# 泛函分析

# Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

# 3.4　压缩映射原理

## 压缩映射的定义

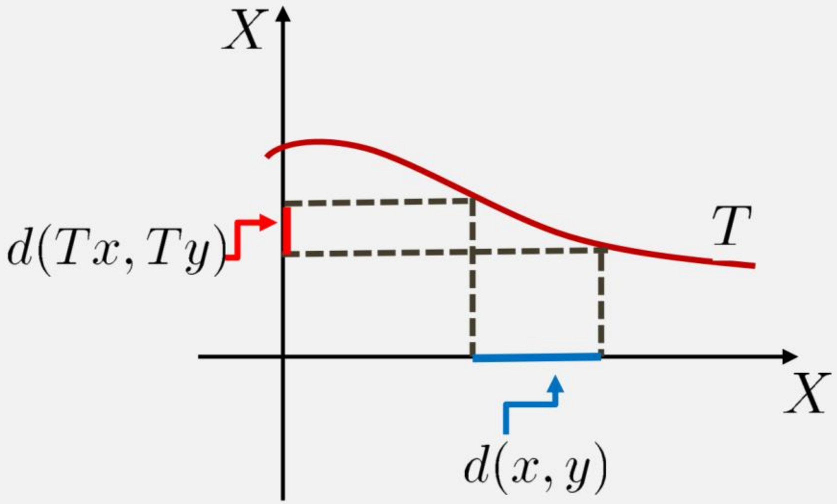
定义

设$(X,d)$是距离空间，$T:X\to X$，若存在$\theta\in(0,1)$，使得

$$d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y),$$

对任意 $x,y\in X$ 都成立．则称$T$为$X$上的**压缩映射**.

几何直观




如图$Tx$与$Ty$的距离要比$x$与$y$的距离一致地小.

# 压缩映射的例

**例 1** 设 $f$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可导函数，且存在 $\theta \in [0,1)$，使得 $|f'(x)| \leq \theta$，则 $f$ 为 $\mathbb{R}$ 上的压缩映射.

**证**

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \theta d(x, y).$$

## 压缩映射的性质

**命题** 距离空间 $X$ 上的压缩映射 $T$ 必为连续映射.

**证** 任取 $x_0 \in X$, 当 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$ 时,

则

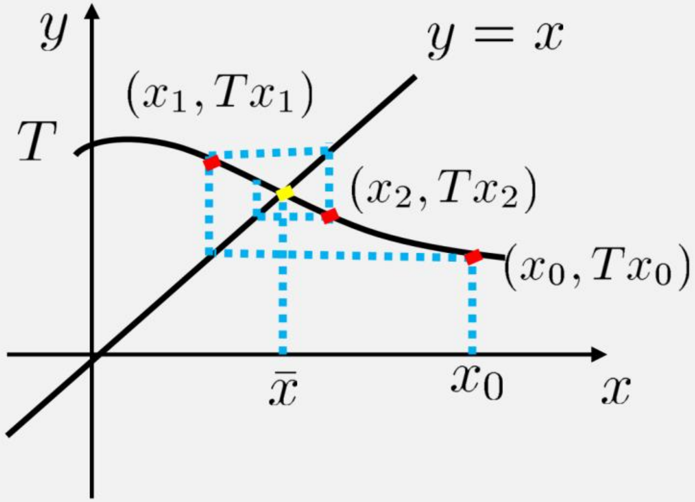
$$d(Tx_n, Tx_0) \leq \theta d(x_n, x_0) \to 0\ (n \to \infty),$$

即 $Tx_n \to Tx_0\ (n \to \infty)$. 所以, $T$ 在 $x_0$ 点连续.

# 压缩映射原理

**定理** 设$X$是完备的距离空间，$T:X\to X$是压缩映射，则$T$有唯一的不动点，即存在唯一的$\overline{x}\in X$，使得$T\overline{x}=\overline{x}$.

**迭代法**




取 $x_0\in X$，令 $x_1=Tx_0$，$x_2=Tx_1,\cdots$.

如图，容易看到$(x_n, Tx_n)$越来越接近$(\bar{x}, T\bar{x})$，因此 $x_n$ 就越来越接近 $T$ 的不动点.

