# 泛函分析

# Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

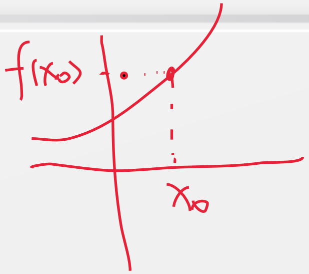
# 2.5　连续映射

# 连续函数

**回顾**

函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点连续

$f:\ R \to R$




$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

R中的距离

$\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$， 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$\Longleftrightarrow$ 对任意的数列 $\{x_n\}$， 当 $\lim\limits_{n\to} x_n=x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

## 连续性的定义

定义

$T: X \to X_1$

设$(X,d)$与$(X_1,d_1)$是距离空间，$T$为$X$到$X_1$的映射，$x_0\in X$. 如果任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$d(x,x_0)<\delta$时，有

$$d_1(T(x),T(x_0))<\varepsilon,$$

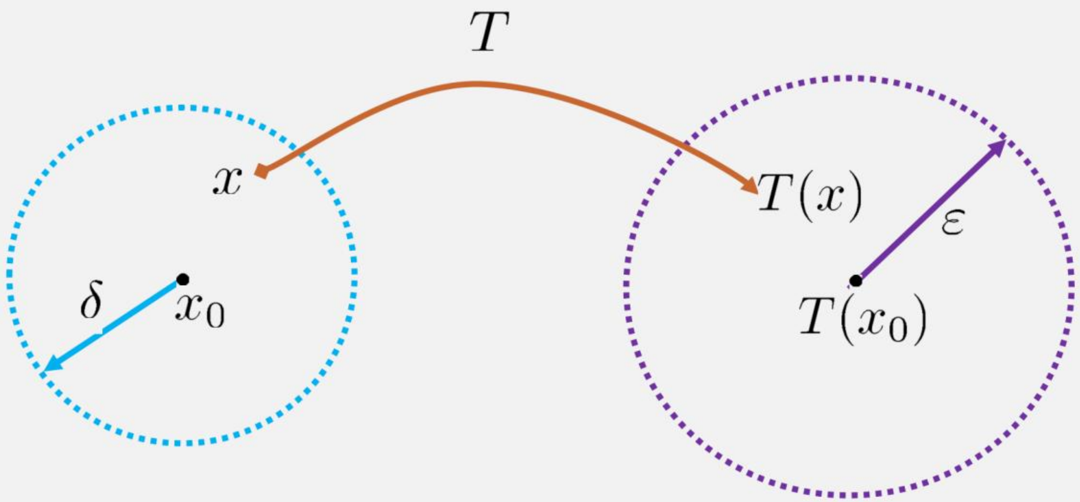
则称$T$在$x_0$**连续**. 若$T$在$X$中的每一点都连续，则称$T$为$X$上的**连续映射**.

# 连续性的理解

$T$在$x_0$连续

任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$， 当 $d(x, x_0) < \delta$ 时，有 $d_1(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$.

$$\boxed{T\left(B(x_0, \delta)\right) \subset B_1\left(T(x_0), \varepsilon\right)}$$



## 连续性的等价刻画

**定理** $T$ 在$x_0$连续的充要条件是对任意的点列$\{x_n\}$， 当$x_n \to x_0$时，

$$T(x_n) \to T(x_0) \ (n \to \infty).$$

**证** (必要性) 设$T$在$x_0$连续，则任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$d(x, x_0) < \delta$时，

$$d_1(T(x), T(x_0)) < \varepsilon.$$

由 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$知存在 $N$，当 $n > N$时，$d(x_n, x_0) < \delta$.

因而当 $n > N$时，

$$d_1(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon.$$

## 连续性的等价刻画

**定理** $T$ 在$x_0$连续的充要条件是对任意的点列$\{x_n\}$， 当$x_n \to x_0$时，

$$T(x_n) \to T(x_0) \ \ (n \to \infty).$$

**证** (充分性) 假设$T$在$x_0$不连续，则存在$\varepsilon_0 > 0$，对任意$\delta > 0$，存在$x_\delta$，虽有$d(x_\delta, x_0) < \delta$，但是$d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$.

对 $\delta_n = \dfrac{1}{n}\ (n = 1, 2, \cdots)$，存在$\{x_n\}$，虽有$d(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$，但是

$$d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

即点列$\{x_n\}$收敛于$x_0$，但是$\{T(x_n)\}$不收敛于$T(x_0)$，矛盾.

