常微分方程

第五章　一阶线性微分方程组

上海财经大学应用数学系

March 24, 2010

第五章一阶线性微分方程组

模型1 人造卫星的运动

试建立地球人造卫星绕地球运动的微分方程。(忽略其它天体对人造卫星的影响，只计及地球引力场对人造卫星的作用)

卫星的运动方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2m)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (1)$$

这就是一个含有两个未知函数的微分方程组。

模型1 人造卫星的运动

试建立地球人造卫星绕地球运动的微分方程。(忽略其它天体对人造卫星的影响，只计及地球引力场对人造卫星的作用)

卫星的运动方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2m)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \tag{1}$$

这就是一个含有两个未知函数的微分方程组。

模型2 捕食－被捕食模型

设有捕食种群和被捕食(或称食饵)种群生活在同一小环境中，由于生育、生死和相互作用，两种群个体的数量将随时间变化。试建立两种群个体数量随时间变化的数学模型。

捕食一被捕食两种群相互作用的数学模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(r_1 - ax - by) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-r_2 + cx - dy) \end{cases} \tag{2}$$

其中$d > 0, r_2 > 0, c > 0$。这是含有两个未知函数的微分方程组。

模型2 捕食－被捕食模型

设有捕食种群和被捕食(或称食饵)种群生活在同一小环境中，由于生育、生死和相互作用，两种群个体的数量将随时间变化。试建立两种群个体数量随时间变化的数学模型。

捕食一被捕食两种群相互作用的数学模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(r_1 - ax - by) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-r_2 + cx - dy) \end{cases} \tag{2}$$

其中$d > 0, r_2 > 0, c > 0$。这是含有两个未知函数的微分方程组。

一阶微分方程组

称

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\[2ex]
\dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
\cdots \quad \cdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{cases}
\tag{3}
$$

为含有n个未知函数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的一阶微分方程组。

一阶微分方程组的解

如果存在一组函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，使得在$[a, b]$上有下面$n$个式子

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

恒成立，则称这组函数是一阶微分方程组(3)在$[a, b]$上的一个解

5.1 一阶线性微分方程组的一般理论

一阶微分方程组的通解

有n个任意常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$的解

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ x_2 = \phi_2(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ \cdots \quad \cdots \\ x_n = \phi_n(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \end{cases}$$

称为一阶微分方程组(3)的通解。

一阶线性微分方程组

有如果一阶微分方程组(3)中的每一个$f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$对所有未知函数都是一次的，即

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{4}$$

称(4)为一阶线性微分方程组。其中$a_{ij}, f_i(t)(i, j = 1, 2, \cdots, n)$在区间$[a, b]$上连续。

一阶线性微分方程组的向量形式

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{5}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

一阶线性微分方程组的向量形式

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{5}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

一阶线性微分方程组与高阶线性微分方程等价

$$\begin{cases} \dfrac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\dfrac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \eta$$

一阶线性微分方程组与高阶线性微分方程等价

$$\begin{cases} \dfrac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\dfrac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \eta$$

高阶线性微分方程组的转化

例

$$\begin{cases} \dfrac{d^3x}{dt^3} = a_1(t)x + a_2(t)\dfrac{dx}{dt} + a_3(t)\dfrac{d^2x}{dt^2} + b_1(t)y + b_2(t)\dfrac{dy}{dt} + f_1(t) \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = c_1(t)x + c_2(t)\dfrac{dx}{dt} + c_3(t)\dfrac{d^2x}{dt^2} + d_1(t)y + d_2(t)\dfrac{dy}{dt} + f_2(t) \end{cases} \quad (6)$$

作变换，令

$$x = x_1, \ \frac{dx_1}{dt} = x_2, \ \frac{dx_2}{dt} = x_3; \ y = y_1, \ \frac{dy_1}{dt} = y_2$$

高阶线性微分方程组的转化

例

$$\begin{cases} \dfrac{d^3x}{dt^3} = a_1(t)x + a_2(t)\dfrac{dx}{dt} + a_3(t)\dfrac{d^2x}{dt^2} + b_1(t)y + b_2(t)\dfrac{dy}{dt} + f_1(t) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = c_1(t)x + c_2(t)\dfrac{dx}{dt} + c_3(t)\dfrac{d^2x}{dt^2} + d_1(t)y + d_2(t)\dfrac{dy}{dt} + f_2(t) \end{cases} \quad (6)$$

作变换，令

$$x = x_1, \ \frac{dx_1}{dt} = x_2, \ \frac{dx_2}{dt} = x_3; \ y = y_1, \ \frac{dy_1}{dt} = y_2$$

