B2. Factorization

Bổ sung thêm cho bài giảng

2019

Nội dung bổ sung

1. **Matrix decomposition**
2. **Eigendecomposition**
3. **Singular Value Decomposition (SVD)**

1. Matrix decomposition

❑ **Giải hệ phương trình A.X = B: dễ dàng hơn với A là ma trận Δ**

- *Forward subsitution* $\rightarrow$ A là ma trận Δ dưới, $A_{ii} \neq 0$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & & x_n & \\
\hline
A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} & b_n
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_1/A_{11} \\
x_2 &= (b_2 - A_{21}x_1)/A_{22} \\
x_3 &= (b_3 - A_{31}x_1 - A_{32}x_2)/A_{33} \\
&\vdots \\
x_n &= (b_n - A_{n1}x_1 - A_{n2}x_2 - \cdots - A_{n,n-1}x_{n-1})/A_{nn}
\end{aligned}
$$

- *Backward subsitution* $\rightarrow$ A là ma trận Δ trên, $A_{ii} \neq 0$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\
0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} & b_2 \\
0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} & b_n
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
x_n &= b_n/A_{nn} \\
x_{n-1} &= (b_{n-1} - A_{n-1,n}x_n)/A_{n-1,n-1} \\
x_{n-2} &= (b_{n-2} - A_{n-2,n-1}x_{n-1} - A_{n-2,n}x_n)/A_{n-2,n-2} \\
&\vdots \\
x_1 &= (b_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3 - \cdots - A_{1n}x_n)/A_{11}
\end{aligned}
$$

1.1 LU decomposition

❑ **Giải hệ phương trình A.X = B**

Áp dụng phân rã A = L.U:

$$
A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad L.\boxed{U.X} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L.Y = B & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}
$$

Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

B1. Giải hệ phương trình (2), **tìm Y**, với L là ma trận Δ dưới

B2. Giải hệ phương trình (3), **tìm X**, với U là ma trận Δ trên

1.1 LU decomposition (tt.)

- **VD: Giải hệ phương trình dựa trên phép phân rã LU**

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&8&14\\2&6&13\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\13\\4\end{pmatrix}\Rightarrow L=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

B1. Giải L.Y = B

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\13\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}$$

B2. Giải U.X = Y

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Lời giải, nếu có, của A = L.U là KHÔNG DUY NHẤT**
  - có tổng cộng n^2 phương trình với $(n^2 + n)$ biến
  - *Doolittle* factorization: diag(L) = 1
  - *Crout* factorization: diag(U) = 1

1.1 LU decomposition (tt.)

❑ **<u>Bài tập</u>: Áp dụng phép phân rã LU**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = ? \quad U = ?$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = ? \quad U = ?$$

1.1 LU decomposition (tt.)

❑ **Có phải mọi A $\in$ M_n(}) đều có thể áp dụng phép phân rã LU ?**

- *Leading principal submatrix* A_k: k dòng, k cột đầu tiên ($k \leq n$)
- *điều kiện áp dụng phân rã LU*: A khả nghịch, $|A_k| \neq 0$, $\forall k \leq n$

<u>VD</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ không thể áp dụng phân rã LU vì:

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ có $|A_2| = (1 * 4) - (2 * 2) = 0$

- hoán vị các dòng $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ thì có thể áp dụng phân rã LU!

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Ma trận hoán vị (*permutation matrix*): P ∈ $M_n(\})$**
  - mỗi dòng, mỗi cột có một hệ số = 1, tất cả các hệ số khác = 0
  - hoán vị các dòng của I hay các cột chuẩn E_i (Gauss – Jordan)

$$P = (E_{k1}, E_{k2}, \ldots, E_{kn}), \qquad p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = k_i \\ 0, & j \neq k_i \end{cases}$$

