常微分方程

第八章　差分方程

上海财经大学应用数学系

April 19, 2010

取离散数值的函数

设函数$y=f(x)$只对x在离散数值上有定义，即x依次取遍以下的离散数值

$$x = x_0, x_1, \cdots$$

相应的函数值为

$$f(x_0), f(x_1), \cdots$$

或者简记为

$$y_0, y_1, \cdots$$

差分的定义

定义8.1（差分的定义）

当自变量从x_k变到x_{k+1}时，函数$y=f(x)$的改变量

$$\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k), \qquad k=0,1,\cdots$$

称为函数$f(x)$在点x_k的步长为$h_k=x_{k+1}-x_k$的**一阶（向前）差分**。通常记作

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \qquad k=0,1,\cdots$$

其中，Δ表示差分算子。
类似地，称$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$为$x_k$处的**二阶差分**。
一般地，称$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$为$x_k$处的**n阶差分**。

差分的性质

不变算子和位移算子

引入以下两个算子符号:

$$\mathcal{I}y_k = y_k, \qquad \mathcal{E}f_k = f_{k+1} \tag{1}$$

其中，$\mathcal{I}$称为**不变算子**，$\mathcal{E}$称为步长为$h_k(k=0,1,\cdots)$的**位移算子**。

用算子表示差分

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k = \mathcal{E}y_k - \mathcal{I}y_k = (\mathcal{E}-\mathcal{I})y_k \qquad (2) \\ \Delta^n y_k &= (\mathcal{E}-\mathcal{I})^n y_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j \mathcal{E}^{n-j} y_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j y_{n+k-j}, \\ & \qquad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

差分的性质

不变算子和位移算子

引入以下两个算子符号:

$$\mathcal{I}y_k = y_k, \qquad \mathcal{E}f_k = f_{k+1} \tag{1}$$

其中，$\mathcal{I}$称为**不变算子**，$\mathcal{E}$称为步长为$h_k(k = 0, 1, \cdots)$的**位移算子**。

用算子表示差分

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k = \mathcal{E}y_k - \mathcal{I}y_k = (\mathcal{E} - \mathcal{I})y_k \\ \Delta^n y_k &= (\mathcal{E} - \mathcal{I})^n y_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \mathcal{E}^{n-j} y_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j y_{n+k-j}, \\ &\quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

用各阶差分来表示函数值

由于

$$y_{n+k} = \mathcal{E}^n y_k = (\mathcal{I} + \Delta)^n y_k = \left[\sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j \right] y_k$$

因此

$$y_{n+k} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j y_k \tag{3}$$

差分的性质和运算法则

(1) $\Delta(c) = 0$。c为常数。即常数的差分为零;

(2) $\Delta(cy_k) = c\Delta y_k$;

(3) $\Delta(c_1 y_k \pm c_2 z_k) = c_1 \Delta y_k \pm c_2 \Delta z_k$, c_1, c_2为常数;

(4) $\Delta(y_k \cdot z_k) = y_{k+1}\Delta z_k + z_k \Delta y_k = y_k \Delta z_k + z_{k+1}\Delta y_k$;

(5) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right) = \frac{z_k \Delta y_k - y_k \Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}} = \frac{z_{k+1}\Delta y_k - y_{k+1}\Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}}$

差分的性质和运算法则

(1) $\Delta(c)=0$。c为常数。即常数的差分为零;

(2) $\Delta(cy_k)=c\Delta y_k$;

(3) $\Delta(c_1y_k\pm c_2z_k)=c_1\Delta y_k\pm c_2\Delta z_k$, c_1,c_2为常数;

(4) $\Delta(y_k\cdot z_k)=y_{k+1}\Delta z_k+z_k\Delta y_k=y_k\Delta z_k+z_{k+1}\Delta y_k$;

(5) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right)=\frac{z_k\Delta y_k-y_k\Delta z_k}{z_k\cdot z_{k+1}}=\frac{z_{k+1}\Delta y_k-y_{k+1}\Delta z_k}{z_k\cdot z_{k+1}}$

差分的性质和运算法则

(1) $\Delta(c) = 0$。c为常数。即常数的差分为零;

(2) $\Delta(cy_k) = c\Delta y_k$;

(3) $\Delta(c_1y_k \pm c_2z_k) = c_1\Delta y_k \pm c_2\Delta z_k$，$c_1, c_2$为常数;

(4) $\Delta(y_k \cdot z_k) = y_{k+1}\Delta z_k + z_k\Delta y_k = y_k\Delta z_k + z_{k+1}\Delta y_k$;

(5) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right) = \frac{z_k\Delta y_k - y_k\Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}} = \frac{z_{k+1}\Delta y_k - y_{k+1}\Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}}$

差分的性质和运算法则

(1) $\Delta(c)=0$。c为常数。即常数的差分为零;

(2) $\Delta(cy_k)=c\Delta y_k$;

(3) $\Delta(c_1y_k\pm c_2z_k)=c_1\Delta y_k\pm c_2\Delta z_k$，$c_1,c_2$为常数;

