第四章　高阶微分方程

本章先从一个实际例子出发，介绍高阶微分方程的一般形式，进一步了解可降阶的微分方程，重点讲述高阶线性方程的基本理论和常系数线性方程的求解方法。最后给出高阶方程的一些应用实例。

【例1】　鱼雷追击模型

一敌舰在某海域内沿着正北方向航行时，我方战舰恰好位于敌舰的正西方向1 公里处。我舰向敌舰发射制导鱼雷，敌舰速度为0.42 公里/分，鱼雷速度为敌舰速度的2倍。试问敌舰航行多远时将被击中？

〖**解**〗　设敌舰初始点在$Q_0(1,0)$ 处，运动方向为平行y 轴的直线，t 时刻到达Q 点，鱼雷的初始点在$P_0(0,0)$处，沿曲线$y=y(x)$追击，敌舰的速度$v_0=0.42$，则在时刻t，鱼雷在点$P(x,y)$处，此时敌舰在点$Q(1,v_0t)$，如图4.1。由于鱼雷在追击过程中始终指向敌舰，而鱼雷的运动方向正好是沿曲线$y=y(x)$ 的切线方向，那么，鱼雷的运动方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_0t-y}{1-x} \tag{4.1}$$

而鱼雷行使的速度为$2v_0$，分为水平方向运动和垂直方向运动，故满足以下关系式

$$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=2v_0 \tag{4.2}$$

将(4.1)改写为

$$v_0t-y=(1-x)\frac{dy}{dx} \tag{4.3}$$

将(4.3)两边同时对x求导数，得

$$v_0\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dx}=(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx} \tag{4.4}$$

由(4.2)可得

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2v_0}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} \tag{4.5}$$

将(4.5)代入(4.4)中，得

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}}{2(1-x)}\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases} \tag{4.6}$$

(4.6)就是一个带有初始条件的二阶微分方程。如果能求出这个方程的解，就可以解决敌舰航行多远时被击中这样的问题了。■

4.1 高阶微分方程的降阶法

本节将介绍两种可降阶的高阶微分方程。

n阶微分方程的一般形式

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0 \tag{4.7}$$

其中$n\geq 2$，t为自变量，x为未知函数。

4.1.1 不显含未知函数x的方程

如果(4.7)中不显含未知函数x及其直到$k-1$ $(k\geq 1)$阶导数，则方程(4.7)为

$$F(t,x^{(k)},\cdots,x^{(n)})=0 \tag{4.8}$$

则作变量替换，令$x^{(k)}=y$，则

$$x^{(k+1)}=\frac{dy}{dt},\cdots,x^{(n)}=\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}$$

于是(4.8)变为

$$F(t,y,\cdots,\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}})=0 \tag{4.9}$$

原方程的阶数降了k阶。

如果能求出(4.9)的通解

$$y=\phi(t,c_1,\cdots,c_{n-k})$$

意味着

$$x^{(k)}=\phi(t,c_1,\cdots,c_{n-k})$$

只要对上式连续积分k次，可得原方程(4.8)的通解。

【例1】 求方程$t\dfrac{d^5x}{dt^5}-\dfrac{d^4x}{dt^4}=0$的通解。

【例2】 求方程$y'''=e^{2x}-\cos x$的通解。

4.1.2 不显含自变量t的方程

假设(4.7)中不显含自变量t，则方程变为

$$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0 \tag{4.10}$$

通过变量替换，把x看成新的自变量，则方程可降一阶。

令$x'=y$，则

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d(y\frac{dy}{dx})}{dt}=\frac{d(y\frac{dy}{dx})}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y(\frac{dy}{dx})^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\cdots\cdots$$

用数学归纳法知，$x^{(k)}$可用$y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ $(k\le n)$来表达。于是方程(4.10)变为

$$F(x,y,y\frac{dy}{dx},y(\frac{dy}{dx})^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2},\cdots)=0$$

即有新方程

$$H(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})=0 \tag{4.11}$$

这是以x为自变量，y为未知函数的$n-1$阶方程。

如果能求出(4.11)的通解

$$y=\phi(x,c_1,\cdots,c_{n-1})$$

意味着

$$\frac{dx}{dt}=\phi(x,c_1,\cdots,c_{n-1})$$

这是变量分离方程，于是原方程的通解为

$$\int\frac{dx}{\phi(x,c_1,\cdots,c_{n-1})}=t+c_n$$

【例3】 求解初值问题$\begin{cases} x''-e^{2x}=0 \\ x|_{t=0}=0,\quad x'|_{t=0}=1 \end{cases}$。

