $n_1 < \ldots < n_k$
2. $\left\langle [n_2]_{n_1}, \ldots, [n_k]_{n_1} \right\rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
3. $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \leq b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
4. $b_j = \sum_{i=2}^{k} b_{i,j} \cdot n_i \in G, [b_j]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
5. $0 \leq b_j < n_1 \sum_{i=2}^{k} n_i \leq (k-1) n_1 n_k = B$

$\gcd(\{n_i\}) = 1 \implies \langle\{n_i\}\rangle$ numerisk

Sats

Om $n_1, \ldots, n_k$ är heltal sådana att $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ så gäller att $G = \langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ är en numerisk semigrupp.

Översikt av bevis:

1. Anta $n_1 < \ldots < n_k$
2. $\left\langle [n_2]_{n_1}, \ldots, [n_k]_{n_1} \right\rangle = \mathbb{Z}_{n_1}$
3. $[a_j]_{n_1} \in \mathbb{Z}_{n_1} \implies \exists \{b_{i,j}\}, 0 \le b_{i,j} < n_1 : \sum b_{i,j} \cdot [n_i]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
4. $b_j = \sum_{i=2}^{k} b_{i,j} \cdot n_i \in G, [b_j]_{n_1} = [a_j]_{n_1}$
5. $0 \le b_j < n_1 \sum_{i=2}^{k} n_i \le (k-1) n_1 n_k = B$
6. $S_B = \{m \cdot n_1, \ldots, (m+1) \cdot n_1 - 1\} \subset G$, där $m \cdot n_1 \ge B$ $\square$

FindConductor()

```
FindConductor := proc(Generators)
```

1. Algoritm som beräknar konduktören för en numerisk semigrupp givet dess generatorer.

FindConductor()

```
FindConductor := proc(Generators)
```

1. Algoritm som beräknar konduktören för en numerisk semigrupp givet dess generatorer.
2. Maple-kod finns i https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw

FindConductor()

```
FindConductor := proc(Generators)
```

1. Algoritm som beräknar konduktören för en numerisk semigrupp givet dess generatorer.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw`
3. Text-version finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindConductor.txt`

Generalisering möjlig?

Exempel

Vi beräknar konduktören för
$\langle 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7 \rangle = \langle 30, 42, 70, 105 \rangle$:

```
> FindConductor([2*3*5,2*3*7,2*5*7,3*5*7]);

Elapsed Time: 0.000 s.
```

$$384$$

Konduktören blir i detta exempel $384 = 2^7 \cdot 3$. Som man kan se i detta exempel verkar det inte finnas någon enkel självklar generalisering av formeln för konduktören av $\langle m, n \rangle$, då m och n är relativt prima ($c = (m-1)(n-1)$).

Stor semigrupp

Exempel

I följande exempel illustreras fördelen med att beräkningen av konduktören genomförs utan att motsvarande semigrupp genereras:

```
> FindConductor([2139,2398,3321]);

Elapsed Time: 8.062 s.
```

$$277188$$

Konduktören för $\langle 2139, 2398, 3321 \rangle$ är alltså 277188, dvs. lite mer än 129 ggr större än den minsta generatorn (2139). Beräkningen av motsvarande semigrupp kommer att ta betydligt mer tid (326.313 s). Utskriften av semigruppen kan också krascha Maple (vilket den gjorde i mitt fall).

FindSemiGroup()

```
FindSemiGroup := proc(Generators)
```

1. Algoritm som genererar semigruppen och dess konduktör, givet dess generatorer.

FindSemiGroup()

`FindSemiGroup := proc(Generators)`

1. Algoritm som genererar semigruppen och dess konduktör, givet dess generatorer.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw`

FindSemiGroup()

`FindSemiGroup := proc(Generators)`

1. Algoritm som genererar semigruppen och dess konduktör, givet dess generatorer.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw`
3. Text-version finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindSemiGroup.txt`

Enkel semigrupp

Exempel

Det första exemplet beräknar $\langle 15, 10, 6\rangle$:

```
> FindSemiGroup([15,10,6]);

Elapsed Time: 0.000 s.
```

$$[30, \{6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}]$$

Vi får att konduktören är 30 och att

$$\langle 15, 10, 6\rangle = \{6, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, \ldots\}$$

där "..." betyder "alla heltal som kommer därefter".

Plana algebraiska kurvor

Semigrupper

Polynomringen $\mathbb{C}[t]$ och dess delringar

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Exempel

Gäller inte generellt. $x \cdot \mathbb{C}[x, y]$ har inte ett ändligt antal generatorer:

$$xy^2 \notin \mathbb{C}[x, xy]$$
$$xy^3 \notin \mathbb{C}[x, xy, xy^2]$$
$$xy^4 \notin \mathbb{C}[x, xy, xy^2, xy^3]$$
$$\ldots$$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (1/4)

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (1/4)

1. p_1 bland de polynom i S av lägst grad.

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (1/4)

1. p_1 bland de polynom i S av lägst grad.
2. p_{i+1} väljs bland $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \dots, p_i]$ av lägst grad.

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (1/4)

1. p_1 bland de polynom i S av lägst grad.
2. p_{i+1} väljs bland $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_i]$ av lägst grad.
3. $\deg(p_{i+1}) > \deg(p_i)$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (1/4)

1. p_1 bland de polynom i S av lägst grad.
2. p_{i+1} väljs bland $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_i]$ av lägst grad.
3. $\deg(p_{i+1}) > \deg(p_i)$
4. $S_1 = \mathbb{C}[p_1] \subsetneq \ldots \subsetneq S_n = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n] \subsetneq \ldots \subseteq S \subset \mathbb{C}[t]$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (1/4)

1. p_1 bland de polynom i S av lägst grad.
2. p_{i+1} väljs bland $S \setminus \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_i]$ av lägst grad.
3. $\deg(p_{i+1}) > \deg(p_i)$
4. $S_1 = \mathbb{C}[p_1] \subsetneq \ldots \subsetneq S_n = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n] \subsetneq \ldots \subseteq S \subset \mathbb{C}[t]$
5. $I_i = \deg(S_i) \Longrightarrow I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_i \subsetneq \ldots \subseteq \mathbb{N}$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (2/4)

6. $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$, där $m = \deg(p_1)$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (2/4)

6. $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$, där $m = \deg(p_1)$
7. $\bar{I}_1 \subseteq \ldots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{Z}_m$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (2/4)

6. $\overline{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$, där $m = \deg(p_1)$
7. $\overline{I}_1 \subseteq \ldots \subseteq \overline{I}_i \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{Z}_m$
8. $\exists N : \overline{I}_i = \overline{I}_N, \forall i \geq N$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (2/4)

6. $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$, där $m = \deg(p_1)$
7. $\bar{I}_1 \subseteq \ldots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{Z}_m$
8. $\exists N : \bar{I}_i = \bar{I}_N, \forall i \geq N$
9. $Q_i = \{q \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_N] : \deg(q) \equiv i \mod m\}$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (2/4)

6. $\bar{I}_i = \{[d]_m : d \in I_i\} \subseteq \mathbb{Z}_m$, där $m = \deg(p_1)$
7. $\bar{I}_1 \subseteq \ldots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{Z}_m$
8. $\exists N : \bar{I}_i = \bar{I}_N, \forall i \geq N$
9. $Q_i = \{q \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_N] : \deg(q) \equiv i \mod m\}$
10. $\forall [i]_m \in \bar{I}_N, 0 \leq i < m : Q_i \neq \emptyset$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (3/4)

11. $\deg(Q_i) \subset \mathbb{N} \Longrightarrow \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (3/4)

11. $\deg(Q_i) \subset \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
12. $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$ ledande koefficient 1.

