泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

2.3　稠密集

实数空间

回顾

全体有理数 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 即

对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 存在 $c \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < c < b$.

任意两个实数之间必有有理数

$\iff$ 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, 存在 $c \in \mathbb{Q}$, 使得 $a - \varepsilon < c < a + \varepsilon$.

$\iff$ 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 则 $a \in \overline{\mathbb{Q}}$.

$\forall \varepsilon$, $B(a, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$\iff$ $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

集合语言

稠密性的定义

定义

设 A 与 B 是距离空间 X 的子集. 若 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中**稠密**.

特别地，若 $\overline{B} \supset X$, 则称 B 为 X 的**稠密子集**.

注　记 $\mathbb{Q}^c$ 为全体无理数，则 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}^c$ 中稠密. 但 $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \phi$

$\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Q}^c$

接触点

回顾

$x \in \overline{B}$, 即 x 是 B 的接触点

闭包

$\iff$ 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.

$\iff$ 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\underline{y \in B}$, 使得 $\underline{d(x,y) < \varepsilon}$.

$y \in B(x, \varepsilon)$

$\iff$ 存在 $\{x_n\} \subset B$, 使得 $x_n \to x \ (n \to \infty)$.

稠密性的等价刻画

定理

以下三个命题等价：

① B 在 A 中稠密. $\bar{B} \supset A$

② 对任意的 $x \in A$, $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in B$, 使得 $d(x, y) < \varepsilon$.

A中任意点的 ε 邻域中存在点 $y \in B$

③ 对任意的 $x \in A$, 存在 $\{x_n\} \subset B$, 使得 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

稠密子集的例

例 1 记 $\mathcal{P}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的实系数多项式全体，则 $\mathcal{P}[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密.

连续函数空间

回顾

Weierstrass 逼近定理

设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $p(t)$，使得对任意的 $t \in [a,b]$，

$$|x(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

x(t) 的 ε 邻域中存在 p(t)

稠密子集的例

例 2 记 $\mathcal{Q}[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的有理系数多项式全体，则 $\mathcal{Q}[a,b]$ 在 $\mathcal{P}[a,b]$ 中稠密.

证 任取 $p(t)\in\mathcal{P}[a,b]$，不妨设 $p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\ (a_i\in\mathbb{R})$.

由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $r_i\in\mathbb{Q}$，使得

$$|a_i-r_i|<\varepsilon.$$

令 $q(t)=r_0+r_1t+\cdots+r_nt^n$. 记 $M=\max\{|a|,|b|\}$. 则

$$d(p,q)=\max_{t\in[a,b]}|p(t)-q(t)|<(1+M+\cdots+M^n)\varepsilon.$$

稠密子集的例

例 2 记 $\mathcal{Q}[a,b]$ 为$[a,b]$上的有理系数多项式全体，则$\mathcal{Q}[a,b]$ 在$\mathcal{P}[a,b]$ 中稠密.

证 任取 $p(t)\in\mathcal{P}[a,b]$，不妨设 $p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\ (a_i\in\mathbb{R})$.

由于$\mathbb{Q}$ 在$\mathbb{R}$ 中稠密，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $r_i\in\mathbb{Q}$，使得

$$|a_i-r_i|<\frac{\varepsilon}{1+M+\cdots+M^n}.$$

令 $q(t)=r_0+r_1t+\cdots+r_nt^n$. 记$M=\max\{|a|,|b|\}$. 则

$$d(p,q)=\max_{t\in[a,b]}|p(t)-q(t)|<\varepsilon.$$

小结

- 稠密性的定义
- 稠密性的等价刻画
- 稠密子集的例