TMA4121

Forberedelser til eksamen

Peter Pham

2023-05-19

Contents

Oppgave 1

Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled

- de korresponderende likningene på integralform,
- likningen for ladningskonservering, og
- b ∅ gelikningen ved homogent tilfelle ($\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$)

Besvarelse

Maxwells likninger på differensialform er:

- **Gauss' lov for elektrisitet:** $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Denne loven beskriver hvordan en elektrisk ladning produserer et elektrisk felt. Her er $\vec{E}$ det elektriske feltet, ρ er ladningstettheten, og ϵ_0 er permittiviteten til vakuum.
- **Gauss' lov for magnetisme:** $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Denne loven sier at det ikke finnes noen magnetiske monopoler. Med andre ord, magnetiske feltlinjer har ingen begynnelse eller slutt.
- **Faradays lov:** $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Denne loven er grunnlaget for elektromagnetisk induksjon, det vil si produksjon av elektrisk strøm i en ledning ved å endre det magnetiske feltet som omgir den.
- **Ampères lov:** $c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0}$. Denne loven beskriver hvordan en strøm produserer et magnetisk felt. Her er c lyshastigheten, $\vec{B}$ er det magnetiske feltet, $\vec{J}$ er strømtettheten, og ϵ_0 er permittiviteten til vakuum.

1: De korresponderende likningene på integralform:

Gauss' divergensteorem sier at volumintegralet av divergensen av et vektorfelt over et volum er lik flateintegralet av dette vektorfeltet over overflaten som avgrenser volumet. Dette kan skrives matematisk som:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Her er $\vec{F}$ et vektorfelt, V er volumet, S er overflaten som avgrenser volumet, og $d\vec{s}$ er et infinitesimalt arealvektorelement på overflaten S.

Når det gjelder Gauss' lov for elektrisitet, er $\vec{E}$ det elektriske feltet og ρ/ϵ_0 er divergensen av feltet. Å bruke Gauss' divergensteorem betyr å gå fra differensialformen $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ til integralformen

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Her er $\int_V \rho dV$ den totale ladningen innenfor volumet V, som vi kaller Q_{inn}.

På samme måte, når vi anvender Gauss' divergensteorem på Gauss' lov for magnetisme, går vi fra differensialformen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ til integralformen

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Dette betyr at det totale magnetiske fluks ut av ethvert lukket overflate er null, noe som tilsvarer det fysiske faktum at det ikke finnes magnetiske monopoler.

Stokes' teorem er et annet grunnleggende teorem innen vektoranalyse. Det knytter sammen et linjeintegral over en lukket kurve og et overflateintegral over en overflate som er avgrenset av denne kurven.

Matematisk kan det skrives som:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

Her er $\vec{F}$ et vektorfelt, C er en lukket kurve, S er overflaten som er avgrenset av kurven, og $d\vec{l}$ er et infinitesimalt linjeelement langs kurven.

I sammenheng med Faradays lov representerer $\vec{E}$ det elektriske feltet og $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ er rotasjonen av feltet. Ved å bruke Stokes' teorem, kan vi gå fra differensialformen $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ til integralformen

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Høyre side av likningen representerer endringen i magnetisk fluks gjennom overflaten S. Dette uttrykkes som $-\frac{d\Phi_B}{dt}$, som er endringen i det magnetiske fluks gjennom flaten S med hensyn på tid.

Det vil si, integralformen av Faradays lov sier at en tidsvarierende magnetisk fluks gjennom en lukket løkke vil indusere en elektromotorisk spenning (EMF) rundt løkken, som er essensen av elektromagnetisk induksjon.

Ampères lov med Maxwells tillegg kan utledes til integralform ved bruk av Stokes' teorem. På differensialform er loven gitt som

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0}$$

Ved å anvende Stokes' teorem kan vi konvertere det venstre uttrykket til et linjeintegral og det høyre uttrykket til et overflateintegral. Dette gir oss

$$c^2 \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \int_S \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \cdot d\vec{s}$$

Her er C en lukket kurve, S er overflaten avgrenset av C, $\vec{B}$ er det magnetiske feltet, $d\vec{l}$ er et infinitesimalt linjeelement langs C, $\vec{E}$ er det elektriske feltet, $\vec{J}$ er strømtettheten, og $d\vec{s}$ er et infinitesimalt arealvektorelement på overflaten S.

Integralformen av Ampères lov med Maxwells tillegg uttrykker forholdet mellom det magnetiske feltet rundt en lukket løkke og summen av den elektriske strøm som passerer gjennom løkken og den tidsderiverte av det elektriske fluks som passerer gjennom den samme løkken. Denne loven er grunnlaget for elektromagnetiske bølger.

Dette fullfører utledningen av Maxwells likninger på integralform fra differensialformen.

2: Ladningskonservering

Ladningskonservering kan utledes fra Maxwells ligninger, spesielt fra Gauss' lov for elektrisitet og den korrigerte formen av Ampères lov.

Begynn med å ta divergensen på begge sider av Ampères lov:

$$c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \right)$$

Venstre side blir null siden divergensen av et rotasjonsfelt alltid er null. Vi sitter da igjen med

$$0 = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \right)$$

som kan omskrives til

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{E}) + \nabla \cdot \vec{J}$$

Nå kan vi erstatte divergensen av det elektriske feltet med ladningstettheten ved hjelp av Gauss' lov for elektrisitet. Dette gir oss

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}$$

som er likningen for ladningskonservering, eller kontinuitetslikningen. Den uttrykker at endringen av ladning i et gitt volum pluss strømmen ut av volumet er lik null, noe som betyr at ladning er konservert.

