常微分方程

第七章　一阶线性偏微分方程

上海财经大学应用数学系

April 19, 2010

基本概念 I

我们将由未知函数$u(x_1, x_2, \cdots, x_n)(n \geq 2)$及其一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$构成的关系式

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1}$$

称为**一阶偏微分方程**。

若F关于$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$是线性的（一次的），

$$a_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2}$$

则称其为一阶线性偏微分方程;

基本概念I

我们将由未知函数$u(x_1, x_2, \cdots, x_n)(n \geq 2)$及其一阶偏导数$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$构成的关系式

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1}$$

称为**一阶偏微分方程**。

若F关于$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$是线性的（一次的），

$$a_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2}$$

则称其为**一阶线性偏微分方程**;

基本概念II

特别，若上式中的$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 0$，即

$$a_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (3)$$

则称其为**一阶线性齐次偏微分方程**。本章所讨论的一阶线性齐次偏微分方程特指(3)中的$a_0(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 0$的情形。
称不是线性的偏微分方程为**非线性偏微分方程**。若非线性偏微分方程关于其最高阶偏导数是线性的，则称它是**拟线性偏微分方程**。本章仅限讨论如下的一阶拟线性偏微分方程。

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_j} = Z(x_1, x_2, \cdots, x_n; z)$$

其中函数a_i, f, b_j, Z是相应变元的已知函数。

基本概念II

特别，若上式中的$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 0$，即

$$a_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (3)$$

则称其为**一阶线性齐次偏微分方程**。本章所讨论的一阶线性齐次偏微分方程特指(3)中的$a_0(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 0$的情形。
称不是线性的偏微分方程为**非线性偏微分方程**。若非线性偏微分方程关于其最高阶偏导数是线性的，则称它是**拟线性偏微分方程**。本章仅限讨论如下的一阶拟线性偏微分方程。

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_j} = Z(x_1, x_2, \cdots, x_n; z)$$

其中函数a_i, f, b_j, Z是相应变元的已知函数。

基本概念 III

如果把空间$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$内的某一区域$D$内有定义的连续可微函数$u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$代入方程(1)中得到恒等式

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \equiv 0$$

则称$u = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是偏微分方程(1)的一个**解**，而$D$是该解的**定义域**。

积分曲面

对于一阶偏微分方程(1)，当$n=2$时，其一般形式可以写为

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \tag{4}$$

若$z=\varphi(x,y),(x,y)\in\mathcal{D}$是它的解，那么我们称三维空间$(x,y,z)$中的曲面$z=\varphi(x,y)$为方程(4)的**积分曲面**。更一般的，对于方程(1)的解$u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以抽象地看成$n+1$维空间$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,u\}$内的一张曲面，因此也称为偏微分方程(1)的积分曲面。

含有n个未知函数的一阶常微分方程组

考虑含有n个未知函数的一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{5}$$

首次积分

定义7.1（首次积分的定义）

如果存在不恒为零的连续可微函数$\varphi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$，使得方程组(5)（在某个区域$G$内）的任一解都满足:

$$\mathrm{d}\varphi(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)) = 0$$

则关系式

$$\varphi(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)) = c \tag{6}$$

称为方程组(5)的一个**首次积分**。有时也称φ为方程组(5)的一个首次积分。

n个彼此独立的首次积分

方程组(5)的n个首次积分$\varphi_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$称为是彼此独立的，如果Jacobi行列式

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \det(J) \tag{7}$$

在G内恒不为0。我们也可以用Jacobi矩阵J的秩为n来定义$\varphi_j (j = 1, 2, \cdots, n)$的独立性。

一阶常微分方程与一阶线性偏微分方程

对于$n=1$的情形，常微分方程组(5)退化为一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{8}$$

假设其通解为$y=\psi(x,c)$，从中解得$\varphi(x,y)=c$。那么，这就是方程(8)的首次积分。用方程(8)的任一解$y(x)$代入，可得

$$\varphi(x,y(x))=c$$

于是

$$\mathrm{d}\varphi(x,y(x))=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \text{ 或 } \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}f(x,y)=0$$

