TMA4121

Forberedelser til eksamen

Peter Pham

2023-04-20

Contents

Oppgave 1

Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled

1. de korresponderende likningene på integralform,
2. likingen for ladningskonservering, og
3. bølgelikningen ved homogent tilfelle ($\rho = 0$og $J = 0$)

Maxwells fire likninger i differensialform:
1. :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

hvor **E** er det elektriske feltet, ρ er ladningstettheten, ϵ_0 er den elektriske konstanten (også kjent som friromspermittiviteten), og $\nabla\cdot$ er divergensoperatoren.
2. Gauss'lov for magnetiske felt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

hvor **B** er det magnetiske feltet, og $\nabla\cdot$ er divergensoperatoren.
3. Faradays induksjonslov:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

hvor **E** er det elektriske feltet, **B** er det magnetiske feltet, t er tiden, $\nabla\times$ er curl-operatoren, og $\partial/\partial t$ er den partielle derivasjonen med hensyn til tiden.
4. Ampères lov med Maxwells korreksjon:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

hvor **B** er det magnetiske feltet, **J** er strømtettheten, c er lyshastigheten i vakuum, ϵ_0 er den elektriske konstanten, t er tiden, $\nabla\times$ er curl-operatoren, og $\partial/\partial t$ er den partielle derivasjonen med hensyn til tiden.

Maxwell på integralform

1. Gauss' lov for elektriske felt:

- Vi starter med Gauss' lov i differentialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Vi ønsker å finne en integralform for denne likningen ved å integrere begge sider av likningen over en volum V. Vi bruker Gauss' divergensteorem, som sier at for et vektorfelt **F** og et volum V, har vi:

Oppgave 1 fortsetter på neste side. . .

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

der ∂V er overflaten til volumet V og $d\mathbf{A}$ er et infinitesimalt overflateelement som peker normalt ut fra overflaten.
Vi bruker dette teoremet på venstre side av Gauss' lov i differentialform, og setter $\mathbf{F} = \mathbf{E}$:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Vi kan nå erstatte venstre side av denne likningen med høyresiden av Gauss' lov i differentialform. Vi multipliserer begge sider av denne likningen med ϵ_0:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Dette gir oss Gauss' lov i integralform:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

hvor Q_{enc} er den totale ladningen som er inneholdt i volumet V. Dette er den første av Maxwells fire ligninger i integralform.
Denne ligningen sier at den totale elektriske fluksen gjennom en lukket overflate er proporsjonal med den totale ladningen som er inneholdt i volumet som omgir overflaten.

2. Gauss' lov for magnetiske felt:

For å utlede Gauss' lov for magnetiske felt på integralform fra Gauss' lov for magnetiske felt på differensialform, kan vi bruke Gauss' divergensteorem, som sier at:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

hvor $\mathbf{F}$ er et vektorfelt, $\oint_S$ betyr integral over en lukket flate S, $\int_V$ betyr integral over volumet som er begrenset av S, $d\mathbf{S}$ er et element av overflaten S, og dV er et element av volumet.
Vi kan anvende dette teoremet på Gauss' lov for magnetiske felt på differensialform, som er:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Dette betyr at divergensen av det magnetiske feltet er null overalt i rommet. La oss nå velge en vilkårlig lukket overflate S som omslutter et volum V. Gauss' divergensteorem gir da:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV$$

Siden divergensen av det magnetiske feltet er null, blir høyresiden av likningen lik null. Vi kan derfor forenkle uttrykket til:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Dette er Gauss' lov for magnetiske felt på integralform. Den sier at det totale magnetiske fluksen som går ut av en vilkårlig lukket flate er lik null. Denne loven gir oss en viktig sammenheng mellom magnetiske feltlinjer som går ut av en lukket flate, og den totale magnetiske ladningen inne i denne flaten.

3. Faradays induksjonslov:

Faradays induksjonslov i differentialform er gitt ved:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Vi kan utlede Faradays induksjonslov på integralform ved å anvende Stokes' teorem på denne ligningen. Stokes' teorem sier at:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

hvor C er en lukket kurve, S er en flate som avgrenses av C, $\mathbf{F}$ er et vektorfelt, $d\mathbf{r}$ er en differensiell forflytning på kurven C, og $d\mathbf{S}$ er en differensiell flateelementvektor på flaten S.
Vi anvender Stokes' teorem på Faradays induksjonslov i differentialform:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

hvor C er en lukket kurve som avgrenser flaten S.
Vi kan tolke venstresiden av denne ligningen som et elektromotoriskt spenn (EMF) $\mathcal{E}$ langs kurven C:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Så vi kan skrive Faradays induksjonslov på integralform som:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

hvor S er en flate som avgrenses av kurven C, og $d\mathbf{S}$ er en differensiell flateelementvektor på flaten S.
Dette betyr at EMF langs en lukket kurve C er lik minus den tidsderiverte av magnetisk fluks Φ_B som går gjennom flaten S som er avgrenset av kurven C.

