泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

2.4　可分性

实数空间

回顾

$\overline{Q} \supset R$

全体有理数 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，且 $\mathbb{Q}$ 是可数集. 即

$\mathbb{R}$ 存在一个可数稠密子集 $\mathbb{Q}$.

可分性的定义

定义

设X是一个距离空间，若X中存在一个可数的稠密子集，则称X是**可分**的距离空间.

存在可数稠密子集

设A是X的一个子集，若X中存在一个可数子集B，使得B在A中稠密，则称A是**可分**.

注　$\mathbb{R}$是可分的，$\mathbb{Q}^c$也是可分的.

$\bar{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{R}$　　$\bar{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Q}^c$

可分空间的例

例 1

N 维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 是可分的.

证

$\mathbb{R}^N$中有理坐标点的全体

$$\mathbb{Q}^N=\left\{(r_1,\cdots,r_N)\mid r_i\in\mathbb{Q};i=1,\cdots,N\right\}$$

是$\mathbb{R}^N$的可数稠密子集.

可分空间的例

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$ 是可分的.

证 记 $\mathcal{Q}[a,b]$为 $[a,b]$ 上的有理系数多项式全体，$\mathcal{P}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的实系数多项式全体.

由于$\mathcal{Q}[a,b]$ 在$\mathcal{P}[a,b]$中稠密. 注意到$\mathcal{P}[a,b]$ 在$C[a,b]$ 中稠密，于是

$\mathcal{Q}[a,b]$ $C[a,b]$

是 的可数稠密子集.

不可分空间的例

例 3 有界数列空间 l^∞ 是不可分的距离空间.

证 考虑 l^∞ 的子集

$$A=\left\{x=\{\xi_k\}\,|\,\xi_k=0 \text{ 或 } 1\,(k=1,2,\cdots)\right\}.$$

则 A 是不可数集. 并且，对任意的 $x,y\in A$, $x\neq y$, 有

双射

$R(0,1)$，不可数

$$d(x,y)=\sup_k|\xi_k-\eta_k|=1.$$

上确界

不可分空间的例

例 3 有界数列空间 l^∞ 是不可分的距离空间.

证 假设 l^∞ 可分，则存在可数稠密子集 E. 因而

$$A \subset l^\infty \subset \cup_{x\in E} B(x, \tfrac{1}{3}),$$

由于 A 是不可数集，所以存在 $x, y \in A$, $x \neq y$, 使得

$$x, y \in B(x_0, \tfrac{1}{3}), \quad x_0 \in E.$$

于是

$$1 = d(x,y) \leq d(x_0, x) + d(x_0, y) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

矛盾.

不可分空间的例

例 4 设 X 是不可数集，其上定义离散距离 $d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$ 则 (X,d) 不可分.

证 假设 (X,d) 是可分的，则存在可数的稠密子集 E.

由于 X 是不可数集，必存在 $x_0\in X\setminus E$. 由于

$$B(x_0,\frac{1}{2})\cap E=\{x_0\}\cap E=\emptyset,$$

所以 $x_0\notin\overline{E}$. 这与 E 在 X 中稠密矛盾.

小结

- 可分性的定义
- 可分空间的例
- 不可分空间的例