RESUMO

O presente trabalho desenvolveu-se durante o segundo semestre de 2007 e o primeiro semestre de 2008. Para realização do mesmo, partiu-se do seguinte problema de pesquisa: Como pode estar organizado um plano de ensino, relativo ao ensino da trigonometria, de forma tornar a aprendizagem, por parte dos alunos, mais significativa? A partir do mesmo foram traçados os caminhos a serem seguidos, tendo como principal objetivos elaborar um plano de ensino, para os fundamentos da trigonometria, de forma fazer com que o aluno desperte curiosidade pela aprendizagem tornando-a mais significativa. Para isso foi feito uso de pesquisa bibliográfica em diferentes instrumentos: livros, revistas, monografias e internet. O plano de ensino elaborado traz em sua abordagem dinâmicas de ensino que fogem do método tradicional, priorizando a busca histórica, a problematização e a contextualização do conteúdo a ser ministrado. Por fim ressalta-se que é de total responsabilidade do professor, o despertar do interesse, no aluno, em relação aos assuntos propostos, pois a matemática é a construção permanente de conceitos, onde em cada um há uma maneira diferente de absorvê-los, basta apenas descobrir sua melhor maneira para que haja literalmente uma construção matemática, de forma competente, com curiosidade, interesse, desenvolvimento intelectual e lógico.

Palavras Chaves: Fundamentos da trigonometria,História da matemática; Ensino-aprendizagem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A abordagem da geometria no Ensino Médio é de fundamental importância, uma vez que muitas vezes é a única oportunidade que os discentes têm para aprender este conteúdo. Isso porque no Ensino Fundamental o ensino de geometria nem sempre contempla os conteúdos mínimos sendo inclusive, muitas vezes apresentado no livro didático somente no final de todos os outros conteúdos. Isso pode levar o professor que o utiliza como único instrumento a deixá-lo de lado, ou tratá-lo de maneira supérflua.

De acordo com o sistema de ensino vigente no estado de Santa Catarina, tem-se que no Ensino Médio o número de aulas de Matemática é de três horas para as primeiras e terceiras séries e de duas horas-aulas para a segunda série, o que faz com que o conteúdo tenha que ser reduzido. Como conseqüência disso, o ensino de geometria, mais especificamente a trigonometria, é abordada no final do primeiro ano, momento este que deve ser bem aproveitado, para que os objetivos de ensino sejam alcançados.

Assim sendo, pergunta-se: **Como pode estar organizado um plano de ensino, relativo ao ensino da trigonometria, de forma tornar a aprendizagem, por parte dos alunos, mais significativa?**

Para tentar buscar respostas a esse problemas desenvolvemos o presente trabalho que tem como objetivo geral desenvolver um plano de ensino, para o conteúdo de trigonometria, baseado na problematização, contextualização e busca histórica, de forma tornar a aprendizagem, por parte dos alunos, mais significativa. Como suporte para alcançar tal objetivo buscamos atingir os seguintes objetivos específicos: investigar a importância da trigonometria, apresentando exemplos práticos, que despertem o interesse dos alunos pelo assunto; pesquisar como foram construídos os conceitos relativos à trigonometria, na sua origem, através de abordagem histórica; verificar quem foram os principais colaboradores para o desenvolvimento da trigonometria; reconhecer quais áreas a trigonometria abrange e qual é a influência que ela causa; e identificar, e interpretar alguns problemas que envolvam trigonometria no cotidiano.

Essa monografia foi desenvolvida através de pesquisa bibliográfica, com o uso de documentação indireta por meio de materiais impressos coletados através de jornais, revistas, livros, teses, monografias e através da internet, no período compreendido entre o segundo semestre de 2007 e o primeiro semestre de 2008.

O projeto justificou-se a partir da necessidade de uma melhor compreensão do assunto “trigonometria” que exige uma diversidade de conhecimentos básicos. Dentre esses destaca-se: o ensino da matemática, o ensino da geometria, a resolução de problemas e, então sim, trigonometria.

O estudo da geometria no Ensino Fundamental é extremamente importante, em função de contribuir para a construção e abstração de diversos conceitos. Para tornar mais significativo seu estudo, um dos recursos que podemos utilizar é a história.
Segundo Boyer (1974), os primeiros indícios de relações entre medidas, da era moderna, datam de aproximadamente de 600 a.C., e apesar de poucos documentos que provem isso, traz evidências que foram Tales e depois Pitágoras os primeiros a usarem estas relações na resoluções de problemas do cotidiano. Afirmações como a história de que Tales conseguiu medir o cumprimento de um navio no mar apenas utilizando a proporcionalidade de lados nos triângulos semelhantes, levaram a se dizer de uma forma ousada

que ele foi o criador da geometria, mesmo que os indícios da história de nada conseguem provar tal fato. Pitágoras leva a fama entre outras por descobrir a teoria das proporcionais e a construção das primeiras figuras cósmicas, também com poucos registros. Boyer (1974) ainda dá indícios, em sua obra “A História da Matemática”, que provavelmente tudo começou alguns séculos antes com os Babilônios, sem é claro, negar a importância de Tales e Pitágoras para a matemática como intermediadores de tal conhecimento.

Kepler citado por esse mesmo autor, em sua obra escreveu liricamente que “A geometria tem dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo pode ser chamado de jóia preciosa” (BOYER,1974 p.37). Com isto tem-se uma idéia de como Tales e Pitágoras são considerados de extrema importância para a geometria.

A trigonometria na sua formalidade começou com Hiparco de Nicéia por volta do século II a.C., sendo que seus primeiros passos eram baseados no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda.

Tratando-se do ensino, para Souza (1998) , Matemática é uma Ciência que tem por objetivo estudar os números, e as grandezas, a medida e as propriedades destes, e a extensão, porém, no que se refere a medidas e as propriedades destes está meio esquecida, principalmente no Ensino Fundamental, mesmo sabendo-se de sua grande importância.

Pesquisas existentes tendem a desenvolver metodologias de ensino, ou avaliar as condições de aprendizagem dos alunos.

Assim sendo, a monografia aqui apresentada traz como princípio a busca histórica de como os conceitos da trigonometria foram desenvolvidos, e desta forma propor um plano de ensino atrativo, que facilite a aprendizagem do aluno.

Kaleff (1994) em relação ao ensino da matemática cita que “durante séculos a geometria foi ensinada na sua forma dedutiva, até mesmo para adolescentes que quase sempre recorriam a memorização (decorando) para enfrentar as dificuldades lógicas apresentadas pelo método dedutivo” . O que acabou por criar um sistema condicionamentalista sem grandes perspectivas de mudanças do sistema convencional para um sistema cognitivista de visão construtivista.

Entende-se assim que atualmente torna-se importante que é que o aluno aprenda a aprender, deixando de ser um copiador de conhecimento.

Trabalhar geometria a partir de situações mais próximas à realidade do aluno pode torná-la mais significativa, facilitando sua aprendizagem.

Nesse sentido, o trabalho que apresentamos a seguir traz no capítulo 2 uma revisão bibliográfica sobre a matemática, seu ensino e, mais especificamente sobre geometria e trigonometria. No capítulo 3 apresenta uma proposta para o ensino de geometria a partir de um plano de ensino e finaliza trazendo algumas considerações finais sobre o tema abordado.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 A Matemática

No decorrer da história, percebe-se que, a matemática é um dos conhecimentos mais antigos da humanidade. “Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios são mais antigos que a arte de escrever.” (BOYER, 1974 p.4).