4. Ampères lov med Maxwells korreksjon:

Vi kan starte med å skrive ut høyresiden av Maxwells likning med korreksjon på differensialform:

$$c^2\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

Vi kan nå ta curlen av begge sider av denne ligningen, og bruke Stokes' teorem på venstresiden:

$$c^2 \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Her representerer A en vilkårlig, lukket flate som er begrenset av randen ∂A, og $\mathbf{l}$ er en vektor som peker langs randen.
Nå kan vi bruke Ampères lov på venstresiden av likningen, og bytte ut integranden med curlen av strømtettheten:

$$c^2 \int_{\partial \Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_A \nabla \times \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Her representerer Σ en vilkårlig, lukket kurve som er begrenset av randen $\partial\Sigma$, og $\mathbf{s}$ er en vektor som peker langs kurven.
Til slutt kan vi bruke divergensteoremet på høyresiden av likningen, og bytte ut integranden med divergensen av strømtettheten:

$$c^2 \int_{\partial \Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_\Sigma \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_\Sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Dette er likningen for Ampères lov med Maxwells korreksjon på integralform. Den beskriver den magnetiske feltstyrken langs en lukket kurve som er proporsjonal med strømmen som passerer gjennom flaten som begrenses av kurven, samt den tidsavledede elektriske fluksen gjennom denne flaten.

Likningen for ladningskonservering

Vi kan utlede likningen for ladningskonservering ved å bruke Maxwells likninger. Vi starter med Gauss' lov for elektromagnetiske felt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

der ρ er ladningstettheten og ϵ_0 er vakuumpermittiviteten. Vi tar deretter tidsderivaten av begge sider av denne ligningen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vi kan nå bruke Faradays induksjonslov:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

til å erstatte den tidsderiverte av divergensen av **E** på venstresiden av likningen over:

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Her har vi brukt Maxwells likninger i differensialform. Vi kan nå bruke Gauss' lov for magnetiske felt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

til å forenkle venstresiden av likningen til

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vi bruker så divergens-setningen for å skrive om venstresiden av likningen:

$$\int_V \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) dV = \oint_{\partial V} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

der V er et vilkårlig volum og ∂V er overflaten av dette volumet.
Vi kan nå bruke Ladningsloven:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

til å erstatte høyresiden av likningen:

$$\int_V \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) dV = \frac{1}{\epsilon_0}\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

Dette er nå likningen for ladningskonservering i integralform, og den kan brukes til å beskrive hvordan elektrisk ladning beveger segVi kan utlede likningen for ladningskonservering ved å bruke Maxwells likninger. Vi starter med Gauss' lov for elektromagnetiske felt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

der ρ er ladningstettheten og ϵ_0 er vakuumpermittiviteten. Vi tar deretter tidsderivaten av begge sider av denne ligningen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vi kan nå bruke Faradays induksjonslov:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

til å erstatte den tidsderiverte av divergensen av **E** på venstresiden av likningen over:

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Her har vi brukt Maxwells likninger i differensialform. Vi kan nå bruke Gauss' lov for magnetiske felt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

til å forenkle venstresiden av likningen til

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vi bruker så divergens-setningen for å skrive om venstresiden av likningen:

$$\int_V \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) dV = \oint_{\partial V} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

der V er et vilkårlig volum og ∂V er overflaten av dette volumet.
Vi kan nå bruke Ladningsloven:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

til å erstatte høyresiden av likningen:

$$\int_V \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) dV = \frac{1}{\epsilon_0}\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

Dette er nå likningen for ladningskonservering i integralform, og den kan brukes til å beskrive hvordan elektrisk ladning beveger segVi kan utlede likningen for ladningskonservering ved å bruke Maxwells likninger. Vi starter med Gauss' lov for elektromagnetiske felt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

der ρ er ladningstettheten og ϵ_0 er vakuumpermittiviteten. Vi tar deretter tidsderivaten av begge sider av denne ligningen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vi kan nå bruke Faradays induksjonslov:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

til å erstatte den tidsderiverte av divergensen av **E** på venstresiden av likningen over:

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Her har vi brukt Maxwells likninger i differensialform. Vi kan nå bruke Gauss' lov for magnetiske felt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

til å forenkle venstresiden av likningen til

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vi bruker så divergens-setningen for å skrive om venstresiden av likningen:

$$\int_V \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) dV = \oint_{\partial V} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

der V er et vilkårlig volum og ∂V er overflaten av dette volumet.
Vi kan nå bruke Ladningsloven:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

til å erstatte høyresiden av likningen:

$$\int_V \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) dV = \frac{1}{\epsilon_0}\oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

Dette er nå likningen for ladningskonservering i integralform, og den kan brukes til å beskrive hvordan elektrisk ladning beveger seg og samhandler i elektromagnetiske systemer.

