第七章　一阶线性偏微分方程

如果微分方程中的未知函数的自变量不止一个，那么就称其为**偏微分方程**。在许多领域的研究中，我们需要用偏微分方程来描述或者刻画某些现象或者状态的演变过程。

7.1　基本概念

1. **一阶偏微分方程**

由未知函数$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)(n\geq 2)$及其一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}$构成的关系式

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \tag{7.1}$$

称为**一阶偏微分方程**。

2. **一阶线性偏微分方程**

若F关于$u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}$是线性的（一次的），

$$a_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)u+\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{7.2}$$

则称其为**一阶线性偏微分方程**。

3. **一阶线性齐次偏微分方程**

若上式中的$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 0$，即

$$a_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)u+\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \tag{7.3}$$

则称其为**一阶线性齐次偏微分方程**。

4. **非线性偏微分方程**

不是线性的偏微分方程为**非线性偏微分方程**。

5. **拟线性偏微分方程**

若非线性偏微分方程关于其最高阶偏导数是线性的，则称它是**拟线性偏微分方程**。

本章讨论如下的一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{j=1}^{n}b_j(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_j}=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n;z)$$

其中函数a_i, f, b_j, Z是相应变元的已知函数。

6. **偏微分方程的解**

如果把空间$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$内的某一区域$\mathcal{D}$内有定义的连续可微函数$u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$代入方程(7.1)中得到恒等式

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \equiv 0$$

则称$u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是偏微分方程(7.1)的一个**解**，而$\mathcal{D}$是该解的**定义域**。

偏微分方程解的几何意义 对于一阶偏微分方程(7.1)，当$n = 2$时，其一般形式可以写为

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{7.4}$$

若$z = \varphi(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}$是它的解，那么我们称三维空间$(x, y, z)$中的曲面$z = \varphi(x, y)$为方程(7.4)的**积分曲面**。更一般的，对于方程(7.1)的解$u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$可以抽象地看成$n + 1$维空间$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, u\}$内的一张曲面，因此也称为偏微分方程(7.1)的积分曲面。

7.2　一阶线性偏微分方程的求解

7.2.1　首次积分

定义 7.1 含有n个未知函数的一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{7.5}$$

如果存在不恒为零的连续可微函数$\varphi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$，使得方程组*(7.5)*（在某个区域$G$内）的任一解都满足:

$$\mathrm{d}\varphi(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)) = 0$$

则关系式

$$\varphi(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)) = c \tag{7.6}$$

称为方程组*(7.5)*的一个**首次积分**。有时也称φ为方程组*(7.5)*的一个首次积分。

方程组(7.5)的n个首次积分$\varphi_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$称为是彼此**独立**的，如果Jacobi行列式

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{7.7}$$

在G内恒不为0。我们也可以用Jacobi矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

的秩为n来定义$\varphi_j (j = 1, 2, \cdots, n)$的独立性。

7.2.2 常微分方程组与一阶线性偏微分方程

对于$n = 1$的情形，常微分方程组退化为一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{7.8}$$

假设其通解为$y = \psi(x, c)$，从中解得

$$\varphi(x, y) = c$$

那么，这就是方程(7.8)的首次积分。用方程(7.8)的任一解$y(x)$代入，可得

$$\varphi(x, y(x)) = c$$

于是

$$\mathrm{d}\varphi(x, y(x)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

或者

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} f(x, y) = 0$$

这说明$u = \varphi(x, y)$是一阶齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.9}$$

的解。

反之，将方程(7.8)的任一解$y(x)$代入方程(7.9)的解$u = u(x, y)$中，再关于x求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

即

$$u(x,y(x))=\text{常数}$$

这说明$u(x,y)=c$是方程(7.8)的首次积分。

定理 7.1 $\psi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c$是方程组*(7.5)*的首次积分的充要条件是在$G$内成立

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+f_2\frac{\partial\psi}{\partial y_2}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial y_n}=0 \tag{7.10}$$

定理 7.2 (存在唯一性定理) 如果$\boldsymbol{A}(t)$是$n\times n$矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$是n维列向量，它们都在区间$a\leq t\leq b$上连续，则对于区间$a\leq t\leq b$上的任何数t_0以及任一常数n维列向量$\boldsymbol{\eta}$，方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{7.11}$$

存在唯一解$\boldsymbol{\phi}(t)$，定义于整个区间$a\leq t\leq b$上，且满足初始条件

$$\boldsymbol{\phi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$$

〖**证明**〗　先证必要性。

由定理 7.2可知，对于任一点$(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\in G$，方程组(7.5)满足初始条件

$$y_j(x_0)=y_j^0,\qquad j=1,2,\cdots,n$$

的解$y_j=\varphi_j(x)(j=1,2,\cdots,n)$存在且唯一。

若$\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$为首次积分，则

$$\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))=\text{常数}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))=0$$

