Lycée Louis de Broglie
&
PTSI Jean-Baptiste Say

2023-2026

Cours de Mathématiques
1ère, Tale (Expert), PTSI sup

Par Peter.C

Cours et exos sur `https://pi-t-maths.netlify.app`

Sommaire

Part I

Lycée - Spécialité

1 Suites Numériques

1.1 Généralités

Les suites numériques sont des listes ordonnées d'éléments numériques, des applications sur $\mathbb{R}$ d'un entier naturel ; ainsi $n \mapsto u_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. On les note généralement (u_n) où n est l'indice du terme.

1.2 Suites Arithmétiques

Une suite arithmétique a une différence constante entre ses termes successifs.

Sens de Variation :

- $r > 0$, u croissante,
- $r = 0$, u constante,
- $r < 0$, u décroissante

1.3 Suites Géométriques

Une suite géométrique a un rapport constant entre ses termes successifs.

Sens de Variation :

- $q > 1$, u croissante si $u_0 > 0$, décroissante sinon,
- $1 > q > 0$, u décroissante si $u_0 > 0$, croissante sinon,
- $q = 0$ ou $u_0 = 0$, u constante égale à 0

1.4 Formules

	Suite Arithmétique	**Suite Géométrique**
Récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times q$
Forme Explicite	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des Termes	$S_n = (n-p+1) \times \dfrac{(u_n + u_p)}{2}$	$S_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Calculs de Nombres	$1 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 \times ... \times n = \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Table 1: Récapitulatif des Formules sur les Suites Numériques

Avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + ... + u_{n-1} + u_n$

1.5 Déterminer le sens de variation

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

- étudier le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$
- étudier les variations de f telle que $u_n = f(n)$
- conjecturer et démontrer par récurence

1.6 Limites de suites

Définition On dit qu'une suite (u_n) converge vers une limite réelle l lorsque $n \to +\infty$ ssi tout intervalle ouvert contenant l contient tout les termes de la suite à partir d'un certain rang. Formellement :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_*^+)^2, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad u_n \in]l-a, l+b[$$

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Si la suite diverge vers un infini, la suite aura tout ses termes supérieures (resp. inferieurs) à tout réel A à partir d'un certain rang. On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$$

Def Suite Monotone

On dit qu'une suite (u_n) est monotone sur I ssi elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.

Def Suite Minorée/Majorée

- m **minore** (u_n) $\Rightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
- M **majore** (u_n) $\Rightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$

Théorème des Suites Monotones

Si une suite (u_n) est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors elle converge.

Justification de la limite d'une suite définie par récurrence

On a donc (u_n) croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée), donc elle converge vers un réel l. On note que $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = l \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l}$$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l) = l}$ **par unicité de la limite**

donc $\boxed{l = f(l) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow l = a}$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = a}$

Limites usuelles et opérations sur les limites

Voir Limites de fonctions

2 Probabilités

2.1 Généralités

Définitions

- **Univers** Ω : Ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : Sous-ensemble de l'univers Ω.
- **Probabilité** : Fonction P qui assigne à chaque événement A une valeur $P(A)$, telle que pour tout événement A :
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $\bar{A}$ est appelé *événement contraire de A*
- **Vocabulaire**
  - **disjonction de A et B** $= A \cup B$
  - **conjonction de A et B** $= A \cap B$

Formules Importantes

- **Probabilité de l'union**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Evènements incompatibles**

$$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow \text{"A ; B } \textbf{incompatibles}\text{"}$$

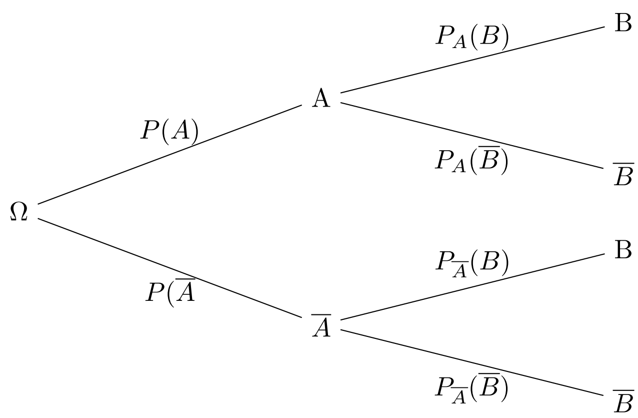
- **Probabilités Conditionnelles**

$$P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B) = P_A(B) \cdot P(A)$$

- **Probabilités Totales**

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P_{A_k}(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B)$$

2.2 Arbre de probabilité



2.3 Probabilités Indépendantes

Definition Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P_B(A) = P(A)$$

Corrollaires Si A et B sont indépendants, alors :

- $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements mutuellement indépendants, alors :

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$$

  ce qui représente la propabilité de l'évènement présent au bout du chemin $A_1, A_2, \ldots, A_n$
- A et B indépendants $\Rightarrow \overline{A}$ et B indépendants

2.4 Variable aléatoire

Définition X est une variable aléatoire en tant qu'application de Ω dans $\mathbb{R}$

Loi de probabilité

Valeur de x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Proba $P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Espérance et Variance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

Ecart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Loi binomiale Dans le cas d'une répétition de n expériences identiques et indépendantes, on est dans le cas d'un Schéma de Bernoulli. On note : $\boxed{Y \sim \mathcal{B}(n;p)}$ et :

$$P(Y = k) = binomFdp(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

3 Équations du Second Degré

3.1 Forme Générale

Une équation du second degré est une équation polynomiale de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

3.2 Discriminant

Le discriminant Δ d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est défini comme :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution réelle double.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

3.3 Formules de Solutions

Les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3.4 Sommes et Produits des Racines

Pour une équation du second degré, les somme S et produit P des racines x_1 et x_2 sont donnés par :

$$S = -\frac{b}{a} \qquad P = \frac{c}{a}$$

3.5 Forme Canonique

Une équation du second degré peut être transformée en forme canonique :

$$a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$$

Avec : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
On obtient souvent cette forme via l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

4 Identités remarquables

$$\boxed{\begin{array}{c}(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ (a \pm b)(a^2 \mp 2ab + b^2) = a^3 \pm b^3\end{array}}$$

$$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$$

5 Dérivation

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle I.

5.1 Définitions

Taux d'accroissement Le taux d'accroissement d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, a+h]$ est défini comme la variation de la fonction sur cet intervalle, divisée par la variation de la variable indépendante. Formellement, le taux d'accroissement t est donné par :

$$T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation Géométrique Géométriquement, le taux d'accroissement représente la pente de la droite sécante reliant les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$ sur le graphe de la fonction.

