Twierdzenie 1 (zbieżność w L^1). *$(M_n, \mathcal{F}_n)$ martyngał, NWSR:*

a) $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ *jednostajnie całkowalna,*

b) M_n *zbieżny w* L^1 *(czyli* $\exists_M \mathbb{E}|M_n - M| \to 0$*),*

c) M_n *jest prawostronnie domknięty (czyli* $\exists_M$*,* M *całkowalne,* $M_n = \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n)$*),*

c') $\exists M_\infty$ $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\right)$*-mierzalna,* $M_n = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)$ *p.n..*

Ponadto wtedy $M_n \to M_\infty$ *p.n. i w* L^1*.*

Twierdzenie 2 (zbieżność w L^p). *$(M_n, \mathcal{F}_n)$ martyngał, $p > 1$, $\forall_n \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$, NWSR:*

a) $\sup_n \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$*,*

b) ${|M_n|^p}_n$ *jednostajnie całkowalne,*

c) M_n *zbieżny w* L^p *(czyli* $\exists M, \mathbb{E}|M|^p < \infty, \mathbb{E}|M_n - M|^p \to 0$*),*

d) M_n *jest prawostronnie domknięty przez zmienną z* L^p *(czyli* $\exists M, \mathbb{E}|M|^p < \infty, \forall_n \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n) = M_n$*),*

d') $\exists M \mathcal{F}_\infty$*-mierzalna,* $\mathbb{E}|M_\infty| < \infty, \forall_n \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n$*.*

Ponadto wtedy $M_n \to M_\infty$ *p.n. i w* L^p*.*

Uwaga 3. Istnieje martyngał jednostajnie całkowalny $(M_n)_{n\geqslant 0}$ taki, że $\sup_n \mathbb{E}|M_n| = \infty$.

Łańcuchy Markowa

E – skończona lub przeliczalna przestrzeń stanów.

Definicja 4 (łańcuch Markowa)**.** Proces $(X_n)_{n\geqslant 0}$ o wartościach w skończonej lub przeliczalnej przestrzeni E nazywamy *łańcuchem Markowa*, jeśli zachodzi warunek $\mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1}|X_n = a_n, \ldots, X_0 = a_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1}|X_n = a_n)$ o ile $\mathbb{P}(X_n = a_n, \ldots, X_0 = a_0) > 0$.

Przykład 5. $X_0, X_1, X_2, \ldots$ niezależne, to (X_n) ł.M.

Przykład 6. $X_0, X_1, \ldots$ niezależne, to $(S_n = X_n + S_{n-1})$ ł.M.

Przykład 7. Błądzenie po wierzchołkach.

Definicja 8 (macierz przejścia)**.** X_n jest ł.M., *macierzą przejścia* w n-tym kroku $(P_n(a,b))_{a,b\in E}$ nazywamy macierz elementów $P_n(a,b) = \mathbb{P}(X_n = b, X_{n-1} = a)$ o ile $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$.

Uwaga 9. P_n macierz przejścia w n-tym kroku, $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$, wtedy

- $\forall_b P_n(a,b) \geqslant 0$,
- $\sum_b P_n(a,b) = 1$.

Definicja 10 (macierz stochastyczna)**.** Macierz $P = (p(a,b))_{a,b\in E}$ nazywamy *stochastyczną*, jeśli $\forall_{a,b} p(a,b) \geqslant 0$ oraz $\forall_a \sum_b p(a,b) = 1$.

Definicja 11 (jednorodny ł. M.)**.** Łańcuch Markowa (X_n) nazywamy *jednorodnym* z macierzą przejścia $P = (p(a,b))$, jeśli $\forall_{n,a,b}\mathbb{P}(X_n = b|X_{n-1} = a) = p(a,b)$ o ile $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$.

Przykład 12. $X_0, X_1, \ldots$ niezależne, (X_n) jednorodny ł.M. wtw, gdy X_n mają jednakowy rozkład.

Przykład 13. X_i niezalezne, $(S_n = X_0 + \ldots + X_n)$ jednorodny wtw, gdy X_n mają jednakowy rozkład.

Przykład 14. Błądzenie losowe po trójkące, błądzenie losowe na $\{-a, \ldots, b\}$ z odbiciem lub pochłanianiem są jednorodne.

Definicja 15 (rozkład początkowy)**.** *Rozkładem początkowym* ł.M. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ nazywamy rozkład X_0, czyli ciąg $(\pi_a)_{a\in E}$ taki, że $\mathbb{P}(X_0 = a) = \pi_a$.

Fakt 16. $P = (p(a,b))$ macierz stochastyczna, $\Pi = (\pi_a)$ rozkład na E. (X_n) jest (jednorodnym) ł.M. o macierzy przejścia P i rozkładzie poczatkowym Π wtw, gdy $\mathbb{P}(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n) = \pi_{a_0} p(a_0, a_1) \cdot \ldots \cdot p(a_{n-1}, a_n)$.

Twierdzenie 17 (o istnieniu ł.M.)**.** *$\Pi = (\pi_a)_{a\in E}$ dowolny rozkład na E, $P = (p(a,b))_{a,b\in E}$ macierz stochastyczna na E, wówczas istnieje (jednorodny) ł.M. o rozkładzie początkowym Π i macierzy przejścia P.*