上海财经大学《 常微分方程 》模拟试卷五答案

一、

设 $f(x,y)$ 在 $R=\left\{(x,y)/\left|x-x_0\right|\le a,\left|y-y_0\right|\le b\right\}$ 上连续，且关于 y 满足 Lipschitz 条件，则过 (x_0,y_0) 有唯一解 $y=\phi(x)$ ，定义于 $\left|x-x_0\right|\le$ 上，其中，$h=\min\{a,\dfrac{b}{M}\},M=\max\limits_{(x,y)\in R}\left|f(x,y)\right|$

二、

$$M=3x^2+6xy^2,\quad N=6xy^2+4y^3$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=12xy,\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

故方程是全微分方程。

通解为 $\int_0^x(3x^2+6xy^2)dx+\int_0^y 4y^3dy=C$

$$x^3+3x^2+y^4=C$$

三、

方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0,\quad \lambda=3,\lambda=-1$

又 $\lambda=0$ 不是特征根，故方程的特解为

$$x^*(t)=A+Bt$$

代入方程中，得 $A=\dfrac{1}{3},B=-1$

方程的通解为

$$x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}+\frac{1}{3}-t$$

四、

（1）$f(x,y)=x^2+y^2$ 在 R 上连续，$f'_y=2y$ 在 R 上连续。

故 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足 Lipschitz 条件。

（2）$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=2, a=1, b=1, h=\min\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$

故 $y=\phi(x)$ 定义在 $|x|\le\frac{1}{2}$ 上。

（3）

$\phi_0(x)=y_0=0$

$\phi_1(x)=\int_0^x x^2dx=\frac{x^3}{3}$

$\phi_2(x)=\int_0^x x^2+(\frac{x^3}{3})^2dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$

五、

特征方程为 $|\lambda E-A|=0, \lambda=3(二重)$

方程组有特解形如 $X(t)=(R_0+R_1t)e^{3t}$，满足

$$\begin{cases}(A-3E)R_0=R_1\\(A-3E)^2R_0=0\end{cases}$$

其中

$$(A-3E)=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix},(A-3E)^2=0$$

$$R_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},则R_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$X_1(t)=\begin{pmatrix}1-t\\-t\end{pmatrix}e^{3t},X_2(t)=\begin{pmatrix}t\\1+t\end{pmatrix}e^{3t}$$

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{pmatrix}e^{3t}$$

六、

$e^x - x, e^{2x} - x$ 是对应齐次线性方程的解，且

$$\frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq k(\text{常数})$$

故他们线性无关。

方程通解为 $y = c_1(e^x - x) + c_2(e^{2x} - x) + x$

又 $y(0) = 1, y'(0) = 2$，故 $c_1 + c_2 = 1, c_2 = 1, c_1 = 0$

方程特解为 $y = e^{2x}$