常微分方程

第四章　高阶微分方程

上海财经大学应用数学系

March 19, 2010

鱼雷追击模型

一敌舰在某海域内沿着正北方向航行时，我方战舰恰好位于敌舰的正西方向1 公里处。我舰向敌舰发射制导鱼雷，敌舰速度为0.42 公里/分，鱼雷速度为敌舰速度的2倍。试问敌舰航行多远时将被击中？

设敌舰初始点在$Q_0(1,0)$ 处，运动方向为平行y 轴的直线，t 时刻到达Q 点，鱼雷的初始点在$P_0(0,0)$处，沿曲线$y=y(x)$追击，敌舰的速度$v_0=0.42$，则在时刻t，鱼雷在点$P(x,y)$处，此时敌舰在点$Q(1,v_0t)$。由于鱼雷在追击过程中始终指向敌舰，而鱼雷的运动方向正好是沿曲线$y=y(x)$ 的切线方向，那么，鱼雷的运动方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_0t-y}{1-x} \tag{1}$$

而鱼雷行使的速度为$2v_0$，分为水平方向运动和垂直方向运动

鱼雷追击模型

一敌舰在某海域内沿着正北方向航行时，我方战舰恰好位于敌舰的正西方向1 公里处。我舰向敌舰发射制导鱼雷，敌舰速度为0.42 公里/分，鱼雷速度为敌舰速度的2倍。试问敌舰航行多远时将被击中？

设敌舰初始点在$Q_0(1,0)$ 处，运动方向为平行y 轴的直线，t 时刻到达Q 点，鱼雷的初始点在$P_0(0,0)$处，沿曲线$y=y(x)$追击，敌舰的速度$v_0=0.42$，则在时刻t ，鱼雷在点$P(x,y)$处，此时敌舰在点$Q(1,v_0t)$。由于鱼雷在追击过程中始终指向敌舰，而鱼雷的运动方向正好是沿曲线$y=y(x)$ 的切线方向，那么，鱼雷的运动方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_0t-y}{1-x} \tag{1}$$

而鱼雷行使的速度为$2v_0$，分为水平方向运动和垂直方向运动，

鱼雷追击模型

故满足以下关系式

$$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=2v_0 \tag{2}$$

将(1)改写为

$$v_0t-y=(1-x)\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

将(3)两边同时对x求导数，得

$$v_0\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dx}=(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx} \tag{4}$$

由(2)可得

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2v_0}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} \tag{5}$$

将(5)代入(4)中，得

鱼雷追击模型

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}}{2(1-x)} \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases} \tag{6}$$

4.1 高阶微分方程的降阶法

n阶微分方程的一般形式

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0 \tag{7}$$

其中$n\geq 2$，t为自变量，x为未知函数。

4.1 高阶微分方程的降阶法

不显含未知函数x的方程

如果(7)中不显含未知函数x及其直到$k-1$ $(k \geq 1)$阶导数，方程(7)为

$$F(t, x^{(k)}, \cdots, x^{(n)}) = 0 \tag{8}$$

作变量替换，令$x^{(k)} = y$，则

$$x^{(k+1)} = \frac{dy}{dt}, \cdots, x^{(n)} = \frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}$$

于是(8)变为

$$F(t, y, \cdots, \frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}) = 0 \tag{9}$$

原方程的阶数降了k阶。

不显含未知函数x的方程

如果(7)中不显含未知函数x及其直到$k-1$ $(k\geq 1)$阶导数，方程(7)为

$$F(t,x^{(k)},\cdots,x^{(n)})=0 \tag{8}$$

作变量替换，令$x^{(k)}=y$，则

$$x^{(k+1)}=\frac{dy}{dt},\cdots,x^{(n)}=\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}$$

于是(8)变为

$$F(t,y,\cdots,\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}})=0 \tag{9}$$

