第六章 稳定性理论简介

本章将简要介绍微分方程稳定性的概念和理论。

6.1 稳定性概念

6.1.1 稳定性定义

考察下面两个例子:

【例1】 讨论微分方程$x' = 1, t \in [0, +\infty)$的特解如何随初值的变化而变动。

【例2】 考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

其满足初始条件$x(0) = x_0$的解$x(t) = x_0 e^{at}$关于初值的连续性。

结论:在无穷区间上，解对初值不一定具有连续性。

考虑系统

$$\frac{dy}{dx} = f(t, x) \tag{6.1}$$

其中函数$f(t, x)$对于$x \in G \subseteq R^n$和$t \in [0, +\infty)$连续，对x满足局部Lipschitz条件，并且$f(t, 0) = 0$，其中$G = \{x \in R^n | \|x\| < K\}$ 。于是可知$x = 0$是一个解，且对任意$(t, x_0) \in R \times G$，(6.1)存在唯一解$x(t) = x(t, 0, x_0)$满足$x(0) = x_0$。

定义 6.1 设$x = \psi(t)$是*(6.1)*在$[0, +\infty)$上有定义的一个特解, 对任给的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta(\varepsilon) > 0$, 使得

(1) 对于满足$\|x_0 - \psi(0)\| < \delta(\varepsilon)$的初值$x(0) = x_0$, 对应的解$\phi(t; 0, x_0)$ 在$[0, +\infty)$上存在;

(2) 对一切$t \in [0, +\infty)$有

$$\|\phi(t; 0, x_0) - \psi(t)\| < \varepsilon$$

则称特解$\psi(t)$在$Lyapunov$意义下稳定。

定义 6.2 若*(6.1)*的解$x = \psi(t)$是稳定的，且存在$\delta > 0$，当$\|x_0 - \psi(0)\| < \delta$时，有

$$\lim_{t \to +\infty} \|\phi(t; 0, x_0) - \psi(t)\| = 0$$

则称$\psi(t)$是$Lyapunov$意义下渐近稳定的；如果$\delta > 0$可以任意取，则称$\psi(t)$是全局渐近稳定的。

问题: 为什么只需讨论零解的稳定性?

记$x = \phi(t; t_0, x_0), \psi(t) = \psi(t; t_0, x_1)$ 。作变量代换，令

$$y(t) = x(t) - \psi(t) \tag{6.2}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\psi(t)}{dt} &= f(t, x(t)) - f(t, \psi(t)) \\ &= f(t, \psi(t) + y(t)) - f(t, \psi(t)) \\ &= F(t, y)\end{aligned}$$

于是在变换(6.2)下，方程(6.1)化成

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y) \tag{6.3}$$

其中$F(t, y) = f(t, \psi(t) + y(t)) - f(t, \psi(t))$。这样关于(6.1) 的解$x = \psi(t)$ 的稳定性问题化为(6.3)的零解的稳定性问题。因此，只讨论(6.1)的零解$x = 0$ 的稳定性。

6.1.2 稳定性的线性近似判定

1、线性常系数齐次方程组零解的稳定性

一阶常系数线性齐次微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{6.4}$$

具有性质:

(1) 若A的特征值实部全为负，则$x' = Ax$的零解全局渐近稳定；

(2) 若A的特征值实部出现正数，则$x' = Ax$的零解不稳定。

【例3】 考察系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

的零解的稳定性。

【例4】 考察系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

的零解的稳定性。

【例5】 考察系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

的零解的稳定性。

注意:当特征根实部非正且有零值时，仍不能确定零解的稳定性问题。

2、非线性方程组的线性近似和稳定性

把方程(6.1)的右端函数$f(t,x)$表示成x的线性部分Ax和非线性部分$N(t,x)$(x的高次项)之和，即考察方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + N(t,x) \tag{6.5}$$

其中

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}|_{x=0}$$

当$f(t,0)=0$，$f(t,x)$对$x_1, x_2, \cdots, x_n$有一阶连续偏导数时，A是一个常数矩阵，并称$x' = Ax$是(6.1)的线性近似系统或变分方程。

