泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

3.5 压缩映射原理的应用

压缩映射原理

定理 设X是**完备**的距离空间，$T: X \to X$ 是**压缩映射**，则T有唯一的不动点，即存在唯一的 $\overline{x} \in X$，使得 $T\overline{x} = \overline{x}$.

应用I：隐函数定理

例 1

记 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ -\infty<y<+\infty\}$. 设 $F(x,y)$ 在 D 上连续且

$$m\le F_y(x,y)\le M,\quad (x,y)\in D,$$

其中 $0<m\le M$. 则存在唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$，使得

$$F(x,\varphi(x))\equiv 0,\quad x\in[a,b].$$

证

(1) **确定距离空间，建立映射.**

在连续函数空间 $C[a,b]$ 上考虑映射:

$$(T\varphi)(x)=\varphi(x)-\frac{1}{M}F(x,\varphi(x)),\qquad x\in[a,b].$$

则 T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射.

应用I: 隐函数定理

例 1

记 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ -\infty<y<+\infty\}$. 设 $F(x,y)$ 在 D 上连续且

$$m\le F_y(x,y)\le M,\quad (x,y)\in D,$$

其中 $0<m\le M$. 则存在唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$, 使得

$$F(x,\varphi(x))\equiv 0,\quad x\in[a,b].$$

证

(2) **验证 T 为压缩映射.**

$$d(T\varphi,T\psi)\le\left(1-\frac{m}{M}\right)\cdot d(\varphi,\psi).$$

证明细节

$$
\begin{aligned}
d(T\varphi, T\psi) &= \max_{x\in[a,b]} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \\
&= \max_{x\in[a,b]} \left|\varphi(x) - \psi(x) - \frac{1}{M}[F(x,\varphi(x)) - F(x,\psi(x))]\right| \\
&= \max_{x\in[a,b]} \left|\varphi(x) - \psi(x) - \frac{1}{M}F_y(x,\theta(x))[\varphi(x) - \psi(x)]\right| \\
&\le (1 - \frac{m}{M}) \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x) - \psi(x)| = (1 - \frac{m}{M}) \cdot d(\varphi, \psi).
\end{aligned}
$$

证

(2) 验证 T 为压缩映射.

$$
d(T\varphi, T\psi) \le (1 - \frac{m}{M}) \cdot d(\varphi, \psi).
$$

应用I：隐函数定理

例 1

记 $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ -\infty < y < +\infty\}$. 设 $F(x,y)$ 在 D 上连续且

$$m \leq F_y(x,y) \leq M, \quad (x,y) \in D,$$

其中 $0 < m \leq M$. 则存在唯一的连续函数 $y = \varphi(x)$，使得

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in [a,b].$$

证

(2) **验证 T 为压缩映射.**

$$d(T\varphi, T\psi) \leq (1 - \frac{m}{M}) \cdot d(\varphi, \psi).$$

由于 $0 \leq 1 - \dfrac{m}{M} < 1$，故 T 是完备距离空间 $C[a,b]$ 上的压缩映射.

由压缩不动点定理知，存在唯一的 $\varphi \in C[a,b]$，使得 $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

应用II: Picard定理

例 2

设 $f(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且存在 $K>0$，使得对任意 $t,x_1,x_2\in\mathbb{R}$,

$$|f(x_1,t)-f(x_2,t)|\le K|x_1-x_2|,$$

则方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t)\\ x|_{t=0}=x_0\end{cases}$ 在 $t=0$ 的某个邻域内存在唯一解.

转 化

微分方程与如下积分方程等价:

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(x(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

应用II: Picard定理

例 2

设 $f(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且存在 $K>0$，使得对任意 $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，

$$|f(x_1,t)-f(x_2,t)| \le K|x_1-x_2|,$$

则方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,t) \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 的某个邻域内存在唯一解.

证

(1) **确定距离空间，建立映射.**

取 $\delta>0$，使得 $\delta K<1$. 在空间 $C[-\delta,\delta]$ 上考虑映射:

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

则 T 是从 $C[-\delta,\delta]$ 到 $C[-\delta,\delta]$ 的映射.

应用II: Picard定理

例 2

设 $f(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且存在 $K>0$，使得对任意 $t,x_1,x_2\in\mathbb{R}$，

$$|f(x_1,t)-f(x_2,t)|\le K|x_1-x_2|,$$

则方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t)\\ x|_{t=0}=x_0\end{cases}$ 在 $t=0$ 的某个邻域内存在唯一解.

证

(2) **验证 T 为压缩映射.**

$$d(Tx,Ty)\le K\delta\cdot d(x,y).$$

证明细节

$$
\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= \max_{t\in[-\delta,\delta]} |(Tx)(t)-(Ty)(t)| \\
&= \max_{t\in[-\delta,\delta]} \left| \int_0^t [f(x(\tau),\tau)-f(y(\tau),\tau)]\,\mathrm{d}\tau \right| \\
&\le K \max_{t\in[-\delta,\delta]} \int_0^t |x(\tau)-y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\
&\le K\delta \max_{t\in[-\delta,\delta]} |x(\tau)-y(\tau)| = K\delta\cdot d(x,y).
\end{aligned}
$$

证

(2) 验证 T 为压缩映射.

$$
d(Tx,Ty)\le K\delta\cdot d(x,y).
$$

应用II: Picard定理

例 2

设 $f(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且存在 $K>0$，使得对任意 $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(x_1,t)-f(x_2,t)| \leq K|x_1-x_2|,$$

则方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,t) \\ x|_{t=0} = x_0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 的某个邻域内存在唯一解.