Ao longo da história a matemática evoluiu muito, e sofreu muitas modificações desde o princípio da contagem, com apenas alguns pares de unidades, até o surgimento da economia, capaz de movimentar milhões em questão de segundos.

O principal responsável por essa evolução foi o “repasse” de conhecimentos, que se dá, através do processo ensino-aprendizagem. Assim sendo, pode-se perceber que o ensino da matemática é de fundamental importância para a evolução da humanidade. Cabe ao educador matemático fazer com que o mesmo seja apropriado por todos os educandos, de maneira a que ele contribua efetivamente para essa missão.

2.2 O Ensino da Matemática

De acordo com o processo de ensino vigente, as competências matemáticas devem ser trabalhadas desde o início dos estudos passando por toda carreira estudantil dos educandos. Os principais objetivos a serem alcançados com a educação matemática nos departamentos educacionais, são:

... o desenvolvimento, nos alunos, da compreensão do significado, estrutura e função de conceitos matemáticos; o desenvolvimento da competência para construir abordagens matemáticas para problemas e situações; e a apreciação da atividade matemática enquanto prática cultural. (Meira, 2002 p.19).

Para que tais objetivos sejam alcançados, deve-se trabalhar desde as séries iniciais de forma objetiva, desenvolvendo o interesse do educando pela matemática. Para isso, cabe aos professores despertar o gosto dos alunos pela disciplina.

O que mais impressiona no ensino da matemática, é a metodologia utilizada. Na atualidade, professores ainda rendem-se aos processos tradicionalistas, e de forma muito abstrata, não dificultando, mas deixando de facilitar a aprendizagem dos alunos.
Alguns professores insistem em reclamar que os conteúdos não têm aplicações, só que "... não existe ramo da matemática por abstrato que seja que não possa um dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real" (LOBACHEVSKY apud BOYER, 1974 p.387), leva-se assim a uma conclusão de uma falta de interesse e/ou gosto de alguns professores por alguns conteúdos.

O bom treinamento em matemática é efetuado, necessariamente, com ênfase no argumento lógico, oposto ao autoritário, na distinção de casos, na crítica dos resultados obtidos em comparação com os dados iniciais do problema e no constante direcionamento para o pensamento independente. Assim sendo, o saber pensar matemático dar-se-á quando a matemática for trabalhada de forma criativa, crítica e contextualizada. O "o que", e o "como" fazer precisam ser repensados tendo-se em vista "para que" e o "quando" fazer Educação Matemática.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.(PCN, 2007 p.111)

Partindo do pressuposto de que a matemática é uma construção histórica da humanidade, um produto cultural produzido por diferentes povos, oriundos de diferentes regiões do planeta, acredita-se que o contato do aluno com estes lugares e tempos diferenciados, marcados pelo contexto sócio/histórico/econômico/cultural, servirá como motivação para um maior entendimento e gosto pela matemática. O estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades presentes quanto ao conceito do que está sendo trabalhado, porém a ausência do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos em praticamente todos os livros didáticos dificulta a utilização desta proposta, pelo professor.

É necessário que o professor tenha o conhecimento com o qual está trabalhando, tenha a responsabilidade de fazer com que esse conhecimento ajude na formação de seu aluno, tornando-o um cidadão crítico, criativo e transformador da sua realidade. Para isso, "um dos ingredientes da personalidade do educador que ressalta aos olhos de suas platéias consiste no fato de ele ter de ser uma criatura verdadeira e consistente, saber sobre o que está falando e acreditar no que está dizendo." (GIKOVATE, 2001 p.52).

Para isso, os PCNs(2007) indicam a resolução de problemas.

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.(PCN, 2007 p.112)

É importante que o professor tente contextualizar e enxergar matemática no seu dia-a-dia, e perceber que ela pode ser trabalhada a partir de notícias econômicas dos jornais, da curva da água do bebedouro, de plantas de casas, de revistas, enfim, de todo o nosso ambiente.

Essa consciência só virá quando o professor perceber a si mesmo para muito além de um mero transmissor de conhecimento, ou seja, como um educador, que levará o aluno a tornar-se homem, no sentido de humano; quando descobrir, dentro de si, a verdadeira natureza. O professor precisa passar pela crise do ser: encontrar as razões e os fins que darão sentido ao seu fazer. Quando as razões e os fins forem encontrados, a busca pelo conhecimento inovador será uma conseqüência natural. Se quer-se fazer a diferença na construção de uma nova história para a educação, é necessário primeiro acreditar que a mudança é possível, até porque "... a única coisa fácil no que diz respeito ao ato de ensinar é criticar os defeitos desse ou daquele professor" (GIKOVATE, 2001 p.51). É preciso ser otimista, mas só isso não basta. As crenças precisam se transformar em ações.

Se possível, não em ações isoladas. Se a sala de aula for o único espaço que se tem, precisa-se ocupá-lo com competência e tornar real o que foi antes sonhado.

2.3 O Ensino da Geometria

A origem da geometria é um tanto nebulosa, como a de muitos conhecimentos da matemática em que não há como atribuir a uma única pessoa o seu descobrimento. Porém, acredita-se que seus primórdios no Egito e os primeiros indícios da geometria moderna, datam de aproximadamente 600 a.C. com os matemáticos Tales e Pitágoras.

Apesar de sua importância no contexto histórico-cultural a geometria não é ensinada de forma adequada. O problema é que "... o ensino de geometria não só é confundido com o desenho geométrico como suas aulas são ministradas separadamente das de matemática... muitas vezes por outros profissionais cuja formação não pode ser adequada à tarefa em questão” (KALEFF, 1994 p.19). Com isso as competências a serem desenvolvidas nos alunos ficam defasadas.

Segundo a Proposta Curricular de Santa Catarina no que diz respeito ao ensino da geometria e as competências a serem desenvolvidas no aluno, alguns fatores devem ser levados em consideração:

• Estudo ou exploração do espaço físico e das formas

• Orientação e visualização e representação do espaço físico

• Visualização e compreensão das formas geométricas

• Denominação e reconhecimento das formas segundo suas características

• Classificação de objetos segundo suas formas

• Estudo das propriedades das figuras e as relações entre elas

• Construção de figuras e modelos geométricos

• Medição do espaço métrico uni, bi e tri dimensional

• Construção e justificação de relações e preposições tendo como base o raciocínio hipotético dedutivo (PROPOSTA CURRICULAR DE SANTA CATARINA,1998 p.111)

Para isso, as competências referentes à geometria devem ser repassadas desde o segundo ano do Ensino Fundamental, respeitando o nível de absorção de conteúdo do educando.

2.4 A Resolução de Problemas

Encontra-se posta e aceita na sociedade, a máxima "fazer matemática é resolver problemas". Aliado a isso, a resolução de problemas constitui-se em objetos para pesquisadores e educadores matemáticos. O entendimento das dificuldades enfrentadas pela maioria dos alunos, frente a esta atividade vital, passa por grandes desafios. O primeiro deles, certamente, é a compreensão exata do que seja um problema. Para Lakatos e Marconi, “problema é uma dificuldade, teórica ou prática, no conhecimento de alguma coisa de real importância, para a qual se deve encontrar solução.” (LAKATOS, MARCONi, 1991. p. 159), e esta compreensão é de fundamental importância para que os alunos trabalhem com a resolução de problemas.

