泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

1.3　距离空间中的收敛

距离空间的定义

定义

设 X 是一个非空集合. 如果存在一个映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$, 满足:

1. $d(x,y)\geq 0,\ d(x,y)=0 \iff x=y$; (非负性)
2. $d(x,y)=d(y,x)$; (对称性)
3. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$. (三角不等式)

则称 d 为 X 的一个**距离**, 定义了距离 d 的集合 X 称为**距离空间**, 记为 (X,d).

有时可简记为 X.

约定

点

由于分析学几何化的影响，习惯上称距离空间中的元素为**点**，称距离空间中的一列元素为**点列**.

点列收敛的定义

定义

设$\{x_n\}$是距离空间 (X,d) 中的一个点列，$x_0 \in X$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0,$$

则称$\{x_n\}$**收敛**于 x_0，也称$\{x_n\}$的**极限**是 x_0. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{或} \quad x_n \to x_0 \ (n \to \infty).$$

注　对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$时　$d(x_n, x_0) < \varepsilon$.

点列收敛的定义

定义

设$\{x_n\}$是距离空间 (X,d) 中的一个点列，$x_0 \in X$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0,$$

则称$\{x_n\}$**收敛**于 x_0，也称$\{x_n\}$的**极限**是 x_0. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 或 } x_n \to x_0 \ (n\to\infty).$$

注　特别注意 $x_0 \in X$. 例如$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 不是$(\mathbb{Q}, d)$的收敛列.

极限的唯一性

定理 设$\{x_n\}$在(X,d)中收敛，则$\{x_n\}$的极限是唯一的.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. 则对任给$\varepsilon>0$, 存在$N$, 当$n>N$时,

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2},\quad d(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因而 $$0\le d(x,y)\le d(x,x_{N+1})+d(x_{N+1},y)<\varepsilon,$$

所以 $d(x,y)=0$, 即 $x=y$.

距离映射的连续性

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)$$

定理 设 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, 则 $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$ $(n \to \infty)$.

证 只需证明对任意的 $x, y, x_0, y_0 \in X$,

$$0 \leq |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0).$$

x_n y_n

收敛的具体含义

例 1 在 N 维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中，点列的收敛为按坐标收敛.

设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_N^{(n)})\ (n=1,2,\cdots), x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$,

$\{x_n\}$ 收敛于 x，即

$$d(x_n,x)=\sqrt{\left(\xi_1^{(n)}-\xi_1\right)^2+\cdots+\left(\xi_N^{(n)}-\xi_N\right)^2}\to 0$$

等价于

$$\xi_i^{(n)}\to\xi_i,\ i=1,2,\cdots,N.$$

证明思路

$$0 \le |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \le d(x_n, x), \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

$$0 \le d(x_n, x) \le |\xi_1^{(n)} - \xi_1| + \cdots + |\xi_N^{(n)} - \xi_N|.$$

$\{x_n\}$ 收敛于 x，即

$$d(x_n, x) = \sqrt{\left(\xi_1^{(n)} - \xi_1\right)^2 + \cdots + \left(\xi_N^{(n)} - \xi_N\right)^2} \to 0$$

等价于

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i,\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

收敛的具体含义

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$ 中点列的收敛为函数列的一致收敛.

设 $x_n = x_n(t)\ (n=1,2,\cdots), x = x(t) \in C[a,b]$.

$\{x_n\}$ 收敛于 x，即

$$d(x_n, x) = \max_{a\le t\le b} |x_n(t) - x(t)| \to 0,$$

等价于函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $x(t)$.

证明思路

如果 $d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty)$,

则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，对任意的 $t \in [a, b]$,

$$|x_n(t) - x(t)| \leq d(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

$\{x_n\}$ 收敛于 x，即

$$d(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \to 0,$$

等价于函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 $x(t)$.

证明思路

如果 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $x(t)$，

即对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对任意的 $t\in[a,b]$，

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

则当 $n>N$时，

$$d(x_n,x)=\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon.$$

$\{x_n\}$ 收敛于 x，即

$$d(x_n,x)=\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0,$$

等价于函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $x(t)$.

收敛的具体含义

$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$

例 3 在离散的距离空间 D 中，$\{x_n\}$收敛于x_0等价于某一项以后$\{x_n\}$为常驻点列$\{x_0\}$.

证 如果 $d(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty)$，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，存在 N，当$n>N$时，

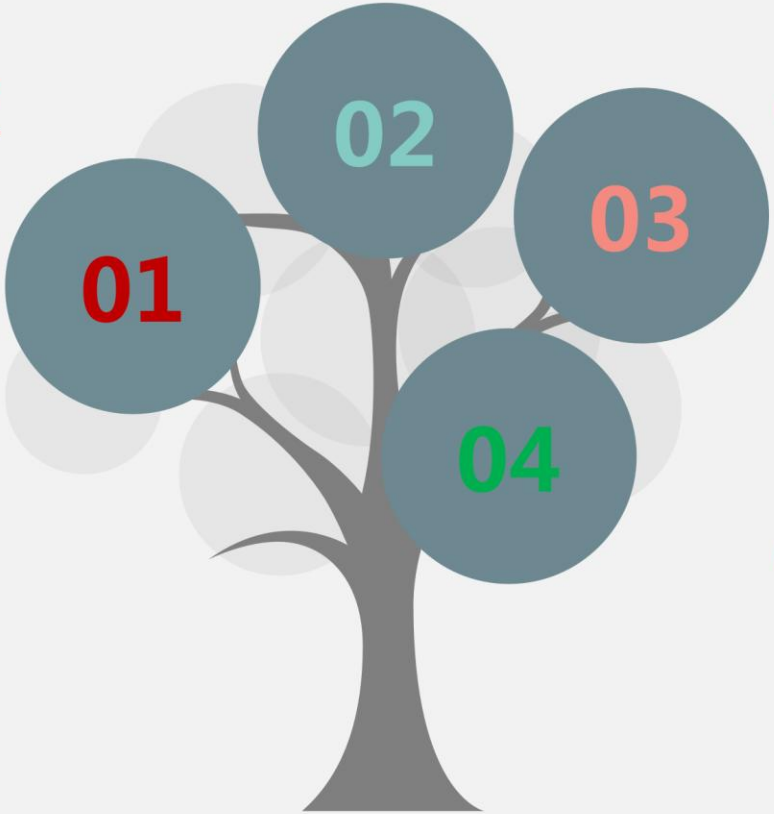
$$d(x_n,x_0)<\frac{1}{2}，\ 即\ \ x_n=x_0.$$

反之亦然.

小 结

01 点列收敛的定义

03 距离映射的连续性



02 极限的唯一性

04 收敛的具体含义