天文計算入門

京都大学　某

完成 2023 年 10 月 15 日
最終更新 2023 年 12 月 25 日

1　内容

- 座標の取り方を理解する
- 太陽や恒星, 惑星の出入りの時刻を計算する
- 惑星や小惑星がある時刻にどの位置にあるのか, どの方向に見えるのかを計算する．別の惑星を観測地点にすることもできる

2　座標系

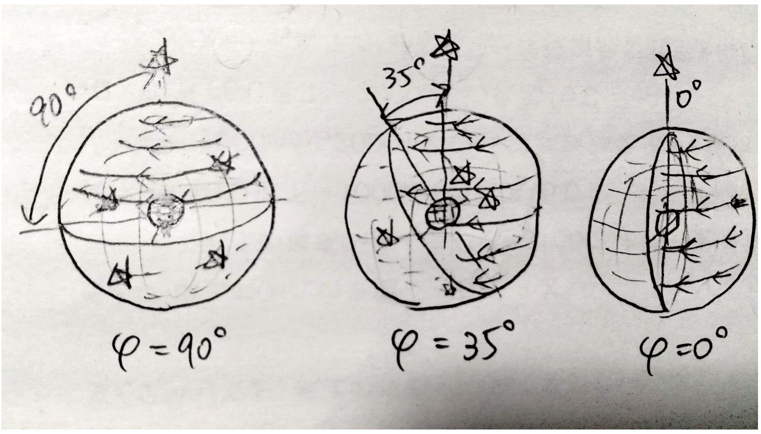

図 1　緯度によって星の見え方が違う

地球は北極から見て反時計回りに自転している．相対的に, 地上の観測者から見ると天球は東から西に回転しているように見える (図 1)．北極では全天の半数の星しか見えないが, 見える星はすべて昇りも沈みもせずに同じ高度をぐるぐる回り続ける．赤道ではすべての星が見え, 垂直に昇り垂直に沈む．北極星の高度は緯度 φ（北緯が正, 以下同様）に等しい．

星の位置を表す方法のひとつが, **方位角** A と**高度** h による**地平座標系**である．方位角は, ここでは真北を 0 とし東, 南, 西の向きに測ることとする．例えば真西の 45° 見上げた位置は $A = 270°, h = 45°$ である．時間がたつと日周運動のために星の方位角と高度は変化する．

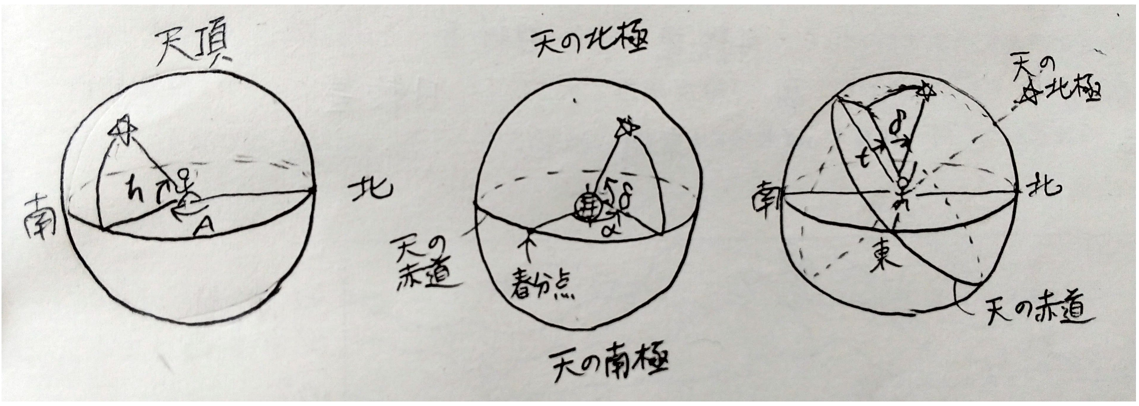

図 2　地平座標, 赤道座標, 時角を使った座標

地上の位置を表す緯度経度と同じように恒星に対して (ほぼ) 固定された座標系として, **赤緯** (Dec.)δ と **赤経** (R.A.)α を用いる**赤道座標系**がある．北極, 南極, 赤道をそのまま天球に広げたのが**天の北極**, **天の南極**, **天の赤道**である．赤緯は $-90^\circ \sim +90^\circ$ で表し, 60 進法の度分秒 $(0^\circ 0' 0'')$ を用いる．赤経は天の赤道上にある**春分点**という点を基準に東経と同じ向きに測り, 時刻と同じように時分秒 (0h 0m 0s) で 0h ～ 24h で表す．春分点はだいたいうお座の方向で, 今の時期は海王星が春分点のすぐ近くに見えている．赤緯を含め一般に言われる１分 (角) や１秒 (角) と赤経の１分や１秒は異なることに注意．例えばベガの位置は 18h 37m 43.9s, $\delta = 38^\circ 48' 34''$ と表される．下の表で換算できる．

表 1　角度の単位換算

1°	$=$	$4\,\mathrm{m}$	$1\,\mathrm{h}$	$=$	15°
$1' = \frac{1}{60}{}^\circ$	$=$	$4\,\mathrm{s}$	$1\,\mathrm{m}$	$=$	$15' = \frac{1}{4}{}^\circ$
$1'' = \frac{1}{60}{}' = \frac{1}{3600}{}^\circ$	$=$	$\frac{1}{15}\,\mathrm{s}$	$1\,\mathrm{s}$	$=$	$15'' = \frac{1}{4}{}' = \frac{1}{240}{}^\circ$

星図に使われるのもこの赤道座標系である．赤経や赤緯の線を意識してみると, 星空を見たときに星座を見つけやすくなると思う．

ある観測地点で星がどの向きに見えるかを計算するために, 赤経の代わりに**時角** t を用いることもある．時角の目盛り線は赤経と同様だが, 天体が真南にあるときが 0 で, 日周運動の向きを正とする．例えば地平線上の真東の点は $\delta = 0^\circ, t = -90^\circ$ である．

地平座標と赤緯と時角で表した座標とを変換する公式を導こう．図 3 のように軸をとると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ -\cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\delta\cos t \\ \cos\delta\sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