4.2　高阶线性微分方程的一般理论

高阶线性微分方程，是常微分方程中极其重要的一类方程。

4.2.1　初值问题解的存在唯一性定理

定义 4.1 称方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \tag{4.12}$$

为n**阶线性微分方程**。其中$a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$及$f(t)$在区间$[a,b]$上连续。

如果$f(t)\equiv 0$，则方程(4.12)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \tag{4.13}$$

称之为n**阶齐次线性微分方程**，简称**齐次线性方程**。

如果$f(t)\not\equiv 0$，也称(4.12)为n**阶非齐次线性微分方程**，简称**非齐次线性方程**。

考察下列微分方程：

(1) $(1-t^2)\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2t\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$；

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$;

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x = \sin t$;

(4) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x+2)(x\dfrac{dy}{dx} - y) = x^4$。

问题：高阶线性方程的解是否存在？如果有解，在什么条件下解是唯一的？

定理 4.1 如果函数$a_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$和$f(t)$在区间$[a,b]$上连续，则对任一 $t_0\in[a,b]$及任意$x_0, x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\dfrac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{4.14}$$

存在唯一解$x=\phi(t),\ t\in[a,b]$。

4.2.2　齐次线性方程解空间的结构

这一节我们讨论齐次线性方程(4.13)的解具有哪些性质。

定理 4.2 *(叠加原理)* 如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$是方程*(4.13)*的$k$个解，则它们的线性组合$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ 也是方程*(4.13)*的解。其中$c_1, c_2, \cdots, c_k$是任意常数。

【例1】 验证$e^t, e^{-t}, c_1e^t+c_2e^{-t}$是方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=0$的解。

注1 在定理4.2中，当$k=n$时，函数$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$不一定是方程(4.13)的通解。

问题：如何确定方程(4.13)的通解呢？

分析：由定理4.2可知，n阶齐次线性方程(4.13)的解的全体组成集合$V=\{x(t)|x(t)$为方程(4.13)的解$\}$，这个解集合满足：

(1) 对任意的$x(t)\in V$，则$c_1x(t)\in V$；

(2) 对任意的$x_1(t)\in V, x_2(t)\in V$，则$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\in V$，

因而V构成一个线性空间，称为解空间。那么这个解空间的维数是多少呢？基底是什么呢？

定义 4.2 设函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$是区间$[a,b]$上的$k$个函数，如果存在不全为零的常数$c_1, c_2, \cdots, c_k$，使下式恒成立

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)\equiv 0, \quad t\in[a,b]$$

则称函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$在区间$[a,b]$上***线性相关***，否则称这些函数***线性无关***。

【例2】 设

$$x_1(t)=\begin{cases} t^2, & -\infty<t\le 0 \\ 0, & 0<t<+\infty \end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} 0, & -\infty<t\le 0 \\ t^2, & 0<t<+\infty \end{cases}$$

讨论函数$x_1(t)$与$x_2(t)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的线性相关性。

定义 4.3 设函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$在区间$[a,b]$上分别存在$k-1$阶导数，行列式

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)]\equiv W(t)\equiv \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的$Wronski$***行列式***。

定理 4.3 如果函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$在区间$[a,b]$上线性相关，则它们在$[a,b]$上的$Wronski$行列式恒等于零。

注2　定理4.3的逆定理不一定成立。

注3　如果函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$的Wronski行列式在区间$[a,b]$上某点$t_0$处不等于零，即$W(t_0) \neq 0$，则这些函数在区间$[a,b]$上必线性无关。

定理 4.4 设函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程*(4.13)*的$n$个解，则它们在区间$[a,b]$上线性无关的充分必要条件为其*Wronski* 行列式$W(t) \neq 0,\ t \in [a,b]$。

定理 4.5 n阶齐次线性方程*(4.13)*一定存在n个线性无关解。

定理 4.6 *(**通解结构定理**)* 如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程*(4.13)*的$n$个线性无关解，则方程*(4.13)*的通解可以表示为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \tag{4.15}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$是任意常数。且通解*(4.15)*包括了方程*(4.13)*的所有解。

问题：n阶齐次线性方程的解与它的系数之间的关系

定理 4.7 *(Liouville**公式**)* 设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程*(4.13)*的任意$n$个解，$W(t)$是它的*Wronski*行列式，则$W(t)$满足一阶线性方程

$$W'(t) = -a_1(t)W(t)$$

因而有

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}, \quad t, t_0 \in [a,b] \tag{4.16}$$