- **Nhận xét:**

  (i) $|P| = \pm 1$

  (ii) $P.P^T = P^T.P = I$

  (iii) $P^{-1} = P^T$

- **Mọi ma trận vuông A ∈ $M_n(\})$:** **P.A = L.U**

1.1 LU decomposition (tt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

φ_1: $d_2 \leftrightarrow d_3$

$$P_{\varphi 1}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_{\varphi 1}.}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

φ_2: $d_2 \to d_2 - d_1$

$$P_{\varphi 2}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\varphi 2}.P_{\varphi 1}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

φ_3: $d_3 \to d_3 - 2d_1$

$$P_{\varphi 3}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\varphi 3}.P_{\varphi 2}.P_{\varphi 1}.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Ma trận hoán vị P:

$$P = P_{\varphi 1}$$

Ma trận tam giác dưới L:

$$L = \left[P_{\varphi 3}.P_{\varphi 2}\right]^{-1}$$

$$P.A = L.U$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Bài tập: Áp dụng phép phân rã PA = LU**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Hàm scipy.linalg.lu(A) trả về 3 kết quả**
  - ma trận hoán vị P^T
  - ma trận tam giác dưới L
  - ma trận tam giác trên U

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Hàm scipy.linalg.lu_factor(A) trả về 2 kết quả**
  - ma trận "kết hợp": LU = U + (L – diag(L))

$$LU = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$U = triu(LU) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad L = LU - U + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Hàm scipy.linalg.lu_factor(A) trả về 2 kết quả**
  - mảng pivot[n] chứa chuỗi các phép hoán vị để tạo ma trận P

VD: pivot = [3, 2, 3, 3]

Khởi tạo P = I

i = 0: pivot[0] = 3 $\Rightarrow$ hoán vị dòng 0 và dòng 3

$$P_0 = P. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Hàm scipy.linalg.lu_factor(A) trả về 2 kết quả**
  - mảng pivot[n] chứa chuỗi các phép hoán vị để tạo ma trận P

i = 1: pivot[1] = 2 $\Rightarrow$ hoán vị dòng 1 và dòng 2

$$P_1 = P_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i = 2: pivot[2] = 3 $\Rightarrow$ hoán vị dòng 2 và dòng 3

$$P_2 = P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Hàm scipy.linalg.lu_factor(A) trả về 2 kết quả**
  - mảng pivot[n] chứa chuỗi các phép hoán vị để tạo ma trận P

i = 3: pivot[3] = 3 $\Rightarrow$ không thay đổi

Tóm lại, pivot = [3, 2, 3, 3] sẽ tạo ra ma trận hoán vị:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 LU decomposition (tt.)

- **Mở rộng cho ma trận A $\in M_{m,n}(\,)$ với m $\neq$ n**

$$A_{mxn} = P^T_{mxm}.L_{mxn}.U_{nxn}$$

1.1 LU decomposition

- **Giải hệ phương trình A.X = B**

Áp dụng phân rã P.A = L.U:

$$A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad P.A.X = L\boxed{U.X} = P.B = B' \quad \Leftrightarrow \begin{cases} L.Y = B' & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

B1. Giải hệ phương trình (2), **tìm Y**, với L là ma trận Δ dưới

B2. Giải hệ phương trình (3), **tìm X**, với U là ma trận Δ trên

1.2 QR decomposition

- **A ∈ M_{m,n}(})**

$$A = Q.R$$

- thừa số Q∈$M_{m,n}$(}) (*Q-factor*): gồm các cột trực chuẩn (*orthonormal columns*):

$$Q^T.Q = I_n$$

- thừa số R∈M_n(}) (*R-factor*): ma trận Δ trên, $R_{ii} \neq 0$, khả nghịch

Nếu ràng buộc $R_{ii} > 0$ thì ∃! <Q, R>

1.2 QR decomposition (tt.)

- **Thuật toán Gram-Schmidt**

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \cdots & Q_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccc} a_1^T & a_2^T & & a_n^T & q_1^T & q_2^T & & q_n^T \end{array}$$