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (3/4)

11. $\deg(Q_i) \subset \mathbb{N} \Longrightarrow \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
12. $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$ ledande koefficient 1.
13. $n_i \in \mathbb{N} : \deg(q_i) = i + n_i \cdot m$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (3/4)

11. $\deg(Q_i) \subset \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
12. $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$ ledande koefficient 1.
13. $n_i \in \mathbb{N} : \deg(q_i) = i + n_i \cdot m$
14. Godtyckligt $f \in S$.

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (3/4)

11. $\deg(Q_i) \subset \mathbb{N} \implies \exists d_i = \min(\deg(Q_i))$
12. $q_i \in Q_i : \deg(q_i) = d_i \wedge$ ledande koefficient 1.
13. $n_i \in \mathbb{N} : \deg(q_i) = i + n_i \cdot m$
14. Godtyckligt $f \in S$.
15. $\deg(f) \in \bar{I}_N \implies \exists [j]_m \in \bar{I}_N, 0 \leq j < m : \deg(f) \equiv j \mod m$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (4/4)

16. $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1,\ldots,p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (4/4)

16. $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
17. $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1,\ldots,p_N] \subset S$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (4/4)

16. $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
17. $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_N] \subset S$
18. $f - f_0 \in S \wedge \deg(f - f_0) < \deg(f)$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (4/4)

16. $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
17. $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_N] \subset S$
18. $f - f_0 \in S \wedge \deg(f - f_0) < \deg(f)$
19. $f_0, \ldots, f_l \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_N]$

Delringar till $\mathbb{C}[t]$

Sats

För varje icketrivial delring $S \subset \mathbb{C}[t]$, sluten under skalär multiplikation, finns ett ändligt antal polynom $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}[t]$ som genererar S, dvs. $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$.

Översikt motsatsbevis: (4/4)

16. $\exists k \in \mathbb{N} : k \geq n_j \wedge \deg(f) = j + k \cdot m = j + n_j \cdot m + m \cdot (k - n_j) = \deg(q_j) + \deg(p_1^{k-n_j}) = \deg(q_j \cdot p_1^{k-n_j})$
17. $f_0 = a_0 \cdot q_j \cdot p_1^{k-n_j} \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_N] \subset S$
18. $f - f_0 \in S \wedge \deg(f - f_0) < \deg(f)$
19. $f_0, \ldots, f_l \in \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_N]$
20. $\deg(f) > \deg(f - f_0) > \ldots > \deg(f - \sum f_j)$ $\square$

Plana algebraiska kurvor

Semigrupper

Semigrupper för $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$

Semigruppen av ordningar

Betrakta $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$, där $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$:

Semigruppen av ordningar

Betrakta $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$, där $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$:

1. G_S är en semigrupp.

Semigruppen av ordningar

Betrakta $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$, där $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$:

1. G_S är en semigrupp.
2. G_S kan vara större än $\langle \mathbf{o}(p_1), \ldots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

Semigruppen av ordningar

Betrakta $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \land p \neq 0\}$, där $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$:

1. G_S är en semigrupp.
2. G_S kan vara större än $\langle \mathbf{o}(p_1), \ldots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

Exempel

1. $S = \mathbb{C}[t^2, t^4 + t^5]$

Semigruppen av ordningar

Betrakta $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$, där $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$:

1. G_S är en semigrupp.
2. G_S kan vara större än $\langle \mathbf{o}(p_1), \ldots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

Exempel

1. $S = \mathbb{C}[t^2, t^4 + t^5]$
2. $(t^4 + t^5) - (t^2)^2 = t^5 \in S \Longrightarrow 5 \in G_S$

Semigruppen av ordningar

Betrakta $G_S = \mathbf{o}(S) = \{\mathbf{o}(p), p \in S \wedge p \neq 0\}$, där $S = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$:

1. G_S är en semigrupp.
2. G_S kan vara större än $\langle \mathbf{o}(p_1), \ldots, \mathbf{o}(p_n) \rangle$

Exempel

1. $S = \mathbb{C}[t^2, t^4 + t^5]$
2. $(t^4 + t^5) - (t^2)^2 = t^5 \in S \Longrightarrow 5 \in G_S$
3. $\langle \mathbf{o}(p_1), \mathbf{o}(p_2) \rangle = \langle 2 \rangle \subset \langle 2, 5 \rangle = \{2, 4, 5, 6, \ldots\} = G_S$

Sökning efter polynom

För att beräkna vilka tal som finns i G_S behöver vi systematiskt gå igenom de möjligheter vi har att kombinera nya polynom från generatorerna $\{p_i\}$. Polynom som kan generera polynom av nya ordningar, och som inte är kända sedan tidigare, kan göras på två sätt:

Sökning efter polynom

För att beräkna vilka tal som finns i G_S behöver vi systematiskt gå igenom de möjligheter vi har att kombinera nya polynom från generatorerna $\{p_i\}$. Polynom som kan generera polynom av nya ordningar, och som inte är kända sedan tidigare, kan göras på två sätt:

1. Antingen genom att två kända polynom multipliceras med varandra. I detta fallet blir ordningen av det nya polynomet summan av ordningarna för de individuella polynomen.

Sökning efter polynom

För att beräkna vilka tal som finns i G_S behöver vi systematiskt gå igenom de möjligheter vi har att kombinera nya polynom från generatorerna $\{p_i\}$. Polynom som kan generera polynom av nya ordningar, och som inte är kända sedan tidigare, kan göras på två sätt:

1. Antingen genom att två kända polynom multipliceras med varandra. I detta fallet blir ordningen av det nya polynomet summan av ordningarna för de individuella polynomen.
2. Alternativt kan två kända polynom av samma ordning adderas till varandra, med möjlig föregående skalär multiplicering av det ena, så att termen motsvarande den aktuella ordningen elimineras från svaret. I detta fallet blir ordningen av svaret beroende av de ingående polynomen.

FindSemiGroupFromPolynomialRing()

```
FindSemiGroupFromPolynomialRing := proc(
    PolynomialGenerators,Variable)
```

1. Algoritm som beräknar semigruppen för en delring $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n] \subset \mathbb{C}[t]$ och returnerar dess generatorer. Den kan också returnera hur generatorerna härletts.

