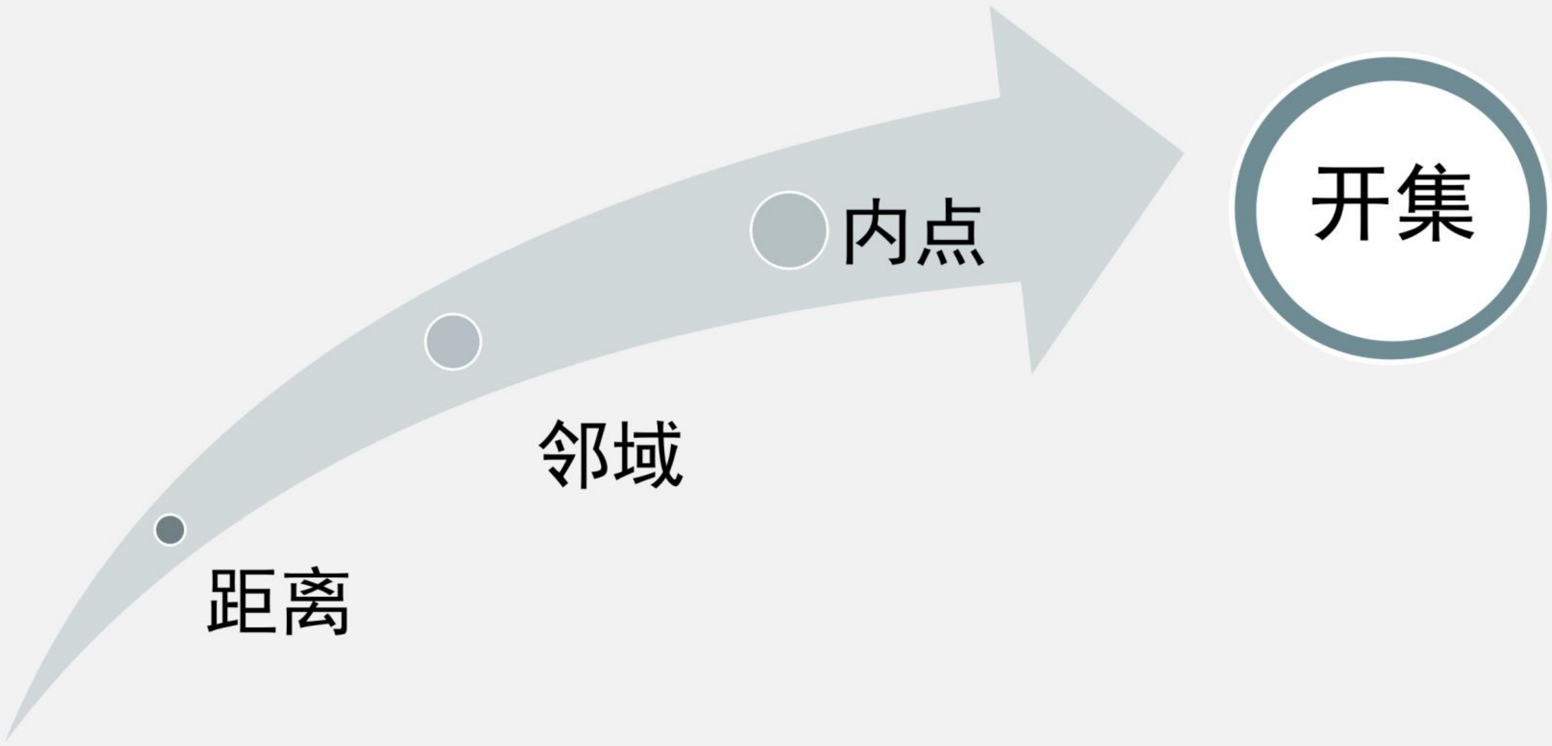
泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

2.1　开　集

N维欧氏空间



开球与闭球

定义

设 (X, d) 是距离空间，$x_0 \in X$，$r > 0$. 集合

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

称为 x_0 为中心，r 为半径的**开球**，也称为 x_0 的**球形邻域**.

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

称为 x_0 为中心，r 为半径的**闭球**.

开球的例

例

1 在实数空间 $\mathbb{R}$ 中， $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

2 在 $\mathbb{R}^2$ 中， $x = (\xi, \eta), x_0 = (\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2$,

则 $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} < r\}$.

3 在离散的距离空间 D 中， $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$, $B(x_0, \frac{3}{2}) = D$, $B(x_0, 1) = \{x_0\}$, $\overline{B}(x_0, 1) = D$.

注 从Euclid几何中延伸而使用的“开球”概念，未必具有球体的直观.

