泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

3.1　完备性的定义

实数空间

回顾

柯西的收敛准则

$\{x_n\}$ 收敛

$\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $m, n > N$ 时，$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

柯西列的定义

定义

设(X,d)是距离空间, $\{x_n\}\subset X$. 若任给$\varepsilon>0$, 存在N, 当$m,n>N$时,

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

则称$\{x_n\}$为**柯西列**.

在一般的距离空间中，柯西列与收敛列有什么关系?

柯西列与收敛列

定理 设$\{x_n\}$在(X,d) 中收敛，则$\{x_n\}$ 是柯西列.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 则对任给$\varepsilon > 0$, 存在$N$, 当$m, n > N$ 时

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2},\ d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由距离的三角不等式可知，当 $m, n > N$时，

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \varepsilon.$$

因此 $\{x_n\}$ 是一个柯西列.

柯西列与收敛列

定理 设$\{x_n\}$在(X,d)中收敛，则$\{x_n\}$是柯西列.

注 一般的距离空间中，柯西列未必是收敛列.

例如 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 在 $(\mathbb{Q},d)$ 中是柯西列，但不是收敛列.

有理数

极限不在$\mathbb{Q}$中

完备性的定义

定义

如果距离空间 X 中的任何柯西列都是收敛列，则称 X 为**完备的距离空间**.

注　$(\mathbb{R}, d)$ 是完备的，$(\mathbb{Q}, d)$ 是不完备的.

完备空间的例

例 1

N维欧氏空间$\mathbb{R}^N$是完备的.

证

设$\{x_n\}$是$\mathbb{R}^N$的任一柯西列, 其中$x_n=(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_N^{(n)})$. 则任给$\varepsilon>0$,

存在N_0, 当$n,m>N_0$ 时，对每一个 $k=1,2,\cdots,N$,

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|\leq d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

于是$\{\xi_k^{(n)}\}$ 是$\mathbb{R}$中的柯西列，由$\mathbb{R}$ 的完备性知, 存在$\xi_k\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k,\ (k=1,2,\cdots,N).$$

令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 即$\{x_n\}$是$\mathbb{R}^N$中的收敛列.

完备空间的例

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$ 是完备的.

证 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 的任一柯西列，则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n,m > N$ 时，对任何 $t_0 \in [a,b]$,

$$|x_n(t_0) - x_m(t_0)| \le d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

即 $\{x_n(t_0)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的柯西列，则存在 $x(t_0) \in \mathbb{R}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0)$.

在上面的不等式中，令 $m \to \infty$，则当 $n > N$ 时,

$$|x_n(t_0) - x(t_0)| \le \varepsilon.$$

完备空间的例

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$ 是完备的.

证 定义 $x = x(t),\ \ t \in [a,b]$. 则当 $n > N$时，

$$d(x_n, x) = \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon.$$

故 $x_n \to x\ (n \to \infty)$，即函数列$\{x_n(t)\}$ 一致收敛于$x(t)$.

因而 $x \in C[a,b]$，所以$\{x_n\}$是 $C[a,b]$ 的收敛列.

完备空间的例

例 3

有界数列空间 l^∞ 是完备的.

证明思路

设$\{x_n\}$是 l^∞ 的任一柯西列,

只需证明:

(1) 找出 x (即$\{x_n\}$的极限);

(2) $x \in l^\infty$;

(3) $x_n \to x\ (n \to \infty)$ (按l^∞空间中的距离收敛).

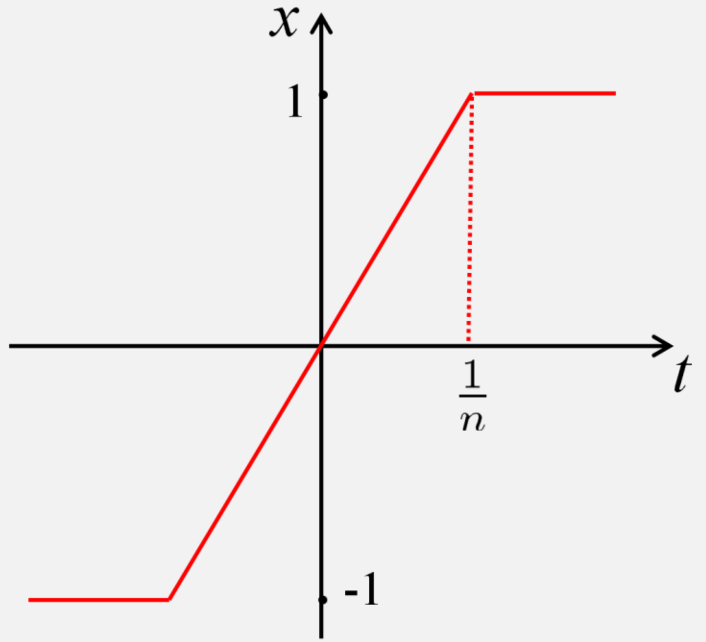
不完备空间的例

例 4 距离空间 $(C[-1,1],d)$ 是不完备的，其中

$$d(x,y)=\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t.$$

解 令

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t\le -\dfrac{1}{n}\\ nt, & -\dfrac{1}{n}<t<\dfrac{1}{n}\\ 1, & \dfrac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$



下面验证 $\{x_n\}$ 是 $(C[-1,1],d)$ 中的柯西列，但不是收敛列.

