TMA4121

Forberedelser til eksamen

Peter Pham

2023-05-16

Contents

Oppgave 1

$\boxed{1}$ Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled

1: de korresponderende likningene på integralform,

2: likningen for ladningskonservering, og

3: bølgelikningen ved homogent tilfelle ($\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$).

Figure 1:

Maxwells likninger på differensialform er:

- **Gauss' lov for elektrisitet:** $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Denne loven beskriver hvordan en elektrisk ladning produserer et elektrisk felt. Her er $\vec{E}$ det elektriske feltet, ρ er ladningstettheten, og ϵ_0 er permittiviteten til vakuum.
- **Gauss' lov for magnetisme:** $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Denne loven sier at det ikke finnes noen magnetiske monopoler. Med andre ord, magnetiske feltlinjer har ingen begynnelse eller slutt.
- **Faradays lov:** $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Denne loven er grunnlaget for elektromagnetisk induksjon, det vil si produksjon av elektrisk strøm i en ledning ved å endre det magnetiske feltet som omgir den.
- **Ampères lov:** $c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0}$. Denne loven beskriver hvordan en strøm produserer et magnetisk felt. Her er c lyshastigheten, $\vec{B}$ er det magnetiske feltet, $\vec{J}$ er strømtettheten, og ϵ_0 er permittiviteten til vakuum.

1: De korresponderende likningene på integralform:

Gauss' divergensteorem sier at volumintegralet av divergensen av et vektorfelt over et volum er lik flateintegralet av dette vektorfeltet over overflaten som avgrenser volumet. Dette kan skrives matematisk som:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Her er $\vec{F}$ et vektorfelt, V er volumet, S er overflaten som avgrenser volumet, og $d\vec{s}$ er et infinitesimalt arealvektorelement på overflaten S.

Når det gjelder Gauss' lov for elektrisitet, er $\vec{E}$ det elektriske feltet og ρ/ϵ_0 er divergensen av feltet. Å bruke Gauss' divergensteorem betyr å gå fra differensialformen $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ til integralformen

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Her er $\int_V \rho dV$ den totale ladningen innenfor volumet V, som vi kaller Q_{inn}.

På samme måte, når vi anvender Gauss' divergensteorem på Gauss' lov for magnetisme, går vi fra differensialformen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ til integralformen

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Dette betyr at det totale magnetiske fluks ut av ethvert lukket overflate er null, noe som tilsvarer det fysiske faktum at det ikke finnes magnetiske monopoler.

Stokes' teorem er et annet grunnleggende teorem innen vektoranalyse. Det knytter sammen et linjeintegral over en lukket kurve og et overflateintegral over en overflate som er avgrenset av denne kurven.

Matematisk kan det skrives som:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

Her er $\vec{F}$ et vektorfelt, C er en lukket kurve, S er overflaten som er avgrenset av kurven, og $d\vec{l}$ er et infinitesimalt linjeelement langs kurven.

I sammenheng med Faradays lov representerer $\vec{E}$ det elektriske feltet og $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ er rotasjonen av feltet. Ved å bruke Stokes' teorem, kan vi gå fra differensialformen $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ til integralformen

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Høyre side av likningen representerer endringen i magnetisk fluks gjennom overflaten S. Dette uttrykkes som $-\frac{d\Phi_B}{dt}$, som er endringen i det magnetiske fluks gjennom flaten S med hensyn på tid.

Det vil si, integralformen av Faradays lov sier at en tidsvarierende magnetisk fluks gjennom en lukket løkke vil indusere en elektromotorisk spenning (EMF) rundt løkken, som er essensen av elektromagnetisk induksjon.

Ampères lov med Maxwells tillegg kan utledes til integralform ved bruk av Stokes' teorem. På differensialform er loven gitt som

$$c^2\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0}$$

Ved å anvende Stokes' teorem kan vi konvertere det venstre uttrykket til et linjeintegral og det høyre uttrykket til et overflateintegral. Dette gir oss

$$c^2 \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \int_S \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \cdot d\vec{s}$$

Her er C en lukket kurve, S er overflaten avgrenset av C, $\vec{B}$ er det magnetiske feltet, $d\vec{l}$ er et infinitesimalt linjeelement langs C, $\vec{E}$ er det elektriske feltet, $\vec{J}$ er strømtettheten, og $d\vec{s}$ er et infinitesimalt arealvektorelement på overflaten S.

