第八章　差分方程

本章将主要介绍差分和差分方程的基本概念并介绍简单的差分方程解法。

8.1　差分和差分方程的概念

8.1.1　差分的定义

设函数$y=f(x)$只对x在离散数值上有定义，即x依次取遍以下的离散数值

$$x=x_0,x_1,\cdots$$

相应的函数值为

$$f(x_0),f(x_1),\cdots$$

或者简记为

$$y_0,y_1,\cdots$$

定义 8.1 当自变量从x_k变到x_{k+1}时，函数$y=f(x)$的改变量

$$\Delta y_k=f(x_{k+1})-f(x_k),\qquad k=0,1,\cdots$$

称为函数$f(x)$在点x_k的步长为$h_k=x_{k+1}-x_k$的**一阶（向前）差分**。通常记作

$$\Delta y_k=y_{k+1}-y_k,\qquad k=0,1,\cdots$$

其中，Δ表示差分算子。

类似地，称$\Delta^2 f_k=\Delta f_{k+1}-\Delta f_k$为$x_k$处的**二阶差分**。

一般地，称$\Delta^n f_k=\Delta^{n-1}f_{k+1}-\Delta^{n-1}f_k$为$x_k$处的**n阶差分**。

8.1.2　差分的性质和运算法则

两个算子符号：

$$\mathcal{I}y_k=y_k,\qquad \mathcal{E}f_k=f_{k+1} \tag{8.1}$$

其中，$\mathcal{I}$称为**不变算子**，$\mathcal{E}$称为步长为$h_k(k=0,1,\cdots)$的**位移算子**。

差分的另一种表示方法:

$$\begin{aligned}\Delta y_k &= y_{k+1} - y_k = \mathcal{E}y_k - \mathcal{I}y_k = (\mathcal{E}-\mathcal{I})y_k &(8.2)\\ \Delta^n y_k &= (\mathcal{E}-\mathcal{I})^n y_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \mathcal{E}^{n-j} y_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j y_{n+k-j}, \quad n=1,2,\cdots &(8.3)\end{aligned}$$

这里组合数$C_n^j = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$是二项式$(x+1)^n$的展开系数。这样(8.3)表示各阶差分均可用函数值表示。

如果规定$\Delta^0 y_k = y_k = f(x_k)$，那么我们也可以用各阶差分来表示函数值。由于

$$y_{n+k} = \mathcal{E}^n y_k = (\mathcal{I}+\Delta)^n y_k = \left[\sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j\right] y_k$$

因此

$$y_{n+k} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j y_k \tag{8.4}$$

性质 8.1 (差分的运算法则) 对于函数$y=f(x)$和$z=g(x)$，记$y_k = f(x_k), z_k = g(x_k)$

(1) $\Delta(c) = 0$。c为常数。即常数的差分为零;

(2) $\Delta(cy_k) = c\Delta y_k$;

(3) $\Delta(c_1 y_k \pm c_2 z_k) = c_1\Delta y_k \pm c_2 \Delta z_k$，$c_1, c_2$为常数;

(4) $\Delta(y_k \cdot z_k) = y_{k+1}\Delta z_k + z_k \Delta y_k = y_k \Delta z_k + z_{k+1}\Delta y_k$;

(5) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right) = \frac{z_k \Delta y_k - y_k \Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}} = \frac{z_{k+1}\Delta y_k - y_{k+1}\Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}}$

8.1.3　差分方程的概念

定义 8.2 含有取离散值的未知函数$y=f(x)(x=0,1,\cdots)$及其差分的方程，其一般形式为

$$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0 \tag{8.5}$$

或

$$\Psi(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0 \tag{8.6}$$

或

$$\Gamma(x, y_x, y_{x-1}, y_{x-2}, \cdots, y_{x-n}) = 0 \tag{8.7}$$

称为***差分方程***。其中$y_{x+k} = f(x+k)(x=0,1,\cdots)$，$k$为整数；$\Delta^n y_x$为$y=f(x)$在$x$处步长为*1*的$n$阶差分。

