第三章　一阶常微分方程解的存在唯一性

本章主要介绍和证明一阶微分方程解的Picard存在和唯一性定理，解的延拓，解对初值的连续性和可微性等概念。

3.1　Picard存在唯一性定理

3.1.1　一阶显式微分方程

考虑一阶显式常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

其中$f(x,y)$为闭矩形区域

$$\mathcal{R}: \quad |x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b$$

上的连续函数。

定义 3.1 *如果存在常数$L>0$，使得以下不等式*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$$

对$\forall (x,y_1),(x,y_2) \in \mathcal{R}$都成立，则称函数$f(x,y)$在区域$\mathcal{R}$内关于$y$满足$Lipschitz$**条件**，*常数L称为*$Lipschitz$**常数**。

定理 3.1 (Picard存在唯一性定理) *若函数$f(x,y)$在区域$\mathcal{R}=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$上连续，而且关于$y$满足$Lipschitz$条件，那么常微分方程初值问题(3.1)在区间$\mathcal{I}=[x_0-h,x_0+h]$上存在唯一解，其中常数*

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \qquad M = \max_{(x,y)\in\mathcal{R}} |f(x,y)|$$

〖**证明**〗　证明过程分3步。

(1) 首先证明微分方程初值问题(3.1)等价于积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

即如果连续可微函数$y(x)$满足微分方程(3.1)，则它一定满足积分方程(3.2)；如果连续函数$y(x)$满足积分方程(3.2)，则它一定连续可微，而且满足微分方程(3.1)。(一般，一个函数作为微分方程的解被要求是连续可微的，而作为积分方程的解仅要求连续。)具体证明如下:

如果$y = \varphi(x)(x \in \mathcal{I})$是方程(3.1)的解，就有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, \varphi(x))$$

上式两边从x_0到x取定积分可得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t$$

把定解问题(3.1)的初始条件

$$\varphi(x_0) = y_0$$

代入上式可得

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t$$

因此，$y = \varphi(x)$是积分方程(3.2)的定义在$\mathcal{I}$上的连续解。

反之，如果$y = \varphi(x)(x \in \mathcal{I})$是(3.2)的连续解，则有

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t, \quad x \in \mathcal{I} \tag{3.3}$$

上式两端关于x求导可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, \varphi(x))$$

同时，把$x = x_0$代入(3.3)就得到

$$\varphi(x_0) = y_0$$

因此，$y = \varphi(x), x \in \mathcal{I}$是初值问题(3.1)的解，且满足连续可微。

(2) 用Picard逐次逼近法证明解的存在性。具体方法为：构造积分方程(3.2)的一组近似解，证明近似解的极限满足积分方程(3.2)，从而证明解的存在性。

任取一个$\mathcal{R}$上的连续函数$y = \varphi_0(x)$代入积分方程(3.2)右端，就得到

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\mathrm{d}t$$

显然，$\varphi_1(x)$也是连续函数。如果$\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$，那么$\varphi_0(x)$就是积分方程(3.2)的解。否则，继续将$y = \varphi_1(x)$代入积分方程(3.2)右端得到

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))\mathrm{d}t$$

由于$f(x, y)$是闭矩形$\mathcal{R}$上的连续函数，因此必须验证当$|x - x_0| \leq h$时，$|\varphi_1(x) - y_0| \leq b$，否则$f(t, \varphi_1(t))$不一定有定义，那么下一步就做不下去了。具体验证如下：当$|x - x_0| \leq h$时，

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_0(t))|\mathrm{d}t\right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b$$

因此，$\varphi_2(x)$也是连续函数。如果$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$，那么$\varphi_1(x)$就是积分方程(3.2)的解。否则，继续这一步骤，一般可得到

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

同样，利用数学归纳法我们可以验证当$x \in \mathcal{I}$时，$|\varphi_n(x) - y_0| \leq b (n > 1)$。为此，假设当$n = k$时成立

$$|\varphi_k(x) - y_0| \leq b, \qquad x \in \mathcal{I}$$

那么，当$n = k + 1$时，

$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathcal{I}$$

于是，当$x \in \mathcal{I}$时，

$$|\varphi_{k+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_k(t))|\mathrm{d}t\right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b$$

这样，就有了一个连续函数的序列

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$$

称为Picard序列。在生成该函数序列的时候，如果有$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$，那么$\varphi_n(x)$就是积分方程(3.2)的解；否则可以证明：$\varphi_n(x) (n = 1, 2, \cdots)$当$x \in \mathcal{I}$时一致收敛到某一连续函数$\varphi(x)$。具体证明如下:

由于$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \Big(\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\Big) + \Big(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\Big) + \cdots + \Big(\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\Big)$，故只需证明无穷级数$\varphi_0(x) + \sum\limits_{n=0}^{\infty}[\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)]$在$\mathcal{I}$上一致收敛即可。采用数学归纳法来证明:

特别，取$\varphi_0(x) = y_0$，则

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_0(t))|\mathrm{d}t\right| \leq M|x - x_0|$$

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| &\leq \left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\varphi_1(t))-f(x,\varphi_0(t))|\mathrm{d}t\right| \\ &\leq L\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|\mathrm{d}t\right| \\ &\leq LM\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|\mathrm{d}t\right| = \frac{LM}{2!}|x-x_0|^2\end{aligned}$$

一般，假定已证

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{L^{n-1}M}{n!}|x-x_0|^n$$

便可推出

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| &\leq \left|\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi_n(t))-f(t,\varphi_{n-1}(t))|\mathrm{d}t\right| \\ &\leq L\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{L^nM}{n!}\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^n\mathrm{d}t\right| = \frac{L^nM}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\end{aligned}$$

特别，当$|x-x_0|\leq h$时，

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leq \frac{L^nM}{(n+1)!}h^{n+1}$$

由于正项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{L^nM}{(n+1)!}h^{n+1}$是收敛的，从而函数项级数$\varphi_0(x)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)]$在$\mathcal{I}$上一致收敛。