【例3】 验证函数$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$是方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ 的两个线性无关解，并写出该方程的通解。

【例4】 设二阶齐次线性方程在区间$[a,b]$上的任意两个线性无关解组分别为

$$(x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t))\text{和}(x_1^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t))$$

证明：它们的Wronski行列式之比是一个不为零的常数。

4.2.3　非齐次线性方程解集合的性质

本节讨论非齐次线性方程解集合的性质。

定理 4.8 如果$\bar{x}(t)$是非齐次线性方程*(4.12)*的解，$x(t)$是齐次线性方程*(4.13)*的解，则$\bar{x}(t) + x(t)$仍是非齐次线性方程*(4.12)*的解。

定理 4.9 如果$x_1(t), x_2(t)$是非齐次线性方程*(4.12)*的两个解，则$x_1(t) - x_2(t)$ 是对应的齐次线性方程*(4.13)*的解。

定理 4.10 *(叠加原理)* 设$x_1(t)$与$x_2(t)$分别是非齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f_1(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f_2(t)$$

的解，则$x_1(t)+x_2(t)$是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$$

的解。

定理 4.11 *(通解结构定理)* 设$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$为方程*(4.13)*的基本解组，而$\bar{x}(t)$是方程*(4.12)*的某一解，则方程*(4.12)*的通解可表为

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t) \tag{4.17}$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数，且此通解*(4.17)*包括了方程*(4.12)*的所有解。

【例5】 设二阶非齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t)$$

有三个解$x_1(t)=t,x_2(t)=e^t,x_3(t)=e^{2t}$，求此方程满足初始条件$x(0)=1,x'(0)=3$的特解。

问题：若已知对应的齐次线性方程的基本解组，如何求非齐次线性方程的一个特解？

方法:常数变易法。

设$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是方程(4.13)的基本解组，因而

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

是方程(4.13)的通解。猜测方程(4.12)也是这种形式的解，但$c_1,c_2,\cdots,c_n$应为t的函数，即假设

$$x(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t) \tag{4.18}$$

是方程(4.12)的解。为了求出待定函数$c_1(t),c_2(t),\cdots,c_n(t)$，将(4.18)代入方程(4.12)中，仅能得到所满足的一个条件。由于待定函数有n个，为了确定它们，还必须再给出$n-1$个限制条件。

对(4.18)两边求导，得

$$\begin{aligned}x'(t)=&c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t)\\&+c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t)+\cdots+c_n'(t)x_n(t)\end{aligned}$$

令

$$c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t)+\cdots+c_n'(t)x_n(t)=0 \tag{4.19}$$

得到

$$x'(t)=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t) \tag{4.20}$$

对上式两边继续求导，并像上面的做法一样，令含有$c_i'(t)$的部分为零，得

$$c_1'(t)x_1'(t)+c_2'(t)x_2'(t)+\cdots+c_n'(t)x_n'(t)=0 \tag{4.21}$$

和表达式

$$x''(t)=c_1(t)x_1''(t)+c_2(t)x_2''(t)+\cdots+c_n(t)x_n''(t) \tag{4.22}$$

继续上面的做法，直到获得第$n-1$个条件

$$c_1'(t)x_1^{(n-2)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-2)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-2)}(t)=0 \tag{4.23}$$

和表达式

$$x^{(n-1)}(t)=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) \tag{4.24}$$

最后，对(4.24)两边再求导一次，得

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t)=&c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)\\ &+c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) \end{aligned} \tag{4.25}$$

将(4.19)−(4.25)全部代入方程(4.12)中，并注意$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是方程(4.13)的解，得到

$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t) \tag{4.26}$$

这n个未知函数$c_i'(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$同时满足(4.19)、(4.21)、(4.23)和(4.26)等共n个条件，这n个条件组成一个线性代数方程组，其系数行列式为$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$，因而方程组有唯一解，不妨设求得

$$c_i'(t)=\phi_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n$$

积分得

$$c_i(t)=\int\phi_i(t)dt+r_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

这里r_i是任意常数。将所得$c_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的表达式代入(4.18)中，得方程(4.12)的通解

$$x(t)=\sum_{i=1}^n r_ix_i(t)+\sum_{i=1}^n x_i(t)\int\phi_i(t)dt$$

【例6】 设非齐次线性方程$(t-1)\dfrac{d^2x}{dt^2}-t\dfrac{dx}{dt}+x=(t-1)^2$ 对应的齐次线性方程的通解为$x(t)=c_1t+c_2e^t$，求此方程的通解。

