



Designnotat

Tittel: Anti-alias-filter

Forfattere: Peter Pham

Versjon: 2.0

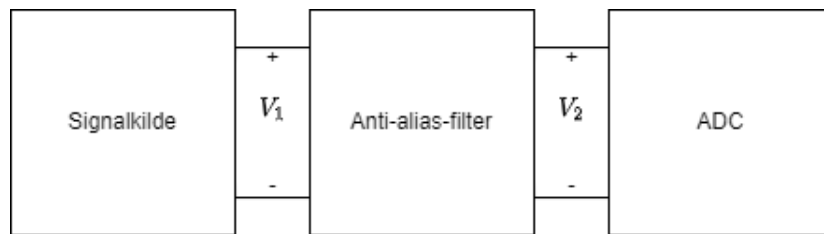
Dato: 18/12/2022

Innhold

1	Problembeskrivelse	2
2	prinsipiell løsning	3
2.1	Spesifikasjon	3
2.2	Type filter	3
2.3	Nødvendig orden	5
2.4	Systemfunksjonen	7
3	Realisering og test	8
4	Konklusjon	10
5	Referanser	11

1 Problembeskrivelse

Signalbehandling i elektroniske system foregår som regel digitalt. Inngangssignalene til systemet er oftest analoge, og en digitalisering av disse før signalbehandlingen er derfor nødvendig. For å unngå alvorlige aliasing-feil, er det nødvendig å begrense båndbredden til signalene som skal digitaliseres. Dersom punktprovingsfrekvensen er f_s , må, ifølge punktprovingsteoremet, signalet være båndbegrenset til $B = \frac{f_s}{2}$. I praksis er en fullstendig båndbegrensing (der alle frekvenskomponenter over $\frac{f_s}{2}$ er satt til null) ikke mulig. Det er heller ikke nødvendig. Det er tilstrekkelig at frekvenskomponenter over $\frac{f_s}{2}$ blir dempet med en viss faktor avhengig av applikasjonen. Slik damping kan oppnåes ved å sette et anti-alias-filter umiddelbart foran A/D-omformerer som vist i figur 1. Videre er det ønskelig at anti-alias-filteret påvirker frekvenskomponentene under $\frac{f_s}{2}$ minst mulig. Det kan sikres ved å kreve at knekkfrekvensen til filteret ligger over en viss verdi.



Figur 1: 01Anti-alias-filter.

Dermed skal designes et anti-alias-filter til bruk ved en gitt punktprovingsfrekvens f_s . Filteret skal ha en damping på minst 10 dB ved frekvensen $\frac{f_s}{2}$, og knekkfrekvensen f_c til filteret skal oppfylle $f_c \geq 0.75 \frac{f_s}{2}$. Knekkfrekvensen definerer vi som frekvensen hvor amplituderesponsen har sunket med 3 dB fra sitt høyeste nivå.

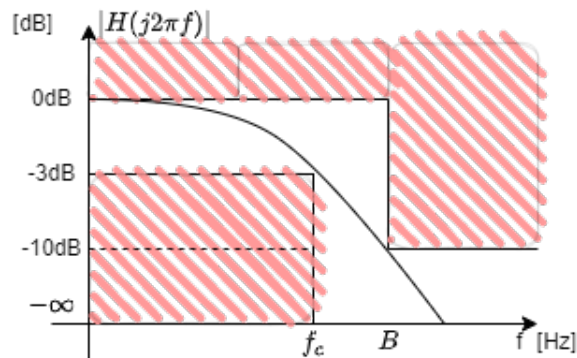
2 prinsipiell løsning

Ved filterdesign kan det være lurt å ha en fornuftig arbeidsgang:

1. Start med spesifikasjon
2. Velg type filter
3. Finn nødvendig orden N
4. Finn systemfunksjonen $H(s)$
5. Realisert $H(s)$ med tilgjengelig teknologi

2.1 Spesifikasjon

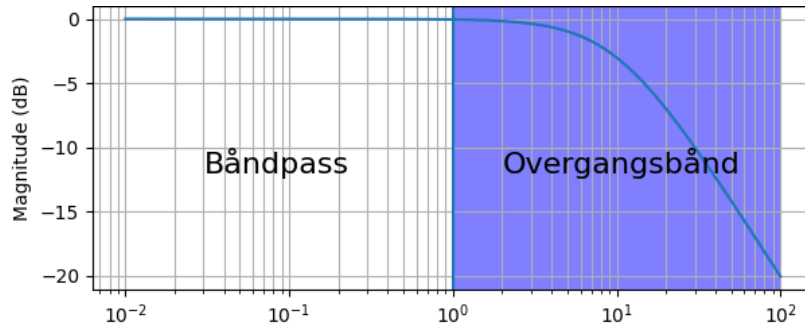
Fra problembeskrivelsen i seksjon 1 blir det opplyst at dersom punktprøvingsfrekvensen er f_s , må båndbegrensingen være $B = \frac{f_s}{2}$ og knekkfrekvensen være $f_c \geq \frac{3}{8}f_s$. Amplituderresponsen vil da ha en form tilsvarende figur 2.