FindSemiGroupFromPolynomialRing()

```
FindSemiGroupFromPolynomialRing := proc(
    PolynomialGenerators,Variable)
```

1. Algoritm som beräknar semigruppen för en delring $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n] \subset \mathbb{C}[t]$ och returnerar dess generatorer. Den kan också returnera hur generatorerna härletts.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw`

FindSemiGroupFromPolynomialRing()

```
FindSemiGroupFromPolynomialRing := proc(
    PolynomialGenerators,Variable)
```

1. Algoritm som beräknar semigruppen för en delring $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n] \subset \mathbb{C}[t]$ och returnerar dess generatorer. Den kan också returnera hur generatorerna härletts.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/semigrupper.mw`
3. Text-version finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindSemiGroupFromPolynomialRing.txt`

Enkelt exempel

Exempel

```
> FindSemiGroupFromPolynomialRing([t^4+t^5,
    t^6+t^7],t,true,true);
```

$$p_1 = t^5 + t^4$$
$$p_2 = t^7 + t^6$$
$$p_1^3 - p_2^2 = t^{15} + 2t^{14} + t^{13}$$

$$[4, 6, 13]$$

```
> FindSemiGroup([4,6,13]);
```

$$[16, \{4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16\}]$$

Plana algebraiska kurvor

Implicit notation

Implicit notation

Definition

En **implicit ekvation** for en plan kurva $C \subset \mathbb{C}^2$ är en ekvation av typen $F(x, y) = 0$, för en funktion $F : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}$ sådan att funktionens nollställen precis motsvarar C.

Implicit notation

Definition

En **implicit ekvation** for en plan kurva $C \subset \mathbb{C}^2$ är en ekvation av typen $F(x,y) = 0$, för en funktion $F : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}$ sådan att funktionens nollställen precis motsvarar C.

Givet en algebraisk plan kurva, och en parametrisering till C: $C(t) = (p_x(t), p_y(t))$ ska vi söka efter en funktion $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ sådan att $F(p_x(t), p_y(t)) = 0, \forall t$.

Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

1. Bara två polynom som indata.

Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

1. Bara två polynom som indata.
2. Maximal grad istf. maximal ordning.

Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

1. Bara två polynom som indata.
2. Maximal grad istf. maximal ordning.
3. Sökning efter kombinationer som blir noll.

Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

1. Bara två polynom som indata.
2. Maximal grad istf. maximal ordning.
3. Sökning efter kombinationer som blir noll.
4. Den kombination av lägst grad ger den bästa implicita ekvationen.

Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

1. Bara två polynom som indata.
2. Maximal grad istf. maximal ordning.
3. Sökning efter kombinationer som blir noll.
4. Den kombination av lägst grad ger den bästa implicita ekvationen.
5. $F(x, y) = 0$ innehåller hela $C(t)$, per konstruktion.

Sökalgoritm

Sökalgoritmen i `FindSemiGroupFromPolynomialRing` går redan systematiskt igenom alla polynom till en viss ordning. Men några enkla modifieringar hittar den den implicita ekvationen:

1. Bara två polynom som indata.
2. Maximal grad istf. maximal ordning.
3. Sökning efter kombinationer som blir noll.
4. Den kombination av lägst grad ger den bästa implicita ekvationen.
5. $F(x, y) = 0$ innehåller hela $C(t)$, per konstruktion.
6. $F(x, y)$ är av minimal grad, så $F(x, y)$ kan inte vara produkten av två polynom $G(x, y) \cdot H(x, y)$, där $C(t)$ är nollställe till den ena, men inte den andra.

`FindImplicitNotation()`

```
FindImplicitNotation := proc(Xp, Yp, Variable,
    MaxDegree)
```

1. Algoritm som söker efter den implicita ekvationen till en parametriserad plan kurva.

FindImplicitNotation()

```
FindImplicitNotation := proc(Xp, Yp, Variable,
    MaxDegree)
```

1. Algoritm som söker efter den implicita ekvationen till en parametriserad plan kurva.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/implicit_notation.mw`

FindImplicitNotation()

```
FindImplicitNotation := proc(Xp, Yp, Variable,
    MaxDegree)
```

1. Algoritm som söker efter den implicita ekvationen till en parametriserad plan kurva.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/implicit_notation.mw`
3. Text-version finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindImplicitNotation.txt`

Elementärt första exempel

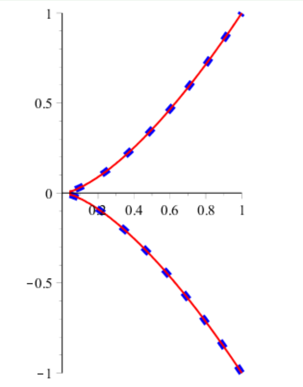
Exempel

Följande exempel beräknar den implicita funktionen till kurvan $C(t) = \left(t^2, t^3\right)$:

```
> FindImplicitNotation(t^2,
    t^3,t,30,true);
Elapsed Time: 0.000 s.
```

$$x^3 - y^2 = 0$$

Kurvan $C(t)$ motsvaras alltså av $x^3 - y^2 = 0$.

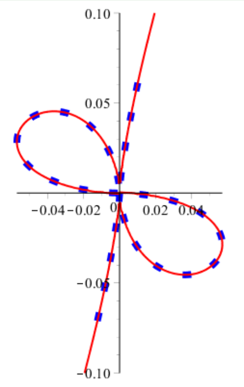


Rosett

Exempel

```
> FindImplicitNotation(
    t^3*(t-1)^3*(t+1)^3,
    t^5*(t-1)^2*(t+1)^2,
    t, 150, true);

Elapsed Time: 1.266 s.
```

$$x^9 - 9x^8y + 36x^7y^2 - 84x^6y^3 + \\ +126x^5y^4 - 126x^4y^5 + 84x^3y^6 - \\ -36x^2y^7 + 9xy^8 - y^9 + x^4y^3 = 0$$



Plana algebraiska kurvor

Multiplicitetsföljder
Uppblåsningar

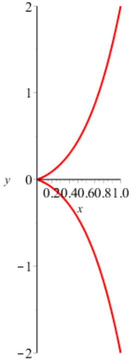
Plan kurva med singularitet i origo

Betrakta den plana algebraiska kurvan $C(t) = (t^2, t^3 + t^7)$. Denna ges implicit av ekvationen

$$y^2 - x^3 - 2x^5 - x^7 = 0$$

Vi ser att den har en singularitet i origo.

Hur kan vi göra den mjukare (eller enklare)?



