上海财经大学《 常微分方程 》模拟试卷三答案

一.

1. $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ $\frac{1}{g(y)}$

2. a_1x+b_1y

3.连续，且关于 y 满足 Lipschitz 条件

4. $(-\infty,+\infty)$

5. $e^{\lambda t},te^{\lambda t},\cdots$

6. $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots$ $t)+x^*(t)$

7. 存在非奇异常数矩阵，使得 $\Phi(t)=\Psi(t)C$

8. $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

二．1.B 2. B 3. C 4.C 5. A

三.

1.解：

$$p(x)=\frac{1}{x-2} \quad q(x)=2(x-2)^2$$

$$y=ce^{\int p(x)dx}+ce^{\int p(x)dx}\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$=(x-2)(c+x^2-4x)$$

2.解：

$$M = e^x + 3y^2, \quad N = 2xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2}{x} \quad \mu(x) = x^2$$

通解为$(x^2 - 2x + 2)e^x + x^3 y^2 = c$

3.对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \quad \lambda_1 = a, \lambda_2 = -a$$

（1）若$a \neq 0$，方程有特解$x^* = At + B$代入方程，知道$A = -\frac{1}{a^2} = B$

方程通解为$x = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} - \frac{1}{a^2}(t+1)$

（2）若$a = 0$，方程为$x'' = t + 1$积分两次，得$x = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2$，

方程通解为$x = c_1 + c_2 t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2$

四．解：

系数矩阵的特征方程为$\left|\lambda E - A\right| = -(\lambda+4)(\lambda+1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = -4, \lambda_{2,3} = -1$

相应于$\lambda_1 = -4$的特征向量为$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

相应于$\lambda_{2,3} = -1$，可以计算 $(A+E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$，因此$(A+E)^2 R_0 = 0$有两

个线性无关解$\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\9\\-1\end{pmatrix}$，于是$(A+E)R_0=R_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\0\\3\end{pmatrix}$

方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}0 & 3e^{-t} & 9te^{-t}\\ 0 & 0 & 9e^{-t}\\ e^{-4t} & e^{-t} & (-1+3t)e^{-t}\end{bmatrix}$$

五． 解：

$$f(x,y)=x-y^2$$
$$\phi_0=0$$
$$\phi_1=\int_1^x xdx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$$
$$\phi_2=\int_1^x x-(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2})^2dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{6}-\frac{1}{4}x-\frac{11}{30}$$

六． 证明：根据刘维尔公式，

$$W(t)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}=0$$

则x_1,x_2线性相关，存在不全为零的常数c_1,c_2，使得$c_1x_1+c_2x_2\equiv 0$，由题意知，x_1不恒为零，则$c_2=0$，即有$x_2=cx_1$。