Figur 2: Ønsket amplituderrespons på system.[8]

2.2 Type filter

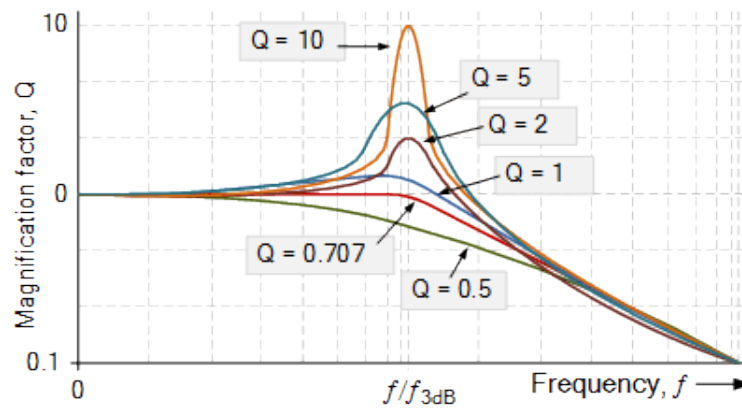
For å få en amplituderrespons som likner mest på figur 2 kan et Butterworth filter benyttes da den ifølge siden [9] er et analog filter som produserer den flateste amplituderresponsen, men da på bekostning av en relativt lang overgangsbånd mellom båndpass og båndstop som illustrert i figur 3.



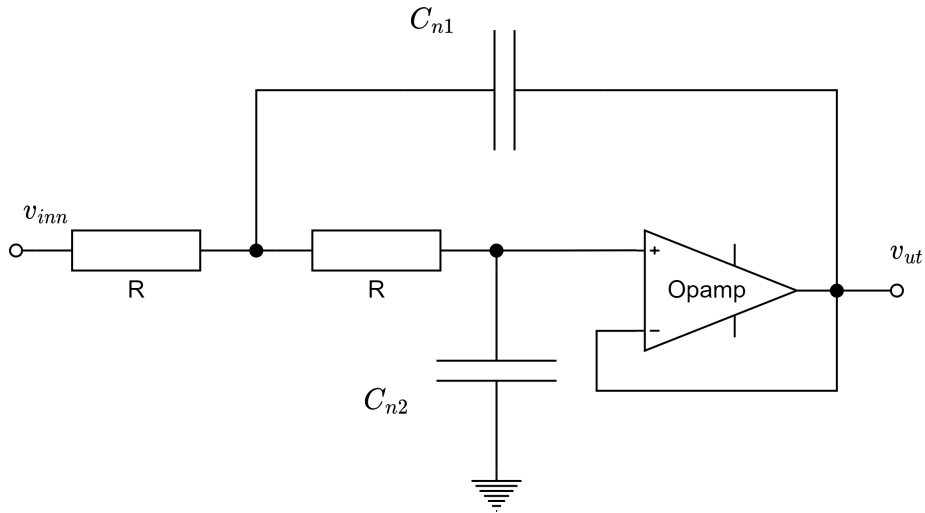
Figur 3: Plot av frekvensresponsen til en Butterworth lavpassfilter.[8]

Fra vevsiden [3] oppgis det at et 2. ordens Sallen-Key topologi som illustrert i figur 5 kan brukes til å implementere forskjellige frekvens resposer som i dette tilfellet; Butterworth. Videre blir det forklart i vevsiden [2] at et Butterworth filter har maksimal flat båndpass respons når Q-faktoren er lik $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dette kan man også se på figuren 4 tatt fra Electronics-Tutorials [3]. Q-faktoren er gitt ved formelen 1 der ω_0 er knekkfrekvensen, mens ζ er dempningsfaktoren.

$$Q = \frac{\omega_0}{2\zeta} \quad (1)$$



Figur 4: Sallen key frekvens respons ved forskjellige Q-faktorer.[3]



Figur 5: Lavpassfilter med Sallen-Key topologi.[8]

