常微分方程

第三章　一阶常微分方程解的存在唯一性

上海财经大学应用数学系

April 19, 2010

一阶显式微分方程

考虑一阶显式常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

其中$f(x, y)$为闭矩形区域

$$\mathcal{R}: \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

上的连续函数。

$Lipschitz$条件

定义

如果存在常数$L>0$，使得以下不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

对$\forall (x,y_1),(x,y_2)\in\mathcal{R}$都成立，则称函数$f(x,y)$在区域$\mathcal{R}$内关于$y$满足Lipschitz条件，常数$L$称为Lipschitz常数。

Picard存在唯一性定理

定理3.1（Picard存在唯一性定理）

若函数$f(x,y)$在区域$\mathcal{R}=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$上连续，而且关于$y$满足Lipschitz条件，那么常微分方程初值问题(1)在区间$\mathcal{I}=[x_0-h,x_0+h]$上存在唯一解，其中常数

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\qquad M=\max_{(x,y)\in\mathcal{R}}|f(x,y)|$$

Picard存在唯一性定理的证明

证明过程分成三步:

- 首先证明微分方程初值问题(1)等价于积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

- 其次用Picard逐次逼近法证明解的存在性。
- 最后证明解的唯一性。

Picard存在唯一性定理的证明

证明过程分成三步:

- 首先证明微分方程初值问题(1)等价于积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

- 其次用Picard逐次逼近法证明解的存在性。
- 最后证明解的唯一性。

*Picard*存在唯一性定理的证明

证明过程分成三步：

- 首先证明微分方程初值问题(1)等价于积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

- 其次用Picard逐次逼近法证明解的存在性。
- 最后证明解的唯一性。

*Picard*存在唯一性定理的证明

证明过程分成三步:

- 首先证明微分方程初值问题(1)等价于积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

- 其次用Picard逐次逼近法证明解的存在性。
- 最后证明解的唯一性。

注1

由于Picard存在唯一性定理只保证了解在局部范围内的存在性，这在实际使用中非常不方便。因为当定义域$\mathcal{R}$扩大以后，解的存在区域$\mathcal{I}$可能反而会缩小。关于解存在的最大区间将在下一节讨论。

注2

存在唯一性定理中参数h的几何意义可以这样来描述：定理中的$M=\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}}|f(x,y)|$。因此它可以解释成落在区域$\mathcal{R}$中过$(x_0,y_0)$的积分曲线$y=\varphi(x)$的切线斜率绝对值的最大值。换句话说，积分曲线的切线斜率介于直线AE和BD的斜率M与$-M$之间（参看图1）。这样，在积分曲线离开区域$\mathcal{R}$之前，它一定落在阴影区域

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,|y-y_0|\le M|x-x_0|,\quad |x-x_0|\le h\right\}$$

内。

图1

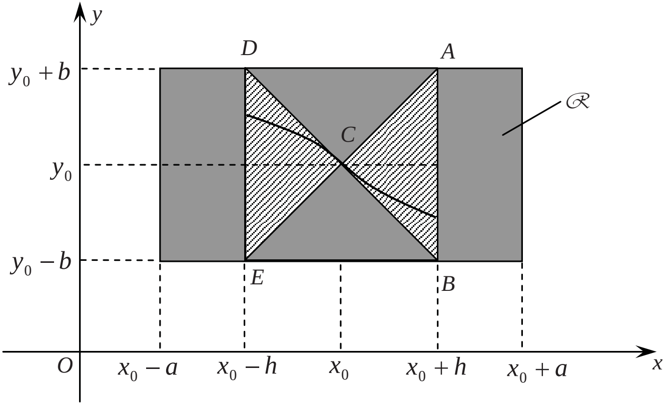

图1: Picard存在唯一性定理参数h的几何意义

注3

在实际使用中，Lipschitz条件较难检验，故常用$f(x,y)$在$\mathcal{R}$上有对y的连续偏导数来替代。实际上替代的条件比Lipschitz条件更严格，只是执行起来较为方便。如果在$\mathcal{R}$上$\frac{\partial f}{\partial y}$存在且连续，那么$\frac{\partial f}{\partial y}$在$\mathcal{R}$上有界。设在$\mathcal{R}$上$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$，
则$\forall (x,y_1),(x,y_2)\in \mathcal{R}, 0<\theta<1$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f(x,y_2+\theta(y_1-y_2))}{\partial y}\right| |y_1-y_2| \le L|y_1-y_2|$$

