# 常微分方程

## 第二章　初等积分法

上海财经大学应用数学系

March 19, 2010

### 变量（可）分离方程

如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$中的函数$f(x,y)$可以写成$f(x,y)=g(x)h(y)$ 的形式，即

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y) \tag{1}$$

称（1）为变量（可）分离方程。其中，函数$g(x)$和$h(y)$均为某区间上的连续函数。

(1)$\frac{dy}{dx}=x(y+1)$ (2)$\frac{dy}{dx}=ye^{x+y}$

(3)$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$ (4)$\frac{dy}{dx}=\sin(xy)$

# 2.1 分离变量法

## 变量（可）分离方程

如果一阶微分方程$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$中的函数$f(x,y)$可以写成$f(x,y) = g(x)h(y)$ 的形式，即

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1}$$

称（1）为变量（可）分离方程。其中，函数$g(x)$和$h(y)$均为某区间上的连续函数。

(1)$\dfrac{dy}{dx} = x(y+1)$ (2)$\dfrac{dy}{dx} = ye^{x+y}$

(3)$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$ (4)$\dfrac{dy}{dx} = \sin(xy)$

# 2.1 分离变量法

**分离变量法**

（1）如果有$y_0$，使得$h(y_0)=0$，则$y=y_0$是方程（1）的解;
（2）如果$h(y)\neq 0$，就分离变量，将方程改写为

$$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$$

再将上式两边积分，得

$$\int \frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx+c \tag{2}$$

（2）就是原方程的通解。

**注意**

（1）在常微分方程中，不定积分号$\int f(x)dx$ 只表示$f(x)$的任意一个但是确定的原函数，而不表示$f(x)$的全体原函数;
（2）在2中，如果能明确解出$y=\phi(x,c)$的形式，则$y=\phi(x,c)$就是原方程的显式通解，但在许多情况下，不一定能积分出来，这时可理解为（2）为原方程的隐式通解。

## 2.1 分离变量法

### 例1

求方程$\frac{dy}{dx} = 1 + y$的通解。

### 例2

求方程$\frac{dy}{dx} = 2x(1 - y^2)^{\frac{1}{2}}$的通解。

### 例3

求方程$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1 - x^2}$满足初始条件$y(0) = 1$ 的特解。

**雪球的融化**

设雪球在融化时体积的变化率与表面积成比例，且在融化过程中它始终为球体。该雪球在开始时的半径为6cm，经过2小时后，其半径缩小为3cm。求雪球的体积随时间变化的关系。

设$t$时刻雪球的体积为$V(t)$，表面积为$S(t)$，由题意得

$$\frac{dV(t)}{dt} = -kS(t) \tag{3}$$

根据球体的体积和表面积之间的关系式

$$S(t) = (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$$

令

$$r = (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot k$$

则（3）变为

**雪球的融化**

设雪球在融化时体积的变化率与表面积成比例，且在融化过程中它始终为球体。该雪球在开始时的半径为6cm，经过2小时后，其半径缩小为3cm。求雪球的体积随时间变化的关系。

设$t$时刻雪球的体积为$V(t)$，表面积为$S(t)$，由题意得

$$\frac{dV(t)}{dt} = -kS(t) \tag{3}$$

根据球体的体积和表面积之间的关系式

$$S(t) = (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$$

令

$$r = (4\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot k$$

则（3）变为

# 雪球的融化

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -rV^{\frac{2}{3}} \\ V(0) = 288\pi,\ V(2) = 36\pi \end{cases}$$

由分离变量法，其通解为

$$V(t) = \frac{1}{27}(c - rt)^3$$

利用初始条件和终端条件，得

$$c = 12,\ r = 3$$

于是，雪球的体积随时间变化的关系为

$$V(t) = \frac{\pi}{6}(12 - 3t)^3, \quad t \in [0, 4]$$

**齐次函数**

任意给出一个函数$f(x,y)$，如果满足

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

其中，$t>0$，$n$是实数，则称$f(x,y)$为变量$x,y$的$n$次齐次函数。

# 2.2 变量替换法

**齐次方程**

称一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \tag{4}$$

为齐次方程。

$(1)\dfrac{dy}{dx} = \ln y - \ln x$ $(2)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