3: Bølgelikningen i et homogent medium

For å utlede bølgelikningen i et homogent medium der $\rho = 0$ og $\vec{J} = 0$, kan vi starte fra Faradays lov og Ampères lov med Maxwells tillegg:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Faradays lov)}$$
$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Ampères lov med Maxwells tillegg)}$$

Hvis vi nå tar rotasjonen på begge sider av Faradays lov og bruker vektoridentiteten $\nabla \times (\nabla \times \vec{s}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{s}) - \nabla^2 \vec{s}$, får vi:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

Da vi vet at $c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ og at $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ siden $\rho = 0$, kan vi erstatte disse i likningen over for å få:

$$c^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Dette reduserer til:

$$c^2 \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Dette er bølgelikningen for det elektriske feltet $\vec{E}$.

På en tilsvarende måte, ved å ta rotasjonen på begge sider av Ampères lov med Maxwells tillegg og bruke de samme vektoridentitetene, får vi bølgelikningen for det magnetiske feltet $\vec{B}$:

$$c^2\nabla^2\vec{B} = \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Dermed har vi utledet bølgelikningene for et homogent medium der $\rho = 0$ og $\vec{J} = 0$.

Oppgave 2

Skriv opp Maxwells likninger på differensialform og utled Poissons likning ved statisk tilfelle $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}\right)$. Utled så potensialet til coulombfeltet i to og tre dimensjoner ved å lete etter harmoniske funksjoner som kun avhenger av $\|\mathbf{x}\|$.

Besvarelse

Maxwells likninger på differensialform er:

1. Gauss' lov for elektrisitet: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.
2. Gauss' lov for magnetisme: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.
3. Faradays lov: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.
4. Ampères lov med Maxwells tillegg: $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$.

Når vi nå betrakter det statiske tilfellet, der det ikke er tidsavhengighet ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$), kan vi forenkle Maxwells ligninger til

$$
\begin{gathered}
c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \\
\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}
\end{gathered}
$$

Den andre ligningen impliserer at det elektriske feltet $\mathbf{E}$ er konservativt, noe som betyr at det kan uttrykkes som gradienten til et skalarpotensial V, dvs. $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Ved å sette dette inn i den første ligningen får vi

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Eller, ved omforming får vi Poissons ligning i elektrostatikk:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nå, for å finne potensialet for Coulomb-feltet, leter vi etter løsninger til Laplaces ligning i to og tre dimensjoner. Laplaces ligning er rett og slett Poissons ligning med $\rho = 0$:

$$\nabla^2 V = 0$$

For sfærisk symmetri, i to dimensjoner, forenkles Laplace-operatoren i polarkoordinater (r, θ) til:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

Ved å sette dette lik null og løse den resulterende ordinære differensialligningen med betingelsen om at potensialet er endelig ved $r = 0$, får vi den generelle løsningen

$$V(r) = A \ln r + B$$

I tre dimensjoner er Laplace-operatoren i sfæriske koordinater (r, θ, φ) gitt ved:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

Ved å sette dette lik null og løse den resulterende ordinære differensialligningen med betingelsen om at potensialet er endelig ved $r = 0$, får vi den generelle løsningen

$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$

For en punktladning Q som befinner seg i origo, er den elektriske ladningstettheten ρ gitt ved $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r})$, der $\delta(\mathbf{r})$ er Dirac-deltafunksjonen. Dette betyr at det elektriske feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kun avhenger av den radielle koordinaten $r = |\mathbf{r}|$.

I dette tilfellet blir løsningen på Poissons ligning det elektriske potensialet for en punktladning, som er gitt av Coulombs lov.

I to dimensjoner har vi

$$V(r) = A \ln r + B$$

Siden vi ønsker at potensialet skal gå mot null når $r \to \infty$, setter vi $B = 0$. Konstanten A kan finnes ved å vurdere det elektriske feltet, som er den negative gradienten til potensialet: $\mathbf{E} = -\nabla V = -A/r\hat{\mathbf{r}}$. Ved å sette dette lik den kjente formen for Coulombs lov, $\mathbf{E} = kq/r^2\hat{\mathbf{r}}$, får vi $A = -kQ$. Derfor blir potensialet i to dimensjoner

$$V(r) = -kQ \ln r$$

$$V(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$

hvor k er Coulombs konstant $k = \frac{1}{4\varepsilon_0}$.

I tre dimensjoner har vi

$$V(r) = \frac{A}{r} + B$$

Igjen setter vi $B = 0$ for å få potensialet til å forsvinne ved uendeligheten. Konstanten A kan finnes på en lignende måte ved å sette det elektriske feltet, $\mathbf{E} = -\nabla V = -A/r^2\hat{\mathbf{r}}$, lik Coulombs lov, for å få $A = kQ$. Derfor blir potensialet i tre dimensjoner.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

her er $k = \frac{1}{4\varepsilon_0}$

Hvorfor vi får de generelle løsningene

I to dimensjoner forenkles Laplace-operatoren i polarkoordinater (r, θ) til:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

Ved å sette dette lik null får vi:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0$$

Dette er en standardform for Bessels ligning, med løsninger på formen av Besselfunksjoner. Men siden vi leter etter en løsning som bare avhenger av r og som er jevn for $r = 0$, kan vi anta en potensrekkeløsning. Den eneste løsningen som ikke divergerer for $r = 0$ er en konstant, men vi må også tillate en logaritmisk singularitet for $r = 0$. Dette fører oss til løsningen:

$$\phi(r) = A \ln r + B$$

der A og B er konstanter.

