B1. Linear Algebra

Bổ sung thêm cho bài giảng

2019

Nội dung bổ sung

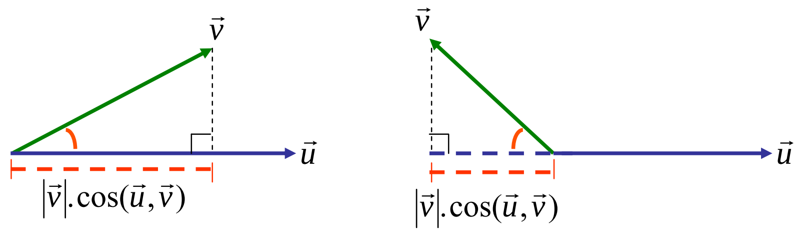
1. **Vectơ**
2. **Ma trận**
3. **Hệ phương trình tuyến tính**
4. **Định thức**
5. **Ma trận thưa**

1. Vectơ

- ❑ **Vector Dot Product: mức độ "tương đồng" giữa 2 vectơ**

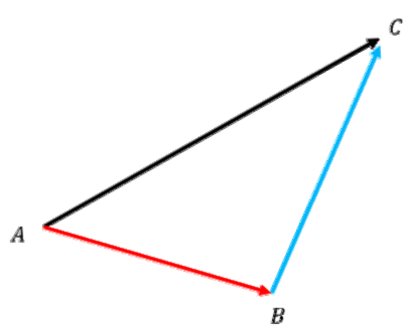
$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i$$

- ❑ **Vector projection**



1. Vectơ (tt.)

- ❑ **Vector decomposition**



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

1. Vectơ (tt.)

- Khoảng cách **Minkowski**:

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$

scipy.spatial.distance.minkowski(x, y, p)

- Khoảng cách **Manhattan** (*L_1 norm*): (p = 1)

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

scipy.spatial.distance.cityblock(x, y)

- Khoảng cách **Euclid** (*L_2 norm*): (p = 2)

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$$

scipy.spatial.distance.euclidean(x, y)

- Khoảng cách **Chebyshev** (*L_{max} norm*, *Chessboard distance*): (p → ∞)

$$d(x,y)=\max_i|x_i-y_i|$$

scipy.spatial.distance.chebyshev(x, y)

Nội dung bổ sung

1. Vectơ
2. **Ma trận**
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. Ma trận thưa

2. Ma trận

❑ **Ý nghĩa**

- thể hiện mối liên hệ giữa các đại lượng (tập hợp)
- thể hiện mối liên hệ nội tại trong một tập hợp

❑ **Ma trận A cấp (m, n) trên tập số thực } :** **$A_{m,n} \in M_{m,n}$(})**

$$A_{m,n} = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, a_{ij} \in R$$

- a_{ij} hay $a_{i,j} \in$ } : các hệ số
- vector là ma trận đặc biệt: $A_{1,\, n}$
- ma trận **O**: $a_{ij} = 0$, $\forall$i, j

2. Ma trận (tt.)

❑ **Nhân ma trận với vô hướng**

$$\alpha.A = A.\alpha = \left[\alpha.A_{ij}\right]$$

❑ **Nhân ma trận với ma trận**

tích vô hướng(dòng A_i, cột B_j)

$$C_{m,p} = A_{m,n}.B_{n,p} \qquad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = + \begin{array}{l} a_{11}. \\ a_{12}. \\ a_{13}. \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

2. Ma trận (tt.)

- Chuẩn của ma trận (*matrix norm*)
  - *p-norm*:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

  - *Frobenius norm*: (p = 2)

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

numpy.linalg.norm(A, 'fro')

2. Ma trận (tt.)

- **Các vectors v_1, v_2, …, v_k được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các vô hướng α_1, α_2, …, α_k không đồng thời = 0:**

$$\alpha_1.\vec{v}_1 + \alpha_2.\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k.\vec{v}_k = \vec{0}$$

Ngược lại, v_1, v_2, …, v_k được gọi là độc lập tuyến tính

- **Hạng của A, rank(A), là số dòng tối đa độc lập tuyến tính**
  - nhiều phương pháp tính hạng của ma trận

Nội dung bổ sung

1. Vectơ
2. Ma trận
3. **Hệ phương trình tuyến tính**
4. Định thức
5. Ma trận thưa

3. Hệ phương trình tuyến tính

- Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A.X = B

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Các phép biến đổi sơ cấp trên DÒNG φ**