证

(2) **验证 T 为压缩映射.**

$$d(Tx,Ty) \leq K\delta \cdot d(x,y).$$

由于 $0<K\delta<1$，故 T 是完备距离空间 $C[-\delta,\delta]$ 上的压缩映射.

由压缩映射原理知，初值问题在 $[-\delta,\delta]$ 上有唯一解.

应用III：Fredholm积分方程

例 3

设 $k(s,t), \varphi(t)$ 是 $a \le t \le b,\ a \le s \le b$ 上的连续函数，记

$$M = \max\left\{|k(t,s)|\,\middle|\, t \in [a,b], s \in [a,b]\right\}.$$

若 $|\mu|(b-a)M < 1$，则如下积分方程有唯一解：

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

证

(1) 令

$$(Tx)(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

则 T 是从 $C[a,b]$ 到$C[a,b]$ 的映射.

应用III：Fredholm积分方程

例 3

设 $k(s,t), \varphi(t)$ 是 $a \le t \le b,\ a \le s \le b$ 上的连续函数，记

$$M = \max\left\{ |k(t,s)| \,\middle|\, t \in [a,b], s \in [a,b] \right\}.$$

若 $|\mu|(b-a)M < 1$，则如下积分方程有唯一解：

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

证

(2) 对任意 $x, y \in C[a,b]$，有

$$d(Tx, Ty) \le |\mu|(b-a)M \cdot d(x,y).$$

$$d(Tx,Ty) = \max_{a \le t \le b} |\mu| \left| \int_a^b k(t,s) \cdot [x(s) - y(s)] \mathrm{d}s \right|$$

$$\le |\mu|(b-a)M \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

$$= |\mu|(b-a)M \cdot d(x,y).$$

证明细节

证

(2) 对任意 $x, y \in C[a,b]$，有

$$d(Tx,Ty) \le |\mu|(b-a)M \cdot d(x,y).$$

应用III：Fredholm积分方程

例 3 设 $k(s,t), \varphi(t)$ 是 $a \le t \le b,\ a \le s \le b$ 上的连续函数，记

$$M = \max\left\{|k(t,s)|\,\Big|\, t \in [a,b], s \in [a,b]\right\}.$$

若 $|\mu|(b-a)M < 1$，则如下积分方程有唯一解：

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

证

(2) 对任意 $x, y \in C[a,b]$，有

$$d(Tx, Ty) \le |\mu|(b-a)M \cdot d(x,y).$$

由于 $|\mu|(b-a)M < 1$，故 T是完备距离空间 $C[a,b]$ 上的压缩映射.

由压缩映射原理知，积分方程有唯一解.

应用VI：Volterra积分方程

例 4

设 $k(s,t),\varphi(t)$ 是 $a\le t\le b,\ a\le s\le b$ 上的连续函数，记

$$M=\max\left\{|k(t,s)|\,\Big|\,t\in[a,b],s\in[a,b]\right\}.$$

则如下积分方程有唯一解：

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

证

(1) 令

$$(Tx)(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

则 T 是从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射.

应用VI：Volterra积分方程

例 4

设 $k(s,t),\varphi(t)$ 是 $a\le t\le b,\ a\le s\le b$ 上的连续函数，记

$$M=\max\left\{|k(t,s)|\,\Big|\,t\in[a,b],s\in[a,b]\right\}.$$

则如下积分方程有唯一解：

$$x(t)=\varphi(t)+\mu\int_a^t k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

证

(2) 对任意 $x,y\in C[a,b]$，有

$$|(T^n x)(t)-(T^n y)(t)|\le|\mu|^n M^n\frac{(t-a)^n}{n!}\cdot d(x,y),$$

应用VI：Volterra积分方程

例 4

设 $k(s,t), \varphi(t)$ 是 $a \le t \le b,\ a \le s \le b$ 上的连续函数，记

$$M = \max\left\{ |k(t,s)| \,\Big|\, t \in [a,b], s \in [a,b] \right\}.$$

则如下积分方程有唯一解：

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^t k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

证

(2) 对任意 $x, y \in C[a,b]$，有

$$|(T^n x)(t) - (T^n y)(t)| \le |\mu|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \cdot d(x,y),$$

所以 $d(T^n x, T^n y) \le |\mu|^n M^n \dfrac{(b-a)^n}{n!} \cdot d(x,y).$

应用VI：Volterra积分方程

例 4

设 $k(s,t), \varphi(t)$ 是 $a \le t \le b,\ a \le s \le b$ 上的连续函数，记

$$M = \max\left\{|k(t,s)|\,\middle|\,t \in [a,b], s \in [a,b]\right\}.$$

则如下积分方程有唯一解：

$$x(t) = \varphi(t) + \mu \int_a^t k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

证

(3) 由于

$$|\mu|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0\ (n \to \infty),$$

故存在 n_0，使得

$$0 \le |\mu|^{n_0} M^{n_0} \frac{(b-a)^{n_0}}{(n_0)!} < 1.$$

即 T^{n_0} 是压缩映射，所以积分方程有唯一解.

小结

- 隐函数定理
- Picard定理
- Fredholm积分方程的解
- Volterra积分方程的解