コンピュータサイエンスとプログラミング 演習課題
第３回演習課題　モンテカルロシミュレーション

2021 年 5 月 6 日

１．乱数とその種類

サイコロを振って出る目のような規則性の無い数を乱数と呼び，その系列を乱数列という．乱数の性質は，乱数が取り得る値(2 進数や整数などの離散値，連続値)，その分布(一様分布，正規分布，ポアソン分布など)，その統計的性質(平均値，分散など)によって特徴づけられる．乱数を確率変数として考えると，例えば，一様分布に従う乱数(一様乱数)とは，一様分布に従う母集団からの独立標本値であり，ある有限の区間内で全ての整数もしくは実数が等確率で現れるような乱数となる．また，正規分布(ガウス分布)に従う乱数とは，正規分布に従う母集団からの独立標本値である．

２．擬似乱数と線形合同法

乱数を発生させる方法としては，自然界で生じる物理的現象を用いる方法や生成アルゴリズムに従い計算機等を用いて発生させる方法が考えられる．一般に完全な乱数を計算機で(確定的な生成アルゴリズムに従って)発生させることはできないが，これに近いものを発生することができ，これを擬似乱数と呼ぶ．擬似乱数を発生させる方法の 1 つとして線形合同法がある．

線形合同法

適当な初期値x_0に対して，

$$x_{n+1} = (A \times x_n + B) \quad \mathrm{mod} \quad M \qquad (1)$$

により，順次，値を求め，それを乱数として用いる．
ただし，A, B, Mは定数

例えば，A = 48109, B = 2531011, M = 32768, x_0 = 1 とすると，23216, 9139, 27770, 10677,……と乱数列を生成することができる．良い乱数列を発生する A，B，M，x_0 の組み合わせについては様々な検討がなされている．

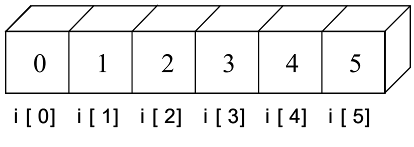
３．一次元配列

同じ型を持つ変数のリスト(並び，集合)で，添え字によりインデックスされたものを配列と呼び，関連するデータの集まりに対する操作等において，配列を用いることでプログラムリストの簡略化が可能となる．

◇例 3-1：一次元配列の例

```
int i[6];
int j;

for (j=0; j<6; j++)
i[j] = j;
```



【課題 3-1】線形合同法を用いた乱数の生成

線形合同法に従って，x_n の値を入力(引数)として，次の乱数 x_{n+1} を返す関数 int rn(int x) を作成せよ.

【課題 3-2】乱数の発生頻度の確認

課題 3-1 で作成した関数 rn()を用いて，1～10 の整数の一様乱数を発生させ，各乱数が発生した割合を表示するプログラムを作成せよ. ただし，出力として以下の条件①～④を満足すること.

① 乱数の発生回数(1000 万回以下)をキーボードから入力する.

② 各乱数(1～10 の整数)に対応した配列を用意し，配列を用いて各乱数の発生回数を数える.

③ 各乱数の発生割合(パーセント表示)を小数点下 2 桁で表示する(出力例は下図を参照).

④ 各乱数の発生割合(パーセント表示)を小数点で揃うように表示する(出力例は下図を参照).

◇ プログラム実行時の確認事項：

- 乱数の発生回数と共に各乱数の発生頻度が一様になることを確認せよ.

```
$ ./kadai3-2.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 1
  1が出た割合:   0.00%です。
  2が出た割合:   0.00%です。
  3が出た割合:   0.00%です。
  4が出た割合:   0.00%です。
  5が出た割合:   0.00%です。
  6が出た割合:   0.00%です。
  7が出た割合:   0.00%です。
  8が出た割合: 100.00%です。
  9が出た割合:   0.00%です。
 10が出た割合:   0.00%です。
```

```
$ ./kadai3-2.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 1000
  1が出た割合:   9.60%です。
  2が出た割合:  10.40%です。
  3が出た割合:   9.40%です。
  4が出た割合:  10.20%です。
  5が出た割合:  10.30%です。
  6が出た割合:  10.60%です。
  7が出た割合:  10.60%です。
  8が出た割合:   9.90%です。
  9が出た割合:  10.70%です。
 10が出た割合:   8.30%です。
```

```
$ ./kadai3-2.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 100000
  1が出た割合:   9.99%です。
  2が出た割合:  10.02%です。
  3が出た割合:   9.98%です。
  4が出た割合:  10.00%です。
  5が出た割合:   9.99%です。
  6が出た割合:  10.00%です。
  7が出た割合:  10.01%です。
  8が出た割合:  10.01%です。
  9が出た割合:  10.01%です。
 10が出た割合:   9.99%です。
```