这说明$u=\varphi(x,y)$是一阶齐次线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{9}$$

的解。

一阶常微分方程与一阶线性偏微分方程

反之，将方程(8)的任一解$y(x)$代入方程(9)的解$u=u(x,y)$中，再关于x求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

即

$$u(x,y(x))=\text{常数}$$

这说明$u(x,y)=c$是方程(8)的首次积分。

对于$n>1$的一般情况，也有以下同样的结论。

定理7.1

$\psi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c$是方程组(5)的首次积分的充要条件是在$G$内成立

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+f_2\frac{\partial\psi}{\partial y_2}+\cdots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial y_n}=0 \tag{10}$$

线性常微分方程组解的存在唯一性

为了证明定理7.1，要用到以下线性常微分方程组解的存在唯一性定理。

定理7.2（线性常微分方程组解的存在唯一性定理）

如果$\boldsymbol{A}(t)$是$n\times n$矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$是n维列向量，它们都在区间$a\leq t\leq b$上连续，则对于区间$a\leq t\leq b$上的任何数t_0以及任一常数n维列向量$\boldsymbol{\eta}$，方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{11}$$

存在唯一解$\boldsymbol{\phi}(t)$，定义于整个区间$a\leq t\leq b$上，且满足初始条件

$$\boldsymbol{\phi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$$

线性常微分方程组解的存在唯一性

为了证明定理7.1，要用到以下线性常微分方程组解的存在唯一性定理。

定理7.2（线性常微分方程组解的存在唯一性定理）

如果$\boldsymbol{A}(t)$是$n\times n$矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$是n维列向量，它们都在区间$a\le t\le b$上连续，则对于区间$a\le t\le b$上的任何数t_0以及任一常数n维列向量$\boldsymbol{\eta}$，方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{11}$$

存在唯一解$\boldsymbol{\phi}(t)$，定义于整个区间$a\le t\le b$上，且满足初始条件

$$\boldsymbol{\phi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$$

定义 7.2（通积分的定义）

称方程组(5)的n个互相独立的首次积分全体$\varphi_j(x, y_1, \cdots, y_n) = c_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$为方程组(5)的**通积分**。

求解方程组(5)的问题就归结为寻求它的通积分。

一种寻找首次积分的方法

将方程组(5)改写为如下的对称形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{g_0} = \frac{\mathrm{d}y_1}{g_1} = \frac{\mathrm{d}y_2}{g_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}y_n}{g_n}$$

其中，$g_j = g_0 f_j (j = 1, 2, \cdots, n)$。
如果能求得$n + 1$个不同时为零的函数$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$使得

(1) $\mu_0 g_0 + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n = 0$;

(2) $\mu_0 \mathrm{d}x + \mu_1 \mathrm{d}y_1 + \cdots + \mu_n \mathrm{d}y_n$是某个函数$\varphi$的全微分，
则$\varphi = c$就是方程的一个首次积分。

两个例题

例 1

求方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}$$

的通积分。

例 2

解方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

两个例题

例 1

求方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}z}{xy}$$

的通积分。

例 2

解方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

一阶齐次线性偏微分方程的求解

定义 7.3（特征方程的定义）

形如

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{12}$$

的一阶齐次线性偏微分方程，假定其系数$X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在给定点$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \cdots, x_n^{(0)})$的某个邻域$D$中连续可微且不同时为零。构造如下形式的一阶常微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{13}$$

我们称(13)为偏微分方程(12)的**特征方程**。

一阶齐次线性偏微分方程的通解的结构

定理 7.3（一阶齐次线性偏微分方程通解的结构定理）

设$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$是方程(13)的通积分，则方程(12)的通解可以表示为

$$u = \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) \tag{14}$$

其中Ψ是其变量的任意连续可微函数。

注

由于定理7.3是在某点领域内成立，故是局部的，因此偏微分方程(12)的通解表达式在理论上也是局部成立的。

一阶齐次线性偏微分方程的通解的结构

定理 7.3（一阶齐次线性偏微分方程通解的结构定理）

设$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$是方程(13)的通积分，则方程(12)的通解可以表示为

$$u = \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) \tag{14}$$

其中Ψ是其变量的任意连续可微函数。

注

由于定理7.3是在某点领域内成立，故是局部的，因此偏微分方程(12)的通解表达式在理论上也是局部成立的。

偏微分方程只有两个自变量的情形

对于偏微分方程(12)只有两个自变量的情形，

$$
\begin{cases}
P(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad x_0<x<\infty,-\infty<y<\infty \\
u|_{x=x_0}=\varphi(y), \quad -\infty<y<\infty
\end{cases}
\tag{15}
$$

