Lista de Exercícios

Propriedades fundamentais da trigonometria

Problema 1 (Iezzi, G. Fundamentos da Matemática Elementar. Vol.3, 2^a Ed., p. 47, Prob. 82)

Calcular $\sin x$ e $\cos x$ sabendo que $3 \cdot \cos x + \sin x = -1$.

Resolução P1:

Para encontrar os valores do seno e do cosseno, precisamos de mais uma equação que envolvam ambos, para assim conseguirmos resolver o sistema.
Para todo x real vale a relação fundamental da trigonometria: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
Conhecendo a relação acima podemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \text{3cos x + sen x = - 1} \\ \cos^2 x + sen^2 x = 1 \end{cases}$$

Isolando o seno na equação dada pelo enunciado, temos:

$$\sin x = -1 - 3\cos x$$

Substituindo na relação fundamental:

$$\cos^2 x + (-1 - 3\cos x)^2 = 1$$

$$\cos^2 x + 1 + 6\cos x + 9\cos^2 x = 1$$

$$10\cos^2 x + 6 = 0$$

Como essa é uma equação do segundo grau, para encontrar os valores de $\cos x$ vamos utilizar a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = 6^{2\smallsmile}4(10)(0)$$

$$\Delta = 36$$

Logo:

$$\cos x = \frac{-6 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 10}$$

c
Substituindo esses valores na expressão para o seno que havíamos isolado anteriormente, obtemos:

$$\sin x = -1 - 3.(0)$$

$$\sin x = -1$$

E

$$\sin x = -1 - 3(\frac{-3}{5})$$

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

Assim, temos duas soluções:
1) $\cos x = 0$ e $\sin x = -1$
2) $\cos x = \frac{-3}{5}$ e $\sin x = \frac{4}{5}$.

Problema 2 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5^a Ed., p. 84, Prob. 02)

Sejam a e b reais quaisquer. Verifique que:

a) $\sin a \cos b = 1/2[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

b) $\cos a \cos b = 1/2[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

c) $\sin a \sin b = 1/2[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

Resolução P2:

Para responder a questão, temos que verificar relações que envolvem a transformação de produtos de senos e cossenos em somas. É importante lembrar que nas relações de soma e subtração de arcos aparecem tanto somas quanto produtos de senos e cossenos. Assim, considerando as identidades trigonométricas de soma e diferença de ângulos apresentadas abaixo, resolvamos os itens.

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

a) Ao somar as duas equações de soma e diferença de ângulos do seno, teremos:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cancel{\sin b \cos a} + \sin a \cos b - \cancel{\sin b \cos a} \Longrightarrow$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \Longrightarrow$$

$$\sin a \cos b = 1/2\,[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

b) Somando as equações de soma e diferença de ângulos do cosseno, teremos:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b + \cancel{\sin a \sin b} + \cos a \cos b - \cancel{\sin a \sin b} \Longrightarrow$$
$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \Longrightarrow$$
$$\cos a \cos b = 1/2\,[\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

c) Subtraindo as equações de diferença e soma de ângulos do cosseno, teremos:

$$cos(a+b) - \cos(a-b) = (\cos a \cos b + \sin a \sin b) - (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \Longrightarrow$$
$$cos(a+b) - \cos(a-b) = \cancel{\cos a \cos b} + \sin a \sin b - \cancel{\cos a \cos b} + \sin a \sin b \Longrightarrow$$
$$2\sin a \sin b = cos(a+b) - \cos(a-b) \Longrightarrow$$
$$\sin a \sin b = 1/2\,[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

Problema 3 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5^a Ed., p. 87, Prob. 03)

Mostre que, para todo x, com $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, tem-se:

a) $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$. b) $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.

