常微分方程

第一章　绪论

上海财经大学应用数学系

March 18, 2010

1.1 微分方程的模型

人口预测模型

影响人口增长的因素很多,如人口的自然出生率、人口的自然死亡率、人口的迁移、自然灾害、战争等诸多因素。英国人口统计学家Malthus（1766-1834）根据百余年的统计资料，于1798年提出了闻名于世的Malthus人口模型：在单位时间内人口的增长量与人口成正比。在此假设下,试推导人口随时间变化的数学模型。

模型的建立

设时刻t的人口数量为$N(t)$, r为比例系数。根据Malthus的理论, 在t到$t+\Delta t$时间段内, 人口的增长量为

$$N(t+\Delta t) - N(t) \approx rN(t)\Delta t$$

从而

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \approx rN(t)$$

令$\Delta t \to 0$ 就得到

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

再假设$t = t_0$时刻的人口为N_0, 于是得到

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \tag{1}$$

这就是Malthus人口模型。

市场价格模型

对于纯粹的市场经济来说，商品市场价格取决于市场供需之间的关系，市场价格能促使商品的供给与需求相等(这样的价格称为(静态)均衡价格)。也就是说,如果不考虑商品价格形成的动态过程,那么商品的市场价格应能保证市场的供需平衡，但是,实际的市场价格不会恰好等于均衡价格，而且价格也不会是静态的，应是随时间不断变化的动态过程。试建立描述市场价格形成的动态过程的数学模型。

模型的建立

假设在某一时刻t, 商品的价格为$p(t)$, 其变化率$\frac{dp}{dt}$与需求和供给之差成正比。记$f(p,r)$为需求函数, $g(p)$为供给函数(r为参数), 于是得到如下方程

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha[f(p,r) - g(p)] \\ p(0) = p_0 \end{cases} \tag{2}$$

其中p_0为商品在$t = 0$时刻的价格, α为正常数。

打假模型

随着经济的发展，制造与销售假冒伪劣品等违法犯罪活动(以下简称造假)越来越引起人们的广泛关注。如何采取有效措施以减少甚至杜绝造假活动，是一项长期而艰巨的任务。试建立打假模型。

模型的建立

假设：(1)$I(t)$为t时刻的假冒伪劣商品数(单位:件)，并将$I(t)$看作t的连续函数, 且初始时刻$t=0$时，假品数为$I_0>0$; (2) 单位时间内造假产生的假冒伪劣商品数为常数A; (3) 单位时间内维持正常的社会经济秩序打掉的假品数为常数B; (4)单位时间内因政府部门开展某种打假运动所打掉的假品数与t时刻的假品数成正比，即$C\cdot I(t)$，其中C为打假强度系数; (5) 假品单位时间内应控制在一定数量以内，设小于D，D称为临界值。

根据微观模式的守恒原理:净变化率=输入率−输出率，有

$$I(t+\Delta t)-I(t)=(A-B-CI(t))\Delta t$$

两边同时除以Δt并令$\Delta t\to 0$得以下方程

$$\begin{cases}\dfrac{dI(t)}{dt}=A-B-CI(t)\\ I(0)=I_0\end{cases}\qquad(3)$$

微分方程

联系自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程。

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y \tag{4}$$

$$(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + tx(\frac{dx}{dt})^3 + x = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{7}$$

1.2 常微分方程的基本概念

微分方程

联系自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程。

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y \tag{4}$$

$$(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + tx(\frac{dx}{dt})^3 + x = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{7}$$

1.2 常微分方程的基本概念

常微分方程

如果微分方程中自变量的个数只有一个，称为常微分方程

偏微分方程

如果微分方程中自变量的个数有两个或两个以上，称为偏微分方程。

微分方程的阶数

一个微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，称为方程的阶数。

一般的n阶微分方程的形式为

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \tag{8}$$

这里，x是自变量，y是未知函数，$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n})$是$x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$的已知函数，而且其中一定含有$\frac{d^n y}{dx^n}$。

微分方程的阶数

一个微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，称为方程的阶数。

一般的n阶微分方程的形式为

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \tag{8}$$

这里，x是自变量，y是未知函数，$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n})$是$x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$的已知函数，而且其中一定含有$\frac{d^n y}{dx^n}$。

n阶非线性微分方程

如果n阶微分方程(1.14)的左端函数$F(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^ny}{dx^n})$是关于$x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^ny}{dx^n}$的一次式，则称之为$n$阶线性微分方程，否则称之为$n$阶非线性微分方程.

一般的n阶线性微分方程的形式为

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{9}$$

其中，$a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$和$f(x)$是x的已知函数。

n阶非线性微分方程

如果n阶微分方程(1.14)的左端函数$F(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^ny}{dx^n})$是关于$x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^ny}{dx^n}$的一次式，则称之为$n$阶线性微分方程，否则称之为$n$阶非线性微分方程.

一般的n阶线性微分方程的形式为

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{9}$$

其中，$a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$和$f(x)$是x的已知函数。

微分方程的解

设函数$y=\phi(x)$在区间$[a,b]$内连续，且有直到n阶的导数。如果下面的式子恒成立

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))\equiv 0,\quad a\le x\le b$$

则称$y=\phi(x)$为方程在区间$[a,b]$上的解。

微分方程的通解

如果微分方程的解中含有一个或多个任意常数，且其所含的相互独立的任意常数的个数等于该方程的阶数，称这样的解为方程的通解。

一般的n阶微分方程的通解可以表示为

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \tag{10}$$

其中，$c_1, c_2, \cdots, c_n$是相互独立的任意常数。

微分方程的通解

如果微分方程的解中含有一个或多个任意常数，且其所含的相互独立的任意常数的个数等于该方程的阶数，称这样的解为方程的通解。

一般的n阶微分方程的通解可以表示为

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \tag{10}$$

其中，$c_1, c_2, \cdots, c_n$是相互独立的任意常数。

例1

判断函数$y=-\dfrac{1}{\sin x+c}$是否是方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$$

的通解。

注:

对微分方程来说，能够求出通解的情况并不多，在实际应用中所需要的多是求微分方程的一个“特定的解”。而这个“特定的解”所必须满足的条件，称为定解条件。
常见的定解条件是初始条件。

一般的n阶微分方程的初始条件可表示为

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{11}$$

这里x_0是自变量x指定的初值，$y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$分别是未知函数及其各阶导数相应指定的初值。

注:

对微分方程来说，能够求出通解的情况并不多，在实际应用中所需要的多是求微分方程的一个“特定的解”。而这个“特定的解”所必须满足的条件，称为定解条件。
常见的定解条件是初始条件。

一般的n阶微分方程的初始条件可表示为

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{11}$$

这里x_0是自变量x指定的初值，$y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$分别是未知函数及其各阶导数相应指定的初值。

特解

满足定解条件的解，称为方程的特解。

求方程满足初始条件的解的问题称为初值问题，初值问题也常称为Cauchy 问题。

特解

满足定解条件的解，称为方程的特解。

求方程满足初始条件的解的问题称为初值问题，初值问题也常称为Cauchy 问题。

例2

试验证函数$y=-6\cos 2x+8\sin 2x$是方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{5}{2}y=25\cos 2x$$

的满足初始条件$y(0)=-6, y'(0)=16$的特解。