Definition 1. μ_n, μ probability measures on $(E, \mathcal{B}(E))$, where (E, ρ) is a metric space. We say that $\mu_n \implies \mu$, that is μ_n *converges in law/in distribution/weakly* to μ, iff $\forall_{f \in C_b(E)} \int_E f\, d\mu_n \to \int_E f\, d\mu$.

Theorem 2. *The following are equivalent:*

1. $\mu_n \implies \mu$,
2. $\forall_f$ *if* f *is uniformly continuous and bounded on* E*, then* $\int_E f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$,
3. $\forall_{G \subset E \text{ open}} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$,
4. $\forall_{F \subset E \text{ closed}} \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$,
5. $\forall_{A \in \mathcal{B}(E)}\ \mu(\partial A) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Definition 3. μ probability measure on $\mathbb{R}^d$, then its distribution function is
$F_\mu(t) = \mu((-\infty, t_1] \times \ldots \times (-\infty, t_n])$.

Theorem 4. $\mu_n \implies \mu$ *iff* $\forall_t$ *if* F_μ *is continuous at* t*, then* $\lim_{n\to\infty} F_{\mu_n}(t) = F_\mu(t)$.

Lemma 5. μ_n, μ *probability measures on* $(E, \mathcal{B}(E))$*,* $\mathcal{A}$ *a* π*-system of Borel sets (i.e.* $\forall_{A,B \in \mathcal{A}} A \cap B \in \mathcal{A}$*) such that any open set in* E *is a union of at most countably many sets in* $\mathcal{A}$*, and* $\forall_{A \in \mathcal{A}} \mu_n(A) \to \mu(A)$*, then* $\mu_n \implies \mu$.

Proposition 6. μ_n, μ *probability measures on* $\mathbb{R}^d$*, then* $\mu_n \implies \mu$ *iff*
$\forall_{f \in C_c(\mathbb{R}^d)} \int_E f\, d\mu_n \to \int_E f\, d\mu$.

Definition 7. X_n, X random variables with values in metric space (E, ρ), then X_n converges to X *in law (or in distribution, or weakly)* iff $\mu_{X_n} \implies \mu_X$. We write $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ or $X_n \xrightarrow{d} X$ or $X_n \implies X$.

Remark 8. $\int_E f(t)\, \mu_X(t) = \mathbb{E} f(X)$, so $X_n \implies X$ iff $\forall_{f \in C_b(E)} \mathbb{E} f(X_n) \to \mathbb{E} f(X)$.

Remark 9. X_n and X may be defined on distinct spaces.

Remark 10. X_n may have the same law and be very different.

Remark 11. Convergence in probability implies convergence in law, but not conversely.

Proposition 12. X_n, Y_n, X *random variables with values in* (E, ρ)*,* $X_n \implies X$*,*
$\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Then $Y_n \implies X$.

Corollary 13. $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ implies $Y_n \implies X$.

Definition 14. $\{\mu_i\}_{i\in I}$ a family of probability measures on (E,ρ), we say that this family is *tight* iff $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{K \text{ compact in } E}\forall_{i\in I}\mu_i(K) \geqslant 1-\varepsilon$.

Definition 15. $\{X_i\}$ tight iff $\{\mu_{X_i}\}$ tight.

Example 16. $E=\mathbb{R}, \mu_n=\delta_n$ not tight.

Remark 17. $E=\mathbb{R}, \{\mu_i\}$ tight iff $\forall_{\varepsilon>0}\exists_M\forall_{i\in I}\mu_i([-M,M]) \geqslant 1-\varepsilon$.

Remark 18. X_i random variables in $\mathbb{R}$, $p>0$, $\sup_i \mathbb{E}|X_i|^p<\infty \implies \{X_i\}_{i\in I}$ is tight.

Theorem 19 (Prokhorov)**.** *$\{\mu_i\}_{i\in I}$ probability measures on $\mathbb{R}^d$. This family is tight iff for any sequence of measures μ_k in the family one may choose a weakly convergent subsequence μ_{k_l}.*

Definition 1 (characteristic function)**.** $\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} d\mu(x)$

$\varphi_X(t) = \varphi_{\mu_X}(t) = \mathbb{E}e^{i\langle t,x\rangle}$

Proposition 2. $\varphi_X(0) = 1$ *and* $|\varphi_X(t)| \leqslant 1, t \in \mathbb{R}^d$

Proposition 3. φ_X *uniformly continuous on* $\mathbb{R}^d$*.*

Proposition 4. φ_X *is a nonnegatively determined function on* $\mathbb{R}^d$*.*

Theorem 5 (Bochner)**.** *A function* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *is a characteristic function of a random d-dimensional vector iff* $\varphi(0) = 1$*,* φ *is continuous and* φ *is nonnegatively determined, i.e.* $(\varphi(t_i - t_j))_{i,j}$ *is nonnegatively determined for any* t_i*'s.*

Proposition 6. $\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle b,t\rangle}\varphi_X(A^T t)$*, in particular* $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$*.*

Proposition 7. X *real random variable, if* $\mathbb{E}|X|^k < \infty$*,* $k \in \mathbb{Z}_+$*, then* $\varphi_X \in C^k(\mathbb{R})$ *and* $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E} X^k e^{itX}$*.*

Remark 8. Existence of φ'_X does not imply $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Proposition 9. *If* μ, ν *probability measures on* $\mathbb{R}^d$ *such that* $\varphi_\mu = \varphi_\nu$*, then* $\mu = \nu$*.*

Proposition 10. $X_1, \ldots, X_n$ *independent random d-dimensional variables, then* $\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\ldots\varphi_{X_n}(t)$*.*

Theorem 1. $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \varphi_{\mathcal{N}(a,\sigma^2)}(t) = e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

Theorem 2. *X random variable in $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}|X_1|^{k_1}\ldots|X_d|^{k_d} < \infty$, then $\frac{\partial^{k_1}}{\partial t_1^{k_1}}\cdots\frac{\partial^{k_d}}{\partial t_d^{k_d}}\varphi_X(t)$ exists and equals $i^{|k|}\mathbb{E}X_1^{k_1}\ldots X_d^{k_d}$.*

Remark 3. $X_1,\ldots,X_d$ independent, then $\varphi_{X_1+\ldots+X_d}(t) = \varphi_{X_1}(t)\ldots\varphi_{X_d}(t)$, but opposite is not true in general.