Resolução P3:

a) Sabemos que $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. Assim, podemos substituir a $\sec^2\frac{x}{2}$ na expressão:

$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}.$$

Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, então substituindo teremos:

$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} = 2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 =$$
$$2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) = 2\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}\right).$$

Temos a relação do seno do arco duplo que nos diz que:

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a.$$

Tomando $a = \frac{x}{2}$:

$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \sin x.$$

Assim, mostramos que:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$

b)Sabemos que $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, assim podemos substituir a $\sec^2\frac{x}{2}$ na expressão:

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}.$$

Como $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ e $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, então substituindo teremos:

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$

Temos a relação do cosseno de um arco duplo que nos diz que:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Tomando $a = \frac{x}{2}$ e substituindo na expressão:

$$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos x$$

Assim mostramos que:

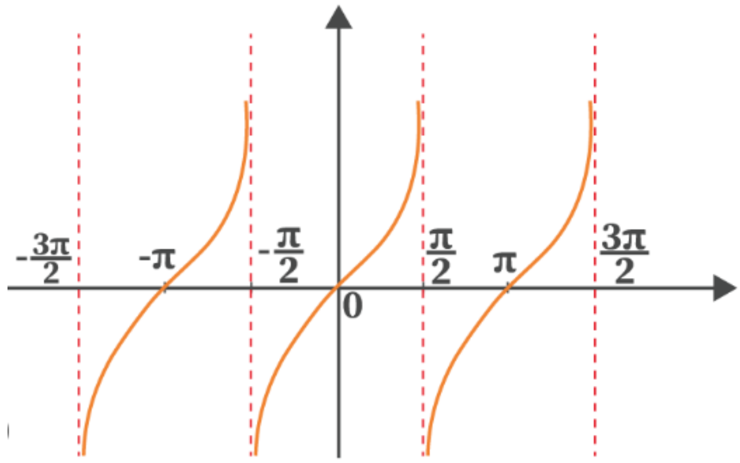
$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \cos x.$$

Problema 4 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.3, 9^a Ed., p. 194, Prob. 357)

Resolva a inequação $\tan x > \sqrt{3}$, para $x \in \mathbb{R}$.

<u>Resolução P4:</u>

Para resolver a inequação $\tan x > \sqrt{3}$, precisamos analisar os intervalos em que a função tangente é estritamente maior que $\sqrt{3}$. Começaremos analisando o comportamento da função tangente em relação ao seu gráfico.



A tangente é positiva nos intervalos $(-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi)$, para k inteiro. Nos intervalos $(\pi/3+k\pi, \pi/2+k\pi)$, a função tangente é estritamente maior que $\sqrt{3}$. Portanto a solução para a inequação é dada pela união dos intervalos encontrados:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi/3 + k\pi < x < \pi/2 + k\pi\}$$

Problema 5 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.3, 9^a Ed., p. 168, Prob. 304)

Resolva a equação $\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x = 3$.

Resolução P5:

inicialmente, tentaremos reduzir essa equação trigonométrica a uma equação fundamental do tipo $\sin\alpha = \sin\beta$, que facilitará a resolução do problema. Para isso, vamos reorganizar os termos da equação, fazendo uma troca de variável. Chamaremos $\sin^2 x = y$.
Assim:

$$\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x = 3 \Longrightarrow$$

$$\sin^2 x + (\sin^2 x)^2 + (\sin^2 x)^3 = 3 \tag{1}$$

Substituindo $\sin^2 x = y$ na expressão (1), teremos:

$$y + y^2 + y^3 = 3 \Longrightarrow y^3 + y^2 + y = 3 \Longrightarrow$$

$$y^3 + y^2 + y - 3 = 0 \tag{2}$$

Podemos fatorar a expressão (2) e reescrevê-la da seguinte forma:

$$y^3 + y^2 + y - 3 = 0 \Longrightarrow (y-1)\cdot(y^2+2y+3) = 0$$

Para encontrar os valores de y devemos fazer $y-1=0$ e $y^2+2y+3=0$.

- $y - 1 = 0$, logo $y = 1$

- $y^2 + 2y + 3 = 0$, é uma equação do 2° grau. Aplicando a fórmula de bhaskara, teremos:

  $\Delta = b^2 - 4ac$

  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

  $\Delta = 4 - 12$

  $\Delta = -8$

  Como Δ é negativo a equação não possui solução real.