# 压缩映射原理

**定理** 设$X$是完备的距离空间，$T: X \to X$ 是压缩映射，则 $T$ 有唯一的不动点，即存在唯一的 $\overline{x} \in X$，使得 $T\overline{x} = \overline{x}$.

**证** (存在性) 任取 $x_0 \in X$，令 $x_1 = Tx_0$，$x_2 = Tx_1, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots$

则有
$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \leq \theta d(x_0, x_1),$$
$$d(x_2, x_3) = d(Tx_1, Tx_2) \leq \theta d(x_1, x_2) \leq \theta^2 d(x_0, x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地，
$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \theta^n d(x_0, x_1) \ \ (n = 1, 2, \cdots).$$

证明细节

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\le (\theta^n + \theta^{n+1} + \cdots + \theta^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\
&= \frac{\theta^n (1-\theta^p)}{1-\theta} d(x_0, x_1) \ \le \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, x_1).
\end{aligned}
$$

证 (存在性) 对任意正整数 $n$ 与 $p$，有

$$
d(x_n, x_{n+p}) \le \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, x_1).
$$

## 压缩映射原理

**定理** 设$X$是完备的距离空间，$T:X\to X$ 是压缩映射，则 $T$ 有唯一的不动点，即存在唯一的 $\overline{x}\in X$，使得 $T\overline{x}=\overline{x}$.

**证** (存在性) 对任意正整数 $n$ 与 $p$，有

$$d(x_n,x_{n+p})\le\frac{\theta^n}{1-\theta}d(x_0,x_1).$$

由 $0<\theta<1$ 知 $\{x_n\}$ 是柯西列. 因为$X$完备，故存在 $\overline{x}\in X$，使得

$$x_n\to\overline{x}\quad(n\to\infty).$$

在 $x_{n+1}=Tx_n$ 两边令 $n\to\infty$ 由 $T$ 的连续性即得 $T\overline{x}=\overline{x}$.

# 压缩映射原理

**定理** 设$X$是完备的距离空间，$T:X\to X$是压缩映射，则$T$有唯一的不动点，即存在唯一的$\overline{x}\in X$，使得$T\overline{x}=\overline{x}$.

**证** (唯一性) 假设$\overline{y}\in X$ 满足$\overline{y}=T\overline{y}$，则

$$d(\overline{x},\overline{y})=d(T\overline{x},T\overline{y})\le\theta d(\overline{x},\overline{y}),$$

由于 $0<\theta<1$，必有

$$d(\overline{x},\overline{y})=0,$$

即 $\overline{x}=\overline{y}$.

# 思考题

① 若将压缩映射定理条件中的完备性去掉，结论还成立吗？

② 若将压缩映射的条件"存在$\theta \in (0,1)$，使得 $d(Tx,Ty) \le \theta d(x,y)$成立"改成"对任意 $x \neq y \in X$，有 $d(Tx,Ty) < d(x,y)$"定理是否还成立？

# 压缩映射原理的推广

**定理** 设 $X$ 是完备的距离空间，$T:X\to X$ 是映射，若存在正整数 $n_0$ 使得 $T^{n_0}$ 是压缩映射，则 $T$ 有唯一的不动点.

**证** (存在性) 由压缩映射原理知，$T^{n_0}$ 有唯一的不动点 $\overline{x}$. 则

$$T^{n_0}(T\overline{x})=T(T^{n_0}\overline{x})=T\overline{x},$$

由于 $T^{n_0}$ 的不动点是唯一的，所以

$$T\overline{x}=\overline{x}.$$

即 $\overline{x}$ 是 $T$ 的不动点.

# 压缩映射原理的推广

**定 理** 设$X$是完备的距离空间，$T:X\to X$是映射，若存在正整数$n_0$使得$T^{n_0}$是压缩映射，则$T$有唯一的不动点.

**证** (唯一性) 设$\overline{y}$也是$T$的不动点，则$\overline{y}$也是$T^{n_0}$的不动点. 由$T^{n_0}$的不动点是唯一的知 $\overline{y}=\overline{x}$.

# 小结

- 压缩映射的定义
- 压缩映射原理
- 压缩映射原理的推论