La oss nå gå videre til tre dimensjoner. Laplace-operatoren i sfæriske koordinater (r, θ, φ) er:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

Ved å sette dette lik null får vi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0$$

Integrering én gang med hensyn til r gir:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = C$$

der C er en integrasjonskonstant. Ved omforming og integrering én gang til med hensyn til r får vi:

$$r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = Cr + D$$

der D er en annen integrasjonskonstant. Ved å dele på r^2 og integrere en siste gang, får vi:

$$\phi(r) = \frac{A}{r} + B$$

der $A = C$ og B er konstanter. Dette er løsningen til Laplaces ligning i tre dimensjoner for en funksjon som bare avhenger av r og som er jevn for $r = 0$.

Oppgave 3

Anta tomt rom og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

Besvarelse

I dette tomrommet, hvor det ikke er noen ladninger eller strømmer, blir Maxwells likninger noe forenklet. De blir:

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.
- $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

La oss starte med likning 1 og 2, Gauss' lov for elektrisitet og magnetisme, og se hva som skjer når vi setter inn våre bølgefunksjoner.

For elektrisitetsfeltet får vi:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = 0$$

Og for magnetfeltet:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = 0$$

Fra disse likningene ser vi at for at begge skal være tilfredsstilt, må vi ha $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ og $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$. Dette betyr at både $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$ er ortogonale til bølgevektoren $\mathbf{k}$.

Videre kan vi se på Faradays lov (likning 3) og Ampères lov (likning 4) for å finne forholdet mellom $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$:

Fra Faradays lov får vi:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)} = -ic\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-ct)}$$

Som kan forenkles til:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = c\mathbf{B}_0$$

Og fra Ampères lov får vi:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow c^2 i \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)} = c\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}$$

Som kan forenkles til:

$$c\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0$$

Fra disse to siste likningene ser vi at $\mathbf{E}_0$ er ortogonal til $\mathbf{B}_0$, siden $\mathbf{E}_0$ er parallel med kryssproduktet av $\mathbf{k}$ og $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{B}_0$ er parallel med kryssproduktet av $\mathbf{k}$ og $\mathbf{E}_0$.

Vi har dermed vist at for at bølgefunksjonene skal tilfredsstille Maxwells likninger i tomrom, må de konstante vektorene $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ og $\mathbf{k}$ være innbyrdes ortogonale.

Oppgave 4

Utled varmelikningen i tre romlige dimensjoner.

Besvarelse

Først, la oss minne om den grunnleggende loven for varmeledning, som også er kjent som Fourier's lov. Den sier at varmeenergi strømmer fra høyere til lavere temperatur og at varmefluksen, $\vec{q}$, er proporsjonal med temperaturgradienten. Dette kan uttrykkes som:

$$\vec{q} = -k\nabla T$$

Her er k den termiske konduktiviteten, en skalarverdi, T er temperaturen, og ∇T er temperaturgradienten. Merk at minus-signalet viser at varmeoverføringen skjer i retning av synkende temperatur.

Videre, i en ideell gass, er det antatt at det er en lineær sammenheng mellom temperatur og oppbevart kinetisk energi. Derfor kan vi si at endringen i oppbevart energi i et lite volum er proporsjonal med endringen i temperatur, uttrykt som $\rho C \frac{\partial T}{\partial t}$, hvor ρ er densiteten til gassen, C er spesifikk varmekapasitet, og $\frac{\partial T}{\partial t}$ er endringen i temperatur med tiden.

Vi antar også at det ikke er noen varmeproduksjon i volumet. Dette gir oss varmekonservasjonsloven, som sier at endringen i termisk energi i et volum er lik netto varmestrøm ut av volumet. Dette kan uttrykkes som:

$$-\nabla \cdot \vec{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ved å erstatte $\vec{q}$ med uttrykket fra Fourier's lov får vi:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Hvis vi antar at den termiske konduktiviteten er konstant i hele domenet, kan vi ta den ut av divergensoperatoren, som gir oss varmelikningen i tre dimensjoner:

$$k\nabla^2 T = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Der ∇^2 er Laplace-operatoren, som representerer summen av den andre deriverte av temperaturen i hver romlig dimensjon. Dette er den generelle formen for varmelikningen i tre dimensjoner for en ideell gass uten intern varmeproduksjon. Den beskriver hvordan temperaturen endres over tid og rom på grunn av varmeledning.

Oppgave 5

Skriv opp schrödingerlikningen og

1. vis at det romlige arealet under kvadratet av løsningen er en invariant:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathbb{R}^3}|\Psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} = 0$$

2. separer variable og utled den tidsuavhengige schödingerlikningen

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

Besvarelse

Løsningen er en incel

Det er viktig å merke seg at det forenkles litt ved å anta at potensialet ikke er tidsavhengig og at partikkelen er ikke-relativistisk.