但反过来，满足Lipschitz条件的函数$f(x,y)$不一定有偏导数存在。例如，函数$f(x,y)=|y|$在任何区域都满足Lipschitz条件，但在$y=0$处偏导数不存在。

注4

解的唯一性证明实际上并不需要依赖解的存在性的证明，其证明可以是完全独立的（具体证明可以参看[叶彦谦，《常微分方程讲义(第二版)》，人民教育出版社，1979]）。一般地，在某个区域内，只要方程(1)的右端项$f(x,y)$在该区域内连续且关于y满足Lipschitz条件，则方程(1)过该区域内一点的解就是唯一的。

一阶隐式方程

考虑一阶隐式方程

$$F\left(x, y, y'\right)=0 \tag{3}$$

定理 3.2

如果在点(x_0, y_0, y_0')的某一个邻域中，

1. $F(x, y, y')$对所有变元(x, y, y')连续，且存在连续偏导数;
2. $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;
3. $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$

则方程(3)存在惟一解$y=y(x), |x-x_0| \leq h$，（h为足够小的正数），满足初始条件

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y_0' \tag{4}$$

距离及距离空间的定义

定义3.2

设$\mathbb{X}$为一个非空集合，如果$\forall x, y \in \mathbb{X}$，都$\exists \rho(x, y) \in \mathbb{R}$与其对应且满足以下三个条件：

(1) **非负性：** $\rho(x, y) \geq 0$，且当且仅当$x = y$时，$\rho(x, y) = 0$;

(2) **对称性：** $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) **三角不等式：** $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$，$z \in \mathbb{X}$。

则称ρ为$\mathbb{X}$上的距离，称$\mathbb{X}$是以ρ为距离的距离空间。

基本点列和完备空间

定义3.3

对于距离空间$\mathbb{X}$中的点列$\{x_n\}$，如果$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使当$m, n > N$时

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

则称$\{x_n\}$为**Cauchy点列**或者**基本点列**。如果$\mathbb{X}$中的任一基本点列必收敛于$\mathbb{X}$中的某一点，则称$\mathbb{X}$为**完备的距离空间**。

定义3.4

设$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$都是距离空间，如果对于每一个$x \in \mathbb{X}$，必有$\mathbb{Y}$中唯一一点y与之对应，则称这个对应关系是一个**映射**。常用记号T来表示，即$Tx = y$。

定义3.5

如果$\forall x \in \mathbb{X}$以及某一给定的$x_0 \in \mathbb{X}$，映射T满足以下条件：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当$\rho(x, x_0) < \delta$时，有$\rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon$，则称映射$T$在$x_0$处**连续**。如果映射$T$在$\mathbb{X}$中的每一点都连续，就称$T$在$\mathbb{X}$上连续或者称$T$是**连续映射**。

距离空间上的映射、连续映射

定义3.4

设$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$都是距离空间，如果对于每一个$x \in \mathbb{X}$，必有$\mathbb{Y}$中唯一一点y与之对应，则称这个对应关系是一个**映射**。常用记号T来表示，即$Tx = y$。

定义3.5

如果$\forall x \in \mathbb{X}$以及某一给定的$x_0 \in \mathbb{X}$，映射T满足以下条件：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当$\rho(x, x_0) < \delta$时，有$\rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon$，则称映射$T$在$x_0$处**连续**。如果映射$T$在$\mathbb{X}$中的每一点都连续，就称$T$在$\mathbb{X}$**上连续**或者称$T$是**连续映射**。

压缩映射

定义3.6

设$\mathbb{X}$是一个完备的距离空间，ρ是$\mathbb{X}$上的距离，T是由$\mathbb{X}$到$\mathbb{X}$自身的映射，并且$\forall x, y \in \mathbb{X}$，成立

$$\rho(Tx, Ty) \leq \theta\rho(x, y) \tag{5}$$

其中θ是满足$0 \leq \theta < 1$的定数。那么称T为$\mathbb{X}$上的**压缩映射**。

Banach压缩映像原理

定理3.3

设$\mathbb{X}$是一个完备的距离空间，T是$\mathbb{X}$上的一个压缩映射。那么T在X中存在唯一不动点，即存在唯一的$\tilde{x}\in\mathbb{X}$，使得$T\tilde{x}=\tilde{x}$。

使用$Banach$压缩映像原理来证明定理$Picard$存在唯一性定理（1）

不妨设f的Lipschitz常数$L > 0$。$\forall\theta \in [0,1)$，记

$$\tilde{h} = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{\theta}{L}\right\}$$

用$\mathbb{X}$表示区间$[x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$上全部连续函数组成的空间。由于常微分方程初值问题(1)等价于以下积分方程(2)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