Nombre dérivé On note $f'(a)$ le nombre dérivé de C_f au point a, tel que :

$$\forall a \in I \ , \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} T(h)$$

Derivée seconde On note $f''(x)$ la fonction dérivée seconde de f, tel que :

$$\forall x \in I \ , \quad f''(x) = (f'(a))'$$

Convexité Si pour tout x de I, $f''(x) \geq 0$ alors f est dite convexe sur I. On a alors que tout segment reliant A et B deux points de $\mathcal{C}_f$ sur I est au dessus de $\mathcal{C}_f$; et toute tangeante à $\mathcal{C}_f$ sur I est en dessous de $\mathcal{C}_f$. De la première propriété découle la formule suivante :

$$\forall (x, x') \in I \ , \quad \forall \lambda \in [0; 1] \ , \quad f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

5.2 Dérivées de Fonctions Usuelles

Fonction	D_f	$D_{f'}$	**Fonction dérivée**
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$

Table 2: Dérivées de fonctions usuelles

5.3 Règles de Dérivation

Soit $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions dérivables et c une constante réelle, les règles de dérivation suivantes s'appliquent :

f(x)	**f'(x)**
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$, avec $v \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $v \neq 0$
$f \circ g(x) = f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

5.4 Application de la Dérivée

Pour étudier les variations de la fonction $f(x)$, on peut utiliser le signe de sa dérivée $f'(x)$. Voici un tableau de variation typique (polynome 2nd degré) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$-\infty$

5.5 Application de la Dérivée seconde

Pour étudier la connvexité de la fonction $f(x)$, on peut utiliser le signe de sa dérivée seconde $f''(x)$. Voici un tableau de connvexité typique (polynome 3eme degré) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		concave	γ	convexe	

6 Fonction exponentielle

6.1 Définition

On défini la fonction $exp(x)$ l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$exp'(x) = exp(x) \quad et \quad exp(0) = 1$$

Note Voir Dérivation pour les rêgles de dérivation de la fonction.

6.2 Rêgles de calcul

Pour gagner du temps en expliquations rébarbatives, on assimilera la fonction $exp(x)$ à e^x où $e \approx 2,71828$, et par conséquent toutes les rêgles de calcul sur la fonction exponentielle correspondent à celles des puissances. Ainsi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$e^0 = 1 \quad et \quad e^1 = e$$

$$e^{x+y} = e^x * e^y$$

$$e^{x-y} = e^x / e^y$$

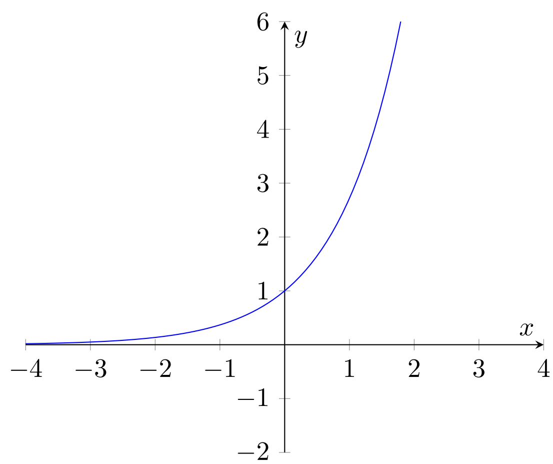
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{kx} = (e^x)^k$$

On note que e étant positif, $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ou $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$$

6.3 Représentation graphique



6.4 Equations

On nottera la formule permettant de résoudre la majeure partie des equations contenant des exponentielles :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad avec\ a\ et\ b\ dans\ \mathbb{R}$$

7 Fonction logarithme népérien

7.1 Définition

La fonction logarithme népérien, notée $\ln(x)$, est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle e^x. Elle est définie pour tout $x > 0$ et est solution de l'équation $e^y = x$.
Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \quad \boxed{\ln(x) = y \iff e^y = x}$$

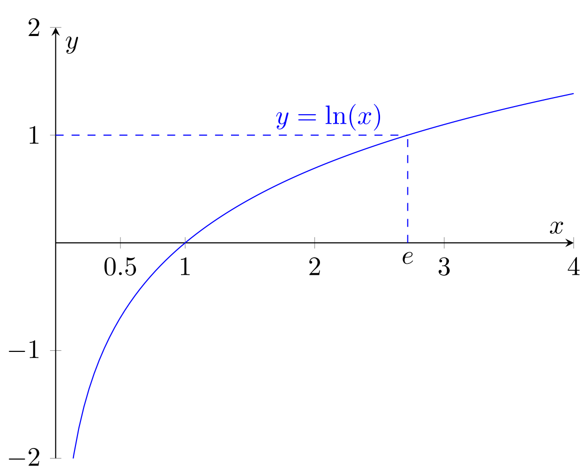
7.2 Propriétés

- **Domaines :** $D_{ln} =]0; +\infty[$
- **Accroissement :** ln est strictement croissante sur D_{ln}.
- **Limites :** $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$

7.3 Propriétés Logarithmiques

- $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$ et donc $\boxed{\ln(x^k) = k\ln(x)}$ et donc $\boxed{\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)}$
- $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$ et donc $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$

7.4 Représentation Graphique



7.5 Applications

- **Propriétés de l'équation** : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$; $\ln(e^x) = x$; $x^a = e^{a\ln(x)}$
- **Complément aux croissances comparées**, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x+1)}{x} = 1}$
- **Corrollaires à la monotonie** : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_n \ , \quad \ln(x) = \ln(y) \underset{\geq}{\iff} x = y}$

8 Autres fonctions usuelles

8.1 Fonction partie entère

Soit x un réel, on appelle partie entière de x l'entier relatif $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, tel que :

$$\boxed{E(x) \leq x < E(x) + 1}$$

La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \to E(x)$

Exemples

$$E(\ \ 4.1) = 4 \tag{1}$$
$$E(-4.1) = 5 \tag{2}$$

8.2 Fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée **log**, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

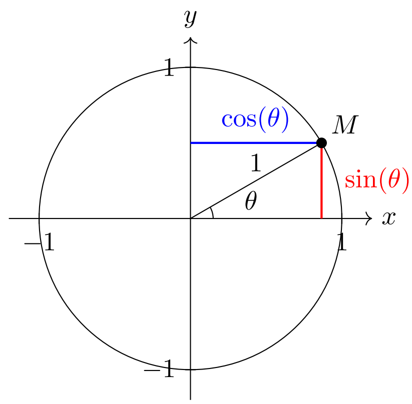
La fonction logarithme décimal est continue, dérivable, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln. Enfin, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\log(10^p) = p$$