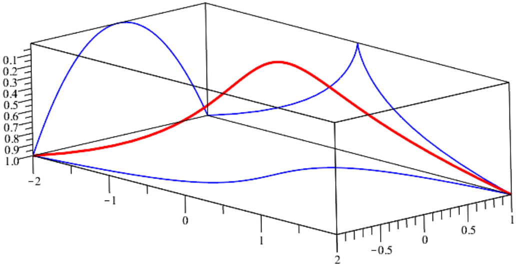
Projektion från en högre dimension

Enkelt att införa en tredje dimension med $z(t) = t$:

$$C^*(t) = (t^2, t^3 + t^7, t)$$

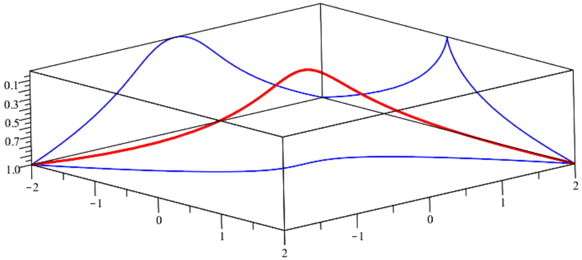
Finns även tre projektioner utritade:

$$\begin{cases} P_x(t) = (x_p, y(t), z(t)) \\ P_y(t) = (x(t), y_p, z(t)) \\ P_z(t) = (x(t), y(t), z_p) \end{cases}$$



Implicit ekvation

Men hur gör vi med en algebraisk kurva som ges implicit av en polynomekvation $F(x, y) = 0$?
Istället kan vi införa en tredje dimension till kurvan genom att utanför singulariteten introducera $z = y/x, x \neq 0$.



Agebraiska konsekvenser

Eftersom vår ursprungliga kurva uppfyller $F(x, y) = 0$ och den nya kurvan även uppfyller $z = y/x$, och därför $y = z \cdot x$, måste den nya kurvan således även uppfylla

$$F(x, z \cdot x) = 0$$

I vårt exempel ger detta således:

$$(z \cdot x)^2 - x^3 - 2x^5 - x^7 = x^2 \cdot \left(z^2 - x - 2x^3 - x^5\right) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x = 0) \vee (z^2 - x - 2x^3 - x^5 = 0)$$

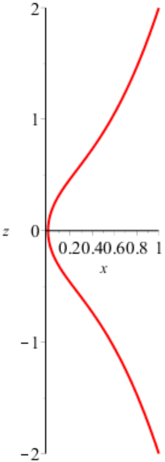
Förenklad kurva

Vi får en ny kurva C^*, implicit givet av polynomekvationen

$$F^*(x,z) = z^2 - x - 2x^3 - x^5 = 0$$

vilken är *enklare* än den ursprungliga polynomekvationen $F(x,y) = 0$.

Denna nya kurva C^* motsvarar precis projektionen P_y av vår tredimensionella kurva på XZ-planet.



Uppblåsning

Definition

En **uppblåsning** av en algebraisk plan singulär kurva C som går genom origo, givet implicit genom polynomekvationen $F(x, y) = 0$, är den algebraiska plana kurva C^* som ges implicit av $F^*(x, y) = F(x, x \cdot y)/x^m = 0$, där m är **multipliciteten** av nollstället $x = 0$ i $F(x, x \cdot y)$, dvs. det största heltal m sådant att x^m delar alla termer i $F(x, x \cdot y)$.

Uppblåsning

Definition

En **uppblåsning** av en algebraisk plan singulär kurva C som går genom origo, givet implicit genom polynomekvationen $F(x,y)=0$, är den algebraiska plana kurva C^* som ges implicit av $F^*(x,y)=F(x,x\cdot y)/x^m=0$, där m är **multipliciteten** av nollstället $x=0$ i $F(x,x\cdot y)$, dvs. det största heltal m sådant att x^m delar alla termer i $F(x,x\cdot y)$.

Följdsats

För multipliciteten gäller att $m>0$ om kurvan som ges av $F(x,y)=0$ går genom origo.

Plana algebraiska kurvor

Multiplicitetsföljder

Serie av uppblåsningar

Låt oss kalla uppblåsningsoperatorn definierad ovan för B (för "Blow-Up"), där $F(x,y)$ blåses upp till $F^*(x,y)$ och m är den implicit genererade multipliciteten i operationen:

$$F \xrightarrow[m]{B} F^*$$

Anta att vi har en serie uppblåsningar:

$$F(x,y) \xrightarrow[m_1]{B} F_1(x,y) \xrightarrow[m_2]{B} \dots \xrightarrow[m_n]{B} F_n(x,y) \xrightarrow[m_{n+1}]{B} \dots$$

Denna serie kan bara fortgå så länge $F_i(x,y)$ är singulär i origo. Hur länge är det?

Oändligt exempel

Exempel

Låt oss betrakta $F(x,y) = y^2 - xy$:

$$(y^2 - xy) \xrightarrow[2]{B} (y^2 - y) \xrightarrow[1]{B} (xy^2 - y) \xrightarrow[1]{B} (x^2y^2 - y) \xrightarrow[1]{B}$$

$$\xrightarrow[1]{B} (x^3y^2 - y) \xrightarrow[1]{B} \dots$$

Multiplicitetsföljden blir $2, 1, 1, 1, 1, \dots,$ i all oändlighet. Anledningen till detta är att alla termer innehåller y som alltid genererar en faktor x för varje uppblåsning.

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (1/6)

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (1/6)

1. $n = \mathbf{o}(p)$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (1/6)

1. $n = \mathbf{o}(p)$
2. $F(x,y) = G(x,y) + x^n q(x), \; q(0) \neq 0$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (1/6)

1. $n = \mathbf{o}(p)$
2. $F(x, y) = G(x, y) + x^n q(x),\ q(0) \neq 0$
3. $G(x, y) + x^n q(x) \xrightarrow[m_1]{B} G_1(x, y) + x^{n-m_1} q(x) \xrightarrow[m_2]{B} \dots \xrightarrow[m_i]{B}$ $G_i(x, y) + x^{n-\sum_{j=1}^{i} m_j} q(x) \xrightarrow[m_{i+1}]{B} \dots$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (2/6)

4. För $G_i(x, y)$ gäller följande:

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (2/6)

4. För $G_i(x, y)$ gäller följande:
   1. Samma antal termer.

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (2/6)

4. För $G_i(x, y)$ gäller följande:
   1. Samma antal termer.
   2. $G_i(0, 0) = 0$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (2/6)

4. För $G_i(x,y)$ gäller följande:
   1. Samma antal termer.
   2. $G_i(0,0) = 0$
5. $\sum_{j=1}^{i} m_j < n \implies G_i(x,y) + x^{n-\sum_{j=1}^{i} m_j} q(x)\Big|_{(0,0)} = 0$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (3/6)

6. $m_{i+1} > 0$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (3/6)

6. $m_{i+1} > 0$
7. Sekvensen måste få ett stopp efter N steg: $\sum_{j=1}^{N} m_j = n$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (3/6)

6. $m_{i+1} > 0$
7. Sekvensen måste få ett stopp efter N steg: $\sum_{j=1}^{N} m_j = n$
8. Sista uppblåsningen blir $G_N(x, y) + q(x)$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (4/6)

9. $F(x,y) = \sum_{i \in I} p_i(x) y^i = \sum_{i \in I} x^{n_i} q_i(x) y^i$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (4/6)