4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

这一节，我们要介绍一类特殊的齐次线性方程—常系数齐次线性方程，采用待定指数函数法，可以将求它的基本解组问题归结为求一个n次代数方程的根的问题，而无需用到积分运算，因而这类方程的通解问题是被彻底解决的。

4.3.1 复值函数与复值解

定义 4.4 设$\phi(t)$和$\varphi(t)$是区间$[a,b]$上的实函数，称$z(t)=\phi(t)+i\varphi(t)$为该区间上的***复值函数***。

定义 4.5 若$\phi(t),\varphi(t)$在区间$[a,b]$上连续，则称$z(t)$***在该区间上连续***。

定义 4.6 若$\phi(t),\varphi(t)$在区间$[a,b]$上可微，则称$z(t)$***在该区间上可微***。

$z(t)$的导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d\phi}{dt}+i\frac{d\varphi}{dt}$$

定义 4.7 设$k=\alpha+i\beta$是任一复数，α,β,t是实数，定义如下的***复指数函数***

$$e^{kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

性质：
(1) $e^{\overline{kt}}=\overline{e^{kt}}$;
(2) $e^{(k_1+k_2)t}=e^{k_1t}\cdot e^{k_2t},\quad k_1,k_2$是复值常数；
(3) $\dfrac{d}{dt}(e^{kt})=k\cdot e^{kt}$;
(4) $\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{kt})=k^n\cdot e^{kt}$。

定义 4.8 如果定义在区间$[a,b]$上的实变量复值函数$z(t)$满足方程*(4.13)*，即

$$\frac{d^nz(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dz(t)}{dt}+a_n(t)z(t)\equiv f(t),\quad t\in[a,b]$$

称$z(t)$为方程*(4.13)*的***复值解***。

定理 4.12 如果方程*(4.14)*中所有系数$a_i(t)$都是实值函数，而$z(t)=\phi(t)+i\varphi(t)$ 是该方程的复值解，则$z(t)$的实部$\phi(t)$和虚部$\varphi(t)$以及$z(t)$的共轭复数也都是方程*(4.14)*的解。

定理 4.13 如果方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+iv(t)$$

有复值解x=$U(t)$+i $V(t)$，其中$a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 及$u(t),v(t)$都是实函数，那么这个解的实部$U(t)$和虚部$V(t)$分别是方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=v(t)$$

的解。

4.3.2 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

定义 4.9 称方程

$$L[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=0 \tag{4.27}$$

为***n阶常系数齐次线性方程***，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为常数。

考察下列方程

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=0;$

(2) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0;$

(3) $\dfrac{d^3y}{dt^3}-6\dfrac{d^2y}{dt^2}+11\dfrac{dy}{dt}-6y=0$

问题：如何求这类方程的一个基本解组呢？

分析：先考虑一阶常系数齐次线性方程

$$\frac{dx}{dt}=px$$

其通解为$x=ce^{pt}$，这启示我们，方程(4.27)可能也存在指数函数形式的解

$$x=e^{\lambda t} \tag{4.28}$$

将(4.28)代入方程(4.27)中，得

$$L[e^{\lambda t}]\equiv(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)e^{\lambda t}=0$$

这意味着，$e^{\lambda t}$是方程(4.27)的解的充分必要条件为：λ是代数方程

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{4.29}$$

的根。因此，求方程(4.27)的解的问题，转化为了求代数方程(4.29)的根的问题。

称方程(4.29)为方程(4.27)的**特征方程**，其根为方程(4.27)的**特征根**，满足$L[e^{\lambda t}]=e^{\lambda t}F(\lambda)$，称这种方法为**欧拉待定指数函数法**。

(1) **特征根是单根的情形**

定理 4.14 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是特征方程*(4.34)*的$n$个彼此互异的特征根，则

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \cdots,\ e^{\lambda_n t}$$

为方程*(4.32)*的一个基本解组。

注1 特征根λ可能是实数，也可能是复数；
注2 如果$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$全为实数，则$e^{\lambda_i t}\ (i=1,2,\cdots,n)$为$n$个实值解，方程*(4.27)*的通解为

$$x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$$

注3 如果$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$中有复数，由于方程的系数是实常数，复数必将成对共轭出现。不妨设$\lambda_1=\alpha+i\beta, \lambda_2=\alpha-i\beta$，而$\lambda_i\ (i=3,4,\cdots,n)$为实数，则方程的基本解组为

$$e^{(\alpha+i\beta)t},\ e^{(\alpha-i\beta)t},\ e^{\lambda_3 t}\ \cdots,\ e^{\lambda_n t}$$