  Loại 1: hoán vị giữa dòng (i) và dòng (k), ký hiệu: (i) $\leftrightarrow$ (k)

  Loại 2: nhân dòng (i) với vô hướng $\alpha \neq 0$, ký hiệu: (i) $\rightarrow \alpha$(i)

  Loại 3: thay dòng (i) bằng dòng (i) + α(k), ký hiệu: (i) $\rightarrow$ [(i) + α(k)]

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\to[(2)+2(1)]} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 7 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\to\frac{-1}{4}(1)} \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\to[(3)-8(1)]} \begin{pmatrix} -7/4 & -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 24 \\ 16 & 5 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

dòng 1 nhân 2,
cộng vào dòng 2

- **A và B** **tương đương dòng**, **ký hiệu A~B, nếu A có thể biến đổi thành B** (và ngược lại) **bằng một số hữu hạn các phép φ_k**

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{C1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow{C2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 7 & -16 & 26 \\ 0 & 1^* & -2 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -90 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1^* & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1^* & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right) \xrightarrow{C4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -2 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$$

C1 : $(2) \to (2) + 2(1),\ (3) \to (3) - 3(1),\ (4) \to (4) - 2(1)$

C2 : $(2) \to (2) + (3),\ (1) \to (1) - 2(2),\ (3) \to (3) + 4(2),\ (4) \to (4) + 7(2)$

C3 : $(4) \to (4) - (3),\ (3) \to -18^{-1}(3),\ (1) \to (1) - 7(3),\ (2) \to (2) + 2(3)$

C4 : $(4) \to 18^{-1}(4),\ (1) \to (1) + 2(4),\ (2) \to (2) - 3(4),\ (3) \to (3) + 2(4)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & -9 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & -23 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1^* & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$: vô nghiệm

$: (4) \to (4) - (1),\ (1) \to (1) - (2),\ (2) \to (2) - 2(3),\ (3) \to (3) - (1)$

$: (2) \leftrightarrow (3)$

$: (1) \to (1) - 2(2),\ (3) \to (3) + 7(2),\ (4) \to (4) + 3(2)$

$: (3) \to (3) - 2(4)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & -2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1^* & -1 & -1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 5/6 \\ 0 & 1^* & -1 & 0 & -5/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$: các cột (3) và (5) không biến đổi được
Hệ có vô số nghiệm

$(2) \to (2) - (1),\ (3) \to (3) - 4(1),\ (4) \to (4) - 2(1)$

$(3) \to (3) - 3(2),\ (4) \to (4) + (2)\ (2) \to -2^{-1}(2),\ (1) \to (1) - (2)$

$(3) \to 9^{-1}(3),\ (4) \to (4) - 12(3),\ (1) \to (1) + 2(3),\ (2) \to (2) + (3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**
  - cột chuẩn E_i (m dòng): hệ số dòng i bằng 1, các hệ số khác = 0

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_m \end{pmatrix}?$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Phương pháp Gauss – Jordan với $A_{m,n}.X_{n,1} = B_{m,1}$**
  - Bước 1 – Chuẩn hóa các cột: xây dựng tuần tự E_1, E_2, …
    - Khi xây dựng E_k thì không được làm thay đổi $E_1, \dots, E_{k-1}$
    - Nếu không thể chuẩn hóa cột k thành E_k thì xét cột (k + 1)
  - Bước 2 – Xem xét nghiệm của hệ phương trình
    - Chuẩn hóa $E_1, E_2, \dots, E_n$: nghiệm duy nhất
    - Xuất hiện 1 dòng mâu thuẫn: (0 0 … 0 | a $\neq$ 0): vô nghiệm
    - Tạo $E_1, \dots, E_k$ (k < n) không mâu thuẫn: vô số nghiệm

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **Điều kiện chuẩn hóa cột k thành E_k**