Theorem 4. *$X_1,\ldots,X_d$ independent iff $\forall_{t\in\mathbb{R}^d}\varphi_{(X_1,\ldots,X_d)}(t) = \varphi_{X_1}(t_1)\ldots\varphi_{X_d}(t_d)$.*

Theorem 5 (Lévy-Cramer)**.** *1. If μ_n,μ probability measures on $\mathbb{R}^d$ and $\mu_n \implies \mu$, then $\forall_{t\in\mathbb{R}^d}\varphi_{\mu_n}(t)\to\varphi_\mu(t)$.*

2. If μ_n probability measure on $\mathbb{R}^d$ and there exists function $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ such that $\forall_{t\in\mathbb{R}^d}\varphi_{\mu_n}(t)\to\varphi(t)$ and φ is continuous at 0, then there exists a probability measure μ on $\mathbb{R}^d$ such that $\varphi = \varphi_\mu$ and $\mu_n \implies \mu$.

Corollary 6. $\mu_n \implies \mu$ iff $\varphi_{\mu_n}\to\varphi_\mu$ pointwise.

Theorem 7 (Inverse Fourier Theorem)**.** *Suppose that μ is a probability measure on $\mathbb{R}^d$ and $\varphi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d)$ such that $\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi_\mu(x)|\,dx < \infty$, then μ has the density g given by the formula*

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\mu(t)e^{-i\langle t,x\rangle}dt.$$

Theorem 1 (Lévy-Cramer simplified). *$X_n \implies X$ iff $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ pointwise.*

Corollary 2. X_n, X are random vectors in $\mathbb{R}^d$, then $X_n \implies X$ iff $\forall_{t\in\mathbb{R}^d} \langle t, X_n\rangle \implies \langle t, X\rangle$.

Remark 3. We know $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, for which $\varphi_{\mathcal{N}(a,\sigma^2)}(t) = e^{ita - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$ and $X \sim a + \sigma Y$ for $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Definition 4 (canonical Gaussian distribution). The canonical d-dimensional Gaussian distribution on $\mathbb{R}^d$ is the probability measure γ_d with the density $\frac{d\gamma_d(x)}{dx} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

Equivalently, we say that a d-dimensional random vector X has the canonical Gaussian distribution if $X \sim \gamma_d$, i.e. $X_1, \dots, X_d$ are independent with $\mathcal{N}(0, 1)$-distribution. We write $X \sim \gamma_d$ or $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$.

Definition 5 (pushforward). μ – a measure on $\mathbb{R}^m$, $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ measurable,
$F_\#\mu$ – *a pushforward of* μ is the measure on $\mathbb{R}^d$ given by $F_\#\mu(A) = \mu(F^{-1}(A))$.

Definition 6 (Gaussian vector). A probability measure μ on $\mathbb{R}^d$ is called *Gaussian* or *normal* iff there exists affine $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ such that $\mu = U_\#\gamma_m$.

A d-dimensional random vector X is called Gaussian if its law is Gaussian, i.e. $X \sim UY$, $Y \sim \gamma_m$.

Remark 7. $X \sim UY = AY + b$, then $\mathbb{E}X = b, \mathrm{Cov}(X) = AA^T$.

Remark 8. $X \sim AY + b$, then $\varphi_X(t) = e^{i\langle \mathbb{E}X, t\rangle - \frac{\langle \mathrm{Cov}(x)t, t\rangle}{2}}$

Definition 9 (Gaussian again). We say that a random d-dimensional vector X (respectively, a probability measure μ on $\mathbb{R}^d$) is *Gaussian* iff $\varphi_X(t) = e^{i\langle b,t\rangle - \frac{\langle Ct,t\rangle}{2}}$, where $b \in \mathbb{R}^d$, $C \in M_{d\times d}, C = C^T, C \geqslant 0$.

Proposition 10. *These definitions are equivalent.*

Corollary 11. Every d-dimensional Gaussian vector is an affine image of d-dimensional canonical Gaussian vector.

Remark 12. Equivalently, $\langle t, X\rangle$ is Gaussian for any $t \in \mathbb{R}^d$.

Corollary 13. $X_1 \sim \mathcal{N}(b_1, C_1), X_2 \sim \mathcal{N}(b_2, C_2)$ independent Gaussian, then $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(b_1 + b_2, C_1 + C_2)$ also Gaussian.

Corollary 14. Affine image of a Gaussian vector is a Gaussian vector.

Remark 15. $X \sim \mathcal{N}(b, C)$ has the density iff $\det(C) \neq 0$ and then $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det C}} e^{-\frac{\langle C^{-1}(x-b),(x-b)\rangle}{2}}$.

Theorem 16. *If X is a Gaussian vector in $\mathbb{R}^d$, then coordinates of X are independent iff they are uncorrelated (i.e. $X_1, \dots, X_d$ independent iff $\mathrm{Cov}(X_j, X_k) = 0$ for $j \neq k$).*

Remark 17. In the theorem it is important thet the whole vector is Gaussian, not only its coordinates!

