第二章　初等积分法

本章，介绍一阶微分方程的初等积分法。所谓初等积分法，是将微分方程的求解问题转化为积分问题的方法。

2.1　分离变量法

分离变量法是一种直接求解的方法，是解微分方程的重要方法之一。

定义 2.1 如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$中的函数$f(x,y)$可以写成$f(x,y)=g(x)h(y)$ 的形式，即

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y) \tag{2.1}$$

称（*2.1*）为***变量（可）分离方程***。其中，函数$g(x)$和$h(y)$均为某区间上的连续函数。

考察以下几个方程：

(1)$\frac{dy}{dx}=x(y+1)$

(2)$\frac{dy}{dx}=ye^{x+y}$

(3)$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$

(4)$\frac{dy}{dx}=\sin(xy)$

求解方法：分离变量法

（1）如果有y_0，使得$h(y_0)=0$，则$y=y_0$是方程（2.1）的解；

（2）如果$h(y)\neq 0$ ，就分离变量，将方程改写为

$$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$$

再将上式两边积分，得

$$\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx+c \tag{2.2}$$

（2.2）就是原方程的通解。

注1　在常微分方程中，不定积分号$\int f(x)dx$ 只表示$f(x)$的任意一个但是确定的原函数，而不表示$f(x)$的全体原函数；

注2　在（2.2）中，如果能明确解出$y=\phi(x,c)$的形式，则函数$y=\phi(x,c)$就是原方程的显式通解，但在许多情况下，不一定能积分出来，这时可理解为（2.2）为原方程的隐式通解。

【例1】　求方程$\dfrac{dy}{dx}=1+y$的通解。

【例2】　求方程$\dfrac{dy}{dx}=2x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$的通解。

【例3】　求方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy^2}{1-x^2}$满足初始条件$y(0)=1$ 的特解。

【例4】　求解§1.1 例1中得到的方程。

【例5】　**雪球的融化** 设雪球在融化时体积的变化率与表面积成比例，且在融化过程中它始终为球体。该雪球在开始时的半径为6cm，经过2小时后，其半径缩小为3cm。求雪球的体积随时间变化的关系。

2.2 变量替换法

本节介绍几种典型的可通过一次或几次变量替换化为变量分离方程的类型。

2.2.1 齐次方程

定义 2.2 称一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \tag{2.3}$$

为齐次方程。

考虑下列微分方程：

(1)$\dfrac{dy}{dx} = \ln y - \ln x$

(2)$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

(3)$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

(4)$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

(5)$\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

求解方法：变量替换法

令

$$u = \frac{y}{x} \tag{2.4}$$

则u是x的函数。为了消去y，将(2.4)变形为$y = xu$，再两边同时对x 求导，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(xu)}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

结合方程(2.3)，有

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = f(u)$$

即

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \tag{2.5}$$

这是关于u与x的变量分离方程。按2.1的方法求解，然后再将$\dfrac{y}{x}$代替u，便可得到齐次方程的通解。

【例1】 解方程 $x\dfrac{dy}{dx} = y(1 + \ln y - \ln x)$

【例2】　解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

【例3】　设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续、非负，曲线$y=f(x)$, $y=0$，$x=1$，$x=t$所围城的图形面积等于t处纵坐标的立方与横坐标之比，且$f(1)=1$。求此曲线方程。

【例4】　设河边点O的正对岸点A，河宽$OA=h$，两岸为平行直线，水流速度为a。有鸭子从点A游向点O，鸭子（在静水中）的游速为b $(b>a)$，且鸭子游动方向始终朝着点O，求鸭子游过的轨迹。

2.2.2　可化为齐次的方程

定义 2.3　称一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}) \tag{2.6}$$

是***可化为齐次的方程***。其中a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2均为实常数。

考察下面几个方程

(1)$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4y-2x-6}{x+y-3}$

(2)$\dfrac{dy}{dx}=2(\dfrac{y+2}{x+y-1})^2$

(3)$\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2+3$

(4)$\dfrac{dy}{dx}=\sin^2(x-y)$

求解方法：变量替换法

(1) 如果$c_1=c_2=0$，方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y})=f(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}})=g(\frac{y}{x}) \tag{2.7}$$