Logo, a única solução para $(y-1) \cdot (y^2 + 2y + 3) = 0$ é $y = 1$. Como, inicialmente, chamamos $\sin^2 x = y$ e $y = 1$, temos:

$$\sin^2 x = 1 \Longrightarrow \sin x = \sqrt[2]{1} \Longrightarrow \sin x = \pm 1$$

Sabemos que $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ e que $\sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$. Assim, podemos afirmar que:

$$\sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2} \ (3) \ \text{ e que } \quad \sin x = -1 = \sin \frac{3\pi}{2} \ (4)$$

Dessa forma, reduzimos nossa equação trigonométrica inicial a duas equações fundamentais do tipo $\sin \alpha = \sin \beta$ e agora podemos usar a relação abaixo, em que $2k\pi$ representa a quantidade de voltas completas no círculo trigonométrico.

$$\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

Agora vamos substituir as expressões (3) e (4) na relação acima.

Substituindo a expressão (3): $\sin x = 1 = \sin \dfrac{\pi}{2}$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Logo, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Substituindo a expressão (4): $\sin x = -1 = \sin \dfrac{3\pi}{2}$

$$\sin x = \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Observação: $-\dfrac{\pi}{2}$ equivale a $\dfrac{3\pi}{2}$. Logo, $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Assim, a solução de $\sin x = \pm 1$ é:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ ou simplesmente } \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (5)$$

Podemos escrever (5) da seguinte maneira:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Resposta final: $\quad x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$

Funções trigonométricas

Problema 6 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5^a Ed., p. 51, Prob. 01)

Determine o domínio e esboce o gráfico:

a) $f(x) = \cot x$.

b) $g(x) = \csc x$.

Resolução P6:

a) para resolver essa questão devemos lembrar do círculo trigonométrico.

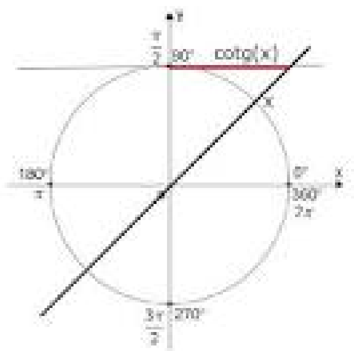


Figura 1: Caption

Vale lembrar que a $tag(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ e a $cotg(x)$ é o inverso da $tangente$, ou seja, $cotg(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$. Para determinar o gráfico vamos utilizar alguns valores para x.

- $cotg(\frac{-\pi}{2}) = 0$
- $cotg(\frac{-\pi}{4}) = -1$

A $cotg(0)$ não existe, pois não é permitido a divisão por zero, então temos: $cotg(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $cotg(\frac{\pi}{4}) = 1$.
Organizando o gráfico:

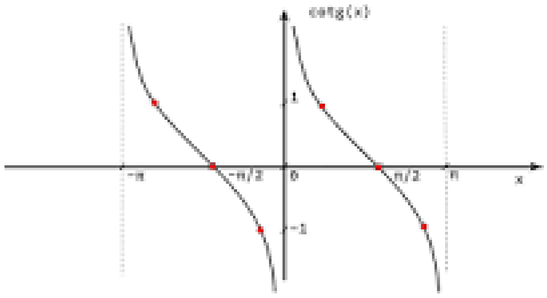


Figura 2: Caption

O dominio da função é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Figura 3: Caption

$cotg(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $cotg(\frac{3\pi}{2}) = 0$.

B)

$$g(x) = Cosec(x) \tag{3}$$

Primeiro vamos relembrar do círculo trigonométrico da cossecante.

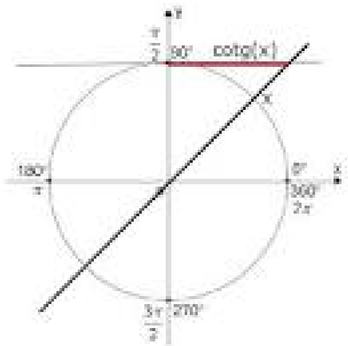


Figura 4: Caption

A $cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$, ou seja a cossecante é o inverso do *seno*. Então ela vai carregar algo parecido com o *seno* e como consequência ela não vai existir quando o *seno* for zero. Logo o gráfico vai ficar da seguinte forma:

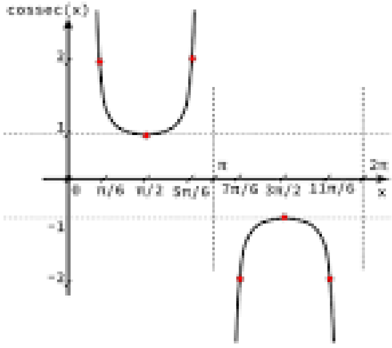


Figura 5: Caption

O domínio da função é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Figura 6: Caption

Problema 7 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5^a Ed., p. 86, Prob. 02)

Verifique que $\sec^2(x) = 1 + \text{tg}(x)$ para todo x tal que $\cos(x) \neq 0$.