因此，我们在$\mathbb{X}$内定义映射

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

使用$Banach$压缩映像原理来证明定理$Picard$存在唯一性定理（2）

在$\mathbb{X}$上引入距离

$$\rho(y_1,y_2) \equiv \|y_1 - y_2\| \triangleq \max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]} |y_1(x) - y_2(x)|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{X}$$

那么，

$$\begin{aligned}
\rho(Ty_1, Ty_2) &= \max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]} \left| \int_{x_0}^{x} L|y_1(t) - y_2(t)| \mathrm{d}t \right| \\
&\leq L\tilde{h} \max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]} |y_1(t) - y_2(t)| \\
&= L\tilde{h}\rho(y_1,y_2) \leq \theta\rho(y_1,y_2)
\end{aligned}$$

因此T是$\mathbb{X}$上的压缩映射。

使用$Banach$压缩映像原理来证明定理$Picard$存在唯一性定理（3）

根据定理3.3，存在唯一的连续函数$y_0(x)(x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}])$使得

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\mathrm{d}t$$

即方程(1)在$x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$上有唯一解。由于$[x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}] \subset \mathcal{I} = [x_0 - h, x_0 + h]$，因此以上证明的结果与定理3.1（Picard存在唯一性定理）的结论尚有差距。我们可以根据常微分方程初值问题(1)中的初始条件，利用下节的解的延拓的方法，将结论延拓到$\mathcal{I}$上。

对于解的延拓的猜测

例 1

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

猜测，是否$f(x, y) = x^2 + y^2$的存在区域$\mathcal{R}$越大，则解的存在区间也越大？

对于解的延拓的猜测

例1

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

猜测，是否$f(x,y) = x^2 + y^2$的存在区域$\mathcal{R}$越大，则解的存在区间也越大？

对于猜测的回答

如果$f(x,y)=x^2+y^2$的存在区间取为$\mathcal{R}_1=\left\{(x,y)\Big||x|\le 1,|y|\le 1\right\}$，即$a_1=1,b_1=1$。那么对应的$M_1=\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}_1} f(x,y)=2$，$h_1=\min\left(a_1,\frac{b_1}{M_1}\right)=\frac{1}{2}$。而如果$f(x,y)$的存在区间取为$\mathcal{R}_2=\left\{(x,y)\Big||x|\le 2,|y|\le 2\right\}$，即$a_2=2,b_2=2$。那么对应的$M_2=\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}_2} f(x,y)=2$，$h_2=\min\left(a_2,\frac{b_2}{M_2}\right)=\frac{1}{4}$。显然，区域$\mathcal{R}_2$大于$\mathcal{R}_1$，但是解的存在区间反而由$|x|\le h_1=\frac{1}{2}$缩小到$|x|\le h_2=\frac{1}{4}$。

对于猜测的回答

如果$f(x,y)=x^2+y^2$的存在区间取为$\mathcal{R}_1=\left\{(x,y)\middle||x|\le 1,|y|\le 1\right\}$，即$a_1=1,b_1=1$。那么对应的$M_1=\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}_1} f(x,y)=2$，$h_1=\min\left(a_1,\frac{b_1}{M_1}\right)=\frac{1}{2}$。而如果$f(x,y)$的存在区间取为$\mathcal{R}_2=\left\{(x,y)\middle||x|\le 2,|y|\le 2\right\}$，即$a_2=2,b_2=2$。那么对应的$M_2=\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}_2} f(x,y)=2$，$h_2=\min\left(a_2,\frac{b_2}{M_2}\right)=\frac{1}{4}$。显然，区域$\mathcal{R}_2$大于$\mathcal{R}_1$，但是解的存在区间反而由$|x|\le h_1=\frac{1}{2}$缩小到$|x|\le h_2=\frac{1}{4}$。

可延拓解、饱和解的定义

定义3.7

对方程(1)，设$y=\varphi(x)$是方程定义在(α_1,β_1)内的一个解。若存在方程的另一个定义在(α_2,β_2)的解$y=\psi(x)$，满足

(1) $(\alpha_2,\beta_2)\supset(\alpha_1,\beta_1)$，但$(\alpha_1,\beta_1)\neq(\alpha_2,\beta_2)$;

(2) $\psi(x)\equiv\varphi(x)$，当$x\in(\alpha_1,\beta_1)$

则称$y=\varphi(x)$为**可延拓解**，并称$y=\psi(x)$是解$y=\varphi(x)$的一个**延拓**。

若不存在满足上述条件的解$y=\psi(x)$，则称解$y=\varphi(x), x\in(\alpha_1,\beta_1)$为方程的一个**饱和解**，存在区间$(\alpha_1,\beta_1)$为**饱和区间或最大存在区间**。