Schrödingerlikningen for en enkelt, ikke-relativistisk partikkel i et tidsuavhengig potensial er gitt ved:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x},t)$$

For å gjøre det lettere i framtiden så skriver jeg den om til

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\Psi(\mathbf{x},t) + \frac{V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x},t)}{i\hbar}$$

Vi ønsker å vise at:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathbb{R}^3}|\Psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} = 0$$

For å gjøre dette, tar vi tidsderiverte av dette uttrykket og bruker Schrödingerlikningen for å erstatte $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$.

La oss først beregne den komplekskonjugerte av Schrödingerlikningen. Dette gir oss:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\Psi^*(\mathbf{x}, t) - \frac{V(\mathbf{x})\Psi^*(\mathbf{x}, t)}{i\hbar}$$

Vi kan nå uttrykke tidsderiverte av den romlige integrasjonen:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) d\mathbf{x}$$

Her bruker vi produktregelen for derivasjon for å forenkle uttrykket:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\Psi\right) d\mathbf{x} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} d\mathbf{x}$$

Nå kan vi bruke Schrödingerlikningen og dens komplekskonjugerte for å erstatte tidsderivertene. Dette gir oss:

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi^*\left(-\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}, t)}{i\hbar}\right) d\mathbf{x} + \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi\left(\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\Psi^*(\mathbf{x}, t) - \frac{V(\mathbf{x})\Psi^*(\mathbf{x}, t)}{i\hbar}\right) d\mathbf{x}$$

Ved å forenkle uttrykket:

$$= \frac{\hbar}{2mi}\iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi^*\left(\nabla^2\Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}, t)}{i\hbar}\right) d\mathbf{x} + \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi\left(\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\Psi^*(\mathbf{x}, t) - \frac{V(\mathbf{x})\Psi^*(\mathbf{x}, t)}{i\hbar}\right) d\mathbf{x}$$

og bruke integraleiendommene, kan vi konkludere:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{i\hbar}\iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi\right) d\mathbf{x} - \frac{1}{i\hbar}\iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^* + V\Psi^*\right) d\mathbf{x}$$

Vi kan nå omorganisere dette for å isolere Laplacian-uttrykkene:

$$= -\frac{\hbar}{2m}\iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi^*\nabla^2\Psi d\mathbf{x} + \frac{\hbar}{2m}\iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi\nabla^2\Psi^* d\mathbf{x}$$

Så bruker vi produktregelen for derivasjon for å forenkle Laplacian-uttrykkene, noe som gir oss:

$$= \iiint_{\mathbb{R}^3} [\nabla \cdot (\Psi^*\nabla\Psi) - \nabla \cdot (\Psi\nabla\Psi^*)] d\mathbf{x}$$

Og så bruker vi Gauss' divergensteorem for å konvertere volumintegralet til et overflateintegral:

$$= \oint_S (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \cdot d\mathbf{S}$$

Hvis vi antar at bølgefunksjonen $\Psi(\mathbf{x}, t)$ og dens romlige derivater går mot null når $|\mathbf{x}| \to \infty$, blir overflateintegralet null, noe som viser at

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = 0$$

Dette beviser at det romlige arealet under kvadratet av løsningen til Schrödingerlikningen er en invariant.

Den tidsuavhengige schödingerlikningen

la oss fortsette fra tidsavhengige Schrödingerlikningen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t)$$

Vi kan se etter løsninger som kan separeres i romlige og tidsavhengige deler. Vi antar derfor at $\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) T(t)$, hvor $\psi(\mathbf{x})$ er den romlige delen av bølgefunksjonen, og $T(t)$ er den tidsavhengige delen.

Sett inn dette i Schrödingerlikningen:

$$i\hbar \psi(\mathbf{x}) \frac{dT}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} T(t) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) T(t)$$

Dele begge sider med $\psi(\mathbf{x}) T(t)$ for å separere variablene:

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(\mathbf{x})} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})$$

Høyresiden av denne ligningen avhenger bare av romlige variabler, mens venstresiden kun avhenger av tid. Derfor må begge sidene være konstante for å oppfylle ligningen for alle $\mathbf{x}$ og t. Vi kaller denne konstanten for energi E, som gir oss to ligninger:

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(\mathbf{x})}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) = E$$

Vi kan omorganisere den andre ligningen for å utlede den tidsuavhengige Schrödingerlikningen:

$$E\psi(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$$

Dette er den tidsuavhengige Schrödingerlikningen som vi ønsket å utlede. Den gir oss energiegenverdier og tilhørende romlige bølgefunksjoner for et gitt potensial $V(\mathbf{x})$.

