泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

4.1 列紧性

柯西列与收敛列

定理 设$\{x_n\}$是(X,d)的柯西列，若存在子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$x_0 \in X$，则

$$x_n \to x_0 \ (n \to \infty).$$

列紧集的定义

定义

设 A 是距离空间 X 的子集，若 A 中任意点列都必有一个 X 中收敛的子列，则称 A 为**列紧集**.

实数空间

回顾

Bolzano-Weierstrass 定理

有界数列必有收敛子列。

注　在实数空间中，有界集必为列紧集.

列紧集与有界集

例

设 $X=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，其上定义离散距离，则 $F=\{2,4,\cdots,2k,\cdots\}$ 是 X 中的有界集，但不是列紧集.

列紧集的性质

命题

在距离空间中，

1. 有限集是列紧集；
2. 有限个列紧集的并集是列紧集；
3. 列紧集的子集是列紧集；
4. 列紧集的闭包是列紧集.

列紧空间

定义

若距离空间 X 是列紧集，则 X 为列紧空间.

设$\{x_n\}$是(X,d)的柯西列，若存在子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$x_0\in X$，则

$$x_n \to x_0 \ (n\to\infty).$$

注　列紧空间一定是完备的距离空间.

完全有界集

定义

设 A 是距离空间 X 的子集，若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，以及有限点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\} \subset X$，使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$$

即 A 有任意半径的有限开球覆盖. 则称 A 为**完全有界集**.

完全有界集的性质

命题

1. 完全有界集是有界集;
2. 完全有界集的子集是完全有界集;
3. 完全有界集是可分的.

完全有界集的性质

命题

③ 完全有界集是可分的.

定义

设X是一个距离空间，若X中存在一个可数的稠密子集，则称X是**可分**的距离空间.

设A是X的一个子集，若X中存在一个可数子集B，使得B在A中稠密，则称A是**可分**.

完全有界集的性质

命题

③ 完全有界集是可分的.

证

设A是完全有界集，则对任意 $n\in\mathbb{N}$，存在A的半径为 $\dfrac{1}{n}$ 的有限开球覆盖

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{k_n}B(x_i^{(n)},\frac{1}{n})$$

令 $E_n=\{x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}\}$, $\quad E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$

则 E 是可数集.

完全有界集的性质

命题 ③ 完全有界集是可分的.

证 对任意$x \in A$，存在 $x_n \in E_n \subset E$，使得

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n},$$

故有 $x_n \to x \ (n \to \infty)$. 故 E 在 A中稠密.

综上可得A 可分.

完全有界集的等价刻画

定理 设A是距离空间X的完全有界集的充要条件是A中任一点列有柯西子列.

证 （充分性）假设A不是完全有界集. 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得A没有半径为ε_0的有限开球覆盖. 任取 $x_1\in A$, 存在 $x_2\in A$, 使得

$$d(x_1,x_2)\geq\varepsilon_0,$$

否则$\{B(x_1,\varepsilon_0)\}$就是A的一个半径为ε_0的有限开球覆盖. 同理存在 $x_3\in A$, 使得

$$d(x_i,x_3)\geq\varepsilon_0\ (i=1,2),$$

否则$\{B(x_1,\varepsilon_0),\ B(x_2,\varepsilon_0)\}$ 就是A 的一个半径为 ε_0 的有限开球覆盖.

完全有界集的等价刻画

定理 设 A 是距离空间 X 的完全有界集的充要条件是 A 中任一点列有柯西子列.

证 （充分性）依次类推，可得点列 $\{x_n\} \subset A$，满足

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0 \ (n \neq m).$$

所以 $\{x_n\}$ 没有柯西子列，矛盾.

完全有界集的等价刻画

定理 设 A 是距离空间 X 的完全有界集的充要条件是 A 中任一点列有柯西子列.

证 （必要性）设$\{x_n\}$是 A 中任一无穷点列，下证 $\{x_n\}$有柯西子列.

若$\{x_n\}$中只有有限个互不相同的点，则结论成立;

若$\{x_n\}$中含有无限多个互不相同的点，取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$，则 A 有半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的有限开球覆盖，从而至少存在一个半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的开球包含$\{x_n\}$的无穷多个点. 记其为 $\{x_{1i}\}$，则有

$$d(x_{1i}, x_{1j}) < 1 \ (i \neq j).$$

完全有界集的等价刻画

定理 设A是距离空间X的完全有界集的充要条件是A中任一点列有柯西子列.

证 （必要性）由于$\{x_{1i}\}$作为A的子集仍是完全有界集．取$\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}$，则$\{x_{1i}\}$有半径为$\dfrac{1}{2^2}$的有限开球覆盖，从而至少存在一个半径为$\dfrac{1}{2^2}$的开球包含$\{x_{1i}\}$的无穷多个点．记其为$\{x_{2i}\}$，则有

$$d(x_{2i},x_{2j})<\frac{1}{2}.$$

如此下去可得可数多个点列，每一个点列都是前一个点列的子列．选取对角线上的元素$\{x_{ii}\}$，它是$\{x_n\}$的子列，且是柯西列.

列紧集与完全有界集

$$\text{列紧集} \;\underset{\text{完备}}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}}\; \text{完全有界集} \Longrightarrow \begin{cases}\text{有界集}\\ \text{可分}\end{cases}$$

小结

- 列紧集的定义
- 列紧空间
- 完全有界集的定义
- 完全有界集的等价刻画
- 列紧集与完全有界集