假定

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

由于无穷级数$\varphi_0(x)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)]$的每一项都在$\mathcal{I}$上连续，所以$\varphi(x)$也在$\mathcal{I}$上连续。这样就证明了所构造的Picard逼近函数序列$\{\varphi_n(x)\}$一致收敛到连续函数$\varphi(x)$。更进一步，还可以证明：$\varphi(x)$就是积分方程(3.2)定义在$\mathcal{I}$上的连续解。具体证明如下:

根据Lipschitz条件

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))| \leq L|\varphi_n(x)-\varphi(x)|$$

以及$\{\varphi_n(x)\}$在$\mathcal{I}$上一致收敛于$\varphi(x)$可知$\{f(x,\varphi_n(x))\}$在$\mathcal{I}$也一致收敛到$f(x,\varphi(x))$。因此可以对(3.4)两边关于n取极限，得到

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi_{n-1}(t))\mathrm{d}t = y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(t,\varphi_{n-1}(t))\mathrm{d}t \\ &= y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这就证明了$\varphi(x)$的确是积极分方程(3.2)定义在$\mathcal{I}$上的连续解。

(3) 解的唯一性。

设$\varphi(x)$和$\psi(x)$都是微分方程(3.1)在$\mathcal{I}$上的解。记$\widetilde{M}=\max\limits_{x\in\mathcal{I}}|\varphi(x)-\psi(x)|$，根据Lipschitz条件，当$x\in\mathcal{I}$时，有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\psi(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))|\mathrm{d}t\right| \\ &\le L\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t\right| &(3.5)\\ &\le \widetilde{M}L|x-x_0| &(3.6)\end{aligned}$$

把不等式(3.6)代入不等式(3.5)的右端，可得

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\le\frac{\widetilde{M}(L|x-x_0|)^2}{2!}$$

如此反复递推可得

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\le\frac{\widetilde{M}(L|x-x_0|)^n}{n!},\qquad x\in\mathcal{I}$$

在上式中令$n\to\infty$即可得到$\varphi(x)=\psi(x)$。这就证明了唯一性。

■

注1　存在唯一性定理中参数h的几何意义。

注2　在实际使用中，Lipschitz条件较难检验，故常用$f(x,y)$在$\mathcal{R}$上有对y的连续偏导数来替代。

3.1.2　一阶隐式方程

分析:

$$F\left(x,y,y'\right)=0 \tag{3.7}$$

根据隐函数存在定理，只要F在(x_0,y_0,y_0')的某邻域内连续，且$F(x_0,y_0,y_0')=0$，而$\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$，则必可以把$y'$惟一地表示为$x,y$的函数

$$y'=f(x,y) \tag{3.8}$$

而且，$f(x,y)$也在(x_0,y_0)的某一邻域内连续，且满足

$$y_0'=f(x_0,y_0)$$

如果F关于所有变元都有连续偏导数，那么$f(x,y)$对x,y也存在连续偏导数，并且

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} \tag{3.9}$$

上式说明$\frac{\partial f}{\partial y}$在$(x_0,y_0)$的某一邻域内有界。根据定理3.1，方程(3.8)的满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解存在且唯一。

定理 3.2 如果在点(x_0, y_0, y_0')的某一个邻域中，

$\mathring{1}$ $F(x, y, y')$对所有变元(x, y, y')连续，且存在连续偏导数;

$\mathring{2}$ $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

$\mathring{3}$ $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$

则方程*(3.7)*存在惟一解

$$y = y(x), \quad |x - x_0| \leq h \qquad (h\text{为足够小的正数})$$

满足初始条件

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0' \tag{3.10}$$

3.2　不动点定理与解的存在性

本节将给出微分方程解的存在唯一性的抽象形式——不动点理论。

定义 3.2 设$\mathbb{X}$为一个非空集合，如果$\forall x, y \in \mathbb{X}$，都$\exists \rho(x, y) \in \mathbb{R}$与其对应且满足以下三个条件:

(1) **非负性:** $\rho(x, y) \geq 0$，且当且仅当$x = y$时，$\rho(x, y) \equiv 0$;

(2) **对称性:** $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) **三角不等式:** $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$，$z \in \mathbb{X}$。

则称ρ为$\mathbb{X}$上的***距离***，称$\mathbb{X}$是以ρ为距离的***距离空间***。

定义 3.3 对于距离空间$\mathbb{X}$中的点列$\{x_n\}$，如果$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使当$m, n > N$时

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

则称$\{x_n\}$为*Cauchy*<i>点列</i>或者***基本点列***。如果$\mathbb{X}$中的任一基本点列必收敛于$\mathbb{X}$中的某一点，则称$\mathbb{X}$为***完备的距离空间***。

定义 3.4 设$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$都是距离空间，如果对于每一个$x \in \mathbb{X}$，必有$\mathbb{Y}$中唯一一点y与之对应，则称这个对应关系是一个***映射***。常用记号T来表示，即$Tx = y$。

定义 3.5 如果$\forall x \in \mathbb{X}$以及某一给定的$x_0 \in \mathbb{X}$，映射T满足以下条件: $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当$\rho(x, x_0) < \delta$时，有$\rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon$，则称映射$T$在$x_0$处***连续***。如果映射$T$在$\mathbb{X}$中的每一点都连续，就称$T$在$\mathbb{X}$***上连续***或者称$T$是***连续映射***。

定义 3.6 设$\mathbb{X}$是一个完备的距离空间，ρ是$\mathbb{X}$上的距离，T是由$\mathbb{X}$到$\mathbb{X}$自身的映射，并且$\forall x, y \in \mathbb{X}$，成立

$$\rho(Tx, Ty) \le \theta\rho(x, y) \tag{3.11}$$

其中θ是满足$0 \le \theta < 1$的定数。那么称T为$\mathbb{X}$上的***压缩映射***。

定理 3.3 (Banach压缩映像原理) 设$\mathbb{X}$是一个完备的距离空间，T是$\mathbb{X}$上的一个压缩映射。那么T在X中存在唯一不动点，即存在唯一的$\tilde{x} \in \mathbb{X}$，使得$T\tilde{x} = \tilde{x}$。

〖**证明**〗 在$\mathbb{X}$中任取一点x_0，并令

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1, \quad \cdots, \quad x_{n+1} = Tx_n, \quad \cdots$$