定义 8.3 差分方程中所含未知函数的差分的实际最高阶数，称为该差分方程的***阶***。

注1 由于差分方程具有不同的表达形式，因此不能简单地从形式上出现的最高阶差分来确定差分方程的阶数。通常对于用未知函数下标表示的差分方程，其阶数等于方程中含未知函数下标的最大值和最小值之差。

【例1】

$$\Delta^4 y_x - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1 = 0$$

虽然形式上含有四阶差分$\Delta^4 y_x$，但是实际上它只是一阶差分方程，这是因为

$$\begin{aligned} & \Delta^4 y_x - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1 \\ = \ & (y_{x+4} - 4y_{x+3} + 6y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x) - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1 \\ = \ & y_{x+4} - 4y_{x+3} + 1 \end{aligned}$$

作变换$u = x + 3$，原方程可以与以下的一阶差分方程

$$y_{u+1} - 4y_u + 1 = 0$$

等价。

定义 8.4 满足差分方程的函数称为差分方程的*解*。

如果差分方程的解中所含相互独立的任意常数的个数与该差分方程的阶数相等，则称这样的解为差分方程的*通解*。

差分方程的定解条件称为*初始条件*。

利用初始条件确定通解中的任意常数后所得到的解称为差分方程的*特解*。一般，n阶差分方程通解中含有n个互相独立的任意常数，要得到相应的通解就必须有n个初始条件:

$$y_x|_{x=x_0} = y_{x_0}, \Delta y_x|_{x=x_0} = \Delta y_{x_0}, \cdots, \Delta^{n-1} y_x|_{x=x_0} = \Delta^{n-1} y_{x_0}$$

定义 8.5 如果差分方程的未知函数出现在一次式中，则称该方程为*线性差分方程*。一个n阶线性差分方程可以写成

$$a_n(x) y_{x+n} + a_{n-1}(x) y_{x+n-1} + \cdots + a_1(x) y_{x+1} + a_0(x) y_x = F(x) \tag{8.8}$$

其中$a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), F(x)$为已知函数。如果线性差分方程中所有的系数$a_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$都是常数，那么称这样的差分方程为*常系数线性差分方程*。

8.2 常系数差分方程解的结构

定义 8.6 n阶常系数线性差分方程

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = F(x) \tag{8.9}$$

其中$a_i(i = 0, 1, \cdots, n)$为常数，$a_0 \cdot a_n \neq 0$。如果$F(x) \neq 0$，则称之为***n*阶非齐次常系数线性差分方程**；否则称之为***n*阶齐次常系数线性差分方程**。

定理 8.1 (齐次常系数线性差分方程解的叠加原理) 如果函数$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(k)}$都是$n$阶齐次常系数线性差分方程

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0 \tag{8.10}$$

的解，则这k个函数的线性组合

$$y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \cdots + C_k y^{(k)}$$

也是方程*(8.10)*的解，其中$C_1, C_2, \cdots, C_k$为任意常数。

定理 8.2 (齐次常系数线性差分方程通解的结构) 如果函数$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(n)}$是$n$阶齐次常系数线性差分方程*(8.10)*的$n$个线性无关特解，那么

$$Y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \cdots + C_n y^{(n)}$$

就是n阶齐次常系数线性差分方程*(8.10)*的通解，其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数。

定理 8.3 (非齐次常系数线性差分方程通解的结构) 如果y_x^*是n阶非齐次常系数线性差分方程*(8.9)*的一个特解，Y_x是非齐次方程*(8.9)*对应的齐次常系数线性差分方程*(8.10)*的通解，那么非齐次方程*(8.9)*的通解为

$$y_x = Y_x + y_x^*$$

定理 8.4 (非齐次常系数线性差分方程解的叠加原理) 如果函数$y_x^{(1)^*}, y_x^{(2)^*}$分别是n阶非齐次常系数线性差分方程

$$\begin{aligned} a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x &= F_1(x) \\ a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x &= F_2(x) \end{aligned}$$