具体说明其求解过程。

例题

例3

求方程

$$x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

通过曲线$x=0, u=y^2$的积分曲面。

例4

求解如下偏微分方程

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

其中，$x_1\neq 0$。

例题

例3

求方程

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

通过曲线$x = 0, u = y^2$的积分曲面。

例4

求解如下偏微分方程

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

其中，$x_1 \neq 0$。

一阶拟线性偏微分方程的求解

以下讨论如下的一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, \cdots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} + Z(x_1, \cdots, x_n, z) = 0 \tag{16}$$

考虑到记号使用的方便，我们仅研究$n = 2$时的理论结果，即

$$a(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = Z(x, y, z) \tag{17}$$

其中，函数$a(x, y, z)$，$b(x, y, z)$，$Z(x, y, z)$关于$(x, y, z) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$连续可微，并且$a, b$不同时为零。

两个自变量的一阶拟线性偏微分方程的求解

假设(17)的解$z=u(x,y)$表为隐函数形式

$$F(x,y,z)=0$$

那么根据隐函数求导公式易得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

代入(17)可得

$$a(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial y}+Z(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{18}$$

两个自变量的一阶拟线性偏微分方程的求解...

以上推导结果表明：如果$F(x, y, z) = 0$是拟线性方程(17)的隐式解，那么函数$F = F(x, y, z)$就是一阶齐次线性偏微分方程(18)的显式解。以下需要解决能否利用偏微分方程(18)的通解来确定拟线性偏微分方程(17)的通解。

利用偏微分方程(18)的通解确定拟线性偏微分方程(17)的通解

设

$$\varphi(x, y, z) = c_1, \qquad \psi(x, y, z) = c_2$$

是方程(18)的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{\mathrm{d}y}{b} = \frac{\mathrm{d}z}{Z} \tag{19}$$

的两个互相独立的首次积分。那么根据定理7.3，方程(18)的通解可以表示为

$$F = \Phi\Big(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)\Big)$$

其中Φ是关于其自变量的任意连续可微二元函数。

利用偏微分方程(18)的通解确定拟线性偏微分方程(17)的通解

- 以下首先说明当$\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\neq 0$时，由

$$\Phi\Big(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z)\Big)=0$$

所确定的隐函数$z=z(x,y)$的确是方程(17)的解。

- 进一步证明：对于偏微分方程(17)的任何一个解$z=\zeta(x,y)$，总存在二元函数Ψ，使得

$$\Psi\left[\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big),\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)\right]\equiv 0$$

这里，φ,ψ是特征方程(19)的互相独立的首次积分。这里，我们通过说明$\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)$和$\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)$是相关的来给出证明。

利用偏微分方程(18)的通解确定拟线性偏微分方程(17)的通解

- 以下首先说明当$\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\neq 0$时，由

$$\Phi\Big(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z)\Big)=0$$

所确定的隐函数$z=z(x,y)$的确是方程(17)的解。

- 进一步证明：对于偏微分方程(17)的任何一个解$z=\zeta(x,y)$，总存在二元函数Ψ，使得

$$\Psi\left[\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big),\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)\right]\equiv 0$$

这里，φ,ψ是特征方程(19)的互相独立的首次积分。这里，我们通过说明$\varphi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)$和$\psi\Big(x,y,\zeta(x,y)\Big)$是相关的来给出证明。

一阶拟线性偏微分方程的通解的结构

定理7.4（一阶拟线性偏微分方程通解的结构定理）

设$\varphi_i(x_1,\cdots,x_n;z)=c_i(i=1,2,\cdots,n)$是常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{b_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{b_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{b_n}=-\frac{\mathrm{d}z}{Z} \tag{20}$$