## 连续性的等价刻画

**定理** $T$ 在 $x_0$ 连续的充要条件是对任意的点列 $\{x_n\}$，当 $x_n \to x_0$ 时，

$$T(x_n) \to T(x_0) \ \ (n \to \infty).$$

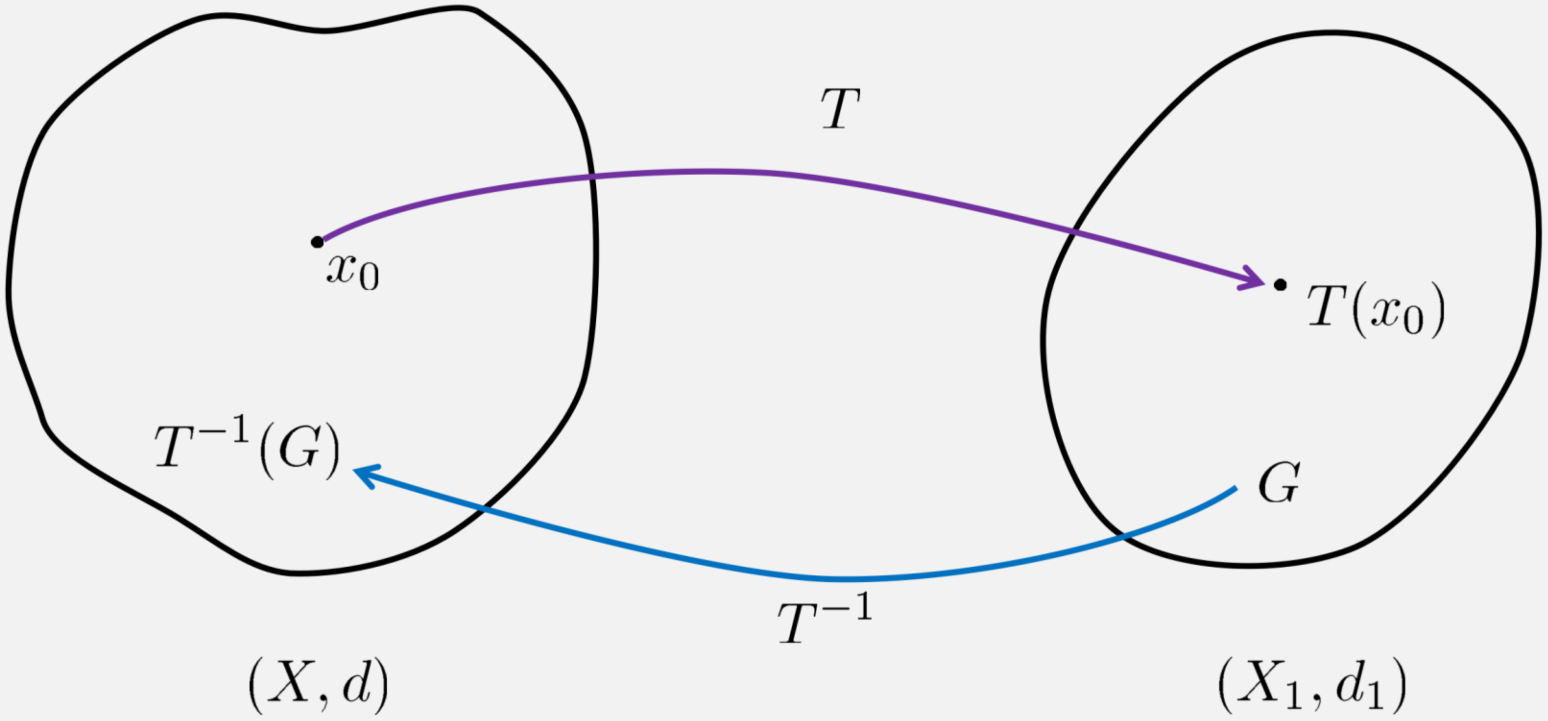
$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