北極星と天頂との角距離は $\frac{\pi}{2} - \varphi$(北緯が正) に等しいから, 地平座標から赤緯と時角で表した座標への変

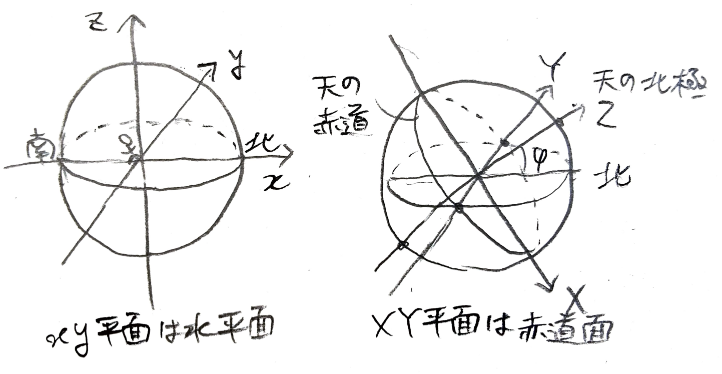

図 3　直交座標の取り方. 球の半径は 1 と考える

換は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} -\cos\delta\cos t \\ \cos\delta\sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ -\cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \tag{3}$$

より

$$\begin{cases} \cos\delta\cos t = \cos\varphi\sin h - \sin\varphi\cos h\cos A \\ \cos\delta\sin t = -\cos h\sin A \\ \sin\delta \qquad = \sin\varphi\sin h + \cos\varphi\cos h\cos A \end{cases} \tag{4}$$

赤緯と時角で表した座標から地平座標への変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) & 0 & -\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) & 0 & \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ -\cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\delta\cos t \\ \cos\delta\sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{6}$$

より

$$\begin{cases} \cos h\cos A = \cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos t \\ \cos h\sin A = -\cos\delta\sin t \\ \sin h \qquad = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \end{cases} \tag{7}$$

(7) 式の右辺に出てくる 3 つの値がわかれば, $\tan A = (\cos h\sin A)/(\cos h\cos A)$ と上の 2 式の符号 ($\cos h \geq 0$ に注意) から A と h の値が求められる. (4) 式も同様. 換算の実例は位置推算の章で出てくる.

ところで星座早見は, 星や星座線が書かれている下側の板と, まるい窓があって目盛りがついている上側の板を組み合わせてできているが, 下側の板は星を極座標で中心からの距離が ($90°-$ 赤緯), 偏角が $(-1)\times$ 赤経の位置にプロットすればよく, さらに (4) 式を使えば目盛り線も描くことができる. 私は 2020 年の長い長い

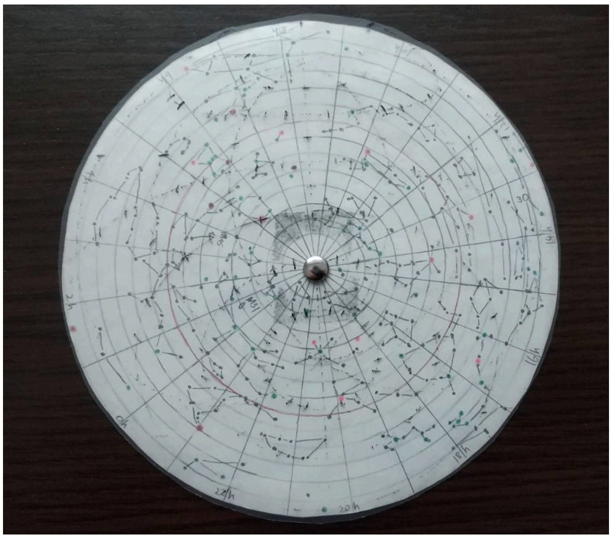

図 4　自作星座早見

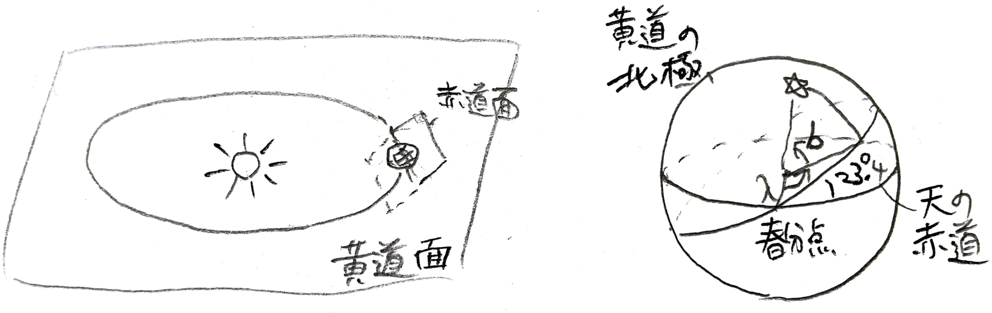

図 5　黄道面と黄道座標系

春休みにそうやって星座早見を作りました．それより後ですがこんなのも作ったので遊んでみてください→ `https://www.desmos.com/calculator/uqecjvjqxa?lang=ja`

地球の公転軌道面 (公転軌道を含む平面．太陽もこの平面上にある) を**黄道面**という．地球は太陽の回りを公転しているが, 地球から見ると太陽は天球上のある大円上を動いているように見える．この軌跡を**黄道**という．黄道も天の赤道も, 太陽と地球がともに中心にあるとみなせるほど遠い遠いところに張り付いているイメージ．春分点は黄道が赤道を南から北に横切る交点の方向として定義される．赤道座標系の天の赤道を黄道に置き換えたような**黄道座標系**もあり, **黄経** λ と**黄緯** b を用い, 黄経は春分点から赤経と同じ向きに測る．たとえば, 夏至のときの太陽の黄経は 90°, 黄緯は 0° である．以降のすべての λ は黄経ではなく経度 (東経) を表す．

3　恒星時

春分点の時角を**恒星時** θ という．ある地点, 時刻での赤経 α の天体の時角を t とすると $t = \theta - \alpha$ である．この恒星時は経度によってことなるので, その地点での地方恒星時ともいい, それに対して経度 0° での恒星

