第一章　绪论

1.1　微分方程的模型

【例1】　人口预测模型 影响人口增长的因素很多,如人口的自然出生率、人口的自然死亡率、人口的迁移、自然灾害、战争等诸多因素。英国人口统计学家Malthus (1766-1834)根据百余年的统计资料，于1798年提出了闻名于世的Malthus人口模型：在单位时间内人口的增长量与人口成正比。在此假设下,试推导人口随时间变化的数学模型。

【例2】　市场价格模型

对于纯粹的市场经济来说，商品市场价格取决于市场供需之间的关系，市场价格能促使商品的供给与需求相等(这样的价格称为(静态)均衡价格)。也就是说,如果不考虑商品价格形成的动态过程,那么商品的市场价格应能保证市场的供需平衡，但是,实际的市场价格不会恰好等于均衡价格，而且价格也不会是静态的，应是随时间不断变化的动态过程。试建立描述市场价格形成的动态过程的数学模型。

【例3】　战争模型

影响战争胜负的因素有很多，兵力的多少和战斗力的强弱是两个主要的因素。士兵的数量会随着战争的进行而减少，这种减少可能是因为阵亡、负伤与被俘，也可能是因为疾病与开小差。分别称之为战斗减员与非战斗减员。士兵的数量也可随着增援部队的到来而增加。从某种意义上来说，当战争结束时，如果一方的士兵人数为零，那么另一方就取得了胜利。试建立正规战中相关因素之间关系的数学模型。

【例4】　减肥模型

随着社会的进步和发展，人们的生活水平不断提高, "肥胖"已经成为全社会关注的一个重要的问题。如何正确对待减肥是我们必须考虑的问题。试建立减肥的数学模型。

【例5】　打假模型

随着经济的发展，制造与销售假冒伪劣品等违法犯罪活动(以下简称造假)越来越引起人们的广泛关注。如何采取有效措施以减少甚至杜绝造假活动，是一项长期而艰巨的任务。试建立打假模型。

【例6】　传染病的传播模型

尽管社会经济在快速发展, 人民生活水平在不断提高，但影响人类健康的传染病仍然是威胁人类健康的第一大杀手。传染病传播所涉及的因素很多，如传染病人的多少、易受传染者的多少、传染率的大小、排除率的大小、人口的出生和死亡等。试通过传染

病传播过程中若干重要因素之间的联系，建立传染病的传播模型。

1.2 常微分方程的基本概念

定义 1.1 联系自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程称为***微分方程***。

考察以下几个方程：

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y \tag{1.1}$$

$$(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + tx(\frac{dx}{dt})^3 + x = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 5y = \cos x \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.6}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1.7}$$

定义 1.2 如果微分方程中自变量的个数只有一个，称为***常微分方程***；如果微分方程中自变量的个数有两个或两个以上，称为***偏微分方程***。

定义 1.3 一个微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，称为方程的***阶数***。

一般的n阶微分方程的形式为

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \tag{1.8}$$

这里，x是自变量，y是未知函数，$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n})$是$x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$ 的已知函数，而且其中一定含有$\frac{d^ny}{dx^n}$。

定义 1.4 如果n阶微分方程(1.8)的左端函数$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n})$是关于$x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$的一次式，则称之为$n$***阶线性微分方程***，否则称之为$n$***阶非线性微分方程***。

一般的n阶线性微分方程的形式为

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \tag{1.9}$$

其中，$a_i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$和$f(x)$是$x$的已知函数。

定义 1.5 设函数$y = \phi(x)$在区间$[a, b]$内连续，且有直到n阶的导数。如果下面的式子恒成立

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad a \le x \le b$$

则称$y = \phi(x)$为方程*(1.8)*在区间$[a, b]$上的解。

定义 1.6 如果微分方程的解中含有一个或多个任意常数，且其所含的相互独立的任意常数的个数等于该方程的阶数，称这样的解为方程的***通解***。

一般的n阶微分方程的通解可以表示为

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \tag{1.10}$$

其中，$c_1, c_2, \cdots, c_n$是相互独立的任意常数。

所谓函数$y = \phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$含有$n$个相互独立的任意常数，是指存在$(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$的某一个邻域，使得

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial c_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial \phi}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial \phi'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial \phi'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial \phi'}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \ne 0$$

其中，$\phi^{(k)}$表示ϕ对x的k阶导数。

注1 微分方程的通解不一定包含其全部解。

【例1】 判断函数$y = -\dfrac{1}{\sin x + c}$是否是方程

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$$

的通解。

对微分方程来说，能够求出通解的情况并不多，在实际应用中所需要的多是求微分方程的一个“特定的解”。而这个“特定的解”所必须满足的条件，称为**定解条件**。

常见的定解条件是**初始条件**。

一般的n阶微分方程（1.8）的初始条件可表示为

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{1.11}$$

这里x_0是自变量x指定的初值，$y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$分别是未知函数及其各阶导数相应指定的初值。

定义 1.7 满足定解条件的解，称为方程的**特解**。

求方程(1.8)满足初始条件(1.11)的解的问题称为**初值问题**，初值问题也常称为**Cauchy问题**。

【例2】 试验证函数$y = -6\cos 2x + 8\sin 2x$是方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{5}{2}y = 25\cos 2x$$

的满足初始条件$y(0) = -6, y'(0) = 16$的特解。

【例3】 已知函数$y = x(\ln|x| + c)^2$是方程

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

的通解，求满足初始条件$y(1) = 4$的特解。