Primeiramente, pode-se afirmar que a resolução de problemas, como estratégia para o desenvolvimento da educação matemática, precisa se desvencilhar daquele sentimento de "mal necessário", produzido pela lista interminável de "problemas", que, normalmente, ao término de cada unidade programática, o professor apresenta aos alunos.

O uso tradicional dos problemas, reduzidos à aplicação e sistematização dos conhecimentos, atrai a antipatia e o desinteresse do aluno, impedindo o seu pleno desenvolvimento intelectual. O treino excessivo de definições, técnicas e demonstrações se tornam uma atividade rotineira e mecânica, em que se valoriza apenas o produto final. A desconsideração das etapas de exploração e comunicação das idéias lógicas - matemáticas impede a necessária construção dos conceitos. Desta forma, "o saber matemático não se apresenta ao aluno como um sistema de conceitos, que lhe permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato, incompreensível" (BRASIL, 1995, p. 30).

O conhecimento matemático só evoluiu a partir de muitas respostas às muitas perguntas que foram feitas ao longo da história. A criatividade, o censo crítico, a curiosidade e o prazer formaram o combustível que alimentou este processo de descoberta.

Esquema para resolução de problemas, de acordo com Polya (1986).

O uso sistemático desse esquema ajuda o aluno a organizar o pensamento. O confronto de sua idéia inicial de resolução, com a de um colega ou grupo, favorece o aprendizado, redimensionando, desta forma, o papel do professor.

2.5 A Trigonometria

Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C.

O Papiro Ahmes é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia de um antigo papiro do século XIX a.C. que esteve em poder do escriba Ahmes. Foi adquirido no Egito por Henri Rhind e por isso é usualmente conhecido como Papiro Rhind. (CHACE apud COSTA., 2008 p. 2).

Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala.

A utilização da trigonometria para efeito de medida é muito antiga, e acompanha a geometria ao longo de sua história, cerca de 600 a.C, porém os principais estudos com relação as relações entre seus lados e ângulos deve-se a um astrônomo grego chamado Hiparco de Nicéia (190-125 a.C), considerado o pai da trigonometria.

“Trigonometria é um vocábulo criado em 1595 pelo matemático alemão Bartholomaus Pitiscus (1561-1613), do grego *trigonon* (triângulo) e *metron* (medida)” (MARQUES, 2008), e trata-se da parte da matemática em que se estudam as funções trigonométricas e se estabelecem os métodos de resolução de triângulos (figura geométrica bidimensional com três lados que formam três ângulos internos. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º).

Esse estudo é ainda subdividido em duas partes: Trigonometria Plana (Parte da trigonometria que investiga os triângulos planos), e Trigonometria Esférica (Parte da trigonometria em que se estudam os triângulos sobre as superfícies esféricas, nesse caso, são chamados de Triângulos Geodésicos e têm propriedades diferentes). Para nível de Ensino Médio reduz-se apenas ao estudo da parte plana, por ser de maior utilidade e aplicabilidade, e por ter um número de horas/aula insuficiente, para obter-se de uma maior complexibilidade dos assuntos.

A aplicação da Trigonometria nas diversas áreas das ciências exatas é um fato incontestável. Conhecer essa verdade é de fundamental importância para os alunos do Ensino Médio, sendo dever do professor de Matemática expor o assunto da melhor maneira possível, estabelecendo um vínculo necessário em relação às futuras escolhas profissionais. Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. “Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil etc.” (PAIVA, 2003 p. 113)

Nota-se, porém, que uma das maiores dificuldades encontradas por alunos do Ensino Médio ao que se diz respeita a Trigonometria, quanto ao fato da memorização de fórmulas. Entretanto, a não memorização levaria a perda de tempo para deduzi-las durante as provas, o que tornaria a situação impraticável.

A seguir apresentamos algumas das principais relações e teoremas relacionados a geometria e, mais especificamente a trigonometria.

2.5.1 Teorema de Pitágoras

Pitágoras (570 – 496 a.C.), nascido em Samos, Grécia, era matemático e filósofo. Alguns autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, Eves (1997, p. 97), quando diz que: “ele era cinqüenta anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales”. Já Boyer (1974, p. 35) diz que “embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades”.

Seu nome foi atribuído a uma das mais antigas relações matemáticas e trigonométricas conhecida como Teorema de Pitágoras, cujo qual é a mais importante relação entre os lados de triângulos retângulos (aquele que possui um ângulo de 90º). Segundo Eves (1997, p. 103) não foi ele quem inventou o teorema, pois “esse já era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes”, mas é possível que o teorema tenha o seu nome, pois, acredita-se que ele tenha sido o primeiro a dar uma demonstração geral.

Através dessa relação é possível descobrir a medida de um lado de qualquer triângulo retângulo, desde que as outras duas sejam conhecidas, ou, o problema traga informações suficientes para deduzi-lo (por exemplo: as três medidas na forma de polinômios de uma só variável).

Tem-se pelo teorema de Pitágoras: “A soma do quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos”, desta forma, considera-se o triângulo retângulo a seguir:

2.5.2 Funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente.

Das funções trigonométricas, a primeira a aparecer no decorrer da história é o seno, e está intimamente interligada com o estudo da circunferência e os ângulos (reunião de dois segmentos de reta orientados, ou duas semi-retas orientadas, a partir de um ponto comum).

Não se sabe ao certo quais as razões pelas quais, foi escolhido o número 360 para se dividir a circunferência, sabe-se apenas que o número 60 é um dos menores números, menores do que 100, que possui uma grande quantidade de divisores distintos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, razão forte pela qual este número tenha sido adotado. Outro fato que pode ter influenciado na escolha do número 360 “...é que o movimento de translação da Terra em volta do Sol se realizava em um período de aproximadamente 360 dias, o que era uma estimativa razoável para a época.” (VIANA, 2005). O sistema sexagesimal justifica ainda a divisão dos graus em minutos, a sexagésima parte de um grau, e do segundo, a sexagésima parte do minuto.

Apesar de muito comum, a utilização da notação em graus, para o sistema internacional, a unidade de medida para ângulos é o radiano,

...medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denota-se 1 rad.(Id, ibid)

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

As definições de seno, cosseno e tangente estão relacionadas com o estudo do triângulo retângulo, para isto se estabelece razões entre as medidas de seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto). Para isso, o triângulo retângulo a ser estudado apresenta as seguintes características:

Quanto aos ângulos internos: além do ângulo reto, apresenta dois ângulos agudos e complementares, geralmente são nomeados com as letras gregas α (alfa), β (beta) ou θ (teta). Os catetos e a hipotenusa são nomeados com letras minúsculas do alfabeto português. Desta forma, da-se o nome de hipotenusa para o lado do triângulo oposto ao ângulo reto, cateto adjacente a α, lado do triângulo que junto com a hipotenusa forma o ângulo agudo que está sendo considerado, e cateto oposto a α, lado do triângulo que se opõe ao ângulo considerado.

Assim sendo, “num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e da hipotenusa”. (BARRETO, 1998 p. 191), denotando-se:

Outra das razões é que “num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa” (Id, ibid p. 191) denotando-se:

A última das razões é que “num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e do cateto adjacente a esse ângulo” (Id, ibid p. 192), denotando-se:

Lembra-se que as razões , e , que representam respectivamente o seno, o cosseno e a tangente, são válidas para o triângulo exposto anteriormente e não devem ser decoradas ou tomadas como regra, desta forma valoriza-se o conceito e não a memorização de fórmulas.