的特解，那么函数$y_x^* = y_x^{(1)^*} + y_x^{(2)^*}$就是方程

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = F_1(x) + F_2(x)$$

的特解。

8.3 差分方程模型

在一些实际问题的求解中，我们常常会使用差分模型。以下讨论比较简单的蛛网模型（general cobwed model）和Hansen-Samuelson模型。

8.3.1 一般蛛网模型

在自由竞争的市场经济中，商品的价格是由市场上该商品的供应量决定的，供应量越大，价格就越低。另一方面，生产者提供的商品数量又是由该商品的价格决定的，价格上升将刺激生产者的生产积极性，导致商品生产量的增加。反之，价格降低会影响生产者的积极性，导致商品生产量的下降。在市场经济中，对每一商品事实上存在着两个不同的函数：供给函数S和需求函数D。如果用P,Q分别表示价格和产量，那么它们都是时间t的函数。以下分别记Q_t^s和Q_t^d为t时刻商品的供给量和需求量。市场经济中商品的市场供给量、价格、市场需求量之间的关系归可以归结为以下三条规律：

(1) 市场供给量对价格变动的反应是滞后的，也就是说t时刻的商品供给量Q_t^s由$t-1$时刻（上一时刻）的商品的价格P_{t-1}决定。我们把这种关系简单地取为线性关系：

$$Q_t^s = -\alpha_1 + \beta_1 P_{t-1}, \qquad (\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0) \tag{8.11}$$

即线性正比例关系，或者说商品的供应量是商品价格的增函数。另外从(8.11)还可以看出商品价格不能太低，由于$Q_t^s > 0$，因此至少$P_{t-1} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$。

(2) 相反市场需求对价格变动的反应不是迟滞的，而是瞬时的。即如果商品的价格发生波动，商品的市场需求量将立刻随着改变。因此，t时刻的市场需求量Q_t^d取决于同一时刻t的商品的价格P_t。它们之间的关系也可以简单地取为：

$$Q_t^d = \alpha_2 - \beta_2 P_t, \qquad (\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0) \tag{8.12}$$

即商品的市场需求量是同期商品价格的减函数。而且价格不可以太高。由于$Q_t^d > 0$，因此，至少$P_t < \frac{\alpha_2}{\beta_2}$。

(3) 我们更为关心的是市场达到平衡（即供需相等）时，商品的价格。此时

$$Q_t^s = Q_t^d \tag{8.13}$$

当把(8.11)，(8.12)代入(8.13)以后，我们得到了如下的差分方程：

$$P_t = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2} P_{t-1} \tag{8.14}$$

这是一阶非齐次常系数线性差分方程。如果给定初始条件$P|_{t=0} = P_0$，那么由差分方程(8.14)可以依次求出$P_1, P_2, \cdots, P_t$。

8.3.2 Hansen-Samuelson模型（国民收入分析模型）

P.A.Samuelson曾提出以下国民收入分析模型：

$$Y_t = C_t + I_t + G_0 \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha Y_{t-1} & (8.16)\\ I_t &= \beta(C_t - C_{t-1}) & (8.17)\\ Y(0) &= Y_0, \qquad Y(1) = Y_1 \\ & 0<\alpha<1, \quad \beta>0 \end{aligned}$$

其中，Y_t—国民收入，C_t—消费，I_t—投资，G_t—政府财政支出总额。为了讨论方便起见，设$G_t = G_0$为常数。(8.15)表示国民收入为消费、投资和政府行政开支之和；(8.16)则说明了第t个周期（年）的消费与上一周期（$t-1$年）的收入是成正比的，其比例因子为边际消费倾向α；(8.17)则说明了第t个周期中的投资量等于一个常数乘以t周期相对于$t-1$周期的消费增加量，这就是所谓的加速原理，比例因子β称为加速因子。

将(8.16)代入(8.17)可得

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) = \alpha\beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \tag{8.18}$$

再将(8.18)和(8.16)代入(8.15)可得

$$Y_t = C_t + I_t + G_0 = \alpha Y_{t-1} + \alpha\beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G_0 \tag{8.19}$$

整理得

$$Y_t - (1+\beta)\alpha Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} = G_0 \tag{8.20}$$