这是齐次方程，可通过变量替换化为变量分离方程来求解。

(2)如果$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$

设$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$，则方程(2.6)可改写为

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}) \tag{2.8}$$

作变量替换，令$u=a_2x+b_2y$，则方程(2.8)化为

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(\frac{ku+c_1}{u+c_2})$$

这是变量分离方程。

(3)如果$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

作变量替换，令

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

则方程(2.6)化为

$$\frac{dY}{dX} = f(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y})$$

这是关于X, Y的齐次方程。

求解步骤：

(I) 解方程组$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$，得解$x = \alpha, y = \beta$；

(II) 作变量替换$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$，方程化为齐次方程$\frac{dY}{dX} = f(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y})$；

(III) 再作变量替换$u = \frac{Y}{X}$，方程化为变量分离方程，求解；

(IV) 变量还原，得原方程的通解。

【例5】 解方程 $(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$

【例6】 解方程 $(x - 2\sin y + 3)dx - (2x - 4\sin y - 3)\cos y dy = 0$

变量替换法在微分方程的求解中，有着重要的作用。但对如何选用适当的变量替换，将方程转化为可解的类型，一般来说，没有统一的方法，往往要根据方程本身的特点去构造。

【例7】 解方程 $2y\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2 + y^2}{x} - 2x$

【例8】 解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sin^2(xy)} - \frac{y}{x}$

2.2.3 一阶线性方程

定义 2.4 称方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x) \tag{2.9}$$

为**一阶线性微分方程**。其中$P(x), Q(x)$是连续函数。

如果$Q(x) \equiv 0$，即

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \tag{2.10}$$

称之为**一阶齐次线性方程**；如果$Q(x) \neq 0$，称(2.9)为**一阶非齐次线性方程**。

考察下列方程是否为线性方程？

(1) $(x-1)\frac{dy}{dx}=y$

(2) $3x^2+5xy-\frac{dy}{dx}=0$

(3) $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$

(4) $\frac{dy}{dx}=1+\cos y$

(5) $(\frac{dy}{dx})^2+xy=e^x$

求解方法：常数变易法

注意到方程(2.10)实际上是一个变量分离方程，所以很容易求出它的通解

$$y=ce^{\int P(x)dx} \tag{2.11}$$

其中，c是任意常数。

如何求方程（2.9）的通解。

考虑到方程(2.9)和(2.10)只相差$Q(x)$这一项，故猜测：方程(2.9)的解会不会也如(2.11)的形式？但c 不会是任意常数，而应是x的某个未知函数$c(x)$。于是，作变量替换，令

$$y=c(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.12}$$

其中，$c(x)$为待定函数。

将(2.12)对x求导，得

$$\frac{dy}{dx}=c'(x)e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.13}$$

代入方程(2.9)中，化简得

$$c'(x)=Q(x)e^{-\int P(x)dx}$$

两边同时积分，则待定函数为

$$c(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c \tag{2.14}$$

其中c为任意常数。

把(2.14)代入(2.12)中，就得到非齐次线性方程(2.9)的通解

$$y=ce^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx \tag{2.15}$$

注1 *(2.15)也可写成*

$$y=ce^{\int_{x_0}^{x}P(x)dx}+e^{\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}dx$$

【例9】 解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}+(x+1)^{\frac{5}{2}} \tag{2.16}$$

【例10】 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos y}{\cos y\sin 2y-x\sin y}$的通解。

【例11】 一容器内盛有50L的盐水溶液，其中含有10g的盐。现将每升含盐2g的溶液，以每分钟5L的速度注入容器，并不断搅拌，使混合液迅速达到均匀，同时混合液以每分钟3L的速度流出容器，问任一时刻容器中含盐量是多少？

2.2.4 Bernoulli方程

定义 2.5 称方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \tag{2.17}$$

为*Bernoulli*方程。其中n为不等于$0,1$ 的实常数，$P(x),Q(x)$在区间I上连续。

当$n=0,1$时，方程(2.17)恰好为一阶线性方程; 当$n\neq 0,1$ 时，方程(2.17)就是一个一阶非线性方程。

考察下面两个方程:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

求解方法：变量替换法

在$y\neq 0$时，先将方程(2.17)变形为

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=P(x)y^{1-n}+Q(x)$$

即

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}=P(x)y^{1-n}+Q(x)$$

作变量替换，令

$$z=y^{1-n}$$

得

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x) \tag{2.18}$$

这是关于z与x的一阶线性方程。利用线性方程的通解公式求出通解后，再将$z=y^{1-n}$代回，便得Bernoulli方程的通解。

注2 如果$n>0$，则$y=0$也是Bernoulli方程的一个解。

【例12】 求方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$的通解。

2.2.5 Riccati方程

Riccati方程的某些特殊情形可通过变量替换法求解。

定义 2.6 称方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + f(x) \tag{2.19}$$