$(3)(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$ $(4)(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

$(5)\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

### 齐次方程

称一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \tag{4}$$

为齐次方程。

(1)$\dfrac{dy}{dx} = \ln y - \ln x$

(2)$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

(3)$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

(4)$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

(5)$\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

### 齐次方程的解法

变量替换，令

$$u = \frac{y}{x} \tag{5}$$

则$u$是$x$的函数。为了消去$y$，将(5)变形为$y = xu$，再两边同时对$x$求导，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(xu)}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

于是

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = f(u)$$

### 齐次方程的解法

即

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \tag{6}$$

这是关于$u$与$x$的变量分离方程。求解，然后再将$\frac{y}{x}$代替$u$，便可得到齐次方程的通解。

### 例1

解方程 $x\dfrac{dy}{dx} = y(1 + \ln y - \ln x)$

### 例2

解方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

### 例3

设函数$f(x)$在$[1, +\infty)$上连续、非负，曲线

$$y = f(x), y = 0, x = 1, x = t$$

所围城的图形面积等于$t$处纵坐标的立方与横坐标之比，且$f(1) = 1$。求此曲线方程。

**鸭子游泳**

设河边点$O$的正对岸点$A$，河宽$OA = h$，两岸为平行直线，水流速度为$a$。有鸭子从点$A$游向点$O$，鸭子（在静水中）的游速为$b$ $(b > a)$，且鸭子游动方向始终朝着点$O$，求鸭子游过的轨迹。

**可化为齐次的方程**

称一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{7}$$

是可化为齐次的方程。其中$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$均为实常数。

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}$ (2) $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$

(3) $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2 + 3$ (4) $\frac{dy}{dx} = \sin^2(x - y)$

### 可化为齐次的方程

称一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{7}$$

是可化为齐次的方程。其中$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$均为实常数。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = (x + y)^2 + 3$　　(4) $\dfrac{dy}{dx} = \sin^2(x - y)$

**可化为齐次的方程的求解**

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$，即$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$的情形

设$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$，则方程(7)可改写为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}\right) \tag{8}$$

作变量替换，令$u = a_2x + b_2y$，则方程(8)化为

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right)$$

这是变量分离方程。

### 可化为齐次的方程的求解

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$，即$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$的情形

设$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$，则方程(7)可改写为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}\right) \tag{8}$$

作变量替换，令$u = a_2x + b_2y$，则方程(8)化为

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right)$$

这是变量分离方程。

## 可化为齐次的方程的求解

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$的情形

从几何的角度看，$a_1x+b_1y+c_1=0$和$a_2x+b_2y+c_2=0$是两条直线。当$c_1=c_2=0$时，这两条直线相交于原点，此时，方程是齐次方程。当$c_1^2+c_2^2\neq 0$，且$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$时，只需进行坐标平移，就可将交点移至原点。为此，作变量替换，令

$$\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$$

则方程(7)化为

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$$

这是关于$X,Y$的齐次方程。

**可化为齐次的方程的求解**

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$的情形

从几何的角度看，$a_1x+b_1y+c_1=0$和$a_2x+b_2y+c_2=0$是两条直线。当$c_1=c_2=0$时，这两条直线相交于原点，此时，方程是齐次方程。当$c_1^2+c_2^2\neq 0$，且$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$时，只需进行坐标平移，就可将交点移至原点。为此，作变量替换，令

$$\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$$

则方程(7)化为

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$$

这是关于$X,Y$的齐次方程。

**例4**

解方程 $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$

**例5**

解方程 $(x-2\sin y+3)dx-(2x-4\sin y-3)\cos y dy=0$

**例6**

解方程 $2y\dfrac{dy}{dx}=e^{\frac{x^2+y^2}{x}}+\dfrac{x^2+y^2}{x}-2x$

**例7**

解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$

### 一阶线性方程

称方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x) \tag{9}$$

为一阶线性微分方程。其中$P(x), Q(x)$是连续函数。如果$Q(x) \equiv 0$，即

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \tag{10}$$

称之为一阶齐次线性方程；如果$Q(x) \neq 0$，称(9)为一阶非齐次线性方程。

考察下列方程是否为线性方程?

