线性方程组的直接解法 实验报告

计 76 陈之杨 2017011377

Ex. 3.6

题目大意

使用 Cholesky 分解求解方程组 $\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$。其中 $\boldsymbol{H}_n$ 为 Hilbert 矩阵。之后，对 $\boldsymbol{b}$ 施加 10^{-7} 的扰动。分别计算 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{H}_n\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\Delta\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ 的 ∞-范数。对 $n = 8, 10, 12$ 分别进行实验。

结果分析

代码见 `ex3_6.m` 和 `cholesky.m`。其中 `cholesky.m` 实现了对称正定矩阵的 Cholesky 分解。实验结果如下表所示：

n	$\\|\boldsymbol{r}\\|_\infty$（扰动前）	$\\|\Delta\boldsymbol{x}\\|_\infty$（扰动前）	$\\|\boldsymbol{r}\\|_\infty$（扰动后）	$\\|\Delta\boldsymbol{x}\\|_\infty$（扰动后）
10	4.4409×10^{-16}	4.0521×10^{-4}	4.4409×10^{-16}	0.7007
8	4.4409×10^{-16}	7.0128×10^{-7}	2.2204×10^{-16}	0.0216
12	4.4409×10^{-16}	0.0553	2.2204×10^{-16}	23.7071

可以发现，对 $\boldsymbol{b}$ 施加扰动，对残差的影响不大，但是对误差的影响较大。阶数上升时，误差的无穷范数快速增长，当 $n = 12$，误差的量级甚至达到了 10^2 级别。这意味着 Hilbert 矩阵是病态的。阶数越大，结果对扰动越敏感。