定理 6.1 *如果方程组(6.1)的线性近似系统$x' = Ax$，A的特征根皆有负实部，又$N(t,x)$在$\|x\| \le H$，$t \ge 0$上连续，对xLipschitz连续，且*

$$N(t,0) = 0, \quad \lim_{|x|\to 0} \frac{1}{\|x\|}\|N(t,x)\| = 0$$

则方程组(6.5)的零解渐近稳定。

注意:若线性近似系统$x' = Ax$的特征根有正实部，则(6.5)的零解不稳定。如果非线性系统的线性近似$x' = Ax$的特征根的实部有正数或皆为负数，则方程组(6.5)与其线性近似系统$x' = Ax$的稳定性是一致的。但是，当A的特征根的实部非正且有零值时，非线性微分方程组(6.5)的零解的稳定性并不能由线性近似系统来确定。

【例6】 考察$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x_2' = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$的零解与其线性近似系统的零解的稳定性是否一致？

【例7】 考察$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$的零解与其线性近似系统的零解的稳定性是否一致？

6.2 Lyapunov函数判别法

本节介绍关于判定稳定性的Lyapunov函数方法——Lyapunov第二方法。

6.2.1 常正(负)函数与定正(负)函数

定义 6.3 设$V(x)$是闭区域$\|x\| \le H$上的连续函数，$x \in R^n$，$V(0)=0$，$V(x) \ge 0 \ \ (\le 0)$，则称$V(x)$为常正*(负)*函数; 若$V(0)=0, x \ne 0$时，$V(x) > 0 \ (< 0)$，则称$V(x)$为定正*(负)*函数。

例如:在R^2中

(1)$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$在(x_1,x_2)平面上为定正函数；

(2)$V(x_1,x_2)=-(x_1^2+x_2^2)$在$(x_1,x_2)$平面上为负定函数；

(3)$V(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$在(x_1,x_2)平面上为变号（既非常正又非常负）函数；

(4)$V(x_1,x_2)=x_1^2$在(x_1,x_2)平面上为常正函数但非定正函数。

定正函数的几何意义:

在三维空间中，定正函数$V=V(x_1,x_2)$表示一个空间曲面。当$V=0$时，它与坐标平面x_1Ox_2只有一个交点，即坐标原点$O(0,0,0)$。如果用平行于坐标平面的平面$V=C \ (C>0)$与$V=V(x_1,x_2)$相交，并将交线投影到x_1Ox_2平面，将得到一族闭曲线$V(x_1,x_2)=C$。再由$V=V(x_1,x_2)$的连续性，且$V(0,0)=0$，则在$x_1=x_2=0$的充分小的邻域内，$V(x_1,x_2)$可以任意小，即在这些邻域中存在C值可任意小的闭曲线$V=C$。

6.2.2 自治系统稳定性的Lyapunov判别法

定理 6.2 如果$f(0)=0$，而且$f(x)$在$\|x\| \le H$上连续，$V(x)$是$\|x\| \le H$上的定正*(负)*函数，且$V(x)$在$\|x\| \le H$上连续可微，$\langle \nabla V, f\rangle = v(x)$，则$v(x)$常负*(正)*时,$x'=f(x)$的零解稳定，$v(x)$定负*(正)*时，$x'=f(x)$的零解渐近稳定。

其中$\nabla V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)$是$V(x)$的梯度，$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示向量内积。

通常称上述$V(x)$为Lyapunov函数。

几何解释：由$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$构成的向量函数是微分方程$x'=f(x)$的轨线，而轨线也即积分曲线在$x$空间中的投影。$\nabla V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)$是曲面$V(x)=c>0$的外法线方向。当$\dfrac{dV(x)}{dt}=v(x)$为定负时，则说明曲面的外法线与动点运动方向的夹角大于$\dfrac{\pi}{2}$，故只允许轨线$x(t)$自外向内地进入任何曲面$V(x)=c$而渐近地流向原点$x=0$，此时零解是渐近稳定的；对于$\dfrac{dV(x)}{dt}=v(x)$常负时，零解的稳定性的几何解释类似。