Integralformen av Ampères lov med Maxwells tillegg uttrykker forholdet mellom det magnetiske feltet rundt en lukket løkke og summen av den elektriske strøm som passerer gjennom løkken og den tidsderiverte av det elektriske fluks som passerer gjennom den samme løkken. Denne loven er grunnlaget for elektromagnetiske bølger.

Dette fullfører utledningen av Maxwells likninger på integralform fra differensialformen.

2: Ladningskonservering

Ladningskonservering kan utledes fra Maxwells ligninger, spesielt fra Gauss' lov for elektrisitet og den korrigerte formen av Ampères lov.

Begynn med å ta divergensen på begge sider av Ampères lov:

$$c^2\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0}\right)$$

Venstre side blir null siden divergensen av et rotasjonsfelt alltid er null. Vi sitter da igjen med

$$0 = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0}\right)$$

som kan omskrives til

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{E}) + \nabla \cdot \vec{J}$$

Nå kan vi erstatte divergensen av det elektriske feltet med ladningstettheten ved hjelp av Gauss' lov for elektrisitet. Dette gir oss

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}$$

som er likningen for ladningskonservering, eller kontinuitetslikningen. Den uttrykker at endringen av ladning i et gitt volum pluss strømmen ut av volumet er lik null, noe som betyr at ladning er konservert.

3: Bølgelikningen i et homogent medium

For å utlede bølgelikningen i et homogent medium der $\rho = 0$ og $\vec{J} = 0$, kan vi starte fra Faradays lov og Ampères lov med Maxwells tillegg:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Faradays lov)} \; \nabla \times \vec{B} \quad = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Ampères lov med Maxwells tillegg)}$$

Hvis vi nå tar rotasjonen på begge sider av Faradays lov og bruker vektoridentiteten $\nabla \times (\nabla \times \vec{s}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{s}) - \nabla^2 \vec{s}$, får vi:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

Da vi vet at $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ og at $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ siden $\rho = 0$, kan vi erstatte disse i likningen over for å få:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Dette reduserer til:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Dette er bølgelikningen for det elektriske feltet $\vec{E}$.

På en tilsvarende måte, ved å ta rotasjonen på begge sider av Ampères lov med Maxwells tillegg og bruke de samme vektoridentitetene, får vi bølgelikningen for det magnetiske feltet $\vec{B}$:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Dermed har vi utledet bølgelikningene for et homogent medium der $\rho = 0$ og $\vec{J} = 0$.

Oppgave 2

Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled Poissons likning ved statisk tilfelle ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$). Utled så potensialet til coulombfeltet i to og tre dimensjoner ved å lete etter harmoniske funksjoner som kun avhenger av $\|\mathbf{x}\|$.

Figure 2:

Maxwells likninger på differensialform er:

1. Gauss' lov for elektrisitet: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.
2. Gauss' lov for magnetisme: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.
3. Faradays lov: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.
4. Ampères lov med Maxwells tillegg: $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$.

Her er $\mathbf{E}$ det elektriske feltet, ρ er ladningstettheten, ϵ_0 er permittiviteten til vakuum, $\mathbf{B}$ er det magnetiske feltet, t er tid, c er lysets hastighet, og $\mathbf{J}$ er strømtettheten.

For det statiske tilfellet, der $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$, blir Ampères lov med Maxwells tillegg redusert til

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

og Faradays lov blir redusert til

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

som indikerer at det elektriske feltet er konservativt, og det kan uttrykkes som gradienten av et potensial ϕ, så $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. Ved å sette dette i Gauss' lov får vi Poissons likning:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dette er Poissons likning for det elektriske potensialet ϕ i et område med ladningstetthet ρ.

Vi kan løse Poissons likning ved å bruke metoden for separasjon av variabler. Løsningen vi søker er av formen $\phi(r)$, der r er avstanden fra origo.

Poissons likning i sfærisk koordinatsystem er:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Her tar vi utgangspunkt i en punktladning, der ladningstettheten $\rho = q\delta(\mathbf{r})$. Her er q ladningen og δ er Diracs delta-funksjon.