【課題 3-3】乱数の発生頻度分布の表示

課題 3-2 で作成した乱数(1～10 の整数の一様乱数)の頻度分布を図示するプログラムを作成せよ. ただし，出力として以下の条件①～③を満足し，下図の出力例と同等な出力が表示されるようにすること.

① 各乱数の発生頻度を表す ＊ の数の最大値を 20 とする.

② ＊ を出力した後に，各乱数(1～10)の発生個数を表示する.

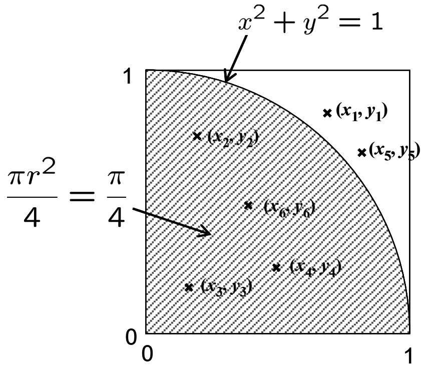
③ 最終行に乱数の発生個数を表示する.

```
$ ./kadai3-3.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 10
  1:                               0
  2: **********                    1
  3: ********************          2
  4: ********************          2
  5:                               0
  6:                               0
  7: ********************          2
  8: **********                    1
  9: ********************          2
 10:                               0
==================================
TOTAL:                            10
```

```
$ ./kadai3-3.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 1000
  1: *****************            96
  2: *******************         104
  3: *****************            94
  4: *******************         102
  5: *******************         103
  6: *******************         106
  7: *******************         106
  8: ******************           99
  9: ********************        107
 10: ***************              83
==================================
TOTAL:                          1000
```

```
$ ./kadai3-3.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 1000000
  1: *******************      100031
  2: *******************       99999
  3: *******************       99971
  4: *******************       99980
  5: *******************       99967
  6: *******************       99975
  7: *******************      100006
  8: ********************     100051
  9: *******************      100039
 10: *******************       99981
==================================
TOTAL:                       1000000
```

【課題 3-4】乱数を用いた円周率の計算



関数 rn()を用いて，2 つの一様乱数 x，y (ともに 0 以上 1 未満の実数)を発生させ，2 次元平面上で(x，y)を座標とする点を考える．このような点を多数発生させ，この点が原点を中心とする半径 1 の 1/4 円内(右図網掛の領域)に入っているかどうかを判定することを繰り返す．発生させた m 個の点のうち 1/4 円内に入っている点の個数を n 個とすると，m : n は 1 : π / 4 に近似する．以上の考え方を利用して，円周率を求めるプログラムを作成せよ．

◇ プログラム実行時の確認事項：

- 乱数の発生個数を適当に変化させ，実行結果が 3.1415926…にどのように近づくか確認せよ．
- 乱数の発生個数を増やしても 3.1415926…に近づかない．その理由を考察せよ．

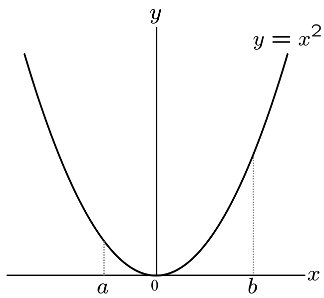
```
$ ./kadai3-4.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 1
乱数発生個数 = 1 個
1/4円内に入った個数 = 1 個
円周率 = 4.0000000
```

```
$ ./kadai3-4.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 100
乱数発生個数 = 100 個
1/4円内に入った個数 = 85 個
円周率 = 3.4000000
```

```
$ ./kadai3-4.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 10000
乱数発生個数 = 10000 個
1/4円内に入った個数 = 7855 個
円周率 = 3.1420000
```

```
$ ./kadai3-4.exe
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 1000000
乱数発生個数 = 1000000 個
1/4円内に入った個数 = 785421 個
円周率 = 3.1416840
```