9 Trigonométrie

9.1 Le Cercle Trigonométrique

Il consiste en un cercle de rayon 1 centré à l'origine du plan cartésien. Les mesures d'angles se font ici en radians (fonctionne aussi en degrés). Voici une représentation du cercle trigonométrique :



9.2 Le Sinus et le Cosinus

θ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\theta°$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$

9.3 Formules fondamentales de trigonométrie

1. Formule fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 = ||\vec{OM}||^2$$

2. Formules d'addition

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

3. Formules de duplication

- Pour calculer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$, utiliser les formules d'addition, et
- $$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$
  $$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

4. Formules de linéarisation Pour linéariser ($\Sigma \to \Pi$), on trouve par addition :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

5. Formules de dé-linéarisation Pour délinéariser ($\Pi \to \Sigma$), on trouve par linéar° :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\cos p - \cos q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

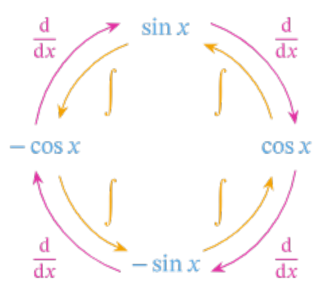
9.4 Fonctions sin et cos

Définitions

Les fonctions trigonométriques les plus couramment utilisées sont :

- le **sinus** (ordonnée de M) : $\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$; **impaire** et 2π **periodique**
- le **cosinus** (abscisse de M) : $\cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ est **paire** et 2π **periodique**
- la **tangente** (pente de OM) : $\tan : \theta \to \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Dérivation et intégration



9.5 Equations trigonométriques

Cosinus Soient $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x) = \cos(a) \iff \begin{cases} x \equiv a & [2\pi] \\ x \equiv -a & [2\pi] \end{cases}$

Sinus Soient $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(x) = \sin(a) \iff \begin{cases} x \equiv a & [2\pi] \\ x \equiv \pi - a & [2\pi] \end{cases}$

10 Raisonnement par Récurrence

10.1 Concept générale

Le raisonnement par Récurrence est un raisonnement en trois phases : **Initialisation, Hérédité, Conclusion** qui vise à demontrer qu'une propriété P_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

10.2 Analogie des dominos

L'**Initialisation** consiste à prouver que le premier domino tombe.
L'**Hérédité** consiste à prouver que si un domino donné tombe, alors le suivant tombera aussi.
La **Conlcuion** consiste à conclure de ces deux faits que tout les dominos tombent.

10.3 Concept formel

Initialisation : On montre que la propriété est vraie pour la première valeur de n, souvent notée n_0. Autrement dit, on prouve que P_{n_0} est vérifiée.
Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un entier quelconque n, et on montre qu'elle est alors vraie pour $n+1$. En d'autres termes, on prouve que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Conclusion : Si P_{n_0} est verifiée et $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vrai

10.4 Remarques

- La Récurrence peut être utile pour démontrer un **encadrement** et/ou une **variation** d'une suite DÉFINIE PAR RÉCURENCE.

- Faire attention aux moments où n est général et quand il est un "entier naturel donné"

Voir page suivante pour un exemple de raisonnement par Récurrence

10.5 Exemple de raisonnement par récurrence

On souhaite démontrer par récurrence la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Étape 1 : Initialisation

Pour $n = 1$:

$$\frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \sum_{k=1}^{1} k$$

La propriété est donc vérifiée pour $n = 1$, P_1 est vérifiée.

Étape 2 : Hérédité

Supposons que la propriété est vraie pour un entier n quelconque, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

On veut montrer qu'elle est alors vraie pour $n + 1$, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{(n+1)} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

En ajoutant $n + 1$ des deux côtés de l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

Factorisons par $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{(n+1)} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On a donc montré que si la propriété est vraie pour un entier n, elle l'est aussi pour $n + 1$.

Conclusion

On a prouvé que P_1 est vraie, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

est verifiée.

11 Limites de fonctions

11.1 Limite d'une fonction à l'infini

Limite infinie en ∞

On dit qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ si $f(x)$ a tout ses termes supérieures (resp. inferieurs) à tout réel A à partir d'un certain x.

Limite finie en ∞

La fonction f admet pour **unique** limite l en $+\infty$ si $f(x)$ se rapproche autant que l'on veut de l à partir d'un certain x. On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

La droite $y = l$ est alors une asymptote horizontale.

11.2 Limite d'une fonction en un réel a

Limite infinie en un point

Si $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque x s'approche de a, alors on dit que f admet $+\infty$ comme limite en a. La droite $x = a$ est une asymptote verticale à f.

Limite finie en un point

Si $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut d'un réel l lorsque x s'approche de a, alors on dit que f admet l comme limite en a. La droite $y = l$ est une asymptote horizontale à f.

Limite à gauche et à droite

On distingue la limite à gauche $(x \to a, x < a)$ et la limite à droite $(x \to a, x > a)$, qui peuvent différer. Si elles sont égales, l est l'unique limite en a

11.3 Opérations sur les limites

Soient $\lim\limits_{x \to X} u_n$ et $\lim\limits_{x \to X} v_n$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de même que X.
La limite en X de la somme, du produit, ou du quotient des suites (u_n) et (v_n) est égal à la limite intuitive de la somme, du produit, ou du quotient de leurs limites en X, à l'exception des **formes indéterminée** suivantes :

- $\dfrac{0}{0}$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $0 \times \infty$
- $+\infty - \infty$

Lorsque la limite est déterminable, on a :

- $\dfrac{k}{0^\pm} = \pm\infty$
- $\dfrac{k}{\pm\infty} = 0^\pm$
- $k \pm \infty = \pm\infty$
- $k + 0^\pm = k^\pm$

Théorèmes

Selon le **théorème de l'encadrement**, avec $(x, l) \in \mathbb{R}^2$ et $X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

$$\begin{cases} \exists \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall x > \varepsilon,\ a(x) \leq f(x) \leq b(x) \\ \lim_{x \to X} a(x) = \lim_{x \to X} b(x) = l \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to X} f(x) = l$$

Selon le similaire **théorème de comparaison**, avec $x \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

$$\begin{cases} \exists \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall x > \varepsilon,\ a(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \to X} a(x) = +\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to X} f(x) = +\infty$$