以下证明所得序列$\{x_n\}$是$\mathbb{X}$中的一个基本点列。事实上

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Tx_0, Tx_1) \le \theta\rho(x_0, x_1) = \theta\rho(x_0, Tx_0);$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Tx_1, Tx_2) \le \theta\rho(x_1, x_2) \le \theta^2\rho(x_0, Tx_0);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般有

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \theta^n\rho(x_0, Tx_0), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

连续使用距离的三角不等式，可得对任意自然数p，

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p}) &\le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\le (\theta^n + \theta^{n+1} + \cdots + \theta^{n+p})\rho(x_0, Tx_0) \\ &= \frac{\theta^n(1-\theta^p)}{1-\theta}\rho(x_0, Tx_0) \le \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, Tx_0)\end{aligned}$$

根据定理假定，$0 \le \theta < 1$，故当$n \to \infty$时，$\theta^n \to 0$，这样点列$\{x_n\}$是基本点列。由于$\mathbb{X}$是完备的，因此$\{x_n\}$在$\mathbb{X}$中收敛于某一点$\tilde{x}$。再由不等式(3.11)可知，T是$\mathbb{X}$上的连续映射。在$x_{n+1} = Tx_n$两端令$n \to \infty$，有

$$\tilde{x} = T\tilde{x}$$

这就说明$\tilde{x}$是T的一个不动点。

再证明不动点的唯一性。设另有$\bar{x} \in \mathbb{X}$，使$\bar{x} = T\bar{x}$，则

$$\rho(\tilde{x}, \bar{x}) = \rho(T\tilde{x}, T\bar{x}) \le \theta\rho(\tilde{x}, \bar{x})$$

由于$0 \le \theta < 1$，故$\rho(\tilde{x}, \bar{x}) \equiv 0$，即$\tilde{x} \equiv \bar{x}$。唯一性得证。■

现在我们可以使用Banach压缩映像原理来证明定理3.1了。

不妨设f的Lipschitz常数$L > 0$。$\forall\theta \in [0, 1)$，记

$$\tilde{h} = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{\theta}{L}\right\}$$

用$\mathbb{X}$表示区间$[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]$上全部连续函数组成的空间。由于常微分方程初值问题(3.1)等价于以下积分方程(3.2)

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

因此，我们在$\mathbb{X}$内定义映射

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

在$\mathbb{X}$上引入距离

$$\rho(y_1,y_2)\equiv\|y_1-y_2\|\triangleq\max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]}|y_1(x)-y_2(x)|,\quad\forall y_1,y_2\in\mathbb{X}$$

那么，

$$\begin{aligned}\rho(Ty_1,Ty_2)&=\max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]}\left|\int_{x_0}^{x}f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\mathrm{d}t\right|\\&\le\max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]}\left|\int_{x_0}^{x}L|y_1(t)-y_2(t)|\mathrm{d}t\right|\\&\le L\tilde{h}\max_{x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]}|y_1(t)-y_2(t)|=L\tilde{h}\rho(y_1,y_2)\le\theta\rho(y_1,y_2)\end{aligned}$$

因此T是$\mathbb{X}$上的压缩映射。根据定理3.3，存在唯一的连续函数$y_0(x)(x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}])$使得

$$y_0(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_0(t))\mathrm{d}t$$

即方程(3.1)在$x\in[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]$上有唯一解。由于$[x_0-\tilde{h},x_0+\tilde{h}]\subset\mathcal{I}=[x_0-h,x_0+h]$，因此以上证明的结果与定理3.1的结论尚有差距。我们可以根据常微分方程初值问题(3.1)中的初始条件，利用下节的解的延拓的方法，将结论延拓到$\mathcal{I}$上。

3.3　解的延拓

问题:

定理3.1给出的Cauchy问题的解的存在惟一性是局部的，其给出的解的存在区间很小（$|x-x_0|\le h$）。这会给实际使用带来很多麻烦。能否将解的存在区间扩大呢？一个很自然的猜测是：$f(x,y)$的存在区域$\mathcal{R}$越大，则解的存在区间也应该越大。这个猜测实际是不对的。

【例1】

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2\\y(0)=0\end{cases}$$

如果$f(x,y)=x^2+y^2$的存在区间取为$\mathcal{R}_1=\left\{(x,y)\Big||x|\le 1,|y|\le 1\right\}$，即$a_1=1,b_1=1$。那么对应的$M_1=\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}_1}f(x,y)=2$，$h_1=\min\left(a_1,\frac{b_1}{M_1}\right)=\frac{1}{2}$。而如果$f(x,y)$的存在区间取为$\mathcal{R}_2=\left\{(x,y)\Big||x|\le 2,|y|\le 2\right\}$，即$a_2=2,b_2=2$。那么对应的$M_2=\max\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}_2}f(x,y)=2$，$h_2=\min\left(a_2,\frac{b_2}{M_2}\right)=\frac{1}{4}$。显然，区域$\mathcal{R}_2$大于$\mathcal{R}_1$，但是解的存在区间反而由$|x|\le h_1=\frac{1}{2}$缩小到$|x|\le h_2=\frac{1}{4}$。

定义 3.7 对方程*(3.1)*，设$y=\varphi(x)$是方程定义在(α_1,β_1)内的一个解。若存在方程的另一个定义在(α_2,β_2)的解$y=\psi(x)$，满足

(1) $(\alpha_2,\beta_2)\supset(\alpha_1,\beta_1)$，但$(\alpha_1,\beta_1)\ne(\alpha_2,\beta_2)$;

(2) $\psi(x)\equiv\varphi(x)$，当$x\in(\alpha_1,\beta_1)$

则称$y=\varphi(x)$为***可延拓解***，并称$y=\psi(x)$是解$y=\varphi(x)$的一个***延拓***。

若不存在满足上述条件的解$y=\psi(x)$，则称解$y=\varphi(x),x\in(\alpha_1,\beta_1)$为方程的一个***饱和解***，存在区间$(\alpha_1,\beta_1)$为***饱和区间***或***最大存在区间***。