其中$e^{(\alpha+i\beta)t}$和$e^{(\alpha-i\beta)t}$都是复值解，根据定理*4.12*，取它们的实部$e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$和虚部$e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t$这两个实值解，于是方程*(4.27)*的通解为

$$x(t)=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)+c_3e^{\lambda_3 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$$

【例1】 求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=0$的通解。

【例2】 求方程$\dfrac{d^4x}{dt^4}-x=0$的通解。

(2) **特征根有重根的情形**

我们分$\lambda_1=0$和$\lambda_1\neq 0$两种情况进行讨论。

(a) $\lambda_1=0$**是**k**重特征根**

定理 4.15 设$\lambda_1=0$是方程*(4.27)*的k重特征根，则方程*(4.27)*有k个线性无关解

$$1,\ t,\ t^2,\cdots,\ t^{k-1}$$

(b) $\lambda_1\neq 0$**是**k**重特征根**

定理 4.16 设$\lambda_1\neq 0$是方程*(4.27)*的k重特征根，则方程*(4.27)*有k个线性无关解

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \cdots,\ t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$$

注4 如果方程*(4.27)*有互异的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，它们的重数分别为$k_1, k_2, \cdots, k_m$，且$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，则方程*(4.27)*有相应的解

$$\left\{\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & \cdots & t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{\lambda_m t} & te^{\lambda_m t} & \cdots & t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} \end{array}\right. \tag{4.30}$$

可以证明，(4.30)是方程的一个基本解组。

注5 *如果方程(4.27)有k重特征根$\lambda=\alpha+i\beta$，则$\lambda=\alpha-i\beta$也是k重特征根，于是方程的$2k$个线性无关的复值解为：*

$$\begin{cases} e^{(\alpha+i\beta)t} & te^{(\alpha+i\beta)t} & \cdots & t^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)t} \\ e^{(\alpha-i\beta)t} & te^{(\alpha-i\beta)t} & \cdots & t^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)t} \end{cases}$$

而通常我们使用下面$2k$个线性无关的实值解：

$$\begin{cases} e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t & te^{\alpha t}\cdot\cos\beta t & \cdots & t^{k-1}e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t & te^{\alpha t}\cdot\sin\beta t & \cdots & t^{k-1}e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t \end{cases}$$

【例3】 求方程$\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0$的通解。

【例4】 求方程$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$的通解。

4.3.3 Euler方程

变系数方程的求解是十分困难的，但对一些特殊的变系数齐次线性方程，有时可以通过变量替换法，将它转化为常系数齐次线性方程，从而求出其通解。

定义 4.10 称方程

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{4.31}$$

为*Euler*方程，其中a_i $(i=1,2,\cdots,n)$为常数。

解法1：

作变量替换，令$x=e^t$，则$t=\ln x$，于是

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dt}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}) \\ \frac{d^3y}{dx^3}&=\frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{dt^2}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}) \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4.32}$$

用数学归纳法可以证明：对一切自然数k均有下式成立：

$$\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{1}{x^k}(\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt})$$

其中β_i $(i=1,2,\cdots,k-1)$都是常数。

将上式代入方程(4.31)，则方程(4.31)变成了以t为自变量的常系数齐次线性方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0 \tag{4.33}$$

其中$b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$都是常数。

解法2： 记$D=\dfrac{d}{dt}$，$D^k=\dfrac{d^k}{dt^k}$，于是(4.32)可以改写为

$$x\frac{dy}{dx}=Dy$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y-Dy=D(D-1)y$$

$$\cdots\cdots$$

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

于是方程(4.31)转化为

$$D^n y+b_1D^{n-1}y+\cdots+b_n y=0$$

这就是方程(4.33)。

【例5】 求方程$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$的通解。

【例6】 求方程$x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}=0$的通解。

4.4　常系数非齐次线性方程的待定系数法

这一节，我们要介绍常系数非齐次线性方程的解法—**待定系数法**。

定义 4.11 称方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{4.34}$$

为n**阶常系数非齐次线性方程**。其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数，$f(t)$是连续函数。