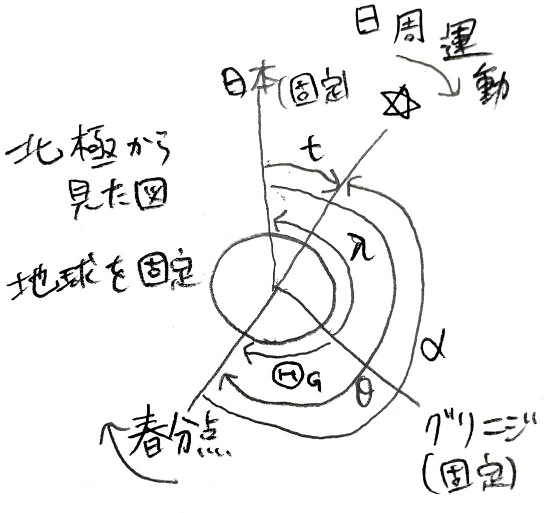

図 6　恒星時, 時角, 赤経, 経度の関係

時を**グリニジ恒星時** Θ_{G} という．経度を λ(東経が正, 以下同様) とすると, $\theta = \Theta_{\mathrm{G}} + \lambda$ の関係がある．日周運動 (というか地球の自転) によって, 恒星の時角や恒星時は 1 日に 360°.9856 のペースで増加する．ある日の世界時 (UT. 日本標準時 JST から 9 時間引いた協定世界時 UTC とまったく同じと考えてよい)0 時のグリニジ恒星時を Θ_{G0} とすると, 0 時から d 日 (例えば 9 時なら $d = 0.375$) たったときのグリニジ恒星時は $\Theta_{\mathrm{G}} = \Theta_{\mathrm{G0}} + 360^\circ.9856d$ で求められる．360°.9856/day の 0°.9856/day には地球の公転が絡んでいる．「恒星日」で検索してください．

以上より,

$$d = \frac{t + \alpha - \lambda - \Theta_{\mathrm{G0}}}{360^\circ.9856} \tag{8}$$

が成り立つ．t は今後計算する．α と Θ_{G0} は『理科年表』や『天文年鑑』, 国立天文台暦計算室のウェブサイトの暦象年表というページから調べられるが, Θ_{G0} と太陽系の天体の赤経 α はのちに説明する方法で計算することもできる．経度 λ は調べればわかる．

- 国立天文台暦計算室 暦象年表 グリニジ恒星時:
  `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/gst.cgi`
- 同 恒星の位置 (赤経・赤緯):
  `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/stars_rhip.cgi`
- 同 太陽の位置: `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/sun.cgi`
- 同 惑星の位置: `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/planet.cgi`
- 同 月の位置: `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/moon.cgi`
- NASA Horizons System (太陽系の天体の位置): `https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html`

4　天体の出没, 特に日の出・日の入り

まずは恒星や惑星のおよその出没時刻を求めよう. (7) 式の 3 つめの式に高度 $h=0$ を代入すると

$$\cos t = -\tan\varphi\tan\delta \tag{9}$$

を得る. 下のデータから 2023 年 10 月 13 日の京都 ($\varphi = 35^\circ.02, \lambda = 135^\circ.75$) における木星の入り・出の時刻を求めよう (電卓の角度を deg にする！　rad になっていると頓珍漢な答えになる).

2023 年 10 月 13 日世界時 0 時のグリニジ恒星時 $\Theta_{\mathrm{G0}} = 1\mathrm{h}\,25\mathrm{m}\,12\mathrm{s} = 21^\circ.30$

木星の位置 (動かないとして扱う):

$$\begin{cases}\alpha = 2\mathrm{h}\,44\mathrm{m}\,53\mathrm{s} = 41^\circ.22\\ \delta = 14^\circ 27.6' = 14^\circ.16\end{cases} \tag{10}$$

φ と δ を (9) 式に代入すると $t = \pm 100^\circ.18$ を得る. 時角は西に進む向きが正なので, 負が出に, 正が入りに対応する. まず出の時刻を求める. (8) 式に $t = -100^\circ.18, \alpha = 41^\circ.22, \lambda = 135^\circ.78, \Theta_{\mathrm{G0}} = 21^\circ.30$ を代入すると $d = -0.59839$ となるが, 日本標準時 13 日は世界時-9 時から 15 時 ($-0.375 \le d < 0.625$) なので不適. (9) 式の分子は角度だから 360° を足したり引いたりしてもよいので, 今回は足すと $d = 0.39888$ となる. $0.39888 \times 24 = 9.57312, 0.57312 \times 60 \fallingdotseq 34$ より, 木星の出は世界時 9 時 34 分, 日本標準時では 18 時 34 分と求められた. 入りも計算過程は同じなのでやってみよう. $d = -0.04335$, 世界時で前日の 22 時 58 分, 日本標準時では 13 日 7 時 58 分と求められる.

この調子で日の出や日の入りの時刻も求め・・・られない. そればかりか, 上の結果を

- 国立天文台暦計算室 暦象年表 太陽系天体の出入りと南中:
  `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/riseset.cgi`

と比べると, 5 分ほどずれている.

ずれた理由を考えるのはあとにして, 日の出・日の入りの時刻を求めよう. そもそも日の出・日の入りの定義は何か？　それは太陽が「見かけ上」図 7 のような位置に来ることである. そのためには以下の点を考慮する必要がある.

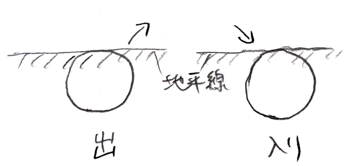

図 7　日の出・日の入りの定義

1. 太陽の半径
   太陽の上端が地平線上にあるとき, その中心は半径の分だけ低いところにある. その大きさは $0^\circ.27$. 厳密には太陽が近い冬には大きく, 遠い夏には小さくなるが, その変化幅は $0^\circ.01$ 以下である.
2. 大気差
   大気圏外からの光は大気の影響で少し持ち上げられて見えている. 言い換えれば, ちょうど地平線に重

なって見えているものは実際は少し下にある．「見かけ上」と言ったのはこういう意味であり，さっきの木星についての計算がずれたのもこれが原因になっている．上端の高度 h が「見かけ上」$0°$ の時刻を知るためには，実際には $h = -0°.57$ になる時刻を計算すればよい．ところで大気差を「大きさ」と略記すると後で見たとき半径と混同します．

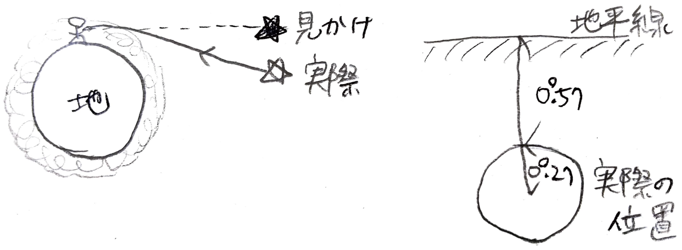

図 8　左：大気差　右：大気がなければここにいるはずの時刻を計算する

3. 太陽の座標の変化

   地球の公転のため，太陽の天球上の位置は 1 日に約 $1°$ ずつ変わる．世界時 0 時 (日本では 9 時) から日没の時間帯までの間に赤経が $0°.4$ くらい変わるが，これは 2 分くらいの計算結果のずれになるので無視できない．