得到含有5个未知函数x_1, x_2, x_3, y_1, y_2的一阶线性微分方程组

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & b_1(t) & b_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) & d_1(t) & d_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1(t) \\ 0 \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

存在唯一性定理

设$A(t)$是$n\times n$矩阵，$F(t)$是n维列向量，它们都在区间$[a,b]$上连续。则对于区间$[a,b]$上的任何数t_0及任一常数向量$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T$，方程组$X'=A(t)X+F(t)$存在唯一解$\phi(t)$，定义于整个区间$[a,b]$上，且满足初始条件$\phi(t_0)=\eta$。

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

齐次线性微分方程组

若线性微分方程组(5)中的$F(t)\equiv\mathbf{0}$，即

$$X' = A(t)X \tag{7}$$

称(7)为齐次线性微分方程组。若$F(t)\neq\mathbf{0}$，称(5)为非齐次线性微分方程组。

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

叠加原理

定理5.2 如果$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_m(t)$是齐次线性微分方程组(7)的$m$个解，则它们的线性组合$\sum_{i=1}^{m} c_i X_i(t)$也是(7)的解。其中$c_1, c_2, \cdots, c_m$是任意常数。

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

向量函数组的线性相关性

设$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$是区间$[a,b]$上的向量函数，如果存在不全为零的常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$，使下式恒成立

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t) \equiv \mathbf{0}, \quad t \in [a.b]$$

则称此组向量函数在区间$[a,b]$上线性相关，否则称这组函数线性无关。

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

向量函数组的Wronski行列式

称区间$[a,b]$上的n个向量函数

$$X_1(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix},\quad X_2(t)=\begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix},\quad \cdots,\quad X_n(t)=\begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

构成的行列式为这组向量函数的Wronski行列式，即

$$W[X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)]\equiv\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

向量函数线性相关性的判别

定理5.3 如果向量函数$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$在区间$[a,b]$上线性相关，则它们在$[a,b]$上的Wronski行列式恒等于零。

向量函数线性相关性的判别

定理5.4 如果向量函数$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$是方程组(7)的$n$个解，则它们在区间$[a,b]$上线性无关的充分必要条件为其Wronski行列式$W(t) \neq 0,\ t \in [a,b]$。

向量函数线性相关性的判别

定理5.5 方程组(7)一定存在n个线性无关解。

通解结构定理

定理5.6 如果$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$是方程组(7)的$n$个线性无关解，则方程组(7)的通解可以表示为

$$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_nX_n(t) \tag{8}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$是任意常数。且通解(8)包含了方程组(7)的所有解。

Liouville公式

定理5.7 设$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$是方程组(7)的任意$n$个解，则它们的Wronski行列式$W(t)$满足一阶线性方程

$$W'(t) = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)]W(t)$$

因而有

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds}, \qquad t, t_0 \in [a, b] \tag{9}$$

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

一阶齐次线性微分方程组的解矩阵

如果一个$n \times n$矩阵的每一列都是(7)的解，则称这个矩阵为(7)的解矩阵。

一阶齐次线性微分方程组的基解矩阵

称(7)的n个线性无关解组成的解矩阵为(7)的基解矩阵。记为$\Phi(t)$，即

$$\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)]$$

其中$\phi_i(t)$，$i = 1, 2, \cdots, n$是(7)的n个线性无关解。

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

解矩阵的性质

定理5.8 (7)一定存在一个基解矩阵$\Phi(t)$。如果$\psi(t)$是(7)的任一解，则

$$\psi(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$$

其中$\mathbf{c}$是确定的常数列向量。

解矩阵的性质

定理5.9 (7)的一个解矩阵$\Phi(t)$是基解矩阵的充分必要条件为在区间$[a,b]$上的某一点t_0处，$\det\Phi(t_0)\neq 0$。

一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

解矩阵的性质

定理5.10 如果$\Phi(t)$是(7)在区间$[a,b]$上的基解矩阵，C是非奇异$n\times n$常数矩阵，则$\Phi(t)C$ 也是(7)在区间$[a,b]$上的基解矩阵。

解矩阵的性质

定理5.11 如果$\Phi(t),\Psi(t)$是(7)在区间$[a,b]$上的两个基解矩阵，则存在一个非奇异$n\times n$常数矩阵C，使在区间$[a,b]$上$\Psi(t)=\Phi(t)C$。