(1) $(x-1)\dfrac{dy}{dx}=y$

(2) $3x^2+5xy-\dfrac{dy}{dx}=0$

(3) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=1+\cos y$

(5) $(\dfrac{dy}{dx})^2+xy=e^x$

## 一阶线性方程的解法-常数变易法

作变量替换，令

$$y = c(x)e^{\int P(x)dx} \tag{11}$$

其中，$c(x)$为待定函数。
将(11)对$x$求导，得

$$\frac{dy}{dx} = c'(x)e^{\int P(x)dx} + c(x)P(x)e^{\int P(x)dx} \tag{12}$$

代入方程(9)中，化简得

$$c'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}$$

两边同时积分，则待定函数为

### 一阶线性方程的解法-常数变易法

$$c(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + c \tag{13}$$

其中$c$为任意常数。
把(13)代入(11)中，就得到非齐次线性方程(9)的通解

$$y = ce^{\int P(x)dx} + e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx \tag{14}$$

**注意:**

(14)也可写成

$$y = ce^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx} + e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \int_{x_0}^{x} Q(x) e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} dx$$

**例8**

求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解。

**例9**

求微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$ 的通解。

**Bernoulli方程**

称方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n \tag{15}$$

为Bernoulli方程。其中$n$为不等于$0, 1$ 的实常数，$P(x), Q(x)$在区间$I$上连续。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

**Bernoulli方程**

称方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n \tag{15}$$

为Bernoulli方程。其中$n$为不等于$0, 1$ 的实常数，$P(x), Q(x)$在区间$I$上连续。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

## Bernoulli方程的解法

在$y \neq 0$时，先将方程(15)变形为

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx} = P(x)y^{1-n} + Q(x)$$

作变量替换，令

$$z = y^{1-n}$$

得

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x) \tag{16}$$

这是关于$z$与$x$的一阶线性方程。利用线性方程的通解公式求出通解后，再将$z = y^{1-n}$代回，便得Bernoulli方程的通解。

**例10**

求方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$的通解。

**Riccati方程**

称方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + f(x) \tag{17}$$

为Riccati方程。其中$P(x), Q(x)$和$f(x)$在区间$I$上连续，且$P(x)$不恒等于零。

# 2.2 变量替换法

**Riccati方程的四种情况**

(1) 当$P(x), Q(x), f(x)$都是常数时，方程(17)是变量分离方程;
(2) 当$P(x) \equiv 0$时，方程(17)是一阶线性方程;
(3) 当$f(x) \equiv 0$时，方程(17)是Bernoulli方程;
(4) 当$P(x) \neq 0, f(x) \neq 0$时，如果已知方程(17)的一个特解，利用变量替换，方程(17)可化为Bernoulli方程。

**具有对称形式的一阶微分方程**

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{18}$$

假设$M(x,y), N(x,y)$在某区域内具有连续的一阶偏导数，并且满足$M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$。

**具有对称形式的一阶微分方程**

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{18}$$

假设$M(x,y),N(x,y)$在某区域内具有连续的一阶偏导数，并且满足$M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0$。