これらを踏まえると，求めるべきは太陽の中心が $h = 0°$ となる時刻ではなく，$h = -0°.27 - 0°.57 = -0°.84$ となる時刻である．(7) 式の 3 つめの式を

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} \tag{11}$$

と変形しておく．

例として，2023 年 10 月 13 日の京都 ($\varphi = 35°.02, \lambda = 135°.75$，2023 年 10 月 13 日には $\Theta_{G0} = 1\mathrm{h}\,25\mathrm{m}\,12\mathrm{s} = 21°.30$) における日の入りの時刻を求めよう．以降，計算は世界時で行い，最後に日本標準時に変換する．太陽の座標は下の表の通り．

表 2　世界時 0 時の太陽の座標

年月日	赤経 α	赤緯 δ	赤経 α(deg)	赤緯 δ(deg)
2023/10/12	13h 7m 55s	$-7°12.9'$	$196°.98$	$-7°.22$
2023/10/13	13h 11m 37s	$-7°35.4'$	$197°.90$	$-7°.59$
2023/10/14	13h 15m 19s	$-7°57.9'$	$198°.83$	$-7°.96$

まず，時刻 d の見当をつける (必須ではない)．日本時間 18 時くらいと考えて $d = (18-9)/24 = 0.375$ としよう．この時刻の太陽の座標は，表にある世界時 0 時の値を按分して

$$\alpha = 197°.90 + d \times (198°.83 - 197°.90) = 198°.249 \tag{12}$$

$$\delta = -7°.59 + d \times ((-7°.96) - (-7°.59)) = -7°.729 \tag{13}$$

$h = -0°.84, \varphi = 35°.02, \delta = -7°.729$ を (11) 式に代入すると $t = \pm 85°.62$ を得る．入りを考えているので正

をとる．さらに (8) 式に $t = 85°.62, \alpha = 198°.249, \lambda = 135°.75, \Theta_{G0} = 21°.30$ を代入すると $d = 0.35131$．これを 24 倍して時と分の表記にすると世界時 8 時 26 分, 日本標準時では 17 時 26 分となる．

この結果は用いた α と δ が正確には日の入りのときのものではないため, 今回の結果 $d = 0.35131$ を用いて再計算する．$\alpha = 198°.227, \delta = -7°.719, t = 85.63, d = 0.35134$ より世界時 8 時 26 分, 日本標準時では 17 時 26 分．最初の見当が答えに近かったので今回は再計算によって答えが変わることはなかった．この結果は「太陽系天体の出入りと南中」のサイトの値とも一致する．日の入りの時刻を求めることができた！　t を負にとればまったく同じように日の出の時刻も計算できる．

$h = -0°.84$ の代わりに $t = 0$ を仮定すれば南中時刻が求められる．標準時子午線の東経 135° なら太陽の南中時刻は毎日 12 時かと思いきや, ±15 分ぐらいの振れ幅で変化する．この南中時刻と 12 時とのずれを均時差といい, 主に地軸の傾きと地球の軌道が楕円であることによる．

5　太陽系天体の位置推算

ここからは, ある時刻にある天体が太陽系のどこにあるのか, どの方向に見えるのかを計算する方法を説明する．出没の計算では α と δ はサイトに教えてもらったが, これから説明する方法でそれも求めることができる (Θ_{G0} の計算式はのちの章に載せてあるので気になれば先に見てください)．さらに, 土星から見た地球の方向や今日の小惑星リュウグウの位置, ***彗星から見た小惑星***の方向なんかも求められる．今回は楕円軌道に限って説明する．あ, だから放物線軌道を持つ***彗星の位置の計算方法は今回は説明しません．

5.1　軌道要素

楕円軌道と天体の位置を定めるために, 下の表に示す軌道の形や角度についての量 5 つとある時刻における天体の位置を用いる．太陽は楕円の焦点にある．近日点は天体が太陽に最も近づく点, 昇交点は天体が黄道面を南側から北側に通り抜ける点．近日点因数 ω と平均近点角 M_0 の代わりに近日点黄経 ϖ と平均黄経 L が与えられた場合は, $\omega = \varpi - \Omega, M_0 = L - \varpi$ によって ω と M_0 を計算できる．長さの単位は天文単位 (au) である．1 au は地球の軌道長半径 (太陽と地球の平均距離) に等しく,

$$1 \text{ au} = 1.495978707 \times 10^8 \text{ km} \quad (\text{約 } 1.5 \text{ 億 km}) \tag{14}$$

と定義されている．

表 3　軌道要素

記号	名前	
a	軌道長半径	楕円の一番出っ張ったところと楕円の中心との距離
e	離心率	楕円のつぶれ具合．$0 \le e < 1$．円は 0, つぶれるほど大きい値
ω (peri)	近日点因数	太陽から見た, 昇交点と近日点のなす角．天体の運動方向に沿って測る
Ω (node)	昇交点黄経	その名の通り, 昇交点の黄経．どっちに傾いているか
i	軌道傾斜角	軌道が黄道面に対して何度傾いているか
M_0	平均近点角	軌道上のどこにいるか．近日点なら $M_0 = 0$
T	元期 (げんき)	上の 6 つの数字, 特に M_0 がいつの時点のものか

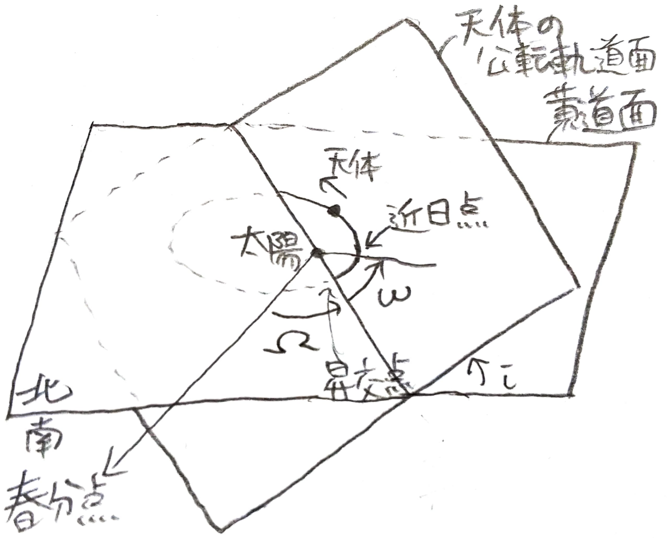

図 9　軌道要素

惑星の軌道要素を表 4 に示す [3]. 小数点以下は 4，5 桁も取れば十分. 元期は地球時 (TT)2000 年 1 月 1 日正午. 地球時 TT は世界時 UT と約 70 秒ずれている時刻系だが, 世界時と同じと考えて問題ない.