Uma grande evolução dos conceitos trigonométricos aconteceu após a utilização do ciclo trigonométrico, chamado anteriormente de círculo trigonométrico. Trata-se de “eixos coordenados que possuem como unidade de medida o raio de uma circunferência orientada, que esta com centro coincidente com a origem dos eixos coordenados.” (MURARO, 2004 p. 365)

Euler (séc. XVIII), ao usar sistematicamente o círculo trigonométrico de raio um introduziu o conceito de seno, cosseno e de tangente como números ou razões ou coordenadas de pontos e as notações actualmente utilizadas. Na sua obra Introductio, em 1748, estabeleceu o tratado analítico das funções trigonométricas.(VARANDAS, 2003)

Euler (1707 – 1783), nascido em Basiléia, foi um dos melhores e mais produtivos matemáticos da história, e com sua contribuição acima citada convencionou a utilização de raio um para o ciclo trigonométrico. Desta forma, “como o ciclo é orientado, a cada medida em graus que se tenha corresponderá um único ponto no ciclo.”(MURARO, 2004 p. 365)

Com esta definição pode-se estabelecer os mesmos conceitos para o seno, o cosseno e para a tangente da seguinte maneira:

Considerando a figura ao lado, onde está representado um círculo trigonométrico (centro na origem e raio unitário). Tem-se da simples observação da figura os seguintes pontos notáveis: A(1;0) , B(0;1) , A’(-1;0) e

B’(0;-1). Observa-se também que as coordenadas cartesianas do ponto U são: $x0$ = abscissa e $y0$ = ordenada, ou seja: U($x0$, $y0$).

Considerando o arco trigonométrico AU de medida a. Define-se:

Seno do arco de medida a = ordenada do ponto U = $y0$ e indica-se: sen $a=y0$. Ou seja: O seno de um triângulo retângulo é igual ao cateto oposto dividido pela hipotenusa, sendo a hipotenusa a medida oposta ao ângulo reto.

Cosseno do arco de medida a = abscissa do ponto U = $x0$ e indica-se:

cos $a = x0$. Ou seja: O cosseno de um triângulo retângulo é igual ao cateto adjacente dividido pela sua hipotenusa, sendo a hipotenusa a medida oposta ao ângulo reto.

Lembra-se que o raio do círculo trigonométrico é igual a 1 (por definição), conclui-se que o seno e o cosseno de um arco são números reais que variam no intervalo real de -1 a +1.

Ainda na figura anterior, observa-se o segmento AT. O comprimento deste segmento é a tangente do arco AU de medida a. Indica-se isto escrevendo tg a = AT. A escala adotada no eixo das tangentes é a mesma dos eixos das abscissas e das ordenadas.

2.5.3 Outras relações trigonométricas

Considerando a representação a seguir para a lei dos senos:

Sendo ACH um triângulo retângulo. Tem-se:

Lei dos senos:

As proporções referentes a lei dos senos, denotadas acima, conceituam pela seguinte definição:

As medidas dos lados de um triângulo qualquer são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a estes lados, sendo a constante de proporcionalidade igual a 2R, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.(VIANA, 2005)

Considerando a representação a seguir para a lei dos cossenos:

AH = altura do triângulo em relação à base CB.
Medidas dos lados: AC = b, AB = c e CB = a.
Tem-se: Lei dos cossenos
a2 = b2 + c2 – 2.b.c.cosA
b2 = a2 + c2 – 2.a.c.cosB
c2 = a2 + b2 – 2.a.b.cosC

Segundo a lei dos cossenos, conforme denotado acima, “num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do angulo que eles formam.”(id, ibid).

3 ENSINO DA TRIGONOMETRIA: APRESENTANDO A PROPOSTA

Retoma-se nesse capítulo o objetivo de desenvolver um plano de ensino, para o conteúdo de trigonometria, baseado na problematização, contextualização e busca histórica, de forma tornar a aprendizagem, por parte dos alunos.

Ressalta-se que se entende que o plano de ensino é um requisito necessário para nortear os caminhos do processo ensino aprendizagem de qualquer conteúdo, nele são destacados, como veremos a seguir, o conteúdo, os objetivos, desenvolvimento do plano, os materiais a serem utilizados e a forma de avaliação do conteúdo a ser ministrado. Com base no projeto de tema Trigonometria: Problematização e Contextualização originou-se o presente.

3.1 Conteúdo

Fundamentos da Trigonometria

3.2 Objetivos

• Contextualizar o assunto trigonometria, através de abordagem histórica e por meio da exploração do espaço físico e das formas presentes no ambiente.

• Proporcionar condições para que os alunos assimilem os conceitos básicos da trigonometria (seno, cosseno, tangente).

• Reconhecer em quais áreas é estendido e qual é a influência que ela causa.

• Oportunizar ao aluno métodos que facilitem sua compreensão com relação à interpretação e resolução de problemas.

3.3 Desenvolvimento da proposta

O conteúdo trigonometria será aplicado conforme material elaborado para acompanhamento do conteúdo(anexo I), cujo qual seguirá os seguintes passos:

a) Exposição do conteúdo trigonometria, destacando suas origens, demonstrando sua importância e oportunizando participação e contribuição dos alunos.

Para expor o conteúdo, o professor pode estar utilizando, como base introdutória, o texto a seguir (texto I), “Trigonometria no Triângulo Retângulo”, e se a escola e/ou os alunos tiverem estrutura (material didático e/ou acesso a internet), uma pesquisa sobre o assunto, a ser realizada pelos alunos, destacando a evolução do conhecimento e a bibliografia dos matemáticos envolvidos. Quanto à pesquisa esta poderá ser feito em grupos, e dividido pelos temas:

1 – A evolução da trigonometria;

2 – Vida e obras de Tales;

3 – Vida e obras de Pitágoras;

4 – Vida e obras de Hiparco.

A socialização poderá ser feita por meio de apresentação, valendo a criatividade e interesse de cada grupo. Após a apresentação o professor poderá fazer suas colocações, priorizando a importância do conteúdo.

Texto I

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A trigonometria (do Grego trigōnon "triângulo" + metron "medida", ou seja, medida do triângulo) é um ramo da matemática que estuda os triângulos, particularmente triângulos em um plano onde um dos ângulos do triângulo mede 90 graus. Também estuda especificamente as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos; as funções trigonométricas, e os cálculos baseados nelas. A abordagem da trigonometria penetra outros campos da geometria, como o estudo de esferas usando a trigonometria esférica.

A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios.

Triângulo é uma figura geométrica que possui três lados e três ângulos. Para formarmos um triângulo basta unirmos três pontos quaisquer por segmentos de reta, desde que não alinhados. As figuras a seguir são representam triângulos:

A abertura obtida por duas retas, unidas pelo mesmo ponto, é chamada ângulo que possui como de sistema internacional de medida o radiano, sendo também muito usado o grau. Nos triângulos a soma de seus ângulos internos é 180o.

O triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90o(noventa graus). O ângulo reto é representado pelo símbolo . Num triângulo retângulo, denomina-se hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto. Os demais lados chamam-se catetos.