Theorem 18 (CTL in the iid case). *$X_1, X_2, \dots$ iid random variables, $\mathbb{E}X_1 = a$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$, then $\frac{X_1+\ldots+X_n-na}{\sqrt{n}\sigma} \implies \mathcal{N}(0, 1)$.*

Theorem 1 (CTL in the iid case)**.** *$X_1, X_2, \dots$ iid random variables, $\mathbb{E}X_1 = a$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$, then $\frac{X_1 + \ldots + X_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \implies \mathcal{N}(0, 1)$.*

Corollary 2 (de Moivre-Laplace)**.** $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, then $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \implies \mathcal{N}(0, 1)$.

Definition 3 (triangular array)**.** $(X_{n,k})_{n=1,2,\ldots;1 \leqslant k \leqslant k_n}$ is a *triangular array of random variables* if $\forall_n X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ are independent.

Theorem 4 (CLT – Lindeberg's version)**.** *$(X_{n,k})$ a triangular array, $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,k_n}$,*

1. $\mathbb{E}S_n \to m$
2. $\mathrm{Var}(S_n) \to \sigma^2$
3. Lindeberg's condition: $\forall_{\varepsilon > 0} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}\left(|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}| > \varepsilon\}} \right) \to 0$

Then $S_n \implies \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Lemma 5. *Lindeberg's condition implies*

- $\forall_{t>0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |X_{n,k}| \geqslant t) = 0,$
- $\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathrm{Var}(X_{n,k}) \to 0.$

Theorem 6 (Feller)**.** *Suppose that $(X_{n,k})$ is a triangular array, $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}X_{n,k} \to m$, $\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{Var}(X_{n,k}) \to \sigma^2$, and $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \implies \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, then if $\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathrm{Var}(X_{n,k}) \to 0$, then Lideberg's condition is satisfied.*

Theorem 1 (CLT Lindeberg-Levy). *Let* $(X_{n,k})$ *be a triangular array,* $\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \to m$, $\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{Var}(X_{n,k}) \to \sigma^2$, *and Lindeberg's condition be satisfied:*

$$\forall_{\varepsilon>0} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}-\mathbb{E}X_{n,k}|>\varepsilon\}} \to 0.$$

Then

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \implies \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

Proposition 2. *For* $X_1, X_2, \dots$ *iid,* $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$, *array* $X_{n,k} = \dfrac{X_k - \mathbb{E}X_k}{\sqrt{n}}$ *satisfies Lindeberg's condition.*

Proposition 3 (Lyapunov condition). *Lyapunov's condition*

$$\exists_{\delta>0} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}|^{2+\delta} \to 0$$

implies Lindeberg's condition (under CLT's assumptions about $\mathbb{E}$ *and* Var *of sums).*

Corollary 4. For $\sum \mathbb{E}X_{n,k} \to 0, \sum \mathrm{Var}(X_{n,k}) \to 1$, it follows that

$$\sup_t \left|\mathbb{P}\left(\sum X_{n,k} \leqslant t\right) - \phi(t)\right| \to 0,$$

and in particular $\mathbb{P}(\sum X_{n,k} \leqslant t) \to \phi(t) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leqslant t)$.

Theorem 5 (Berny-Esseen). $X_1, X_2, \dots, X_n$ *independent,* $\mathbb{E}X_i = 0, \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) = 1$, *then*

$$\left|\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k \leqslant t\right) - \phi(t)\right| \leqslant C_1 \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^3.$$

Corollary 6. In particular, for $X_1, \dots, X_n$ iid, $\mathbb{E}X_1 = m$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, we have

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant t\right) - \phi(t)\right| \leqslant C_2 \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left|\frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{\sqrt{n}\sigma}\right|^3 = C_2 \frac{\mathbb{E}|X_1 - \mathbb{E}X_1|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}.$$

Remark 7. Obviously $C_2 \leqslant C_1$, it is known that $C_1, C_2 \geqslant \frac{\sqrt{10}+e}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0.4097$, and also $C_1 \leqslant 0.56, C_2 \leqslant 0.4748$.

Example 8 (de Moivre-Laplace). $S_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $\left|\mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \phi\left(\frac{t-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right| \leqslant C_2 \frac{p^2+(1-p)^2}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Definition 9. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ a σ-field, X random variable, $\mathbb{E}|X| < \infty$, then $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ is a random variable such that it is $\mathcal{G}$-measurable, $\forall_{A\in\mathcal{G}} \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$.

Proposition 10. *The above exists and is unique up to a set of probability 0.*

Proposition 11. Y *random variable,* X *measurable with respect to* $\sigma(Y)$, *then* $X = h(Y)$ *for some Borel function* h.

Definition 12. $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y))$ for X, Y random variables, $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Example 1. (X, Y) has density $g_{(X,Y)}(x, y)$. Then

$$\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(y) = \frac{\int xg(x,y)\,dx}{\int g(x,y)\,dx}.$$

Proposition 2. *Conditional Expected Value is linear.*

Proposition 3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X$

Proposition 4. $X_1 \geqslant X_2 \implies \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \geqslant \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ *almost surely.*

Proposition 5. $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}(|X|\,|\mathcal{G})$ *a.s., in particular CEV is a contraction in* L^1 *because* $\mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}|X|$.

Proposition 6. X *is* $\mathcal{G}$*-measurable, then* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ *a.s.*

Proposition 7. $X \perp Y \implies \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ *a.s.*

In particular $\mathbb{E}(X|\{\varnothing, \Omega\}) = \mathbb{E}X$.