Vi setter dette inn i Poissons likning:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r})$$

Løsningen av denne likningen i tre dimensjoner er kjent som Coulombs lov, og gir potensialet for en punktladning som:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

For to dimensjoner, er den radiale delen av Laplace-operator noe forskjellig, og Poissons likning blir:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Setter vi inn for $\rho = q\delta(\mathbf{r})$ får vi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r})$$

Løsningen av denne likningen i to dimensjoner gir potensialet for en punktladning som:

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} q \ln(r)$$

Husk at disse løsningene er avledet under antagelsen om isotropi, dvs. at feltet ikke har noen foretrukken retning. I et virkelig fysisk system må man ta hensyn til eventuelle grensebetingelser.

Formulering av Poissons likning i sfærisk koordinatsystem: Dette er et viktig første skritt fordi vi forventer at potensialet vil avhenge bare av avstanden fra origo, noe som er naturlig å uttrykke i sfæriske koordinater. Poissons likning i sfærisk koordinatsystem er:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Antagelse om punktladning: Vi forenkler problemet ved å anta at det elektriske feltet er produsert av en punktladning. Dette betyr at ladningstettheten ρ er lik $q\delta(\mathbf{r})$, hvor q er ladningen og δ er Diracs delta-funksjon som beskriver en punktladning.

Dirac delta-funksjonen, $\delta(\mathbf{r})$, er en matematisk funksjon som er null overalt bortsett fra i origo, og har den egenskapen at dens integral over hele rommet er lik 1. Dette gjør den veldig nyttig for å beskrive fysiske situasjoner der en gitt størrelse er konsentrert i et enkelt punkt i rommet, som i vårt tilfelle, hvor vi har en punktladning.

Sette inn punktladningen i Poissons likning: Nå setter vi inn uttrykket for ρ i Poissons likning. Poissons likning er:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Vi setter inn uttrykket for ρ fra punkt 2 og får:

$$\nabla^2\phi = -\frac{q\delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

eller ved å omforme litt:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

Denne likningen uttrykker nå hvordan det elektriske potensialet ϕ varierer i rommet rundt en punktladning.

Løsning av differensiallikningen: Dette er en differensiallikning som kan løses ved å integrere begge sider. Merk at høyresiden av likningen blir null for alle $r \neq 0$ på grunn av Dirac delta-funksjonen. Dette gir oss to separate likninger å løse, én for $r > 0$ og én for $r < 0$. Disse to løsningene må deretter matches ved $r = 0$ på en måte som er konsistent med tilstedeværelsen av delta-funksjonen.

For $r \neq 0$ har vi likningen:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

som har løsningen $\phi(r) = A\ln(r) + B$ der A og B er konstanter.

For å bestemme konstantene, merker vi oss at for $r \neq 0$ må det elektriske feltet være endelig og at det skal være kontinuerlig i $r = 0$. Dette betyr at løsningen ikke kan inneholde $\ln(r)$-termen, så $A = 0$.

Vi sitter da igjen med $\phi(r) = B$, hvor B er en konstant som skal bestemmes. Merk at dette er løsningen for både $r > 0$ og $r < 0$ siden de begge må matche ved $r = 0$.

For å bestemme konstanten B, integrerer vi Poissons likning over et sfærisk volum med radius ϵ, og lar deretter $\epsilon \to 0$. Dette gir oss verdien av B som $B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Dermed er løsningen av Poissons likning i tre dimensjoner:

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dette uttrykket gir det elektriske potensialet som en funksjon av avstanden r fra ladningen.

Tilpassing for to dimensjoner: I to dimensjoner er den radiale delen av Laplace-operatoren litt forskjellig, og Poissons likning blir:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Vi setter igjen inn for $\rho = q\delta(\mathbf{r})$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

Tilpassing for to dimensjoner: I to dimensjoner er den radiale delen av Laplace-operatoren litt forskjellig, og Poissons likning blir:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

For å forstå denne endringen, må vi tenke på hvordan den deriverte virker i to dimensjoner sammenlignet med tre dimensjoner. Laplace-operatoren, ∇^2, beskriver en andreordens derivasjon i rommet. I tre dimensjoner, som vi har sett tidligere, er dette gitt ved den første ligningen i punkt 1. I to dimensjoner, derimot, mister vi en av de romlige dimensjonene, og Laplace-operatoren blir derfor forskjellig. Dette gjenspeiles i det nye uttrykket for Poissons likning.

Vi setter igjen inn for $\rho = q\delta(\mathbf{r})$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

Denne ligningen kan løses på en lignende måte som i tre dimensjoner. Vi observerer igjen at høyresiden av ligningen er null for alle $r \neq 0$.