不完备空间的例

例 4

距离空间 $(C[-1,1],d)$ 是不完备的，其中

$$d(x,y)=\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t.$$

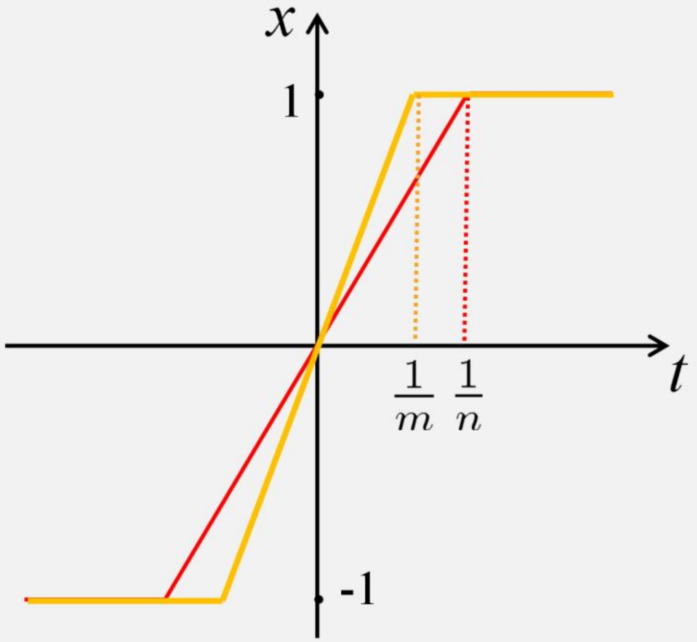
解

当 $m>n$ 时，

$$d(x_n,x_m)=\int_{-1}^{1}|x_n(t)-x_m(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\le\frac{1}{n}\to 0,\ (n\to\infty)$$

因此 $\{x_n\}$ 是 $(C[-1,1],d)$ 中的柯西列.



不完备空间的例

例 4

距离空间 $(C[-1,1],d)$ 是不完备的，其中

$$d(x,y)=\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t.$$

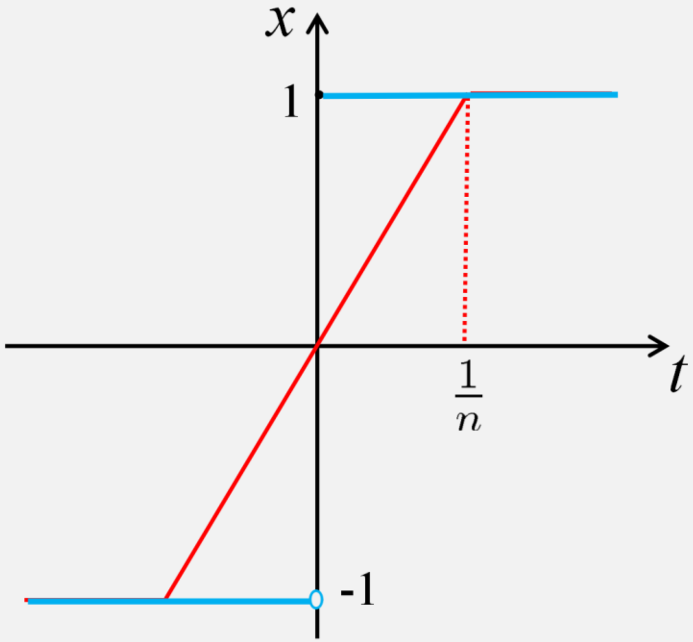
解

令

$$y(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t<0\\ 1, & 0\le t\le 1.\end{cases}$$

则有

$$\int_{-1}^{1}|x_n(t)-y(t)|\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty).$$



不完备空间的例

例 4

距离空间 $(C[-1,1],d)$ 是不完备的，其中

$$d(x,y)=\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t.$$

解

对任意 $x\in C[-1,1]$,

$$0<\int_{-1}^{1}|y(t)-x(t)|\mathrm{d}t\le\int_{-1}^{1}|y(t)-x_n(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t$$

则有

$$d(x_n,x)=\int_{-1}^{1}|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t\not\to 0\ (n\to\infty).$$

即 $\{x_n\}$ 在 $(C[-1,1],d)$ 中不收敛.

不完备空间的例

例 5

距离空间$(C[a,b], d_p)$是不完备的，其中

$$d_p(x,y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \le p < +\infty).$$

解

令 $x_n(t) = \arctan n(t-a), \ n = 1, 2, \cdots .$

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & a < t \le b, \\ 0, & t = a. \end{cases}$$

由 $|x_n(t)| \le \dfrac{\pi}{2} \ (n = 1, 2, \cdots)$ 和Lebesgue控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

不完备空间的例

例 5

距离空间$(C[a,b],d_p)$是不完备的，其中

$$d_p(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\quad (1\leq p<+\infty).$$

解

因而

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x_m,x)\to 0,\ (n,m\to\infty),$$

故 $\{x_n\}$是$(C[a,b],d_p)$ 中的柯西列，但是 $x\notin C[a,b]$.

小结

- 柯西列的定义
- 柯西列与收敛列
- 完备距离空间的定义
- (不)完备距离空间的例