特别，当$x=x_0$时，有

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)+\sum_{i=1}^n f_i(x_0;y_1^0,\cdots,y_n^0)\frac{\partial}{\partial y_i}\psi(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)=0$$

再由$(x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\in G$的任意性，推知等式(7.10)在$G$内成立。

再证充分性。

若等式(7.10)在G内成立，自然对于方程组(7.5)的解有意义之处也成立，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\right)\Bigg|_{\substack{y_j=\varphi_j(x),\\ j=1,2,\cdots,n}}=0$$

或者

$$\psi(x,\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))=\text{常数}$$

即$\psi(x,y_1,\cdots,y_n)=c$是方程组(7.5)的首次积分。■

7.2.3 利用首次积分求解常微分方程组

定义 7.2 称方程组(7.5)的n个互相独立的首次积分全体$\varphi_j(x, y_1, \cdots, y_n) = c_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$为方程组(7.5)的***通积分***。

分析：若能找到方程组(7.5)n个独立的首次积分$\varphi_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c_j(j = 1, 2, \cdots, n)$，则通过求解函数方程组

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c_1 \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c_2 \\ \cdots\cdots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c_n \end{cases} \tag{7.12}$$

可以解得全部未知函数y_j。这样方程组(7.5)的解便求出了。一般我们直接将隐式解(7.12)就称为方程组(7.5)的通解。由此看来，求解方程组(7.5)的问题就归结为寻求它的通积分。

寻找首次积分的方法:首先，我们将方程组(7.5)改写为如下的对称形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{g_0} = \frac{\mathrm{d}y_1}{g_1} = \frac{\mathrm{d}y_2}{g_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}y_n}{g_n}$$

其中，$g_j = g_0 f_j(j = 1, 2, \cdots, n)$。如果能求得$n+1$个不同时为零的函数$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$使得

(1) $\mu_0 g_0 + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n = 0$；

(2) $\mu_0 \mathrm{d}x + \mu_1 \mathrm{d}y_1 + \cdots + \mu_n \mathrm{d}y_n$是某个函数$\varphi$的全微分，则$\varphi = c$就是方程的一个首次积分。

【例1】 求方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}$$

的通积分。

【例2】 解方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

7.2.4 一阶齐次线性偏微分方程的求解

定义 7.3 形如

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{7.13}$$

的一阶齐次线性偏微分方程，假定其系数$X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在给定点$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \cdots, x_n^{(0)})$的某个邻域$D$中连续可微且不同时为零。构造如下形式的一阶常微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{7.14}$$

我们称*(7.14)*为偏微分方程*(7.13)*的**特征方程**。

分析：方程组(7.14)是包含$n-1$个常微分方程的方程组，因此它具有$n-1$个互相独立的首次积分：$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$。其中，$c_i$为任意常数。可利用这$n-1$个首次积分来给出偏微分方程(7.13)的通解的结构。

定理 7.3 *设$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程(7.14)的通积分，则方程(7.13)的通解可以表示为*

$$u=\Psi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}) \tag{7.15}$$

其中Ψ是其变量的任意连续可微函数。

〖**证明**〗

首先，易证：如果$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程(7.14)的通积分，那么复合函数$\Psi\Big(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big)=c$也是方程组的首次积分。具体证明如下:

由假设$X_i(i=1,2,\cdots,n)$在$\mathcal{D}$内不同时为零，不妨假设$X_n\neq 0$。于是，将x_n视为自变量，方程(7.14)的解可以表示为$x_j=\psi_j(x_n)(j=1,2,\cdots,n-1)$。又因为$\varphi_i=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程组(7.14)的首次积分，因此有$\varphi_i\Big(\psi_1(x_n),\psi_2(x_n),\cdots,\psi_{n-1}(x_n),x_n\Big)=c_i,i=1,2,\cdots,n-1$。其中，$c_i$是确定的常数，因此

$$\Psi\Big(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)\Big)\Big|_{\substack{x_j=\psi_j(x_n)\\ j=1,2,\cdots,n-1}}=\text{常数}$$

这就证明了$\Psi\Big(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)\Big)=c$是方程组(7.14)的首次积分。根据定理7.1，$u=\Psi\Big(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)\Big)$是偏微分方程(7.13)的解。