**全微分方程**

若有连续可微的二元函数$u(x,y)$，恰好满足

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{19}$$

则称(18)为全微分方程。
方程的通解为$u(x,y)=c$。

(1) $xdx + ydy = 0;$

(2) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0;$

(3) $(3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy)dy = 0;$

(4) $(e^x + y)dx + (x - 2\sin y)dy = 0;$

(5) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0;$

## 全微分方程

若有连续可微的二元函数$u(x,y)$，恰好满足

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{19}$$

则称(18)为全微分方程。
方程的通解为$u(x,y)=c$。

(1) $xdx + ydy = 0$;

(2) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$;

(3) $(3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy)dy = 0$;

(4) $(e^x + y)dx + (x - 2\sin y)dy = 0$;

(5) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$;

**全微分方程**

考虑三个问题:
(1) 对方程(18), 如何判别它是否为全微分方程?
(2) 如果方程(18)是一个全微分方程, 如何找出二元函数?
(3) 如果方程(18)不是一个全微分方程, 有无可能将它转化为一个全微分方程, 再去求解?

**全微分方程的判别定理**

定理2.1：设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在某区域内连续且有连续的一阶偏导数，则方程(18)是全微分方程的充分必要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{20}$$

**全微分方程**

注意1：构造函数$u(x,y)$时，也可先对$y$积分，此时

$$u(x,y) = \int N dy + \phi(x)$$

## 全微分方程

注意2：定理的证明也可采用定积分形式。在区域内任取一点$(x_0, y_0)$，得

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} [N - \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M dx] dy \\
&= \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} [N - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx] dy \\
&= \int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} [N - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx] dy \\
&= \int_{x_0}^{x} M(x,y) dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y) dy
\end{aligned}
\tag{21}
$$

# 2.3 积分因子法

**全微分方程的三种解法**

凑微分法：将一个全微分方程“分项组合”，利用一些熟知的二元函数的全微分，使方程的每一块都是某个函数的全微分形式；

**全微分方程的三种解法**

不定积分法：利用定理的证明过程就可求出函数$u(x,y)$，从而$u(x,y)=c$为方程的通解；

## 全微分方程的三种解法

线积分法：利用积分与路径无关的条件和公式(21)，得方程的通解为

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c \tag{22}$$

或

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = c \tag{23}$$

其中$(x_0,y_0)$的选择要尽量简单，并使$M(x,y),N(x,y)$有意义。

## 常见的二元函数的全微分

(1) $xdx + ydy = d(\frac{x^2+y^2}{2})$;

(2) $ydx + xdy = d(xy)$;

(3) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$;

(4) $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$;

(5) $\frac{ydx - xdy}{xy} = d(\ln|\frac{x}{y}|)$;

(6) $\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = d(\arctan\frac{x}{y})$;

(7) $\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = d(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2))$;

(8) $\frac{ydx - xdy}{x^2-y^2} = d(\frac{1}{2}\ln|\frac{x-y}{x+y}|)$。

**例1**

验证方程$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$是全微分方程，并求它的通解。

**例2**

验证方程$(x+\frac{y}{x^2})dx-\frac{1}{x}dy=0$是全微分方程，并求它的通解。

**例3**

已知$f(0)=\frac{1}{2}$，试确定$f(x)$，使

$$(e^x+f(x))ydx+f(x)dy=0$$

为全微分方程，并求此全微分方程的通解。

**积分因子**

如果存在连续可微的函数$\mu(x,y)\neq 0$，使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{24}$$

为全微分方程，则称$\mu(x,y)$为原方程(18)的一个积分因子。

考察方程$ydx-xdy=0$的积分因子，并求方程的通解。

**积分因子**

如果存在连续可微的函数$\mu(x,y)\neq 0$，使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{24}$$

为全微分方程，则称$\mu(x,y)$为原方程(18)的一个积分因子。

考察方程$ydx-xdy=0$的积分因子，并求方程的通解。

**如何求积分因子**

定理2.2：设$M(x,y),N(x,y)$和$\mu(x,y)$在某区域内连续且有连续的一阶偏导数，$\mu(x,y)\neq 0$，则$\mu(x,y)$是方程(18)的一个积分因子的充分必要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \tag{25}$$