【例1】 考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2x^2 \end{cases}$$

【例2】 考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x^2y - y^3 \end{cases}$$

【例3】 研究零解的稳定性:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^3 \end{cases}$$

6.2.3 自治系统不稳定性的李雅普诺夫判别法

定理 6.3 如果在原点邻域Ω内存在连续可微函数$V(x)$，$V(0) = 0$，在原点任何邻域内$V(x)$总可取到正值(负值)，且沿$x' = f(x)$的解$\dfrac{dV}{dt} = \langle \nabla V, f \rangle$定正(定负)，则$x' = f(x)$的零解不稳定，其中$f(x)$在$\Omega$内连续且$f(0) = 0$。

【例4】 讨论方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2(x^3 - y^5) \end{cases}$$

的零解的稳定性。

【例5】 考虑方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 - 2y^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = xy^2 + x^2y + \dfrac{1}{2}y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。

【例6】 考虑平面微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + ax^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。

6.3 应用实例

【例1】 考虑无阻尼线性振动方程

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{6.6}$$

的平衡位置的稳定性。

〖**解**〗 把(6.6)化为等价系统

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases} \tag{6.7}$$

则(6.6)的平衡位置即(6.7)的零解，作Lyapunov函数$V(x,y)$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{\omega^2}y^2)$$

有

$$\frac{dV}{dt} = xx' + \frac{1}{\omega^2}yy'$$

即$V(x,y)$定正，$\dfrac{dV}{dt} \le 0$。于是由定理6.2可知，(6.7)的零解是稳定的，即(6.6)的平衡位置是稳定的。■

【例2】 考虑有阻力的数学摆的振动，其微分方程为

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \tag{6.8}$$

这里长度l，质量m和重力加速度g均大于0，并设阻力系数$\mu > 0$。令$x = \phi$, $y = \dfrac{d\phi}{dt}$ 。

〖**解**〗 将方程(6.8)化为一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin x - \dfrac{\mu}{m}y \end{cases} \tag{6.9}$$

如果取函数V为

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x)$$

则其全导数为

$$\frac{dV(x)}{dt} = v(x) = -\frac{\mu}{m}y^2$$

当无阻力时，$\mu = 0$，因而$\dfrac{dV(x)}{dt} = 0$，根据定理6.2，方程组(6.8)的零解是稳定的，这正如本节开头所讨论的。

当有阻力时，$\mu > 0$，因而$\frac{dV(x)}{dt} = v(x)$常负，如果根据定理6.2仅能得到稳定的结论。但由于使$\dfrac{dV(x)}{dt} = 0$的集是$y = 0$，而在原点领域中$y = 0$直线上除零解$x = 0$, $y = 0$之外

不含有方程组(6.8)的整条正半轨线，故由定理6.2，得到(6.8)的零解为渐近稳定的结论。■

【例3】 讨论范德坡(Van der Pol)方程

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu(1 - x^2), \quad (\mu > 0) \end{cases}$$

零解的稳定性。

〖**解**〗 取Lyapunov函数$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$，则

$$\frac{dV(x)}{dt} = -bx^2 + (2a + b\mu - 2c)xy + (b + 2c\mu)y^2 - 2cx^2y^2 - b\mu x^3 y$$

令$b = -1$，$b + 2c\mu = 1$，$2a + b\mu - 2c = 0$，于是$c = \dfrac{1}{\mu}$，$a = \dfrac{\mu^2 + 2}{2\mu}$，从而

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{1}{\mu}y^2 - xy + \frac{\mu^2 + 2}{2\mu}x^2 \\ \frac{dV(x)}{dt} &= x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + \mu x^3 y \end{aligned}$$

由于$(-1)^2 - 4\dfrac{\mu^2 + 2}{2\mu^2} = -1 - \dfrac{4}{\mu^2} < 0$，即在原点附近$V$ 与$\dfrac{dV(x)}{dt}$(低阶项$x^2 + y^2$为主，$-2x^2y^2$与$\mu x^3 y$是高阶小量)都是定正的，于是零解完全不稳定。■