局部*Lipschitz*条件

定义3.8

对于方程(1)，假设$f(x,y)$在开区域$\mathcal{G}$内连续。如果对$\mathcal{G}$内每一点，都存在以该点为中心的完全属于$\mathcal{G}$的闭区域$\mathcal{S}$。而且在$\mathcal{S}$中，方程右端$f(x,y)$关于y满足Lipschitz条件。我们就称$f(x,y)$满足**局部Lipschitz条件**。用更为简洁的数学式子来表示:

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathcal{G}, \exists a_1 > 0, b_1 > 0, \text{ s.t.}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y) \middle| |x - x_1| \le a_1, |y - y_1| \le b_1 \right\} \subset \mathcal{G}$$

且存在常数L（与x_1, y_1, a_1, b_1有关），对$\forall (x, y'), (x, y'') \in \mathcal{S}$，有

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \le L|y' - y''|$$

关于解的延拓的简单想法

根据定理3.1，如果方程(1)的右端项$f(x,y)$在其存在区域$\mathcal{G}$内关于y满足局部Lipschitz条件，则$\exists h_1>0$，使得方程(1)在$[x_0-h_1,x_0+h_1]$上存在惟一解$\varphi_1(x)$。然后，我们再以$\Big(x_0+h_1,\varphi_1(x_0+h_1)\Big)$为新的初值，这样根据定理3.1，存在另一个$h_2>0$，使得方程(1)在$[x_0+h_1-h_2,x_0+h_1+h_2]$上存在惟一解$\varphi_2(x)$。这样解的存在区间就被向右延拓了（参看图3.2）。同样以$\Big(x_0-h_1,\varphi_1(x_0-h_1)\Big)$为新的初值，就可以使解向左延拓。反复进行这样的延拓就可以得到更大的解的存在区间。这样一个解的延拓过程从几何上看就是在原来的积分曲线$y=\varphi_1(x)$左右两端接上积分曲线段，从而使整个积分曲线被延伸。

解的向右延拓

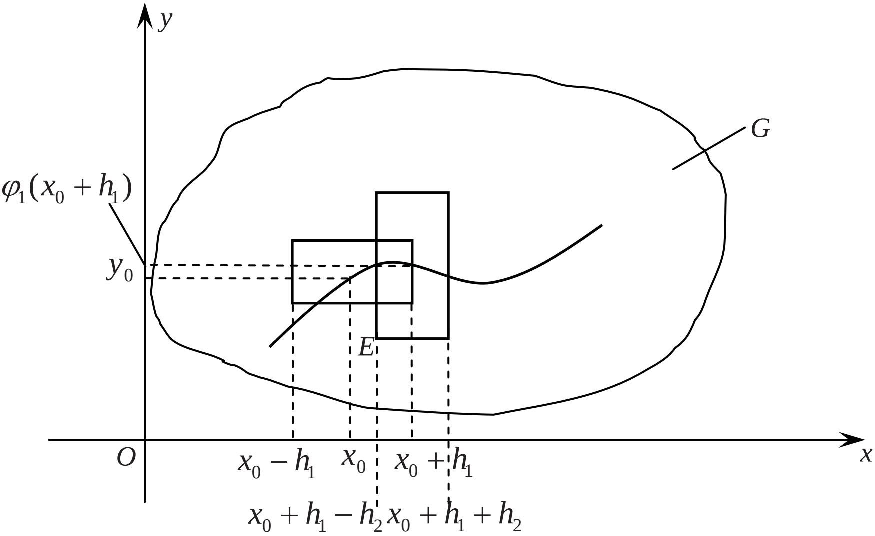

图3.2 解的向右延拓

解的延拓定理

那么，积分曲线到底能延伸到多远呢？以下的解的延拓定理给出了答案（定理的证明参看[丁同仁、李承治，《常微分方程教程（第二版）》，高等教育出版社，2004]）。

定理3.4

如果方程(1)的右端项$f(x,y)$在有界区域$\mathcal{G}$内连续，并且关于变元y满足局部Lipschitz条件。又设$P_0(x_0,y_0)$为$\mathcal{G}$内的任意一点，$y=\varphi(x)$为经过P_0（满足方程(1)初始条件）的一条积分曲线。那么$y=\varphi(x)$的最大存在区间是一个开区间(α,β)，且积分曲线将在区域$\mathcal{G}$内向左右两个方向延伸到边界（换言之，对于任何有界闭区域$\Omega(P_0\in\Omega\subset\mathcal{G})$，积分曲线将延伸到$\Omega$之外）。

