Definicja 1. $\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = x)$ o ile $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$.

Fakt 2. (X_n) jednorodny ł.M. na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z macierzą przejścia P taką, że $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$. Wtedy względem $\mathbb{P}_x$, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ jest jednorodnym ł. M. z macierzą przejścia P, o rozkładzie poczatkowym δ_x, tzn. $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = \delta_x(x) = 1$.

Definicja 3. Π układ probabilistyczny na E, wtedy $P_\Pi(A) = \sum_x \pi_x \mathbb{P}_x$.

Fakt 4. (X_n) j.ł.M. w $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ taki, że $\forall_x \mathbb{P}(X_n = x) > 0$. Wtedy dla każdego rozkładu Π na E ciąg (X_n) jest j.ł.M. względem $\mathbb{P}_\Pi$ z macierzą przejścia P i rozkładem początkowym P.

Fakt 5. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ j.ł.M. z macierzą przejścia P, wtedy

- $\mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_{xx_1} p_{x_1x_2} \cdot \ldots \cdot p_{x_{n-1}x_n}$,
- $\mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \dots, X_{n+m} = x_{n+m})$
  $= \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}_{x_n}(X_1 = x_{n+1}, \dots, X_m = x_{n+m})$,
- $\forall_{I\subset E^{n-1}, J\subset E^m}\, \mathbb{P}_x((X_1, \dots, X_{n-1}) \in I, X_n = x_n, (X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in J)$
  $= \mathbb{P}_x((X_1, \dots, X_{n-1}) \in I, X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}_{x_n}((X_1, \dots, X_m) \in J)$.

Definicja 6 (macierz przejścia w n krokach)**.** $P(n) = (p_{x,y}(n))$, gdzie $p_{x,y}(n) = \mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_n = y)$.

Uwaga 7. $p_{x,y}(n + m) = \sum_z p_{x,z}(n) p_{z,y}(m)$.

Uwaga 8. $P(0) = P^0 = \mathrm{Id}$

Uwaga 9. $f_{x,y}(n) = \mathbb{P}_x(X_1 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y, X_n = y)$, wtedy $p_{x,y}(n) = \sum_{m=1}^n f_{x,y}(m) p_{y,y}(n-m)$.

Klasyfikacja stanów

Definicja 10. A. *Ze stanu x da się dojść do stanu y*, ozn. $x \to y$, jeśli $\exists_{n \geqslant 0} p_{x,y}(n) > 0$.

B. Stany x, y się *komunikują*, jesli $x \to y$ oraz $y \to x$.

C. Ł.M. jest *nieprzywiedlny*, jeśli każde dwa stany się komunikują.

D. Stan x jest *nieistotny*, jeśli $\exists_y \, x \to y \wedge y \nrightarrow x$.

E. Stan x jest *pochłaniający*, jeśli $p_{x,x} = 1$.

F. Zbiór stanów $C \subset E$ jest *zamknięty*, jeśli $\forall_{x \in C} \, x \to y \implies y \in C$.

Stany chwilowe i powracające

Definicja 11. $F_{x,y} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{x,y}(n) = \sum \mathbb{P}_x \left(\exists_{n \geqslant 1} X_n = y \right)$.

Definicja 12. Mówimy, że stan x jest:

a) *chwilowy*, jeśli $F_{xx} < 1$,

b) *powracający*, jeśli $F_{xx} = 1$.

Uwaga 13. $x \to y, y \to z \implies x \to z$.

Uwaga 14. $\leftrightarrow$ to relacja równoważności.

Uwaga 15. C zamknięty, to można rozpatrywać ł.M. o zbiorze stanów C.

Uwaga 16. Ł.M. jest nieprzywiedlny wtw, gdy jedyne zamknięte zbiory to $\varnothing, E$.

Definicja 17 (liczba wizyt w stanie x)**.** $N_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = X\}}$

Fakt 18. Dla $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}_x(N_y \geqslant k) = F_{xy} F_{yy}^{k-1}$.

Wniosek 19. Jeśli x chwilowy, to $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 0$, czyli $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$.

Wniosek 20. Jeśli x powracający, to $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$.

Twierdzenie 21 (kryterium powracalności)**.** *Stan x jest* powracający *wtw, gdy* $\sum_n p_{xx}(n) = \infty$.

Stan x jest chwilowy *wtw, gdy* $\sum_n p_{xx}(n) < \infty$.