表 4　軌道要素 (J2000.0)

	a (au)	e	i (deg)	ω (deg)	Ω (deg)	M_0 (deg)
水星	0.38709927	0.20563593	7.00497902	29.12703035	48.33076593	174.79252722
金星	0.72333566	0.00677672	3.39467605	54.92262463	76.67984255	50.37663232
地球	1.00000261	0.01671123	-0.00001531	102.93768193	0.00000000	357.52688973
火星	1.52371034	0.09339410	1.84969142	286.49683150	49.55953891	19.39019754
木星	5.20288700	0.04838624	1.30439695	274.25457074	100.47390909	19.66796068
土星	9.53667594	0.05386179	2.48599187	338.93645383	113.66242448	317.35536592
天王星	19.18916464	0.04725744	0.77263783	96.93735127	74.01692503	142.28382821
海王星	30.06992276	0.00859048	1.77004347	273.18053653	131.78422574	259.91520804

小惑星や彗星 (ハレー彗星など楕円軌道の彗星もある) の軌道要素は下のリンクから調べられる.

- Small-Body Database Lookup: `https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/`

軌道要素についても以前 Desmos でこんなのを作りました→
`https://www.desmos.com/calculator/bqu8soulro?lang=ja`

天体の公転軌道面に, 太陽を原点, 近日点方向を x 軸, 近日点から天体の運動方向に 90° 進んだ方向を y 軸とする座標をとる. また, 太陽が原点, 春分点方向を X 軸, 点の赤道上の赤経 6h の点を Y 軸, 天の北極方向を Z 軸とした XYZ 座標 (日心赤道直交座標) をとる. この 2 つの座標変換の式は, 次のように求められる.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$= \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

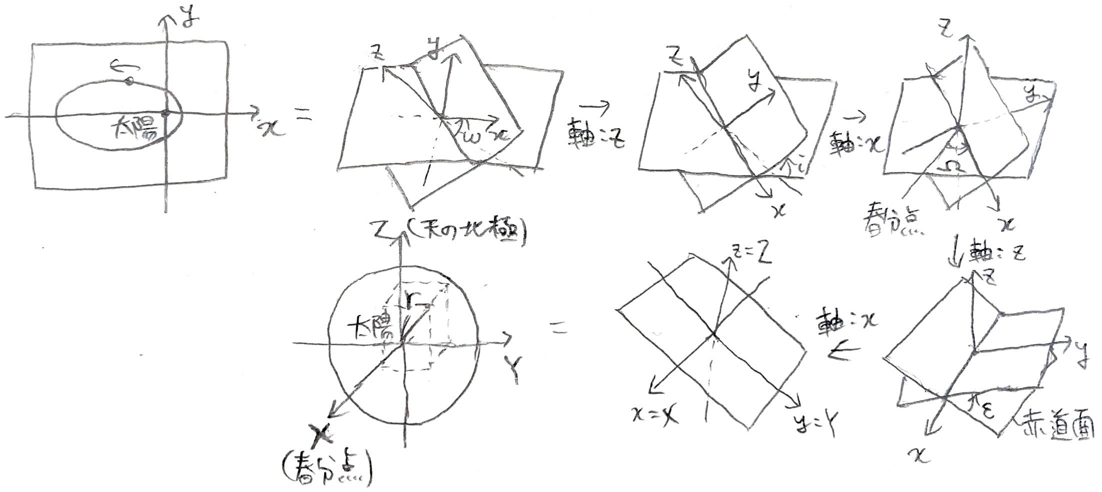

図 10　座標変換

ここで ε は黄道傾斜角と呼ばれ, 今回は J2000.0(2000 年 1 月 1 日正午の意味) なので 23°.43928 を用いる. 月の引力などによって, この傾きもわずかに時間変化する (章動). また

$$\begin{cases} P_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\cos i\sin\Omega \\ Q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\cos i\sin\Omega \\ R_x = \sin i\sin\Omega \\ P_y = \cos\omega\sin\Omega\cos\varepsilon + \sin\omega\cos i\cos\Omega\cos\varepsilon - \sin\omega\sin i\sin\varepsilon \\ Q_y = -\sin\omega\sin\Omega\cos\varepsilon + \cos\omega\cos i\cos\Omega\cos\varepsilon - \cos\omega\sin i\sin\varepsilon \\ R_y = \sin i\cos\Omega\cos\varepsilon - \cos i\sin\varepsilon \\ P_z = \cos\omega\sin\Omega\sin\varepsilon + \sin\omega\cos i\cos\Omega\sin\varepsilon + \sin\omega\sin i\cos\varepsilon \\ Q_z = -\sin\omega\sin\Omega\sin\varepsilon + \cos\omega\cos i\cos\Omega\sin\varepsilon + \cos\omega\sin i\cos\varepsilon \\ R_z = -\sin i\cos\Omega\sin\varepsilon + \cos i\sin\varepsilon \end{cases} \tag{17}$$

である.

5.2 で説明する方法で天体の公転軌道面上の xy 座標を求めることができれば,

$$\begin{cases} X = P_x x + Q_x y \\ Y = P_y x + Q_y y \\ Z = P_z x + Q_z y \end{cases} \tag{18}$$

によって赤道直交座標 (X, Y, Z) が求められる. R は用いない.