9. $F(x,y) = \sum_{i \in I} p_i(x) y^i = \sum_{i \in I} x^{n_i} q_i(x) y^i$
10. $F(x,y) \xrightarrow[m_1]{B} \frac{F(x, x \cdot y)}{x^{m_1}} = \sum_{i \in I} x^{n_i + i - m_1} q_i(x) y^i$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (4/6)

9. $F(x,y) = \sum_{i \in I} p_i(x) y^i = \sum_{i \in I} x^{n_i} q_i(x) y^i$
10. $F(x,y) \xrightarrow[m_1]{B} \frac{F(x, x \cdot y)}{x^{m_1}} = \sum_{i \in I} x^{n_i + i - m_1} q_i(x) y^i$
11. $m_1 = \min(\{n_i + i\}_{i \in I})$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (4/6)

9. $F(x,y) = \sum_{i \in I} p_i(x) y^i = \sum_{i \in I} x^{n_i} q_i(x) y^i$
10. $F(x,y) \xrightarrow[m_1]{B} \frac{F(x,x \cdot y)}{x^{m_1}} = \sum_{i \in I} x^{n_i + i - m_1} q_i(x) y^i$
11. $m_1 = \min(\{n_i + i\}_{i \in I})$
12. $\exists i_1 : n_{i_1} + i_1 - m_1 = 0$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x, y) = y \cdot H(x, y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (5/6)

13. $\ldots \xrightarrow[m_2]{B} \sum_{i \in I} x^{n_i + (i - m_1) + (i - m_2)} q_i(x) y^i$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (5/6)

13. $\ldots \xrightarrow[m_2]{B} \sum_{i \in I} x^{n_i+(i-m_1)+(i-m_2)} q_i(x) y^i$
14. $m_2 \leq i_1$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (5/6)

13. $\ldots \xrightarrow[m_2]{B} \sum_{i \in I} x^{n_i+(i-m_1)+(i-m_2)} q_i(x) y^i$
14. $m_2 \leq i_1$
15. $i_1 = m_1 - n_{i_1} \leq m_1 \implies m_2 \leq m_1$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (5/6)

13. $\ldots \xrightarrow[m_2]{B} \sum_{i \in I} x^{n_i+(i-m_1)+(i-m_2)} q_i(x) y^i$
14. $m_2 \leq i_1$
15. $i_1 = m_1 - n_{i_1} \leq m_1 \Longrightarrow m_2 \leq m_1$
16. Antag $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k, k \geq 2$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (6/6)

17. $\ldots \underset{m_{k+1}}{\xrightarrow{B}} \sum_{i \in I} x^{n_i + \sum_{j=1}^{k}(i-m_j)+(i-m_{k+1})} q_i(x) y^i$

Ändliga multiplicitetsföljder

Sats

Om $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ är singulär i origo och är summan av ett polynom $G(x,y) = y \cdot H(x,y)$, vilket har minst ett y i varje term, och ett polynom $p(x) \neq 0$ som bara har termer bestående av potenser av x, så är multiplicitetsföljden av $F(x,y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

Översikt av bevis: (6/6)

17. $\ldots \xrightarrow[m_{k+1}]{B} \sum_{i \in I} x^{n_i + \sum_{j=1}^{k}(i-m_j)+(i-m_{k+1})} q_i(x) y^i$
18. Om nu $m_{k+1} > m_k$ ser vi att vi hade kunnat subtrahera ytterligare från exponenten i tidigare skede (i exponentens $(i - m_k)$-term) genom att göra m_k större. $\square$

Följdsats

Givet $F(x,y) = y \cdot H(x,y) + p(x)$ *och dess multiplicitetsföljd* $\{m_i\}$*, gäller att* $\mathbf{o}(p) = \sum m_i$.

Följdsats

Givet $F(x,y) = y \cdot H(x,y) + p(x)$ *och dess multiplicitetsföljd* $\{m_i\}$*, gäller att* $\mathbf{o}(p) = \sum m_i$.

Not: Ovanstående håller även i fallet då $p(x) = 0$, om man definierar $\mathbf{o}(0) = \infty$.

Följdsats

Givet $F(x, y) = y \cdot H(x, y) + p(x)$ och dess multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, gäller att $\mathbf{o}(p) = \sum m_i$.

Not: Ovanstående håller även i fallet då $p(x) = 0$, om man definierar $\mathbf{o}(0) = \infty$.

Följdsats

Om $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ är ett irreducibelt polynom som är singulärt i origo, så är multiplicitetsföljden av $F(x, y)$ en ändlig serie av icke strikt avtagande heltal.

`MultiplicitySequenceXY()`

```
MultiplicitySequenceXY := proc(F, XVariable, YVariable)
```

1. Algoritm som beräknar multiplicitetsföljden av en algebraisk kurva givet på formen $F(x,y) = 0$, där $F \in \mathbb{C}[x,y]$.

MultiplicitySequenceXY()

```
MultiplicitySequenceXY := proc(F, XVariable, YVariable)
```

1. Algoritm som beräknar multiplicitetsföljden av en algebraisk kurva givet på formen $F(x, y) = 0$, där $F \in \mathbb{C}[x, y]$.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/multiplicitetsfoljder.mw`

MultiplicitySequenceXY()

```
MultiplicitySequenceXY := proc(F, XVariable, YVariable)
```

1. Algoritm som beräknar multiplicitetsföljden av en algebraisk kurva givet på formen $F(x, y) = 0$, där $F \in \mathbb{C}[x, y]$.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/multiplicitetsfoljder.mw`
3. Text-version finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/MultiplicitySequenceXY.txt`

Exempel 1/2

Exempel

I detta exempel beräknas multiplicitetsföljden för $y^2 - x^5 = 0$:

```
> MultiplicitySequenceXY(y^2-x^5,x,y)
```

$$[2, 2, 1]$$

Exempel 2/2

Exempel

Vill vi se de successiva uppblåsningarna gör vi som följer:

```
> MultiplicitySequenceXY(y^2-x^5,x,y,true)
```

$$[2, -x^3 + y^2]$$

$$[2, y^2 - x]$$

$$[1, xy^2 - 1]$$

$$[0, x^3y^2 - 1]$$

$$[2, 2, 1]$$

Plana algebraiska kurvor

Multiplicitetsföljder
Funktionsfamiljer

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x, y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x, y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?

Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x, y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?

Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

1. $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x, y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?

Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

1. $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$
2. $F(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^{s-i} a_{i,j} x^j y^i \right) \right) - x^s$

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x,y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?
Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

1. $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$
2. $F(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^{s-i} a_{i,j} x^j y^i\right)\right) - x^s$
3. Vi inte behöver ta med termer innehållande faktorer av y med högre potens än m_1.

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x, y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?
Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

1. $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$
2. $F(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^{s-i} a_{i,j} x^j y^i \right) \right) - x^s$
3. Vi inte behöver ta med termer innehållande faktorer av y med högre potens än m_1.
4. Utför serie uppblåsningar: Avgör vilka $a_{i,j} = 0$.