- các cột $q_1^T, \ldots, q_n^T$: trực chuẩn
- các hệ số $R_{11}, \ldots, R_{nn} > 0$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

$$R_{11} = \left\| a_1^T \right\|$$
$$\tilde{q}_1^T = a_1^T$$
$$q_1^T = \frac{1}{R_{11}} \tilde{q}_1^T$$

for $k = 2$ to n

$$R_{1k} = q_1 a_k^T$$
$$\vdots$$
$$R_{k-1,k} = q_{k-1} a_k^T$$

$$\tilde{q}_k^T = a_k^T - (R_{1k} q_1^T + R_{2k} q_2^T + \cdots + R_{k-1,k} q_{k-1}^T)$$
$$R_{kk} = \left\| \tilde{q}_k^T \right\|$$
$$q_k^T = \frac{1}{R_{kk}} \tilde{q}_k^T$$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T & a_2^T & a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^T & q_2^T & q_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}$$

- k = 1:

$$R_{11} = \left\| a_1^T \right\| = 2 \qquad \tilde{q}_1^T = a_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad q_1^T = \frac{1}{R_{11}} \tilde{q}_1^T = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

- k = 2:

$$R_{12} = q_1.a_2^T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$$

$$\widetilde{q}_2^T = a_2^T - R_{12}.q_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{22} = \left\|\widetilde{q}_2^T\right\| = 2 \qquad q_2^T = \frac{1}{R_{22}}\widetilde{q}_2^T = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

- k = 3:

$$R_{13} = q_1.a_3^T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \qquad R_{23} = q_2.a_3^T = 8$$

$$\widetilde{q}_3^T = a_3^T - R_{13}.q_1^T - R_{23}.q_2^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - 8.\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R_{33} = \left\|\widetilde{q}_3^T\right\| = 4 \qquad q_3^T = \frac{1}{R_{33}}\widetilde{q}_3^T = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Thuật toán Gram-Schmidt

Kết quả phân rã QR:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

❑ Một số cải biên

- Givens rotations
- Householder reflections

1.2 QR decomposition (tt.)

❑ Bài tập: Áp dụng phép phân rã QR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

1.2 QR decomposition (tt.)

- **Giải hệ phương trình A.X = B**

  Áp dụng phân rã QR:

$$A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad Q.\boxed{R.X} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Q.Y = B & (2) \\ R.X = Y & (3) \end{cases}$$

  Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

  B1. Giải hệ phương trình (2), tìm Y = $Q^T.B$ ($Q^T.Q = I$)

  B2. Giải hệ phương trình (3), tìm X, với R là ma trận Δ trên

- **Định thức:** $|A| = \prod_{i=1}^{n} R_{ii}$

- **Ma trận nghịch đảo:** $A^{-1} = (Q.R)^{-1} = R^{-1}.Q^{-1}$

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

- **Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương**

$$A = L.L^T = U^T.U$$

  L: ma trận tam giác DƯỚI khả nghịch, $L_{ii} > 0$

  U: ma trận tam giác TRÊN khả nghịch, $U_{ii} > 0$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ 0 & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^{i} L_{ki}^2$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{i} L_{ik}.L_{kj} \qquad (i \neq j)$$

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

- Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương

$\underline{i=1:}$ $\quad L_{11}=\sqrt{A_{11}}$ điều kiện: KHÔNG ÂM

$\underline{i=2:}$ $\quad L_{21}=\frac{1}{L_{11}}A_{21}$

$L_{22}=\sqrt{A_{22}-L_{21}^2}$ điều kiện: KHÔNG ÂM

$\underline{i\geq 3:}$ $\quad L_{31}=\frac{1}{L_{11}}A_{31}$

$$L_{ij}=\frac{1}{L_{jj}}(A_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}L_{ik}.L_{jk}) \qquad (2\leq j<i)$$

$L_{ii}=\sqrt{A_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}L_{ik}^2}$ điều kiện: KHÔNG ÂM

