泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

3.2　完备距离空间的性质

距离子空间

定义

设(X,d)是距离空间，E是X的一个非空子集，则d限制在$E\times E$上满足非负性、对称性、三角不等式，即(E,d)是距离空间，称为(X,d)的子空间.

注　(E,ρ)是(X,d)的子空间$\Longleftrightarrow E\subset X,\ d|_{E\times E}=\rho.$

子空间的完备性

定理 设(X,d)是完备的，$E\subset X$. 则(E,d)完备的充要条件是E是X中的闭集.

证 (充分性) 设$\{x_n\}$是(E,d)的任一柯西列，由X完备知，存在$x\in X$，使得

$$x_n\to x\ (n\to\infty).$$

于是$x\in\overline{E}$. 因为E是闭集，则$x\in E$. 即$\{x_n\}$是E中收敛列.

所以(E,d)是完备的.

子空间的完备性

定理 设(X,d)是完备的, $E\subset X$. 则(E,d) 完备的充要条件是E是X中的闭集.

证 (必要性) 任取$x\in\overline{E}$. 则存在$\{x_n\}\subset E$, 使得

$$x_n\to x \quad (n\to\infty).$$

因为收敛列必为柯西列，且(E,d)完备，故存在$y\in E$, 使得

$$x_n\to y \quad (n\to\infty).$$

由极限的唯一性可知，$x=y\in E$. 所以 E 是闭集.

子空间的完备性

推论 设(X,d)是完备的，$E\subset X$. 则(E,d) 不完备的充要条件是E 在X 中非闭.

运用上述推论，你可以举出哪些不完备的距离空间？

柯西列与收敛列

定理 设$\{x_n\}$是(X,d)的柯西列，若存在子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$x_0\in X$，则

$$x_n \to x_0\ (n\to\infty).$$

证 由柯西列的定义, 对任给$\varepsilon>0$, 存在N, 当$m,n>N$时

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

令$K=N$，当$k>K$时，$n_k\geq k>K=N$，于是

$$d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon\ \ (n>N).$$

对每一个固定$n>N$，令$k\to\infty$，利用距离映射的连续性, 有

$$d(x_n,x_0)\leq\varepsilon.$$

闭球套定理

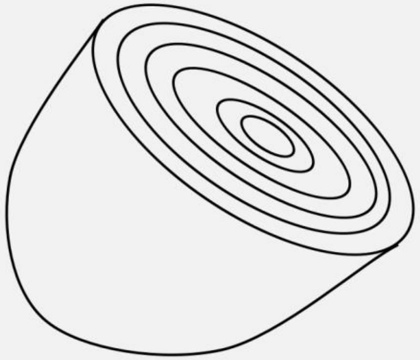
定理

设(X,d)是完备的，$\overline{B}_n=\overline{B}(x_n,r_n)$ $(n=1,2,\cdots)$是X中的一列闭球套：

$$\overline{B}_1\supset\overline{B}_2\supset\cdots\supset\overline{B}_n\supset\cdots,$$

且 $r_n\to 0$ $(n\to\infty)$. 则存在唯一的 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_n$.

几何直观



如果有一列闭球，像洋葱一样，闭球内还有闭球，并且半径越来越小趋于零，则一定有一点在所有的闭球里面.

闭球套定理的证明

证 (存在性) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ 知，任给 $\varepsilon > 0$, 存在N, 当 $n > N$时，

$$r_n < \varepsilon.$$

当 $m > n > N$ 时，由 $\overline{B}_m \subset \overline{B}_n$ 可知 $d(x_m, x_n) < r_n < \varepsilon.$

即$\{x_n\}$是柯西列. 由于X完备，则存在 $x \in X$, 使得

$$x_n \to x \ (n \to \infty).$$

由于$d(x_m, x_n) < r_n$, 令$m \to \infty$, 有 $d(x, x_n) \le r_n$. 即

$$x \in \overline{B}_n \ (n > N).$$

由于是闭球套，所以 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n.$

闭球套定理的证明

证 (唯一性) 假设 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$. 则

$$d(y, x_n) < r_n \ (n = 1, 2, \cdots)$$

于是

$$x_n \to y \ (n \to \infty).$$

由极限的唯一性知 $x = y$. 即 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$ 中只含有唯一个点 x.

闭球套定理

定理 设(X,d)是完备的，$\overline{B}_n=\overline{B}(x_n,r_n)\ (n=1,2,\cdots)$是$X$中的一列闭球套：

$$\overline{B}_1\supset\overline{B}_2\supset\cdots\supset\overline{B}_n\supset\cdots,$$

且 $r_n\to 0\ (n\to\infty)$. 则存在唯一的 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{B}_n$.

关于完备性的对比

实数空间

柯西收敛准则 $\Longleftrightarrow$ 闭区间套定理

（$\mathbb{R}$ 完备）

距离空间

柯西列必收敛 $\Longrightarrow$ 闭球套定理

$\overset{?}{\Longleftarrow}$

（X 完备）

思考题

设$\bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 是距离空间 X 中的任意一列闭球套：

$$\bar{B}_1 \supset \bar{B}_2 \supset \cdots \supset \bar{B}_n \supset \cdots$$

当 $r_n \to 0$ $(n \to \infty)$ 时，必存在唯一的$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$.

试证 X 是完备的.

小结

- 子空间完备性的判定
- 柯西列与收敛列
- 闭球套定理