例1

验证

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{bmatrix}$$

是方程组

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X$$

的基解矩阵，并写出通解。

例2

试作出以矩阵

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

为基解矩阵的齐次线性微分方程组。

一阶非齐次线性微分方程组解集合的性质

定理5.12

如果$\bar{X}(t)$是非齐次线性微分方程组(5)的解，$X(t)$是它对应的齐次线性微分方程组(7)的解，则$\bar{X}(t)+X(t)$ 仍是非齐次线性微分方程组(5)的解。

定理5.13

如果$X_1(t), X_2(t)$是非齐次线性微分方程组(5)的两个解，则$X_1(t)-X_2(t)$ 是对应的齐次线性微分方程组(7)的解。

一阶非齐次线性微分方程组解集合的性质

通解结构定理

设$\Phi(t)$是齐次线性微分方程组(7)的一个基解矩阵，$\bar{X}(t)$是非齐次线性微分方程组(5)的某一解，则非齐次线性微分方程组(5)的任一解$X(t)$都可表示为

$$X(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \bar{X}(t)$$

其中$\mathbf{c}$是确定的常数列向量。

一阶非齐次线性微分方程组的常数变易法

设$\Phi(t)$是方程组(7)的一个基解矩阵，于是方程组(7)的通解为

$$X(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$$

我们猜测：方程组(5)也有这种形式的解，但$\mathbf{c}$应为t的函数，即假设

$$X(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t) \tag{10}$$

是方程组(5)的解。其中$\mathbf{c}(t)$是待定的向量函数。
将(10)代入方程组(5)中，得

$$\Phi'(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t) = A(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t) + F(t) \tag{11}$$

因为$\Phi(t)$是方程组(7)的基解矩阵，所以

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

因此，(11)变为

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = F(t)$$

一阶非齐次线性微分方程组的常数变易法

又因为$\Phi(t)$是可逆的，从而得

$$\mathbf{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t)$$

两边同时积分，得

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)ds \tag{12}$$

将(12)代回(10)中，得

$$X(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t_0) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)ds$$

于是方程组(5)的通解为

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi(t)\tilde{\mathbf{c}} + \Phi(t)\mathbf{c}(t_0) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)ds \\ &= \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)ds \end{aligned} \tag{13}$$

例3

试求方程组$X' = A(t)X + F(t)$的通解。其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

及对应方程组$X' = A(t)X$的基解矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

常系数线性微分方程组

设A是$n \times n$常数矩阵，则常系数非齐次线性微分方程组为

$$X' = AX + F(t) \tag{14}$$

其对应的常系数齐次线性微分方程组为

$$X' = AX \tag{15}$$

矩阵指数$\exp(A)$

设A是$n \times n$常数矩阵，称

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots \tag{16}$$

为矩阵指数。

矩阵指数$\exp A$的性质

(1) 如果矩阵A, B可交换，即$AB = BA$，则

$$\exp A \cdot \exp B = \exp(A + B) \tag{17}$$

(2)对任何矩阵A，$(\exp A)^{-1}$存在，且

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A) \tag{18}$$

(3)如果T是非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T \tag{19}$$

矩阵指数函数$\exp(At)$

称

$$\exp(At)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!} \tag{20}$$

为矩阵指数函数。

$\exp(At)$的性质

定理5.15 矩阵

$$\Phi(t) = \exp(At)$$

是方程组(15)的基解矩阵，且$\Phi(0) = E$。

(1) 方程组(15)的通解可以表示为

$$X(t) = \exp(At)\mathbf{c}$$

(2) 如果$\Phi(t)$是方程组(15)的另外一个不同于$\exp(At)$的基解矩阵，则

$$\exp(At) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \tag{21}$$

$\exp(At)$的性质

定理5.15 矩阵

$$\Phi(t) = \exp(At)$$

是方程组(15)的基解矩阵，且$\Phi(0) = E$。

(1) 方程组(15)的通解可以表示为

$$X(t) = \exp(At)\mathbf{c}$$

(2) 如果$\Phi(t)$是方程组(15)的另外一个不同于$\exp(At)$的基解矩阵，则

$$\exp(At) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \tag{21}$$

例1

设A是一个对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

试求$X'=AX$的基解矩阵$\exp(At)$。

例2

试求$X'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}X$的基解矩阵$\exp(At)$。

分析：方程组(15)会不会有形如

$$X(t) = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}, \quad (\lambda, \mathbf{c}\text{未知}，\ \mathbf{c} \neq 0) \tag{22}$$

的解呢？
将(22)代入方程组(15)中，得

$$(\lambda E - A)\mathbf{c} = 0$$

这意味着，$e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}$是方程组(15)的解的充分必要条件为：$\lambda$是矩阵$A$的特征根且$\mathbf{c}$是对应于$\lambda$的特征向量。