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

- Phân rã Cholesky: ma trận đối xứng, xác định dương

$$A=\begin{pmatrix}6 & 15 & 55\\ 15 & 55 & 225\\ 55 & 225 & 979\end{pmatrix}$$

$$L_{11}=\sqrt{A_{11}}=\sqrt{6}$$

$$L_{21}=\frac{A_{21}}{L_{11}}=\frac{15}{\sqrt{6}} \qquad L_{22}=\sqrt{A_{22}-L_{21}^2}=\sqrt{55-\frac{225}{6}}$$

$$L_{31}=\frac{A_{31}}{L_{11}}=\frac{55}{\sqrt{6}} \qquad L_{32}=\frac{A_{32}-(L_{31}.L_{21})}{L_{22}}=\frac{55}{\sqrt{6}} \qquad L_{33}=\sqrt{A_{33}-L_{31}^2-L_{32}^2}$$

1.3 Cholesky decomposition (tt.)

- **Giải hệ phương trình A.X = B**

  Áp dụng phân rã Cholesky:

$$A.X = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad U^T.U.X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} U^T.Y = B & (2) \\ U.X = Y & (3) \end{cases}$$

  Thay vì giải hệ phương trình (1), ta lần lượt:

  B1. Giải hệ phương trình (2), tìm Y, với U^T là ma trận Δ dưới

  B2. Giải hệ phương trình (3), tìm X, với U là ma trận Δ trên

Nội dung bổ sung

1. **Matrix decomposition**
2. **Eigendecomposition**
3. **Singular Value Decomposition (SVD)**

2. Eigendecomposition

- **Ma trận vuông cấp n: A $\in M_n(\}$)**
  - *Đa thức đặc trưng* (*characteristic polynomial*)

    $p_A(\lambda) = |A - \lambda.I_n| \qquad \lambda \in \}$

  - *Phương trình đặc trưng* (*characteristic equation*)

    $\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0 = 0 \qquad \lambda \in \}$

  - Định lý Cayley – Hamilton

    $$A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \ldots + b_1A + b_0 = 0$$

    A là nghiệm của phương trình đặc trưng của *chính nó*

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Định lý Cayley – Hamilton**
  - Nếu $b_0 \neq 0 \Rightarrow |A| = (-1)^n.b_0 \Rightarrow$ A khả nghịch

$$A^{-1} = \frac{-1}{b_0}(A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \cdots + b_1 I)$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận vuông cấp n: A $\in$ M_n(})**
  - Nghiệm λ_0 của $p_A(\lambda)$ gọi là [giá] trị riêng (*eigenvalue*) của A
  - *Hệ phương trình thuần nhất* (*homogeneous system*)

$$(A - \lambda.I_n).X = 0$$

có vô số nghiệm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ } ^{n}, ứng với trị riêng λ

  - Nghiệm $x \neq \mathbf{0}$ gọi là vectơ riêng (*eigenvector*) của A ứng với λ

Định lý:

Các vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau là độc lập tuyến tính

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Giải phương trình đặc trưng để tìm giá trị riêng λ của A**

$$|A - \lambda.I| = 0$$

- **Giải hệ phương trình thuần nhất để tìm các vectơ riêng $\neq$ 0**

$$(A - \lambda.I).X = 0$$

2. Eigendecomposition (tt.)

❑ Nhận xét

- x là vectơ riêng ứng với trị riêng λ_0 thì α.x cũng là vectơ riêng
- Chỉ có 1 trị riêng λ_x ứng với một vectơ riêng x cho trước

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- Nếu n giá trị riêng đều $\neq 0$ thì A khả nghịch

2. Eigendecomposition (tt.)

❑ Nhận xét

- A có n giá trị riêng (số thực và số phức)
- Nếu A là ma trận đối xứng thì các giá trị riêng đều là số thực
- Nếu A là ma trận đường chéo thì các hệ số trên đường chéo là các giá trị riêng
- A xác định dương $\Leftrightarrow$ n giá trị riêng đều là số thực dương