定义 3.8 对于方程*(3.1)*，假设$f(x,y)$在开区域$\mathcal{G}$内连续。如果对$\mathcal{G}$内每一点，都存在以该点为中心的完全属于$\mathcal{G}$的闭区域$\mathcal{S}$。而且在$\mathcal{S}$中，方程右端$f(x,y)$关于y满足*Lipschitz*条件。我们就称$f(x,y)$满足***局部Lipschitz条件***。用更为简洁的数学式子来表示:

$$\forall(x_1,y_1)\in\mathcal{G},\exists a_1>0,b_1>0,\ \ s.t.\ \mathcal{S}=\left\{(x,y)\Big||x-x_1|\le a_1,|y-y_1|\le b_1\right\}\subset\mathcal{G}$$

且存在常数L（与x_1,y_1,a_1,b_1有关），对$\forall(x,y'),(x,y'')\in\mathcal{S}$，有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|$$

延拓方法:

根据定理3.1，如果方程(3.1)的右端项$f(x,y)$在其存在区域$\mathcal{G}$内关于y满足局部Lipschitz条件，则$\exists h_1>0$，使得方程(3.1)在$[x_0-h_1,x_0+h_1]$上存在惟一解$\varphi_1(x)$。然后，我们再以$\Big(x_0+h_1,\varphi_1(x_0+h_1)\Big)$为新的初值，这样根据定理3.1，存在另一个$h_2>0$，使得方程(3.1)在$[x_0+h_1-h_2,x_0+h_1+h_2]$上存在惟一解$\varphi_2(x)$。这样解的存在区间就被向右延拓了。

同样以$\Big(x_0-h_1,\varphi_1(x_0-h_1)\Big)$为新的初值，就可以使解向左延拓。反复进行这样的延拓就可以得到更大的解的存在区间。

定理 3.4 (解的延拓定理) 如果方程*(3.1)*的右端项$f(x,y)$在有界区域$\mathcal{G}$内连续，并且关于变元y满足局部*Lipschitz*条件。又设$P_0(x_0,y_0)$为$\mathcal{G}$内的任意一点，$y=\varphi(x)$为经过P_0（满足方程*(3.1)*初始条件）的一条积分曲线。那么$y=\varphi(x)$的最大存在区间是一个开区间(α,β)，且积分曲线将在区域$\mathcal{G}$内向左右两个方向延伸到边界（换言之，对于任何有界闭区域$\Omega(P_0\in\Omega\subset\mathcal{G})$，积分曲线将延伸到$\Omega$之外）。

注1　*由有限覆盖定理易得：如果$\mathcal{G}$是有界闭区域，则$f(x,y)$在$\mathcal{G}$上满足局部Lipschitz条件等价于它在$\mathcal{G}$上满足整体Lipschitz条件。但当$\mathcal{G}$是开区域时，$\mathcal{G}$上的局部Lipschitz条件则弱于$\mathcal{G}$上的整体Lipschitz条件。对于任意区域$\mathcal{G}$，如果$f(x,y)$在$\mathcal{G}$上对y有连续偏导数，则f对y满足局部Lipschitz条件。*

注2　*解最大存在区间(α,β)，以右端β为例，必然发生下列情形之一：*

(1) $\beta=+\infty$；

(2) $\beta<+\infty$，当$x\to\beta-0$时，$\varphi(x)$无界；

(3) $\beta<+\infty$，当$x\to\beta-0$时，点$(x,\varphi(x))$与$\mathcal{G}$的边界$\partial\mathcal{G}$的距离趋于0。

类似也可以讨论左端点α的情形。

【例2】　讨论方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$过点$(1,1)$以及点$(3,-1)$的积分曲线的存在区间。

〖**解**〗　$f(x,y)=y^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$在$xoy$平面内连续，且满足延拓定理和解的存在惟一性定理的条件。利用分离变量法解得

$$y=\frac{1}{c-x},\quad y=0$$

过点$(1,1)$的积分曲线为：$y=\frac{1}{2-x}$。当$x=2$时无意义，因此该积分曲线的最大存在区间为$(-\infty,2)$;

过点$(3,-1)$的积分曲线为：$y=\frac{1}{2-x}$。同样当$x=2$时无意义，但此时该积分曲线的最大存在区间为$(2,+\infty)$。

尽管$f(x,y)$在全平面上满足延拓定理条件，但积分曲线不一定充满$(-\infty,+\infty)$。另外平凡解$y=0$的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$。■

3.4　解对初值与参数的连续性与可微性

研究的意义:

在实际问题中，初值或参数多是通过测量或者实验得到的，因此不可避免地会有误差。如果初值或参数的一些微小的变化引起了解的剧烈变化，那么，所求得的解就没有什么实际意义了。

3.4.1　Gronwall不等式

定理 3.5 (Gronwall不等式) 设$\alpha\in\mathbb{R}$，$u(x),\varphi(x)$和$\lambda(x)$是区间$[x_0,X]$上的三个连续函数，$\lambda(x)\ge0$且成立以下不等式

$$u(x)\le\alpha+\int_{x_0}^{x}[\lambda(t)u(t)+\varphi(t)]\mathrm{d}t,\qquad(x_0\le x\le X)\tag{3.12}$$

则

$$u(x)\le\alpha e^{\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}e^{\int_t^x\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad(x_0\le x\le X)\tag{3.13}$$

〖**证明**〗 记

$$v(x)=\alpha+\int_{x_0}^{x}[\lambda(t)u(t)+\varphi(t)]\mathrm{d}t$$

则

$$u(x)\le v(x) \tag{3.14}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\lambda(x)u(x)+\varphi(x)$$

将(3.12)两边同乘以$e^{-\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}$并利用(3.12)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{v(x)e^{-\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}\right\}=&\ [v'(x)-v(x)\lambda(x)]e^{-\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}\\ =&\ \left\{\lambda(x)\left[u(x)-\alpha-\int_{x_0}^{x}\Big(\lambda(t)u(t)+\varphi(t)\Big)\mathrm{d}t\right]+\varphi(x)\right\}e^{-\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}\\ \le&\ \varphi(x)e^{-\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

将以上不等式关于x从x_0到x积分，特别注意$v(x_0)=\alpha$，即得

$$v(x)e^{-\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}-\alpha\le\int_{x_0}^{x}\varphi(t)e^{-\int_{x_0}^{t}\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t$$