解的延拓定理

那么，积分曲线到底能延伸到多远呢？以下的解的延拓定理给出了答案（定理的证明参看[丁同仁、李承治，《常微分方程教程（第二版）》，高等教育出版社，2004]）。

定理3.4

如果方程(1)的右端项$f(x,y)$在有界区域$\mathcal{G}$内连续，并且关于变元y满足局部Lipschitz条件。又设$P_0(x_0,y_0)$为$\mathcal{G}$内的任意一点，$y=\varphi(x)$为经过P_0（满足方程(1)初始条件）的一条积分曲线。那么$y=\varphi(x)$的最大存在区间是一个开区间(α,β)，且积分曲线将在区域$\mathcal{G}$内向左右两个方向延伸到边界（换言之，对于任何有界闭区域$\Omega(P_0\in\Omega\subset\mathcal{G})$，积分曲线将延伸到$\Omega$之外）。

注1

由有限覆盖定理易得：如果$\mathcal{G}$是有界闭区域，则$f(x,y)$在$\mathcal{G}$上满足局部Lipschitz条件等价于它在$\mathcal{G}$上满足整体Lipschitz条件。但当$\mathcal{G}$是开区域时，$\mathcal{G}$上的局部Lipschitz条件则弱于$\mathcal{G}$上的整体Lipschitz条件。对于任意区域$\mathcal{G}$，如果$f(x,y)$在$\mathcal{G}$上对y有连续偏导数，则f对y满足局部Lipschitz条件。

注2

解最大存在区间(α,β)，以右端β为例，必然发生下列情形之一:

(1) $\beta=+\infty$;

(2) $\beta<+\infty$，当$x\to\beta-0$时，$\varphi(x)$无界;

(3) $\beta<+\infty$，当$x\to\beta-0$时，点$(x,\varphi(x))$与$\mathcal{G}$的边界$\partial\mathcal{G}$的距离趋于0。

类似也可以讨论左端点α的情形。

例题

例2

讨论方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$过点$(1,1)$以及点$(3,-1)$的积分曲线的存在区间。

解

$f(x,y)=y^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$在$xoy$平面内连续，且满足延拓定理和解的存在惟一性定理的条件。利用分离变量法解得$y=\frac{1}{c-x}$，　$y=0$。
过点$(1,1)$的积分曲线为：$y=\frac{1}{2-x}$。当$x=2$时无意义，因此该积分曲线的最大存在区间为$(-\infty,2)$;
过点$(3,-1)$的积分曲线为：$y=\frac{1}{2-x}$。同样当$x=2$时无意义，但此时该积分曲线的最大存在区间为$(2,+\infty)$。
尽管$f(x,y)$在全平面上满足延拓定理条件，但积分曲线不一定充满$(-\infty,+\infty)$。另外平凡解$y=0$的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$。

例题

例2

讨论方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$过点$(1,1)$以及点$(3,-1)$的积分曲线的存在区间。

解

$f(x,y)=y^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$在$xoy$平面内连续，且满足延拓定理和解的存在惟一性定理的条件。利用分离变量法解得$y=\frac{1}{c-x}$， $y=0$。
过点$(1,1)$的积分曲线为：$y=\frac{1}{2-x}$。当$x=2$时无意义，因此该积分曲线的最大存在区间为$(-\infty,2)$;
过点$(3,-1)$的积分曲线为：$y=\frac{1}{2-x}$。同样当$x=2$时无意义，但此时该积分曲线的最大存在区间为$(2,+\infty)$。
尽管$f(x,y)$在全平面上满足延拓定理条件，但积分曲线不一定充满$(-\infty,+\infty)$。另外平凡解$y=0$的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$。

Gronwall不等式

定理3.5（Gronwall不等式）

设$\alpha \in \mathbb{R}$，$u(x), \varphi(x)$和$\lambda(x)$是区间$[x_0, X]$上的三个连续函数，$\lambda(x) \geq 0$且成立以下不等式

$$u(x) \leq \alpha + \int_{x_0}^{x} [\lambda(t)u(t) + \varphi(t)]\mathrm{d}t, \qquad (x_0 \leq x \leq X) \tag{6}$$

则

$$u(x) \leq \alpha e^{\int_{x_0}^{x} \lambda(t)\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_t^x \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad (x_0 \leq x \leq X) \tag{7}$$

利用$Gronwall$不等式导出...