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Chéo hóa ma trận** (*diagonalization*)

  Với **n** vectơ riêng độc lập tuyến tính, ứng với các λ_i phân biệt

  Λ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng λ_i

  P (*modal matrix*) tạo thành từ **n** vectơ riêng X^T_i: $|P| \neq 0$

$$P = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T & \dots & X_n^T \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

$$A = P.\Lambda.P^{-1}$$

  Khi đó, A gọi là *ma trận chéo hóa được* (*diagonalizable matrix*)

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Chéo hóa ma trận** (*diagonalization*)

  VD: Các ma trận không chéo hóa được:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- Ma trận vuông cấp n: A ∈ M_n(}). Tính A^k, với k >> N !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \text{Tính } A^{100}.$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận "xác định dương"** (*positive definite matrix*)

Ma trận vuông, *đối xứng* A ∈ M_n(}):

$$\forall x \neq 0: \qquad x.A.x^T > 0$$

<u>VD</u>: Ma trận I_2 là xác định dương

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 + x_2^2) > 0 \qquad (x_1 \quad x_2) \neq 0$$

Kiểm tra A ∈ M_n(}) có phải ma trận xác định dương ?

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận của dạng toàn phương** (*quadratic form*)

A là ma trận đối xứng

$$Q(x) = x.A.x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Q(x) = xAx^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$$

VD:

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3).\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận của dạng toàn phương** (*quadratic form*)
  - Dạng toàn phương chính tắc:

$$Q(x) = x.A.x^T = a_1x_i^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

$\Rightarrow$ A là ma trận đường chéo

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận của dạng toàn phương** (*quadratic form*)
  - Đưa về dạng chính tắc bằng phương pháp biến đổi trực giao

    A có n giá trị riêng phân biệt: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \Rightarrow A = P.\Lambda.P^{-1}$

    Đặt: $y = x.P$ $\quad x = y.P^T$

    Ta có:

$$xAx^T = (yP^T)(P\Lambda P^T)(Py^T) = y\Lambda y^T$$

$$\boxed{Q(y) = y\Lambda y^T = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận của dạng toàn phương** (*quadratic form*)

VD: $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a13 / 2 $\quad$ a23 / 2

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4 \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$Q(y) = y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 \qquad y = x.P$$

2. Eigendecomposition (tt.)

- **Ma trận "xác định dương"** (*positive definite matrix*)
  - Định lý:

    Q(x) *xác định dương* khi và chỉ khi có đúng n hệ số dương trong dạng chính tắc.

  - Định lý Sylvester:

    A là ma trận của dạng toàn phương Q(x)

    (i) Q(x) xác định DƯƠNG $\Leftrightarrow |A_k| > 0, \forall k$

    (ii) Q(x) xác định ÂM $\Leftrightarrow |A_1| < 0$ và các $|A_k|$ đan dấu kể từ k > 1

Nội dung bổ sung

1. **Matrix decomposition**
2. **Eigendecomposition**
3. **Singular Value Decomposition (SVD)**

3. Singular Value Decomposition

- **Ma trận U trực giao** (*orthogonal matrix*)

$$U.U^T = U^T.U = I$$

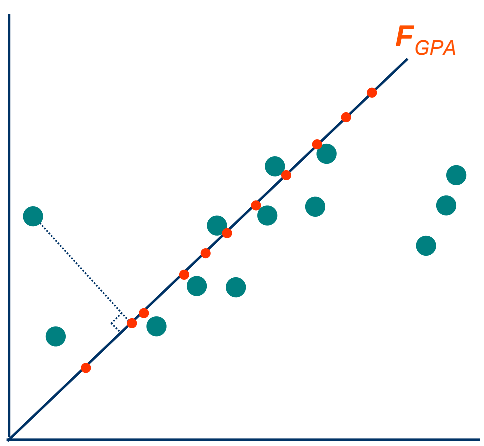
- **Singular Value Decomposition**

$$\mathbf{A = U.S.V^T}$$

  - S: ma trận đường chéo, các hệ số không âm (*singular values*) $\sqrt{\lambda_i}$ sắp xếp giảm dần
  - V: ma trận trực giao (chuẩn), các cột (*right-singular vectors*) chính là các vectơ riêng
  - U: ma trận trực giao (chuẩn), các cột (*left-singular vectors*)