为了得到偏微分方程(7.13)的通解，以下我们需要证明：偏微分方程(7.13)的任意一个解都可以由$u=\Psi\Big(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)\Big)$得到。

由条件$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程(7.14)的首次积分，因此根据定理7.1，$u=\varphi_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程(7.13)的$n-1$个解。假设$u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是偏微分方程(7.13)的任一非平凡解，这样我们就得到了偏微分方程(7.13)的n个解。把这些解全部代入偏微分方程(7.13)中，即可得到如下的n个等式

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0,\quad j=1,2,\cdots,n-1\end{cases} \tag{7.16}$$

写成如下的矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ X_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\\ X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

由于$X_i(i=1,2,\cdots,n)$在$\mathcal{D}$内不同时为零，因此上述方程组有非零解。根据线性代数的知识可知，

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\end{vmatrix}\equiv 0$$

因此，n个函数

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n),\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

是相关的（非互相独立的）。但定理的条件告诉我们$\varphi_i(i=1,\cdots,n)$是通积分，即互相独立的首次积分，因此$\varphi_i(i=1,\cdots,n-1)$也是互相独立的。这样，便存在一个连续可微函数$\Psi$，使得

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Psi\Big(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big)$$

另外，如果Ψ可以取常值函数，那么(7.15)显然也包含了偏微分方程(7.13)的平凡解。
■

注1　由于定理7.3是在某点邻域内成立，故是局部的，因此偏微分方程(7.13)的通解表达式在理论上也是局部成立的。

只有两个自变量的偏微分方程(7.13)的求解：

在只有两个自变量的情况下，假设一阶齐次线性偏微分方程定解问题为

$$\begin{cases} P(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad x_0<x<\infty,-\infty<y<\infty\\ u|_{x=x_0}=\varphi(y), \quad -\infty<y<\infty\end{cases}\tag{7.17}$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y)}\tag{7.18}$$

如果已经求得方程(7.18)的首次积分为

$$\psi(x,y)=c\tag{7.19}$$

那么偏微分方程(7.17)的通解为

$$u=\Phi(\psi(x,y))\tag{7.20}$$

其中，Φ是一个任意一元连续可微函数。利用初值条件，可得

$$\Phi(\psi(x_0,y))=\varphi(y)\tag{7.21}$$

令

$$\bar{\psi}=\psi(x_0,y)\tag{7.22}$$

从(7.22)解出

$$y = \omega(\bar{\psi}) \tag{7.23}$$

把(7.22)代入(7.21)等号左端，(7.23)代入(7.21)等号右端可得

$$\Phi(\bar{\psi}) = \varphi(\omega(\bar{\psi})) \tag{7.24}$$

这样，任意一元连续可微函数Φ的具体表达式就确定了。最后，再利用(7.20)可得偏微分方程(7.17)的解为

$$u = \Phi(\psi(x, y)) = \varphi(\omega(\psi(x, y))) \tag{7.25}$$

【例3】 求方程

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

通过曲线$x = 0, u = y^2$的积分曲面。

【例4】 求解如下偏微分方程

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

其中，$x_1 \neq 0$。

7.2.5 一阶拟线性偏微分方程的求解

一阶拟线性偏微分方程:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, \cdots, x_n, z) \tag{7.26}$$

$n = 2$时的形式：

$$a(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = Z(x, y, z) \tag{7.27}$$

其中，函数$a(x, y, z)$，$b(x, y, z)$，$Z(x, y, z)$关于$(x, y, z) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$连续可微，并且$a, b$不同时为零。

求解方法：假设(7.27)的解$z = u(x, y)$表为隐函数形式

$$F(x, y, z) = 0$$

那么根据隐函数求导公式易得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

代入(7.27)可得

$$a(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial y} + Z(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{7.28}$$

以上推导结果表明：如果$F(x,y,z)=0$是拟线性方程(7.27)的隐式解，那么函数$F=F(x,y,z)$就是一阶齐次线性偏微分方程(7.28)的显式解。以下需要解决能否利用偏微分方程(7.28)的通解来确定拟线性偏微分方程(7.27)的通解。

设

$$\varphi(x,y,z)=c_1,\qquad \psi(x,y,z)=c_2$$

是方程(7.28)的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{\mathrm{d}y}{b}=\frac{\mathrm{d}z}{Z} \tag{7.29}$$

的两个互相独立的首次积分。那么根据定理7.3，方程(7.28)的通解可以表示为

$$F=\Phi\Big(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z)\Big)$$

其中Φ是关于其自变量的任意连续可微二元函数。

以下首先说明当$\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\neq 0$时，由

$$\Phi\Big(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z)\Big)=0$$

所确定的隐函数$z=z(x,y)$的确是方程(7.27)的解。同样利用隐函数求导公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