的n个互相独立的首次积分，Φ是关于其自变量任意连续可微的n元函数。如果从

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=0 \tag{21}$$

可以确定函数$z=z(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，那么(21)即为一阶拟线性偏微分方程(16)的（隐式）通解。

例题

例5

求如下初值问题

$$\begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x} + (y+x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = z \\ z(x,y)|_{x=2} = y-4 \end{cases}$$

例6

求解拟线性偏微分方程$y\frac{\partial z}{\partial x} = z$。

例7

求解如下拟线性偏微分方程

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = \omega z$$

其中，ω为大于零的正整数，$x_1 \neq 0$。

例题

例5

求如下初值问题

$$\begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = z \\ z(x,y)|_{x=2} = y - 4 \end{cases}$$

例6

求解拟线性偏微分方程$y\frac{\partial z}{\partial x} = z$。

例7

求解如下拟线性偏微分方程

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = \omega z$$

其中，ω为大于零的正整数，$x_1 \neq 0$。

例题

例5

求如下初值问题

$$\begin{cases} x\frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = z \\ z(x,y)|_{x=2} = y - 4 \end{cases}$$

例6

求解拟线性偏微分方程$y\frac{\partial z}{\partial x} = z$。

例7

求解如下拟线性偏微分方程

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = \omega z$$

其中，ω为大于零的正整数，$x_1 \neq 0$。

特征曲线和特征曲面

考虑三维空间中的一个连续向量场

$$\boldsymbol{v}=\Big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\Big)$$

任意给定区域D中的一点(x,y,z)，便得到一个确定的方向。

- 如果空间的一条曲线l上每一点(x,y,z)的切向量$\boldsymbol{\tau}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$与该点的场向量$\boldsymbol{v}\Big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\Big)$共线，则称该曲线$l$为特征曲线。
- 由$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{v}$共线可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=\frac{\mathrm{d}z}{R} \tag{22}$$

因此特征曲线l由微分方程(22)决定。由特征曲线组成的曲面称为特征曲面

特征曲线和特征曲面

考虑三维空间中的一个连续向量场

$$\boldsymbol{v} = \Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$$

任意给定区域D中的一点(x,y,z)，便得到一个确定的方向。

- 如果空间的一条曲线l上每一点(x,y,z)的切向量$\boldsymbol{\tau} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$与该点的场向量$\boldsymbol{v}\Big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\Big)$共线，则称该曲线$l$为**特征曲线**。
- 由$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{v}$共线可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R} \tag{22}$$

因此特征曲线l由微分方程(22)决定。由特征曲线组成的曲面称为**特征曲面**

一些结果

若记特征曲面上任一点处的法向量为$\boldsymbol{n}$，那么在该点，$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{v}$一定正交，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{23}$$

然后我们有以下结果

- 当特征曲面的方程为显式$z=z(x,y)$时，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$，从而根据(23)有

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R \tag{24}$$

- 当特征曲面的方程为隐式$u(x,y,z)=0$时，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$，同样根据(23)有

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{25}$$

一些结果

若记特征曲面上任一点处的法向量为$\boldsymbol{n}$，那么在该点，$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{v}$一定正交，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{23}$$

然后我们有以下结果

- 当特征曲面的方程为显式$z=z(x,y)$时，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$，从而根据(23)有

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R \tag{24}$$

- 当特征曲面的方程为隐式$u(x,y,z)=0$时，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$，同样根据(23)有

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{25}$$

一些结果

若记特征曲面上任一点处的法向量为$\boldsymbol{n}$，那么在该点，$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{v}$一定正交，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{23}$$

然后我们有以下结果

- 当特征曲面的方程为显式$z=z(x,y)$时，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$，从而根据(23)有

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R \tag{24}$$

- 当特征曲面的方程为隐式$u(x,y,z)=0$时，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$，同样根据(23)有