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Oppgave 6

Løs varmelikningen på hele $\mathbb{R}$

Besvarelse

Vi ønsker å løse varmeligningen gitt ved

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

hvor $u(x,t)$ er temperaturfordelingen, t er tiden, x er posisjonen langs stangen, og α er en konstant. initialkrav er

$$u(x,0) = f(x)$$

For å løse dette problemet vil vi bruke metoden for Fourier-transformasjon. Fourier-transformasjonen av en funksjon $u(x,t)$ er gitt ved

$$\mathscr{F}\{u(x,y)\} = \hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,t), dx$$

og dens inverse Fourier-transformasjon er gitt ved

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(k,t)\}, dk$$

Vi begynner med å ta Fourier-transformasjonen av varmeligningen. Merk at Fourier-transformasjonen av en derivert av en funksjon kan beregnes av regelen $\widehat{g'(x)} = ik\hat{g}(k)$, og Fourier-transformasjonen av en funksjon evaluert ved $t = 0$ er bare Fourier-transformasjonen av funksjonen. Så vi får

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(k,t) = -\alpha k^2 \hat{u}(k,t)$$

hvor $\hat{u}(k,t)$ er Fourier-transformasjonen av $u(x,t)$. Dette er en enkel ordinær differensialligning. Løsningen på denne differensialligningen er

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-\alpha k^2 t}$$

Nå vet vi at $\hat{u}(k, 0)$ bare er Fourier-transformasjonen av initialkrav, som vi vil betegne ved $\mathscr{F}\{u(x, y)\}$. Så vi kan skrive

$$\hat{u}(k, t) = \mathscr{F}\{u(x, y)\}e^{-\alpha k^2 t}$$

Vi tar nå den inverse Fourier-transformasjonen av $\hat{u}(k, t)$ for å finne løsningen i det opprinnelige rommet. Vi får

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathscr{F}\{u(x, y)\}e^{-\alpha k^2 t}, dk$$

For å forenkle uttrykket kan vi kombinere termene som inneholder k for å få

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}\{u(x, y)\}e^{ikx-\alpha k^2 t}, dk$$

Dette er løsningen på varmeligningen over hele den reelle linjen med initialkrav $u(x, t)$. Det viser hvordan den opprinnelige temperaturfordelingen $u(x, t)$ utvikler seg over tid i henhold til varmeligningen.

Dette er en generell løsning. Hvis du har en spesifikk initialkrav $u(x, t)$, ville du erstatte $\mathscr{F}\{u(x, y)\}$ med dens spesifikke Fourier-transformasjon. Merk at løsningen er gitt som en integral som involverer Fourier-transformasjonen av initialkrav, noe som betyr at den inkluderer alle frekvenskomponentene i initialkrav, hver enkelt utvikler seg uavhengig med sin egen rate αk^2.

Oppgave 7

Utled middelverdisatsene

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u dS = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{\Omega} u dx$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r, og u er en harmonisk funksjon.

Besvarelse

Uttrykket allment kjent som Middelverdisetningen for harmoniske funksjoner. Harmoniske funksjoner er funksjoner som tilfredsstiller Laplaces ligning, som er en partiell differensialligning av andre orden.

Middelverdisetningen består av to deler:

- Verdien av den harmoniske funksjonen på ethvert punkt er lik gjennomsnittet av funksjonsverdiene på en hvilken som helst sfære sentrert ved det punktet.
- Verdien av den harmoniske funksjonen på ethvert punkt er lik gjennomsnittet av funksjonsverdiene innenfor enhver sfære sentrert ved det punktet.

La oss diskutere hvert eiendom separat:

- Den første delen av Middelverdisetningen sier at hvis u er harmonisk, så er

  $$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u dS$$

  for alle $x \in \mathbb{R}^3$ og alle sfærer Ω sentrert på x. Her betegner r radiusen til sfæren, dS betegner overflatemålet på sfæren, og $\partial\Omega$ representerer grensen til sfæren.

  Intuisjonen bak denne egenskapen er at verdien av en harmonisk funksjon i et punkt i rommet er bestemt av gjennomsnittsverdien av funksjonen på en hvilken som helst sfære sentrert ved det punktet. Denne egenskapen er en konsekvens av maksimumsprinsippet for harmoniske funksjoner, som sier at maksimum og minimum for en harmonisk funksjon i et lukket og begrenset domene oppstår på domenets grense.

- Den andre delen av Middelverdisetningen sier at hvis u er harmonisk, så er

  $$u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{\Omega} u dx$$

for alle $x \in \mathbb{R}^3$ og alle sfærer Ω sentrert på x. Her betegner dx volummålet i $\mathbb{R}^3$.

Intuisjonen bak denne egenskapen er lik den for den første egenskapen, men i stedet for å vurdere gjennomsnittsverdien av funksjonen på grensen til en sfære, vurderer vi gjennomsnittsverdien av funksjonen over volumet av sfæren.

Denne egenskapen kan utledes fra den første ved hjelp av divergensteoremet, som knytter fluksen av et vektorfelt gjennom en lukket overflate til divergensen av vektorfeltet innenfor volumet omsluttet av overflaten.

Til slutt er Middelverdisetningen et kraftig verktøy i teorien om harmoniske funksjoner fordi den lar oss utlede verdien av en funksjon på et punkt fra verdiene av funksjonen rundt det punktet.

Oppgave 8

Vis at harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante, og utled Rodrigues' formel

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}\cos\theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x}\sin\theta + \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(1 - \cos\theta)$$

der $\mathbf{z}$ er $\mathbf{x}$ rotert vinkelen θ om enhetsvektoren $\mathbf{y}$.

Besvarelse

Selvfølgelig, la oss oversette denne forklaringen til norsk.

La oss begynne med den første delen av spørsmålet ditt, nemlig å vise at harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante. En harmonisk funksjon er en to ganger kontinuerlig derivert funksjon $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som oppfyller Laplace's ligning:

$$\Delta u = 0$$

hvor Δ er Laplacian-operatøren. For å vise at harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante, må vi vise at for en roterende operator $\mathbf{R}$, så er $\Delta(u \circ \mathbf{R}) = 0$ for enhver harmonisk funksjon u.