- nếu $v_k = v_{k+1} = \ldots = v_m = 0$: không thể chuẩn hóa
- nếu $0 \neq v_j \in \{v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m\}$: (k) $\leftrightarrow$ (j) để chuẩn hóa (đưa về 1)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_{k-1} \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \ldots \\ v_m \end{pmatrix} \to E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn**

$$F_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, F_{m-1} = \begin{pmatrix} f_{1(m-1)} \\ f_{2(m-1)} \\ f_{3(m-1)} \\ \ldots \\ f_{(m-1)(m-1)} \\ 0 \end{pmatrix}, F_m = \begin{pmatrix} f_{1(m-1)} \\ f_{2(m-1)} \\ f_{3(m-1)} \\ \ldots \\ f_{(m-1)(m-1)} \\ f_{(mm} \end{pmatrix}$$

$$f_{ii} \neq 0 \qquad f_{ij} = 0, \forall i > j$$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 4 & -12 & 18 \\ -2 & -5 & 7 & -6 & 38 \\ 6 & 0 & -3 & 20 & -14 \end{array}\right)
\to
\underset{F_1}{\left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 24 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 41 \\ 0 & 3 & -3 & 5 & -23 \end{array}\right)}
\to
\underset{F_1\ F_2}{\left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)}
\to
$$

$$
\to
\underset{F_1\ F_2\ F_3\ F_4}{\left(\begin{array}{cccc|c} 2^* & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -3^* & 4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 1^* & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* & 6 \end{array}\right)}
$$

backward substitution

$x_4 = -1, x_3 = 4, x_2 = -2, x_1 = 3$

$(2) \to (2) + 2(1),\ (3) \to (3) + (1),\ (4) \to (4) - 3(1)$
$(3) \to (3) + 2(4),\ (4) \to (4) + (2)$
$(4) \to (4) - (3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -19 & 12 & -15 & -16 \\ -2 & 8 & -5 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 9 & 4 & 2 \\ -7 & 15 & -17 & -4 & 0 \end{array}\right)
\to
\underset{F_1}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 18 & 16 \\ 0 & -6 & -3 & -11 & -14 \end{array}\right)}
\to
\underset{F_1\ F_2}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2^* & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & -5 \end{array}\right)}
\to
$$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$: hệ vô nghiệm.

$(3) \to (3) + 2(2),\ (1) \to (1) + 2(2),\ (2) \to (2) + 2(1),\ (4) \to (4) + 7(1)$
$(3) \to (3) - 4(2),\ (4) \to (4) + 3(2)$
$(4) \to (4) + 2(3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **Phương pháp Gauss dựa trên cột bán chuẩn**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 8 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -6 & 7 & -11 \\ -2 & 6 & -5 & 2 & 5 & -20 \end{array}\right) \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 1 & -4 & 12 & -31 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 & -12 \end{array}\right)}_{F_1} \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{F_1\ F_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2^* & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3^* & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{F_1\ F_2\ F_3}$$

: các cột (4) và (5) không bán chuẩn hóa được.

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $x_4 = a$, $x_5 = b$

$(2) \to (2) - 3(1)$, $(3) \to (3) + (4)$, $(4) \to (4) + 2(1)$

$(3) \to (3) - 5(2)$, $(4) \to (4) - 2(2)$

$(3) \to 2^{-1}(3)$, $(4) \to (4) - (3)$

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **S_A, ma trận dạng bậc thang của A**

- <u>bán chuẩn hóa</u> tối đa các cột của A (Gauss)
- các dòng không tầm thường được xếp phía trên
- mỗi ma trận A có thể có nhiều S_A

❑ **R_A, ma trận dạng bậc thang rút gọn của A**

- <u>chuẩn hóa</u> tối đa các cột của A (Gauss – Jordan)
- các dòng không tầm thường được xếp phía trên
- mỗi ma trận A chỉ có một R_A

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Hạng của A, ký hiệu rank(A)**
  - số dòng không tầm thường của R_A (hay S_A)
  - số cột chuẩn trong R_A
  - số cột bán chuẩn trong S_A

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

- **Hạng của A, ký hiệu rank(A)**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -16 & 32 \\ 3 & -1 & -4 & 13 & -24 \end{pmatrix} \to \underset{F_1}{\begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 16 & -45 \end{pmatrix}} \to \underset{F_1\ \ F_2}{\begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -15 \end{pmatrix}} \to$$

$$\to \underset{F_1\ \ F_2\ \ \ \ \ \ F_3}{\begin{pmatrix} -1^* & -3 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = S_A \to \underset{E_1\ \ E_2}{\begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1^* & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \to \underset{E_1\ \ E_2\ \ \ \ \ \ E_3}{\begin{pmatrix} 1^* & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = R_A$$