Et similairement, lorsque $f(x) \leq a(x)$ et $\lim_{x \to X} a(x) = -\infty$, $\lim_{x \to X} f(x) = -\infty$

Enfin, selon le **théorème de croissance comparée**, pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$$

Ces propriétés se bases sur l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad e^x \geq x + 1$$

11.4 Composition de fonctions

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sous ensembles de $\mathbb{R}$ et soient f et g deux fonctions telles que $g : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ et $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{G}$ la fonction composée de g suivie de f par :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Limite d'une composée

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, f une fonction définie sur I, et g une application quelconque (fonction, suite) à images dans I.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} f(x) = c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = c$$

11.5 Limites par taux d'accroissement (sup)

On peut obtenir des limites intéréssantes via la formule :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ = \ f'(a)$$

Par exemple :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

12 Géométrie dans l'espace

12.1 Repère de l'espace

Un repère de l'espace est défini par un point d'origine O et trois vecteurs non coplanaires $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Chaque point M de l'espace est alors repéré par trois coordonnées (x, y, z) telles que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}.$$

12.2 Vecteurs et droites dans l'espace

Coordonnées d'un vecteur

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points de l'espace, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Equation paramétrique d'une droite

Une droite D passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ a pour équations paramétriques :

$$(D) : \begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c \end{cases} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

12.3 Plans dans l'espace

Equation cartésienne d'un plan

Un plan P passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ a pour équation cartésienne :

$$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.}$$

Intersection d'un plan et d'une droite

Une droite d'équation paramétrique intersecte un plan lorsque le système d'équations associé à leurs équations possède une solution unique.

12.4 Colinéarité de deux vecteurs

Les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires ssi :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD} \quad , \quad k \in \mathbb{R}}$$

On a alors que les droites (AB) et (CD) sont parrallèles, leurs points étant alignées si elles sont sécantes.

12.5 Produit scalaire et orthogonalité

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs, leur produit scalaire est donné par :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= xx' + yy' + zz' \\ &= ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})\end{aligned}}$$

Condition d'orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Carré scalaire

$$\boxed{\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2}$$

Identités remarquables

$$\boxed{\begin{aligned}(\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v})^2 &= \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 \\ ||\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}||^2 &= ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2\end{aligned}}$$

12.6 Distances et angles dans l'espace

Distance entre deux points

La distance entre deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Angle entre deux vecteurs

L'angle θ entre deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est donné par la formule :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||}.$$

12.7 Vecteur normal et projection orthogonale

Vecteur normal d'un plan

Un vecteur normal au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.

Projection orthogonale d'un point sur un plan

La projection orthogonale d'un point M sur un plan est l'intersection de la droite passant par M et orthogonale au plan avec ce dernier.

Milieu de $[AB]$

Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de $[AB]$.

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

12.8 Propriété

- **Deux plans sont perpendiculaires** lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre

- **La distance d'un point** A **à une droite** $\mathcal{D}$ est AH où H est le proj. horto. de A sur $\mathcal{D}$. Soit B un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de cette droite :

$$\boxed{AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} \right\|}$$

- **La distance d'un point** A **à un plan** $\mathcal{P}$ est AH où H est le proj. horto. de A sur $\mathcal{P}$. Soit B un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à ce plan :

$$\boxed{AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}}$$

13 Compléments de géometrie : angles orientés

Plaçons nous dans un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique.

→ x est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$

→ on défini ν la **mesure principale** de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ par :

$$\nu = x[2\pi] - \pi$$

de sorte à ce que ν appartiennes à l'intervalle $]-\pi; \pi]$

Radians

Soient x un angle en radians, et α son equivalent en degrés. On a que :

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180}$$

14 Compléments de géometrie : cerlces du plan

Un cercle du plan est caractérisé par une équation du type :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

D'où la forme $x^2 + y^2 = 1$ pour le cercle trigo.
La longueure AB d'un arc entre A et B d'un cercle de rayon r, l'angle θ séparant A et B :

$$\widehat{AB} = r\theta \quad , \quad \theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

15 Primitives

15.1 Primitives de fonctions usuelles

Fonction f sur I	**F_0 de f sur I**	**Ensemble I**
k (constante réelle)	kx	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{0;-1\})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$,$\mathbb{R}^*$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions F définies sur I par :

$$\boxed{F : x \rightarrow F_0(x) + \mathcal{C}}\ , \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

15.2 Primitives et composition

Soit u et v deux fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{Z} \setminus \{[0,-1]\}$:

Forme	**Une primitive est**	**Conditions**
$u' + v'$	$u + v$	-
ku'	ku	$k \in \mathbb{R}$
$u' \cdot u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$u' \cdot e^u$	e^u	u dérivable sur I

15.3 Remarques

- penser à jongler entre $\frac{1}{u^n}$ et u^{-n}
- $\cdots$ $F + G$ est primitive de $f + g$ et kF est primitive de kf

16 Equations différentielles

16.1 Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue y est une fonction. Une équation différentielle mettant en jeu une fonction et ses n premièrs dérivées est dite **d'ordre** n.

16.2 Forme $y' = f$, primitive

Soit f fonction continue sur I. Cette équation a pour solution l'ensemble des primitives de la fonction f sur I telles que, pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$. On a donc, avec F_0 une primitive de f :

$$\boxed{y = F_0(x) + \mathcal{C}}$$

solution de (E).

- On note que **toute fonction continue sur I admet des primitives sur I**.
- **Condition initale** : soient $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exists!\ F : I \to \mathbb{R}\ ,\quad F(x_0) = y_0}$

16.3 Equadiff de 1er ordre à coeff constant, forme : $y' = ay + b$

La solution générale est donnée par :

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}} \quad C \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

16.4 Equadiff de 1er ordre à coeff variable, forme : $y' = ay + f$

La solution générale est donnée par :

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax} + f_0(x)} \quad C \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

16.5 Propriétés des solutions

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire de premier ordre $y' = ay + b$ forme une **famille affine de fonctions**.
- La solution est **unique** si une condition initiale est imposée.

17 Intégration

17.1 Définition

Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses, et entre les verticales en a et en b est appelée intégrale de a à b de f et est notée :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

17.2 Théoreme d'éxistence d'une primitive

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, alors la fonction ϕ def sur I par $\phi(x) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'unique primitive de f sur $[a\ ;b]$ s'annulant en $x = a$.

17.3 Calcul d'intégrale

Soit f une fonction **continue** sur $[a\ ;b]$, et F une primitive de f sur $[a\ ;b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

17.4 Propriétés des intégrales

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$. On note F une primitive de f sur cet intervalle.