Assim sendo, tem-se:

Teorema de Pitágoras

Pitágoras (570 – 496 a.C.), nascido em Samos, Grécia, era matemático e filósofo. Alguns autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, Eves (1997, p. 97), quando diz que: “ele era cinqüenta anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales”. Já Boyer (1974, p. 35) diz que “embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades”.

Seu nome foi atribuído a uma das mais antigas relações matemáticas e trigonométricas conhecida como Teorema de Pitágoras, cujo qual é a mais importante relação entre os lados de triângulos retângulos (aquele que possui um ângulo de 90º). Segundo Eves (1997, p. 103) não foi ele quem inventou o teorema, pois “esse já era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes”, mas é possível que o teorema tenha o seu nome, pois, acredita-se que ele tenha sido o primeiro a dar uma demonstração geral.

Através dessa relação é possível descobrir a medida de um lado de qualquer triângulo retângulo, desde que as outras duas sejam conhecidas, ou, o problema traga informações suficientes para deduzi-lo (por exemplo: as três medidas na forma de polinômios de uma só variável).

Tem-se pelo teorema de Pitágoras: “A soma do quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos”, desta forma, considera-se o triângulo retângulo a seguir:

Pelo teorema: a2 = b2 + c2, sendo a representa a hipotenusa, b e c os catetos.
Lembra-se que as representações algébricas são apenas ilustrativas e não se aconselha decorar a fórmula e sim o conceito

Demonstração:

Para extrair algumas propriedades, faremos a decomposição do triângulo retângulo ABC em dois triângulos retângulos menores: ACD e ADB. Dessa forma, o ângulo A será decomposto na soma dos ângulos CÂD=B e DÂB=C.

Observamos que os triângulos retângulos ABC, ADC e ADB são semelhantes.

Assim:
$a/b = b/n = c/h$
$a/c = b/h = c/m$
$b/c = n/h = h/m$

Logo:

$a/c = c/m$ equivale a $c^2 = a.m$
$a/b = b/n$ equivale a $b^2 = a.n$
$a/c = b/h$ equivale a $a.h = b.c$
$h/m = n/h$ equivale a $h^2 = m.n$

Existem também outras relações do triângulo inicial ABC. Como $a=m+n$, somando c^2 com b^2, obtemos:

$c^2 + b^2 = a.m + a.n = a.(m+n) = a.a = a^2$

Que resulta no Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Estudo do Seno, Cosseno e Tangente

Das funções trigonométricas, a primeira a aparecer no decorrer da história é o seno, e está intimamente interligada com o estudo da circunferência e os ângulos.

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

As definições de seno, cosseno e tangente estão relacionadas com o estudo do triângulo retângulo, para isto se estabelece razões entre as medidas de seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto). Para isso, o triângulo retângulo a ser estudado apresenta as seguintes características:

Quanto aos ângulos internos: além do ângulo reto, apresenta dois ângulos agudos e complementares, geralmente são nomeados com as letras gregas α (alfa), β (beta) ou θ (teta).

Os catetos e a hipotenusa são nomeados com letras minúsculas do alfabeto português. Desta forma, da-se o nome de hipotenusa para o lado do triângulo oposto ao ângulo reto, cateto adjacente a α, lado do triângulo que junto com a hipotenusa forma o ângulo agudo que está sendo considerado, e cateto oposto a α, lado do triângulo que se opõe ao ângulo considerado.

Consideremos um ângulo agudo qualquer de medida α, levando-se em conta os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida α.

Nota-se que os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são todos semelhantes. Logo:

Respectivamente, as razões (trigonométricas) r1, r2, r3 são denominadas de: seno do ângulo α (sen α), coseno do ângulo α (cos α) e tangente do ângulo (tg α).

Assim sendo, “num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e da hipotenusa”. (BARRETO, 1998 p. 191), denotando-se:

Outra das razões é que “num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa” (Id, ibid p. 191) denotando-se:

A última das razões é que “num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e do cateto adjacente a esse ângulo” (Id, ibid p. 192), denotando-se:

b) Apresentar o teorema de Pitágoras.

Na explanação do teorema de Pitágoras, o professor previamente vai pedir a seus alunos que tragam de suas casas lápis de colorir, régua e tesoura. Durante a aula o professor vai distribuir duas folhas de ofício do tipo A4 para cada aluno, os mesmos poderão fazer dois quadrados e dividi-los conforme a figura I, exposta a seguir, desta maneira o professor poderá demonstrar que a soma dos quadrados de lado “a” e “b” é igual a soma do quadrado de lado “c”, ou seja, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, sendo esta a base do conceito do Teorema de Pitágoras.

Figura I, disponível no site:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras

(Provável forma usada por Pitágoras para demonstrar o teorema que leva o seu nome.)

Após a conceitualização, destacam-se três aplicações interessantes a serem utilizadas, cujas quais, facilitam a exploração criativa dos alunos em seus cotidianos:

Aplicação 1:

(Unisa – SP) Uma escada de 5,5 m de comprimento está apoiada em uma parede, sendo que seu pé está distante 1,50 m dela. Um pintor quer que a extremidade superior da escada alcance 30 cm mais alto. Que distância ele precisa deslocar o pé da escada em direção da parede?

Este problema de aplicação, na sua forma abstrata, tem por finalidade inicial, o cálculo de um dos catetos, que é a altura da parede, seu segundo propósito é demonstrar que o tamanho da hipotenusa é sempre maior que seus catetos, outro objetivo importante é que este tipo de problema faz que o aluno crie, em pensamento, a situação apresentada, estimulando-o a formular problemas aplicáveis em seu cotidiano.

Resolução do Problema de Aplicação 1:

Inicialmente deve-se fazer uma representação do problema, facilitando a visualização:

Conforme se observa na representação ao lado, a escada representa a hipotenusa do triângulo formado pela escada, parede e chão, desta forma de acordo com o teorema de Pitágoras “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”, tem-se:

Somando o valor de P, que representa o altura em que a escada esta encostada na parede, com os 0,30 m, que representa o valor a ser alcançado pela escada, se obtém um valor aproximado para altura x de:

x ~ 5,29 + 0,30
x ~ 5,59

Como o comprimento da escada é de 5,5 m, e a altura a ser alcançada é de 5,59 m, conclui-se que não é possível alcançar a altura desejada pelo pintor.

Aplicação 2:

(BONGIOVANNI, 1995) Duas torres medem 15 m e 45 m de altura, e a distância entre elas é 40 m. Um fio esticado vai ligar as extremidades A e B das torres. Qual o comprimento mínimo do fio?

Resolução do problema de aplicação 2:

Para resolver este problema, inicialmente veremos uma representação gráfica trazida pelo próprio autor.

De acordo com os dados apresentados no problema, e verificados na representação gráfica, percebe-se que é possível formar um triângulo retângulo onde a distância entre as duas torres, que mede 40 metros, é um dos catetos, enquanto a diferença entre as alturas das duas torres, que medem respectivamente 15 e 45 m, é outro cateto, já à distância AB, que representa o comprimento do fio é a hipotenusa. Assim sendo, a particularidade desta aplicação é que a medida a ser calculada é a hipotenusa. Desta forma, tem-se:

A distância mínima do fio para ligar as extremidades entre as torres A e B é de 50 m.