$(2) \to (2) + 2(1),\ (3) \to (3) + (4),\ (4) \to (4) + 3(1)$
$(4) \to (4) - 2(2),\ (2) \to -5^{-1}(2),\ (3) \to (3) - (2)$
$(4) \to (4) + 3(3)$
$(1) \to (1) + 3(2),\ (1) \to -(1)$
$(1) \to (1) + (3),\ (3) \to -2^{-1}(3),\ (2) \to (2) + (3)$

rank(A) = 3
- S_A (R_A) có 3 dòng $\neq 0$
- R_A có 3 cột chuẩn
- S_A có 3 cột bán chuẩn

3. Hệ phương trình tuyến tính (tt.)

❑ **Định lý Kronecker – Capelli**

- Nếu rank(A|B) = rank(A) + 1 thì (A|B) vô nghiệm
- Nếu rank(A|B) = rank(A) = n thì (A|B) có 1 nghiệm duy nhất
- Nếu rank(A|B) = rank(A) = k < n thì (A|B) có vô số nghiệm

Nội dung bổ sung

1. **Vectơ**
2. **Ma trận**
3. **Hệ phương trình tuyến tính**
4. **Định thức**
5. **Ma trận thưa**

4. Định thức

❑ **Định thức của ma trận vuông A ∈ M_n(}), ký hiệu det(A) hay |A|**

- A = [a] ∈ M_1(})   ⇒ |A| = a
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ∈ M_2(})   ⇒ |A| = (ad – bc)
- $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\middle| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}\right)$ quy tắc SARRUS

⇒ |A| = (aei + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

4. Định thức (tt.)

❑ **Định thức của ma trận vuông A, ký hiệu det(A) hay |A|, n ≥ 2**

- Minor A(i, j): loại bỏ dòng i và cột j của A
- Cofactor: $C_{ij} = (-1)^{(i+j)}.|A(i, j)|$
- tính toán dựa trên dòng i:

$$\boxed{|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.C_{ik}} = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + \ldots + a_{in}.C_{in}$$

- tính toán dựa trên cột j:

$$\boxed{|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.C_{kj}} = a_{1j}.C_{1j} + a_{2j}.C_{2j} + \ldots + a_{nj}.C_{nj}$$

4. Định thức (tt.)

- **Định thức của ma trận vuông A ∈ $M_n(\mathbb{K})$, ký hiệu det(A) hay |A|**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

- Tính |A| dựa trên dòng (1):

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.C_{1k} = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13} = \\ &= 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-20) + 17 + 2(11) = -41 \end{aligned}$$

4. Định thức (tt.)

- **Một số nhận xét**
  - Chọn dòng hay cột có nhiều hệ số = 0
  - Nếu có dòng (hay cột) chỉ chứa hệ số 0 thì |A| = 0
  - Nếu có 2 dòng (hay 2 cột) tỉ lệ với nhau thì |A| = 0
  - Nếu A là ma trận *tam giác* trên hoặc dưới thì $|A| = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn}$
  - $|A| = |A^T|$
  - $|A_1.A_2\ldots A_k| = |A_1|.|A_2|\ldots|A_k|$

4. Định thức (tt.)

❑ **Các phép biến đổi sơ cấp trên CỘT ρ**

Loại 1: hoán vị giữa cột (j) và cột (k), ký hiệu: (j)” $\leftrightarrow$ (k)”

Loại 2: nhân cột (i) với vô hướng α, ký hiệu: (i)” $\rightarrow$ α(i)”

Loại 3: thay cột (i) bằng cột (i) + α(k), ký hiệu: (i) $\rightarrow$ [(i) + α(k)]

4. Định thức (tt.)

❑ **Nhận xét**

- Nếu A $\rightarrow$ B bằng 1 phép biến đổi loại 1 trên dòng hay cột thì

  $|B| = -|A|$

- Nếu A $\rightarrow$ B bằng 1 phép biến đổi loại 2 trên dòng hay cột thì

  $|B| = \alpha.|A|$

  $\Rightarrow$ $|\alpha.A| = \alpha^n.|A|$ (nhân n dòng của A với α)

- Nếu A $\rightarrow$ B bằng 1 phép biến đổi loại 3 trên dòng hay cột thì

  $|B| = |A|$ (độc lập với α)

4. Định thức (tt.)