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Tìm <u>không gian đặc trưng</u> mới *F'* tạo phân hoạch trên items tốt hơn không gian đặc trưng ban đầu *F***



3. Singular Value Decomposition (tt.)

❑ **Các bước thực hiện**

Bước 1: Tạo ma trận P = A^T.A

↓

Bước 2: Tạo ma trận đường chéo S và S^{-1}

Tính singular values của P: $s_i = \sqrt{\lambda_i}, s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_r$

↓

Bước 3: Tạo ma trận V^T

Tìm eigenvectors của **P** và chuẩn hóa thành ma trận trực chuẩn để tạo thành các dòng của ma trận V^T

(ưu tiên eigenvectors có eigenvalues lớn thì được xếp trước)

↓

Bước 4: Tạo ma trận U = A.V.S^{-1}

3. Singular Value Decomposition (tt.)

❑ **Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Bước 1: Tạo ma trận P = A^T.A

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = A^T.A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 2: Tạo ma trận đường chéo S và S^{-1}

a. Tìm eigenvalues của P

$$P.\vec{x} = \lambda.\vec{x} \Rightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-10)(\lambda-12) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

b. Sắp xếp giảm dần các eigenvalues

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

rank = 2

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 3: Tạo V^T

- Với $\lambda_1 = 12$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_3 = 1 \qquad x_2 = 2 \Rightarrow \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

- Với $\lambda_2 = 10$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \qquad x_1 = -2 = -2x_2 \Rightarrow \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0) \quad \Rightarrow V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 4: Tạo ma trận U = A.V.S^{-1}

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Kiểm chứng kết quả:

$$U.S.V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Giả sử A $\in$ M$_{m,n}$(}), với (m < n)**

  P = A^T.A $\in$ **M$_n$**(}) $\Rightarrow$ tính định thức cấp **n** để tìm λ: |P – λ.**I$_n$**| = 0

  Xét B = A^T $\in$ M$_{n,m}$(})

  Ta có: Q = B^T.B = (A^T)^T.A^T = A.A^T $\in$ **M$_m$**(})

  Chỉ cần tính định thức cấp **m** để tìm λ: |Q – λ.**I$_m$**| = 0

  A = B^T = (U$_B$.S$_B$.V$_B$^{T})^T = V$_B$.S$_B$.U$_B$^{T}

  Nhận xét: Vai trò của U$_A$ và V$_B$ hoán đổi cho nhau

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Bước 1: Tạo ma trận Q = A.A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = A.A^T = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 2: Tạo ma trận đường chéo S và S^{-1}

a. Tìm eigenvalues của Q

$$Q.\vec{x} = \lambda.\vec{x} \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 1 \\ 1 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-12)(\lambda-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

b. Sắp xếp giảm dần các eigenvalues

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

rank = 2

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 3: Tạo U

- Với λ_2 = 12

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \quad \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

- Với λ_2 = 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -1 = -x_2 \quad \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} \quad \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

Bước 4: Tạo ma trận V^T ($V^T = S^{-1}.U^{-1}.A = S^{-1}.U^T.A$)

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

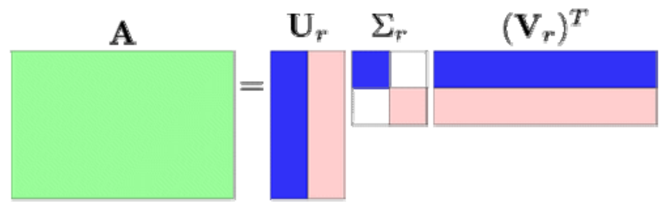
Kiểm chứng kết quả:

$$U.S.V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Compact SVD**

  r = rank(A)