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x, y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?

Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

1. $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$
2. $F(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^{s-i} a_{i,j} x^j y^i\right)\right) - x^s$
3. Vi inte behöver ta med termer innehållande faktorer av y med högre potens än m_1.
4. Utför serie uppblåsningar: Avgör vilka $a_{i,j} = 0$.
5. Utför ny serie uppblåsningar: Avgör vilka $a_{i,j} \neq 0$.

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x,y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?
Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

1. $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$
2. $F(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^{s-i} a_{i,j} x^j y^i\right)\right) - x^s$
3. Vi inte behöver ta med termer innehållande faktorer av y med högre potens än m_1.
4. Utför serie uppblåsningar: Avgör vilka $a_{i,j} = 0$.
5. Utför ny serie uppblåsningar: Avgör vilka $a_{i,j} \neq 0$.
6. Beräkna “enklaste” lösningen.

Funktionsfamiljer

Givet en multiplicitetsföljd $\{m_i\}$, hur ser funktionerna $F(x, y)$ ut som har motsvarande multiplicitetsföljd?

Algoritm för att beräkna familj av funktioner som har given multiplicitetsföljd:

1. $s = \sum_{i=1}^{n} m_i$
2. $F(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{j=0}^{s-i} a_{i,j} x^j y^i \right) \right) - x^s$
3. Vi inte behöver ta med termer innehållande faktorer av y med högre potens än m_1.
4. Utför serie uppblåsningar: Avgör vilka $a_{i,j} = 0$.
5. Utför ny serie uppblåsningar: Avgör vilka $a_{i,j} \neq 0$.
6. Beräkna “enklaste” lösningen.
7. Om motsägelser uppstår, rapporteras fel.

Hittas alltid en lösning?

Finns alltid en lösning?

Hittas alltid en lösning?

Finns alltid en lösning?

1. Lösning ej garanterad.

Hittas alltid en lösning?

Finns alltid en lösning?

1. Lösning ej garanterad.
2. Inkonsistenta samband mellan koefficienter.

Hittas alltid en lösning?

Finns alltid en lösning?

1. Lösning ej garanterad.
2. Inkonsistenta samband mellan koefficienter.
3. Vissa val av kombinationer kan ge annorlunda multiplicitetsföljd.

Hittas alltid en lösning?

Finns alltid en lösning?

1. Lösning ej garanterad.
2. Inkonsistenta samband mellan koefficienter.
3. Vissa val av kombinationer kan ge annorlunda multiplicitetsföljd.
4. "Enklaste" lösningen inte nödvändigtvis *irreducibel*.

Hittas alltid en lösning?

Finns alltid en lösning?

1. Lösning ej garanterad.
2. Inkonsistenta samband mellan koefficienter.
3. Vissa val av kombinationer kan ge annorlunda multiplicitetsföljd.
4. "Enklaste" lösningen inte nödvändigtvis *irreducibel*.
5. Inga fel eller avbrott rapporteras efter en genomgång av alla multiplicitetsföljder upp till multiplicitetssumma 30. Det finns 28628 sådana multiplicitetsföljder.

FindFunctionXYFromMultiplicitySequence()

```
FindFunctionXYFromMultiplicitySequence :=
    proc(Sequence, CalcFamily)
```

1. Algoritm som beräknar fram en funktion $F(x,y)$, $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ vars multiplicitetsföljd är given i anropet.

FindFunctionXYFromMultiplicitySequence()

```
FindFunctionXYFromMultiplicitySequence :=
    proc(Sequence, CalcFamily)
```

1. Algoritm som beräknar fram en funktion $F(x, y)$, $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ vars multiplicitetsföljd är given i anropet.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/multiplicitetsfoljder.mw`

FindFunctionXYFromMultiplicitySequence()

```
FindFunctionXYFromMultiplicitySequence :=
    proc(Sequence, CalcFamily)
```

1. Algoritm som beräknar fram en funktion $F(x, y)$, $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ vars multiplicitetsföljd är given i anropet.
2. Maple-kod finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/multiplicitetsfoljder.mw`
3. Text-version finns i `https://github.com/PeterWaher/Algebraiska_kurvor/blob/master/Functions/FindFunctionXYFromMultiplicitySequence.txt`

Exempel

Exempel

I följande exempel beräknas en familj av polynom $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ sådana att kurvorna $F(x, y) = 0$ har multiplicitetsföljden 2, 2, 1.

```
> FindFunctionXYFromMultiplicitySequence(
    [2,2,1], true)
```

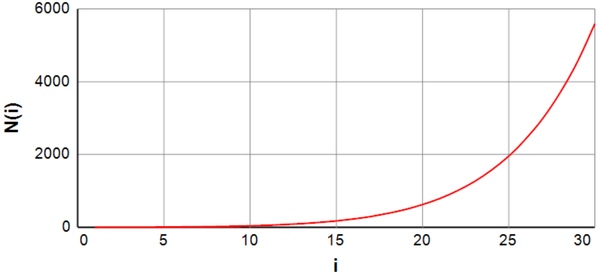
$$\left[-x^5 + y^2,\right.$$
$$x^4ya_5 + x^3y^2a_9 - x^5 + x^3ya_4 + x^2y^2a_8 + x^2ya_3 + xy^2a_7 + y^2a_6,$$
$$\left.a_6 \neq 0\right]$$

Plana algebraiska kurvor

Multiplicitetsföljder
Komplexitet

Antal multiplicitetsföljder

När vi börjar undersöka hur väl beräkningen av funktionsfamiljer från multiplicitetsföljderna går, ser vi att en intressant talföljd $\{N_i\}$ uppstår, där N_i är antalet multiplicitetsföljder som finns vars multipliciteter summerar till i.



Rekursiv definition

Är talföljden asymptotisk och växer på ett förutbestämt sätt, liknande exempelvis *Fibonacci*-följden?

$$
\begin{aligned}
N_i &\equiv N_{i,i} \\
N_{i,j} &= \begin{cases} 0 & , i < 0 \vee j \leq 0 \\ 1 & , i = 0 \wedge j > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\min(i,j)} N_{i-k,k} & , i > 0 \wedge j > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Polynomial tillväxt?

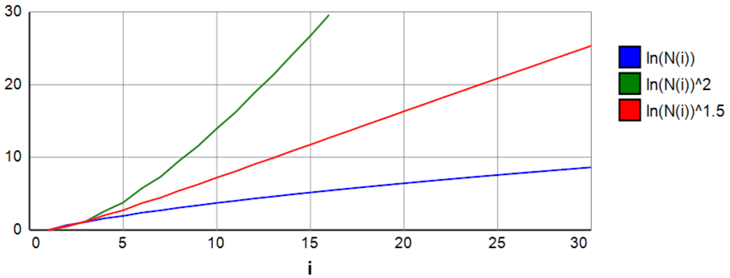
Växer följden som ett polynom?