Dette gir oss likningen for $r \neq 0$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0$$

Vi har nå løst Poissons likning for $r \neq 0$ i to dimensjoner og funnet at den mest generelle løsningen er på formen

$$\phi(r) = A\ln(r) + B \tag{1}$$

der A og B er konstanter som skal bestemmes. La oss undersøke disse konstantene mer detaljert.

Bestemmelse av B

For det første er det viktig å merke seg at det elektriske potensialet skal være endelig for alle verdier av r. Hvis vi ser på den logaritmiske termen i løsningen vår, ser vi at den går mot uendelig når r går mot 0. Dette vil føre til en uendelig verdi for det elektriske potensialet ved $r = 0$, noe som fysisk ikke er akseptabelt. Derfor må vi kreve at konstanten A er null for å unngå denne uendeligheten. Dette gir oss B = 0.

Bestemmelse av A

For å bestemme konstanten A, kan vi integrere begge sider av Poissons likning over et sirkulært område med radius ϵ, og deretter la ϵ gå mot 0. Vi får da:

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) d^2r = -\frac{q}{\epsilon_0} \tag{2}$$

Integrasjonen på venstre side blir lik $2\pi\epsilon A$, mens den på høyre side blir lik $-q/\epsilon_0$ når vi lar ϵ gå mot 0. Ved å sette disse to uttrykkene lik hverandre, får vi:

$$2\pi\epsilon A = -\frac{q}{\epsilon_0} \tag{3}$$

Som løser til:

$$A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \tag{4}$$

Så den endelige løsningen av Poissons likning i to dimensjoner blir:

$$\phi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\ln(r) \tag{5}$$

Dette gir det elektriske potensialet fra en punktladning i to dimensjoner.

Denne løsningen representerer potensialet fra en punktladning i to dimensjoner. Forskjellen mellom to og tre dimensjoner skyldes hvordan feltlinjene sprer seg i rommet. I tre dimensjoner sprer feltlinjene seg ut over overflaten av en sfære, mens i to dimensjoner sprer de seg over omkretsen av en sirkel.

Oppgave 3

Anta tomt rom og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

Besvarelse

I dette tomrommet, hvor det ikke er noen ladninger eller strømmer, blir Maxwells likninger noe forenklet. De blir:

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.
- $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

La oss starte med likning 1 og 2, Gauss' lov for elektrisitet og magnetisme, og se hva som skjer når vi setter inn våre bølgefunksjoner.

For elektrisitetsfeltet får vi:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = 0$$

Og for magnetfeltet:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = 0$$

Fra disse likningene ser vi at for at begge skal være tilfredsstilt, må vi ha $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ og $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$. Dette betyr at både $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$ er ortogonale til bølgevektoren $\mathbf{k}$.

Videre kan vi se på Faradays lov (likning 3) og Ampères lov (likning 4) for å finne forholdet mellom $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$:

Fra Faradays lov får vi:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = -ic\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$$

Som kan forenkles til:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = c\mathbf{B}_0$$

Og fra Ampères lov får vi:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \to c^2 i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = c\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$$

Som forenkles til:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0$$

Som kan forenkles til:

$$c\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0$$

Fra disse to siste likningene ser vi at $\mathbf{E}_0$ er ortogonal til $\mathbf{B}_0$, siden $\mathbf{E}_0$ er parallel med kryssproduktet av $\mathbf{k}$ og $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{B}_0$ er parallel med kryssproduktet av $\mathbf{k}$ og $\mathbf{E}_0$.

Vi har dermed vist at for at bølgefunksjonene skal tilfredsstille Maxwells likninger i tomrom, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

Oppgave 4

Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

Besvarelse

Først, la oss minne om den grunnleggende loven for varmeledning, som også er kjent som Fourier's lov. Den sier at varmeenergi strømmer fra høyere til lavere temperatur og at varmefluksen, $\vec{q}$, er proporsjonal med temperaturgradienten. Dette kan uttrykkes som:

$$\vec{q} = -k\nabla T$$

Her er k den termiske konduktiviteten, en skalarverdi, T er temperaturen, og ∇T er temperaturgradienten. Merk at minus-signalet viser at varmeoverføringen skjer i retning av synkende temperatur.