这是一个二阶非齐次常系数线性差分方程。

8.4　常系数线性差分方程的求解

8.4.1　一阶常系数线性差分方程

一阶非齐次常系数线性差分方程的一般形式:

$$y_{x+1} = py_x + f(x) \tag{8.21}$$

其中，常数$p \neq 0$，$f(x) \not\equiv 0$为已知函数。对应的齐次方程为

$$y_{x+1} = py_x \tag{8.22}$$

一阶常系数线性差分方程的解法: 对于一阶齐次常系数线性差分方程(8.22)：$y_{x+1} = py_x$，显然可以通过递推的方法进行求解：

$$\begin{aligned} y_1 &= py_0 \\ y_2 &= py_1 = p^2 y_0 \\ y_3 &= py_2 = p^3 y_0 \\ &\vdots \\ y_x &= p^x y_0 \end{aligned}$$

于是，齐次方程(8.22)的通解为

$$Y_x = Cp^x \tag{8.23}$$

其中C为任意常数。若给定初始条件：$x=0$时，$y=y_0$，则$y_x=p^x y_0$是满足初始条件的特解。以上结果表明：一阶齐次常系数线性差分方程的通解是指数模型。因此我们可以给出另一个求解一阶齐次常系数线性差分方程的方法，即所谓的特征根法。

假设方程(8.22)的解为指数函数$y_x=r^x(r\neq 0)$，代入(8.22)可得

$$r^{x+1}-pr^x=0, \qquad r\neq 0$$

即

$$r-p=0 \tag{8.24}$$

方程(8.24)称为方程(8.22)的特征方程，其根$r=p$称为方程(8.22)的特征根。于是$y_x=p^x$是方程(8.22)的一个特解，而$Y_x=Cp^x$（C为任意常数）就是齐次方程(8.22)的通解。

根据定理8.3可知，只要找到非齐次方程(8.21)的一个特解，再加上对应齐次方程(8.22)的通解就可以得到方程(8.21)的通解了。以下分别给出方程(8.21)右端$f(x)=k$（k为常数）和$f(x)\neq k$时，方程(8.21)特解的求法。

若$f(x)=k$（k为常数）。此时可先求出方程(8.21)的常值解$y_x=A$，代入方程(8.21)中可得

$$A=pA+k$$

当$p\neq 1$时，解得

$$A=\frac{k}{1-p}$$

于是方程(8.21)的通解为

$$y_x=cp^x+A=cp^x+\frac{k}{1-p}$$

从而

$$y_0=c+\frac{k}{1-p}$$

因此

$$c=y_0-\frac{k}{1-p}$$

最后可得

$$y_x=\left(y_0-\frac{k}{1-p}\right)p^x+\frac{k}{1-p}$$

当$p=1$时，方程(8.21)退化为

$$y_{x+1}=y_x+k$$

于是方程(8.21)的通解为

$$y_x=kx+c$$

从而

$$y_0 = c$$

因此

$$c = y_0$$

最后可得

$$y_x = kx + y_0$$

若$f(x) \neq k$，利用迭代关系可知：

$$\begin{aligned} y_1 &= py_0 + f(0) \\ y_2 &= py_1 + f(1) = p(py_0 + f(0)) + f(1) = p^2 y_0 + pf(0) + f(1) \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

利用数学归纳法可知方程(8.21)的通解为

$$y_x = cp^x + \sum_{j=1}^{x} p^{j-1} f(x-j) \tag{8.25}$$

c为任意常数，当$c = y_0$时取到特解。

8.4.2　二阶常系数线性差分方程

二阶常系数线性差分方程的一般形式:

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = f(x) \tag{8.26}$$

其中$f(x)$为已知函数，p, q为常数，$q \neq 0$。当$f(x) \neq 0$时，称之为二阶非齐次常系数线性差分方程；对应的齐次方程为

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0 \tag{8.27}$$

求解方法:

方程(8.27)的特征方程可以通过将$y_x = r^x$代入(8.27)得到

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{8.28}$$

方程(8.28)是一个一元二次方程，对于特征根可以分以下三种情形讨论：

(1) $p^2 - 4q > 0$。此时特征方程(8.28)有两个相异的实特征根

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

因此方程(8.27)的通解为

$$Y_x = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x \tag{8.29}$$

其中，C_1, C_2为任意常数。

(2) $p^2-4q=0$。此时特征方程(8.28)有两个相同的实特征根$r_1=r_2=-\frac{p}{2}\overset{\text{def}}{=}\tilde{r}$，从而$y_x^{(1)^*}=\tilde{r}^x$是方程(8.27)的一个特解。易证：$y_x^{(2)^*}=x\tilde{r}^x$也是方程(8.27)的一个特解。事实上，将$y_x^{(2)^*}=x\tilde{r}^x$代入方程(8.27)的等号左端可得

$$\begin{aligned}(x+2)\tilde{r}^{x+2}+p(x+1)\tilde{r}^{x+1}+qx\tilde{r}^x &= x\tilde{r}^{x+2}+px\tilde{r}^{x+1}+qx\tilde{r}^x+2\tilde{r}^{x+2}+p\tilde{r}^{x+1}\\ &= x(\tilde{r}^{x+2}+p\tilde{r}^{x+1}+q\tilde{r}^x)+\tilde{r}^{x+1}(2\tilde{r}+p)\end{aligned}$$

考虑到$\tilde{r}^x$是方程(8.27)的特解，因此等号右端第一个括号内的值为零；又因为$\tilde{r}=-\frac{p}{2}$，因此等号右端的第二个括号内的值也为零，从而得到$y_x^{(2)^*}=x\tilde{r}^x$也满足方程(8.27)。而$y_x^{(1)^*},y_x^{(2)^*}$又是方程(8.27)的两个线性无关解，因此根据定理8.2，方程(8.27)的通解为

$$Y_x=C_1\tilde{r}^x+C_2x\tilde{r}^x=(C_1+C_2x)\tilde{r}^x \tag{8.30}$$

其中，C_1,C_2为任意常数。

(3) $p^2-4q<0$。此时方程(8.28)有一对共轭复根

$$r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm i\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\overset{\text{def}}{=}a\pm ib, \qquad i=\sqrt{-1}$$

其三角表达式为

$$r_{1,2}=R(\cos\theta\pm i\sin\theta), \quad R=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \tan\theta=\frac{b}{a}$$

于是方程(8.27)的两个线性无关的特解为

$$\tilde{y}_x^{(1)}=r_1^x=[R(\cos\theta+i\sin\theta)]^x=R^x(\cos\theta x+i\sin\theta x)$$

$$\tilde{y}_x^{(2)}=r_2^x=[R(\cos\theta-i\sin\theta)]^x=R^x(\cos\theta x-i\sin\theta x)$$

根据定理8.1，

$$y_x^{(1)}=\frac{1}{2}\left[\tilde{y}_x^{(1)}+\tilde{y}_x^{(2)}\right]=R^x\cos\theta x$$

和

$$y_x^{(2)}=\frac{1}{2i}\left[\tilde{y}_x^{(1)}-\tilde{y}_x^{(2)}\right]=R^x\sin\theta x$$

也都是方程(8.27)的特解，且$y_x^{(1)}$和$y_x^{(2)}$线性无关。这样根据定理8.2，方程(8.27)的通解为

$$Y_x=C_1R^x\cos\theta x+C_2R^x\sin\theta x=R^x(C_1\cos\theta x+C_2\sin\theta x) \tag{8.31}$$

其中，C_1,C_2为任意常数。

根据定理8.3，二阶非齐次常系数线性差分方程(8.26)的通解等于它的一个特解与对应齐次方程(8.27)通解之和。故只要求出非齐次方程(8.26)的特解，就可以得到非齐次方程(8.26)的通解了。以下给出非齐次方程(8.26)特解的求法。