内点的定义

开球 → 内点

定义

设 G 是距离空间 X 中一个子集，$x_0 \in G$，若存在 $r > 0$，使得

$$B(x_0, r) \subset G,$$

则称 x_0 为 G 的**内点**. G 的所有内点称为 G 的**内部**，记为 G^o.

注 $G^o \subset G$.

开集的定义

开球 → 内点 → 开集

定义

设 G 是距离空间 X 中一个子集. 如果 $G \subset \underline{G^o}$, 则称 G 为**开集**.

G的所有内点

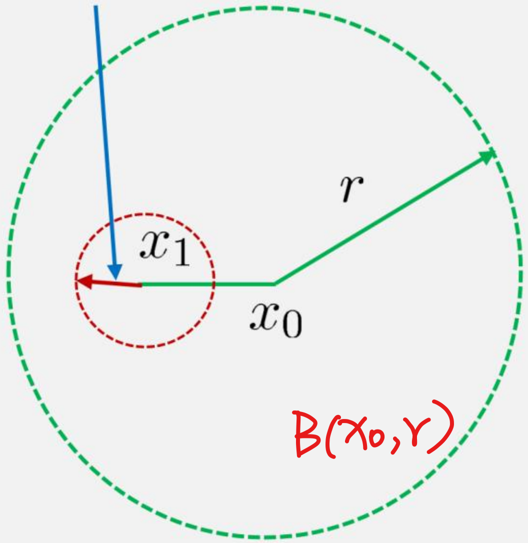
注 G 是开集 $\Longleftrightarrow$ $G = G^o$. 所有点都是内点.

开球是开集

例 开球$B(x_0,r)$是开集.

任意 $x_1 \in B(x_0,r)$，x_1是内点

$r_1 < r - d(x_1,x_0)$



证 任取 $x_1 \in B(x_0,r)$，则 $d(x_1,x_0) < r$.

取 $r_1 : 0 < r_1 < r - d(x_1,x_0)$. 只需证

$$B(x_1,r_1) \subset B(x_0,r).$$

x_1是内点

对任意 $x \in B(x_1,r_1)$，则 $d(x,x_1) < r_1$，因而

$$d(x,x_0) \le d(x,x_1) + d(x_1,x_0) < r_1 + d(x_1,x_0) < r,$$

因而，$x \in B(x_0,r)$.

开集公理

定理

设X是距离空间，X中的开集具有以下性质：

1. 全空间X与空集$\emptyset$是开集；
2. 任意多个开集的并集是开集；
3. 任意有限多个开集的交集是开集.

开集公理

定理 设X是距离空间，X中的开集具有以下性质：

① 全空间X与空集$\emptyset$是开集；

证 任取 $x \in X$，有 $B(x,1) \subset X$，故 $x \in X^o$．因此，X 是开集.

由于空集$\emptyset$不含有任何元素，故 $\emptyset^o$ 也不含任何元素，即

$$\emptyset^o = \emptyset.$$

这表明，$\emptyset$ 是开集.

开集公理

定理 设X是距离空间，X中的开集具有以下性质：

② 任意多个开集的并集是开集；

证 设 $G=\cup_{\alpha\in I}G_\alpha$，其中对任意 $\alpha\in I$，G_α 是开集.

任取 $x\in G$，存在 $\alpha_0\in I$，使得 $x\in G_{\alpha_0}$.

由于 G_{α_0} 是开集，存在开球 $B(x,r)\subset G_{\alpha_0}$.

从而 $B(x,r)\subset G$. 故 G 是开集.

开集公理

定理　设X是距离空间，X中的开集具有以下性质：

③ 任意有限个开集的交集是开集.

证

设$G=\cap_{k=1}^{m}G_k$，其中G_k是开集$(k=1,\cdots,m)$.

任取$x\in G$，则$x\in G_k\ (k=1,\cdots,m)$.

由于G_k是开集，存在开球$B(x,r_k)\subset G_k$.

取 $r=\min\limits_{1\le k\le m}\{r_k\}$，则

$$B(x,r)\subset B(x,r_k)\subset G_k\,(k=1,2,\cdots,m),$$

即$B(x,r)\subset\cap_{k=1}^{m}G_k=G$.

开集公理

定理

设X是距离空间，X中的开集具有以下性质：

1. 全空间X与空集$\emptyset$是开集；
2. 任意多个开集的并集是开集；
3. 任意有限多个开集的交集是开集.

注 若X的子集族$\mathcal{T}$满足以上三条性质，则称$\mathcal{T}$为X的一个拓扑.

小结

- 开球、内点的定义
- 开集的定义
- 开集公理