2.3 Nødvendig orden

Fra siden [1] blir det oppgitt at formelen for demping $A(\omega)$ for en n te-ordens Butterworth lavpassfilter er gitt ved systemfunksjonen $H(s)$ som

$$A(\omega) = |H(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^{2n}}} \quad (2)$$

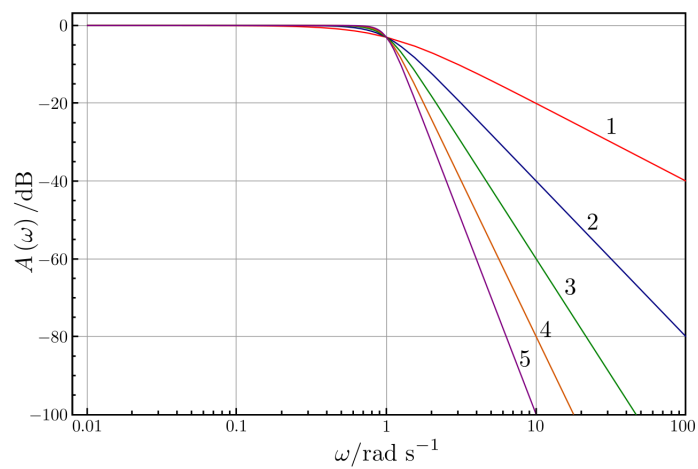
Formel 2 kan videre skrives om til

$$n = \frac{1}{2} \frac{\ln(A^{-2} - 1)}{\ln(\frac{f}{f_c})} \quad (3)$$

Der dempingen A er amplitudeforholdet, dette får man ved å bruke formelen

$$A = 10^{\frac{A[dB]}{20}} \quad (4)$$

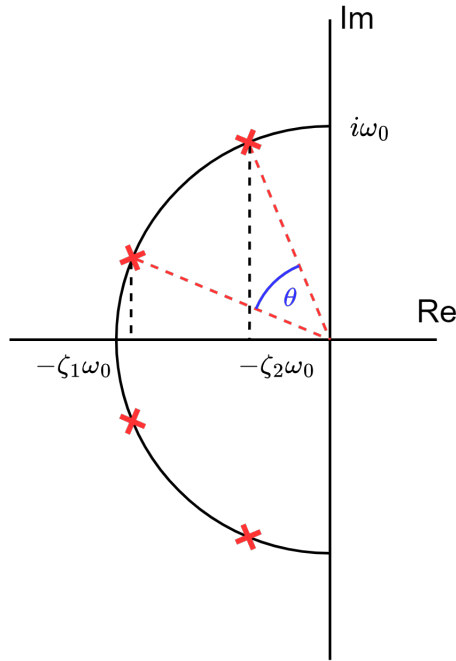
Som man kan se på figur 6 tatt fra Wikipedia [1] kan man se at man får et mye brattere jo høyere orden det er i filteret, men ettervert som man kommer i en høyere orden så vil også graden den blir brattere minkes.



Figur 6: Plot med damping for et Butterworth lavpassfilter fra 1. til 5. orden med knekkfrekvens $\omega = 1$. [1]

2.4 Systemfunksjonen

Når man ved hjelp av formelen 3 har kommet fram til n -antall orden kan man ta i bruk formel 5 oppgitt i videoen [5] for å finne den relative dempningsfaktoren ζ . Her er i gitt for polpar. På figur 7 kan man også se at polene ligger jevnt fordelt på halvsirkelen med en radius lik ω_0 der vinkelen mellom polene er $\theta = \frac{\pi}{n}$. Dette gir et filter som er maskimalt flatt ifølge videoen [4].



Figur 7: Polplott for et 4. ordens filter.[8]

$$\zeta_i = \begin{cases} \cos \frac{\pi i}{n} & \text{for } n \text{ odde} \\ \cos[\frac{\pi}{2n} + (i-1)\frac{\pi}{n}] & \text{for } n \text{ like} \end{cases} \quad (5)$$

Fra videoene [6] [7] blir det oppgitt at at tidskontstantene $\tau_{nm} = C_{nm} \cdot R$ må oppfylle kravene:

$$\tau_{n1} = \frac{1}{\omega_0 \zeta_n} \quad (6) \quad \tau_{n2} = \frac{1}{\omega_0^2 \tau_{n1}} \quad (7)$$

Kondensatorverdiene blir da gitt ved

$$C_{n1} = \frac{\tau_{n1}}{R} \quad (8) \quad C_{n2} = \frac{\tau_{n2}}{R} \quad (9)$$

3 Realisering og test

Punktprøvningsfrekvensen f_s er satt til 6,4 kHz. Dermed blir spesifikasjonene som plottet i tabell 1.