Linéarité

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Intégration des inégalités

$$\text{Si, pour tout } x \in [a; b],\ f(x) \leq g(x),\ \text{alors } \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Attention : la réciproque est fausse.

Intégration par parties

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx}$$

Positivité de l'intégral

- f positive sur $[a; b]$ $\quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- f négative sur $[a; b]$ $\quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

17.5 Applications du calcul intégral

1. Valeur moyenne d'une fonction Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La valeur moyenne de f sur cet intervalle est :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Le théorème des valeures intermetières permet d'assurer l'existence d'un réel $c \in [a:b]$ tel que :

$$f(c) = m$$

Remarque : dans le cas où f est continue et positive sur $[a;b]$, ce nombre m représente la hauteur du rectangle de base $[a;b]$ et de même aire que le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

2. Aire entre deux courbes Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$, telles que :

$$\forall x \in [a;b], \quad f(x) \leq g(x)$$

Alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre les courbes de f et g, et les droites $x = a$ et $x = b$, est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

De façon plus générale, pour toutes fonctions f et g continues sur $[a;b]$:

$$\mathcal{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

18 Dénombrement

18.1 Les Principes de Base

Soient A et B deux ensembles, et $|A| = Card(A)$

Principe Multiplicatif

Si un événement peut se produire de n manières différentes et qu'un second événement peut se produire de m manières différentes, alors les deux événements peuvent se produire de $n \times m$ manières différentes.

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Produit Cartésien

- Soient $\mathcal{E}_k$ k ensembles non vides. $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$ est appelé produit cartésien des $\mathcal{E}_k$, et représente l'ensemble des k-uplets formés par les éléments des $\mathcal{E}_k$.
- Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et $k \in \mathbb{N}$. Selon le Principe Multiplicatif :

$$|\mathcal{E}^k| = |\mathcal{E}|^k$$

Parties de $\mathcal{E}$

Soit $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$, ensemble de k éléments : $|\mathfrak{B}(\mathcal{E})| = 2^k$

18.2 Permutations

Définition

Une permutation d'un ensemble E de n éléments est un arrangement de tous les éléments de E. On en dénombre :

$$P_n = n!$$

18.3 Arrangements

Définition

Un arrangement de k éléments d'un ensemble E de n éléments est une liste ordonnée de k éléments distincts de E. On en dénombre :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

18.4 Combinaisons

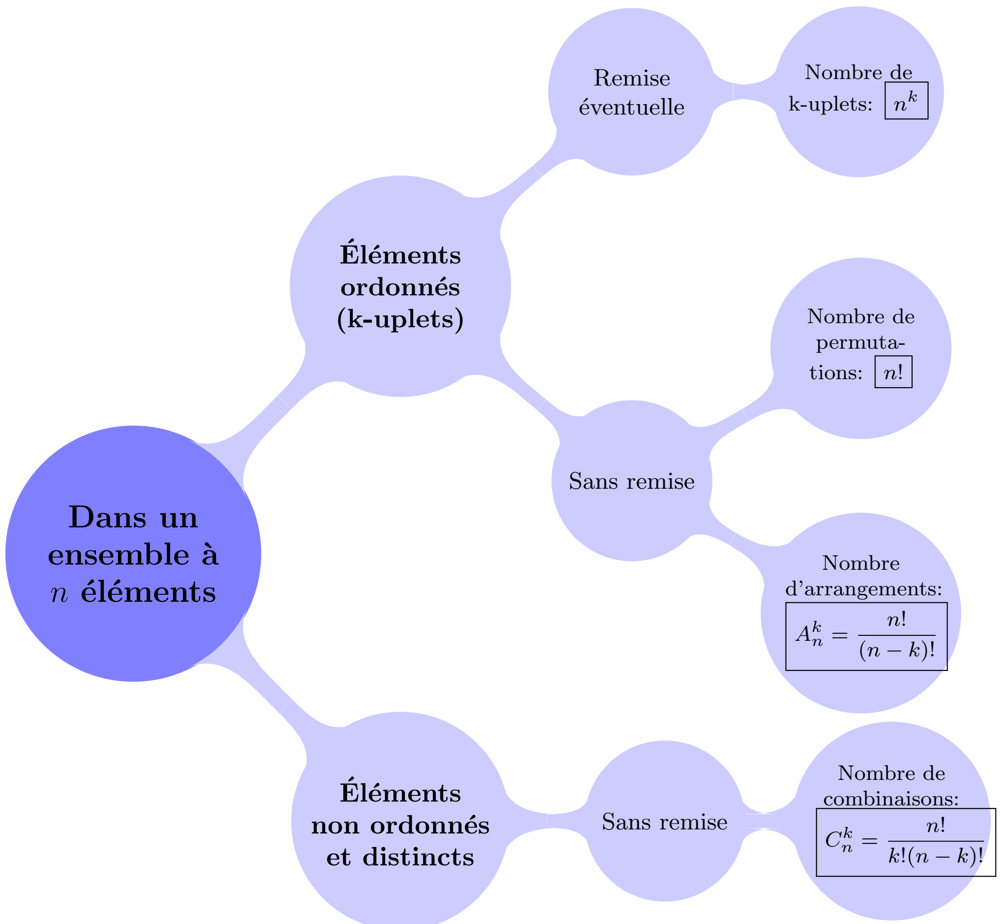
Définition

Une combinaison de k éléments d'un ensemble E de n éléments est une sélection non ordonnée de k éléments distincts de E. On en dénombre :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il s'agit du nombre de chemin dans un arbre binaire A/B à n niveaux contenant exactement k noeuds A.

18.5 MindMap


Dans un ensemble à n éléments
Éléments ordonnés (k-uplets)
Remise éventuelle
Nombre de k-uplets: $\boxed{n^k}$
Sans remise
Nombre de permutations: $\boxed{n!}$
Nombre d'arrangements: $\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$
Éléments non ordonnés et distincts
Sans remise
Nombre de combinaisons: $\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

Part II

CPGE - PTSI

NB

Cette partie est complémentaire de la première, ce qui implique qu'une partie des cours dispensés en maths niveaux prépa sont en réalité des compléments à des notions étudiées au lycée, et les chapitres concernés ont donc été mis à jour, plutot que d'encombrer cette partie.
Il est donc nécéssaire de maitriser les notions de la partie précédente, qui sont soit nécéssaire à la compréhension et au maniement des outils plus avancés, soit sont déjà considérées comme faisant partie prennante du programme de classe prépa.