Resolução P7:

Para verificar essa função, podemos usar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Dividindo a equação por $\cos^2(x)$, teremos:

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Sabendo que $\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \text{tg}^2(x)$ e que $\frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$, substituindo, teremos:

$$\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

Portanto mostramos que $\sec^2(x) = 1 + \text{tg}(x)$ para todo x tal que $\cos(x) \neq 0$. .

Problema 8 (Iezzi, G. Fundamentos da Matemática Elementar. Vol.3, 9^a Ed., p. 203, Prob. 367)

Calcule:

a) $\tan(\arcsin(\frac{-2}{3}) + \arcsin(\frac{1}{4}))$

b) $\sin(2 \cdot (\frac{-3}{5}))$

c) $\cos(3 \cdot \arcsin\left(\frac{12}{13}\right))$

.

Resolução P8:

Para resolvermos esta questão precisamos lembrar das seguintes identidades trigonométricas:

(I)

$$sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

(II)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\,\alpha + \tan\,\beta}{1-\tan\,\alpha \cdot \tan\,\beta}$$

(III)

$$\cos\,\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

(IV)

$$\sin\,2\alpha = 2\cdot\sin\,\alpha\cdot\cos\,\alpha$$

(V)

$$\cos\,3\alpha = 4\cdot\cos^3\alpha - 3\cdot\cos\,\alpha$$

a) Observando o problema notamos que se trata da tangente da soma de dois arcos, ou seja, $\tan(\alpha+\beta)$. Agora vamos calcular separadamente os valores de α e β.

Fazendo $\arcsin\left(\frac{-2}{3}\right) = \alpha$, encontramos que $\sin\,\alpha = \frac{-2}{3}$.

Agora para $\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = \beta$, encontramos que $\sin\,\beta = \frac{1}{4}$.

Para encontrarmos os valores de $\tan\,\alpha$ e $\tan\,\beta$, vamos utilizar a identidade **I** que relaciona seno e tangente.

Aplicando o valor de $\sin\,\alpha$ na identidade **I** encontramos o seguinte valor para $\tan\,\alpha$.

$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow (\frac{-2}{3})^2 = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{9} = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $(1+\tan^2\alpha)$ teremos:

$$\frac{4}{9}\cdot(1+\tan^2\alpha) = \frac{\tan^2\alpha}{1+tan^2\alpha}\cdot(1+\tan^2\alpha)$$

ficamos então com:

$$\frac{4+4\tan^2\alpha}{9} = \tan^2\alpha$$

Isolando $\tan\,\alpha$ encontramos que $\tan\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Aplicando agora o valor de sin β, encontraremos que:

$$\tan\,\beta = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Com os valores das tangentes encontrados, vamos agora substituir na identidade **II**.

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{15}}{15}}{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}.\frac{\sqrt{15}}{15}}$, simplificando a equação obtemos

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{6\sqrt{5}+\sqrt{15}}{15}}{\frac{15-2\sqrt{3}}{15}} = \frac{6\sqrt{5}+\sqrt{15}}{15}\cdot\frac{15}{15-2\sqrt{3}}$ por fim obteremos

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{6\sqrt{5}+\sqrt{15}}{15-2\sqrt{3}}$, colocando $\sqrt{5}$ em evidência encontramos que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{5}(6+\sqrt{3})}{15-2\sqrt{3}} \tag{4}$$

b) Assim como no item anterior, vamos usar algumas identidades trigonométricas para encontrar o valor desejado.

Fazendo $\arcsin(\frac{-3}{5}) = \alpha \Rightarrow \sin\,\alpha = (\frac{-3}{5})$, com o valor do sin α encontrado podemos usar a identidade **IV** para resolvermos o problema, mas antes temos que encontrar o valor do cos α, para tal usaremos a identidade **III** e teremos:

$$\cos\,\alpha = \sqrt{1-(\frac{-3}{5})^2)} \Rightarrow \cos\,\alpha = \frac{4}{5}$$

, agora podemos aplicar os valores encontrados diretamente na identidade **IV**,

$$\sin\,2\alpha = 2\cdot\sin\,\alpha\cdot\cos\,\alpha \Rightarrow$$

$$\sin\,2\alpha = \frac{-24}{25}$$

c) O processo de solução deste item é semelhante ao item anterior, vamos começar encontrando o valor de sin α.