5.2 位置推算

それでは, ある天体がある時刻にどこにあるのかを求めよう．導出は省略する．ここでは 2023 年 10 月 13 日 21 時 JST(JST は日本標準時) の土星の赤経と赤緯を計算する．

1. 先の $P_x, Q_x, P_y, Q_y, P_z, Q_z$ を計算する．非常に面倒だが一度計算すればどんな時刻に対しても使える．入力ミスする可能性も大きいので, 関数電卓のメモリ機能や Excel, プログラムを使ってうまく計算しよう．Desmos グラフ計算機がおすすめかも．改めて式を示すと

$$\begin{cases} P_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\cos i\sin\Omega \\ Q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\cos i\sin\Omega \\ P_y = \cos\omega\sin\Omega\cos\varepsilon + \sin\omega\cos i\cos\Omega\cos\varepsilon - \sin\omega\sin i\sin\varepsilon \\ Q_y = -\sin\omega\sin\Omega\cos\varepsilon + \cos\omega\cos i\cos\Omega\cos\varepsilon - \cos\omega\sin i\sin\varepsilon \\ P_z = \cos\omega\sin\Omega\sin\varepsilon + \sin\omega\cos i\cos\Omega\sin\varepsilon + \sin\omega\sin i\cos\varepsilon \\ Q_z = -\sin\omega\sin\Omega\sin\varepsilon + \cos\omega\cos i\cos\Omega\sin\varepsilon + \cos\omega\sin i\cos\varepsilon \end{cases} \tag{19}$$

検算式は

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1, \quad Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1, \quad P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = 0 \tag{20}$$

土星の値は

$$\begin{cases} P_x = -0.045653 \\ P_y = 0.922615 \\ P_z = 0.383011 \end{cases}, \quad \begin{cases} B_x = -0.998167 \\ B_y = -0.057379 \\ B_z = 0.019240 \end{cases} \tag{21}$$

2. 次の 6 つの値を計算する．これも使い回せる．記録しておく．

$$\begin{cases} A_x = aP_x \\ A_y = aPy \\ A_z = aPz \end{cases}, \quad \begin{cases} B_x = a\sqrt{1-e^2}Q_x \\ B_y = a\sqrt{1-e^2}Q_y \\ B_z = a\sqrt{1-e^2}Q_z \end{cases} \tag{22}$$

検算式は

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0 \tag{23}$$

土星の値は

$$\begin{cases} A_x = -0.43538 \\ A_y = 8.79868 \\ A_z = 3.65266 \end{cases}, \quad \begin{cases} B_x = -9.50538 \\ B_y = -0.54642 \\ B_z = 0.18322 \end{cases} \tag{24}$$

3. 元期 T から計算したい時刻 t までに何日経過したかを求める．毎年・毎月の日数を足し合わせてもよいが, 紀元前 4713 年 1 月 1 日正午からの経過日数であるユリウス日がよく使われる．グレゴリオ暦 Y 年 M 月 D 日正午のユリウス日 JD は次の式で計算できる [4]．[ ] は切り捨てを表す．

$$K = \left[\frac{14-M}{12}\right] \tag{25}$$

$$\mathrm{JD} = \left[\frac{1461}{4}(-K+Y+4800)\right] + \left[\frac{367}{12}(12K+M-2)\right] - \left[\frac{3}{4}\left[\frac{-K+Y+4900}{100}\right]\right] + D - 32075 \tag{26}$$

時刻は小数で表して正午のユリウス日に加える．例えば 6 時ならユリウス日は***.75 になる．下のサイトを使えば一発．

- 国立天文台暦計算室 暦象年表 ユリウス日:

  `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/date2jd.cgi`

  元期 2000 年 1 月 1 日正午のユリウス日は 2451545.00, 2023 年 10 月 13 日 21 時 JST=同日世界時 12 時のユリウス日は 2460231.00 だから, 経過日数は $2460231.00 - 2451545.00 = 8686.00$(日).

4. 平均近点角 M を求める．図形的意味はない．

$$M = \frac{0^\circ.98561}{a\sqrt{a}}(t - T) + M_0 \tag{27}$$

   今回は $M = \frac{0^\circ.98561}{9.53668\sqrt{9.53668}} \times 8686.0 + 315^\circ.35537 - 360^\circ = 248^\circ.04471$ である．$0^\circ \le M < 360^\circ$ に調整した．

5. 離心近点角 E を求める．図形的意味は一応あるがここでは説明しない．M と E の間には下のケプラーの方程式が成り立つ:

$$M = E - e\sin E \tag{28}$$

   上の表式では M と E の単位はラジアン．度の場合は離心率 e に $\frac{180}{\pi}$ を掛ける．一般にこの方程式は解析的には解けないので, 数値的に解く．解き方はいくつかあるが, ここではわかりやすい逐次近似法を用いる．角度の単位は度とする．

   まず

$$E = M + \frac{180}{\pi} e\sin E \tag{29}$$

   と変形し, 右辺の E に M を代入した $M + \frac{180}{\pi} e\sin M$ を E_0 とする．次に E_0 を (29) 式の右辺の E に代入し, $M + \frac{180}{\pi} e\sin E_0$ を E_1 とする．続いて $M + \frac{180}{\pi} e\sin E_1$ を計算し E_2 とする．これを繰り返して E の $0^\circ.0001$ の位が一致するようになれば十分．

   今回は

$$\begin{aligned}
E_0 &= 248^\circ.04471 + \frac{180}{\pi} \times 0.05386 \sin 248^\circ.04471 = 245^\circ.18257 \\
E_1 &= 245^\circ.24375 \\
E_2 &= 245^\circ.24237 \\
E_3 &= 245^\circ.24240 \\
E_4 &= 245^\circ.24240
\end{aligned}$$

   なので $E = 245^\circ.24240$.

6. 下の x, y, z を計算する．この座標は先ほど出てきた日心赤道直交座標で表した天体の位置．

$$\begin{cases} x = A_x(\cos E - e) + B_x \sin E \\ y = A_y(\cos E - e) + B_y \sin E \\ z = A_z(\cos E - e) + B_z \sin E \end{cases} \tag{30}$$

   今回は $(x, y, z) = (8.83750, -3.66241, -1.89277)$(単位は au) である．

7. 地球の位置も同様に計算する．結果を X, Y, Z とする．今回はちょっと楽をして

   - 国立天文台暦計算室 暦象年表 太陽の赤道直角座標:

     `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/sun_rect.cgi`

   を参照したところ, $(X, Y, Z) = (0.94024, 0.30662, 0.13291)$ である (サイトの結果は地球から見た太陽の位置なので, 符号を反転させた).