# 2.3 积分因子法

## 如何求积分因子

定理2.3：(1) 方程(18)有一个仅依赖于$x$的积分因子的充要条件

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\phi(x) \tag{26}$$

其中$\phi(x)$只与$x$有关。当(26)成立时，函数$\mu(x)=e^{\int\phi(x)dx}$是一个积分因子。

(2) 方程(18)有一个仅依赖于$y$的积分因子的充要条件

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\varphi(y) \tag{27}$$

其中$\varphi(y)$只与$y$有关。当(27)成立时，函数$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}$是一个积分因子。

**例4**

求方程$(xy+y^2)dx+(xy+y+1)dy=0$的通解。

**例5**

求一阶线性方程的积分因子。

**例6**

求方程$(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$的通解。

# 2.4 参数法

## 隐式方程

方程

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0 \tag{28}$$

叫隐式方程或叫导数未解出的一阶方程。

# 2.4 参数法

## 参数形式的解

对于(28)，如果存在定义于$(\alpha,\beta)$上的可微函数$x=\phi(t)$与$y=\varphi(t)$，使得当$t\in(\alpha,\beta)$时，有

$$F[\phi(t),\varphi(t),\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}]=0$$

成立，则称$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}, t\in(\alpha,\beta)$ 为方程(28)的参数形式的解。

## 参数形式的通解

$$\begin{cases} x=\phi(t,c) \\ y=\varphi(t,c) \end{cases}, t\in(\alpha,\beta)$$

**可解出$y$或$x$的隐式方程**

$$y = f(x, \frac{dy}{dx}) \tag{29}$$

引进参数$\frac{dy}{dx} = p$，则(29)变为

$$y = f(x, p) \tag{30}$$

为了消去$y$，将(30)两边对$x$求导数，并以$\frac{dy}{dx} = p$代入，得到

$$(p - \frac{\partial f}{\partial x})dx - \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0 \tag{31}$$

这是以$p$为未知函数的一阶显式方程

### 可解出$y$或$x$的隐式方程

$$y = f(x, \frac{dy}{dx}) \tag{29}$$

引进参数$\dfrac{dy}{dx} = p$，则(29)变为

$$y = f(x, p) \tag{30}$$

为了消去$y$，将(30)两边对$x$求导数，并以$\dfrac{dy}{dx} = p$代入，得到

$$(p - \frac{\partial f}{\partial x})dx - \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0 \tag{31}$$

这是以$p$为未知函数的一阶显式方程

# 可解出$y$或$x$的隐式方程

如果所得的通解为$p=\phi(x,c)$，将它代入(30)中，则原方程的通解为

$$y=f(x,\phi(x,c));$$

如果所得的通解为$x=\varphi(p,c)$，将它与(30)联立，则原方程的通解为

$$\begin{cases} x=\varphi(p,c) \\ y=f(\varphi(p,c),p) \end{cases}$$

其中$p$为参数，$c$为任意常数。

如果所得的通解为$\Phi(x,p,c)=0$，将它与(30)联立，则原方程的通解为

$$\begin{cases} \Phi(x,p,c)=0 \\ y=f(x,p) \end{cases}$$

其中$p$为参数，$c$为任意常数。

# 可解出$y$或$x$的隐式方程

**注意**

(1)如果方程为$x=f(y,\dfrac{dy}{dx})$，则令$\dfrac{dy}{dx}=p$，将方程中的$x$消去，得到关于$y,p$ 的一阶显式方程，解的参数表示与前面介绍的类似;
(2)在参数形式的通解中，$p$只起参数作用，所以也可用$t,u$等其它变量表示。切不可求出$p$后，再去积分。例如$p=\phi(x,c)$，若再积分，得$y=\int\phi(x,c)dx+c_1$，这会导致一阶微分方程通解中有两个相互独立的常数，这是错误的。