假设两个给定方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x,y), \qquad y(x_0) = \xi_0 \tag{8}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_2(x,y), \qquad y(x_0) = \eta_0 \tag{9}$$

其中$f_1, f_2 \in C[a,b] \times (-\infty, \infty)$，且分别满足对$y$的Lipschitz条件。又设对$x$的任一区间$[c,d] \subset (a,b)$，存在连续函数$\delta(x)$，使不等式

$$|f_1(x,y) - f_2(x,y)| \le \delta(x), \qquad x \in [c,d] \tag{10}$$

对一切y成立。再设$y = \xi(x)$是方程(9)的经过点(x_0, ξ_0)的解曲线；$y = \eta(x)$是方程(10)的经过点(x_0, η_0)的解曲线，其中$a < x_0 < b$。当$x \in (x_0, b)$时，利用Gronwall不等式(7)可导出

$$|\xi(x) - \eta(x)| \le |\xi_0 - \eta_0| e^{L(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)} \delta(t)\mathrm{d}t \tag{11}$$

解对初值的连续性定理

定理3.6（解对初值的连续性定理）

设方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{12}$$
的右端$f(x,y)$在区域D中连续，并且满足Lipschitz条件。$y=\xi(x)$是方程(12)的经过(x_0,ξ_0)的解，定义于区间$[x_0,X]$（$X<b$）。则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|\eta_0-\xi_0|<\delta$时，(12)的经过点(x_0,η_0)的解曲线$y=\eta(x)$也在$[x_0,X]$上有定义，并且
$$|\eta(x)-\xi(x)|\le\varepsilon, \qquad x_0\le x\le X \tag{13}$$

证明过程参看图3.3。

图 3.3

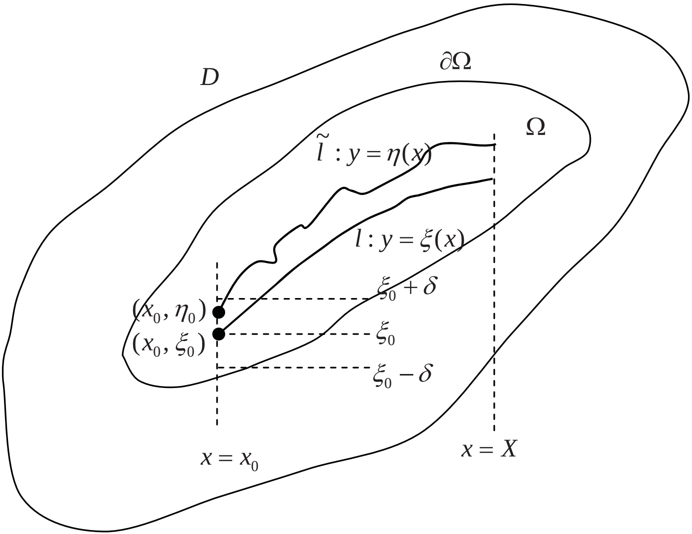

图3.3 解对初值的连续性

解关于方程右端函数的连续性定理

定理3.7（解关于方程右端函数的连续性定理）

设$y=\xi(x), x\in[x_0,X], X<b$是方程(12)的经过$(x_0,\xi_0)$的解。则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(x)\geq 0$，$\delta(x)\in C[x_0,X]$，对任何方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x,y) \tag{14}$$

只要$g(x,y)$在区域D中连续，满足局部Lipschitz条件以及以下不等式

$$|f(x,y)-g(x,y)|\leq\delta(x),\quad x_0\leq x\leq X,\quad -\infty<y<\infty$$

那么(14)的经过(x_0,ξ_0)的积分曲线$y=\eta(x)$也必在$[x_0,X]$上有定义，并且在$[x_0,X]$上满足不等式(13)。

对于方程右端含有参数λ的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y; \lambda) \tag{15}$$

记

$$D_\lambda = \{(x, y, \lambda) | (x, y) \in D, \alpha < \lambda < \beta\} \tag{16}$$

设$f(x, y; \lambda)$在D_λ内连续，且关于y满足局部Lipschitz条件，其Lipschitz常数L与参数λ无关。则采用类似定理3.6的证明方法，可以得到以下的解对参数的连续性定理。