Proposition 8 (Lebesgue monotone convergence thm)**.** $0 \leqslant X_n \nearrow X$, X_n, X *integrable, then* $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \nearrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ *a.s.*

Proposition 9 (Lebesgue dominated convergence thm)**.** $|X_n| \leqslant Y$, $\mathbb{E}Y < \infty$, $X_n \to X$ *a.s., then* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ *a.s.*

Proposition 10 (Fatou lemma)**.** X_n *integrable, then* $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \geqslant \mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \middle| \mathcal{G}\right)$.

Proposition 11. X *is* $\mathcal{G}$*-measurable,* $\mathbb{E}|Y| < \infty, \mathbb{E}|XY| < \infty$*, then* $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ *a.s.*

Proposition 12. X *integrable,* $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$*, then* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2)$.

Proposition 13 (Jensen inequality)**.** $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convex,* $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty$*, then* $\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geqslant \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$.

In particular $\mathbb{E}\varphi(X) \geqslant \varphi(\mathbb{E}X)$.

Corollary 14. $\mathbb{E}|X|^p < \infty$, $p \geqslant 1$, then $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|^p \leqslant \mathbb{E}\left(|X|^p|\mathcal{G}\right)$.

In particular $\mathbb{E}(\bullet|\mathcal{G})$ is a contraction in L^p.

Filtrations and stopping times

$T \subset \mathbb{Z}$

Definition 15 (filtration)**.** A *filtration* is a sequence of σ-bodies $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ such that $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ and $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ for $t < s$.

Definition 16 (stopping time)**.** A *stopping time* with respect to filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ is a random variable $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ such that $\forall_{t\in T}\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

Proposition 17. $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ *is a stopping time iff* $\forall_{t\in T}\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Definition 1 (filtration)**.** $(\mathcal{F}_t)_T$, for T a segment in $\mathbb{Z}$, is a *filtration*, if $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ is a σ-body and $\forall_{t \leqslant s} \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$.

Definition 2 (stopping time)**.** $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ is a *stopping time*, if $\forall_{t \in T} \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ ($\iff \forall_{t \in T} \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t\}$).

Definition 3. Let $(\mathcal{F}_t)$ be a filtration, τ be a stopping time, then define

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Proposition 4. $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t\}$.

Proposition 5. *τ_1, τ_2 stopping times, then $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min(\tau_1, \tau_2)$ and $\tau_1 \vee \tau_2 = \max(\tau_1, \tau_2)$ are too.*

$\tau = t$ is a stopping time.

$\tau_1 \leqslant \tau_2$ stopping times $\implies \mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$

τ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalne.

Definition 6 (adapted process)**.** $(X_t)_{t \in T}$ is *adapted to the filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ or just $(\mathcal{F}_t)$*-adapted*, if $\forall_t$ X_t is $\mathcal{F}_t$-measurable.

Proposition 7. *$(\mathcal{F}_t)$ filtration, (X_t) is $(\mathcal{F}_t)$-adapted, τ a stopping time, then $\tau < \infty \implies X_\tau$ is $\mathcal{F}_\tau$-measurable.*

More generally, X_τ is $\mathcal{F}_\tau$-measurable on the set $\{\tau < \infty\}$,
i.e. $\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \{X_\tau \in B\} \cap \{t < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$.

Definition 8 (martingale)**.** (X_t) is a *martingale* (resp. submartingale, supermartingale) with respect to a foltration $(\mathcal{F}_t)$, if

- $\forall_{t\in T}\ X_t$ is $\mathcal{F}_t$-measurable,
- $\forall_{t\in T}\mathbb{E}|X_t| < \infty$,
- $\forall_{s\leqslant t,s,t\in T}\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ a.s. (resp. $\geqslant$, $\leqslant$).

Remark 9. X_t is a martingale iff it is both a submartingale and a supermartingale.

Remark 10. (X_t) is a $(\mathcal{F}_t)$-martingale if X_t is $\mathcal{F}_t$-measurable, integrable and $\forall_{s<t,A\in\mathcal{F}_s}\mathbb{E}(X_s\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_t\mathbb{1}_A)$ (resp. $\leqslant$ for submartingale, $\geqslant$ for supermartingale).

Remark 11. For T a segment in $\mathbb{Z}$, (X_t) is $(\mathcal{F}_t)$-martingale iff X_t is $\mathcal{F}_t$-measurable, $\mathbb{E}|X_t| < \infty$, $\mathbb{E}(X_{s+1}|\mathcal{F}_s) = X_s$ a.s. (resp. $\geqslant$ for submartingale, $\leqslant$ for supermartingale).

Remark 12. X_t submartingale iff $-X_t$ supermartingale.

Remark 13. X_t, Y_t are $\mathcal{F}_t$-martingales, then $aX_t + bY_t$ also (for submartingale take $a, b \geqslant 0$).

Definition 14. $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ filtration generated by $(X_1, X_2, \ldots)$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Fact 15. $X_1, X_2, \ldots$ independent random variables, $S_0 = 0$, $S_n = X_1+\ldots+X_n$, $(\mathcal{F}_n)$ filtration generated by (X_n).

Then S_n is a martingale iff X_n are integrable and $\mathbb{E}X_n = 0$ ($\geqslant$ for submartingale, $\leqslant$ for supermartingale).

Fact 16. X integrable random variable, $(\mathcal{F}_t)$ filtration, $X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ is a $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Fact 17. (X_t) is a $(\mathcal{F}_t)$-martingale, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convex, $\mathbb{E}|\varphi(X_t)| < \infty$, then $(\varphi(X_t), \mathcal{F}_t)$ is a submartingale.

Corollary 18. $(X_t, \mathcal{F}_t)$ a martingale, $p \geqslant 1$, $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty$, then $(|X_t|^p, \mathcal{F}_t)$ is a submartingale.