Tabell 1: Filterspesifikasjoner

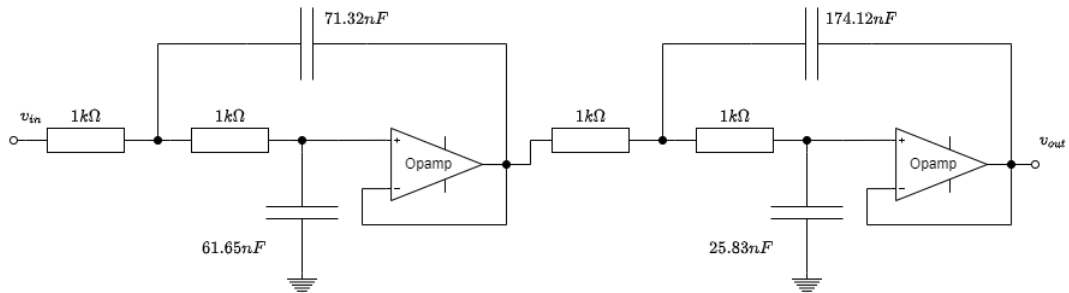
Spesifikasjon	Formel	Verdi
f_s		6400Hz
B	$\frac{f_s}{2}$	3200Hz
f_c	$\geq \frac{3}{8}f_s$	$\geq 2400\text{Hz}$

Ved å ta i bruk formlene gitt i seksjon 2 blir beregningene som vist i tabell 2.

Tabell 2: Beregninger.

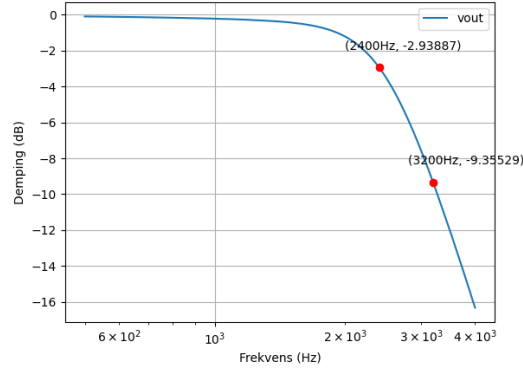
Størrelse	Formel	Måltall og enhet	Realiserte verdier	Avvik
A	$10^{\frac{A[dB]}{20}}$	≈ 0.3162		
n	$\frac{1}{2} \frac{\ln(A^{-2}-1)}{\ln(\frac{f}{f_c})}$	$\approx 3.81 \rightarrow 4$		
R		$1k\Omega$	$1k\Omega$	
ζ_1	$\cos[\frac{\pi}{2n} + (i-1)\frac{\pi}{n}]$	0.92388		
ζ_2	$\cos[\frac{\pi}{2n} + (i-1)\frac{\pi}{n}]$	0.38268		
ω_0	$2\pi f_c$	$15079.64\frac{rad}{s}$		
τ_{11}	$\frac{1}{\omega_0\zeta_1}$	$71.77\mu s$		
τ_{12}	$\frac{1}{\omega_0^2\tau_{11}}$	$61.27\mu s$		
τ_{21}	$\frac{1}{\omega_0\zeta_2}$	$173.29\mu s$		
τ_{22}	$\frac{1}{\omega_0^2\tau_{21}}$	$25.38\mu s$		
C_{11}	$\frac{\tau_{11}}{R}$	71.77nF	71.32nF	0.62%
C_{12}	$\frac{\tau_{12}}{R}$	61.27nF	61.65nF	0.62%
C_{21}	$\frac{\tau_{21}}{R}$	173.29nF	173.12nF	0.10%
C_{22}	$\frac{\tau_{22}}{R}$	25.38nF	25.83nF	1.74%

Den realiserte kretsen er illustrert i figur 8 og fysisk oppkoblet i figur 11.



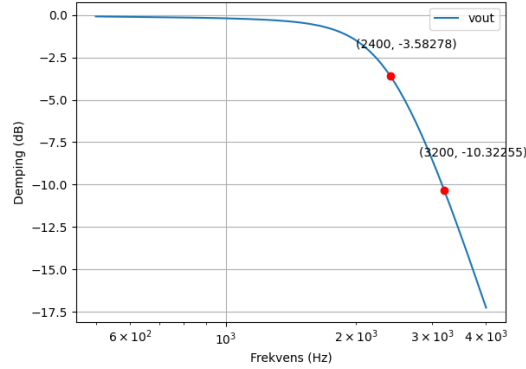
Figur 8: Realisert krets med verdier.[8]

Med denne kretsen ble frekvensresponsen lik figur 9.