# 可解出$y$或$x$的隐式方程

**例1**

求方程$y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$的通解。

**例2**

求在第一象限中的一条曲线，使其上每一点的切线与两坐标轴所围成的三角形面积均等于2。

**不显含$y$或$x$的隐式方程**

$$F(x, y') = 0 \tag{32}$$

引进参数$\dfrac{dy}{dx} = p$，从几何上看方程$F(x,p) = 0$，意味着是$(x,p)$平面的一条曲线。如果能将这条曲线表示成参数形式

$$x = \phi(t) \tag{33}$$

$$p = \varphi(t) \tag{34}$$

其中$t$为参数，那么只要再将$y$表示成$t$的函数，结合(33)，就可以得到原方程的参数形式的解。为此，将(34)代入$\dfrac{dy}{dx} = p$中，得

$$dy = pdx = \varphi(t)dx = \varphi(t) \cdot \phi'(t)dt$$

两边积分，得

**不显含$y$或$x$的隐式方程**

$$F(x, y') = 0 \tag{32}$$

引进参数$\dfrac{dy}{dx} = p$，从几何上看方程$F(x,p) = 0$，意味着是$(x,p)$平面的一条曲线。如果能将这条曲线表示成参数形式

$$x = \phi(t) \tag{33}$$

$$p = \varphi(t) \tag{34}$$

其中$t$为参数，那么只要再将$y$表示成$t$的函数，结合(33)，就可以得到原方程的参数形式的解。为此，将(34)代入$\dfrac{dy}{dx} = p$中，得

$$dy = pdx = \varphi(t)dx = \varphi(t) \cdot \phi'(t)dt$$

两边积分，得

# 不显含$y$或$x$的隐式方程

$$y = \int \varphi(t) \cdot \phi'(t)dt + c$$

于是原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \int \varphi(t)\phi'(t)dt + c \end{cases}$$

其中$c$为任意常数。

### 一、商品市场价格与需求量(供给量)的关系

某商品的需求量$Q$对价格$P$的弹性为$-P\ln 3$，若该商品的最大需求量为1200(即$P=0$时,$Q=1200$)，($P$的单位为元，$Q$的单位为kg)。

(1)试求需求量$Q$与价格$P$的函数关系;

(2)求当价格为1元时,市场对该商品的需求量;

(3)当$P\to+\infty$时,需求量的变化趋势如何?

### 二、预测可再生资源的产量,预测商品的销售量

某产品的销售量$x(t)$是时间$t$的可导函数，如果商品的销售量对时间的增长率$\dfrac{dx}{dt}$与销售量$x(t)$及销售量接近于饱和水平程度$N-x(t)$之积成正比，($N$ 为饱和水平，比例常数为$k>0$)，且当$t=0$时，$x=\dfrac{1}{4}N$。

(1) 求销售量$x(t)$;

(2) 求$x(t)$的增长最快的时刻$T$。

### 三、成本分析

某商场的销售成本$y$和存贮费用$S$均是时间$t$的函数，随时间$t$ 的增长，销售成本的变化率等于存贮费用的倒数与常数5的和，而存贮费用的变化率为存贮费用的$(-\dfrac{1}{3})$ 倍。若当$t=0$时，销售成本$y=0$，存贮费用$S=10$。试求
(1) 销售成本与时间$t$的函数关系；
(2) 存贮费用与时间$t$的函数关系。

### 四、关于国民收入、储蓄与投资的关系问题

在宏观经济研究中，发现某地区的国民收入 $y$，国民储蓄$S$和投资$I$均是时间$t$的函数。且在任一时刻$t$，储蓄额$S(t)$为国民收入$y(t)$的$\dfrac{1}{10}$倍，投资额$I(t)$是国民收入增长率$\dfrac{dy}{dt}$的$\dfrac{1}{3}$倍，且$t=0$时，国民收入为5(亿元)。设在时刻$t$的储蓄全部用于投资，试求国民收入函数。