1 Révisions sur les nombres réels

XX Ficher limites par taux d'accroissement XX
Bien connaitre les Identités remarquables 3eme deg et $(a+b+c)^2$

Def scalaire Constante de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2 Systèmes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

2.1 Définitions

On appelle **système linéaire de n équation à p inconnues** tout système d'équation de la forme :

$$(S) = \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_p + x_p = a_S \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_p + x_p = b_S \\ \cdots \\ \omega_1x_1 + \omega_2x_2 + \cdots + \omega_p + x_p = \omega_S \end{cases}$$

où :

- x_i les **inconnues**
- $a_i, b_i, \cdots, \omega_i$ des **coefficients** réels
- $a_S, b_S, \cdots, \omega_S$ les **seconds membres** des équations

Divers définitions

- **Résoudre le système** (S) est trouver l'ensemble des p-uplets dits **solutions dS**
- Deux systèmes sont dit **équivalents** si ils ont le même $\mathcal{S}$. Alors : $(S) \Leftrightarrow (S')$
- On appelle **opération élémentaire** toute opération réversible[1] consistant à :

  → **échanger** deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$

  → **multiplier** une ligne **par un scalaire*** $L_i \leftarrow \alpha L_i$

  → **ajouter** un multiple d'une ligne à une autre $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

  → combinaison de ces deux dernières

2.2 Méthode du pivot de Gauss

Par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, on transforme le système linéaire (S) en un système linéaire équivalent (S') échelonné :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \xRightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1} \begin{cases} ax + by = c \\ \quad\quad dy = e \end{cases}$$

On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque équation du système. On obtient les solutions de (S) par remontés successives.

[1] **Dem :** on trouve trivialement l'opération réciproque de chacune

2.3 Interprétation géométrique

Droite du plan

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^2)^*$ l'équation $\boxed{ax + by = c}$ est celle d'une droite de vec. dir. $\boxed{u = (-b\ ,\ a)}$ et de vec. normal $\boxed{u = (a\ ,\ b)}$
Réciproquement toute droite du plan admet une equation de ce type.

Plan de l'espace

Avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$; $\boxed{ax + by + cz + d}$ est l'équation cartésienne d'un plan de l'espace $\mathbb{R}^3$, de vec. normal $n = (a, b, c)$.
Réciproquement tout plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ admet une telle equation.

Résolution d'un système (2,2)

Soit :

$$(S)\ \begin{cases} ax + \ by \ = c & (\Delta_1) \\ a'x + b'y = c' & (\Delta_2) \end{cases}$$

Résoudre (S) (2,2) revient à la recherche des intersections des deux droites du plan. Il y a donc trois cas possibles :

- droites // $\iff \mathcal{S} = \emptyset \qquad \iff (a, b) = k(a', b')$
- droites / $\iff \mathcal{S} = \{(x, y) | ax + by = c\} \iff \Delta_1 = k\Delta_2$
- droites X $\iff \mathcal{S} = !(x, y)$

Note : systèmes (3,2)

Les système (n,p) où n¿p peuvent être **hyperstatiques**, i.e. posséder trop de contraintes et ainsi n'avoir aucune solution. Dans le cas d'un système (3,2), ce cas correspond à l'éventualité où les trois droites ne concourent pas en un unique point et ne sont pas toutes trois confondus.

Résolution d'un système (2,3)

Soit :

$$(S)\ \begin{cases} ax + \ by \ + cz \ = d & (\mathcal{P}_1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

Résoudre (S) (2,3) revient à la recherche des intersections des deux plans de l'espace. Il y a donc trois cas possibles :

- plans // $\iff \mathcal{S} = \emptyset \qquad \iff (a, b, c) = k(a', b', c')$
- plans / $\iff \mathcal{S} = \{(x, y, z) | ax + by + cz = d\} \iff \mathcal{P}_1 = k\mathcal{P}_2$
- plans X $\iff \mathcal{S} = !(x, y, z)$

Méthode générale

L'acception géométrique peut permettre de rapidement "**discuter**" la nature des solutions, nottament via les vec. normaux, et directeurs

3 Ensemble des nombres réels

3.1 Ensemble des nombres réels

On se permettra d'admettre la connaissance des parties remarquable de $\mathbb{R}$.
On notera cependant les curiosités suivantes :

Démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$

Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors il existe des entiers relatifs p et q (avec $q \neq 0$) tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

et on peut choisir cette fraction sous forme irréductible, c'est-à-dire $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$.
En élevant au carré on obtient

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Longrightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Donc p^2 est pair, ce qui implique que p est pair. On peut donc écrire $p = 2k$ pour un certain entier k. En remplaçant dans l'égalité précédente :

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = 2k^2.$$

Ainsi q^2 est pair, donc q est pair.
Nous avons donc montré que p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit l'hypothèse que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible ($\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$). Cette contradiction montre que l'hypothèse initiale était fausse.
Par conséquent : $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}}$

3.2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Définitions

→ On dit que $x \leq y$ (resp. $\geq$) si $x - y \in \mathbb{R}_-$ (resp. $\mathbb{R}_+$) ;
$\mathbb{R}^*_{\dots}$ pour les inégalités stricts

→ Géométriquement, si M:(x) et N:(y) ; $x \leq y$ (resp. $\geq$) si $\overrightarrow{MN}$ et $\vec{i}$ de même sens (resp. de sens contraire)

Relation d'ordre

On appelle **relation d'ordre** une relation qui est réflexive, antisymétrique, et transitive.
Exemple : la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

- **Réflexive :** $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$.
- **Antisymétrique :** $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y\ \wedge\ y \leq x)\ \Rightarrow\ x = y$.
- **Transitive :** $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y\ \wedge\ y \leq z)\ \Rightarrow\ x \leq z$.

$\leq$ est une relation d'ordre **totale**, car $\forall x, y \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y \vee y \leq x$

4 Arithmétique

4.1 Divisibilité et division

Divisibilité sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Soient $n, p \in \mathbb{Z}$. On dit que **n divise p** ou **n est multiple de p**, si $n = kp$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi :

$$\boxed{(a \mid p) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ n = kp)}$$

Rq La divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est refléxive et transitive, mais pas antisymétrique, ce n'est donc pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. C'est cependant le cas sur $\mathbb{N}$ où elle est partielle ($3 \not| 7$ et $7 \not| 3$)

Division euclidienne sur $\mathbb{N}$

Théorème Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\exists!(q,r) \in \mathbb{N}^2, \quad n = qp + r \quad , \quad 0 \leq r < p}$$

Démonstration

- **existence :** Avec $n \in \mathbb{N}^*$, nottons $E = \{a \in \mathbb{N} \,|\, ap < n\}$. E est une partie non vide (contient 0) et majorée (par n) de $\mathbb{N}$. Donc E admet un maximum.