8. 地球を中心とした赤道直交座標では, 天体の位置は $(x-X, y-Y, z-Z)$ である．地球からその天体を見たときの赤経を α, 赤緯を δ, 距離を r とすると, (1) と同じように考えて

$$\begin{cases} x-X = r\cos\delta\cos\alpha \\ y-Y = r\cos\delta\sin\alpha \\ z-Z = r\sin\delta \end{cases} \tag{31}$$

ここから α, δ が求められる．まず

$$\tan\alpha = \frac{y-Y}{x-X} \tag{32}$$

によって α が 2 択になる．$\cos\delta \geq 0$ ($\because -90° \leq \delta \leq +90°$) だから, $x-X$ と $\cos\alpha$ の符号, $y-Y$ と $\sin\alpha$ の符号はそれぞれ等しいことから α が決まる．δ, r は

$$\delta = \tan^{-1}\frac{x-Z}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}}, \quad r = \sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2} \tag{33}$$

からただちにわかる．

今回の土星では $(x-X, y-Y, z-Z) = (7.89726, -3.96903, -2.02568)$ だから

$$\begin{cases} \alpha = 333°.317 = 22\text{h}\ 13.3\text{m} \\ \delta = -12°.909 = -12°55' \end{cases} \quad (\text{J2000.0}) \tag{34}$$

である．α, δ **を求めることができた！** このようにして求められた座標を星図と比べてみて, 計算した惑星や小惑星がどの方向に見えるのか調べてみよう．星図は検索すればいろいろ出てくる・・・と思ったが, 赤道座標の線と数値が載っているものとなると意外といいのがないので, とりあえずいくつか挙げてみる．天文系の本を見るのもいいかも．データはあるしいっそ自分好みに作るか．作りました．

- Aladin Lite (Google Map みたいなもの．KUALA で教えてもらった): `https://aladin.cds.unistra.fr/AladinLite/`
- Astro Commons (線は引いてあるが数字がないのが今回は致命的): `http://astro.starfree.jp/commons/index.html`
- Cloudy Nights Free Mag 7 Charts (英語なので知っていないと星座名がわからない): `https://www.cloudynights.com/articles/cat/articles/observing-skills/free-mag-7-star-charts-r1021`
- 私が作った星図: `https://peteworden.github.io/Soleil/chart.html`

惑星やメジャーな小惑星であれば, 私が GitHub を利用して作ったウェブページ内の「ソレイユ Web」から答え合わせをすることができる．そこで選べないマイナーな天体も, Python の環境を準備してもらえれば, 「ソレイユ」のところから詳細を見れるツール (Web 版よりかなり前に私が作りました．生産者表示) で調べられる．軌道要素を先ほど紹介した Small-Body Database Lookup から取得して, プログラム内で今説明したのとほぼ同じ方法で位置を計算している．今回以上に精度よく計算するためには, 木星などほかの天体の引力による軌道要素の変化を考慮する必要がある．

- ソレイユ: `https://peteworden.github.io/Soleil/PeteHOME.html`

6 歳差と視位置

位置推算の章での計算は間違えてはいないが, 第 3 章でも紹介した

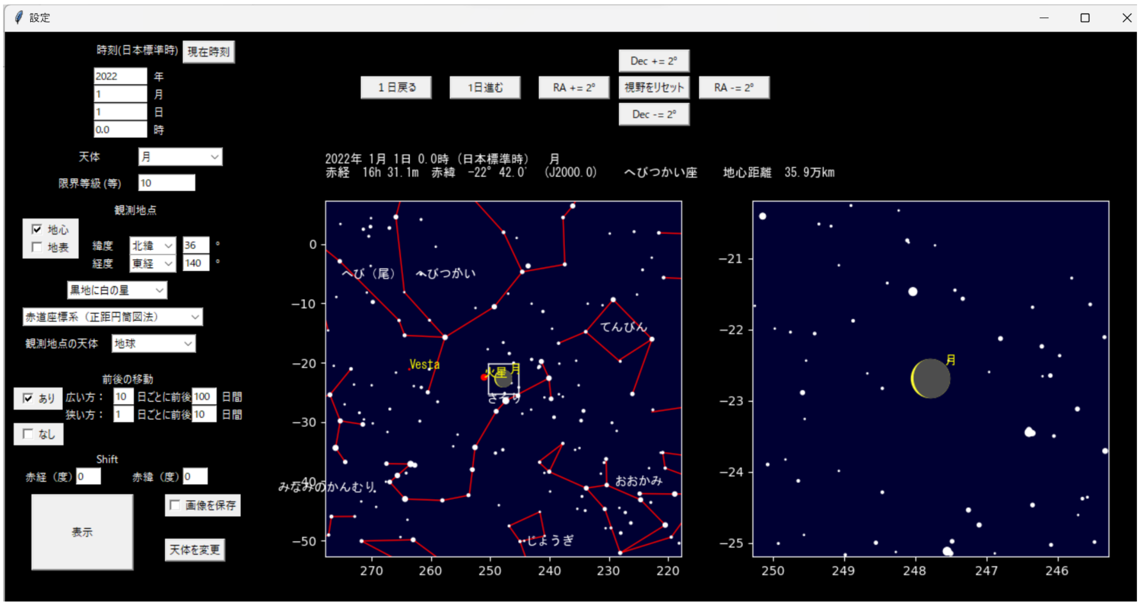

図 11　Soleil (ソレイユ．名づけ親は高校の友達)

- 国立天文台暦計算室 惑星の位置:
  `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/planet.cgi`

の値

$$\begin{cases} \alpha = 22\text{h } 14\text{m } 25.124\text{s} \\ \delta = -12°48'14.60'' \end{cases} \tag{35}$$

と比べると明らかにずれている．この主な理由は, 地軸が倒れかけのコマのように約 26000 年周期でぐるぐる向きを変える「歳差」という現象によって座標の基準である春分点が移動し, 座標系自体が動くからである．リンク先に載っている「視」赤経と「視」赤緯は現在の春分点を, 先ほど計算した座標は J2000.0 とあったように 2000 年年初の春分点を基準にしている．$(2000.0+t)$ 年の視赤経と視赤緯をそれぞれ α_t, δ_t, 今回計算した J2000.0 の赤経と赤緯をそれぞれ α_0, δ_0 とすると, その関係は次のように概算できる．

$$\alpha_t = \alpha_0 + (3.1\text{s} + 1.3\text{s} \times \sin\alpha_0 \tan\delta_0)t \tag{36}$$

$$\delta_t = \delta_0 + 20'' \times \cos\alpha_0 \times t \tag{37}$$

これにしたがって計算すると

$$\begin{cases} \alpha = 22\text{h } 14.6\text{m} \\ \delta = -12°48' \end{cases} \tag{38}$$

となり, 国立天文台の値とほぼ一致する．

7　地平座標を求める

最後に, 位置を求めた 2023 年 10 月 13 日 21 時 JST に京都 $(\varphi = 35°.02, \lambda = 135°.75)$ では土星がどの方角に見えるのか調べよう．2023 年 10 月 13 日世界時 0 時のグリニジ恒星時は $\Theta_{G0} = 1\text{h}\,25\text{m}\,12\text{s} = 21°.30$ だっ