Corollary 19. $(X_t, \mathcal{F}_t)$ submartingale, then $(X_t \vee a, \mathcal{F}_t)$ submartingale.

Corollary 20. $(X_t, \mathcal{F}_t)$ martingale, then $(X_t^+, \mathcal{F}_t)$ and $(X_t^-, \mathcal{F}_t)$ submartingales (where $Y^+ = Y \wedge 0$, $Y^- = (-Y) \wedge 0$).

Fact 21 (martingale transformation)**.** $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingale, let $Y_n = X_0 + V_1(X_1 - X_0) + V_2(X_2 - X_1) + \ldots + V_n(X_n - X_{n-1})$ for V_n being $(\mathcal{F}_{n-1})$-measurable and bounded, then $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ is a martingale.

Stwierdzenie 1. *X_k jest $\mathcal{F}_k$-adaptowalny, τ moment zatrzymania, wtedy X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalne na $\{\tau < \infty\}$.*

Twierdzenie 2 (Doob optional sampling)**.** *$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ (nad, pod)martyngał, $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant N < \infty$ dwa momenty zatrzymania. Wtedy $(X_{\tau_i}, \mathcal{F}_{\tau_i})$ jest (nad, pod)martyngałem, tzn. $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})(\leqslant, \geqslant) = X_{\tau_1}$ p.n.*

W szczególności $\mathbb{E}X_{\tau_2}(\leqslant, \geqslant) = \mathbb{E}X_{\tau_1}$.

Uwaga 3. Założenie $\tau_2 \leqslant N < \infty$ jest kluczowe!

Twierdzenie 4 (tożsamość Walda)**.** *$X_1, X_2, \ldots$ iid, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, $S_0 = 0, S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, τ moment zatrzymania względem $\mathcal{F}_n$ taki, że $\mathbb{E}\tau < \infty$.*

Wtedy $\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\tau\mathbb{E}X_1$.

Fakt 5. S_n jak wyżej, $a \in \mathbb{Z}$, $\tau_a = \inf\{n : S_n = a\}$. Wówczas $\tau_a < \infty$ p.n., czyli symetryczne błądzenie losowe na $\mathbb{Z}$ z prawdopodobieństwem 1 odwiedza każdy punkt $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie 6 (o zbieżności p.n. dla martyngałów)**.** *$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ nadmartyngał taki, że $\sup_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$. Wówczas $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ istnieje p.n. oraz $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Poniższe służą dowodowi twierdzenia.

Fakt 7. (x_n) ciąg, wtedy $\lim x_n$ istnieje w szerszym sensie (tzn. być może jest nieskończona) wtw, gdy $\forall_{a<b, a,b\in\mathbb{Q}}\, U_a^b((x_n)) < \infty$, gdzie U_a^b to liczba przejść w górę przez przedział $[a, b]$ dla ciągu (x_n).

Lemat 8. *$(X_n)_{n=0}^m$ nadmartyngał, $U_a^b(m)$ liczba przejść przez $[a, b]$ dla (X_n) do chwili m. Wtedy $\mathbb{E}U_a^b(m) \leqslant \frac{1}{b-a}\mathbb{E}(X_m - a)^- \leqslant \frac{1}{b-a}(\mathbb{E}X_m^- + a^+)$*

Fakt 9. Dla nadmartyngału $(X_n)_{n\geqslant 0}$ NWSR:

- $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$,
- $\sup_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$,
- $\lim_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$.

Twierdzenie 1. *X_n nadmartyngał, $\sup_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$, wtedy $X_n \to X$ p.n. oraz $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Wniosek 2. X_n podmartyngał, $\sup \mathbb{E}X_n^+ < \infty$, to $X_n \to X$ p.n. i $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Wniosek 3. Każdy nieujemny nadmartyngał i niedodatni podmartyngał jest zbieżny p.n.

Nierówności maksymalne Dooba

Twierdzenie 4. *(M_k) martyngał, to:*

- $\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |M_k| \geqslant t\right) \leqslant \frac{1}{t}\mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|M_k|\geqslant t\right\}} \leqslant \frac{1}{t}\mathbb{E}|M_n|,$
- $p > 1, \quad \mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|M_k|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^n \mathbb{E}|M_n|^p.$

Wniosek 5. $(M_k)_{k\geqslant 1}$ martyngał, wtedy

- $t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}|M_k| \geqslant t\right) \leqslant \frac{1}{t}\sup_{k\geqslant 1}\mathbb{E}|M_k|,$

Uwaga 6. Dla (M_k) podmartyngału lub nadmartyngału też są odpowiednie nierówności maksymalne (np. w notatkach `http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=rp2&part=Ch5`).

Jednostajna całkowalność zmiennych losowych

Definicja 7. $(X_i)_{i\in I}$ rodzina zmiennych losowych jest *j*ednostajnie całkowalna, jeśli $\lim_{C\to\infty}\sup_i \mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\geqslant C\}} = 0$.

Fakt 8. (X_i) jest jednostajnie całkowalna wtw, gdy spełnione są dwa warunki:

- $\sup_i \mathbb{E}|X_i| < \infty$,
- $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{i\in I}\mathbb{P}(A) \leqslant \delta \implies \mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_A \leqslant \varepsilon$.

Przykład 9. $\mathbb{E}|X| < \infty \implies \{X\}$ jest jednostajnie całkowalna (z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).