Försöker vi med hjälp av minsta kvadratmetoden passa in polynom på denna kurva kommer vi inte hitta någon som passar. Istället ser vi hur termerna i polynomen alternerar mellan positiva och negativa, i takt med att vi försöker med högre och högre grader, något som kan indikera en exponentiell tillväxt.

Exponentiell tillväxt?

Växer följden exponentiellt?

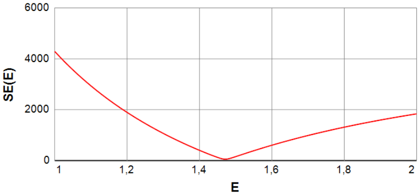
Empiriskt ser $\ln(N_i)^{3/2}$ intressant ut:

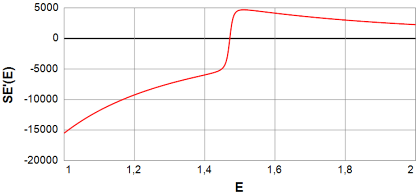


Första ansats

$$\ln(N_i)^E \approx a + b \cdot i \iff N_i \approx e^{(a+b\cdot i)^{\frac{1}{E}}}$$

$SE(E)$ ger minstakvadratenfelet, a, b fås genom linjär regression.

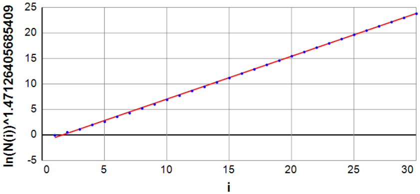


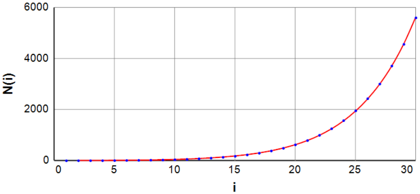


E=1.47126405685409, a=−1.34861467338489, b=0.839860447173521

Resultat

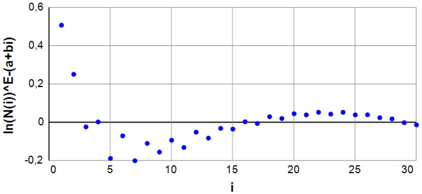
Vi kan nu jämföra vår modell med det uppmätta värdena, för att se hur väl de stämmer överens. Till synes ganska väl, även om det inte är perfekt.

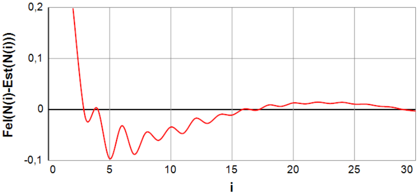




Modellen ser inte ut att hålla

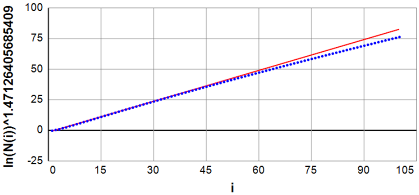
Visar vi istället skillnaden mellan uppmätt och uppskattat i fallet med $\ln(N_i)$ och felet mellan uppmätt och uppskattat i fallet med N_i ser vi att vår uppskattning antagligen inte kommer att hålla:

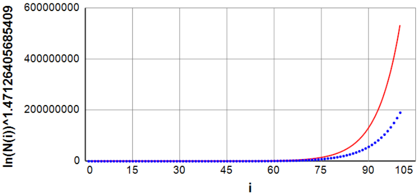




Modellen håller inte

Specialkod i Maple beräknar N_i upp till $i = 100$:

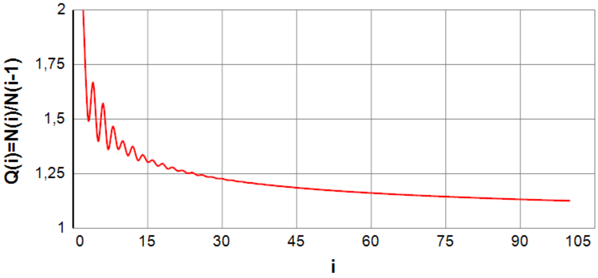




Det som är den bästa linjen på intervallet $[1, 30]$ är inte den bästa linjen på intervallet $[1, 100]$.

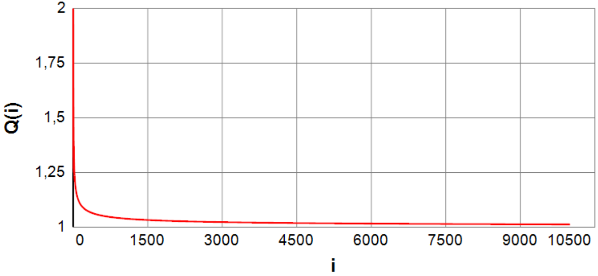
Är följden asymptotisk mot en geometrisk serie?

Kommer N_i gå asymptotiskt mot en geometrisk serie $N_i \to c \cdot P^i$? Eller kommer $N_{i+1}/N_i \to 1$ då $i \to \infty$? Om $Q_i = N_i/N_{i-1}$, kommer då $Q_i \to P$ för något $P > 1$?



Q_i verkar gå mot 1

Genom att utnyttja ett specialprogram skrivet i C# har vi lyckats beräkna N_i och Q_i upp till $i = 10000$.

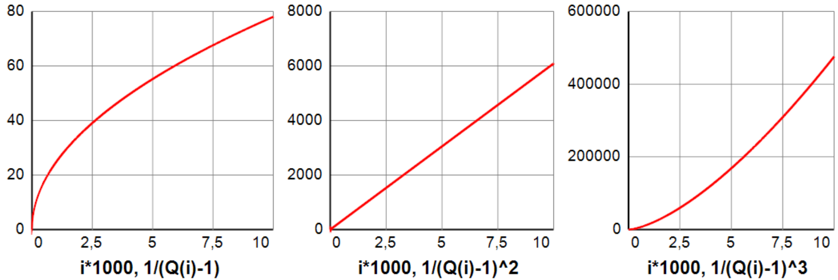


$$\begin{aligned} N_{10000} &= 361672513256362939888204718909536954950160303393156\ldots \\ &\quad \ldots 504220818686058879525687540664205923105560529069\ldots \\ &\quad \ldots 16435144 \\ Q_{10000} &= 1.0128073565554\ldots \end{aligned}$$

Q_i en invers?

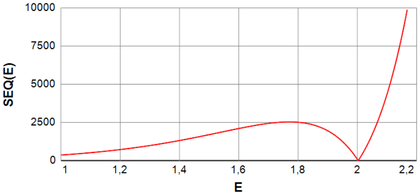
Avtar Q_i som en invers av något?

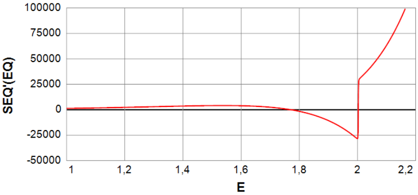
Empiriskt ser $1/(Q_i - 1)^2$ intressant ut:



Sökning efter exponent

$SEQ(E)$ ger minstakvadratenfelet mellan bästa linjen och $\frac{1}{(Q_i-1)^E}$.