【課題 3-5】乱数を用いた積分の計算（その１）



以下の 2 つの方法に従って，2 次関数 $y = x^2$の区間(a, b)での積分

$$\int_a^b x^2 dx \qquad (2)$$

の値を求めるプログラムを作成せよ．

方法1　式(2)の積分を解くと，以下の式(3)のように求められる．この式(3)の右辺を計算して，式(2)の積分値を求める．

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right) \qquad (3)$$

方法2　課題 3-4 と同様に，区間(a, b)での一様乱数を繰り返し発生し，領域内に入る割合から面積から，式(2)の積分値を求める．

ただし，以下を満足すること．

① 1 つのプログラム内で，上記の 2 つの方法に従って求めた積分値が表示されるようにする．

② 積分区間(a, b)の値をキーボードから入力する．

③ 方法 2 での乱数発生回数をキーボードから入力する．

④ 2 つの方法に従って求めた積分値の差異(2 つの積分値の差の絶対値)も表示されるようにする．

◇ プログラム実行時の確認事項：

- 乱数の発生回数と，各々の方法で求めた積分値の違いの関係を確認せよ．

```
$ ./kadai3-5.exe
積分区間の下限値aを入力して下さい > 0
積分区間の上限値bを入力して下さい > 3
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 100

--- 計算結果 ---
積分値(理論値) = 9.000000
積分値(シミュレーション値) = 9.180000
積分値の誤差 = 0.180000
```

```
$ ./kadai3-5.exe
積分区間の下限値aを入力して下さい > 0
積分区間の上限値bを入力して下さい > 3
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 10000

--- 計算結果 ---
積分値(理論値) = 9.000000
積分値(シミュレーション値) = 9.104400
積分値の誤差 = 0.104400
```

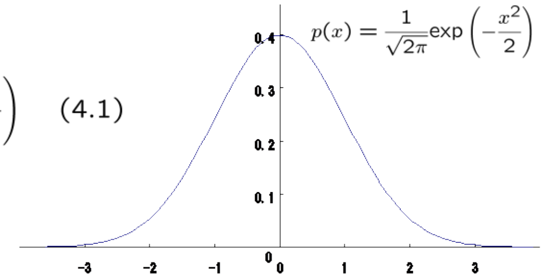
```
$ ./kadai3-5.exe
積分区間の下限値aを入力して下さい > 0
積分区間の上限値bを入力して下さい > 3
乱数を発生する回数を入力して下さい(1000万回以下) > 1000000

--- 計算結果 ---
積分値(理論値) = 9.000000
積分値(シミュレーション値) = 8.994834
積分値の誤差 = 0.005166
```

【課題 3-6】乱数を用いた積分の計算（その２）

平均 $m = 0$, 分散 $\sigma^2=1$ のガウス分布は式(4.1)のように表される. また, その分布を下図に示す.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (4.1)$$



課題 3-4, 3-5 と同様の考え方(一様乱数を繰り返し発生し, 領域内に入る割合から面積を求める方法)に従って, 式(4.2)の積分値を求めるプログラムを作成せよ.

$$\int_0^{2\sqrt{2}} p(x)dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] dx \quad (4.2)$$

◇ プログラム実行時の確認事項：

- 誤差関数 erf (x)は式(4.3)のように定義される. 式(4.2)の積分値を, 誤差関数 erf (x)を用いて表せ.
- 誤差関数の数表(書籍もしくはインターネットで調べることができる)から式(4.2)の値を求めよ.
- 上記プログラムから求めた式(4.2)の積分値と, 数表から求めた式(4.2)の積分値の差異を比較せよ.

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-t^2\right)\ dt \quad (4.3)$$

❑レポート課題の提出について

◇ 課題 3-3, 3-5 を実施し, レポート課題として提出すること（提出期限: 2021 年 5 月 13 日 09:00）

◇ CLE で提出する際のファイル名(半角英数)は下記の通りとする(XXXX は学籍番号下 4 桁).

- 課題 3-3 の場合, `XXXX-kadai3-3.c`
- 課題 3-5 の場合, `XXXX-kadai3-5.c`