Aplicação 3:

(UFPel-RS) Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 metros de altura quebrou-se em um ponto a distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base do mesmo. A que altura x do solo o poste quebrou?

Resolução do problema de aplicação 3:

A exemplo dos problemas anteriores é de fundamental importância, na resolução de problemas, a representação gráfica do mesmo, para este usaremos uma ilustração feita para o próprio problema disponível no site:

http://paginas.terra.com.br/educacao/trigonometria/index_arquivos/exercicios1.htm.

Neste problema é possível perceber que diversos campos da matemática são integrados, de forma ser necessário o conhecimento de outros conceitos, para obter-se êxito na resolução do mesmo. O objetivo deste problema além da altura em que o poste quebrou, é estimular o aluno a integrar a trigonometria com o conteúdo de sistema, aumentando o poder de abstração de novos conceitos, facilitando a resolução de novos problemas.

Do problema são retirados os seguintes dados:

• x (distância entre o solo e o ponto onde o poste quebrou-se, no triângulo representa um dos catetos).

• y (parte do poste acima da fratura, no triângulo representa a hipotenusa).

• 3 m (distância entre a base do poste e a extremidade superior, cuja qual encostou no solo, no triângulo representa outro cateto).

• 9 m (comprimento inicial do poste, antes da quebra).

Logo,

$$x=4m$$

Desta forma a altura x em que o poste quebrou é de 4 m.

Destaca-se que se os alunos compreenderem bem o conceito, não há a necessidade de trabalhar muitos exercícios em sala de aula, neste caso poderá haver alguns como tema de casa.

c) Demonstrar os conceitos básicos (seno, cosseno e tangente) usando como instrumento auxiliar um geoplano (semelhante ao apresentado a seguir na figura II).

Figura II, modelo de geoplano disponível no site:

http://www.caixadebrinquedo.com.br/caixa/?cat=6&paged=6

É importante começar a aula introduzindo os conceitos de ângulo para que todos resgatem ou aprendam sobre este sistema de medida, para isso o professor pode fazer uso do texto II “Funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente”.

Texto II
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSSENO, TANGENTE.

Das funções trigonométricas, a primeira a aparecer no decorrer da história é o seno, e está intimamente interligada com o estudo da circunferência e os ângulos (reunião de dois segmentos de reta orientados, ou duas semi-retas orientadas, a partir de um ponto comum).

Não se sabe ao certo quais as razões pelas quais, foi escolhido o número 360 para se dividir a circunferência, sabe-se apenas que o número 60 é um dos menores números, menores do que 100, que possui uma grande quantidade de divisores distintos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, razão forte pela qual este número tenha sido adotado. Outro fato que pode ter influenciado na escolha do número 360 “...é que o movimento de translação da Terra em volta do Sol se realizava em um período de aproximadamente 360 dias, o que era uma estimativa razoável para a época.” (VIANA, 2005). O sistema sexagesimal justifica ainda a divisão dos graus em minutos, a sexagésima parte de um grau, e do segundo, a sexagésima parte do minuto.

Apesar de muito comum, a utilização da notação em graus, para o sistema internacional, a unidade de medida para ângulos é o radiano,

...medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denota-se 1 rad.(Id, ibid)

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

Também é fundamental que os alunos tenham em mãos um transferidor, desta forma poderão visualizar e entender o funcionamento do instrumento para medida de ângulos. Após a introdução, poderá ser feito a construção dos conceitos de seno, cosseno e tangente utilizando o geoplano(figura II), fazendo relações entre triângulos retângulos semelhantes montados com “elástico para dinheiro” (borrachinhas) de diversas cores. Como os alunos já possuem o conhecimento do teorema de Pitágoras, é possível que se atribua valores unitários ou reais para a distância vertical e horizontal entre os palitos do geoplano obtendo um valor numérico para as razões seno, cosseno e tangente. Após a construção conceitual é importante que os alunos se deparem com problemas aplicados, buscando o interesse pelo conteúdo e estimulando-os a resolver problemas do cotidiano de maneira simples. Tais problemas podem ser semelhantes aos expostos a seguir, divididos em quatro importantes aplicações:

Aplicação I:

Para dar suporte a uma torre com 20 metros de altura, pretende-se fixar um cabo de aço que segue do ponto mais alto da torre até um ponto de apoio localizado no solo, de forma que o ângulo formado entre o solo e o cabo de aço seja de 60o. Desta forma, qual deve ser o comprimento mínimo, em metros, do cabo de aço, para que este sirva de suporte a tal torre?

Pra visualizar melhor a situação apresentada fizemos uma representação:

Feito a representação da situação, conclui-se que para a resolução do problema é necessária a utilização dos fundamentos da função seno, que na sua essência trata-se da razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Esta conclusão surge pela observação que, o ângulo citado localiza-se na união das retas que formam o ponto B, a medida de referência, 20 m, é o cateto oposto ao ângulo, e o cabo de aço representa a hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos pontos A e B com a base da torre. Identificado que para a resolução do problema vai-se utilizar o seno de 60o, denotado por sen 60o, faz-se uma busca na tabela Anexo I, onde encontra-se um valor aproximado para sen 60o ~ 0,866.

Após a exploração completa dos dados do problema e a definição do que cada um representa, parte para a formalidade do cálculo, considerando, simbolicamente, a incógnita ξ, como medida do cabo de aço a ser encontrada.

Logo:

Assim sendo, para que o cabo de aço sirva como suporte da torre ele deve ter no mínimo 23,10 metros.

Aplicação II:

(GIOVANNI, 1994) Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 4 m do solo, forma com esta parede um ângulo de 60o. Qual é o comprimento da escada em m?

Problema aplicado, de fácil visualização e interpretação dos dados como se vê na ilustração trazida pelo próprio autor.

De acordo com a ilustração, podem-se organizar os dados:

• 60o (ângulo formado entre a parede e a escada).

• 4 m (altura da parede até o ponto de apoio da escada).

• x (incógnita usada para representar o comprimento da escada).

Após a organização dos dados, percebe-se que a altura da parede até o ponto de apoio da escada, com relação ao ângulo, trata-se do cateto adjacente, enquanto o comprimento da escada trata-se da hipotenusa do triângulo formado pelas retas escada/parede/solo. Através da interpretação dos dados, nota-se que é conveniente a utilização da função cosseno para a resolução do problema, que na sua essência trata-se da razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. Como o ângulo de referência é o de 60o, e a função é o cosseno, busca-se na tabela (anexo I), ou calculadora, e verifica-se que cos 60o = 0,5.

Denotando-se os dados interpretados tem-se:

Assim sendo, conclui-se que a escada possui 8 m de comprimento.

Aplicação III

(YOUSSEF, 2005) Um topógrafo, localizado num ponto A da margem de um rio, deseja medir a largura desse rio. Para isso, mede a distância a um ponto B na mesma margem em que se encontra e, utilizando um teodolito, estabelece o valor do ângulo A C, considerando C um ponto frontal a A na outra margem do rio. Determine a largura AC, sabendo que AB = 40 m e que o ângulo A C medido é de 60o.

Ilustração do problema trazido pelo autor:

Este problema traz na sua composição grande parte da interpretação necessária para a resolução do mesmo, concluindo-se alguns dados apenas pela observação.

Organização dos dados:

• 60o (ângulo observado pelo topógrafo, referente à abertura entre os pontos A e C).