Laplacian i koordinater er definert som:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Tenk deg en rotasjon $\mathbf{R}$ i n dimensjoner. Rotasjonen er en lineær transformasjon, og kan representeres ved en matrise $[\mathbf{R}]$, slik at for enhver vektor $\mathbf{x}$, har vi $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}]\mathbf{x}$.

Nå beregner vi Laplacian av $u \circ \mathbf{R}$.

$$\Delta(u \circ \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (u \circ \mathbf{R})}{\partial x_i^2}$$

Vi kan endre variablene ved å bruke kjerneregelen for differensiering:

$$\frac{\partial (u \circ \mathbf{R})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial x_i}$$

hvor $\mathbf{R}_j$ betegner j-te koordinat av den roterte vektoren. Ved å ta den andre deriverte, får vi

$$\frac{\partial^2(u \circ \mathbf{R})}{\partial x_i^2} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \mathbf{R}_j}{\partial x_i^2}$$

Ved å summere over i, finner vi

$$\Delta(u \circ \mathbf{R}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \mathbf{R}_j}{\partial x_i^2}$$

Nå er den viktigste innsikten at rotasjoner ikke endrer lengden på vektorer. Så for enhver vektor $\mathbf{x}$, har vi $||\mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{R}(\mathbf{x})||^2$, og ved å differensiere dette med hensyn til x_i gir det

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{og} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{R}_j \frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial x_i} = x_i$$

Dette innebærer at $\frac{\partial \mathbf{R}_j}{\partial x_i}$ er antisymmetrisk i i og j, og at $\frac{\partial^2 \mathbf{R}_j}{\partial x_i^2}$ er symmetrisk i i og j. Så alle leddene i $\Delta(u \circ \mathbf{R})$ forsvinner på grunn av antisymmetri eller fordi $\Delta u = 0$. Derfor er også $u \circ \mathbf{R}$ harmonisk, så harmoniske funksjoner er faktisk rotasjonsinvariante.

Nå skal vi utlede Rodrigues' rotasjonsformel, som uttrykker resultatet av å rotere en vektor $\mathbf{x}$ med en vinkel θ rundt en enhetsvektor $\mathbf{y}$.

Formelen er

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \cos\theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x} \sin\theta + \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(1 - \cos\theta)$$

La oss dele $\mathbf{z}$ inn i to komponenter, en parallell med $\mathbf{y}$, og en vinkelrett på $\mathbf{y}$. Disse komponentene er henholdsvis $\mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ og $\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Når vi roterer $\mathbf{x}$, endrer den parallelle komponenten seg ikke, siden rotasjon rundt $\mathbf{y}$ ikke endrer noe i retning av $\mathbf{y}$. Men den vinkelrette komponenten roterer i planet vinkelrett på $\mathbf{y}$, og dens størrelse forblir den samme. Så den roterte vektoren er $\mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})) \cos\theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x} \sin\theta$.

Kryssproduktleddet kommer fra høyrehåndsregelen, hvor en positiv rotasjon i henhold til høyrehåndsregelen tilsvarer retningen til kryssproduktet.

Nå, ved å kombinere de parallelle komponentene og forenkle, oppnår vi Rodrigues' rotasjonsformel. Denne utledningen bruker bare de geometriske egenskapene til prikk- og kryssproduktene, samt egenskapen til rotasjoner for å bevare lengder og vinkler.

Oppgave 9

Vis at laplaceoperatoren blir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

i polare koordinater.

Besvarelse

I dag skal jeg snakke om Laplace-operatøren og dens betydning innen matematikk, spesielt i studiet av potensialteori og varmeligningen. Laplace-operatøren, eller Laplace-operator, er en differensialoperator av andre orden som spiller en viktig rolle innen mange områder av fysikk og ingeniørfag.

Det kan være nyttig å uttrykke Laplace-operatøren i andre koordinatsystemer, som for eksempel polarkoordinater, spesielt når man arbeider med problemer som har radial symmetri.

I kartesiske koordinater er Laplace-operatøren gitt ved

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

hvor u er en funksjon av x og y.

Polarkoordinater (r, θ) er relatert til kartesiske koordinater (x, y) gjennom følgende transformasjoner:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

og de inverse transformasjonene er:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nøkkelen til transformasjonen av Laplace-operatøren fra kartesiske til polarkoordinater er beregningen av de andrederiverte med hensyn på de polare koordinatene.

La oss først beregne førstederiverte av u med hensyn på r og θ:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

Deretter beregner vi de andrederiverte med hensyn på r og θ. For r får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)$$

For θ får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)$$

Etter noen algebraiske omdannelser og forenklinger finner vi at disse deriverte kan uttrykkes i termer av $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ og deres blandede deriverte, som gir oss tilbake Laplace-operatøren i kartesiske koordinater. Detaljene i denne beregningen kan finnes i hvilken som helst standard lærebok om matematiske metoder for fysikk eller ingeniørfag.

Til slutt, ved å erstatte disse uttrykkene i uttrykket for Laplace-operatøren i kartesiske koordinater og forenkle, finner vi at Laplace-operatøren i polarkoordinater er gitt ved

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

som er det ønskede resultatet.

