Twierdzenie 1. *X_n nadmartyngał, $\sup_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$, wtedy $X_n \to X$ p.n. oraz $\mathbb{E}|X| < \infty$.*

Wniosek 2. X_n podmartyngał, $\sup \mathbb{E}X_n^+ < \infty$, to $X_n \to X$ p.n. i $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Wniosek 3. Każdy nieujemny nadmartyngał i niedodatni podmartyngał jest zbieżny p.n.

Nierówności maksymalne Dooba

Twierdzenie 4. *(M_k) martyngał, to:*

- $\mathbb{P}\left(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |M_k| \geqslant t\right) \leqslant \frac{1}{t}\mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|M_k|\geqslant t\right\}} \leqslant \frac{1}{t}\mathbb{E}|M_n|,$
- $p > 1, \quad \mathbb{E}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |M_k|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^n \mathbb{E}|M_n|^p.$

Wniosek 5. $(M_k)_{k\geqslant 1}$ martyngał, wtedy

- $t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\sup\limits_{k\geqslant 1} |M_k| \geqslant t\right) \leqslant \frac{1}{t}\sup\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{E}|M_k|,$

Uwaga 6. Dla (M_k) podmartyngału lub nadmartyngału też są odpowiednie nierówności maksymalne (np. w notatkach `http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=rp2&part=Ch5`).

Jednostajna całkowalność zmiennych losowych

Definicja 7. $(X_i)_{i\in I}$ rodzina zmiennych losowych jest *j*ednostajnie całkowalna, jeśli $\lim_{C\to\infty}\sup_i \mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\geqslant C\}} = 0$.

Fakt 8. (X_i) jest jednostajnie całkowalna wtw, gdy spełnione są dwa warunki:

- $\sup_i \mathbb{E}|X_i| < \infty$,
- $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{i\in I}\mathbb{P}(A)\leqslant\delta \implies \mathbb{E}|X_i|\mathbb{1}_A\leqslant\varepsilon$.

Przykład 9. $\mathbb{E}|X|<\infty \implies \{X\}$ jest jednostajnie całkowalna (z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).

Przykład 10. $\mathbb{E}\sup_i|X_i|<\infty \implies \{(X_i)_{i\in I}\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Twierdzenie 11. *$p>0$, $\{|X_n|^p\}$ jednostajnie całkowalna, $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$, to $X_n\to X$ w L^p, czyli $\mathbb{E}|X_n-X|^p\to 0$.*

Twierdzenie 12. *$(M_n,\mathcal{F}_n)$ martyngał, NWSR:*

1. *$\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ jednostajnie całkowalna,*
2. *M_n zbieżny w L^1 (czyli $\exists_M\mathbb{E}|M_n-M|\to 0$),*
3. *M_n jest prawostronnie domknięty (czyli $\exists_M$, M całkowalne, $M_n=\mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n)$),*
4. *$\exists_{M_\infty}$, $\mathcal{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{F}_n\right)$-mierzalna, $M_n=\mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)$ p.n..*

Ponadto wtedy $M_n\to M_\infty$ p.n. i w L^1.

Wniosek 13 (tw. Levy'ego)**.** X całkowalna, $(\mathcal{F}_n)$ filtracja, $\mathcal{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{F}_n\right)$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\to\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ p.n. i w L^1.

Wniosek 14 (prawo 0-1 Kołmogorowa)**.** $X_1,X_2,\ldots$ niezależne, $A\in\mathcal{F}=\bigcap_{n=1}^\infty\sigma(X_n,X_{n+1},\ldots)$, wówczas $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.