上海财经大学《 常微分方程 》模拟试卷二答案

一、

1. 二阶

2. $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\phi(y)$

3. 存在常数 L>0,对 $\forall(x,y_1),(x,y_2)$，有 $\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$

4. $y=ce^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$

5. $c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

6. $e^{\lambda t},te^{\lambda t},\cdots$

7. $\begin{vmatrix} e^t & \sin t \\ e^t & \cos t \end{vmatrix}=e^t(\cos t-\sin t)$

8. $W(t)\neq 0,t\in[a,b]$

9. $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

10. $\Phi(t)c$

二、

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-(\dfrac{y}{x})^2$，令 $\dfrac{y}{x}=u,\quad x\dfrac{du}{dx}=-u^2$

$u=0,\text{则}y=0$

$u\neq 0,u=\dfrac{1}{\ln|x|+c},\quad y=\dfrac{x}{\ln|x|+c}$

2.

$$M=y-3x^2, N=x-4y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

方程是全微分方程

通解为

$$\int_0^x (y-3x^2)dx+\int_0^y -4ydy=C$$

$$-2y^2-x^3+xy=C$$

3.

对应齐次线性方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0, \lambda=3, \lambda=-1$

齐次线性方程的通解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$

特解为 $y^*=ax+b, a=-1, b=\frac{1}{3}$

原方程的通解为

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}$$

$$\left|A-\lambda E\right|=\lambda^2-4\lambda-5=0, \lambda=5, \lambda=-1$$

4. $(A-5E)u=0, u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$(A+E)v=0, v=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

方程两个线性无关解为

$$e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

通解为

$$X(t)=\begin{pmatrix}e^{5t} & e^{-t}\\ e^{5t} & -e^{-t}\end{pmatrix}c$$

三、

$$\phi_0(x)=y_0=0$$

$$\phi_1(x)=\int_0^x xdx=\frac{x^2}{2}$$

$$\phi_2(x)=\int_0^x x+\frac{x^2}{4}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}$$

$$\phi_3(x)=\int_0^x x+(\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20})^2dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4400}$$