最后用$e^{\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}$乘上式两端，可得

$$v(x)\le\alpha e^{\int_{x_0}^{x}\lambda(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}\varphi(t)e^{\int_{t}^{x}\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t$$

利用上式及(3.14)即得(3.13)。■

现假设两个给定方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1(x,y),\qquad y(x_0)=\xi_0 \tag{3.15}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_2(x,y),\qquad y(x_0)=\eta_0 \tag{3.16}$$

其中$f_1,f_2\in C[a,b]\times(-\infty,\infty)$，且分别满足对$y$的Lipschitz条件。又设对$x$的任一区间$[c,d]\subset(a,b)$，存在连续函数$\delta(x)$，使不等式

$$|f_1(x,y)-f_2(x,y)|\le\delta(x),\qquad x\in[c,d] \tag{3.17}$$

对一切y成立。再设$y=\xi(x)$是方程(3.16)的经过点(x_0,ξ_0)的解曲线；$y=\eta(x)$是方程(3.17)的经过点(x_0,η_0)的解曲线，其中$a<x_0<b$。当$x\in(x_0,b)$时，以下利用Gronwall不等式(3.13)导出$|\xi(x)-\eta(x)|$的估计式。

根据(3.2)，$\xi(x)$和$\eta(x)$分别满足积分方程

$$\xi(x)=\xi_0+\int_{x_0}^{x}f_1(t,\xi(t))\mathrm{d}t \tag{3.18}$$

和

$$\eta(x)=\eta_0+\int_{x_0}^{x} f_2(t,\eta(t))\mathrm{d}t \tag{3.19}$$

把(3.18)减去(3.19)并加减同一项$\int_{x_0}^{x} f_2(t,\xi(t))\mathrm{d}t$整理可得

$$\xi(x)-\eta(x)=\xi_0-\eta_0+\int_{x_0}^{x}\left[f_1\Big(t,\xi(t)\Big)-f_2\Big(t,\xi(t)\Big)\right]\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\left[f_2\Big(t,\xi(t)\Big)-f_2\Big(t,\eta(t)\Big)\right]\mathrm{d}t$$

上式两边取绝对值，并应用(3.17)与Lipschitz条件可得

$$|\xi(x)-\eta(x)|\le|\xi_0-\eta_0|+\int_{x_0}^{x}\delta(t)\mathrm{d}t+L\int_{x_0}^{x}|\xi(t)-\eta(t)|\mathrm{d}t$$

现取$u(x)=|\xi(x)-\eta(x)|$，$\alpha=|\xi_0-\eta_0|$，$\lambda(x)=L$以及$\varphi(x)=\delta(x)$，根据Gronwall不等式(3.13)可得

$$|\xi(x)-\eta(x)|\le|\xi_0-\eta_0|e^{L(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{L(x-t)}\delta(t)\mathrm{d}t \tag{3.20}$$

特别，如果$f_1(x,y)\equiv f_2(x,y)$，则$\delta(x)\equiv 0$，此时$\xi(x)$与$\eta(x)$是同一个微分方程的满足不同初始条件的两个特解，由(3.20)可得

$$|\xi(x)-\eta(x)|\le|\xi_0-\eta_0|e^{L(x-x_0)} \tag{3.21}$$

如果$f_1\not\equiv f_2$，但是$\xi_0=\eta_0$，则$y=\xi(x)$和$y=\eta(x)$分别表示两个不同方程(3.15)和(3.16)经过同一点的解曲线，同样由(3.20)可得

$$|\xi(x)-\eta(x)|\le\int_{x_0}^{x}e^{L(x-t)}\delta(t)\mathrm{d}t \tag{3.22}$$

3.4.2 解对初值和参数的连续性

根据以上结论，现在可以给出解对初值的连续性定理及其证明。

定理 3.6 (解对初值的连续性定理) 设方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{3.23}$$

的右端$f(x,y)$在区域D中连续，并且满足Lipschitz条件。$y=\xi(x)$是方程(3.23)的经过(x_0,ξ_0)的解，定义于区间$[x_0,X]$($X<b$)。则$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$，当$|\eta_0-\xi_0|<\delta$时，(3.23)的经过点(x_0,η_0)的解曲线$y=\eta(x)$也在$[x_0,X]$上有定义，并且

$$|\eta(x)-\xi(x)|\le\varepsilon,\qquad x_0\le x\le X \tag{3.24}$$

〖**证明**〗 由于$f(x,y)$在D中连续，且满足Lipschitz条件，因此根据定理(3.1)，满足初始条件$y|_{x=x_0}=\xi_0$的解$y=\xi(x)$存在唯一。记积分曲线$y=\xi(x)$为l，则$l:y=\xi(x),a\le x\le b$是$x0y$平面上的有界闭集。对l上的每一点(x,y)必存在以该点为圆心的

开圆$C \subset D$，使在其内的函数$f(x,y)$关于y满足Lipschitz条件。根据有限覆盖定理，可以找到有限个具有这种性质的开圆，记为$C_i (i = 1, 2, \cdots, N)$，并且他们的全体可以覆盖整个积分曲线段$l$。设$\varepsilon_i$为$C_i$的半径，并记相应的Lipschitz常数为$L_i (i = 1, 2, \cdots, N)$。记$\varepsilon_0 = \min\limits_{1 \le i \le N} \{\varepsilon_i\}$，$L = \max\limits_{1 \le i \le N} \{L_i\}$。令$\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$，那么$l \subset \Omega \subset D$，且$\Omega$的边界$\partial\Omega$到$l$的距离$0 < \rho \le \varepsilon_0$。

现取$\bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon, \rho\}$，$\delta = \bar{\varepsilon}/2 \cdot e^{-L(X-x_0)}$。易证：$\forall x \in [x_0, X]$，经过点$(x_0, \eta_0)$的方程(3.23)的积分曲线$\tilde{l} : y = \eta(x), x \in [x_0, X]$必包含在$\Omega$内部。这是因为$\forall x \in [x_0, X]$，根据(3.21)

$$|\eta(x) - \xi(x)| \le |\eta_0 - \xi_0| e^{L(X-x_0)} < \delta e^{L(X-x_0)} = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < \rho$$