Sendo $\arcsin(\frac{12}{13}) = \alpha \Rightarrow \sin\,\alpha = (\frac{12}{13})$. Vamos encontrar agora o cos α usando a identidade **III**,

$$\cos\,\alpha = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} \Rightarrow cos\,\alpha = \frac{5}{13}$$

, com o valor do $cos\,\alpha$ encontrado podemos substituir na identidade **V** e finalizar o problema

$$\cos\,3\alpha = 4\cdot\cos^3\alpha - 3\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\cos\,3\alpha = \frac{-2035}{2197}$$

Assim, solucionamos o problema.

Problema 9 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.3, 2^a Ed., p. 32, Prob. 68)

Esboçar o gráfico, dar o domínio e período da função real $f(x) = \tan(x - \pi/4)$.

Resolução P9:

Para esboçar o gráfico da função $f(x) = \tan(x - \pi/4)$, devemos observar suas principais características. Assim. seja t definido como $t = x - \frac{\pi}{4}$, então temos que para todo t, exceto $\frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um número inteiro, a função tangente é definida. Isso ocorre porque a tangente não existe em $\pi/2$ e em valores $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Sabendo que a função tangente é indefinida em $\frac{\pi}{2} + k\pi$, podemos encontrar o domínio da função $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ manipulando a equação:

$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$

Portanto, o domínio da função é :

$$Dom = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N}\}$$

A função tangente é periódica, isso se dar por:

$$\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

Então $p(f) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$,com um período de π unidades no eixo x. Isso significa que o padrão de repetição do gráfico ocorre a cada π unidades.
Para a função $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$, temos um deslocamento horizontal de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita em relação à função tangente padrão. Esse deslocamento é representado pela equação $h = -\frac{\pi}{4}$, indicando o deslocamento horizontal da função.
O período da função é dado pela equação $p(f) = \pi$, o que significa que o gráfico de $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ se repetirá a cada π no eixo x.

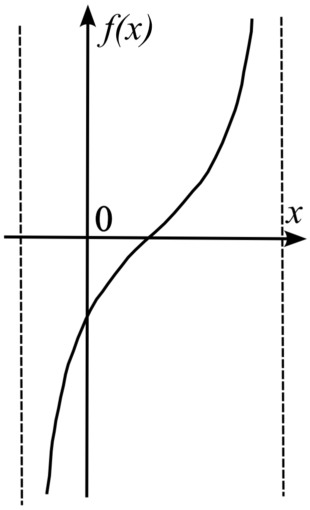


Figura 7: gráfico da função $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$

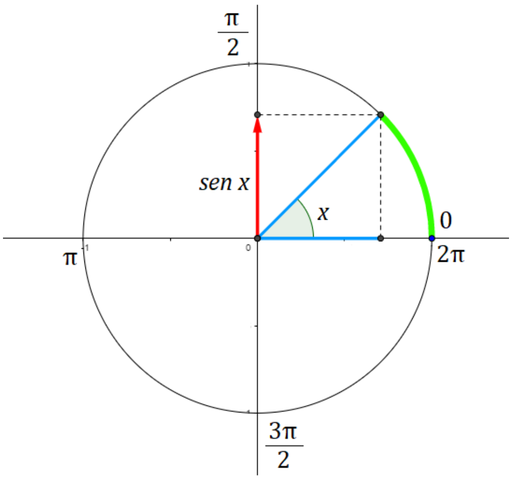
Problema 10 (Iezzi, G. Fundamentos da Matemática Elementar. Vol.3, 2^a Ed., p. 21, Prob. 24)

Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot sin(x)$.

Resolução P10:

Para resolver essa questão precisamos recordar algumas propriedades da função *seno* e também transformações de funções.
A função *seno* é uma função periódica (possui um padrão que se repete ao longo do tempo) que relaciona um ângulo com a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa em um triângulo retângulo.