Ma trận (vuông) khả nghịch, ma trận nghịch đảo

- ma trận đơn vị cấp n (vuông): $I_{n,n} \equiv I_n$
- ma trận nghịch đảo của A, nếu có, là duy nhất, ký hiệu: A^{-1}

Các phát biểu sau là tương đương đối với ma trận $A_{n,n}$

- A khả nghịch
- $|A| \neq 0$
- rank(A) = n

4. Định thức (tt.)

Tìm ma trận nghịch đảo dựa trên định thức

- Minor A(i, j): loại bỏ dòng i và cột j của A
- Cofactor: $C_{ij} = (-1)^{(i+j)}.|A(i, j)|$
- Lập ma trận: $C_{n,n} = [C_{ij}]$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^T$$

VD: Với n = 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. Định thức (tt.)

- Tìm ma trận nghịch đảo dựa trên định thức

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -20$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -17$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$\dots$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -20 & -17 & 11 \\ -2 & -14 & -3 \\ -7 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-41}\begin{pmatrix} -20 & -2 & -7 \\ -17 & -14 & -8 \\ 11 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

4. Định thức (tt.)

- Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải A.X = I

- Giả sử ma trận $A_{n,n}$ là khả nghịch ($R_A = I_n$)

  - Nếu chuỗi các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ biến A thành R_A (= I_n) thì chuỗi phép biến đổi đó cũng sẽ biến I_n thành A^{-1}.

- Phương pháp Gauss – Jordan tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}: thực hiện chuỗi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ đồng thời trên A và I_n

  $(A \mid I_n) \rightarrow (A_1 \mid B_1) \rightarrow (A_2 \mid B_2) \rightarrow \dots \rightarrow (A_k \mid B_k)$ trong đó $A_k = R_A$

  Nếu $R_A = I_n$ thì A khả nghịch và $A^{-1} = B_k$

4. Định thức (tt.)

❑ Tìm ma trận nghịch đảo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^{*} & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^{*} & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^{*} & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1^{*} & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^{*} & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1^{*} & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1^{*} & -9 & 31 & 5 \end{array}\right). \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$$

$(1) \to (1) - (2),\ (2) \to (2) - 2(1),\ (3) \to (3) + 7(1)$

$(3) \to (3) + 4(2),\ (2) \to (2) + 3(3)$

$(1) \to (1) - 3(2),\ (3) \to (3) - 2(2)$

$(1) \to (1) - 2(3),\ (2) \to (2) + 3(3),\ (3) \to -(3)$

4. Định thức (tt.)

❑ Các tính chất trên ma trận A khả nghịch

- A^{-1} khả nghịch: $(A^{-1})^{-1} = A$
- A^{T} khả nghịch: $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
- $\alpha \neq 0$, $\alpha.A$ khả nghịch: $(\alpha.A)^{-1} = \alpha^{-1}.A^{-1}$
- $r \in Z$, A^{r} khả nghịch: $(A^{r})^{-1} = A^{-r}$
- A.B khả nghịch $\Leftrightarrow$ A và B khả nghịch và $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- $A.X = B$ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}.B$

Nội dung bổ sung

1. Vectơ
2. Ma trận
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Định thức
5. **Ma trận thưa**

5. Ma trận thưa

❑ **Coordinate List (COO)**

Giả sử p là số phần tử ≠ 0 của ma trận A

Tạo 3 mảng có *cùng kích thước p*:

- data[p] chứa p giá trị ≠ 0 của A
- col[p] chứa p chỉ số CỘT của các phần tử ≠ 0 của A
- row[p] chứa p chỉ số DÒNG của các phần tử ≠ 0 của A

A[row[i], col[i]] = data[i]

5. Ma trận thưa (tt.)

❑ Compressed Sparse Row (CSR) → row oriented

Giả sử p là số phần tử ≠ 0 của ma trận A

Tạo 3 mảng có *kích thước khác nhau*:

- data[ ] chứa p giá trị ≠ 0 của A
- indices[ ] chứa p chỉ số CỘT của các phần tử ≠ 0 của A
- indptr[ ] chứa một dãy số có (m + 1) phần tử tăng (không đều) từ 0 cho đến p

VỊ TRÍ BẮT ĐẦU rút trích trong data[ ] cho mỗi dòng i < m

idxptr = (start_r(0), start_r(1), start_r(2), ..., start_r(m-1), p)

start_r(0) = 0 (quy ước: chỉ số bắt đầu = 0)