原方程的阶数降了k阶。

不显含未知函数x的方程

如果能求出(9)的通解

$$y = \phi(t, c_1, \cdots, c_{n-k})$$

意味着

$$x^{(k)} = \phi(t, c_1, \cdots, c_{n-k})$$

只要对上式连续积分k次，可得原方程(8)的通解。

4.1 高阶微分方程的降阶法

例1

求方程$t\dfrac{d^5x}{dt^5}-\dfrac{d^4x}{dt^4}=0$的通解。

例2

求方程$y'''=e^{2x}-\cos x$的通解。

4.1 高阶微分方程的降阶法

不显含自变量t的方程

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0 \tag{10}$$

通过变量替换，把x看成新的自变量，则方程可降一阶。
令$x' = y$，则

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d(y\frac{dy}{dx})}{dt} = \frac{d(y\frac{dy}{dx})}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y(\frac{dy}{dx})^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

4.1 高阶微分方程的降阶法

不显含自变量t的方程

$$F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0 \tag{10}$$

通过变量替换，把x看成新的自变量，则方程可降一阶。
令$x' = y$，则

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d(y\frac{dy}{dx})}{dt} = \frac{d(y\frac{dy}{dx})}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y(\frac{dy}{dx})^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

不显含自变量t的方程

用数学归纳法知，$x^{(k)}$可用$y, \dfrac{dy}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ $(k \le n)$来表达。于是方程(10)变为

$$F(x, y, y\frac{dy}{dx}, y(\frac{dy}{dx})^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots) = 0$$

即有新方程

$$H(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) = 0 \tag{11}$$

这是以x为自变量，y为未知函数的$n-1$阶方程。

例3

求解初值问题$\begin{cases} x'' - e^{2x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0, \quad x'|_{t=0} = 1 \end{cases}$。

4.2 高阶线性微分方程的一般理论

n阶线性微分方程

称方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \tag{12}$$

为n阶线性微分方程。其中$a_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$及$f(t)$在区间$[a, b]$上连续。

如果$f(t) \equiv 0$，则方程(12)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \tag{13}$$

称之为n阶齐次线性微分方程，简称齐次线性方程。
如果$f(t) \neq 0$，也称(12)为n阶非齐次线性微分方程，简称非齐次线性方程。

n阶线性微分方程

称方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \tag{12}$$

为n阶线性微分方程。其中$a_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$及$f(t)$在区间$[a, b]$上连续。

如果$f(t) \equiv 0$，则方程(12)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \tag{13}$$

称之为n阶齐次线性微分方程，简称齐次线性方程。
如果$f(t) \neq 0$，也称(12)为n阶非齐次线性微分方程，简称非齐次线性方程。

n阶线性微分方程

(1) $(1-t^2)\dfrac{d^2x}{dt^2}-2t\dfrac{dx}{dt}+2x=0;$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=x;$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+x=\sin t;$

(4) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-(x+2)(x\dfrac{dy}{dx}-y)=x^4$。

初值问题解的存在唯一性定理

定理4.1 如果函数$a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$和$f(t)$在区间$[a,b]$上连续，则对任一 $t_0\in[a,b]$及任意$x_0, x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=x_0, x'(t_0)=x_0^{(1)},\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{14}$$

存在唯一解$x=\phi(t)$，$t\in[a,b]$。

齐次线性方程解空间的结构

定理4.2 如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$是方程(13)的$k$个解，则它们的线性组合$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t)$ 也是方程(13)的解。其中$c_1, c_2, \cdots, c_k$是任意常数。

分析：n阶齐次线性方程(13)的解的全体组成集合$V = \{x(t)|x(t)\text{为方程(13)的解}\}$，这个解集合满足：
(1) 对任意的$x(t) \in V$，则$c_1x(t) \in V$;
(2) 对任意的$x_1(t) \in V, x_2(t) \in V$，则$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \in V$，
因而V构成一个线性空间，称为解空间。那么这个解空间的维数是多少呢？基底是什么呢？

