Stwierdzenie 1. *X_k jest $\mathcal{F}_k$-adaptowalny, τ moment zatrzymania, wtedy X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalne na $\{\tau < \infty\}$.*

Twierdzenie 2 (Doob optional sampling)**.** *$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ (nad, pod)martyngał, $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant N < \infty$ dwa momenty zatrzymania. Wtedy $(X_{\tau_i}, \mathcal{F}_{\tau_i})$ jest (nad, pod)martyngałem, tzn. $\mathbb{E}(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1})(\leqslant, \geqslant) = X_{\tau_1}$ p.n.*

W szczególności $\mathbb{E}X_{\tau_2}(\leqslant, \geqslant) = \mathbb{E}X_{\tau_1}$.

Uwaga 3. Założenie $\tau_2 \leqslant N < \infty$ jest kluczowe!

Twierdzenie 4 (tożsamość Walda)**.** *$X_1, X_2, \ldots$ iid, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, $S_0 = 0, S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, τ moment zatrzymania względem $\mathcal{F}_n$ taki, że $\mathbb{E}\tau < \infty$.*

Wtedy $\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau\mathbb{E}X_1$.

Wniosek 5. S_n jak wyżej, $a \in \mathbb{Z}$, $\tau_a = \inf\{n : S_n = a\}$. Wówczas $\tau_a < \infty$ p.n., czyli symetryczne błądzenie losowe na $\mathbb{Z}$ z prawdopodobieństwem 1 odwiedza każdy punkt $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie 6 (o zbieżności p.n. dla martyngałów)**.** *$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ nadmartyngał taki, że $\sup_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$. Wówczas $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ istnieje p.n. oraz $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Poniższe służą dowodowi twierdzenia.

Fakt 7. (x_n) ciąg, wtedy $\lim x_n$ istnieje w szerszym sensie (tzn. być może jest nieskończona) wtw, gdy $\forall_{a<b, a,b \in \mathbb{Q}} U_a^b((x_n)) < \infty$, gdzie U_a^b to liczba przejść w górę przez przedział $[a, b]$ dla ciągu (x_n).

Lemat 8. *$(X_n)_{n=0}^m$ nadmartyngał, $U_a^b(m)$ liczba przejść przez $[a, b]$ dla (X_n) do chwili m. Wtedy $\mathbb{E}U_a^b(m) \leqslant \frac{1}{b-a}\mathbb{E}(X_m - a)^- \leqslant \frac{1}{b-a}(\mathbb{E}X_m^- + a^+)$*

Fakt 9. Dla nadmartyngału $(X_n)_{n \geqslant 0}$ NWSR:

- $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$,
- $\sup_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$,
- $\lim_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$.