上海财经大学《 常微分方程 》模拟试卷六答案

一、

1. 三阶；否

2． $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\phi(x)$

3. 无穷多

4. 连续，且关于 y 满足 Lipschitz 条件；$\min\{a,\dfrac{b}{M}\}$

5. （ -2，0）

6. $y=c_1(x-\sin x)+c_2(x-\cos 2x)+x$

7. $y''-(c\tan x)y'=0$

8. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4x^2 & -3 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$

9. $\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)$

10. $\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$

二、

1. C　2. B　3. C　4. A

三、

1.

$ydx - xdy - (1 + y^2 e^y)dy = 0$

$y = 0$是常数解；

$y \neq 0,$

$\dfrac{ydx - xdy}{y^2} - \dfrac{1 + y^2 e^y}{y^2} dy = 0$

$d(\dfrac{x}{y}) - d(e^y - \dfrac{1}{y}) = 0$

通解为$\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} - e^y = C$

2.

$(y'-xy)(y'+x^2y)=0$

当$y'=xy$时，$y=0$是常数解；$y\neq 0,\frac{1}{y}dy=xdx,y=C_1e^{\frac{1}{2}x^2}$；

当$y'=-x^2y$时，$y=0$是常数解；$y\neq 0,\frac{1}{y}dy=-x^2dx,y=C_2e^{-\frac{1}{3}x^3}$；

3. 特征方程 $\lambda^2+1=0,\lambda=\pm i$

齐次线性方程通解 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

常数变易法，令 $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$，则

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0 \\ -c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$c_1'(x)=-\tan x,\quad c_2'(x)=1$

$c_1(x)=-\ln|\cos x|+r_1,\quad c_2(x)=x+r_2$

原方程的通解为：$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$

4.

特征方程$|\lambda E-A|=0,\lambda=3$(二重)

方程组有解形如 $X(t)=(R_0+R_1t)e^{3t}$，满足

$$\begin{cases}(A-3E)R_0 = R_1 \\ (A-3E)^2 R_0 = 0\end{cases}$$

$$A-3E = \begin{pmatrix}-1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}, (A-3E)^2 = 0$$

取$R_0 = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$,则$R_1 = \begin{pmatrix}-1 \\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$

$$X_1(t) = \left\{\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 \\ -1\end{pmatrix} t\right\} e^{3t}, \quad X_2(t) = \left\{\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} t\right\} e^{3t}$$

方程组的通解为 $X(t) = \left\{\begin{pmatrix}1-t & t \\ -t & 1+t\end{pmatrix}\right\} e^{3t} C,$

四、

1.

$$y'(x) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \quad \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} \quad \cdots$$

$$y''(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \quad \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} \quad \cdots$$

$$y'''(x) = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \quad \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} \quad \cdots$$

显然满足 $y''' + y'' + y' + y = e^x$ ，及初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$ 。

2. 对应齐次方程为 $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \lambda = -1, \lambda = \pm i$

特解为 $y^* = Ae^x, A = \frac{1}{4}$

方程通解为 $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} e^x$

由初始条件，$c_1=\frac{1}{4},c_2=\frac{1}{2},c_3=0$

所以$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{4}e^{x}$