为*Riccati*方程。其中$P(x), Q(x)$和$f(x)$在区间I上连续，且$P(x)$不恒等于零。

考虑以下四种特殊情形：

(1) 当$P(x), Q(x), f(x)$都是常数时，方程(2.19)是变量分离方程；

(2) 当$P(x) \equiv 0$时，方程(2.19)是一阶线性方程；

(3) 当$f(x) \equiv 0$时，方程(2.19)是Bernoulli方程；

(4) 当$P(x) \not\equiv 0, f(x) \not\equiv 0$时，如果已知方程(2.19)的一个特解，利用变量替换，方程(2.19)可化为Bernoulli方程。

设$y = \phi_1(x)$是方程(2.19)的一个特解，令

$$y = z + \phi_1(x) \tag{2.20}$$

代入方程(2.19)中，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{d\phi_1}{dx} = P(x)[z + \phi_1(x)]^2 + Q(x)[z + \phi_1(x)] + f(x)$$

展开后，有以下形式

$$\frac{dz}{dx} + \frac{d\phi_1}{dx} = P(x)z^2 + [2\phi_1(x)P(x) + Q(x)]z + P(x)\phi_1^2(x) + Q(x)\phi_1(x) + f(x)$$

而$y = \phi_1(x)$是方程(2.19)的一个特解，所以恒有等式

$$\frac{d\phi_1}{dx} = P(x)\phi_1^2(x) + Q(x)\phi_1(x) + f(x)$$

于是

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z^2 + [2\phi_1(x)P(x) + Q(x)]z$$

这是一个Bernoulli方程。由此，可求出方程(2.19)的通解。

【例13】 求方程 $x^2\frac{dy}{dx} = x^2y^2 + xy + 1$的通解。

2.3 积分因子法

这一节，我们要详细讨论具有对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.21}$$

的初等解法。

以下总是假设$M(x,y), N(x,y)$在某区域内具有连续的一阶偏导数，并且满足$M^2(x,y)+N^2(x,y) \neq 0$。

2.3.1 全微分方程的定义与判别条件

定义 2.7 *若有连续可微的二元函数$u(x,y)$，恰好满足*

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2.22}$$

*则称(2.21)为**全微分方程**。*

此时，方程的通解为$u(x,y)=c$。

考察下列方程

(1) $xdx + ydy = 0$;

(2) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$;

(3) $(3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy)dy = 0$;

(4) $(e^x + y)dx + (x - 2\sin y)dy = 0$;

(5) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$;

考虑以下三个问题：

(1) 对方程(2.21)，如何判别它是否为全微分方程？

(2) 如果方程(2.21)是一个全微分方程，如何找出二元函数？

(3) 如果方程(2.21)不是一个全微分方程，有无可能将它转化为一个全微分方程，再去求解？

定理 2.1 *设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在某区域内连续且有连续的一阶偏导数，则方程(2.21)是全微分方程的充分必要条件是*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.23}$$

注1　*定理的证明也可采用定积分形式。在区域内任取一点(x_0,y_0)，则*

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} [N - \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M dx] dy \\
&= \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} [N - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx] dy \\
&= \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} [N - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx] dy \\
&= \int_{x_0}^{x} M(x,y) dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y) dy
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

2.3.2　全微分方程的求解

凑微分法：将一个全微分方程“分项组合”，利用一些熟知的二元函数的全微分，使方程的每一块都是某个函数的全微分形式；

不定积分法：利用定理2.1的证明就可求出函数$u(x,y)$，从而$u(x,y)=c$为方程的通解；

线积分法：利用积分与路径无关的条件和公式(2.24)，得方程的通解为

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c \tag{2.25}$$

或

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = c \tag{2.26}$$

其中(x_0,y_0)的选择要尽量简单，并使$M(x,y),N(x,y)$有意义。

常见的二元函数的全微分：

(1) $xdx + ydy = d(\frac{x^2+y^2}{2})$;

(2) $ydx + xdy = d(xy)$;

(3) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$;

(4) $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$;

(5) $\frac{ydx - xdy}{xy} = d(\ln|\frac{x}{y}|)$;

