上海财经大学《 常微分方程 》模拟试卷四答案

一.

1. 解：变量分离 $\frac{e^y}{(1-e^y)}\frac{dy}{} = e^x dx$ ，两边积分 $\ln(1-e^y) = e^x + c$，另外 $y=0$ 也是常数解。

2.解：方程变形为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2$，令 $\frac{y}{x} = u$，方程化为 $x\frac{du}{dx} = -u^2$，解为 $\frac{1}{u} = \ln|x| + c$，另外，$y = x$ 也是常数解。

3. 解：$\begin{array}{l} M = y - 3x^2 \quad N = x - 4y \\ \frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} \end{array}$ ，方程是全微分方程，解为 $xy - x^3 - 2y^2 = c$

4. 解：

$$M = 2xy \quad N = -(x^2 + y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$ ，方程有积分因子 $\frac{1}{y^2}$，方程的通解为 $\frac{x^2}{y} - \ln|y| = c$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{2}{y}$$

5. 解：对应齐次方程的特征方程是 $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0 \quad \lambda = 2$(二重)，$\lambda$=3

方程的特解是 $x^* = Ax + B$，代入方程得 $A = -\frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{9}$，方程的通解为

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{1}{12}x - \frac{1}{9}$$

二．解：系数矩阵的特征方程为 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，相应于 $\lambda_2 = -5$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，

方程的通解为

$$X(t) = \left(e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) c$$

三． 解：

$$f(x,y)=x-y^2$$
$$\phi_0=0$$
$$\phi_1=\int_1^x xdx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$$
$$\phi_2=\int_1^x x-(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2})^2dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{6}-\frac{1}{4}x-\frac{11}{30}$$

四．解：证$\Phi(t-t_0)$也是方程组$X'=AX$的解矩阵，因为

$$\Phi'(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$$

且$\det\Phi(t-t_0)\neq 0$

所以$\Phi(t-t_0)$也是方程组的基解矩阵，两个基解矩阵之间存在非奇异变换

$\Phi(t-t_0)=\Phi(t)C$，取$t=t_0$，结论成立