泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

3.3　完备化

距离子空间

定义

设(X,d)是距离空间，E是X的一个非空子集，则 $\rho=d|_{E\times E}$ 满足非负性、对称性、三角不等式，即(E,ρ)是距离空间，称为(X,d)的子空间.

注　(E,ρ)是(X,d)的子空间$\Longleftrightarrow E\subset X,\ d|_{E\times E}=\rho.$

等距映射的定义

定义

设 T 是从 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射. 如果对任意的 $x,y\in X$, 有

$$d_1(Tx,Ty)=d(x,y)$$

则称 T 为**等距映射**.

注　等距映射一定是连续映射，并且是单射.

等距映射的例

例 1

设 $X=\mathbb{R}$. $X_1=\{xi \mid x\in\mathbb{R}\}$. i 其中 是虚数单位. 定T 映射

$$Tx=xi.$$

则 T 是等距映射，且为双射.

证

$$d_1(Tx,Ty)=|xi-yi|=|x-y|=d(x,y).$$

等距映射的例

例 2

设 $X=\mathbb{Q}.\ X_1=\{xi \mid x\in\mathbb{R}\}.$ $\quad i$ 其中 是虚数单位. 定T 映射

$$Tx=xi.$$

则 T 是等距映射.

等距同构的定义

定义

设 T 是从 (X,d) 到 (X_1,d_1) 的映射. 如果 T 是等距映射且为双射，则称 T 为**等距同构映射**. 此时称 (X,d) 与 (X_1,d_1) **等距同构**.

注 1 将两个等距同构的距离空间视为同一个距离空间.

注 2 若距离空间 X 与距离空间 $\widetilde{X}$ 的子空间等距同构，则称 X 为 $\widetilde{X}$ 的子空间.

完备化空间的定义

定义

设 E 是距离空间，若存在完备的距离空间 $\widetilde{E}$ 满足

① E 是 $\widetilde{E}$ 的子空间,

② 对任何以 E 为子空间的完备距离空间 X，有 $\widetilde{E}$ 是 X 的子空间,

则称 $\widetilde{E}$ 为 E 的**完备化空间**.

注　E 的完备化空间是包含 E 的最小的完备距离空间.

完备化空间的定义

定义

设 E 是距离空间，若存在完备的距离空间 $\widetilde{E}$ 满足

1. E 是 $\widetilde{E}$ 的子空间,
2. 对任何以 E 为子空间的完备距离空间 X，有 $\widetilde{E}$ 是 X 的子空间,

则称 $\widetilde{E}$ 为 E 的**完备化空间**.

注　E 的完备化空间是唯一的（在等距同构意义下）.

子空间的完备性

定理 设(X,d)是完备的, $E\subset X$. 则(E,d)完备的充要条件是E是X中的闭集.

子空间的完备化

设 (X,d) 完备，$E\subset X$，E 不是 X 中的闭集.

$\overline{E}$ 是 X 中的闭集，且是包含 E 的最小闭集.

则 (E,d) 不完备. $(\overline{E},d)$ 完备，且是包含 E 的最小完备子空间.

已知 (E,d) 不完备，如何构造其完备化空间 $(\tilde{E},\tilde{d})$?

完备化空间的判定

命题 设 $(\widetilde{E},\widetilde{d})$ 是以 (E,d) 为子空间的完备的距离空间，且 E 在 $\widetilde{E}$ 中稠密，则 $\widetilde{E}$ 是 E 的完备化空间.

完备化定理

定理 任一距离空间(E,d)都存在完备化空间$(\widetilde{E},\widetilde{d})$.

证明思路

1. 构造 $(\widetilde{E},\widetilde{d})$.
2. 证明(E,d)与$(\widetilde{E}_0,\widetilde{d})$等距同构.
3. 证明$(\widetilde{E}_0,\widetilde{d})$在 $(\widetilde{E},\widetilde{d})$ 中稠密.
4. 证明 $(\widetilde{E},\widetilde{d})$ 完备.

小结

- 等距映射与等距同构
- 完备化空间的定义
- 完备化空间的判定
- 完备化定理