  Notons $\boxed{q = \max(E)}$ ce maximum et $\boxed{r = n - pq}$

  Alors :

  $$\begin{cases} q \in \mathbb{N}\,,\ r \in \mathbb{N} \\ n = pq + r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q \in E & \Rightarrow \quad pq \leq n & \text{et} \quad r = n - pq \geq 0 \\ q+1 \notin E & \Rightarrow \quad p(q+1) > n & \text{et} \quad r = n - p(q+1) < p \end{cases}$$

  On a donc bien $\exists q, r \in \mathbb{N}, \quad n = qp + r \quad , \quad 0 \leq r < p$

- **unicité :** Soient (q_1, r_1) et (q_2, r_2) deux couples de $\mathcal{S}$

  $$\begin{cases} n = pq_1 + r_1 \\ 0 \leq r_1 < p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n = pq_2 + r_2 \\ 0 \leq r_2 < p \iff -p < -r_2 \leq 0 \end{cases}$$

  On en déduit : $\begin{cases} r_2 - r_1 = p(q_1 - q_2) \\ -p < r_2 - r_1 < p \end{cases}$

  Or le seul entier multiple de p et strictement entre $-p$ et p est 0[a], donc $r_2 - r_1 = 0$ d'où $r_1 = r_2$ puis $q_1 = q_2$.

  D'où l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne de n par p.

[a] Selon le système précédent, $\Delta r = p\Delta q$ donc Δr multiple de p et donc $|r_2 - r_1| \geq p$;
mais on a également : $-p < r_2 - r_1 < p$ donc $|r_2 - r_1| < p$

Rq On peut élargir la définition à $\mathbb{Z}$.

Proposition **La reste vérifie :** $\boxed{r = 0 \iff p|n}$

Nombres premiers

- **Définition**

  → Un entier naturel est un nombre premier s'il n'est divisible dans $\mathbb{N}$ que par 1 et lui-même.

  → 1 n'est pas premier.

- **Proposition**

  → Tout entier naturel distinct de 0 et 1 admet au moins un diviseur premier.

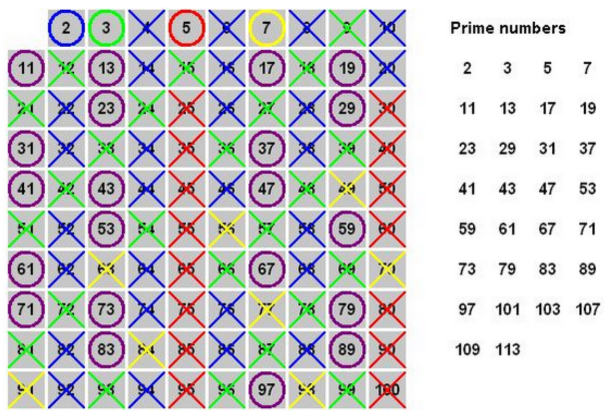
  → Si n n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier p tel que :

$$p^2 \leq n$$

.

- **Démonstration** : HP de Colles, à ficher un jour

- **Crible d'Eratosthène**



  → On entoure le + petit disponible (premier) et on barre tout ses multiples (composés) ; et on recommence.

- **Théoreme** : l'ensemble des nombres premiers est infini.

- **Démonstration**

Démonstration d'Euclide : Démontrons par l'absurde que $\mathbb{P}$ est infini.

→ Supposons $\mathbb{P}$ est finis, on a donc $\mathbb{P} = \{p_1, \cdots, p_n\}$

→ Posons $a = (p_1 \times \cdots \times p_n) + 1$

→ Prenons d un diviseur premier de a, donc $d \in \mathbb{P}$. Il existe alors

$$i \in [\![1..n]\!] \quad | \quad d = p_i$$

→ Soit $q \in \mathbb{N}$

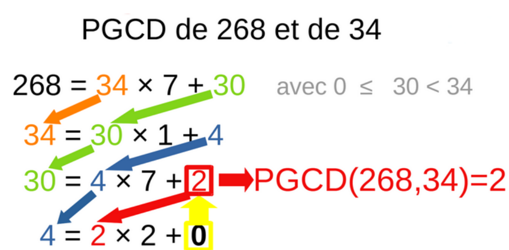
$$\begin{aligned} a = p_i \cdot q \Rightarrow p_1 \times \cdots \times p_n &= p_i \cdot q \\ &\Rightarrow (p_1 \times \cdots \times p_n \backslash \{p_i\} - q) p_i = 1 \end{aligned}$$

⇒ c'est absurde, aucun premier ne divise 1. Donc $\mathbb{P}$ est infini.

PGCD et PPCM

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$

- **Définitions**
  - On appelle plus grand diviseur commum de n et p noté $\text{pgcd}(n,p)$ ou $n \wedge p$ le plus grand entier naturel qui divise n et p.
  - On appelle plus petit multiple commum de n et p noté $\text{ppcm}(n,p)$ ou $n \vee p$ le plus petit entier naturel divisible par n et p.
- **Convention**
  - $0 \wedge 0 = 0$
  - $0 \wedge a = a \quad , \quad a \in \mathbb{N}$
  - $1 \wedge a = 1 \quad , \quad a \in \mathbb{N}$
- **Algorithme d'Euclide :**



Décomposition en facteurs premiers ($\Pi\ \mathbb{P}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Théorème fondamentale de l'arithmétique** n admet une décomposition en produit de facteurs, uniques à l'ordre de ses facteurs près. Formellement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists! m \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \exists! p_1, \cdots, p_m \in \mathbb{P} \quad , \quad \begin{cases} p_1 \leq \cdots \leq p_m \\ n = p_1 \times \cdots \times p_m \end{cases}$$

- Notons $n = {p_1}^{\alpha 1} \times \cdots \times {p_m}^{\alpha m}$ sa décomposition en $\Pi\ \mathbb{P}$. Avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $p_1 < ... < p_n$.

$$\mathcal{D}(n) = \left\{ {p_1}^{\delta 1}, \cdots, {p_m}^{\delta m} \right\} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \delta_1 \in [\![1..\alpha_1]\!] \\ \cdots \\ \delta_m \in [\![1..\alpha_m]\!] \end{cases}$$

- $$\text{pgcd}(a,b) \times \text{ppcm}(a,b) = a \times b$$

4.2 Notion de congruence dans $\mathbb{Z}$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Definition

$$\boxed{a \equiv b\ [n] \iff \begin{cases} n \mid b-a \\ \exists k \in \mathbb{Z}\ ,\ a = b + kn \end{cases}}$$

Proposition

$a \equiv b\ [n]$ ssi a **et** b **ont le même reste** de la DE˜(n)

Démonstration

Remarque La relation $\equiv$ est reflexive, transitive, PAS antisymétrique, mais symérique ($[a \equiv b] \Rightarrow [b \equiv a]$) donc c'est une **relation d'équivalence** (ex : $=$ pour les objets ; $\iff$ pour les assertions ; parrallèlisme pour les droites ; . . .)