• *AC* (largura do rio a ser encontrada, cateto oposto ao ângulo medido).

• *AB* (distância entre os pontos da mesma margem do rio, cateto adjacente ao ângulo medido).

Organizado os dados, percebe-se que as medidas referenciais com relação ao ângulo medido tratam-se dos dois catetos, desta forma conclui-se que a função a ser utilizada é a tangente, que na sua essência trata-se da razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Como o ângulo de referência é o de 60o e a função é a tangente, busca-se na tabela (anexo I) ou calculadora, e observa-se que tg 60o ~ 1,73.

Logo,

A largura aproximada do rio é de 69,2 m.

Aplicação IV

(GIOVANNI, 1994) A partir de um ponto observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30º. Caminhando 23 m em direção ao prédio, atingimos outro ponto, de onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60º.

Desprezando a altura do observador, calcule, em metros, a altura do prédio.

Problema de fácil aplicação, objetiva integrar diferentes ramos da matemática, aumentando a complexidade e o poder de abstração pelo aluno.

Para resolução do problema, é importante organizar os dados definindo incógnitas para as medidas a serem encontradas.

• x (incógnita que representa a altura do prédio)

• y (incógnita que representa a distância entre o prédio e o segundo ângulo observado).

• y + 23 (distância entre o prédio e o ponto onde o primeiro ângulo foi observado).

• 30º e 60º (respectivamente a medida do primeiro e do segundo ângulo observado).

Como as medidas de referência, a altura do prédio e a distância entre o prédio e os pontos observados, referem-se respectivamente ao cateto oposto aos ângulos e aos catetos adjacentes aos ângulos, a função tangente deve ser utilizada, e sabendo que os ângulos observados são 30º e 60º, observando-se os dados na tabela de ângulos notáveis (anexo II), tem-se tg 30º = e tg 60º = .

Denotando os dados tem-se

Como foi feito um resgate histórico no início do conteúdo, talvez algum aluno pergunte sobre o raio unitário, com isso é importante que o professor demonstre como os matemáticos chegaram aos valores de seno, cosseno e tangente atribuídos para cada ângulo presente na tabela (anexo I) ou calculadora, utilizando um ciclo trigonométrico (anexo III). Sendo que este plano de ensino limita-se aos fundamentos básicos da trigonometria, o estudo da trigonometria na circunferência ficará para um outro momento.

d) Elaboração e resolução de situações problemas, partindo de exemplos declarados pelos alunos.

Neste momento, após sanadas as dúvidas pertinentes aos problemas de aplicação (expostos anteriormente), o professor poderá dividir a turma em grupos, com quatro ou cinco alunos cada grupo, com o propósito dos mesmos elaborarem problemas e desafios a serem solucionados com os conceitos aprendidos. Se os problemas elaborados forem fora dos limites da escola (por exemplo: Qual a altura de tal prédio da cidade?) os mesmos serão solucionados como tema de casa. Para que os problemas a serem elaborados não sejam todos semelhantes, uma vez que os problemas envolvendo a tangente são teoricamente mais fáceis de serem elaborados, o professor pode definir que cada grupo elabore problemas diferenciados, uns aplicando o seno, outros o cosseno e outros a tangente. Se os problemas elaborados possam ser resolvidos dentro do limite da escola (por exemplo: Qual a altura da escola?), o professor acompanhará os alunos até o local onde estes possam ser resolvidos (o pátio da escola, por exemplo).

e) Utilização de um teodolito caseiro como forma de instrumento para resolução de problemas.

O teodolito é um "instrumento óptico para medir com precisão ângulos horizontais e verticais"(FERREIRA, 2000 p. 668) utilizado na topografia, na geodésia e na agrimensura. Basicamente é um telescópio com movimentos graduados na vertical e na horizontal, e montado sobre um tripé centrado e verticalizado, podendo possuir ou não uma bússola incorporada.

Exemplo de teodolito disponível no site: acesso em 23/01/2008

Para solucionar os problemas criados pelos próprios alunos, os mesmos poderão construir um teodolito caseiro de acordo com o modelo a seguir.

Modelo de teodolito caseiro disponível no site:

http://br.geocities.com/proflc/arquivos/teodcaseiro/teodolitocaseiro.htm

Material necessário:

Um copo de plástico (a) com tampa (b), xerox de um transferidor alinhada e colada numa base quadrada de papelão (c), um pedaço de arame fino com cerca de 15 centímetros de comprimento (d) e um pedaço com a mesma medida de um tubo de alumínio de antena de TV (e).

Toque de precisão:

A tampa do copo servirá de base para a rotação do teodolito e deverá ser colada, de cabeça para baixo, de modo que seu centro coincida com o centro do transferidor, o que dará mais precisão ao teodolito. Para encontrar o centro da tampa, trace nela dois diâmetros. E faça um furo onde eles se cruzarem. Tampas desse tipo geralmente trazem ranhuras na borda que podem ajudá-lo a encontrar o ponto certo. Use o arame fino como guia para alinhar o centro da tampa com o centro do transferidor A tampa do copo servirá de base para a rotação do teodolito e deverá ser colada, de cabeça para baixo, de modo que seu centro coincida com o centro do transferidor, o que dará mais precisão ao teodolito.

Para encontrar o centro da tampa, trace nela dois diâmetros. E faça um furo onde eles se cruzarem. Tampas desse tipo geralmente trazem ranhuras na borda que podem ajudá-lo a encontrar o ponto certo. Use o arame fino como guia para alinhar o centro da tampa com o centro do transferidor.

O ponteiro:

O arame fino será o ponteiro do teodolito que permitirá fazer a leitura em graus no transferidor. Para instalá-lo, faça dois furos diametralmente opostos na lateral do copo, próximo de sua boca (use o diâmetro marcado na tampa como guia para fazer esses furos), e passe o arame pelos furos deixando-o atravessado no copo.

A mira:

O tubo de antena será a mira por onde você avistará os pontos a serem medidos. Cole o tubo na base do copo, de forma que ele fique paralelo ao ponteiro (arame fino). Para refinar essa mira, cole na extremidade do tubo dois pedaços de linha formando uma cruz.

Pronto para usar:

Finalize encaixando o copo na tampa. A versão caseira funciona como o aparelho verdadeiro (ao lado). Com ele, você mede, a partir da sua posição, o ângulo formado entre dois outros pontos. Na horizontal ou na vertical, basta alinhar a indicação 0° do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará de quantos graus é a variação.

f) Resolução de exercícios, como forma de fixação dos conteúdos.

Quanto a resolução dos exercícios, é valido lembrar que os mesmos objetivam a prática dos conceitos adquiridos, e não a memorização para posterior utilização como padrões para resolução de problemas semelhantes. Dos exercícios neste plano de ensino, poderão ser usados todos apenas se o professor achar necessário, caso contrário apenas o suficiente para sanar as dúvidas e a formação dos conceitos dos alunos. A utilização demasiada de exercícios repetitivos pode atrapalhar o interesse do aluno pelo conteúdo.

As demonstrações algébricas também são necessárias, mas devem ser conseqüência da conceitualização obtida na aprendizagem, contudo estão algumas formas de demonstrações estão presentes no Texto I e podem ser trabalhadas no momento em que os alunos já tenham condição de absorver e relacionar com o conteúdo aprendido.