因此积分曲线$\tilde{l}$上的点$(x, \eta(x))$一定在Ω内部。这也就证明了$\forall x \in [x_0, X]$，$|\eta(x) - \xi(x)| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2} < \varepsilon$。■

利用相似的证明方法并结合(3.22)可以证明以下的解关于方程右端函数的连续性定理（证明过程从略，见习题）。

定理 3.7 (解关于方程右端函数的连续性定理) *设$y = \xi(x), x \in [x_0, X], X < b$是方程(3.23)的经过$(x_0, \xi_0)$的解。则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta(x) \ge 0$，$\delta(x) \in C[x_0, X]$，对任何方程*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x, y) \tag{3.25}$$

只要$g(x,y)$在区域D中连续，满足局部Lipschitz条件以及以下不等式

$$|f(x,y) - g(x,y)| \le \delta(x), \quad x_0 \le x \le X, \quad -\infty < y < \infty$$

那么(3.25)的经过(x_0, ξ_0)的积分曲线$y = \eta(x)$也必在$[x_0, X]$上有定义，并且在$[x_0, X]$上满足不等式(3.24)。

对于方程右端含有参数λ的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y; \lambda) \tag{3.26}$$

记

$$D_\lambda = \{(x, y, \lambda) | (x, y) \in D, \alpha < \lambda < \beta\} \tag{3.27}$$

设$f(x, y; \lambda)$在D_λ内连续，且关于y满足局部Lipschitz条件，其Lipschitz常数L与参数λ无关。

定理 3.8 (解对参数的连续性定理) *设$f(x, y; \lambda)$在(3.27)中定义的区域D_λ内连续，并且在D_λ内关于y一致地满足局部Lipschitz条件。$(x_0, \xi_0, \lambda_0) \in D_\lambda$，$y = \xi(x)$是方程(3.26)经过点$(x_0, \xi_0)$，参数$\lambda$取为$\lambda_0$时的积分曲线，其中$x \in [x_0, X], X < b$。则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$|\lambda_1 - \lambda_0| < \delta$时，方程*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y; \lambda_1) \tag{3.28}$$

的经过点(x_0, ξ_0)的积分曲线$y = \eta(x)$也在$[x_0, X]$上有定义，并且满足不等式(3.24)。

3.4.3 解对初值和参数的连续可微性

进一步，我们可以讨论解对初值和参数的连续可微性。一般，对于微分方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y; \lambda) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \tag{3.29}$$

中的初值(x_0, y_0)和参数λ，我们总认为是固定的。但本节讨论的问题是假如(x_0, y_0, λ)变动，则相应的初值问题(3.29)的解随之如何进行变动。也就是说，初值问题的解不仅仅依赖于自变量x，同时也依赖于初值(x_0, y_0)和参数λ。因此我们可以考虑将初值问题(3.29)的解看作是四个变元的函数，记为

$$y = y(x, x_0, y_0, \lambda)$$

以下给出解对初值和参数的可微性定理。

定理 3.9 (解对初值和参数的可微性定理) *设方程(3.29)中的$f(x, y, \lambda)$当$(x, y) \in D$，$\lambda \in (\alpha, \beta) = I$是连续函数，且关于$x, y, \lambda$有连续偏导数。则方程(3.29)的解$y(x, x_0, y_0, \lambda)$有关于$x_0$，$y_0$和$\lambda$的连续偏导数。*

〖**证明**〗 由于f关于y在D内有连续偏导数，故f在D内关于y满足局部Lipschitz条件。因此在定理的条件下，解对初值和参数的连续性定理成立，即$y(x, x_0, y_0, \lambda)$在其存在范围内关于x, x_0, y_0, λ是连续的。由$y = y(x, x_0, y_0, \lambda)$是方程(3.29)的解以及$f$的连续性，立即可以推得$\frac{\partial y}{\partial x}$的连续性。以下证明对于函数$y = y(x, x_0, y_0, \lambda)$在$D \times I$内任一点的偏导数$\frac{\partial y}{\partial x_0}$，$\frac{\partial y}{\partial y_0}$以及$\frac{\partial y}{\partial \lambda}$存在且连续。

首先证明$\frac{\partial y}{\partial x_0}$存在且连续。

假设由初值(x_0, y_0)和$(x_0 + \Delta x_0, y_0)$（$|\Delta x_0| \le \delta$，δ为足够小的正数）所确定的方程(3.29)的解分别为$y = y(x, x_0, y_0, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \xi$和$y = y(x, x_0 + \Delta x_0, y_0, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \eta$。由(3.2)可知

$$\xi \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \xi, \lambda)\mathrm{d}t, \qquad \eta \equiv y_0 + \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(t, \eta, \lambda)\mathrm{d}t$$

于是

$$\begin{aligned} \eta - \xi &\equiv \int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(t, \eta, \lambda)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, \xi, \lambda)\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f\Big(t, \xi + \theta(\eta - \xi), \lambda\Big)}{\partial y}(\eta - \xi)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(t, \eta, \lambda)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

其中$\theta \in (0, 1)$。注意到$\frac{\partial f}{\partial y}$以及$\xi, \eta$的连续性，我们有

$$\frac{\partial f\Big(t, \xi + \theta(\eta - \xi), \lambda\Big)}{\partial y} = \frac{\partial f(t, \xi, \lambda)}{\partial y} + \alpha_1$$

这里α_1满足：当$\Delta x_0 \to 0$时，$\alpha_1 \to 0$，且当$\Delta x_0 = 0$时，$\alpha_1 = 0$。类似地，有

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(t,\eta,\lambda)\mathrm{d}t = -f(x_0,y_0,\lambda) - \alpha_2$$

这里α_2与α_1具有相同的性质，因此对$\Delta x_0 \neq 0$有

$$\frac{\eta-\xi}{\Delta x_0} \equiv [-f(x_0,y_0,\lambda)+\alpha_2] + \int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(t,\xi,\lambda)}{\partial y} + \alpha_1\right]\frac{\eta-\xi}{\Delta x_0}$$

令$u = \frac{\eta-\xi}{\Delta x_0}$，则$u$是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \left[\dfrac{\partial f(x,\xi,\lambda)}{\partial y} + \alpha_1\right]u \\ u(x_0) = -f(x_0,y_0,\lambda) + \alpha_2 \overset{\mathsf{def}}{=} u_0 \end{cases} \tag{3.30}$$