Denne formuleringen er spesielt nyttig i problemer som involverer sirkulær eller sfærisk symmetri, der de polare eller sfæriske koordinatene forenkler den matematiske beskrivelsen.

Jeg håper dette gir deg en klar forståelse av transformasjonen av Laplace-operatøren fra kartesiske til polarkoordinater. Takk for oppmerksomheten.

Oppgave 10

La u og v være henholdsvis real- og imaginærdelen til en kompleks analytisk funksjon f. Bruk definisjonen av kompleks derivert til å utlede Cauchy-Riemann-likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

og vis at u og v er harmoniske funksjoner.

Besvarelse

La oss begynne med å vurdere en kompleks funksjon f som er skrevet i form av reelle og imaginære deler. Vi kan uttrykke f som $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, der $z = x + iy$ og $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er reellverdige funksjoner.

Nå, ifølge definisjonen av den komplekse deriverte, er funksjonen f analytisk i et punkt hvis og bare hvis grensen

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer.

La oss nå vurdere små inkrementer Δx og Δy, og la $h = \Delta x + i\Delta y$. Da kan vi omskrive definisjonen av den deriverte som

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Denne grensen bør eksistere og være den samme uavhengig av retningen hvorfra h nærmer seg null. Hvis vi lar h nærme seg null langs den reelle aksen, det vil si $\Delta y = 0$, får vi

$$f'(z) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

På den annen side, hvis vi lar h nærme seg null langs den imaginære aksen, det vil si $\Delta x = 0$, får vi

$$f'(z) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ved å sammenligne de to uttrykkene kan vi konkludere med at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dette er Cauchy-Riemanns ligninger, en nødvendig betingelse for at en kompleks funksjon skal være analytisk.

Vi blir også bedt om å bevise at funksjonene u og v er harmoniske, det vil si at de oppfyller Laplace-ligningen, $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$.

Ved å derivere den første Cauchy-Riemann-ligningen med hensyn på x og den andre med hensyn på y, og legge sammen de to resultatene, får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ved å gjøre det samme, men denne gangen derivere den første ligningen med hensyn på y og den andre med hensyn på x, og trekke de to resultatene fra hverandre, får vi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Dermed kan vi se at både u og v oppfyller Laplace-ligningen, så de er faktisk harmoniske funksjoner. Dette fullfører beviset.

Oppgave 11

Skriv opp definisjonen på komplekst linjeintegral. Forklar hva Cauchys integralteorem sier, og regn ut

$$\int_{C} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$$

der C er en sirkel med sentrum i z_0 i det komplekse planet og n er et heltall. Skriv opp Cauchys integralformel og forklar hvor den kommer fra.

Besvarelse

Sure, I'd be happy to help with that. Let's start with the definition of a complex line integral.

A complex line integral of a complex function $f(z)$ along a curve C in the complex plane is defined as:

$$\int_{C} f(z) dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Here, $\gamma(t)$ is a parameterization of the curve C from $t = a$ to $t = b$. The complex function f is evaluated along the curve, and then this is integrated with respect to z along the curve.

Next, we have Cauchy's Integral Theorem. This theorem is a fundamental result in complex analysis and it states:

$$\int_{C} f(z) dz = 0$$

where $f(z)$ is a function analytic in a simply connected domain containing the contour C. This theorem essentially means that the line integral of an analytic function over a closed curve in a simply connected domain is zero.

Now, let's calculate the given integral.

$$\int_{C} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$$

where C is a circle centered at z_0 in the complex plane, and n is an integer.

This can be solved by using the residue theorem which is a special case of Cauchy's Integral Formula, where the integral of a function around a closed curve is 2πi times the sum of the residues within the curve. For this particular integral, there is only one singularity at $z = z_0$.

When $n = 1$, the integral is $2\pi i$ due to Cauchy's integral theorem.

When $n \neq 1$, the integral is 0 because there are no singularities within the curve.

Thus, the result of the integral is:

$$\int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n \neq 1 \end{cases}$$

Finally, we have Cauchy's Integral Formula. It states that if $f(z)$ is analytic inside and on a simple closed contour $\mathcal{C}$ and z_0 is any point inside $\mathcal{C}$, then:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

This formula is derived directly from Cauchy's Integral Theorem by considering the difference between two contours, one encircling the singularity and the other not, and then applying the theorem to this difference. The theorem tells us that the integral over this difference is zero, so the integrals over the two contours must be equal, which gives us Cauchy's Integral Formula.

oppgave 12

Forklar hva residuteoremet sier og hvordan dette kan brukes til å invertere laplacetransformen til et signal.

Besvarelse

La oss begynne med å diskutere residuteoremet. Det er et kraftig verktøy innen feltet kompleks analyse som omhandler konturintegralet rundt singulariteter, det vil si punkter der en funksjon blir udefinert.

Teoremet sier følgende:

$$\oint_C f(z), dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_k} f(z)$$

Her representerer venstre side av ligningen et lukket konturintegrale av funksjonen $f(z)$ over en kontur C. På høyre side har vi summen av residuene til funksjonen $f(z)$ ved dens singulære punkter a_k, multiplisert med $2\pi i$. Et residu er i hovedsak 'koeffisienten' til $\frac{1}{z}$-termen når vi uttrykker vår funksjon som en Laurent-serie rundt en singularitet.Så, hvordan hjelper restteoremet oss med å invertere Laplacetransformasjonen?Laplace-transformasjonen er et kraftig verktøy isignalbehandling og kontrollsystemer, da det lar oss konvertere komplekse differensialligninger til enklere algebraiske ligninger. Den er definert som følger for en gitt funksjon $f(t)$:

$$F(s) = \mathcal{L}f(t) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Hvor s er et komplekst tall.

