上海财经大学《　常微分方程　》模拟试卷 三

姓名__________学号__________班级___________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、　填空题（每空 3 分，共 30 分）

1．形如____________________称为变量分离方程，它有积分因子______________．

2．对方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y+c}$，当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 时，可作变量替换，令 $u=$______________，方程就能化为变量分离方程.

3．如果函数 $f(x,y)$ 在矩形域 $R=\{|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$ 上________________，则方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 存在唯一解 $y=\varphi(x)$，定义于区间 $|x-x_0|\le h$ 上，连续且满足初始条件 $y_0=\varphi(x_0)$，其中 $h=$________________，$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

4．方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\sin x=\mathrm{e}^x$ 的任一解的最大存在区间是________________.

5．设 λ 是 n 阶常系数齐次线性方程特征方程的 k 重根，则该方程相应于 λ 的 k 个线性无关解是__________________.

6．若 $x^*(t)$ 是 n 阶线性非齐次方程的一个特解，$x_1(t),x_2(t),\cdots$ 　是其对应的齐次线性方程的 n 个线性无关解，则此 n 阶线性非齐次方程的通解可以表示为___________________________.

7. 若 $\Phi(t),\Psi(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上是常系数齐次线性方程组 $X'=AX$ 的两个基解矩阵，则它们的关系是___________________.

8．若矩阵 A 为二阶单位矩阵，则方程组 $X'=AX$ 基解矩阵 $\exp(At)=$_______________________.

二、单选题(每题 3 分，共 15 分)

1．微分方程 $y^{(2)}-y'^3=2\cos y'-y^5$ 的阶数为（　　　）.

(A) 1　　　　(B) 2　　　　(C) 3　　　　(D) 5

2．下列方程中为线性微分方程的是（　　）.

（A）$e^{x-y'}=y^{(2)}$　　　　（B）$y''=xy-\sqrt{x}$

（C）$y'y=\ln x$　　　　（D）$\sin(y'''+y)=x$

3．微分方程 $y'-5y'+6y=0$ 的通解是（　　）.

（A）ce^{2x}　　　　（B）$e^{3x}-c_2e^{2x}$

（C）$c_1e^{3x}-c_2e^{2x}$　　　　（D）$c_1e^{3x}-c_1e^{2x}$

（其中 c,c_1,c_2 为任意常数）

4、函数 $y=\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{x^2}{2}$ 是下列方程（　　）的解.

（A）$3y'=3x^2+5x$　　　　（B）$5y'=5x^2+3x$

（C）$5y'=3x^2+5x$　　　　（D）$5y'=3x^2+3x$

5．设 $x_1(t),x_2(t),\cdots$ 是 n 阶齐次线性方程的任意 $n+1$ 个解，则下列命题正确的是（　　）.

（A）这 $n+1$ 个解必线性相关

（B）这 $n+1$ 个解可组成方程的一个基本解组

（C）这 $n+1$ 个解组成的 Wronski 行列式恒不为零

（D）这 $n+1$ 个解必线性无关

三、求下列方程的通解(共 26 分)

1、$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$

2、$(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$

3、$x''-a^2x=t+1$ （a 为实常数）

四、求方程组 $X'=AX$ ，其中 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}$ 的一个基解矩阵．（15 分）

五、求方程$\frac{dy}{dx}=x-y^2$经过（1，0）的第二次近似解（8 分）

六、证明题（6 分）

设 $x_1(t), x_2(t)$ 为方程 $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$ 的解，且 $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$， $x_1(t)$ 不恒为零，其中 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 是含 t_0 的区间上的连续函数。试证：存在常数 C，使得在该区间上有 $x_2(t) \equiv Cx_1(t)$（或 $x_1(t) \equiv Cx_2(t)$）。