Proposition Compatibilité avec les opérations algébriques

$$\begin{cases} a \equiv b\ [n] \\ c \equiv d\ [n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d & [n] \\ a - c \equiv b - d & [n] \\ ac \quad \equiv bd & [n] \end{cases}$$

et

$$a \equiv b\ [n] \Rightarrow \begin{cases} ak \equiv bk & [n] \\ ak \equiv bk & [kn] \\ a^p \quad \equiv b^p & [n] \end{cases}$$

Démonstration

5 Ensembles et applications

Je suis un trou de balle j'ai pas fiché ce cours, faudra vrm le faire un de ces quatre.

5.1 Théorème de la bijection réciproque

Théorème de l'application réciproque

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
f est bijective ssi

$$\exists g \in \mathcal{F}(E,F) \quad | \quad \begin{cases} f \circ g = \mathrm{Id}_F & \text{ou} \quad \forall x \in E \ , \quad g(f(x)) = x \\ g \circ f = \mathrm{Id}_E & \text{ou} \quad \forall y \in F \ , \quad f(g(y)) = y \end{cases}$$

g est alors l'**unique** application réciproque de f, notée f^{-1}

Démonstration

- **Existence**
- **Unicité**

  Soient $g, h \in \mathcal{F}, \mathcal{E}$ telles que g et h soient applications réciproques de f.

$$\begin{aligned} & g \circ f = \mathrm{Id}_E \\ \Rightarrow\ & g \circ f \circ h = \mathrm{Id}_E \circ h \\ \Rightarrow\ & g \circ \mathrm{Id}_F = h \\ \Rightarrow\ & g = h \end{aligned}$$

6 Sommes et produits

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, I un ensemble à n élément, et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de scalaires indexés sur I.

6.1 Manipulations

Linéarité de la Somme

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$$

$$\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i$$

Bilinéarité du produit

$$\prod_{i\in I}(a_i \times b_i) = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i$$

$$\prod_{i\in I} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i\in I} a_i$$

Factorielle

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

On convient que $0! = 1$

6.2 Techniques de calcul

Changement d'incice

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p-r}^{q-r} a_{k+r}$$

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p-r}^{q-r} a_{k+r}$$

On pourra effectuer le changement d'indice $\boxed{j = \pm k + r} \quad , \quad r \in \mathbb{R}$

Sommes et produits téléscopiques

$$\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1} + a_k) = a_{q+1} + a_p$$

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p} \quad , \quad \forall i \in I, a_i \neq 0$$

Sommes remarquables

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} 1 &= p - q + 1 \\
\sum_{k=p}^{q} \lambda &= \lambda(p - q + 1) \\
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n(n+1)}{2}^2
\end{aligned}$$

On démontre :

- la somme des k en cherchant $2\Sigma k$ et nottant $\Sigma k = \Sigma n - k + 1$
- la somme des k^2 par récurence triviale
- la somme des k^3 par récurence triviale (mise au $\hat{\mathrm{m}}$ den.) en NE devellopant PAS

Somme géométrique

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

sauf si $q = 1$, auquel cas $\Sigma = n + 1$.
La propriété se démontre en cherchant $(1 - q)\Sigma$ (en distribuant la somme au $1 - q$) puis par somme téléscopique.

Formule de Bernoulli

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \ , \ \boxed{a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n-1-k}}$$

La propriété se démontre en calculant $(a - b)\Sigma$ puis somme téléscopique.
Ex : montrer que $7 \mid 19^n - 12^n$:

$$19^n - 12^n = (19 - 12)(\cdots) = 7(\cdots) \qquad \text{donc} \qquad 7 \mid 19^n - 12^n$$

Formulaire

$\rightarrow$ Cas des variables séparées

$$\sum_{\substack{a \leq i \leq b \\ c \leq j \leq d}} a_i b_j = \left(\sum_{i=a}^{b} a_i \right) \left(\sum_{j=c}^{d} b_j \right)$$

→ Théorème de Fulini (à utiliser pour simplifier des sommes)

$$\sum_{a\leq i<j\leq b} a_{i,j} = \sum_{i=a}^{b-1} \sum_{j=i+1}^{b} a_{i,j} = \sum_{j=a+1}^{b} \sum_{i=a}^{j-1} a_{i,j}$$

$$\sum_{a\leq i\leq j\leq b} a_{i,j} = \sum_{i=a}^{b} \sum_{j=i}^{b} a_{i,j} = \sum_{j=a}^{b} \sum_{i=a}^{j} a_{i,j}$$

→ Somme au carré

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left({a_i}^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \right)$$

6.3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

On rappel que le "coefficient binomial de k parmis n" est :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si $k < 0$ ou $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$

Théoreme du binôme de Newton

$\forall a, b \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration

Montrons par récurence sur $n \in \mathbb{N}$

<u>Pour $n = 0$</u> : $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{-k}$

<u>Soit $n \in \mathbb{N}$</u> : Supposons $(a+b)^n = S_n$ et montrons $(a+b)^{n+1} = S_{n+1}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{distrib} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} \ + \ '' && \text{cht ind} \\
&= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{n} a^n b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{Pascal} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} && \text{S à n+1} \\
&\qquad + \binom{n+1}{0} a^n b^0 && \text{S à 0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{CQFD}
\end{aligned}$$

<u>Donc</u> : par principe de récurence, t'as capté, c'est vrai sur $\mathbb{N}$. Ça serait pas dans le cours sinon. T'es con. Aaaaarg. Demo de con. Claire, c'est pour toi tout ça.

Remarque

→ si $a = 1 = b$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} = 2^n$$

→ si $a = -1$ et $b = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \times (-1)^k = 0$$

$\ominus$						Σ
0	1					$1 = 2^0$
0	1	1				$2 = 2^1$
0	1	2	1			$4 = 2^2$
0	1	3	3	1		$8 = 2^3$
0	1	4	6	4	1	$16 = 2^4$