常微分方程

第六章　稳定性理论简介

上海财经大学应用数学系

March 24, 2010

例1

讨论微分方程$x' = 1, t \in [0, +\infty)$的特解如何随初值的变化而变动。

例2

考虑微分方程
$$\frac{dx}{dt} = ax$$
其满足初始条件$x(0) = x_0$的解$x(t) = x_0 e^{at}$关于初值的连续性。

解的稳定性

设$x=\psi(t)$是系统

$$\frac{dy}{dx}=f(t,x) \tag{1}$$

在$[0,+\infty)$上有定义的一个特解，对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使得
(1) 对于满足$\|x_0-\psi(0)\|<\delta(\varepsilon)$的初值$x(0)=x_0$，对应的解$\phi(t;0,x_0)$ 在$[0,+\infty)$上存在;
(2) 对一切$t\in[0,+\infty)$有

$$\|\phi(t;0,x_0)-\psi(t)\|<\varepsilon$$

则称特解$\psi(t)$在Lyapunov意义下稳定。

解的稳定性

若(1)的解$x = \psi(t)$是稳定的，且存在$\delta > 0$，
当$\|x_0 - \psi(0)\| < \delta$时，有

$$\lim_{t \to +\infty} \|\phi(t; 0, x_0) - \psi(t)\| = 0$$

则称$\psi(t)$是Lyapunov意义下渐近稳定的；如果$\delta > 0$可以任意取，
则称$\psi(t)$是全局渐近稳定的。

稳定性的线性近似判定

线性常系数齐次方程组零解的稳定性

一阶常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2}$$

的零解具有以下性质:
(1) 若A的特征值实部全为负，则$x' = Ax$的零解全局渐近稳定;
(2) 若A的特征值实部出现正数，则$x' = Ax$的零解不稳定。

线性常系数齐次方程组零解的稳定性

例3

考察系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

的零解的稳定性。

例4

考察系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

的零解的稳定性。

线性常系数齐次方程组零解的稳定性

例5

考察系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

的零解的稳定性。

稳定性的线性近似判定

非线性方程组的线性近似和稳定性

定理6.1 如果方程组(1)的线性近似系统$x' = Ax$，A的特征根皆有负实部，又$N(t,x)$在$\|x\| \le H$，$t \ge 0$上连续，对x Lipschitz连续，且

$$N(t,0)=0, \quad \lim_{|x|\to 0}\frac{1}{\|x\|}\|N(t,x)\| = 0$$

则方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + N(t,x) \tag{3}$$

的零解渐近稳定。

非线性方程组的线性近似和稳定性

例6

察$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x_2' = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$ 的零解与其线性近似系统的零解的稳定性是否一致?

例7

考察$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$ 的零解与其线性近似系统的零解的稳定性是否一致?

常正(负)函数与定正(负)函数

设$V(x)$是闭区域$\|x\| \leq H$上的连续函数，$x \in R^n$，$V(0)=0$，$V(x) \geq 0 \ \ (\leq 0)$，则称$V(x)$为常正(负)函数;
若$V(0)=0, x \neq 0$时，$V(x) > 0 \ (< 0)$，则称$V(x)$为定正(负)函数。

自治系统稳定性的Lyapunov判别法

定理6.2 如果$f(0)=0$，而且$f(x)$在$\|x\|\le H$上连续，$V(x)$是$\|x\|\le H$上的定正(负)函数，且$V(x)$在$\|x\|\le H$上连续可微，$\langle \nabla V, f\rangle = v(x)$，则$v(x)$常负(正)时，$x'=f(x)$的零解稳定，$v(x)$定负(正)时，
$x'=f(x)$的零解渐近稳定。
其中$\nabla V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)$是$V(x)$的梯度，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示向量内积。

例1

考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2x^2 \end{cases}$$

例2

考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x^2y - y^3 \end{cases}$$

例3

研究零解的稳定性:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^3 \end{cases}$$

自治系统不稳定性的李雅普诺夫判别法

定理6.3 如果在原点邻域Ω内存在连续可微函数$V(x)$，$V(0)=0$，在原点任何邻域内$V(x)$总可取到正值(负值)，且沿$x'=f(x)$的解$\dfrac{dV}{dt}=\langle\nabla V,f\rangle$定正(定负)，则$x'=f(x)$的零解不稳定，其中$f(x)$在$\Omega$内连续且$f(0)=0$。

例4

讨论方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2(x^3 - y^5) \end{cases}$$

的零解的稳定性。

例5

考虑方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 - 2y^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = xy^2 + x^2y + \dfrac{1}{2}y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。

例6

虑平面微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + ax^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。

例1

考虑无阻尼线性振动方程

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{4}$$

的平衡位置的稳定性。

例2

考虑有阻力的数学摆的振动，其微分方程为

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{5}$$

这里长度l，质量m和重力加速度g均大于0，并设阻力系数$\mu > 0$。令$x = \phi$，$y = \dfrac{d\phi}{dt}$。

例3

讨论范德坡(Van der Pol)方程

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu(1 - x^2), \quad (\mu > 0) \end{cases}$$

零解的稳定性。