的解。当$\Delta x_0 = 0$时，上述初值问题仍然有解（Δx_0看作参数）。根据前面的解对初值和参数的连续性定理可知，u是$x, x_0, u_0, \Delta x_0$的连续函数。从而有

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0}\frac{\eta-\xi}{\Delta x_0} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x_0}$$

而$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}$是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial f(x,\xi,\lambda)}{\partial y}u \\ u(x_0) = -f(x_0,y_0,\lambda) \end{cases}$$

的解，易求得

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} = -f(x_0,y_0,\lambda)e^{\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(t,\xi,\lambda)}{\partial y}\mathrm{d}t}$$

显然这是x, x_0, y_0, λ的连续函数。

其次,同样可证$\frac{\partial y}{\partial y_0}$存在且连续。

设由初值$(x_0, y_0 + \Delta y_0)$（$|\Delta y_0| \leq \delta$）所确定的方程(3.29)的解为$y = y(x, x_0, y_0 + \Delta y_0, \lambda) \overset{\mathsf{def}}{=} \zeta$。采用类似的方法可以推出

$$v = \frac{\zeta - \xi}{\Delta y_0}$$

是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \left[\dfrac{\partial f(x,\xi,\lambda)}{\partial y} + \alpha_3\right]v \\ v(x_0) = \dfrac{\zeta-\xi}{\Delta y_0}\bigg|_{x=x_0} = \dfrac{y(x_0,x_0,y_0+\Delta y_0,\lambda) - y(x_0,x_0,y_0,\lambda)}{\Delta y_0} = \dfrac{(y_0+\Delta y_0)-y_0}{\Delta y_0} = 1 \end{cases} \tag{3.31}$$

的解。解得

$$v = e^{\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(t,\xi,\lambda)}{\partial y} + \alpha_3\right]\mathrm{d}t}$$

其中α_3具有性质：当$\Delta y_0 \to 0$时，$\alpha_3 \to 0$且$\Delta y_0 = 0$时，$\alpha_3 = 0$。从而有

$$\frac{\partial \xi}{\partial y_0} = \lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{\zeta - \xi}{\Delta y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(t,\xi,\lambda)}{\partial y} \mathrm{d}t}$$

显然它也是x, x_0, y_0, λ的连续函数。

至于$\frac{\partial y}{\partial \lambda}$的存在及连续性，其证明方法是类似的，留给读者作为练习，这里就不再给出了。■

3.5 常微分方程的特征值问题

研究意义:

很多实际问题，最后归结成常微分方程定解问题时其求解区域是有界区域，也就是所谓的常微分方程边值问题。一般来说，边值问题的解不一定存在；即使存在也不一定唯一。本节着重讨论在数学物理中有着重要应用的Sturm-Liouville边值问题。

3.5.1 Sturm-Liouville问题

在求解数学物理的许多问题时，常常会碰到求解如下形式的常微分方程的特征值问题（称为Sturm-Liouville问题）

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \quad (a < x < b) & (3.32) \\ \left(-\alpha_1\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta_1 y\right)\Bigg|_{x=a} = 0, \quad \left(\alpha_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta_2 y\right)\Bigg|_{x=b} = 0 & (3.33) \end{cases}$$

其中λ为特征值，对应的非零解为特征函数。(3.32)中的$k(x)$、$q(x)$和$\rho(x)$为x在(a,b)中充分光滑的函数，而且当$x \in (a,b)$时，$k(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geq 0$。若$x = a$为$k(x)$的一阶零点，则要求特征函数$y(x)$在$x = a$近旁有界；若$x = b$为$k(x)$的一阶零点，则要求$y(x)$在$x = b$近旁有界。这里的$\rho(x)$称为权函数。(3.33)中规定常数$\alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0, \alpha_j + \beta_j > 0 \quad (j = 1, 2)$。

(3.33)中包含了很大一类边界条件的特征值问题。例如，若$\alpha_1 = 0$，则在$x = a$处为第一类边界条件；若$\beta_1 = 0$，则在$x = a$处为第二类边界条件；若$\alpha_1 \neq 0$、$\alpha_2 \neq 0$，则在$x = a$处为第三类边界条件。对于$x = b$处的边界条件也有类似的讨论。

(3.32)包含了很大一类常微分方程的特征值问题。例如，当$k(x) = x, q(x) = \frac{\nu^2}{x}, \rho(x) = x \quad (0 < x < l)$时，(3.32)就化为$\nu$阶Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0$$

又如，当$k(x) = \frac{1}{1-x^2}, q(x) \equiv 0, \rho(x) \equiv 1 \quad (-1 < x < 1)$时，(3.32)就化为Legendre方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y = 0$$

再如，当$k(x)\equiv 1, q(x)\equiv 0, \rho(x)\equiv 1$时，(3.32)就化为我们多次碰到的常微分方程

$$y''(x)+\lambda y(x)=0$$

当然，问题(3.33)没有把周期边界条件包括进去。对于周期边界条件问题，也有类似的讨论，本书就不讨论了。

3.5.2 Sturm-Liouville问题解的性质

性质 3.1 特征值$\lambda\geq 0$。特别的，当$\beta_1+\beta_2>0$（即两端不同时为第二类边值问题）时，问题*(3.32)*、*(3.33)*的所有特征值$\lambda>0$。

〖**证明**〗 设λ为特征值，对应的特征函数为$y(x)$。把(3.32)两边乘上$y(x)$以后，再在$[a,b]$上积分，得

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b \rho(x)[y(x)]^2\mathrm{d}x &= -\int_a^b y(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x+\int_a^b q(x)[y(x)]^2\mathrm{d}x\\ &= k(a)y(a)y'(a)-k(b)y(b)y'(b)+\int_a^b\left\{k(x)[y'(x)]^2+q(x)[y(x)]^2\right\}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.34}$$

