Fakt 1. Π rozkład stacjonarny wtw, gdy $\Pi = \Pi P$, tj. $\forall_x \pi_x = \sum_{y \in E} \pi_y p_{y,x}$.

Uwaga 2. Jeśli Π stacjonarny, to $\forall_x \mathbb{P}_\Pi(X_n = x) = \pi_x$.

Twierdzenie 3. *Jeśli przestrzeń stanów jest skończona, to istnieje rozkład stacjonarny.*

Twierdzenie 4 (ergodyczne dla skończonej przestrzeni stanów)**.** $(X_n)_{n>0}$ *ł.M. nieokresowy, nieprzywiedlny, o macierzy przejścia* P *i rozkładzie stacjonarnym* Π*. Wówczas*

$$\forall_{x,y \in E} \lim_{n \to \infty} p_{x,y}(n) = \pi_y,$$

a nawet $\exists_{C<\infty, \gamma<1} |p_{x,y}(n) - \pi_y| \leqslant C \cdot \gamma^n$.

Twierdzenie 5. *Rozkład stacjonarny w nieprzywiedlnym ł.M. jest jednoznaczny.*

Stwierdzenie 6. *Skończony nieprzywiedlny ł.M.,* Π *rozkład stacjonarny. Wtedy* $\forall_x \pi_x > 0$ *oraz*

$$\forall_x \pi_x = \frac{1}{\mu_x}, \quad \mu_x = \mathbb{E} t_x = \mathbb{E} \inf\{n \geqslant 1 : X_n = n\}.$$

Definicja 7 (częstość przebywania w zbiorze)**.** $\nu_A(n) = \dfrac{1}{n} \#\{1 \leqslant k \leqslant n : x_k \in A\}$

Twierdzenie 8 (ergodyczne znowu)**.** (X_n) *nieprzywiedlny nieokresowy ł.M. o skończonej przestrzeni stanów i dowolnym rozkładzie początkowym, wtedy* $\forall_{A \subset E} \lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \sum_{x \in A} \pi_x$ *p.n., gdzie* Π *to rozkład stacjonarny.*

Twierdzenie 9 (ergodyczne ogólne)**.** (X_n) *nieprzywiedlny nieodwracalny ł.M., dla którego istnieje rozkład stacjonarny* Π*. Wówczas*

(i) Π *jest jedyny i* $\forall_{x,y} \lim_{n\to\infty} p_{x,y}(n) = \pi_y$,

(ii) ł.M. jest powracający, $\forall_x \pi_x > 0$, $\pi_x = \frac{1}{\mu_x}, \mu_x = \mathbb{E}_x \inf\{n \geqslant 1 : X_0 = x\}$,

(iii) $\forall_{A \subset E} \lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \Pi(A) = \sum_{x \in A} \pi_x$ *p.n.*

Definicja 10 (prawdopodobieństwo dojścia z x do F)**.** $p_F(x) = \mathbb{P}_x\left(\exists_{n \geqslant 0} X_n \in F\right)$

Definicja 11 (czas oczekiwania na dojście)**.** $m_F(x) = \mathbb{E}_x \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in F\}$

Fakt 12. p_F, m_F spełniają układ równań (o jednoznacznym rozwiązaniu dla $|E| < +\infty$):

$$\begin{cases} p_F(x) = 1 & \forall_{x \in F} \\ p_F(x) = 0 & x \nrightarrow F(\iff \forall_{y \in F, n} p_{xy}(n) = 0) \\ p_F(x) = \sum_{y \in F} p_{xy} p_P(y) & \forall_{x \notin F} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_F(x) = 0 & \forall_{x \in F} \\ m_F(x) = \infty & p_F(x) < 1 \\ m_F(x) = 1 + \sum_{y \in F} p_{xy} m_F(y) & \forall_{x \notin F} \end{cases}$$