た．位置推算をして歳差の補正を行った (38) の座標を使う．

$$\begin{aligned} t &= \theta - \alpha \quad (39)\\ &= \Theta_{\mathrm{G}} + \lambda - \alpha \quad (40)\\ &= \Theta_{\mathrm{G0}} + 360^\circ.9856d + \lambda - \alpha \quad (41)\\ &= 21^\circ.30 + 360^\circ.9856 \times \frac{21-9}{24} + 135^\circ.75 - \left(22 \times 15^\circ + 14.6 \times \frac{1}{4}^\circ\right) \quad (42)\\ &= 3^\circ.8928 \quad (43) \end{aligned}$$

(7) 式の右辺に値を代入して

$$\begin{cases} A = 185^\circ.11 \\ h = 42^\circ.04 \end{cases} \quad (44)$$

と求められる．南中を少し過ぎたところである．

8 グリニジ恒星時の計算式 [2]

ユリウス日 JD は世界時の値を使う．

- 平均春分点に準拠するグリニジ恒星時 (つまり歳差を考慮している．視位置に対して用いる．基本的にはこっち)

$$D = \text{ユリウス日 JD} - 2440000.5 \quad (45)$$
$$\Theta_{\mathrm{G}} = (24\mathrm{h}\ \text{または}\ 360^\circ) \times (0.671262 + 1.00273791D) \quad (46)$$

- 2000.0 分点に準拠するグリニジ恒星時 (脇に J2000.0 と書かれた座標に対して用いる)

$$D = \text{ユリウス日 JD} - 2440000.5 \quad (47)$$
$$\Theta_{\mathrm{G}} = (24\mathrm{h}\ \text{または}\ 360^\circ) \times (0.67239 + 1.00273781D) \quad (48)$$

9 おわりに

(公開は恥ずかしいので省略)

参考文献

[1] 斉田博『天文の計算教室』　地人書館
[2] 長谷川一郎『天文計算入門 ―球面三角から軌道計算まで―』恒星社
[3] Jet Propulsion Laboratory “Approximate Positions of the Planets”
`https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/approx_pos.html`
[4] 国立天文台暦計算室 ユリウス日について
`https://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/topics/html/topics2023_1.html`

その他, 本文中に挙げたリンク

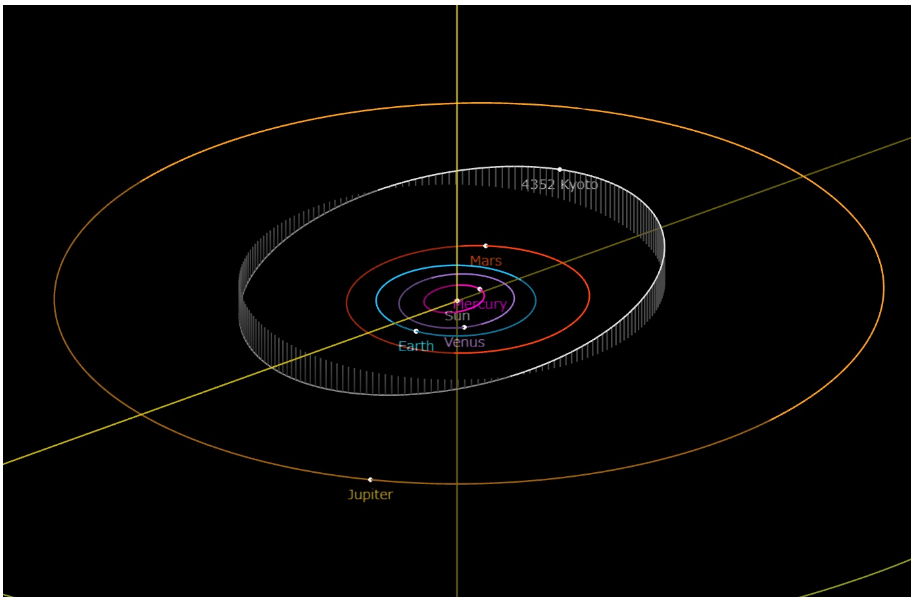

図 12　小惑星 Kyoto 4352 (Small-Body Database Lookup より)

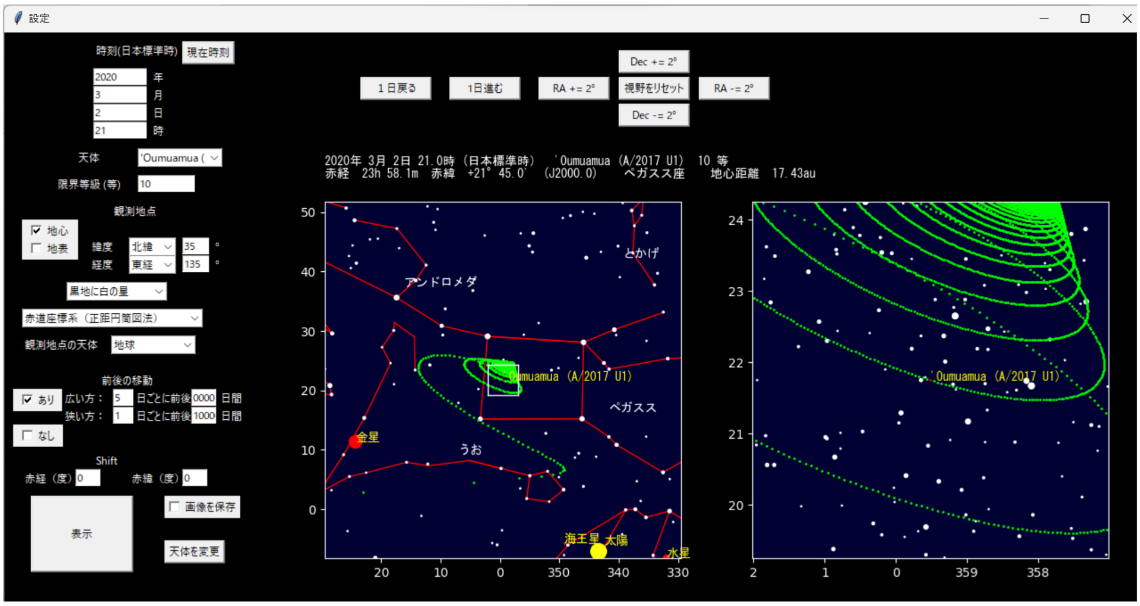

図 13　オウムアムア ('Oumuamua) の軌跡．離心率 1.2 の双曲線軌道