再代入恒等式

$$a(x,y,z)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+Z(x,y,z)\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$$

可得

$$a\Big(x,y,z(x,y)\Big)\frac{\partial z}{\partial x}+b\Big(x,y,z(x,y)\Big)\frac{\partial z}{\partial y}=Z\Big(x,y,z(x,y)\Big)$$

这就证明了$z=z(x,y)$的确是偏微分方程(7.27)的一个解。下面进一步证明：对于偏微分方程(7.27)的任何一个解$z=\zeta(x,y)$，总存在二元函数Ψ，使得

$$\Psi\left[\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big),\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)\right]\equiv 0$$

这里，φ,ψ是特征方程(7.29)的互相独立的首次积分。这部分的证明可以参照定理7.3的证明。这里，我们通过说明$\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)$和$\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)$是相关的来给出证明。

记

$$\gamma(x,y)\triangleq\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big),\quad \kappa(x,y)\triangleq\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)$$

则

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x},\quad \frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

于是

$$a\frac{\partial\gamma}{\partial x}+b\frac{\partial\gamma}{\partial y}=a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\left(a\frac{\partial\zeta}{\partial x}+b\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+Z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\equiv 0$$

同理可得

$$a\frac{\partial \kappa}{\partial x}+b\frac{\partial \kappa}{\partial y}\equiv 0$$

这样我们便得到了以下的线性代数方程组

$$\begin{cases} a\frac{\partial \gamma}{\partial x}+b\frac{\partial \gamma}{\partial y}=0 \\ a\frac{\partial \kappa}{\partial x}+b\frac{\partial \kappa}{\partial y}=0 \end{cases}$$

但函数a,b不同时为零，这说明上述方程组有非零解，因此根据线性代数理论，可知系数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \kappa}{\partial x} & \frac{\partial \kappa}{\partial y} \end{vmatrix}\equiv 0$$

即Jacobi行列式$\frac{\partial(\gamma,\kappa)}{\partial(x,y)}=0$，这又说明了函数$\gamma(x,y)$和$\kappa(x,y)$是相关的。因此存在二元函数$\Psi$，使得

$$\Psi\left[\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big),\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)\right]=\Psi[\gamma(x,y),\kappa(x,y)]\equiv 0$$

一阶拟线性偏微分方程(7.27)**的通解的结构定理**:

定理 7.4 设$\varphi_i(x_1,\cdots,x_n;z)=c_i(i=1,2,\cdots,n)$是常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{b_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{b_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{b_n}=\frac{\mathrm{d}z}{Z} \tag{7.30}$$

的n个互相独立的首次积分，Φ是关于其自变量任意连续可微的n元函数。如果从

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=0 \tag{7.31}$$

可以确定函数$z=z(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，那么*(7.31)*即为一阶拟线性偏微分方程*(7.26)*的（隐式）通解。

方程(7.30)称为一阶拟线性偏微分方程(7.26)的**特征方程**。

【例5】 求如下初值问题

$$\begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=z \\ z(x,y)\big|_{x=2}=y-4 \end{cases}$$

【例6】 求解拟线性偏微分方程$y\frac{\partial z}{\partial x}=z$。

【例7】 求解如下拟线性偏微分方程

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=\omega z$$

其中，ω为大于零的正整数，$x_1\neq 0$。

7.3 Cauchy问题

7.3.1 一阶线性（拟线性）偏微分方程求解的几何解释

考虑三维空间中的一个连续向量场

$$\boldsymbol{v} = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$$

任意给定区域$\mathcal{D}$中的一点(x,y,z)，便得到一个确定的方向。如果空间的一条曲线l上每一点(x,y,z)的切向量$\boldsymbol{\tau} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$与该点的场向量$\boldsymbol{v}\Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$共线，则称该曲线$l$为**特征曲线**。而由$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{v}$共线可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R} \tag{7.32}$$

因此特征曲线l由微分方程(7.32)决定。由特征曲线组成的曲面称为**特征曲面**（后面将说明特征曲线的确可以编织成一个光滑曲面）。若记特征曲面上任一点处的法向量为$\boldsymbol{n}$，那么在该点，$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{v}$一定正交，即

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{7.33}$$

然后我们有以下结果

- 当特征曲面的方程为显式$z = z(x,y)$时，$\boldsymbol{n} = \Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)$，从而根据(7.33)有