Przykład 10. $\mathbb{E}\sup_i |X_i| < \infty \implies \{(X_i)_{i\in I}\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Twierdzenie 11. *$p > 0$, $\{|X_n|^p\}$ jednostajnie całkowalna, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \to X$ w L^p, czyli $\mathbb{E}|X_n - X|^p \to 0$.*

Twierdzenie 12. *$(M_n, \mathcal{F}_n)$ martyngał, NWSR:*

1. *$\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ jednostajnie całkowalna,*
2. *M_n zbieżny w L^1 (czyli $\exists_M \mathbb{E}|M_n - M| \to 0$),*
3. *M_n jest prawostronnie domknięty (czyli $\exists_M$, M całkowalne, $M_n = \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n)$),*
4. *$\exists_{M_\infty}$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\right)$-mierzalna, $M_n = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)$ p.n..*

Ponadto wtedy $M_n \to M_\infty$ p.n. i w L^1.

Wniosek 13 (tw. Levy'ego)**.** X całkowalna, $(\mathcal{F}_n)$ filtracja, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\right)$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ p.n. i w L^1.

Wniosek 14 (prawo 0-1 Kołmogorowa)**.** $X_1, X_2, \ldots$ niezależne, $A \in \mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, wówczas $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Twierdzenie 1 (zbieżność w L^1)**.** *$(M_n, \mathcal{F}_n)$ martyngał, NWSR:*

a) $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ *jednostajnie całkowalna,*

b) M_n *zbieżny w* L^1 *(czyli* $\exists_M \mathbb{E}|M_n - M| \to 0$*),*

c) M_n *jest prawostronnie domknięty (czyli* $\exists_M$ M *całkowalne,* $M_n = \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n)$*),*

c') $\exists_{M_\infty}$ $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\right)$*-mierzalna,* $M_n = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)$ *p.n..*

Ponadto wtedy $M_n \to M_\infty$ *p.n. i w* L^1*.*

Twierdzenie 2 (zbieżność w L^p)**.** *$(M_n, \mathcal{F}_n)$ martyngał, $p > 1$, $\forall_n \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$, NWSR:*

a) $\sup_n \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$*,*

b) $\{|M_n|^p\}_n$ *jednostajnie całkowalna,*

c) M_n *zbieżny w* L^p *(czyli* $\exists_M \mathbb{E}|M|^p < \infty, \mathbb{E}|M_n - M|^p \to 0$*),*

d) M_n *jest prawostronnie domknięty przez zmienną z* L^p
(czyli $\exists_M \mathbb{E}|M|^p < \infty, \forall_n \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n) = M_n$*),*

d') $\exists_M \mathcal{F}_\infty$*-mierzalna,* $\mathbb{E}|M_\infty| < \infty, \forall_n \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n$*.*

Ponadto wtedy $M_n \to M_\infty$ *p.n. i w* L^p*.*

Uwaga 3. Istnieje martyngał jednostajnie całkowalny $(M_n)_{n\geqslant 0}$ taki, że $\sup_n \mathbb{E}|M_n| = \infty$.

Łańcuchy Markowa

E – skończona lub przeliczalna przestrzeń stanów.

Definicja 4 (łańcuch Markowa)**.** Proces $(X_n)_{n\geqslant 0}$ o wartościach w skończonej lub przeliczalnej przestrzeni E nazywamy *łańcuchem Markowa*, jeśli zachodzi warunek $\mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1}|X_n = a_n, \dots, X_0 = a_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1}|X_n = a_n)$ o ile $\mathbb{P}(X_n = a_n, \dots, X_0 = a_0) > 0$.

Przykład 5. $X_0, X_1, X_2, \dots$ niezależne, to (X_n) ł.M.

Przykład 6. $X_0, X_1, \dots$ niezależne, to $(S_n = X_n + S_{n-1})$ ł.M.

Przykład 7. Błądzenie po wierzchołkach.

Definicja 8 (macierz przejścia)**.** X_n jest ł.M., *macierzą przejścia* w n-tym kroku $(P_n(a,b))_{a,b\in E}$ nazywamy macierz elementów $P_n(a,b) = \mathbb{P}(X_n = b|X_{n-1} = a)$ o ile $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$.

Uwaga 9. P_n macierz przejścia w n-tym kroku, $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$, wtedy

- $\forall_b P_n(a,b) \geqslant 0$,
- $\sum_b P_n(a,b) = 1$.

Definicja 10 (macierz stochastyczna)**.** Macierz $P = (p(a,b))_{a,b\in E}$ nazywamy *stochastyczną*, jeśli $\forall_{a,b} p(a,b) \geqslant 0$ oraz $\forall_a \sum_b p(a,b) = 1$.

Definicja 11 (jednorodny ł. M.)**.** Łańcuch Markowa (X_n) nazywamy *jednorodnym* z macierzą przejścia $P = (p(a,b))$, jeśli $\forall_{n,a,b}\mathbb{P}(X_n = b|X_{n-1} = a) = p(a,b)$ o ile $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$.

Przykład 12. $X_0, X_1, \dots$ niezależne, (X_n) jednorodny ł.M. wtw, gdy X_n mają jednakowy rozkład.

Przykład 13. X_i niezalezne, $(S_n = X_0 + \ldots + X_n)$ jednorodny wtw, gdy X_n mają jednakowy rozkład.

Przykład 14. Błądzenie losowe po trójkące, błądzenie losowe na $\{-a, \dots, b\}$ z odbiciem lub pochłanianiem są jednorodne.

Definicja 15 (rozkład początkowy)**.** *Rozkładem początkowym* ł.M. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ nazywamy rozkład X_0, czyli ciąg $(\pi_a)_{a\in E}$ taki, że $\mathbb{P}(X_0 = a) = \pi_a$.