解对参数的连续性定理

定理3.8（解对参数的连续性定理）

设$f(x,y;\lambda)$在(16)中定义的区域D_λ内连续，并且在D_λ内关于y一致地满足局部Lipschitz条件。$(x_0,\xi_0,\lambda_0)\in D_\lambda$，$y=\xi(x)$是方程(15)经过点$(x_0,\xi_0)$，参数$\lambda$取为$\lambda_0$时的积分曲线，其中$x\in[x_0,X],X<b$。则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|\lambda_1-\lambda_0|<\delta$时，方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y;\lambda_1) \tag{17}$$

的经过点(x_0,ξ_0)的积分曲线$y=\eta(x)$也在$[x_0,X]$上有定义，并且满足不等式(13)。

解对初值和参数的连续可微性定理

一般，对于微分方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y; \lambda) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \tag{18}$$

中的初值(x_0, y_0)和参数λ，我们讨论假如(x_0, y_0, λ)变动，则相应的初值问题(18)的解随之如何进行变动。也就是说，初值问题的解不仅仅依赖于自变量x，同时也依赖于初值(x_0, y_0)和参数λ。

定理3.9（解对初值和参数的连续可微性定理）

设方程(18)中的$f(x, y, \lambda)$当$(x, y) \in D$，$\lambda \in (\alpha, \beta) = I$是连续函数，且关于$x, y, \lambda$有连续偏导数。则方程(18)的解$y(x, x_0, y_0, \lambda)$有关于$x_0$，$y_0$和$\lambda$的连续偏导数。

解对初值和参数的连续可微性定理

一般，对于微分方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y; \lambda) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \tag{18}$$

中的初值(x_0, y_0)和参数λ，我们讨论假如(x_0, y_0, λ)变动，则相应的初值问题(18)的解随之如何进行变动。也就是说，初值问题的解不仅仅依赖于自变量x，同时也依赖于初值(x_0, y_0)和参数λ。

定理3.9（解对初值和参数的连续可微性定理）

设方程(18)中的$f(x, y, \lambda)$当$(x, y) \in D$，$\lambda \in (\alpha, \beta) = I$是连续函数，且关于$x, y, \lambda$有连续偏导数。则方程(18)的解$y(x, x_0, y_0, \lambda)$有关于$x_0$，$y_0$和$\lambda$的连续偏导数。

Sturm-Liouville问题

在求解数学物理的许多问题时，常常会碰到求解如下形式的常微分方程的特征值问题（称为Sturm-Liouville问题）

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \quad (a < x < b) & (19) \\ \left(-\alpha_1\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta_1 y\right)\Big|_{x=a} = 0, \quad \left(\alpha_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta_2 y\right)\Big|_{x=b} = 0 & (20) \end{cases}$$

其中λ为特征值，对应的非零解为特征函数。(19)中的$k(x)$、$q(x)$和$\rho(x)$为x在(a,b)中充分光滑的函数，而且当$x \in (a,b)$时，$k(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geq 0$。若$x = a$为$k(x)$的一阶零点，则要求特征函数$y(x)$在$x = a$近旁有界；若$x = b$为$k(x)$的一阶零点，则要求$y(x)$在$x = b$近旁有界。这里的$\rho(x)$成为权函数。(20)中规定常数$\alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0, \alpha_j + \beta_j > 0 \quad (j = 1,2)$。

Sturm-Liouville问题中包含了很大一类边界条件的特征值问题

(20)中包含了很大一类边界条件的特征值问题。例如，
若$\alpha_1 = 0$，则在$x = a$处为第一类边界条件；若$\beta_1 = 0$，则在$x = a$处为第二类边界条件；若$\alpha_1 \neq 0$、$\alpha_2 \neq 0$，则在$x = a$处为第三类边界条件。对于$x = b$处的边界条件也有类似的讨论。
当然，问题(20)没有把周期边界条件包括进去。对于周期边界条件问题，也有类似的讨论，这里就不讨论了。

*Sturm-Liouville*问题中包含了很大一类常微分方程的特征值问题

(19)包含了很大一类常微分方程的特征值问题。例如，
当$k(x) = x, q(x) = \frac{\nu^2}{x}, \rho(x) = x \quad (0 < x < l)$时，(19)就化为$\nu$阶Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0$$

又如，
当$k(x) = \frac{1}{1-x^2}, q(x) \equiv 0, \rho(x) \equiv 1 \quad (-1 < x < 1)$时，(19)就化为Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0$$

再如，当$k(x) \equiv 1, q(x) \equiv 0, \rho(x) \equiv 1$时，(19)就化为我们多次碰到的常微分方程

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

*Sturm-Liouville*问题中包含了很大一类常微分方程的特征值问题

(19)包含了很大一类常微分方程的特征值问题。例如，
当$k(x)=x, q(x)=\frac{\nu^2}{x}, \rho(x)=x \quad (0<x<l)$时，(19)就化为$\nu$阶Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\nu^2}{x}y+\lambda xy=0$$