4.2 高阶线性微分方程的一般理论

齐次线性方程解空间的结构

定理4.2 如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$是方程(13)的$k$个解，则它们的线性组合$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$ 也是方程(13)的解。其中$c_1, c_2, \cdots, c_k$是任意常数。

分析：n阶齐次线性方程(13)的解的全体组成集合$V=\{x(t)|x(t)$为方程(13)的解$\}$，这个解集合满足:
(1) 对任意的$x(t)\in V$，则$c_1x(t)\in V$;
(2) 对任意的$x_1(t)\in V, x_2(t)\in V$，则$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\in V$，
因而V构成一个线性空间，称为解空间。那么这个解空间的维数是多少呢？基底是什么呢？

齐次线性方程解空间的结构

函数线性相关性

设函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$是区间$[a,b]$上的$k$个函数，如果存在不全为零的常数$c_1, c_2, \cdots, c_k$，使下式恒成立

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t) \equiv 0, \quad t \in [a,b]$$

则称函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$在区间$[a,b]$上线性相关，否则称这些函数线性无关。

齐次线性方程解空间的结构

函数的Wronski行列式

设函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$在区间$[a,b]$上分别存在$k-1$阶导数，行列式

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)] \equiv \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的Wronski行列式。

函数线性相关性的判别

定理4.3 设函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$是区间$[a,b]$上的$k$个函数，如果存在不全为零的常数$c_1, c_2, \cdots, c_k$，使下式恒成立

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t) \equiv 0, \quad t \in [a,b]$$

则称函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$在区间$[a,b]$上线性相关，否则称这些函数线性无关。

函数线性相关性的判别

注意

(1)定理4.3的逆定理不一定成立。例如，例2中给出的函数$x_1(t)$和$x_2(t)$的Wronski行列式恒等于零，
但$x_1(t)$和$x_2(t)$在$(-\infty,+\infty)$上却是线性无关的;
(2)如果函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$的Wronski行列式在区间$[a,b]$上某点$t_0$处不等于零，即$W(t_0)\neq 0$，则这些函数在区间$[a,b]$上必线性无关。

齐次线性方程解空间的结构

函数线性相关性的判别

定理4.4 设函数$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程(13)的$n$个解，则它们在区间$[a,b]$上线性无关的充分必要条件为其Wronski 行列式$W(t) \neq 0,\ t \in [a,b]$。

定理4.4说明

如果存在$t_0 \in [a,b]$，使$W(t_0) = 0$，则这n个解在区间$[a,b]$上线性相关；

如果存在$t_0 \in [a,b]$，使$W(t_0) \neq 0$，则这n个解在区间$[a,b]$上线性无关。

齐次线性方程解空间的结构

函数线性相关性的判别

定理4.5 n阶齐次线性方程(13)一定存在n个线性无关解。

函数线性相关性的判别

定理4.6 如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程(13)的$n$个线性无关解，则方程(13)的通解可以表示为

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \tag{15}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$是任意常数。且通解(15)包括了方程(13)的所有解。

齐次线性方程解空间的结构

Liouville公式

设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程(13)的任意$n$个解，$W(t)$是它的Wronski行列式，则$W(t)$满足一阶线性方程

$$W'(t) = -a_1(t)W(t)$$

因而有

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}, \quad t, t_0 \in [a, b] \tag{16}$$

齐次线性方程解空间的结构

例1

验证函数$x_1(t)=\cos t, x_2(t)=\sin t$是方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ 的两个线性无关解，并写出该方程的通解。

例2

设二阶齐次线性方程在区间$[a,b]$上的任意两个线性无关解组分别为

$$(x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t))\text{和}(x_1^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t))$$

证明：它们的Wronski行列式之比是一个不为零的常数。

4.2 高阶线性微分方程的一般理论

非齐次线性方程解集合的性质

定理4.8 如果$\bar{x}(t)$是非齐次线性方程(12)的解，$x(t)$是齐次线性方程(13)的解，则$\bar{x}(t)+x(t)$仍是非齐次线性方程(12)的解。