若方程(8.26)右端$f(x)\equiv k$（k为常数），可设方程(8.26)的一个特解为常数解：$y_x^*=c$，其中c为常数。代入方程(8.26)可得

$$c+pc+qc=k$$

当$1+p+q\neq 0$，也就是$r=1$不是特征方程(8.28)的根时，解得

$$c=\frac{k}{1+p+q}$$

从而

$$y_x^*=\frac{k}{1+p+q} \tag{8.32}$$

此时，方程(8.26)的通解为

$$y_x=Y_x+y_x^*=Y_x+\frac{k}{1+p+q} \tag{8.33}$$

其中，Y_x为对应齐次方程(8.27)的通解。

当$1+p+q=0$，但$p+2\neq 0(q\neq 1)$，也就是$r=1$是特征方程(8.28)的单根时，设方程(8.26)的特解

$$y_x^*=\sigma x \tag{8.34}$$

这里σ为待定常数。将(8.34)代入方程(8.26)可得

$$\sigma=\frac{k}{2+p},\quad y_x^*=\frac{k}{2+p}x$$

从而可得方程(8.26)的通解为

$$y_x=y_x^*+C_1+C_2q^x=\frac{k}{2+p}x+C_1+C_2q^x$$

当$1+p+q=0$，且$p+2=0(q=1)$，也就是$r=1$是特征方程(8.28)的二重根时，设方程(8.26)的特解

$$y_x^*=\sigma x^2$$

并代入方程(8.26)可得

$$\sigma=\frac{k}{2},\quad y_x^*=\frac{k}{2}x^2$$

再结合(8.30)可得方程(8.26)的通解为

$$y_x=y_x^*+C_1+C_2x=\frac{k}{2}x^2+C_1+C_2x$$

若方程(8.26)右端$f(x)\not\equiv k$（k为常数），我们采用以下方法求解。

假设特征方程(8.28)有两个互异的根（实根或者复根都可以）r_1和r_2，现在取方程(8.27)的两个线性无关解

$$y_x^{(1)}=\frac{r_2r_1^x-r_1r_2^x}{r_2-r_1},\qquad y_x^{(2)}=\frac{r_2^x-r_1^x}{r_2-r_1}$$

显然以上两解满足

$$y_0^{(1)} = 1, \quad y_1^{(1)} = 0; \qquad y_0^{(2)} = 0, \quad y_1^{(2)} = 1 \tag{8.35}$$

这样，齐次方程(8.27)的通解还可以写为

$$Y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)}$$

其中，C_1和C_2为任意常数。可以证明方程(8.26)的通解为

$$y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \sum_{j=0}^{x-2} y_{x-j-1}^{(2)} f(j) \tag{8.36}$$

也就是证明

$$y_x^* = \sum_{j=0}^{x-2} y_{x-j-1}^{(2)} f(j) \tag{8.37}$$

是方程(8.26)的特解。具体证明如下：

由(8.37)可得，

$$y_{x+1}^* = \sum_{j=0}^{x-1} y_{x-j}^{(2)} f(j)$$

$$y_{x+2}^* = \sum_{j=0}^{x} y_{x+1-j}^{(2)} f(j)$$

把以上结果代入方程(8.26)等号左端，可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{x} y_{x+1-j}^{(2)} f(j) + p \sum_{j=0}^{x-1} y_{x-j}^{(2)} f(j) + q \sum_{j=0}^{x-2} y_{x-j-1}^{(2)} f(j) \\
= \; & \sum_{j=0}^{x-2} (y_{x+1-j}^{(2)} + p y_{x-j}^{(2)} + q y_{x-j-1}^{(2)}) f(j) + y_2^{(2)} f(x-1) + y_1^{(2)} f(x) + p y_1^{(2)} f(x-1) \\
= \; & [y_2^{(2)} + p y_1^{(2)}] f(x-1) + y_1^{(2)} f(x) \\
= \; & -q y_0^{(2)} f(x-1) + y_1^{(2)} f(x) \\
= \; & f(x)
\end{aligned}$$

这样就证明了(8.37)是非齐次方程(8.26)的特解，从而证明了(8.36)确实是非齐次方程(8.26)的通解。

如果特征方程(8.28)的根为一个二重根$r = -\frac{p}{2}$，那么此时只要取

$$y_x^{(1)} = r^x - x r^x = (1-x) r^x, \qquad y_x^{(2)} = x r^{x-1}$$

则这两个解同样是齐次方程(8.27)的两个线性无关解，而且同样满足

$$y_0^{(1)} = 1, \quad y_1^{(1)} = 0; \qquad y_0^{(2)} = 0, \quad y_1^{(2)} = 1$$

这样，(8.36)仍然是非齐次方程(8.26)的通解。