(1) $f(t)$是多项式与指数函数乘积的情形

定理 4.17 设$f(t) = (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_{m-1}t + b_m)e^{\lambda t}$，其中$b_i$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$，λ为实常数。则方程*(4.34)*有特解

$$\tilde{x}(t) = t^k(B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1}t + B_m)e^{\lambda t} \tag{4.35}$$

其中$B_0, B_1, \cdots, B_m$为待定常数；k 由λ是否为特征根决定。当λ不是特征根时，$k = 0$；当λ是特征根时，k为λ的重数。

【例1】 求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 3t + 1$的通解。

【例2】 求方程$\dfrac{d^3x}{dt^3} - 7\dfrac{d^2x}{dt^2} + 16\dfrac{dx}{dt} - 12x = -20t^3e^{2t}$的通解。

(2) $f(t)$是多项式与指数函数、余弦函数（正弦函数）之积的情形

定理 4.18 设$f(t) = A(t)\cos\beta t \cdot e^{\alpha t}$(或$f(t) = B(t)\sin\beta t \cdot e^{\alpha t}$)，其中$A(t)(B(t))$是实系数$m$次多项式，则方程*(4.34)*有特解

$$\tilde{x}(t) = t^k(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)e^{\alpha t} \tag{4.36}$$

其中$P(t), Q(t)$均为待定的实系数多项式，一个次数为m，另一个次数不超过m，k由$\alpha + i\beta$是否为特征根决定。

【例3】 求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 2\sin t$的通解。

(3) $f(t)$是多项式与指数函数及正、余弦函数之积的情形

定理 4.19 设$f(t) = (A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$，其中$A(t), B(t)$是实系数多项式，一个次数为$m$ ，另一个次数不超过m。则方程*(4.34)*有特解

$$\tilde{x}(t) = t^k(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

其中$P(t), Q(t)$均为待定的实系数多项式，一个次数为m，另一个次数不超过m，k由$\alpha + i\beta$是否为特征根决定。

【例4】 求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x = (\cos t - 7\sin t)e^{-t}$的通解。

4.5 应用实例

【例1】 交通管理色灯中，黄灯应亮多长时间

在交通管理中，定期地亮一段时间黄灯是为了让那些正行驶在交叉路口上或距交叉路口太近以致无法停下的车辆通过路口。

驶近交叉路口的驾驶员，在看到黄色信号后要作出决定：是停车还是通过路口。如果他以法定速度(或低于法定速度)行驶，当决定停车时，他必须有足够的停车距离。当决定通过路口时，他必须有足够的时间使他能够完全通过路口，这包括作出停车决定的时间，以及通过停车所需的最短距离的驾驶时间。

于是，黄灯状态应持续的时间包括驾驶员的反应时间、他通过交叉路口的时间以及停车所需的时间。如果法定速度为v_0，交叉路口的宽度为I，典型的车身长度为L，那么，通过路口的时间为$(I+L)/v_0$。

下面计算刹车距离。假设W是汽车的重量，f是摩擦系数，则对汽车的制动力为fW，其方向与运动方向相反。根据牛顿第二定律，得

$$\frac{W}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-fW \tag{4.37}$$

其中g是重力加速度。

方程(4.37)还满足下面的初始条件:

$$x|_{t=0}=0,\ \frac{dx}{dt}|_{t=0}=v_0$$

于是刹车距离就是直到$\frac{dx}{dt}=0$时汽车驶过的距离。

接下来我们求解方程(4.37)。

在$\frac{dx}{dt}|_{t=0}=v_0$的条件下，对方程(4.37)积分，得

$$\frac{dx}{dt}=-fgt+v_0 \tag{4.38}$$

因此，当$t=t_b=\frac{v_0}{fg}$时，速度为零。在$x|_{t=0}=0$条件下，对方程(4.38)积分，得

$$x=-\frac{1}{2}fgt^2+v_0t \tag{4.39}$$

当$t=t_b$时，x的值是

$$x(t_b)=D_b=\frac{v_0^2}{2fg}$$

最后，我们计算黄灯的持续时间

$$A=\frac{D_b+I+L}{v_0}+T$$

其中T是驾驶员的反应时间，即

$$A=\frac{v_0}{2fg}\frac{I+L}{v_0}+T$$

【例2】 放射性废物的处理问题

有一段时间，美国原子能委员会(现为核管理委员会)是这样处理浓缩放射性废物的，它们把这些废物装在密封性能很好的圆桶中，然后扔到水深约$300ft(1ft = 0.3038)$的海里。这种做法是否会造成放射性污染，很自然地引起了生态学家及社会各界的关注。原子能委员会一再保证，圆桶非常坚固，决不会破漏，这种做法是绝对安全的。然而一些工程师们却对此表示怀疑，他们认为圆桶在和海底相撞时有可能发生破裂。而原子能委员会有些专家们仍然坚持自己的看法。于是双方展开了一场争论。