非齐次线性方程解集合的性质

定理4.9 如果$x_1(t), x_2(t)$是非齐次线性方程(12)的两个解，则$x_1(t)-x_2(t)$ 是对应的齐次线性方程(13)的解。

非齐次线性方程解集合的性质

定理4.10 设$x_1(t)$与$x_2(t)$分别是非齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_1(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_2(t)$$

的解，则$x_1(t) + x_2(t)$是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f_1(t) + f_2(t)$$

的解。

非齐次线性方程解集合的性质

定理4.11 设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$为方程(13)的基本解组，而$\bar{x}(t)$是方程(12)的某一解，则方程(12)的通解可表为

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \bar{x}(t) \tag{17}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$为任意常数，且此通解(17)包括了方程(12)的所有解。

非齐次线性方程解集合的性质

例3

设二阶非齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t)$$

有三个解$x_1(t)=t, x_2(t)=e^t, x_3(t)=e^{2t}$，求此方程满足初始条件$x(0)=1, x'(0)=3$的特解。

非齐次线性方程的常数变易法

设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程(13)的基本解组，因而

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$$

是方程(13)的通解。猜测方程(12)也是这种形式的解，但$c_1, c_2, \cdots, c_n$应为t的函数，即假设

$$x(t) = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + \cdots + c_n(t) x_n(t) \tag{18}$$

是方程(12)的解。为了求出待定函数$c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)$，将(18)代入方程(12)中，仅能得到所满足的一个条件。对(18)两边求导，得

$$\begin{aligned} x'(t) = & c_1(t) x_1'(t) + c_2(t) x_2'(t) + \cdots + c_n(t) x_n'(t) \\ & + c_1'(t) x_1(t) + c_2'(t) x_2(t) + \cdots + c_n'(t) x_n(t) \end{aligned}$$

非齐次线性方程的常数变易法

令

$$c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t)+\cdots+c_n'(t)x_n(t)=0 \tag{19}$$

得到

$$x'(t)=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t) \tag{20}$$

对上式两边继续求导，并像上面的做法一样，令含有$c_i'(t)$的部分为零，得

$$c_1'(t)x_1'(t)+c_2'(t)x_2'(t)+\cdots+c_n'(t)x_n'(t)=0 \tag{21}$$

和表达式

$$x''(t)=c_1(t)x_1''(t)+c_2(t)x_2''(t)+\cdots+c_n(t)x_n''(t) \tag{22}$$

继续上面的做法，直到获得第$n-1$个条件

$$c_1'(t)x_1^{(n-2)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-2)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-2)}(t)=0 \tag{23}$$

和表达式

非齐次线性方程的常数变易法

$$x^{(n-1)}(t)=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) \tag{24}$$

最后，对(24)两边再求导一次，得

$$\begin{aligned}x^{(n)}(t)=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)\\ +c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)\end{aligned} \tag{25}$$

将(18)-(25)全部代入方程(12)中，并注意$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是方程(13)的解，得到

$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t) \tag{26}$$

这n个未知函数$c_i'(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$同时满足(19),(21),(23)和(26)等共n个条件，这n个条件组成一个线性代数方程组，其系数行列式为$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$，因而方程组有唯一解，不妨设求得

非齐次线性方程的常数变易法

$$c_i'(t) = \phi_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

积分得

$$c_i(t) = \int \phi_i(t)dt + r_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

这里r_i是任意常数。将所得$c_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$的表达式代入(18)中，得方程(12)的通解

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \int \phi_i(t)dt$$

非齐次线性方程解集合的性质

例4

设非齐次线性方程$(t-1)\frac{d^2x}{dt^2}-t\frac{dx}{dt}+x=(t-1)^2$ 对应的齐次线性方程的通解为$x(t)=c_1t+c_2e^t$，求此方程的通解。