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R \tag{7.34}$$

- 当特征曲面的方程为隐式$u(x,y,z) = 0$时，$\boldsymbol{n} = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\Big)$，同样根据(7.33)有

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{7.35}$$

在本章一开始，就已经介绍了积分曲面的概念。即一阶线性（拟线性）偏微分方程的解可以想象成n维空间中的一张曲面。从(7.34)和(7.35)来看，一阶线性（拟线性）偏微分方程的解（积分曲面）就是特征曲面，记为π。那么现在就可以给出一阶线性（拟线性）偏微分方程求解的几何解释了：一阶线性（拟线性）偏微分方程（(7.34)，(7.35)）的解（积分曲面）是特征曲面，它是由特征曲线组成的。而特征曲线可以由常微分方程组（特征方程）(7.32)决定。这样，一阶线性（拟线性）偏微分方程的求解问题就归结为常微分方程组的求解问题了。这与前面所给的结论是完全一致的。

以下说明特征曲线γ的确可以编织成光滑的特征曲面（积分曲面）。这句话的含义为：通过π上任何一点$p_0(x_0,y_0,z_0)$恰有一条特征曲线γ_0，而且$\gamma_0 \subset \pi$。

显然，只要$\pi \subseteq \mathcal{D}$，则根据常微分方程组(7.32)解的存在唯一性，可以直接得到前半个结论，即通过π上任何一点$p_0(x_0,y_0,z_0)$恰有一条特征曲线γ_0。现在说明后半个结论，即通过积分曲面π上每一点$p_0(x_0,y_0,z_0)$的特征曲线γ_0完全落在积分曲面π上。

若特征方程(7.32)的两个互相独立的首次积分为

$$\psi_1(x,y,z)=c_1,\quad \psi_2(x,y,z)=c_2 \tag{7.36}$$

它们共同确定了特征曲线族，因此特征曲线γ_0满足

$$\psi_1(x,y,z)=c_1^0,\quad \psi_2(x,y,z)=c_2^0 \tag{7.37}$$

其中常数

$$c_1^0=\psi_1(x_0,y_0,z_0),\quad c_2^0=\psi_2(x_0,y_0,z_0) \tag{7.38}$$

另一方面，根据定理7.4，积分曲面π可以表示为

$$\Phi\Big(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\Big)=0 \tag{7.39}$$

这里Φ是某个关于其自变量的二元连续可微函数。由于$p_0\in\pi$，因此

$$\Phi\Big(\psi_1(x_0,y_0,z_0),\psi_2(x_0,y_0,z_0)\Big)=0$$

再根据(7.38)得到

$$\Phi(c_1^0,c_2^0)=0$$

然后，由(7.37)推出，在特征曲线γ_0上有

$$\Phi\Big(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)\Big)=0$$

这就证明了$\gamma_0\subset\pi$。

7.3.2 Cauchy问题

分析：给定一条光滑曲线

$$\Gamma: x=\alpha(\sigma),\quad y=\beta(\sigma),\quad z=\zeta(\sigma),\quad \sigma\in\mathcal{I}$$

其中σ为曲线的参数坐标，确定拟线性偏微分方程(7.35)的一张积分曲面$\pi: z=f(x,y)$，使之包含给定曲线Γ，即成立

$$\zeta(\sigma)=f[\alpha(\sigma),\beta(\sigma)]$$

这里$\alpha'(\sigma),\beta'(\sigma),\zeta'(\sigma)$都是连续的，并且$\alpha'^2(\sigma)+\beta'^2(\sigma)\neq 0$。

定理 7.5 *对于一阶拟线性偏微分方程(7.35)的上述Cauchy问题，*

(1) 如果成立

$$\frac{\alpha'(\sigma)}{\beta'(\sigma)}\neq\frac{P\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}{Q\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}$$

那么上述Cauchy问题有惟一解;

(2) 如果曲线Γ是特征曲线，即成立

$$\frac{\alpha'(\sigma)}{P\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}=\frac{\beta'(\sigma)}{Q\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}=\frac{\zeta'(\sigma)}{R\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}$$

那么上述$Cauchy$问题的解不惟一;

(3) 如果曲线Γ不是特征曲线，但成立

$$\frac{\alpha'(\sigma)}{\beta'(\sigma)}\equiv\frac{P\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}{Q\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}$$

那么上述$Cauchy$问题无解。

【例1】 求偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

的积分曲面，使得它通过初始曲线

$$\Gamma:\quad x=t,\quad y=3t,\quad z=1+t^2,\qquad (t>0)$$

【例2】 确定偏微分方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

过曲线$\Gamma: z=x, x^2+y^2=1$的积分曲面。