

Twierdzenie 1. X_n nadmartynał, $\sup_n \mathbb{E}X_n^- < \infty$, wtedy $X_n \rightarrow X$ p.n. oraz $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Wniosek 2. X_n podmartynał, $\sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty$, to $X_n \rightarrow X$ p.n. i $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Wniosek 3. Każdy nieujemny nadmartynał i niedodatni podmartynał jest zbieżny p.n.

Nierówności maksymalne Dooba

Twierdzenie 4. (M_k) martynał, to:

- $\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |M_k| \geq t\right) \leq \frac{1}{t} \mathbb{E}|M_n| \mathbb{1}_{\{\max_{1 \leq k \leq n} |M_k| \geq t\}} \leq \frac{1}{t} \mathbb{E}|M_n|,$
- $p > 1, \quad \mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq n} |M_k|^p \leq \left(\frac{p}{p+1}\right)^n \mathbb{E}|M_n|^p.$

Wniosek 5. $(M_k)_{k \geq 1}$ martynał, wtedy

- $t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 1} |M_k| \geq t\right) \leq \frac{1}{t} \sup_{k \geq 1} \mathbb{E}|M_k|,$

Wniosek 6. (M_k) podmartynał lub nadmartynał (o co chodzi?).

Jednostajna całkowalność zmiennych losowych

Definicja 7. $(X_i)_{i \in I}$ rodzina zmiennych losowych jest jednostajnie całkowalna, jeśli $\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_i \mathbb{E}|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| \geq C\}} = 0$.

Fakt 8. (X_i) jest jednostajnie całkowalna wtw, gdy spełnione są dwa warunki:

- $\sup_i \mathbb{E}|X_i| < \infty,$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall i \in I \mathbb{P}(A) \leq \delta \implies \mathbb{E}|X_i| \mathbb{1}_A \leq \varepsilon.$

Przykład 9. $\mathbb{E}|X| < \infty \implies \{X\}$ jest jednostajnie całkowalna (z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).

Przykład 10. $\mathbb{E} \sup_i |X_i| < \infty \implies \{(X_i)_{i \in I}\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Twierdzenie 11. $p > 0, \{|X_n|^p\}$ jednostajnie całkowalna, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \rightarrow X$ w L^p , czyli $\mathbb{E}|X_n - X|^p \rightarrow 0$.

Twierdzenie 12. (M_n, \mathcal{F}_n) martynał, NWSR:

1. $\{M_n\}_{n \geq 0}$ jednostajnie całkowalna,
2. M_n zbieżny w L^1 (czyli $\exists_M \mathbb{E}|M_n - M| \rightarrow 0$),
3. M_n jest prawostronnie domknięty (czyli \exists_M, M całkowalne, $M_n = \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n)$),
4. $\exists_{M_\infty}, \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n)$ -mierzalna, $M_n = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)$ p.n..

Wniosek 13 (tw. Levy'ego). X całkowalna, (\mathcal{F}_n) filtracja, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n)$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ p.n. i w L^1 .

Wniosek 14 (prawo 0-1 Kołmogorowa). X_1, X_2, \dots niezależne, $A \in \mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$, wówczas $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.