4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

复值函数

设$\phi(t)$和$\varphi(t)$是区间$[a,b]$上的实函数，称$z(t)=\phi(t)+i\varphi(t)$为该区间上的复值函数。

复指数函数

设$k=\alpha+i\beta$是任一复数，α,β,t是实数，定义如下的复指数函数

$$e^{kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

复值解

如果定义在区间$[a,b]$上的实变量复值函数$z(t)$满足方程(12)，即

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dz(t)}{dt}+a_n(t)z(t)\equiv f(t),\quad t\in[a,b]$$

称$z(t)$为方程(12)的复值解。

复值解的性质

定理4.12

如果方程(13)中所有系数$a_i(t)$都是实值函数，
而$z(t)=\phi(t)+i\varphi(t)$是该方程的复值解，则$z(t)$的实部$\phi(t)$和虚部$\varphi(t)$以及$z(t)$的共轭复数也都是方程(13)的解。

复值解的性质

定理4.13

如果方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = u(t) + iv(t)$$

有复值解x=U(t)+i V(t)，其中$a_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 及$u(t), v(t)$都是实函数，则这个解的实部$U(t)$和虚部$V(t)$分别是下面两个方程的解

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = v(t)$$

4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

n阶常系数齐次线性方程

设称方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \qquad (27)$$

为n阶常系数齐次线性方程，其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数。

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0;$

(2) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0;$

(3) $\dfrac{d^3y}{dt^3} - 6\dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$

4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

n阶常系数齐次线性方程

设称方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \tag{27}$$

为n阶常系数齐次线性方程，其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数。

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0;$

(2) $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0;$

(3) $\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 6y = 0$

分析：假设方程(27)存在指数函数形式的解

$$x = e^{\lambda t} \tag{28}$$

将(28)代入方程(27)中，得

$$L[e^{\lambda t}] \equiv (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda t} = 0$$

这意味着，$e^{\lambda t}$是方程(27)的解的充分必要条件为：λ是代数方程

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{29}$$

的根。

特征根是单根的情形

定理4.14 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是特征方程(29)的$n$个彼此互异的特征根，则

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \cdots,\ e^{\lambda_n t}$$

为方程(27)的一个基本解组。

特征根是单根的情形

注意

(1)特征根λ可能是实数，也可能是复数;
(2)如果$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$全为实数，则$e^{\lambda_i t}\ (i=1,2,\cdots,n)$为$n$个实值解，方程(27)的通解为

$$x(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$$

(3)如果$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$中有复数，不妨设$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则方程的基本解组为

$$e^{(\alpha+i\beta)t},\ e^{(\alpha-i\beta)t},\ e^{\lambda_3 t}\ \cdots,\ e^{\lambda_n t}$$

其中$e^{(\alpha+i\beta)t}$和$e^{(\alpha-i\beta)t}$都是复值解，取它们的实部和虚部得方程(27)的通解为

$$x(t)=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)+c_3e^{\lambda_3 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}$$

4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

例1

求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 0$的通解。

例2

求方程$\dfrac{d^4x}{dt^4} - x = 0$的通解。

特征根有重根的情形

定理4.15 设$\lambda_1 = 0$是方程(27)的k重特征根，则方程(27)有k个线性无关解

$$1,\ t,\ t^2, \cdots,\ t^{k-1}$$

特征根有重根的情形

定理4.16 设$\lambda_1 \neq 0$是方程(27)的k重特征根，则方程(27)有k个线性无关解

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \cdots,\ t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$$

4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

例3

求方程$\dfrac{d^3x}{dt^3} - 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - x = 0$的通解。

例4

求方程$\dfrac{d^4x}{dt^4} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$的通解。

4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

Euler方程

称方程

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{30}$$

为Euler方程，其中$a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$为常数。

Euler方程的算子解法

记$D = \frac{d}{dt}$，$D^k = \frac{d^k}{dt^k}$，于是有

$$x\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y - Dy = D(D-1)y$$

$$\cdots\cdots$$

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

于是方程(30)转化为

$$D^ny + b_1D^{n-1}y + \cdots + b_ny = 0$$

Euler方程

例5

求方程$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$的通解。

例6

求方程$x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}=0$的通解。

4.4 常系数非齐次线性方程的待定系数法

n阶常系数非齐次线性方程

称方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \tag{31}$$

为n阶常系数非齐次线性方程。其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数，$f(t)$是连续函数。