Inversjonen av Laplace-transformasjonen utføres vanligvis ved bruk av Bromwich-integralet, også kjent som den inverse Laplace-transformasjonen, som er gitt av:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

Her er den reelle delen av s større enn den reelle delen av enhver singularitet av $F(s)$, og γ er et reelt tall.Nå er integralet over en kompleks integral, og det er her vi benytter restteoremet. Ved å velge en passende kontur C som inkluderer singularitetene til $F(s)e^{st}$, kan vi likestille integralet med $2\pi i$ ganger summen av residuene ved disse singulariteteneI praksis trenger vi vanligvis å finne polene til funksjonen $F(s)$, beregne residuene ved disse polene, og deretter summere dem opp. Hvis polene er enkle (det vil si av orden 1), kan residuet ved en pol a beregnes ved hjelp av formelen:

$$\mathrm{Res} a F(s) = \lim s \to a(s-a)F(s)$$

Så til slutt gjør restteoremet det mulig for oss å evaluere komplekse integraler som oppstår i prosessen med å invertere Laplace-transformasjoner. Ved å beregne residuene ved de singulære punktene til funksjonen under integralet, kan vi finne dens eksakte verdi. Dette er en betydelig hjelp i å løse differensialligninger og andre problemer innen matematisk fysikk og ingeniørfag.

Oppgave 13

Forklar hvordan man kan løse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

med rand- og initialkrav:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad u(x,0) = f(x)$$

numerisk.

Besvarelse

Selvfølgelig, la oss gå gjennom den numeriske løsningen av denne partielle differensialligningen (PDE) på norsk.

Den gitte PDE-en er en standard varmeligning, som modellerer diffusjonen av varme over tid. Randbetingelsene spesifiserer at endepunktene av domenet holdes ved null temperatur, og den innledende tilstanden gir en starttemperaturfordeling.

En vanlig numerisk metode for å løse denne PDE-en er Crank-Nicolson-metoden, som er en finitt differansemetode. Ideen bak metoden er å diskretisere rom- og tidsdomenet og deretter tilnærme derivatene med differensligninger.

Crank-Nicolson-metoden bruker en trapesregel for å tilnærme integralet, og gir dermed en god balanse mellom nøyaktighet og beregningskompleksitet.

La oss begynne med en detaljert beskrivelse av metoden.

Først, diskretiser domenet. Velg en steglengde $h = 1/N$ for et stort N og la $x_j = jh$ for $j = 0, 1, \ldots, N$. På samme måte, velg et tidssteg $\tau = T/M$ for et stort M og la $t_k = k\tau$ for $k = 0, 1, \ldots, M$. Funksjonen u blir tilnærmet på disse diskrete punktene: $u(x_j, t_k) \approx U_j^k$.

Crank-Nicolson-metoden fører da til følgende ligning for U_j^k:

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{j-1}^k - 2U_j^k + U_{j+1}^k}{h^2} + \frac{U_{j-1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j+1}^{k+1}}{h^2}\right)$$

for $j = 1, 2, \ldots, N-1$ og $k = 0, 1, \ldots, M-1$. Dette er et system av lineære ligninger for ukjente U_j^{k+1}, $j = 1, 2, \ldots, N-1$. Legg merke til at systemet for $k+1$ inneholder vilkår fra både gjeldende tidsnivå k og neste tidsnivå $k+1$.

Randbetingelsene er gitt ved $U_0^k = U_N^k = 0$ for en hvilken som helst k. Den innledende tilstanden er gitt ved $U_j^0 = f(x_j)$ for $j = 0, 1, \ldots, N$.

For å løse systemet, må du omorganisere vilkårene. La oss innføre parameteren $r = \frac{\tau}{h^2}$. Da kan systemet skrives som følger:

$$rU_{j-1}^{k+1} + 2(1+r)U_j^{k+1} - rU_{j+1}^{k+1} = rU_{j-1}^k + 2(1-r)U_j^k + rU_{j+1}^k$$

for $j = 1, 2, \ldots, N-1$. Disse ligningene danner et tridiagonalt system som kan løses ved hjelp av Thomas-algoritmen, som er en forenklet form for Gaussisk eliminering tilpasset tridiagonale systemer.

Denne prosessen gjentas for $k = 0, 1, \ldots, M-1$ for å løse alle U_j^k.

Så i oppsummering består løsningsprosessen av disse trinnene:

Diskretiser domenet til et rutenett. På hvert tidspunkt, dann et system av ligninger basert på Crank-Nicolson-metoden. Løs systemet av ligninger ved hjelp av Thomas-algoritmen. Gjenta for det neste tidspunktet. Det endelige resultatet er en tilnærming til løsningen $u(x, t)$ på hele rutenettet. Crank-Nicolson-metoden er betingelsesløst stabil og gir en løsning med andre ordens nøyaktighet, noe som betyr at det er en robust og effektiv metode for å løse denne typen PDE.