泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

1.1 距离空间的定义

为什么引入距离?

微积分中引入的最重要的概念是**极限**.

极限的概念立足于**距离**.

极限的定义

$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_N, \cdots\}$

实数列

设 $\{x_n\}$ 是实数列，x 是实数，若任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$|x_n - x| < \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 的极限是 x.

平面点列

设 $\{x_n\} = \{(\xi_n, \eta_n)\}$，$x = (\xi, \eta)$. 若任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 的极限是 x. $d(x_n, x)$

为什么引入距离?

数学分析中引入的最重要的概念是**极限**.

极限的概念立足于**距离**.

为了在一般的空间中建立极限理论，需要引入“距离”的概念.

在一个非空集合上，如何定义距离?

实数中的距离

- 记 $\mathbb{R}$ 为实数集. 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 它们的距离为 $d(x,y)=|x-y|$.

  容易验证该距离满足:

  1. $d(x,y) \geq 0,\ d(x,y)=0 \iff x=y$; (非负性)
  2. $d(x,y)=d(y,x)$; (对称性)
  3. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$. (三角不等式)

距离的本质特征

注 实数中的距离本质上是一个二元函数 $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto d(x,y)$.

距离空间的定义

定义

设 X 是一个非空集合. 如果存在一个映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$, 满足:

① $d(x,y)\geq 0,\ d(x,y)=0 \iff x=y$; (非负性)

② $d(x,y)=d(y,x)$; (对称性)

③ $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$. (三角不等式)

则称 d 为 X 的一个**距离**，定义了距离 d 的集合 X 称为**距离空间**，记为 (X,d).
有时可简记为 X.

定义了距离的非空集合

N维欧氏空间

$d: R^N \times R^N \to R$

例 1

在N维实向量空间$\mathbb{R}^N$中，定义 $d(x,y)=\left\{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)$. 则$(\mathbb{R}^N,d)$是距离空间.

如何证明映射d是非空集合R^N的一个距离？

满足 非负，对称，三角不等式

N维欧氏空间

例 1

在N维实向量空间 $\mathbb{R}^N$ 中，定义 $d(x,y)=\left\{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)$. 则 $(\mathbb{R}^N,d)$ 是距离空间.

证

只需证明 $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$， 即

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\zeta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{k=1}^{N}(\zeta_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)$， $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$.

证明
思路

任给$2N$个实数 $a_1,\cdots,a_N,b_1,\cdots,b_N$，有

$$\sum_{k=1}^{N}a_kb_k\leq\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

(**Cauchy 不等式**)

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{k=1}^{N}b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

(**Minkowski 不等式**)

$$a_k=\xi_k-\zeta_k \qquad b_k=\zeta_k-\eta_k$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\zeta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{k=1}^{N}(\zeta_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$.

N维欧氏空间

例 1

在N维实向量空间 $\mathbb{R}^N$ 中，定义 $d(x,y)=\left\{\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)$. 则 $(\mathbb{R}^N,d)$ 是距离空间.

注 在本门课程中，除非特别说明，$\mathbb{R}^N$中的距离都是上述欧氏距离.

距离不唯一

R^N中的距离不唯一

例 2 在N维实向量空间 $\mathbb{R}^N$ 中，可分别定义

$$d_1(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + \cdots + |\xi_N - \eta_N|,$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|\xi_1 - \eta_1|, \cdots, |\xi_N - \eta_N|\},$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$，$y = (\eta_1, \cdots, \eta_N)$．则$(\mathbb{R}^N, d_1)$ 与 $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$ 都是距离空间.

注 利用实数的三角不等式 $|a-b| \le |a-c| + |c-b|$.

思 考 题

① 任给一个非空集合，是否都可以定义一个距离，使之成为距离空间？

② 任给一个非空集合，其上定义的距离是否唯一？

③ 若不唯一，请问一个非空集合上可以定义多少个不同距离？

空
间

非空集合上赋予一个距离则称之为距离空间.

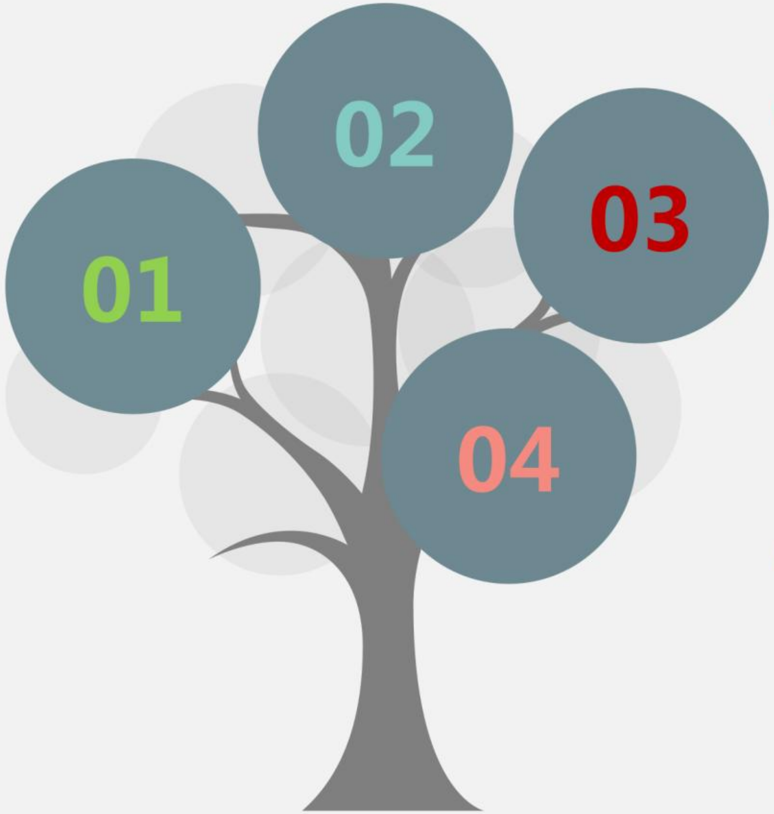
泛函分析中的**空间**指的是一个赋予了某种结构（比如代数结构、拓扑结构）的非空集合.

加法，数乘　　距离

小结

01 为何引入距离？

03 距离空间的定义



02 如何定义距离？

04 N维欧氏空间