究竟谁的意见正确呢？问题的关键在于圆桶到底能承受多大速度的碰撞，圆桶和海底碰撞时的速度有多大？

工程师们进行了大量破坏性试验，发现圆桶在直线速度为$40ft/s$的冲撞下会发生破裂，剩下的问题就是计算圆桶沉入$300ft$ 深的海底时，其末速度究竟有多大？

美国原子能委员会使用的是$55gal$ $(1gal = 3.785L)$的圆桶，装满放射性废物时的圆桶重量为$W = 527.436lbf$ $(1lbf = 0.452kg)$，而在海水中受到浮力$B = 470.327lbf$。此外，下沉时圆桶还要受到海水的阻力，阻力的大小为

$$D = Cv$$

其中C为常数。工程师们做了大量的试验，测得$C = 0.08$。

现在，取一个垂直向下的坐标，并以海平面为坐标原点。于是，根据牛顿第二定律，圆桶下沉时应满足微分方程

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = W - B - D$$

注意到$m = \dfrac{W}{g}, D = Cv, \dfrac{dy}{dt}$，上式可改写为

$$\frac{dv}{dt} + \frac{Cg}{W}v = \frac{g}{W}(W - B) \tag{4.40}$$

方程(4.40)满足初始条件$v(0) = 0$，其解为

$$v(t) = \frac{W - B}{C}(1 - e^{-\frac{Cg}{W}t}) \tag{4.41}$$

由(4.41)容易计算出圆桶的极限速度

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{W - B}{C} \approx 713.86(ft/s)$$

如果极限速度不超过$40ft/s$，那么工程师们可以罢休了。然而事实上，和$40ft/s$的承受能力相比，圆桶的极限速度竟是如此之大，使人们不得不开始相信，工程师们也许是对的。

为了求出圆桶与海底的碰撞速度$v(t)$，首先必须求出圆桶的下沉时间t，然而要做到这一点却是比较困难的。为此，我们改变讨论方法，将速度v表示成下沉深度y的函数，即改写成$v(t) = v(y(t))$。根据复合函数的求导法则，得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}$$

这样，将y所满足的二阶常微分方程改写为

$$m\frac{dy}{dt}\frac{dv}{dy} = W - B - Cv$$

或

$$\frac{v}{W - B - Cv}\frac{dv}{dy} = \frac{g}{W}$$

注意到$v(0) = 0, y(0) = 0$，两边积分，得到

$$-\frac{v}{C} - \frac{W - B}{C^2}\ln\frac{W - B - Cv}{W - B} = \frac{gy}{W} \tag{4.42}$$

十分可惜的是，我们无法从非线性方程(4.42)中求出$v = v(y)$，并进而求出碰撞速度$v(300)$。因此，只能借助数值方法求出$v(300)$的近似值。计算结果表明，$v(300) \approx 45.1ft/s > 40ft/s$。工程师的猜测是正确的，将放射性废物丢到海中的做法是不安全的。现在，美国原子能委员会已经改变了它们处理放射性废物的方法，并明确规定禁止将放射性废物抛入海中。

【例3】 机械振动

设有一个弹簧，它的上端固定，下端挂一个质量为m的物体，当物体处于静止状态时，作用在物体上的重力与弹性力大小相等、方向相反。这个位置就是物体的平衡位置，如图4.2。

当物体处于平衡位置时，受到向下的重力为mg，弹簧向上的弹力$k\Delta l$的作用，其中k是弹簧的弹性系数，Δl是弹簧受重力mg作用后向下拉伸的长度，即

$$k\Delta l = mg$$

为了研究物体的运动规律，选取平衡位置为坐标原点，取x轴垂直向下。当物体处于平衡位置时，有$x = 0$，当物体受到外力$F(t)$ 作用时，从平衡位置开始运动，$x(t)$是物体在t时刻的位置。当物体开始运动时，受到下面四个外力的作用:

(i) 物体的重力$W = mg$，方向向下，与坐标轴方向一致;

