泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

1.2 距离空间的例

回顾: 距离空间的定义

定义

设 X 是一个非空集合. 如果存在一个映射 $d: X \times X \to \mathbb{R}$, 满足:

1. $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$; (非负性)
2. $d(x, y) = d(y, x)$; (对称性)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (三角不等式)

则称 d 为 X 的一个**距离**，定义了距离 d 的集合 X 称为**距离空间**，记为 (X, d). 有时可简记为 X.

距离子空间的定义

定义

设(X,d)是距离空间，E是X的一个非空子集，则d限制在$E\times E$上满足非负性、对称性、三角不等式，即(E,d)是距离空间，称为(X,d)的子空间.

例 1

在实数空间$\mathbb{R}$中，距离为$d(x,y)=|x-y|$. 记$\mathbb{Q}$为全体有理数集. 则$(\mathbb{Q},d)$是$(\mathbb{R},d)$的子空间.

离散的距离空间

例 2

设 X 是一个非空集合，对任意 $x, y \in X$，定义

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x \neq y,\\ 0, & x = y.\end{cases}$$

则 (X, d) 是距离空间，称为离散的距离空间，记为 D .

证明 d(x,y) 是距离：满足三条性质

证

只需证明 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. 事实上，不妨设 $x \neq y$,

则有 $z \neq x$, 或者 $z \neq y$. 因而

$$d(x,z) + d(z,y) \geq 1 = d(x,y).$$

距离是无限多的

例 3

设 (X,d) 是距离空间，对任意 $x,y\in X$，定义

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

则 (X,ρ) 也是距离空间.

证

只需证明 $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$. 事实上，注意到

1^o 函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 在$(0,+\infty)$上是单增的；

2^o $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

证明细节

$$
\begin{aligned}
\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &\le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}
\end{aligned}
$$

证

只需证明 $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$. 事实上，注意到

1^o 函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 在$(0,+\infty)$上是单增的；

2^o $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$.

证明细节

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &\le \rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

证

只需证明 $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$. 事实上，注意到

1^o 函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 在$(0,+\infty)$上是单增的；

2^o $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

距离是无限多的

例 3 设 (X,d) 是距离空间，对任意 $x,y\in X$, 定义

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

则 (X,ρ) 也是距离空间.

证 只需证明 $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$. 事实上，注意到

1^o 函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 在$(0,+\infty)$上是单增的；

2^o $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

连续函数空间

例 4

记 $[a,b]$ 上的连续函数全体为 $C[a,b]$，定义

$$d(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

则 $(C[a,b],d)$ 为距离空间，称为连续函数空间，简记为 $C[a,b]$.

连续函数空间

例 4

记 $[a,b]$ 上的连续函数全体为 $C[a,b]$，定义

$$d(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

则 $(C[a,b],d)$ 为距离空间，称为连续函数空间，简记为 $C[a,b]$.

证

只需证明 $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$. 事实上，对任意 $t\in[a,b]$,

$$|x(t)-y(t)|\le|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|,$$

因而

$$\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|\le\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)|.$$

有界数列空间

例 5

设 l^∞ 是有界实(或复)数列全体，即

上确界

$$l^\infty = \left\{x = \{x_j\} \mid \sup_j |x_j| < \infty\right\}.$$

对任意的 $x = \{x_j\} \in l^\infty$，$y = \{y_j\} \in l^\infty$，定义

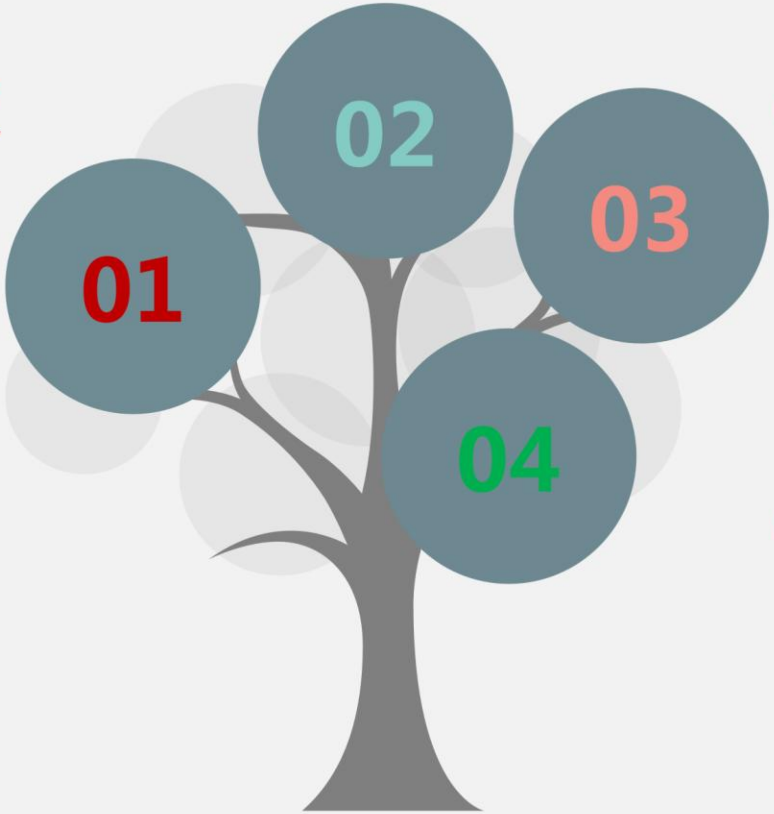
$$d(x,y) = \sup_j |x_j - y_j|,$$

则(l^∞, d)是距离空间，称为有界实(或复)数列空间，简记为 l^∞.

小结

01 距离子空间的定义

02 离散的距离空间



03 连续函数空间

04 有界数列空间