(4) $\Delta(y_k\cdot z_k)=y_{k+1}\Delta z_k+z_k\Delta y_k=y_k\Delta z_k+z_{k+1}\Delta y_k$;

(5) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right)=\frac{z_k\Delta y_k-y_k\Delta z_k}{z_k\cdot z_{k+1}}=\frac{z_{k+1}\Delta y_k-y_{k+1}\Delta z_k}{z_k\cdot z_{k+1}}$

差分的性质和运算法则

(1) $\Delta(c)=0$。c为常数。即常数的差分为零;

(2) $\Delta(cy_k)=c\Delta y_k$;

(3) $\Delta(c_1y_k\pm c_2z_k)=c_1\Delta y_k\pm c_2\Delta z_k$，$c_1,c_2$为常数;

(4) $\Delta(y_k\cdot z_k)=y_{k+1}\Delta z_k+z_k\Delta y_k=y_k\Delta z_k+z_{k+1}\Delta y_k$;

(5) $\Delta\left(\frac{y_k}{z_k}\right)=\frac{z_k\Delta y_k-y_k\Delta z_k}{z_k\cdot z_{k+1}}=\frac{z_{k+1}\Delta y_k-y_{k+1}\Delta z_k}{z_k\cdot z_{k+1}}$

差分方程的定义

定义8.2（差分方程的定义）

$$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0 \tag{4}$$

或

$$\Psi(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0 \tag{5}$$

或

$$\Gamma(x, y_x, y_{x-1}, y_{x-2}, \cdots, y_{x-n}) = 0 \tag{6}$$

称为**差分方程**。其中$y_{x+k} = f(x+k)(x = 0, 1, \cdots)$，$k$为整数；$\Delta^n y_x$为$y = f(x)$在$x$处步长为1的$n$阶差分。

三种差分方程的表示方法

考虑到之前得到的差分性质：函数的各阶差分和其函数值之间可以进行转换。因此上述定义中的三种不同的差分方程表达形式是等价的。比如以下三个差分方程

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 y_x + 4\cdot\Delta y_x + 7\cdot y_x &= 3^x \\
y_{x+2} + 2y_{x+1} + 4y_x &= 3^x \\
y_x + 2y_{x-1} + 4y_{x-2} &= \frac{1}{9}\cdot 3^x
\end{aligned}
$$

是同一方程的三种不同表达式。

差分方程的阶

定义8.3（差分方程的阶）

差分方程中所含未知函数的差分的实际最高阶数，称为该差分方程的**阶**。

注

由于差分方程具有不同的表达形式，因此不能简单地从形式上出现的最高阶差分来确定差分方程的阶数。通常对于用未知函数下标表示的差分方程，其阶数等于方程中含未知函数下标的最大值和最小值之差。

差分方程的阶

定义8.3（差分方程的阶）

差分方程中所含未知函数的差分的实际最高阶数，称为该差分方程的**阶**。

注

由于差分方程具有不同的表达形式，因此不能简单地从形式上出现的最高阶差分来确定差分方程的阶数。通常对于用未知函数下标表示的差分方程，其阶数等于方程中含未知函数下标的最大值和最小值之差。

例题

例1

$$\Delta^4 y_x - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1 = 0$$

虽然形式上含有四阶差分$\Delta^4 y_x$，但是实际上它只是一阶差分方程，这是因为

$$\begin{aligned} & \Delta^4 y_x - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1 \\ = & (y_{x+4} - 4y_{x+3} + 6y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x) - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1 \\ = & y_{x+4} - 4y_{x+3} + 1 \end{aligned}$$

作变换$u = x + 3$，原方程可以与以下的一阶差分方程

$$y_{u+1} - 4y_u + 1 = 0$$

等价。

差分方程的解

定义8.4

满足差分方程的函数称为差分方程的**解**。
如果差分方程的解中所含相互独立的任意常数的个数与该差分方程的阶数相等，则称这样的解为差分方程的**通解**。
差分方程的定解条件称为**初始条件**。
利用初始条件确定通解中的任意常数后所得到的解称为差分方程的**特解**。一般，n阶差分方程通解中含有n个互相独立的任意常数，要得到相应的通解就必须有n个初始条件：

$$y_x|_{x=x_0} = y_{x_0}, \Delta y_x|_{x=x_0} = \Delta y_{x_0}, \cdots, \Delta^{n-1} y_x|_{x=x_0} = \Delta^{n-1} y_{x_0}$$

线性差分方程的定义

定义8.5

如果差分方程的未知函数出现在一次式中，则称该方程为**线性差分方程**。一个n阶线性差分方程可以写成

$$a_n(x)y_{x+n} + a_{n-1}(x)y_{x+n-1} + \cdots + a_1(x)y_{x+1} + a_0(x)y_x = F(x) \quad (7)$$

其中$a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), F(x)$为已知函数。如果线性差分方程中所有的系数$a_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$都是常数，那么称这样的差分方程为**常系数线性差分方程**。