对(3.33)中左端边界条件$\alpha_1 y'(a)=\beta_1 y(a)$两边同乘以$y'(a)$得

$$\alpha_1[y'(a)]^2=\beta_1 y'(a)y(a) \tag{3.35}$$

对$\alpha_1 y'(a)=\beta_1 y(a)$两边同乘以$y(a)$得

$$\beta_1[y(a)]^2=\alpha_1 y'(a)y(a) \tag{3.36}$$

(3.35)与(3.36)相加以后可得

$$y'(a)y(a)=\frac{\alpha_1[y'(a)]^2+\beta_1[y(a)]^2}{\alpha_1+\beta_1} \tag{3.37}$$

同样，对(3.33)中右端边界条件$-\alpha_2 y'(b)=\beta_2 y(b)$两边同乘以$y(b)$得

$$-\alpha_2 y'(b)y(b)=\beta_2[y(b)]^2 \tag{3.38}$$

对$-\alpha_2 y'(b)=\beta_2 y(b)$两边同乘以$y'(b)$得

$$-\beta_2 y'(b)y(b)=\alpha_2[y'(b)]^2 \tag{3.39}$$

(3.38)与(3.39)相加以后可得

$$-y'(b)y(b)=\frac{\alpha_2[y'(b)]^2+\beta_2[y(b)]^2}{\alpha_2+\beta_2} \tag{3.40}$$

把(3.37)和(3.40)代入(3.34)可得

$$\lambda=\frac{\frac{k(a)\{\alpha_1[y'(a)]^2+\beta_1[y(a)]^2\}}{\alpha_1+\beta_1}+\frac{k(b)\{\alpha_2[y'(b)]^2+\beta_2[y(b)]^2\}}{\alpha_2+\beta_2}+\int_a^b\left\{k(x)[y'(x)]^2+q(x)[y(x)]^2\right\}\mathrm{d}x}{\int_a^b\rho(x)[y(x)]^2\mathrm{d}x}\geq 0 \tag{3.41}$$

再讨论一下在什么条件下，上式分子为零。首先的一个必要条件是$y'(x)\equiv 0$，即$y(x)\equiv A$为常数（因为$y(x)$为非零解，故必须有$A\neq 0$）。否则，若$y'(x)\not\equiv 0$，则因为当$x\in(a,b)$时，$k(x)>0$，必有

$$\int_a^b k(x)[y'(x)]^2\mathrm{d}x>0$$

其次，必须$q(x)\equiv 0$。否则，因为$q(x)\geq 0$，若$q(x)\not\equiv 0$，必有在(a,b)的某小区间$[a_1,b_1]$中，$q(x)>0$，因此必有

$$\int_a^b q(x)[y(x)]^2\mathrm{d}x=A^2\int_a^b q(x)\mathrm{d}x\geq A^2\int_{a_1}^{b_1}q(x)\mathrm{d}x>0$$

最后，因为$y(x)\equiv A$，(3.41)分子中的$y'(a)=0,y'(b)=0,y(a)=A,y(b)=A$。要使分子为零，必须有$\beta_1=\beta_2=0$，即(3.33)中，两端都是第二类边界条件。因此，只有当(3.32)中的$q(x)\equiv 0$，并且(3.33)中两端都是第二类边界条件时，零特征值对应的特征函数为非零常数。■

性质 3.2 有可列无穷多个非负特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$满足

$$0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots,\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$$

性质的证明参看[丁同仁、李承治,《常微分方程教程（第二版）》，高等教育出版社，2004]。

性质 3.3 对应于不同特征值的特征函数在$[a,b]$中是带权正交的。

〖**证明**〗　设$\lambda\neq\mu$是两个不相等的特征值，对应的特征函数分别是$y(x)$和$z(x)$，则有

$$\lambda\rho(x)y(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y'(x)]+q(x)y(x) \tag{3.42}$$

$$\mu\rho(x)z(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)z'(x)]+q(x)z(x) \tag{3.43}$$

(3.42)和(3.43)分别乘以$z(x)$和$y(x)$后，两式相减可得

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\int_a^b\rho(x)y(x)z(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b\left\{y(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)z'(x)]-z(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y'(x)]\right\}\mathrm{d}x\\ &= k(b)[y(b)z'(b)-y'(b)z(b)]-k(a)[y(a)z'(a)-y'(a)z(a)]\end{aligned} \tag{3.44}$$

另外，由(3.33)在$x=a$处的边界条件可得

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = 0 \\ \alpha_1 z'(a) - \beta_1 z(a) = 0 \end{cases} \tag{3.45}$$

(3.45)可以看成关于(α_1, β_1)的一个线性代数方程组。因为α_1和β_1不同时为零，其系数行列式必须为零，即

$$y(a)z'(a) - y'(a)z(a) = 0 \tag{3.46}$$

同样，由(3.33)在$x=b$处的边界条件可得

$$\begin{cases} \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \\ \alpha_2 z'(b) + \beta_2 z(b) = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

因为α_2和β_2不同时为零，故必须有

$$y(b)z'(b) - y'(b)z(b) = 0 \tag{3.48}$$

把(3.46)和(3.48)代入(3.44)可得特征函数带权$\rho(x)$的正交性，

$$\int_a^b \rho(x)y(x)z(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.49}$$

■

性质 3.4 对于同一特征值，对应的特征函数最多只有有限个。若某特征值对应的线性无关特征函数不止一个，利用正交化方法，可使这些特征函数互相带权$\rho(x)$正交。由于对应不同特征值的特征函数是带权$\rho(x)$正交的，这样便得到了$[a,b]$上完备的带权$\rho(x)$的正交特征函数系$\{y_n(x), n=1,2,\cdots\}$，使对$[a,b]$上任一平方可积函数$f(x)$，都可以按此特征函数系进行*Fourier*展开，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \tag{3.50}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\sigma_n}\int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x, \qquad n=1,2,\cdots \tag{3.51}$$

*(3.51)*中的σ_n为

$$\sigma_n = \int_a^b \rho(x)[y_n(x)]^2\mathrm{d}x, \qquad n=1,2,\cdots \tag{3.52}$$

*(3.50)*中的收敛是在$L^2[a,b]$的范数意义之下:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.53}$$

当$f(x)$在$[a,b]$中充分光滑且满足*(3.33)*中的边界条件时，*(3.50)*可以是一致收敛的。