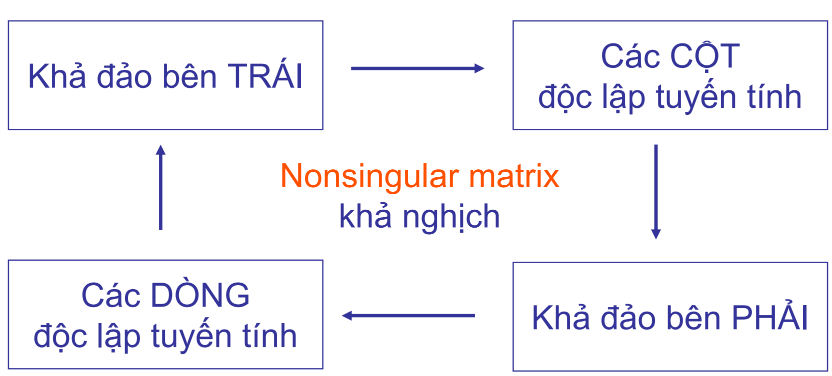


- **Truncated SVD** (*Low-rank approximation*)

  Chọn r = k << MIN(m, n)

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Giả sử A ∈ $M_{m,n}$(})**
  - Ma trận nghịch đảo TRÁI (*left inverse*): X.A = I
  - Ma trận nghịch đảo PHẢI (*right inverse*): A.X = I
  - Với ma trận vuông A ∈ M_n(})



3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Ma trận giả nghịch đảo** (*pseudo-inverse* – Moore-Penrose)

  Giả sử $A \in M_{m,n}(\,)$

  - Nếu ($m \geq n$) và các CỘT của A độc lập tuyến tính

    Khi đó, ma trận ($A^T.A$) khả nghịch

    Ma trận nghịch đảo TRÁI của A: $A^{\dagger} = (A^T.A)^{-1}.A^T$

    $$A^{\dagger}.A = (A^T.A)^{-1}.A^T.A = I$$

  - Nếu ($m \leq n$) và các DÒNG của A độc lập tuyến tính

    Khi đó, ma trận ($A.A^T$) khả nghịch

    Ma trận nghịch đảo PHẢI của A: $A^{\dagger} = A^T.(A.A^T)^{-1}$

    $$A.A^{\dagger} = A.A^T.(A.A^T)^{-1} = I$$

3. Singular Value Decomposition (tt.)

- **Các ma trận trực giao U, V và ma trận đường chéo S**

  $$A = U.S.V^T \qquad A^T = (U.S.V^T)^T = V.S.U^T$$

  $$(A^T.A) = (V.S.U^T).U.S.V^T = V.S.(U^T.U).S.V^T = V.S^2.V^T$$

  Ma trận nghịch đảo trái:

  $$A^{\dagger} = (A^T.A)^{-1}.A^T = (V.S^2.V^T)^{-1}.(V.S.U^T) = (V^T)^{-1}.(S^2)^{-1}.V^{-1}.V.S.U^T$$

  $$A^{\dagger} = (V^T)^{-1}.S^{-1}.S^{-1}.S.U^T = (V^T)^{-1}.S^{-1}.U^T$$

  Vì V là ma trận trực giao nên: $A^{\dagger} = V.S^{-1}.U^T$

Tài liệu tham khảo

Boyd S. & Vandenberghe L., *Introduction to Applied Linear Algebra. Vectors, Matrices, and Least Squares*, Cambridge University Press, 2018.

Đậu Thế Cấp, *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, 2008.

Lê Văn Hợp, *Bài giảng môn Toán Đại số B1* (Đại số tuyến tính).

Nguyễn Duy Thuận và các tác giả, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐH Sư phạm, 2003.