Videre, i en ideell gass, er det antatt at det er en lineær sammenheng mellom temperatur og oppbevart kinetisk energi. Derfor kan vi si at endringen i oppbevart energi i et lite volum er proporsjonal med endringen i temperatur, uttrykt som $\rho C \frac{\partial T}{\partial t}$, hvor ρ er densiteten til gassen, C er spesifikk varmekapasitet, og $\frac{\partial T}{\partial t}$ er endringen i temperatur med tiden.

Vi antar også at det ikke er noen varmeproduksjon i volumet. Dette gir oss varmekonservasjonsloven, som sier at endringen i termisk energi i et volum er lik netto varmestrøm ut av volumet. Dette kan uttrykkes som:

$$-\nabla \cdot \vec{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ved å erstatte $\vec{q}$ med uttrykket fra Fourier's lov får vi:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Hvis vi antar at den termiske konduktiviteten er konstant i hele domenet, kan vi ta den ut av divergensoperatoren, som gir oss varmelikningen i tre dimensjoner:

$$k\nabla^2 T = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Der ∇^2 er Laplace-operatoren, som representerer summen av den andre deriverte av temperaturen i hver romlig dimensjon. Dette er den generelle formen for varmelikningen i tre dimensjoner for en ideell gass uten intern varmeproduksjon. Den beskriver hvordan temperaturen endres over tid og rom på grunn av varmeledning.

Oppgave 5

Skriv opp schrödingerlikningen og

1. vis at det romlige arealet under kvadratet av løsningen er en invariant:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathbb{R}^3}^{\mathbb{I}} |\Psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} = 0$$

2. separer variable og utled den tidsuavhengige schödingerlikningen

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

Besvarelse

La oss først skrive opp Schrödingerlikningen, som er kjernen i kvantemekanikken. Den tidavhengige Schrödingerlikningen kan uttrykkes som

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x},t)$$

der $\Psi(\mathbf{x},t)$ er bølgefunksjonen, i er den imaginære enheten, $\hbar$ er den reduserte Plancks konstant, m er partikkelens masse, ∇^2 er Laplace-operatoren (som representerer en andre ordens derivasjon med hensyn til romlige koordinater), og $V(\mathbf{x})$ er potensialet som fungerer på systemet.

La oss nå vise at det romlige arealet under kvadratet av løsningen er en invariant, det vil si at det er uavhengig av tid. Vi starter med å beregne den tidsderiverte av $\int |\Psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x}$:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{d}{dt}|\Psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x}$$

Bruker produktregelen for derivasjon, har vi

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} 2\Psi^(\mathbf{x},t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

der $\Psi^*(\mathbf{x},t)$ er den komplekskonjugerte av $\Psi(\mathbf{x},t)$.

Nå bruker vi Schrödingerlikningen for å erstatte $\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x},t)$:

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{2}{i\hbar} \Psi^(\mathbf{x}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x}$$

Og dette kan omskrives som

$$= -\frac{2}{i\hbar} \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi^(\mathbf{x}, t) \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) - V(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x}$$

Ved å bruke Gauss' divergen

steorem, kan vi konvertere volumintegralet av en divergens til et overflateintegral. Men siden bølgefunksjonen og dens derivater forutsettes å falle av til null når vi går mot uendelig, blir overflateintegralet null. Dermed blir

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 0$$

Dette viser at det romlige arealet under kvadratet av løsningen er en invariant.

For å utlede den tiduavhengige Schrödingerlikningen, antar vi at vi kan separere variablene i bølgefunksjonen $\Psi(\mathbf{x}, t)$ som et produkt av en romlig del $\psi(\mathbf{x})$ og en tidsdel $T(t)$. Det vil si

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) T(t)$$

Erstatter vi dette i den tidavhengige Schrödingerlikningen, får vi

$$i\hbar \psi(\mathbf{x}) \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} T(t) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) T(t)$$

Dette kan vi skrive om til

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(\mathbf{x})} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})$$

Siden venstre side kun avhenger av tid og høyre side kun av romlige koordinater, må begge sidene være lik en konstant. Denne konstanten kaller vi energien E til systemet. Vi får dermed to ligninger:

For tidsdelen får vi

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = E$$

som gir en løsning for $T(t)$ av formen

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

For den romlige delen får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(\mathbf{x})}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) = E$$

som kan omskrives til den tiduavhengige Schrödingerlikningen

$$E\psi(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$$

Dette er Schrödingerlikningen som kun inneholder romlige vari

abler. Denne likningen brukes for å finne stasjonære tilstander i kvantemekanikken.