泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

2.2 闭 集

开集的定义

回顾 设G是距离空间X中一个子集. 如果 $G \subset G^o$, 则称G为**开集**.

闭集的定义

定义

设 A 是距离空间 X 中一个子集，若它的补集

$$A^c = X \setminus A$$

是开集，则称 A 是**闭集**.

闭球是闭集

例 闭球 $\overline{B}(x_0, r)$ 是闭集.

证 任取 $y \in (\overline{B}(x_0, r))^c$， 则 $d(y, x_0) > r$.

取 $\beta : 0 < \beta < d(y, x_0) - r$. 只需证

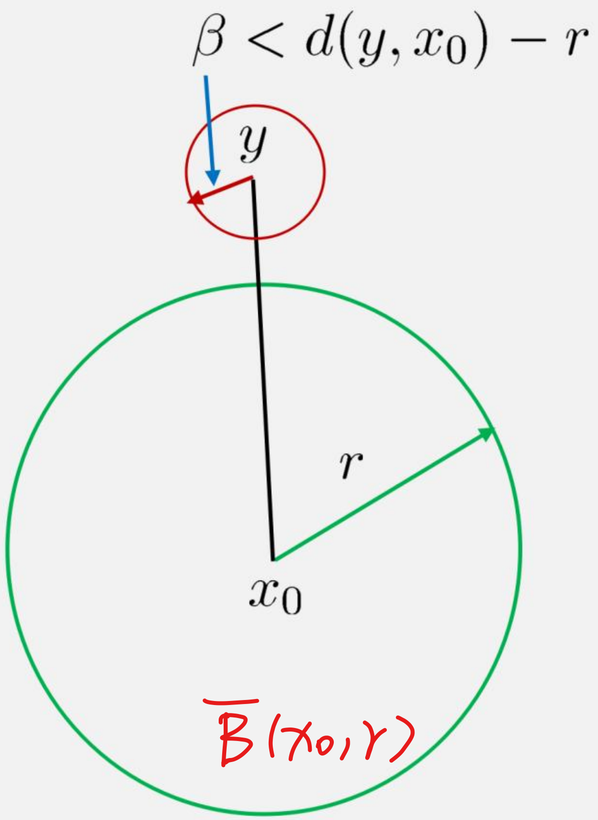
$$B(y, \beta) \subset (\overline{B}(x_0, r))^c.$$

开球是补集的子集

对任意 $x \in B(y, \beta)$， 则 $d(x, y) < \beta$， 因而

$$d(x, x_0) \geq d(y, x_0) - d(y, x) > d(y, x_0) - \beta > r,$$

因而， $x \in (\overline{B}(x_0, r))^c$.



接触点的定义

定义

设 A 是距离空间 X 中一个子集，$x_0 \in X$, 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

则称 x_0 为 A 的**接触点**. A 的接触点的全体称为 A 的**闭包**，记为 $\overline{A}$.

注 1　$A \subset \overline{A}$.

注 2　x_0 不是 A 的接触点 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B(x_0, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$.

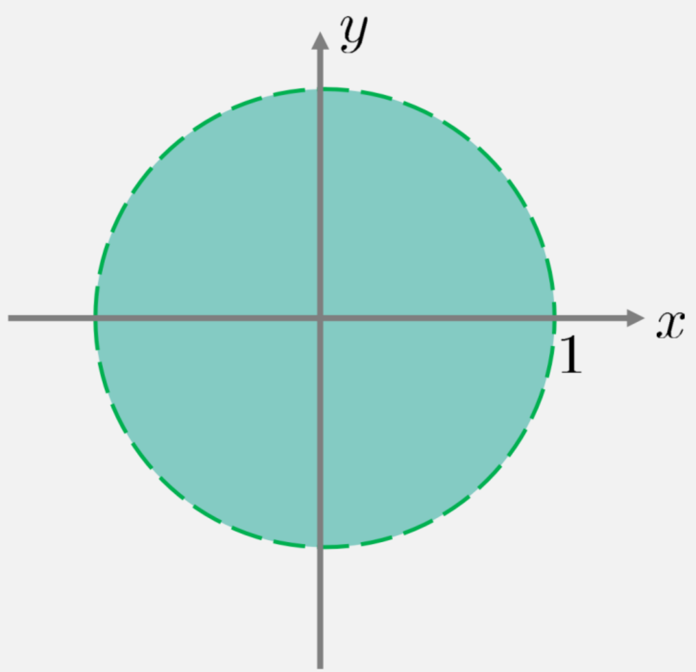
接触点的例

例

在平面空间 $\mathbb{R}^2$ 中，集合 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$,

则 A 的闭包为 $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \underline{\leq 1}\}$.

圆周和圆内的点都是接触点、



接触点的等价刻画

x_0是接触点

定理 设 A 是距离空间 X 的子集，则 $x_0 \in \overline{A}$ 的充分必要条件是存在

$$\{x_n\} \subset A,$$

使得 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$.

存在一列点，点列极限为 x_0

证 (充分性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，则任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon,$$

极限定义

即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon) \cap A$，这表明 x_0 是 A 的接触点. 即 $x_0 \in \overline{A}$.

接触点定义

接触点的等价刻画

定理 设 A 是距离空间 X 的子集，则 $x_0 \in \overline{A}$ 的充分必要条件是存在

$$\{x_n\} \subset A,$$

使得 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$.

证 (必要性) 若 $x_0 \in \overline{A}$. 则对 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$, 必有 $B(x_0, \dfrac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.

任给的 $\varepsilon > 0$

于是存在 $\{x_n\} \subset A$, 使得

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}\ (n = 1, 2, \cdots).$$

开球定义

因而 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$.

闭集的等价刻画 I

定理 设 A 是距离空间 X 的子集，A 是闭集 $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

$\overline{A}$ 是 A 的闭包

$\overline{A}$ 由所有的接触点构成

证 $\Longleftarrow$ 设 $x \in A^c$，由 $A = \overline{A}$ 知 x 不是 A 的接触点，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使

$$B(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset.$$

即 $B(x, \varepsilon_0) \subset A^c$. 因此 A^c 是开集，即 A 是闭集.

闭集的等价刻画 I

定理 设 A 是距离空间 X 的子集， A 是闭集 $\Longleftrightarrow A=\overline{A}.$

证 $\Longrightarrow$ 由于 $A\subset\overline{A}$，只需证明 $\overline{A}\subset A$. 设 $x\in\overline{A}$，若 $x\notin A$，即 $x\in A^c$.

由于 A^c 是开集，于是存在 $\varepsilon_0>0$，使得

$$B(x,\varepsilon_0)\cap A=\emptyset.$$

这与 $x\in\overline{A}$ 矛盾. 因而 $\overline{A}\subset A$. 即 $A=\overline{A}$.

闭集的等价刻画 I

定理 设 A 是距离空间 X 的子集， A 是闭集 $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

定理 设 A 是距离空间 X 的子集，则 $x_0 \in \overline{A}$ 的充分必要条件是存在

$$\{x_n\} \subset A,$$

使得 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$.

闭集的等价刻画 II

定理 设 A 是距离空间 X 的子集，A 是闭集 $\Longleftrightarrow$ 对任何 $\{x_n\} \subset A$，若 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$，必有 $x_0 \in A$.

注 在闭集里极限运算是封闭的.

点到集合的距离

定义

设 A 是距离空间 X 的一个子集，$x \in X$，称

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

为**点 x 到集合 A 的距离**.　　下确界

注　可以证明 $\overline{A} = \{x \mid d(x, A) = 0\}$.

小 结

- 闭集的定义
- 接触点、闭包的定义
- 闭集的等价刻画