(6) $\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = d(\arctan\frac{x}{y})$;

(7) $\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=d(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2))$;

(8) $\dfrac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=d(\dfrac{1}{2}\ln|\dfrac{x-y}{x+y}|)$。

【例1】 验证方程$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$是全微分方程，并求它的通解。

【例2】 验证方程$(x+\dfrac{y}{x^2})dx-\dfrac{1}{x}dy=0$是全微分方程，并求它的通解。

【例3】 已知$f(0)=\dfrac{1}{2}$，试确定$f(x)$，使

$$(e^x+f(x))ydx+f(x)dy=0$$

为全微分方程，并求此全微分方程的通解。

2.3.3 积分因子

定义 2.8 *如果存在连续可微的函数$\mu(x,y)\neq 0$，使得*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{2.27}$$

为全微分方程，则称$\mu(x,y)$为原方程(2.21)的一个积分因子。

由于方程(2.21)和(2.27)是等价的，所以(2.27)的通解$u(x,y)=c$就是原方程(2.21)的通解。

【例4】 考察方程$ydx-xdy=0$的积分因子，并求方程的通解。

如何求积分因子呢？

定理 2.2 *设$M(x,y),N(x,y)$和$\mu(x,y)$在某区域内连续且有连续的一阶偏导数，$\mu(x,y)\neq 0$，则$\mu(x,y)$是方程(2.21)的一个积分因子的充分必要条件是*

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \tag{2.28}$$

下面考虑两种特殊情况下，求积分因子的方法。

定理 2.3 *(1) 方程(2.21)有一个仅依赖于x的积分因子的充分必要条件是*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\phi(x) \tag{2.29}$$

其中$\phi(x)$只与x有关。当(2.29)成立时，函数

$$\mu(x)=e^{\int\phi(x)dx}$$

是一个积分因子。

*(2) 方程(2.21)*有一个仅依赖于y的积分因子的充分必要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\varphi(y) \tag{2.30}$$

其中$\varphi(y)$只与y有关。当*(2.30)*成立时，函数

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}$$

是一个积分因子。

【例5】　求方程$(xy+y^2)dx+(xy+y+1)dy=0$的通解。
【例6】　求一阶线性方程的积分因子。
【例7】　求方程$(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$的通解。

2.4 参数法

这一节，我们讨论一阶隐式方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{2.31}$$

或叫导数未解出的一阶方程。

定义 2.9 对于(2.31)，如果存在定义于(α, β)上的可微函数$x = \phi(t)$与$y = \varphi(t)$，使得当$t \in (\alpha, \beta)$时，有

$$F[\phi(t), \varphi(t), \frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}] = 0$$

成立，则称$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}, t \in (\alpha, \beta)$ 为方程(2.31)的***参数形式的解***。

参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \phi(t, c) \\ y = \varphi(t, c) \end{cases}, t \in (\alpha, \beta)$$

2.4.1 可解出y或x的隐式方程

对方程

$$y = f(x, \frac{dy}{dx}) \tag{2.32}$$

引进参数$\frac{dy}{dx} = p$，则(2.32)变为

$$y = f(x, p) \tag{2.33}$$

为了消去y，将(2.33)两边对x求导数，并以$\frac{dy}{dx} = p$代入，得到

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \tag{2.34}$$

即

$$(p - \frac{\partial f}{\partial x})dx - \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0 \tag{2.35}$$