5. Ma trận thưa (tt.)

❑ Compressed Sparse Row (CSR) → row oriented

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$data[\ ] = [8 \quad 6 \quad 9 \quad 4 \quad 3]$$

$$indices[\ ] = [0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 3]$$

$$idxptr[\ ] = [0 \quad 2 \quad 4 \quad 5]$$

Gọi P(i) là tập các giá trị ≠ 0 của dòng A(i), được rút trích từ data[ ]

P(0) = { data[**0**], data[1] } = { 8, 6 }

P(1) = { data[**2**], data[3] } = { 9, 4 }

P(2) = { data[**4**] } = { 3 }

Matrix

- **<u>Bài tập</u>: Các phép toán trên ma trận**

$$(i)\,Cho \quad a.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}. \quad Tìm\, a, b.$$

$$(ii)\,Cho \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (a \neq c), AB = BA.$$ CMR: B là ma trận đường chéo.

Matrix

- **<u>Bài tập</u>: Các phép toán trên ma trận**

$$(iii)\,Cho \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad Tính\, A^2, A^3, A^4, A^{11}.$$

$$(iv)\,Cho \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad Tính\, A^2, A^3, A^4, A^n\,(n > 0).$$

Làm việc với matrix

Bài tập: Định thức, hạng, ma trận khả nghịch

$$(i)\quad \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \qquad (ii)\quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(iii)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \qquad (iv)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(v) Tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Làm việc với matrix

Bài tập: Định thức, hạng, ma trận khả nghịch

Tìm ma trận nghịch đảo (dùng định thức, các phép biến đổi):

$$(vi)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có: $\det A = 2 + 12 - 9 - 2 = 3$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Làm việc với matrix

Bài tập: Định thức, hạng, ma trận khả nghịch

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\3&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[d3\to-3d1+d3]{d2\to-2d1+d2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&2&-7&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d3\to-2d2+d3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&0&3&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{d3\to\frac{1}{3}d3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&2&-1\\0&1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Làm việc với matrix

Bài tập: Định thức, hạng, ma trận khả nghịch

Tìm ma trận nghịch đảo:

$$(vii)\quad A=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\qquad (viii)\quad A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&0&1&1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$(ix)\quad A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$(x)\quad A=\begin{vmatrix}a&b&c\\1&1&1\\bc&ac&ab\end{vmatrix}$$. Xác định điều kiện để A khả nghịch.

Làm việc với matrix

❑ **Bài tập**: Hệ phương trình tuyến tính

$$(i)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad (ii)\quad X.\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(iii)\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Giải:

$$(i)\quad A^{-1} = \frac{1}{(1.4-2.3)}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Làm việc với matrix

❑ **Bài tập**: Hệ phương trình tuyến tính

$$(iv)\begin{cases} 7x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =15 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & =15 \\ 10x_1 & -11x_2 & +5x_3 & =36 \end{cases} \qquad (v)\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \\ 2x_1 & +5x_2 & -8x_3 & =4 \\ 3x_1 & +8x_2 & -13x_3 & =7 \end{cases}$$

$$(vi)\begin{cases} 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =2 \\ 7x_1 & -4x_2 & +x_3 & +3x_4 & =5 \\ 5x_1 & +7x_2 & -4x_3 & -6x_4 & =3 \end{cases}$$

Làm việc với matrix

- **Bài tập**: Hệ phương trình tuyến tính

$$(vii)\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & =10 \\ 30x_1 & +20x_2 & +20x_3 & =10 \\ 15x_1 & +12x_2 & +9x_3 & =12 \end{cases}$$

$$(viii)\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & =1 \\ 5x_1 & +2x_2 & -6x_3 & =5 \\ 3x_1 & -x_2 & -4x_3 & =7 \end{cases}$$

$$(ix)\begin{cases} 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & +2x_4 & =3 \\ 6x_1 & +8x_2 & +2x_3 & +5x_4 & =7 \\ 9x_1 & +12x_2 & +3x_3 & +10x_4 & =13 \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

Đậu Thế Cấp, *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, 2008.

Lê Văn Hợp, *Bài giảng môn Toán Đại số B1* (Đại số tuyến tính).

Nguyễn Duy Thuận và các tác giả, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐH Sư phạm, 2003.