Figur 9: Frekvensrespons for realisert Anti-alias-filter.

Det observeres at med disse komponentene så blir kravet om at knekkfrekvensen skal være $f_c \geq 2400Hz$ oppfylt, men ikke kravet om at dempingen ved $B = 3200Hz$ er lavere enn 10dB. Ved å legge til 2,13 nF slik at $C_{22} = 27.96$ blir frekvensresponsen lik figur 10. Dette kan forklares med at ved å øke C_{22} , så får man en høyere τ_{22} som igjen fører til en lavere dempningsfaktor ζ_2 ifølge formlene oppgitt i seksjon 2.4. Ved bruk av formel 1 får man at Q blir lavere der man kan se på figur 4 at en får en mer dempet frekvensrespons på bekostning av båndbredden.

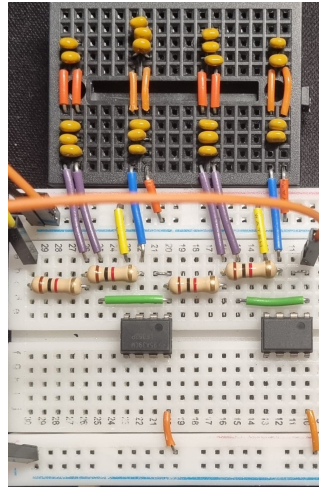


Figur 10: Frekvensrespons for realisert Anti-alias-filter med $C_{22} = 27.96$.

Grunnen til at kravet om en demping på minst 10 dB ved frekvensen $\frac{f_s}{2}$, og en knekkfrekvens på $f_c \geq 0.75 \frac{f_s}{2}$ ikke blir realisert kan skyldes avvik i komponentene.

Det kan vurderes å øke ordenen på systemet i et forsøk om å få oppfylt kravene, som beskrevet i seksjon 2.3 og vist i figur 6 ser man at mengden filteret får en økt demping ved en høyere orden avtar med flere orden. Men siden det mangler kun -0.64471 dB for å oppnå kravet for B, så antas det at det ville holdt med en orden til da man ved bruk av formlene 2 og 4 får ville gått en demping på -12.73 dB ved en 5. ordens Butterworth lavpassfilter.

$$\Sigma \tag{10}$$



Figur 11: Fysisk realisert krets.

4 Konklusjon

Til tross for at ikke alle spesifikasjonene ble oppfylt, så ble det designet et Butterworthfilter med en demping på -9.356 ved B og en kvekkfrekvens $f_c \geq 0.75 \frac{f_s}{2}$. Det kunne ha vært vurdert å designe et filter av høyere orden i den hensikt å oppnå en tilstrekkelig demping ved B.

5 Referanser

Referanser

- [1] Wikipedia Contributors. *Butterworth filter*. Wikipedia, aug. 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter (sjekket 09.2022).
- [2] Wikipedia Contributors. *Sallen–Key topology*. Wikipedia, nov. 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Sallen%E2%80%93Key_topology (sjekket 16.12.2022).
- [3] Electronics-tutorials. *Sallen and Key Filter Design for Second Order RC Filters*. Basic Electronics Tutorials, okt. 2021. URL: <https://www.electronics-tutorials.ws/filter/sallen-key-filter.html> (sjekket 16.12.2022).
- [4] Lars Lundheim. Blackboard.com. URL: https://ntnu.blackboard.com/ultra/courses/_38144_1/cl/outline (sjekket 16.12.2022).
- [5] Lars Lundheim. *Butterworth*. Panopto. URL: <https://ntnu.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=de00eda3-10d5-4e54-bfbd-adb701685785&query=butterworth> (sjekket 16.12.2022).
- [6] Lars Lundheim. *Et konkret filterdesigneksempel*. <https://ntnu.cloud.panopto.eu/>, 2022. URL: https://ntnu.blackboard.com/ultra/courses/_38144_1/cl/outline (sjekket 10.2022).
- [7] Lars Lundheim. *Peter2*. YouTube, okt. 2022. URL: https://www.youtube.com/watch?v=CT1EvFAHK_0&ab_channel=LarsLundheim (sjekket 16.12.2022).
- [8] Peter Pham. *Selvlaget figur*. Des. 2022.
- [9] Wayne Storr. *Butterworth filter design and low pass butterworth filters*. Basic Electronics Tutorials, aug. 2013. URL: https://www.electronics-tutorials.ws/filter/filter_8.html (sjekket 09.2022).