Figura 8: Ciclo Trigonométrico.



Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/funcoes-trigonometricas/

Domínio da função seno: O domínio da função *seno* abrange todos os números reais,

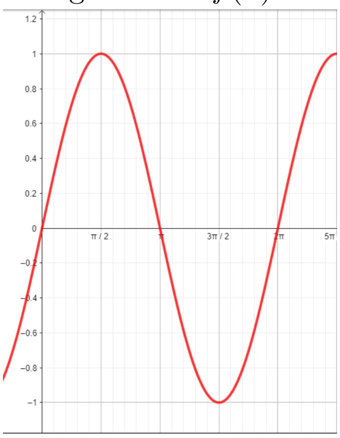
o que significa que $sin(x)$ é definido para qualquer valor real de x. Portanto, o domínio de $f(x) = sin(x)$ é o conjunto dos números reais: $D = \mathbb{R}$.
Imagem da função seno: Com o estudo do círculo trigonométrico, sabemos que a razão trigonométrica *seno* possui como valor máximo 1 quando x corresponde a um arco cuja primeira determinação é $\frac{\pi}{2}$ e como valor mínimo -1 quando x representa um arco com primeira determinação $\frac{3\pi}{2}$. Logo, $-1 \leq sin(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
sindo assim, o conjunto imagem da função $f(x) = sin(x)$ é o intervalo $[-1, 1]$:
$Im = [-1, 1]$.
Período da função seno: Conhecemos como período o menor intervalo em que acontece a repetição do gráfico. Podemos notar na figura 8 que a função seno é periódica, ou seja, o gráfico se repete a cada período. Assim, notamos que a cada volta completa (2π) no ciclo trigonométrico, os valores da função $f(x)$ se repetem. Logo, o período da função seno é 2π.
Atribuindo os valores para x na função $f(x) = sin(x)$, obtemos a seguinte tabela:

Tabela 1: $f(x) = sin(x)$

x	$sin(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Assim, teremos o seguinte gráfico:

Figura 9: gráfico de $f(x) = sin(x)$.



Fonte: criado pelo próprio autor

Tendo como Base as informações que temos sobre a função $f(x) = sin(x)$, conseguiremos definir o período, a imagem e o gráfico da nova função: $g(x) = 2\dot{s}in(x)$.
há uma diferença nessa nova função, pois, temos que $f(x) = sin(x)$ está sendo multiplicada por 2. Logo, teremos uma transformação no gráfico da função. Relembrando dos princípios de transformação de uma função, o princípio em que a nova função se encaixa e que iremos considerar será o principio de **Alongamento**. Esse princípio nos diz que se temos uma função $y = f(x)$, e multiplicamos $f(x)$ por uma constante *positiva* c $(c > 1)$. Temos, $y = cf(x)$.O gráfico de $y = f(x)$ alonga verticalmente por um fator de c.

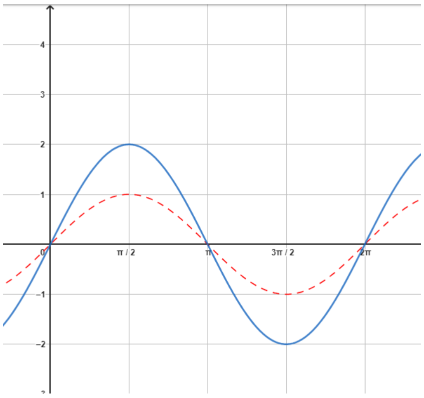
Para construir o gráfico de $g(x)$ seguiremos o mesmos passos feitos para criação da tabela 1. atribuiremos valores a x, depois associaremos a cada x um valor de $sin(x)$ e por fim, multiplicaremos o valor de $sin(x)$ por 2. Assim, teremos a seguinte tabela:

Tabela 2: $g(x) = 2sin(x)$

x	$sinx$	$y = 2 \cdot sin(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

Analisando a tabela 2, concluímos que:
a. Imagem: $.Im(f) = [-2, 2]$
b. período$p(f) = 2\pi$
E por fim, a partir da tabela a construção o gráfico da função $g(x) = 2\dot{s}in(x)$ ficará da seguinte forma:

Figura 10: gráfico de $g(x) = 2sin(x)$



Fonte: criado pelo próprio autor

.