矩阵A的特征根是单根的情形

定理5.16 如果方程组(15)的系数矩阵A的n个特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$彼此互异，且$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}$是它们对应的特征向量，则方程组(15)的一个基解矩阵为

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}, \cdots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v_n}] \tag{23}$$

例3

求方程组$X' = AX$的基解矩阵。其中

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

例4

求方程组$X' = AX$的基解矩阵。其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵A的特征根有重根的情形

空间分解法　　　待定系数法。

矩阵A的特征根有重根的情形

空间分解法

定理5.18 如果方程组(15)的系数矩阵A有k个不同的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，它们的重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_k$，且$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$。令$\eta$分别取$n$阶单位向量$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \cdots, \mathbf{e_n}$，则满足初值问题(24)的解可由(25)确定，分别记为$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$，于是方程组(15)的一个基解矩阵为

$$\exp(At) = [X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)]$$

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \eta \end{cases} \tag{24}$$

空间分解法

定理5.18 如果方程组(15)的系数矩阵A有k个不同的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，它们的重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_k$，且$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$。令$\eta$分别取$n$阶单位向量$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \cdots, \mathbf{e_n}$，则满足初值问题(24)的解可由(25)确定，分别记为$X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$，于是方程组(15)的一个基解矩阵为

$$\exp(At) = [X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)]$$

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \eta \end{cases} \tag{24}$$

空间分解法

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \exp(At)\eta = \sum_{i=1}^{k} \exp(At)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \exp(At) \cdot E \cdot \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \exp(At) \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \exp(-\lambda_i E t) \cdot \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} \cdot \exp(A - \lambda_i E)t \cdot \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} \{E + t(A - \lambda_i E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_i E)^2 + \cdots \\
&\qquad + \frac{t^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!}(A - \lambda_i E)^{n_i - 1}\}\mathbf{v}_i
\end{aligned}
\tag{25}
$$

空间分解法

注

如果矩阵A只有一个n重特征根，则n维欧式空间不必分解。此时(25)变为

$$X(t) = e^{\lambda t}\{E + t(A - \lambda E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda E)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \lambda E)^{n}$$

再根据定理5.18，得方程组(15)的一个基解矩阵

$$\exp(At) = e^{\lambda t}\{E + t(A - \lambda E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda E)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \lambda$$

例5

求方程组$X' = AX$的基解矩阵。其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

例6

求方程组$X' = AX$的基解矩阵。其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

矩阵A的特征根有重根的情形

待定系数法

定理5.19 如果方程组(15)的系数矩阵A有k个不同特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_k$，且$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$。则对$n_i$重特征根$\lambda_i$，方程组(15)有$n_i$个线性无关解，形如

$$X(t) = (R_0 + R_1 t + \cdots + R_{n_i-1} t^{n_i-1}) e^{\lambda_i t} \tag{28}$$

其中向量$R_0, R_1, \cdots, R_{n_i-1}$由矩阵方程确定:

$$\begin{cases} (A - \lambda_i E) R_0 = R_1 \\ (A - \lambda_i E) R_1 = 2R_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ (A - \lambda_i E) R_{n_i-2} = (n_i - 1) R_{n_i-1} \\ (A - \lambda_i E)^{n_i} R_0 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{29}$$

矩阵A的特征根有重根的情形

待定系数法

用待定系数法求解前面的例5和例6。

常系数非齐次线性微分方程组的解法

常数变易公式

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} \exp[(t-s)A]F(s)ds \tag{30}$$

和

$$X(t) = \exp[(t-t_0)A]\eta + \int_{t_0}^{t} \exp[(t-s)A]F(s)ds \tag{31}$$

例7

求方程组$X' = AX + F(t)$满足初始条件$X(0) = \eta$的解。其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

胆固醇流动的仓室模型

在研究传染病的传播、种群生态、环境的污染、药物在人体的分布等问题中，经常把所研究的事物看成由有限个部分组成的系统，而每个部分称为一个仓室。它具有以下特点:
(1) 每个仓室有固定的容量，内含每个时刻都均匀分布着的物质(或能量);
(2) 各个仓室间以及仓室与外部环境间均可进行物质(或能量)交换，并服从物质(或能量)守恒定律。
这样的系统称为仓室系统。下面根据人体内胆固醇的吸收、合成、排泄等机理来建立胆固醇流动的仓室模型。

人造卫星的运动

求解卫星的运动方程

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2m)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \tag{32}$$