Bølgelikningen ved homogent tilfelle

Maxwells likninger i den homogene tilfellet med $\rho = 0$ og $\mathbf{J} = 0$ er:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Vi tar curl på likningen $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

Ved å bruke identiteten for curl av curl og Faradays lov $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, får vi:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

Siden $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ for homogene tilfellet, reduseres likningen til:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Dette er bølgelikningen for det elektromagnetiske feltet $\mathbf{E}$ i den homogene tilfellet.

Oppgave 2

Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled Poissons likning ved statisk tilfelle $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}\right)$ Utled så potensialet til coulombfeltet i to og tre dimensjoner ved å lete etter harmoniske funksjoner som kun avhenger av $||\mathbf{x}||$

Maxwells likninger

Maxwells likninger i differensialform er gitt ved:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Poissons likning ved statisk tilfelle

For statiske tilfeller, $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$. Dermed reduseres Maxwells likninger til:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}
\end{aligned}$$

Fra den første ligningen kan vi utlede Poissons likning ved å ta gradienten av begge sider og bruke identiteten $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Her er ϕ det elektrostatiske potensialet. Vi kan nå lete etter harmoniske funksjoner som kun avhenger av $|\mathbf{x}|$ ved å anta at løsningen tar formen $\phi(\mathbf{x}) = V(r)$ der $r = |\mathbf{x}|$.
I to dimensjoner blir Laplace-operatoren $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)$. Dermed blir Poissons likning:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Potensialet til coulombfeltet i to og tre dimensjoner

Vi skal nå utlede potensialet til coulombfeltet i to og tre dimensjoner ved å lete etter harmoniske funksjoner som kun avhenger av $|\mathbf{x}|$. Anta at det finnes en punktladning Q i origo, slik at den elektriske ladningstettheten er $\rho = Q\delta(\mathbf{x})$.
I to dimensjoner blir Laplace-operatoren $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$. Vi kan nå lete etter løsninger som kun avhenger av $r = |\mathbf{x}|$, og skrive $\phi(r) = \frac{A}{r} + B\ln r$, der A og B er konstanter som må bestemmes. Vi kan nå bruke Poissons likning for å finne uttrykket for potensialet $\phi(r)$:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) = -\frac{Q\delta(r)}{\epsilon_0}$$

Vi ser at den høyresiden i Poissons likning kun bidrar i origo, og kan derfor integrere fra $r-\epsilon$ til $r+\epsilon$ der ϵ er en liten verdi rundt null:

$$\int_{r-\epsilon}^{r+\epsilon}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)dr = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\frac{d\phi}{dr}\bigg| r+\epsilon - \frac{d\phi}{dr}\bigg| r-\epsilon = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$

Vi kan nå ta grensen $\epsilon \to 0$ og få:

$$\frac{d\phi}{dr}\bigg| r = 0^+ - \frac{d\phi}{dr}\bigg| r = 0^- = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$

Vi ser at den første termen $\frac{d\phi}{dr}\Big| r = 0^+$ ikke er definert siden $\phi(r)$ inneholder en $1/r$-term. Men den andre termen $\frac{d\phi}{dr}\Big| r = 0^-$ kan vi finne ved å ta grensen av $\phi(r)$ når r går mot null fra negativ side, og denne grensen er lik B. Dermed har vi:

$$B = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$

Vi kan nå finne A ved å sette inn B i uttrykket for $\phi(r)$ og kreve at potensialet $\phi(r)$ går mot null når r går mot uendelig:

$$\phi(r) = \frac{A}{r} - \frac{Q}{\epsilon_0}\ln r \quad \text{når} \quad r \to \infty$$

Vi ser at den første termen går mot null når r går mot uendelig, slik at vi må ha $A = 0$ for at potensialet skal gå mot null. Dermed får vi potensialet for coulombfeltet i to dimensjoner:

$$\phi(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\ln r$$

I tre dimensjoner blir Laplace-operatoren $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$. På samme måte som i to dimensjoner kan vi lete etter løsninger som kun avhenger av $r = |\mathbf{x}|$, og skrive $\phi(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$, der A og B er konstanter som må bestemmes. Vi kan nå bruke Poissons likning for å finne uttrykket for potensialet $\phi(r)$:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -\frac{Q\delta(r)}{\epsilon_0}$$

På samme måte som i to dimensjoner kan vi integrere fra $r-\epsilon$ til $r+\epsilon$ og ta grensen $\epsilon \to 0$ for å finne uttrykket for $\frac{d\phi}{dr}\Big|_{r=0^-}$:

$$\frac{d\phi}{dr}\Big|_{r=0^-} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

Vi kan nå finne A og B ved å sette inn $\frac{d\phi}{dr}\Big|_{r=0^-}$ og kreve at potensialet $\phi(r)$ går mot null når r går mot uendelig:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^3}\right) \quad \text{når} \quad r \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{og} \quad B = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Dermed får vi potensialet for coulombfeltet i tre dimensjoner:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

der R er avstanden fra punktladningen og Q er ladningen til punktladningen som genererer feltet.