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{25}$$

一阶线性（拟线性）偏微分方程求解的几何解释

在本章一开始，就已经介绍了积分曲面的概念。即一阶线性（拟线性）偏微分方程的解可以想象成n维空间中的一张曲面。从(24)和(25)来看，一阶线性（拟线性）偏微分方程的解（积分曲面）就是特征曲面，记为π。那么现在就可以给出一阶线性（拟线性）偏微分方程求解的几何解释了：一阶线性（拟线性）偏微分方程（(24)，(25)）的解（积分曲面）是特征曲面，它是由特征曲线组成的。而特征曲线可以由常微分方程组（特征方程）(22)决定。这样，一阶线性（拟线性）偏微分方程的求解问题就归结为常微分方程组的求解问题了。这与前面所给的结论是完全一致的。

Cauchy问题

Cauchy问题

给定一条光滑曲线

$$\Gamma : x = \alpha(\sigma), \quad y = \beta(\sigma), \quad z = \zeta(\sigma), \quad \sigma \in \mathcal{I}$$

其中σ为曲线的参数坐标，确定拟线性偏微分方程(25)的一张积分曲面$\pi : z = f(x, y)$，使之包含给定曲线Γ，即成立

$$\zeta(\sigma) = f[\alpha(\sigma), \beta(\sigma)]$$

这里$\alpha'(\sigma), \beta'(\sigma), \zeta'(\sigma)$都是连续的，并且$\alpha'^2(\sigma) + \beta'^2(\sigma) \neq 0$。

注

必须指出，对于某些曲线（如特征曲线）Cauchy问题是不确定的，因为对一条特征曲线，可以有无穷多个特征曲面经过它；而对于另外一些曲线，Cauchy问题甚至没有解存在。

Cauchy问题

Cauchy问题

给定一条光滑曲线

$$\Gamma : x = \alpha(\sigma), \quad y = \beta(\sigma), \quad z = \zeta(\sigma), \quad \sigma \in \mathcal{I}$$

其中σ为曲线的参数坐标，确定拟线性偏微分方程(25)的一张积分曲面$\pi : z = f(x, y)$，使之包含给定曲线Γ，即成立

$$\zeta(\sigma) = f[\alpha(\sigma), \beta(\sigma)]$$

这里$\alpha'(\sigma), \beta'(\sigma), \zeta'(\sigma)$都是连续的，并且${\alpha'}^2(\sigma) + {\beta'}^2(\sigma) \neq 0$。

注

必须指出，对于某些曲线（如特征曲线）Cauchy问题是不确定的，因为对一条特征曲线，可以有无穷多个特征曲面经过它；而对于另外一些曲线，Cauchy问题甚至没有解存在。

Cauchy问题解的情况

定理 7.5

对于一阶拟线性偏微分方程(25)的上述Cauchy问题，

(1) 如果成立 $\frac{\alpha'(\sigma)}{\beta'(\sigma)} \neq \frac{P\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}{Q\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}$，那么上述Cauchy问题有惟一解；

(2) 如果曲线Γ是特征曲线，即成立

$$\frac{\alpha'(\sigma)}{P\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)} = \frac{\beta'(\sigma)}{Q\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)} = \frac{\zeta'(\sigma)}{R\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}$$

那么上述Cauchy问题的解不惟一；

(3) 如果曲线Γ不是特征曲线，但成立 $\frac{\alpha'(\sigma)}{\beta'(\sigma)} \equiv \frac{P\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}{Q\Big(\alpha(\sigma),\beta(\sigma),\zeta(\sigma)\Big)}$，那么上述Cauchy问题无解。

例题

例1

求偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

的积分曲面，使得它通过初始曲线

$$\Gamma: \quad x = t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t^2, \qquad (t > 0)$$

例2

确定偏微分方程

$$y\frac{z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

过曲线$\Gamma: z = x, x^2 + y^2 = 1$的积分曲面。

例题

例1

求偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

的积分曲面，使得它通过初始曲线

$$\Gamma: \quad x = t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t^2, \qquad (t > 0)$$

例2

确定偏微分方程

$$y\frac{z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

过曲线$\Gamma: z = x, x^2 + y^2 = 1$的积分曲面。