常系数线性差分方程的定义

定义8.6（定义常系数线性差分方程的定义）

n阶常系数线性差分方程

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = F(x) \tag{8}$$

其中$a_i(i = 0, 1, \cdots, n)$为常数，$a_0 \cdot a_n \neq 0$。如果$F(x) \neq 0$，则称之为**n阶非齐次常系数线性差分方程**；否则称之为**n阶齐次常系数线性差分方程**。

齐次常系数线性差分方程解的叠加原理

定理8.1（齐次常系数线性差分方程解的叠加原理）

如果函数$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(k)}$都是$n$阶齐次常系数线性差分方程

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0 \tag{9}$$

的解，则这k个函数的线性组合

$$y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \cdots + C_k y^{(k)}$$

也是方程(9)的解，其中$C_1, C_2, \cdots, C_k$为任意常数。

定理8.2（齐次常系数线性差分方程通解的结构）

如果函数$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(n)}$是$n$阶齐次常系数线性差分方程(9)的$n$个线性无关特解，那么

$$Y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \cdots + C_n y^{(n)}$$

就是n阶齐次常系数线性差分方程(9)的通解，其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数。

定理8.3（非齐次常系数线性差分方程通解的结构）

如果y_x^*是n阶非齐次常系数线性差分方程(8)的一个特解，Y_x是非齐次方程(8)对应的齐次常系数线性差分方程(9)的通解，那么非齐次方程(8)的通解为

$$y_x = Y_x + y_x^*$$

常系数线性差分方程通解的结构

定理8.2（齐次常系数线性差分方程通解的结构）

如果函数$y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(n)}$是$n$阶齐次常系数线性差分方程(9)的$n$个线性无关特解，那么

$$Y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \cdots + C_n y^{(n)}$$

就是n阶齐次常系数线性差分方程(9)的通解，其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数。

定理8.3（非齐次常系数线性差分方程通解的结构）

如果y_x^*是n阶非齐次常系数线性差分方程(8)的一个特解，Y_x是非齐次方程(8)对应的齐次常系数线性差分方程(9)的通解，那么非齐次方程(8)的通解为

$$y_x = Y_x + y_x^*$$

非齐次常系数线性差分方程解的叠加原理

定理8.4（非齐次常系数线性差分方程解的叠加原理）

如果函数$y_x^{(1)^*}, y_x^{(2)^*}$分别是n阶非齐次常系数线性差分方程

$$\begin{aligned} a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x &= F_1(x) \\ a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x &= F_2(x) \end{aligned}$$

的特解，那么函数$y_x^* = y_x^{(1)^*} + y_x^{(2)^*}$就是方程

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = F_1(x) + F_2(x)$$

的特解。

差分方程模型

- 一般蛛网模型
- Hansen-Samuelson模型（国民收入分析模型）

差分方程模型

- 一般蛛网模型
- Hansen-Samuelson模型（国民收入分析模型）

一阶常系数线性差分方程

一阶非齐次常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{x+1} = py_x + f(x) \tag{10}$$

其中，常数$p \neq 0$，$f(x) \neq 0$为已知函数。对应的齐次方程为

$$y_{x+1} = py_x \tag{11}$$

一阶常系数线性差分方程的解法

- 递推的方法
- 特征根法

一阶常系数线性差分方程的解法

- 递推的方法
- 特征根法

二阶常系数线性差分方程

二阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = f(x) \tag{12}$$

其中$f(x)$为已知函数，p, q为常数，$q \neq 0$。当$f(x) \neq 0$时，称之为二阶非齐次常系数线性差分方程；对应的齐次方程为

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0 \tag{13}$$

二阶常系数线性差分方程的解法

方程(13)的特征方程为

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{14}$$

方程(14)是一个一元二次方程，对于特征根可以分以下三种情形讨论:

(1) $p^2 - 4q > 0$

(2) $p^2 - 4q = 0$

(3) $p^2 - 4q < 0$

非齐次方程(12)特解的求法。

二阶常系数线性差分方程的解法

方程(13)的特征方程为

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{14}$$

方程(14)是一个一元二次方程，对于特征根可以分以下三种情形讨论:

(1) $p^2 - 4q > 0$

(2) $p^2 - 4q = 0$

(3) $p^2 - 4q < 0$

非齐次方程(12)特解的求法。

方程(13)的特征方程为

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{14}$$

方程(14)是一个一元二次方程，对于特征根可以分以下三种情形讨论:

(1) $p^2 - 4q > 0$

(2) $p^2 - 4q = 0$

(3) $p^2 - 4q < 0$

非齐次方程(12)特解的求法。

二阶常系数线性差分方程的解法

方程(13)的特征方程为

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{14}$$

方程(14)是一个一元二次方程，对于特征根可以分以下三种情形讨论:

(1) $p^2 - 4q > 0$

(2) $p^2 - 4q = 0$

(3) $p^2 - 4q < 0$

非齐次方程(12)特解的求法。