Oppgave 3

Anta tomt rom og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

Bevis

Vi kan begynne med å skrive opp Maxwells likninger i tomt rom:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \text{(Gauss' lov)}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(magnetisk Gauss' lov)}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faradays lov)}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{(Amperes lov)}$$

Vi kan nå se på en løsning av formen $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$. Ved å bruke de kjente identitetene for vektoranalyse kan vi enkelt beregne de fire vektorfeltene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = -i\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = -i\omega \mathbf{B}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{B}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = \mu_0\epsilon_0 i\omega \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$$

Her har vi brukt at $\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} = -i\omega e^{-i\omega t}$ og at $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ for tomt rom.
For at disse vektorfeltene skal tilfredsstille Maxwells likninger, må alle fire ligningene være oppfylt. Vi ser at de to første ligningene gir oss at $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}0 = 0$. Dette betyr at $\mathbf{E}0$ og $\mathbf{B}0$ er ortogonale på $\mathbf{k}$, slik at vi kan skrive dette som:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = \left(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0\right) |\mathbf{E}_0| = \left(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0\right) |\mathbf{B}_0| = \mathbf{0}$$

der $\hat{\mathbf{E}}0$ og $\hat{\mathbf{B}}0$ er enhetsvektorer i retning av henholdsvis $\mathbf{E}0$ og $\mathbf{B}0$. Dette betyr at $\mathbf{E}0$ og $\mathbf{B}0$ må være innbyrdes ortogonale.
Når det gjelder $\mathbf{k}$, kan vi se fra ligningene for curlene av $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ at $\mathbf{k}$ må være parallell med $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, altså at $\mathbf{k}$ må være en bølgevektor i retning av bølgefronten.
Dermed har vi vist at dersom en løsning av Maxwells likninger i tomt rom har formen $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$, så må de konstante vektorene $\mathbf{E}0$, $\mathbf{B}0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

Oppgave 3 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 4

Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

Varmelikningen

Varmelikningen i tre romlige dimensjoner, også kjent som diffusjonslikningen, beskriver spredning av varme i et område og kan utledes fra varmeledningsligningen. Anta at temperaturen i et område V i tre romlige dimensjoner kan beskrives av funksjonen $T(\mathbf{x}, t)$, der $\mathbf{x} = (x, y, z)$ er posisjonsvektoren og t er tiden.
Vi kan utlede varmelikningen ved å anvende prinsippet om energibevaring på et lite volumelement i V. Vi antar at varmeenergien i volumelementet endres kun på grunn av varmeledning, og at det ikke skjer noen arbeid eller varmetransport gjennom grenseflatene til elementet. Vi kan dermed skrive

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho c_p T(\mathbf{x}, t)dV = -\oint_S \mathbf{q}\cdot d\mathbf{S}$$

der ρ er massetettheten til materialet, c_p er varmekapasiteten, $\mathbf{q}$ er varmestrømmen gjennom overflaten S til volumelementet, og $d\mathbf{S}$ er et infinitesimalt arealelement normalt på overflaten.
Ved å anvende Gauss' teorem og uttrykke varmestrømmen som en funksjon av temperaturgradienten, $\mathbf{q} = -k\nabla T$, der k er varmeledningsevnen til materialet, får vi

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho c_p T(\mathbf{x}, t)dV = k\iiint_V \nabla^2 T(\mathbf{x}, t)dV$$

hvor ∇^2 er Laplace-operatoren i tre dimensjoner. Vi kan dermed skrive den endelige varmelikningen som

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

Dette er varmelikningen i tre romlige dimensjoner, som beskriver spredning av varme i et område med en gitt varmeledningsevne k, varmekapasitet c_p, og massetetthet ρ.

Oppgave 4 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 5

Oppgave 5 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 6

Oppgave 6 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 7

Oppgave 8

Oppgave 8 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 9

Oppgave 9 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 10

Oppgave 10 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 11

Oppgave 12

Oppgave 12 fortsetter på neste side. . .

Oppgave 13

Oppgave 13 fortsetter på neste side. . .