**注** 定理表明，若 $T$ 连续，则极限运算可以和 $T$ 交换顺序.

# 连续映射的等价刻画

**定理** $T$ 在 $X$ 上连续的充分必要条件是 $X_1$ 中任何开集 $G$ 的原像 $T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中的开集.

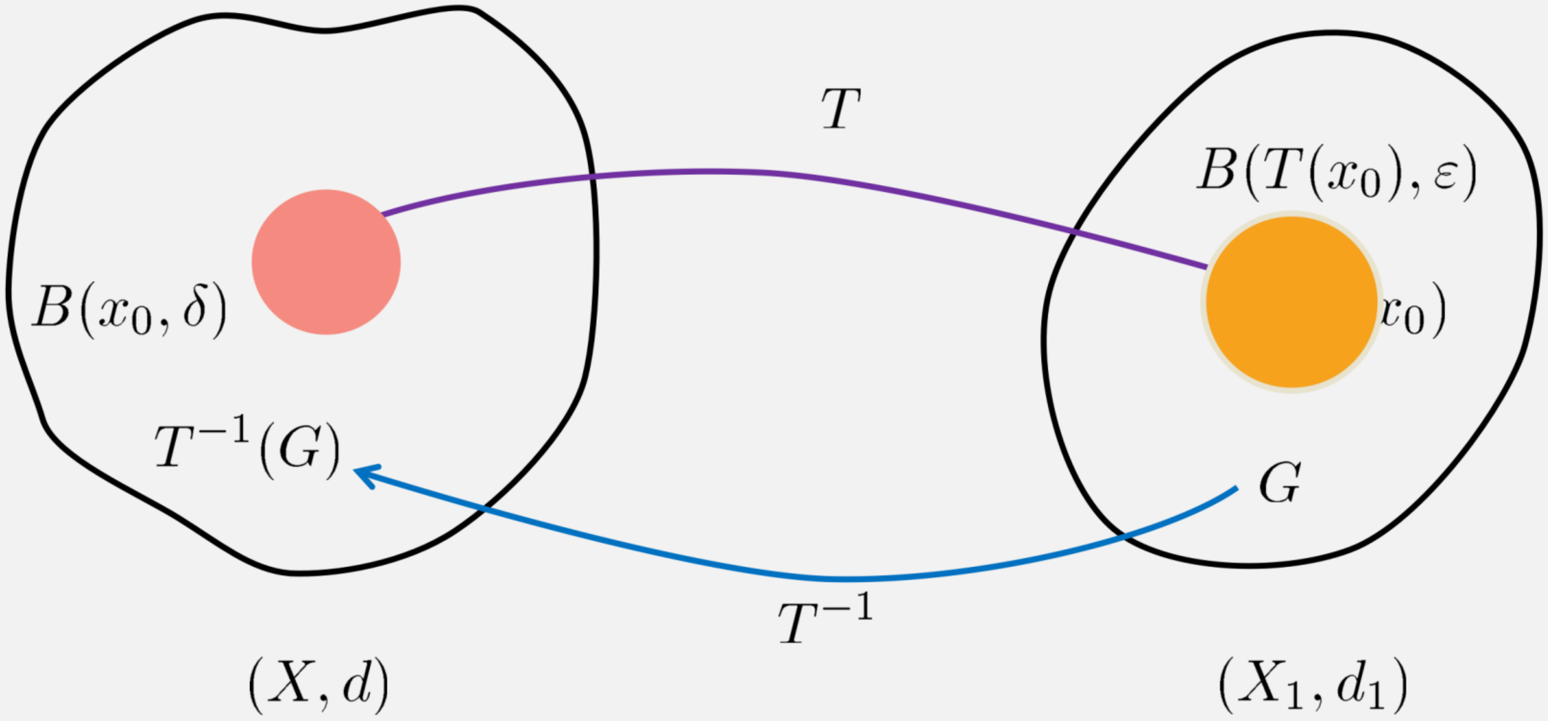
**必要性**



## 连续映射的等价刻画

**定理** $T$ 在 $X$ 上连续的充分必要条件是 $X_1$ 中任何开集 $G$ 的原像 $T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中的开集.

**必要性**

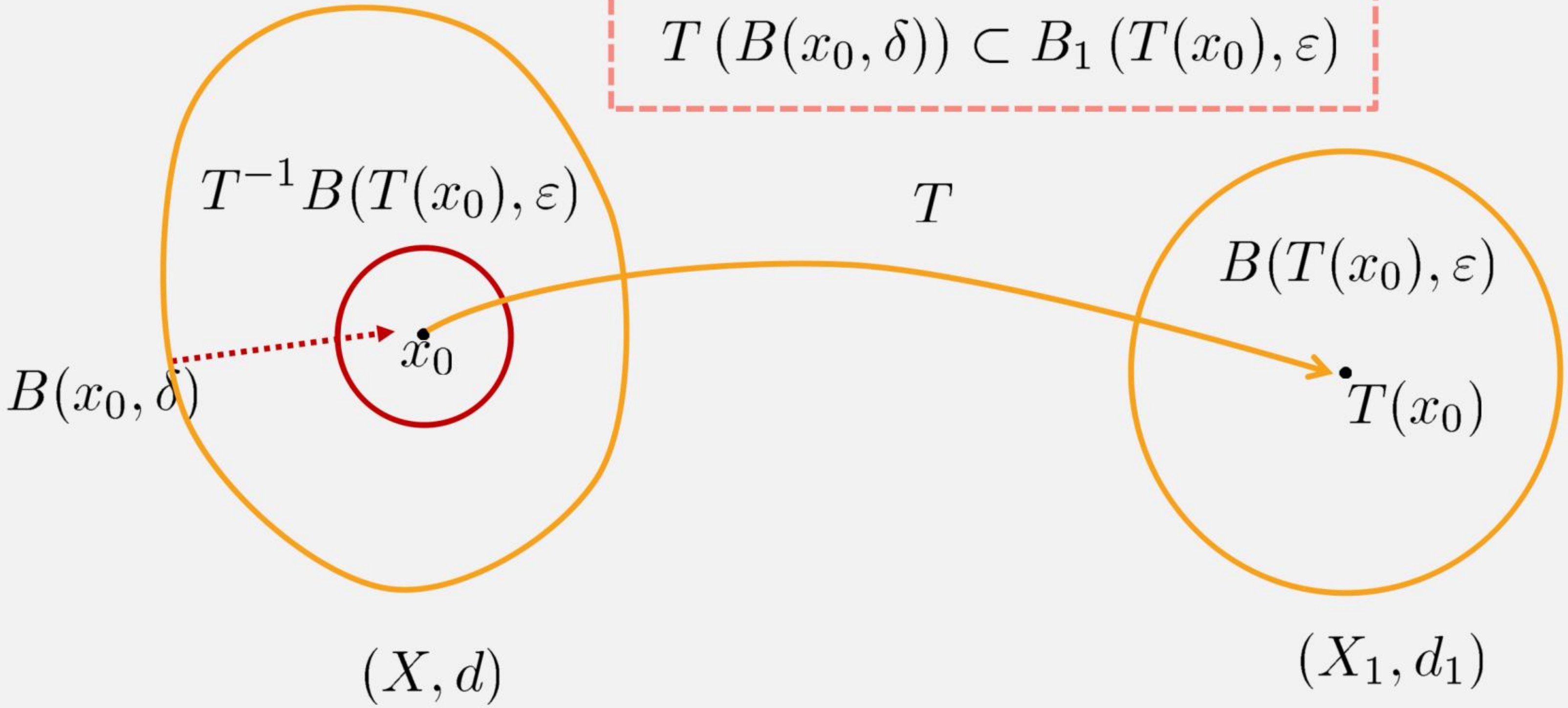


# 连续映射的等价刻画

**定理** $T$ 在 $X$ 上连续的充分必要条件是 $X_1$ 中任何开集 $G$ 的原像 $T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中的开集.

**充分性**

$$\boxed{T\left(B(x_0,\delta)\right) \subset B_1\left(T(x_0),\varepsilon\right)}$$



## 连续映射的等价刻画

**定理** $T$ 在 $X$ 上连续的充分必要条件是 $X_1$ 中任何开集 $G$ 的原像 $T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中的开集.

**证** (必要性) 任取 $x_0 \in T^{-1}(G)$. 则 $T(x_0) \in G$, 由 $G$ 是开集知，存在 $\varepsilon > 0$,

$$B(T(x_0), \varepsilon) \subset G.$$

因为 $T$ 在 $x_0$ 连续，故存在 $\delta > 0$, 使得

$$T(B(x_0, \delta)) \subset B(T(x_0), \varepsilon) \subset G.$$

即 $B(x_0, \delta) \subset T^{-1}(G)$. 所以 $T^{-1}(G)$ 是开集.

## 连续映射的等价刻画

**定理** $T$ 在 $X$ 上连续的充分必要条件是 $X_1$ 中任何开集 $G$ 的原像 $T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中的开集.

**证** (充分性) 任取 $x_0 \in X$. 对任意的 $\varepsilon > 0$，由于 $B(T(x_0), \varepsilon)$ 是开集，故它的原像 $T^{-1}(B(T(x_0), \varepsilon))$ 是 $X$ 中的开集.

注意到 $x_0 \in T^{-1}(B(T(x_0), \varepsilon))$，故存在 $\delta > 0$，使得

$$B(x_0, \delta) \subset T^{-1}(B(T(x_0), \varepsilon)),$$

即

$$T(B(x_0, \delta)) \subset B(T(x_0), \varepsilon).$$

所以 $T$ 在 $x_0$ 连续.

# 小结

- 连续性的定义
- 连续性的等价刻画
- 连续映射的等价刻画