Fakt 16. $P = (p(a,b))$ macierz stochastyczna, $\Pi = (\pi_a)$ rozkład na E. (X_n) jest (jednorodnym) ł.M. o macierzy przejścia P i rozkładzie poczatkowym Π wtw, gdy
$\mathbb{P}(X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n) = \pi_{a_0} p(a_0, a_1) \cdot \ldots \cdot p(a_{n-1}, a_n)$.

Twierdzenie 17 (o istnieniu ł.M.)**.** $\Pi = (\pi_a)_{a\in E}$ *dowolny rozkład na* E*,* $P = (p(a,b))_{a,b\in E}$ *macierz stochastyczna na* E*, wówczas istnieje (jednorodny) ł.M. o rozkładzie początkowym* Π *i macierzy przejścia* P*.*

Definicja 1. $\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = x)$ o ile $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$.

Fakt 2. (X_n) jednorodny ł.M. na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z macierzą przejścia P taką, że $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$. Wtedy względem $\mathbb{P}_x$, $(X_n)_{n \geqslant 0}$ jest jednorodnym ł. M. z macierzą przejścia P, o rozkładzie poczatkowym δ_x, tzn. $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = \delta_x(x) = 1$.

Definicja 3. Π układ probabilistyczny na E, wtedy $P_\Pi(A) = \sum_x \pi_x \mathbb{P}_x$.

Fakt 4. (X_n) j.ł.M. w $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ taki, że $\forall_x \mathbb{P}(X_n = x) > 0$. Wtedy dla każdego rozkładu Π na E ciąg (X_n) jest j.ł.M. względem $\mathbb{P}_\Pi$ z macierzą przejścia P i rozkładem początkowym Π.

Fakt 5. $(X_n)_{n \geqslant 0}$ j.ł.M. z macierzą przejścia P, wtedy

- $\mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = p_{xx_1} p_{x_1x_2} \cdot \ldots \cdot p_{x_{n-1}x_n}$,
- $\mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_{n+m} = x_{n+m})$
  $= \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}_{x_n}(X_1 = x_{n+1}, \ldots, X_m = x_{n+m})$,
- $\forall_{I \subset E^{n-1}, J \subset E^m} \mathbb{P}_x((X_1, \ldots, X_{n-1}) \in I, X_n = x_n, (X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in J)$
  $= \mathbb{P}_x((X_1, \ldots, X_{n-1}) \in I, X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}_{x_n}((X_1, \ldots, X_m) \in J)$.

Definicja 6 (macierz przejścia w n krokach)**.** $P(n) = (p_{x,y}(n))$,
gdzie $p_{x,y}(n) = \mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_n = y)$.

Uwaga 7. $p_{x,y}(n + m) = \sum_z p_{x,z}(n) p_{z,y}(m)$.

Uwaga 8. $P(0) = P^0 = \mathrm{Id}$

Uwaga 9. $f_{x,y}(n) = \mathbb{P}_x(X_1 \neq y, \ldots, X_{n-1} \neq y, X_n = y)$,
wtedy $p_{x,y}(n) = \sum_{m=1}^n f_{x,y}(m) p_{y,y}(n - m)$.

Klasyfikacja stanów

Definicja 10. A. *Ze stanu x da się dojść do stanu y*, ozn. $x \to y$, jeśli $\exists_{n \geqslant 0} p_{x,y}(n) > 0$.

B. Stany x, y się *komunikują*, jesli $x \to y$ oraz $y \to x$.

C. Ł.M. jest *nieprzywiedlny*, jeśli każde dwa stany się komunikują.

D. Stan x jest *nieistotny*, jeśli $\exists_y \, x \to y \wedge y \nrightarrow x$.

E. Stan x jest *pochłaniający*, jeśli $p_{x,x} = 1$.

F. Zbiór stanów $C \subset E$ jest *zamknięty*, jeśli $\forall_{x \in C} \, x \to y \implies y \in C$.

Stany chwilowe i powracające

Definicja 11. $F_{x,y} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{x,y}(n) = \sum \mathbb{P}_x \left(\exists_{n \geqslant 1} X_n = y\right)$.

Definicja 12. Mówimy, że stan x jest:

a) *chwilowy*, jeśli $F_{xx} < 1$,

b) *powracający*, jeśli $F_{xx} = 1$.

Uwaga 13. $x \to y, y \to z \implies x \to z$.

Uwaga 14. $\leftrightarrow$ to relacja równoważności.

Uwaga 15. C zamknięty, to można rozpatrywać ł.M. o zbiorze stanów C.

Uwaga 16. Ł.M. jest nieprzywiedlny wtw, gdy jedyne zamknięte zbiory to $\varnothing, E$.

Definicja 17 (liczba wizyt w stanie x)**.** $N_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = X\}}$

Fakt 18. Dla $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}_x(N_y \geqslant k) = F_{xy} F_{yy}^{k-1}$.

Wniosek 19. Jeśli x chwilowy, to $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 0$, czyli $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$.

Wniosek 20. Jeśli x powracający, to $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$.

Twierdzenie 21 (kryterium powracalności)**.** *Stan x jest* powracający *wtw, gdy* $\sum_n p_{xx}(n) = \infty$. *Stan x jest* chwilowy *wtw, gdy* $\sum_n p_{xx}(n) < \infty$.

Fakt 22. $\sum_n p_{xx}(n) = \dfrac{1}{1 - F_{xx}}$

Wniosek 1. Jeśli $x \leftrightarrow y$, to x powracający wtw, gdy y powracający.

Definicja 2 (chwilowy/powracający nieprzywiedlny ł.M.)**.** Jeśli ł.M. jest nieprzywiedlny, to albo wszystkie stany są chwilowe (ł.M. jest *chwilowy*), albo wszystkie stany są powracające (ł.M. jest *powracający*).