又如，
当$k(x)=\frac{1}{1-x^2}, q(x)\equiv 0, \rho(x)\equiv 1 \quad (-1<x<1)$时，(19)就化为Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0$$

再如，当$k(x)\equiv 1, q(x)\equiv 0, \rho(x)\equiv 1$时，(19)就化为我们多次碰到的常微分方程

$$y''(x)+\lambda y(x)=0$$

Sturm-Liouville问题中包含了很大一类常微分方程的特征值问题

(19)包含了很大一类常微分方程的特征值问题。例如，
当$k(x)=x, q(x)=\frac{\nu^2}{x}, \rho(x)=x \quad (0<x<l)$时，(19)就化为$\nu$阶Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\nu^2}{x}y+\lambda xy=0$$

又如，
当$k(x)=\frac{1}{1-x^2}, q(x)\equiv 0, \rho(x)\equiv 1 \quad (-1<x<1)$时，(19)就化为Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0$$

再如，当$k(x)\equiv 1, q(x)\equiv 0, \rho(x)\equiv 1$时，(19)就化为我们多次碰到的常微分方程

$$y''(x)+\lambda y(x)=0$$

*Sturm-Liouville*问题中包含了很大一类常微分方程的特征值问题

(19)包含了很大一类常微分方程的特征值问题。例如，
当$k(x)=x, q(x)=\frac{\nu^2}{x}, \rho(x)=x \quad (0<x<l)$时，(19)就化为$\nu$阶Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\nu^2}{x}y+\lambda xy=0$$

又如，
当$k(x)=\frac{1}{1-x^2}, q(x)\equiv 0, \rho(x)\equiv 1 \quad (-1<x<1)$时，(19)就化为Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0$$

再如，当$k(x)\equiv 1, q(x)\equiv 0, \rho(x)\equiv 1$时，(19)就化为我们多次碰到的常微分方程

$$y''(x)+\lambda y(x)=0$$

*Sturm-Liouville*问题解的性质

性质1 特征值$\lambda \geq 0$。特别的，当$\beta_1+\beta_2>0$（即两端不同时为第二类边值问题）时，问题(19)、(20)的所有特征值$\lambda>0$

性质2 有可列无穷多个非负特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$满足

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

性质3 对应于不同特征值的特征函数在$[a,b]$中是带权正交的。

性质1 特征值$\lambda \geq 0$。特别的，当$\beta_1+\beta_2>0$（即两端不同时为第二类边值问题）时，问题(19)、(20)的所有特征值$\lambda>0$

性质2 有可列无穷多个非负特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$满足

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

性质3 对应于不同特征值的特征函数在$[a,b]$中是带权正交的。

Sturm-Liouville问题解的性质

性质1 特征值$\lambda \geq 0$。特别的，当$\beta_1 + \beta_2 > 0$（即两端不同时为第二类边值问题）时，问题(19)、(20)的所有特征值$\lambda > 0$

性质2 有可列无穷多个非负特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$满足

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

性质3 对应于不同特征值的特征函数在$[a, b]$中是带权正交的。

*Sturm-Liouville*问题解的性质

性质1 特征值$\lambda \geq 0$。特别的，当$\beta_1 + \beta_2 > 0$（即两端不同时为第二类边值问题）时，问题(19)、(20)的所有特征值$\lambda > 0$

性质2 有可列无穷多个非负特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$满足

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

性质3 对应于不同特征值的特征函数在$[a, b]$中是带权正交的。

性质4　对于同一特征值，对应的特征函数最多只有有限个。若某特征值对应的线性无关特征函数不止一个，利用正交化方法，可使这些特征函数互相带权$\rho(x)$正交。由于对应不同特征值的特征函数是带权$\rho(x)$正交的，这样便得到了$[a,b]$上完备的带权$\rho(x)$的正交特征函数系$\{y_n(x), n = 1, 2, \cdots\}$，使对$[a,b]$上任一平方可积函数$f(x)$，都可以按此特征函数系进行Fourier展开，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \tag{21}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\sigma_n}\int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{22}$$

(22)中的σ_n为

$$\sigma_n = \int_a^b \rho(x)[y_n(x)]^2\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{23}$$

(21)中的收敛是在$L^2[a,b]$的范数意义之下：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{24}$$

当$f(x)$在$[a,b]$中充分光滑且满足(20)中的边界条件时，(21)可以是一致收敛的。