$f(t)$是多项式与指数函数乘积的情形

定理4.17 设$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$，其中$b_i\ (i=0,1,\cdots,m)$，$\lambda$为实常数。则方程(31)有特解

$$\tilde{x}(t)=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t} \tag{32}$$

其中$B_0,B_1,\cdots,B_m$为待定常数；k 由λ是否为特征根决定。当λ不是特征根时，$k=0$；当λ是特征根时，k为λ的重数。

例1

求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=3t+1$的通解。

例2

求方程$\dfrac{d^3x}{dt^3}-7\dfrac{d^2x}{dt^2}+16\dfrac{dx}{dt}-12x=-20t^3e^{2t}$的通解。

4.4 常系数非齐次线性方程的待定系数法

$f(t)$是多项式与指数函数、余弦函数（正弦函数）之积的情形

定理4.18 设$f(t) = A(t)\cos\beta t\cdot e^{\alpha t}$(或$f(t) = B(t)\sin\beta t\cdot e^{\alpha t}$)，其中$A(t)(B(t))$是实系数$m$次多项式，则方程(31)有特解

$$\tilde{x}(t) = t^k(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)e^{\alpha t} \tag{33}$$

其中$P(t), Q(t)$均为待定的实系数多项式，一个次数为m，另一个次数不超过m，k由$\alpha + i\beta$ 是否为特征根决定。

例3

求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 2\sin t$的通解。

4.4 常系数非齐次线性方程的待定系数法

$f(t)$是多项式与指数函数及正、余弦函数之积的情形

定理4.19 设$f(t)=(A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$，其中$A(t),B(t)$是实系数多项式，一个次数为$m$，另一个次数不超过$m$。则方程(31)有特解

$$\tilde{x}(t)=t^k(P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

其中$P(t),Q(t)$均为待定的实系数多项式，一个次数为m，另一个次数不超过m，k由$\alpha+i\beta$是否为特征根决定。

例4

求方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-2x=(\cos t-7\sin t)e^{-t}$的通解。

4.5 应用实例

交通管理色灯中，黄灯应亮多长时间

在交通管理中，定期地亮一段时间黄灯是为了让那些正行驶在交叉路口上或距交叉路口太近以致无法停下的车辆通过路口。

驶近交叉路口的驾驶员，在看到黄色信号后要作出决定：是停车还是通过路口。如果他以法定速度(或低于法定速度)行驶，当决定停车时，他必须有足够的停车距离。当决定通过路口时，他必须有足够的时间使他能够完全通过路口，这包括作出停车决定的时间，以及通过停车所需的最短距离的驾驶时间。

于是，黄灯状态应持续的时间包括驾驶员的反应时间、他通过交叉路口的时间以及停车所需的时间。如果法定速度为v_0，交叉路口的宽度为I，典型的车身长度为L，那么，通过路口的时间为$(I+L)/v_0$。试计算刹车距离。

放射性废物的处理问题

一段时间，美国原子能委员会(现为核管理委员会)是这样处理浓缩放射性废物的，它们把这些废物装在密封性能很好的圆桶中，然后扔到水深约300$ft(1ft = 0.3038)$的海里。这种做法是否会造成放射性污染，很自然地引起了生态学家及社会各界的关注。原子能委员会一再保证，圆桶非常坚固，决不会破漏，这种做法是绝对安全的。然而一些工程师们却对此表示怀疑，他们认为圆桶在和海底相撞时有可能发生破裂。而原子能委员会有些专家们仍然坚持自己的看法。问题的关键在于圆桶到底能承受多大速度的碰撞，圆桶和海底碰撞时的速度有多大？试建立圆桶下沉时应满足微分方程，并求解。