

Twierdzenie 1 (zbieżność w L^1). (M_n, \mathcal{F}_n) *martyngał*, NWSR:

- a) $\{M_n\}_{n \geq 0}$ *jednostajnie całkowalna*,
- b) M_n *zbieżny w L^1* (czyli $\exists_M \mathbb{E}|M_n - M| \rightarrow 0$),
- c) M_n *jest prawostronnie domknięty* (czyli $\exists_M M$ *całkowalne*, $M_n = \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n)$),
- c') $\exists_{M_\infty} \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n)$ -*mierzalna*, $M_n = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n)$ *p.n.*.

Ponadto wtedy $M_n \rightarrow M_\infty$ *p.n.* i w L^1 .

Twierdzenie 2 (zbieżność w L^p). (M_n, \mathcal{F}_n) *martyngał*, $p > 1$, $\forall_n \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$, NWSR:

- a) $\sup_n \mathbb{E}|M_n|^p < \infty$,
- b) $\{|M_n|^p\}_n$ *jednostajnie całkowalna*,
- c) M_n *zbieżny w L^p* (czyli $\exists_M \mathbb{E}|M|^p < \infty$, $\mathbb{E}|M_n - M|^p \rightarrow 0$),
- d) M_n *jest prawostronnie domknięty przez zmienną z L^p*
(czyli $\exists_M \mathbb{E}|M|^p < \infty$, $\forall_n \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n) = M_n$),
- d') $\exists_M \mathcal{F}_\infty$ -*mierzalna*, $\mathbb{E}|M_\infty| < \infty$, $\forall_n \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n$.

Ponadto wtedy $M_n \rightarrow M_\infty$ *p.n.* i w L^p .

Uwaga 3. Istnieje martyngał jednostajnie całkowalny $(M_n)_{n \geq 0}$ taki, że $\sup_n \mathbb{E}|M_n| = \infty$.

Łańcuchy Markowa

E – skończona lub przeliczalna przestrzeń stanów.

Definicja 4 (łańcuch Markowa). Proces $(X_n)_{n \geq 0}$ o wartościach w skończonej lub przeliczalnej przestrzeni E nazywamy *łańcuchem Markowa*, jeśli zachodzi warunek $\mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n, \dots, X_0 = a_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n)$ o ile $\mathbb{P}(X_n = a_n, \dots, X_0 = a_0) > 0$.

Przykład 5. X_0, X_1, X_2, \dots niezależne, to (X_n) ł.M.

Przykład 6. X_0, X_1, \dots niezależne, to $(S_n = X_n + S_{n-1})$ ł.M.

Przykład 7. Błądzenie po wierzchołkach.

Definicja 8 (macierz przejścia). X_n jest ł.M., *macierzą przejścia* w n -tym kroku $(P_n(a, b))_{a, b \in E}$ nazywamy macierz elementów $P_n(a, b) = \mathbb{P}(X_n = b | X_{n-1} = a)$ o ile $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$.

Uwaga 9. P_n macierz przejścia w n -tym kroku, $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$, wtedy

- $\forall_b P_n(a, b) \geq 0$,
- $\sum_b P_n(a, b) = 1$.

Definicja 10 (macierz stochastyczna). Macierz $P = (p(a, b))_{a, b \in E}$ nazywamy *stochastyczną*, jeśli $\forall_{a, b} p(a, b) \geq 0$ oraz $\forall_a \sum_b p(a, b) = 1$.

Definicja 11 (jednorodny ł. M.). Łańcuch Markowa (X_n) nazywamy *jednorodnym* z macierzą przejścia $P = (p(a, b))$, jeśli $\forall_{n, a, b} \mathbb{P}(X_n = b | X_{n-1} = a) = p(a, b)$ o ile $\mathbb{P}(X_{n-1} = a) > 0$.

Przykład 12. X_0, X_1, \dots niezależne, (X_n) jednorodny ł.M. wtw, gdy X_n mają jednakowy rozkład.

Przykład 13. X_i niezależne, $(S_n = X_0 + \dots + X_n)$ jednorodny wtw, gdy X_n mają jednakowy rozkład.

Przykład 14. Błądzenie losowe po trójkące, błądzenie losowe na $\{-a, \dots, b\}$ z odbiciem lub pochłanianiem są jednorodne.

Definicja 15 (rozkład początkowy). *Rozkładem początkowym* ł.M. $(X_n)_{n \geq 0}$ nazywamy rozkład X_0 , czyli ciąg $(\pi_a)_{a \in E}$ taki, że $\mathbb{P}(X_0 = a) = \pi_a$.

Fakt 16. $P = (p(a, b))$ macierz stochastyczna, $\Pi = (\pi_a)$ rozkład na E . (X_n) jest (jednorodnym) ł.M. o macierzy przejścia P i rozkładzie początkowym Π wtw, gdy $\mathbb{P}(X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n) = \pi_{a_0} p(a_0, a_1) \cdot \dots \cdot p(a_{n-1}, a_n)$.

Twierdzenie 17 (o istnieniu ł.M.). $\Pi = (\pi_a)_{a \in E}$ dowolny rozkład na E , $P = (p(a, b))_{a, b \in E}$ macierz stochastyczna na E , wówczas istnieje (jednorodny) ł.M. o rozkładzie początkowym Π i macierzy przejścia P .