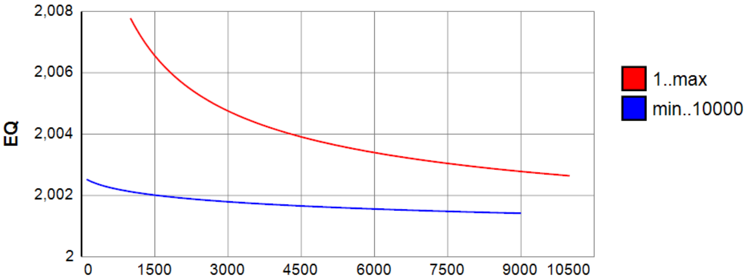




$$E_{[1,10000]} = 2.00264350576171$$

Hur bra är uppskattningen av exponenten?

Hur mycket beror vårt resultat på intervallet vi valt $(Q_1 - Q_{10000})$?



$$E_{[9000,10000]} = 2.00142039633785$$

Andra ansats

Från vår empiriska studie över antalet multiplicitetsföljder N_i, och dess förhållanden $Q_i = N_i / N_{i-1}$, är det således inte helt orimligt att göra följande antagande angående Q_i's asymptotiska beteende:

$$\frac{1}{(Q_i - 1)^2} \sim a + b \cdot i, \text{ (då } i \to \infty)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Q_i \sim 1 + \frac{1}{\sqrt{a + b \cdot i}}, \text{ (då } i \to \infty)$$

Nelder-Mead

$$f_{\mathbf{v}}(i) = v_0 + \frac{v_1}{\sqrt{v_2 + v_3 i + v_4 i^2 + v_5 i^3 + v_6 i^4 + v_7 i^5 + v_8 i^6 + v_9 i^7}}$$

Med hjälp av *Nelder-Mead's algoritm* optimerar vi så att felet mellan $f_{\mathbf{v}}(i)$ och Q_i blir så litet som möjligt:

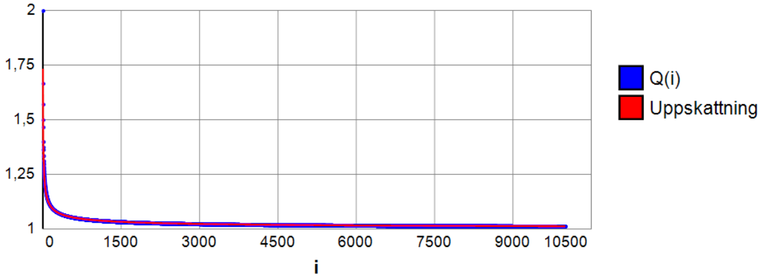
$$\begin{aligned} &\mathrm{NM}(f_{\mathbf{v}}, \{1,1,1,1,0,0,0,0,0,0\}) = \\ &\quad \{1, 1.27124055101012, 1, 1, 0; 0; 0; 0; 0; 0\} \end{aligned}$$

Vi har således fått en uppskattning av Q_i:

$$Q_i \approx 1 + \frac{1.27124055101012}{\sqrt{1+i}}$$

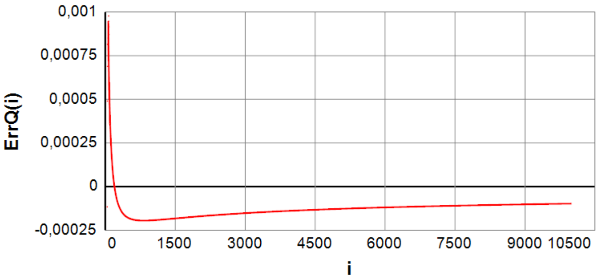
Resultat

Vi kan rita ut Q_i tillsammans med sin uppskattning, och ser att de verkar stämma överens ganska bra:



Feluppskattning

Ännu bättre ser vi att de stämmer överens om vi ritar ut felet mellan Q_i och dess uppskattning, $\mathrm{Err}_Q(i)$:



Slutsats

Inte bara är felet litet, det verkar gå mot noll då i växer, utan tendens att divergera. Vi kan således dra slutsatsen att N_i *inte* växer exponentiellt, i motsats till vad vi antog i början. Istället verkar den växa i enlighet med:

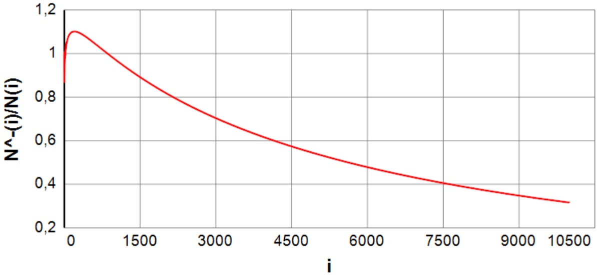
$$N_i = \prod_{k=1}^{i} Q_i = \prod_{k=1}^{i} \left(1 + \frac{1.27124055101012}{\sqrt{1+k}} + \mathrm{Err}_Q(k) \right)$$

där $\mathrm{Err}_Q(k)$ verkar gå mot 0 då $k \to \infty$.

Propagerat fel

Dock har felet i uppskattningen av Q_i väldigt stor påverkan på den multiplikativa uppskattningen av N_i, som kan ses av följande graf som är förhållandet mellan N_i och

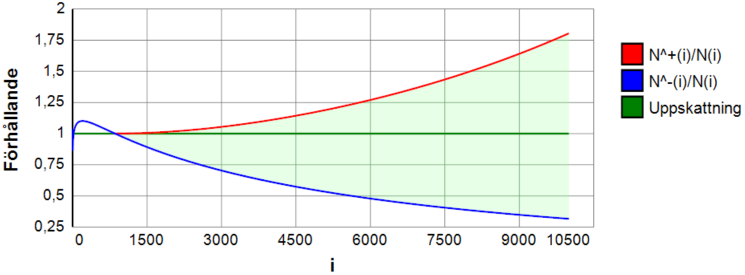
$$N_i^- = \prod_{k=1}^{i} \left(1 + \frac{1.27124055101012}{\sqrt{1+k}}\right)$$



Begränsning

Vi ser att efter $i = 856$ gäller att $N_i > N_i^-$. Vi vet också att $\mathrm{Err}_Q(856) \approx -0.000194294156604657$, och att $\mathrm{Err}_Q(i)$ är svagt växande därefter.

$$N_i^+ = N_{856} \cdot \prod_{k=1}^{i} \left(1 + \frac{1.27124055101012}{\sqrt{1+k}} - \mathrm{Err}_Q(856) \right), i \geq 856$$



Tack

Tack för din tid

Också ett stort tack till Rikard Bögvad, och speciellt Ralf Fröberg, för all den tålamod och goda vilja de visat under loppet av detta arbete. Men sådan är naturen hos $\mathfrak{L}_2$-arbeten som detta.