Fakt 3. (X_n) powracający nieprzywiedlny ł.M., wówczas $\forall_{x,y} F_{xy} = 1$.

Wniosek 4. Nieprzywiedlny powracający ł.M. o dowolnym rozkładzie początkowym odwiedza każdy stan z prawdopodobieństwem 1, tzn. $\mathbb{P}_\Pi\left(\forall_{y\in E} \exists_n X_n = y\right) = 1$.

Przykład 5. W notatkach są przykłady.

Okresowość ł.M.

Definicja 6 (okres)**.** $x \in E$, *okresem* stanu $x \in E$ nazywamy liczbę
$o(x) = \mathrm{NWD}\{n \geqslant 1 : p_{x,x}(n) = 0\}$

Fakt 7. $x \leftrightarrow y \implies o(x) = o(y)$

Wniosek 8. Jeśli ł.M. jest nieprzywiedlny, to wszystkie stany mają ten sam okres.

Definicja 9 (okres)**.** (X_n) nieprzywiedly ł.M. *Okresem* takiego łańcucha nazywamy okres dowolnego jego stanu.

Mówimy, że łańcuch jest *okresowy*, jeśli ma okres większy niż 1, a *nieokresowy*, jeśli ma okres równy 1.

Fakt 10. Jeśli nieprzywiedlny ł.M. jest nieokresowy, to $\forall_{x,y} \exists_{n_0} \forall_{n \geqslant n_0} \, p_{x,y}(n) > 0$.

Wniosek 11. Dla nieprzywiedlnego nieokresowego ł.M. o skończonej przestrzeni stanów E istnieje n_0 takie, że $\forall_{n \geqslant n_0} \forall_{x,y} \, p_{x,y}(n) > 0$.

Rozkłady stacjonarne

Definicja 12. Rozkład probabilistyczny $\Pi = (\pi_x)_{x\in E}$ nazywamy stacjonarnym dla ł.M. o macierzy przejścia $P = (p_{x,y})_{x,y\in E}$, jeśli $\forall_x \, \mathbb{P}_\Pi(X_1 = x) = \pi_x$.

Fakt 1. Π rozkład stacjonarny wtw, gdy $\Pi = \Pi P$, tj. $\forall_x \pi_x = \sum_{y\in E} \pi_y p_{y,x}$.

Uwaga 2. Jeśli Π stacjonarny, to $\forall_x \mathbb{P}_\Pi(X_n = x) = \pi_x$.

Twierdzenie 3. *Jeśli przestrzeń stanów jest skończona, to istnieje rozkład stacjonarny.*

Twierdzenie 4 (ergodyczne dla skończonej przestrzeni stanów)**.** *$(X_n)_{n>0}$ ł.M. nieokresowy, nieprzywiedlny, o macierzy przejścia P i rozkładzie stacjonarnym Π. Wówczas*

$$\forall_{x,y\in E} \lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = \pi_y,$$

a nawet $\exists_{C<\infty,\gamma<1} |p_{x,y}(n) - \pi_y| \leqslant C \cdot \gamma^n$.

Twierdzenie 5. *Rozkład stacjonarny w nieprzywiedlnym ł.M. jest jednoznaczny.*

Stwierdzenie 6. *Skończony nieprzywiedlny ł.M., Π rozkład stacjonarny. Wtedy $\forall_x \pi_x > 0$ oraz*

$$\forall_x \pi_x = \frac{1}{\mu_x}, \quad \mu_x = \mathbb{E} t_x = \mathbb{E} \inf\{n \geqslant 1 : X_n = n\}.$$

Definicja 7 (częstość przebywania w zbiorze)**.** $\nu_A(n) = \dfrac{1}{n}\#\{1 \leqslant k \leqslant n : x_k \in A\}$

Twierdzenie 8 (ergodyczne znowu)**.** *(X_n) nieprzywiedlny nieokresowy ł.M. o skończonej przestrzeni stanów i dowolnym rozkładzie początkowym, wtedy $\forall_{A\subset E} \lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \sum_{x\in A} \pi_x$ p.n., gdzie Π to rozkład stacjonarny.*

Twierdzenie 9 (ergodyczne ogólne)**.** *(X_n) nieprzywiedlny nieodwracalny ł.M., dla którego istnieje rozkład stacjonarny Π. Wówczas*

(i) Π *jest jedyny i* $\forall_{x,y} \lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = \pi_y$,

(ii) *ł.M. jest powracający,* $\forall_x \pi_x > 0$, $\pi_x = \frac{1}{\mu_x}, \mu_x = \mathbb{E}_x \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}$,

(iii) $\forall_{A\subset E} \lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \Pi(A) = \sum_{x\in A} \pi_x$ *p.n.*

Definicja 10 (prawdopodobieństwo dojścia z x do F)**.** $p_F(x) = \mathbb{P}_x\left(\exists_{n\geqslant 0} X_n \in F\right)$

Definicja 11 (czas oczekiwania na dojście)**.** $m_F(x) = \mathbb{E}_x \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in F\}$

Fakt 12. p_F, m_F spełniają układ równań (o jednoznacznym rozwiązaniu dla $|E| < +\infty$):

$$\begin{cases} p_F(x) = 1 & \forall_{x\in F} \\ p_F(x) = 0 & x \nrightarrow F(\iff \forall_{y\in F,n} p_{xy}(n) = 0) \\ p_F(x) = \sum_{y\in F} p_{xy} p_F(y) & \forall_{x\notin F} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_F(x) = 0 & \forall_{x\in F} \\ m_F(x) = \infty & p_F(x) < 1 \\ m_F(x) = 1 + \sum_{y\in F} p_{xy} m_F(y) & \forall_{x\notin F} \end{cases}$$