(ii) 弹簧的弹力R，当$\Delta l + x > 0$时，弹力与x轴方向相反，取$R = -k(\Delta l + x)$。当$\Delta l + x < 0$时，弹力与x轴方向相同，取$R = -k(\Delta l + x)$。因此，弹簧的弹力R总有

$$R = -k(\Delta l + x)$$

(iii) 空气阻力D，物体在运动过程中总会受到空气或其他介质的阻力作用，使振动逐渐减弱，阻力的大小与物体运动的速度成正比，方向与运动的方向相反，该阻力系数为c，在t时刻物体运动速度为$\frac{dx}{dt}$，因此

$$D = -c\frac{dx}{dt}$$

(iv) 物体在运动过程中还受到随时间变化的外力作用$F(t)$，方向可能是向上，也可能向下，依赖于$F(t)$的正负。

根据牛顿第二定律，得

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= W+R+D+F = mg-k(\Delta l+x)-c\frac{dx}{dt}+F(t) \\ &= -kx-c\frac{dx}{dt}+F(t) \end{aligned}$$

因此，物体的运动满足二阶常系数线性微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t) \tag{4.43}$$

(1) **无阻尼自由振动**

没有空气阻力和外力作用的弹簧振动，称为**无阻尼自由振动**。

此时，方程(4.43)变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \quad 或 \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \tag{4.44}$$

其中$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$。方程(4.44)的通解为

$$x(t)=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t \tag{4.45}$$

其中c_1,c_2为常数。为了明确物理意义，令

$$\sin\theta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\quad \cos\theta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

取$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\ \theta=\arctan\dfrac{c_1}{c_2}$，则(4.45)改写为

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{c_1^2+c_2^2}\left[\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\omega_0t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\omega_0t\right] \\ &= A(\sin\theta\cos\omega_0t+\cos\theta\sin\omega_0t) \\ &= A\sin(\omega_0t+\theta) \end{aligned} \tag{4.46}$$

(2) **有阻尼自由振动**

下面考虑有空气阻力而无外力作用的弹簧振动。此时，方程(4.43)变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{4.47}$$

方程(4.47)的对应的特征方程的特征根为

$$\lambda_1=\frac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m},\ \lambda_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}$$

我们分三种情况考虑方程(4.47)的解:

(i) $c^2-4km>0$，方程(4.47)的通解为

$$x(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$$

(ii) $c^2-4km=0$，方程(4.47)的通解为

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-\frac{c}{2m}t}$$

(iii) $c^2-4km<0$，方程(4.47)的通解为

$$x(t)=e^{-\frac{c}{2m}t}[c_1\cos\mu t+c_2\sin\mu t]$$

其中，$\mu=\dfrac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}$。

情形(i)称为**大阻尼情形**，情形(ii)称为**临界阻尼情形**，情形(iii)称为**小阻尼情形**。对情形(iii)，类似与无阻尼自由振动，可以把方程(4.47)的通解改写为

$$x(t)=Ae^{-\frac{c}{2m}t}\sin(\mu t+\theta)$$

其中，A,θ为任意常数。

(3) **有阻尼强迫振动**

如果物体在运动过程中既有空气阻力又有周期外力$F(t)$作用，设$F(t)=F_0\cos\omega t$，则方程(4.43)变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega t \tag{4.48}$$

方程(4.48)的一个特解为

$$\psi(t)=\frac{F_0\sin(\omega t+\theta)}{[(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

其中$\tan\theta=\dfrac{k-m\omega^2}{c\omega}$。于是方程(4.48)的通解为

$$x(t)=\phi(t)+\psi(t) \tag{4.49}$$

其中$\phi(t)$是方程(4.48)对应的齐次方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

的通解。

(4) **无阻尼强迫振动**

当没有空气阻力而有周期性外力$F=F_0\cos\omega t$作用时，弹簧的振动满足方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{4.50}$$

其中$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$。

当$\omega\neq\omega_0$时，方程(4.50)有通解

$$x(t)=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t+\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

它是两个不同周期函数的和。

当$\omega=\omega_0$时，外力的频率$\dfrac{\omega}{2\pi}$与弹簧振动的固有频率$\dfrac{\omega_0}{2\pi}$是相等的，这种现象称为**共振现象**，此时，弹簧的振动满足方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t \tag{4.51}$$

方程(4.51)有通解

$$x(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{4.52}$$

其中c_1,c_2是任意常数。