Para melhor preparação do professor, é recomendado que este tenha o máximo de informações sobre o assunto, para isso é importante que este tenha o conhecimento de todo o projeto aqui desenvolvido, bem como dos tópicos: “A matemática”, “O Ensino da Matemática”, “O Ensino da Geometria”, “A Resolução de Problemas” e “A Trigonometria”.

3.4 Materiais utilizados

Para o desenvolvimento do conteúdo trigonometria, será necessária a utilização de: lápis, caneta, borracha, transferidor, régua, caderno, quadro-negro, giz, geoplano, teodolito caseiro e trena.

3.5 Avaliação do conteúdo

Na avaliação do conteúdo, será levado em consideração a participação e o interesse dos alunos pelo assunto, destacando a contribuição de eventuais alunos na elaboração de conceitos, bem como, o desenvolvimento no momento da resolução dos exercícios. Todos os trabalhos poderão avaliados: Pesquisa Histórica, Elaboração e Resolução dos Problemas, Construção do Teodolito Caseiro e Avaliação. Sugere-se que os alunos façam após cada atividade um relatório, em forma de portifólio, tendo como objetivo o acompanhamento das atividades desenvolvidas por cada aluno, identificando os pontos fortes e as defasagem no decorrer da aprendizagem, podendo ser descartado a necessidade de avaliação escrita formal.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática vem ao longo de sua história sofrendo modificações. Por um longo tempo, a principal preocupação em relação a tais avanços, práticos ou teóricos concentravam-se em suas aplicações no sentido de contribuírem para o progresso do conhecimento da humanidade.

Com o passar do tempo, a preocupação com a necessidade de difundir esses conhecimentos dando oportunidade a todos de apropriarem-se deles, também inicia-se a preocupação com a forma com que esses são ensinados na escola. Ou seja com os processo adotados pelos professores, que garantam o direito de todos ao conhecimento.

Hoje, em uma época em que a matemática escolar é, em grande parte, abordada de maneira formal e abstrata, é de primordial importância que o professor passe a refletir sobre qual metodologia ou metodologias podem ser mais adequadas a determinados conteúdos. Isso na perspectiva de que não aconteça simplesmente o repasse de todos os conteúdos, mas sim, que aconteça a aprendizagem dos mesmos.

Esses pressupostos embasaram o desenvolvimento desse trabalho , visando, ainda, compor um instrumento para oportunizar futuras discussões sobre possibilidades de de melhorar a qualidade de ensino, principalmente na área da geometria.

Durante a construção do plano de ensino notou-se que é possível se desligar das abordagens tradicionais, partindo para uma aula mais dinâmica e eficiente despertando o interesse e buscando aa aprendizagem do aluno.

A aprendizagem dos conteúdos na sua essência é tão importante quanto prazerosa, e nos tempos em que vivemos certamente nós professores é que podemos fazer a diferença, buscando uma sociedade mais culta, responsável organizada e cada vez melhor. Quando começarmos a pensar, um pouco, como os gênios do passado, entenderemos o que realmente eles buscavam em suas descobertas e entenderemos a fundo os conteúdos por eles registrados, proporcionando tanto a compreensão dos por parte alunos pelos conteúdos que estudam, tanto por nós pelo que ensinamos.

Dificuldades foram encontradas durante todo o desenvolvimento do trabalho, porém foram encaradas como desafio, e a recompensa é vislumbrar a possibilidade de uma metodologia eficiente visando a aprendizagem dos alunos.Ressalta-se que não havia pretensão de construir “a” metodologia mais adequada para abordar o conteúdo proposto, mas sim, apresentar “uma” maneira de ensinar que atendesse as expectativas de professores e alunos. Nesse sentido, tem-se a consciência de que o assunto não foi esgotado, mas iniciado.

Após a construção deste plano de ensino, sente-se a necessidade de aplicá-lo e pôr em prática o que neste momento foi idealizado o que, temos certeza, oportunizará novas dúvidas e novas buscas.

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno ; SILVA, Cláudio Xavier. **Matemática: Aula por Aula**. São Paulo. FDT, 1998.

BOLGHERONI, Waldiney; **Trigonometria**. Disponível em: acesso em 25/01/2008.

BONGIOVANI; VISSOTO; LAURENTINO. **Matemática e Vida**; 8º série; 5º edição. Editora Ática, 1995.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino fundamental Documento introdutório**: versão preliminar. Brasília : MEC, 1995.

Caixa de Brinquedo; **Teodolito Caseiro**. Disponível em: http://www.caixadebrinquedo.com.br/caixa/?cat=6&paged=6> acesso em 25/01/2008.

CARDOSO, Adriano Sumar; **Ciclo trigonométrico**. Disponível em: acesso em 23/01/2008.

CESAR, Luiz; **Construindo um Teodolito Caseiro Usando Material de Sucata**. Disponível em: acesso em 30/01/2008.

COSTA, Nilce M. Lobo da; **A História da Trigonometria**. Disponível em: acesso em 30/01/2008.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. 2.ed. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1997.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Miniaurélio Século XXI: **O Minidicionário de Língua Portuguesa**; Coordenação de edição, Margarida dos Anjos, Maria Baird Ferreira...[et al.]. 4ª edição. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

GIKOVATE, Flávio. **A arte de educar**. Curitiba: Nova Didática, 2001. 72p.

GIOVANNI, BONJORNO, GIOVANNI Jr; **Matemática Fundamental**; vol. Único; São Paulo: FDT, 1995.

GIOVANNI, CASTRUCCI, GIOVANNI Jr; **A Conquista da Matemática- A + Nova**; 8º série; São Paulo: FDT, 2002.

LAKATOS, E. M. e MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 1991.

KALEFF, Ana Maria. **Geometria Euclidiana – a grande excluída**. A Educação Matemática, Niterói, ano I, nº2, p.19-25, 2ºSem. 1994.

MARQUES, Paulo; **Matemática: trigonometria**. Disponível em: acesso em 05/01/2008

MEIRA, Luciano. **O “Mundo Real” e o Dia-a-Dia no Ensino de Matemática**. A Educação Matemática, Recife, ano 9, nº 1, p. 19-26, julho 2002.

MURARO, Antonio. **Minimanual de pesquisa Matemática**. Palavra em ação, Uberlândia: Claranto, 2004.

PAIVA, Manoel. **Matemática**, Volume único, Ed; São Paulo: Moderna, 2003.

PCN, Ensino Médio; **Orientações Educacionais Complementares aos**

Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> acesso em 02/09/2007.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad Heitor Lisboa Araujo. Rio de Janeiro: inteciência, 1986.

SANTA CATARINA, Secretaria da Educação. **Proposta Curricular de Santa Catarina**: Ensino Fundamenta: disciplinas curriculares. Florianópolis: COGEN,1998.

SOUZA, Sandra Esteves de; RAMOS, Ciro de Moura. **Português** – Dicionários. Itapevi: Fênix, 1998.

VIANA, TOFFOLI, SODRÉ; **Ensino fundamental: Geometria: Ângulos**, 2005. Disponível em: acesso em 01/02/2008.

VARANDAS, José; **Notas históricas**, 2003. Disponível em: acesso em 17/11/2007.

Wikipédia; **Teorema de Pitágoras**. Disponível em: acesso em 28/01/2008.

YOUSSEF, SOARES, FERNANDES. **Matemática: de olho no mundo do trabalho**; vol. Único. São Paulo: Scipione, 2005.