这是以p为未知函数的一阶显式方程，用前面学过的方法就可以求出它的通解。

如果所得的通解为$p = \phi(x, c)$，将它代入(2.32)中，则原方程的通解为

$$y = f(x, \phi(x, c));$$

如果所得的通解为$x=\varphi(p,c)$，将它与(2.32)联立，则原方程的通解为

$$\begin{cases} x=\varphi(p,c) \\ y=f(\varphi(p,c),p) \end{cases}$$

其中p为参数，c为任意常数。

如果所得的通解为$\Phi(x,p,c)=0$，将它与(2.32)联立，则原方程的通解为

$$\begin{cases} \Phi(x,p,c)=0 \\ y=f(x,p) \end{cases}$$

其中p为参数，c为任意常数。

【例1】 求方程$y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$的通解。

【例2】 求在第一象限中的一条曲线，使其上每一点的切线与两坐标轴所围成的三角形面积均等于2。

2.4.2 不显含y或x的隐式方程

对方程

$$F(x,y')=0 \tag{2.36}$$

引进参数$\frac{dy}{dx}=p$，从几何上看方程$F(x,p)=0$，意味着是(x,p)平面的一条曲线。如果能将这条曲线表示成参数形式

$$x=\phi(t) \tag{2.37}$$

$$p=\varphi(t) \tag{2.38}$$

其中t为参数，那么只要再将y表示成t的函数，结合(2.62)，就可以得到原方程的参数形式的解。为此，将(2.63)代入$\frac{dy}{dx}=p$中，得

$$dy=pdx=\varphi(t)dx=\varphi(t)\cdot\phi'(t)dt$$

两边积分，得

$$y=\int\varphi(t)\cdot\phi'(t)dt+c$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\int\varphi(t)\phi'(t)dt+c \end{cases}$$

其中c为任意常数。

对方程

$$F(y,y')=0 \tag{2.39}$$

引进参数$\dfrac{dy}{dx}=p$，方程$F(y,p)=0$表示(y,p)平面上的一条曲线。若能将这条曲线表示成参数形式

$$y=\phi(t) \tag{2.40}$$

$$p=\varphi(t) \tag{2.41}$$

则只要再将x表示成t的函数即可。为此当$p\neq 0$时，将(2.66)代入$\dfrac{dy}{dx}=p$中，得

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{1}{\varphi(t)}\cdot\phi'(t)dt$$

两边积分，得

$$x=\int\frac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt+c$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x=\int\dfrac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt+c \\ y=\phi(t) \end{cases}$$

其中c为任意常数。

当$p=0$时，若方程$F(y,0)=0$有实根$y=k$，则$y=k$也是方程的解。

【例3】 求方程$y^2(1+y'^2)=1$的通解。

【例4】 求方程$(y')^3-x^3(1-y')=0$的通解。

2.5 应用实例

一、商品市场价格与需求量(供给量)的关系

【例1】 某商品的需求量Q对价格P的弹性为$-P\ln 3$，若该商品的最大需求量为1200(即$P=0$时,$Q=1200$)，(P的单位为元，Q的单位为kg)。

(1)试求需求量Q与价格P的函数关系;

(2)求当价格为1元时,市场对该商品的需求量;

(3)当$P\to+\infty$时,需求量的变化趋势如何?

【例2】 某商品的需求函数与供给函数分别为

$$Q_d=a-bP,\ \ Q_s=-c+dP$$

其中a,b,c,d均为正常数。假设商品价格P是时间t的函数，已知初始价格为P_0，且在任一时刻t，价格$P(t)$的变化率与这一时刻的超额需求Q_d-Q_s成正比(比例常数为$k>0$)。

(1) 求供需相等时的价格P_e(均衡价格);

(2) 求价格$P(t)$的表达式;

(3) 分析价格$P(t)$随时间的变化情况。

二、预测可再生资源的产量,预测商品的销售量

【例3】 某产品的销售量$x(t)$是时间t的可导函数，如果商品的销售量对时间的增长率$\dfrac{dx}{dt}$与销售量$x(t)$及销售量接近于饱和水平程度$N-x(t)$之积成正比，(N为饱和水平，比例常数为$k>0$)，且当$t=0$时，$x=\dfrac{1}{4}N$。

(1) 求销售量$x(t)$;

(2) 求$x(t)$的增长最快的时刻T。

三、成本分析

【例4】 某商场的销售成本y和存贮费用S均是时间t的函数，随时间t的增长，销售成本的变化率等于存贮费用的倒数与常数5的和，而存贮费用的变化率为存贮费用的$(-\dfrac{1}{3})$倍。若当$t=0$时，销售成本$y=0$，存贮费用$S=10$。试求

(1) 销售成本与时间t的函数关系;

(2) 存贮费用与时间t的函数关系。

四、关于国民收入、储蓄与投资的关系问题

【例5】 在宏观经济研究中，发现某地区的国民收入y，国民储蓄S和投资I均是时间t的函数。且在任一时刻t，储蓄额$S(t)$为国民收入$y(t)$的$\dfrac{1}{10}$倍，投资额$I(t)$是国民收入增长率$\dfrac{dy}{dt}$的$\dfrac{1}{3}$倍，且$t=0$时，国民收入为5(亿元)。设在时刻t的储蓄全部用于投资，试求国民收入函数。