LISTA DE EXERCÍCIOS
GRUPO PET - IFCE CAMPUS SOBRAL

TÓPICO 1: Vetores

Problema 1 (Problema 01, pág 56, capítulo 3, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de um vetor $\vec{a}$ do plano xy que faz um ângulo de $250°$ no sentido anti-horário com o semieixo x positivo e tem um módulo de $7,3\ m$?

Resolução P1: As componentes x e y de um vetor $\vec{a}$ do plano xy são dadas por $a_x = acos\theta$ e $a_y = asen\theta$ na qual $a = |\vec{a}|$ é o módulo de $\vec{a}$ e θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semieixo x positivo.

(a) a componente x de $\vec{a}$ é $a_x = acos\theta = (7,3\ m)cos(250°) = -2,5\ m$.

(b) a componente y é dada por $a_y = asen\theta = (7,3\ m)sen(250°) = -6,86\ m$.

Problema 2 (Problema 33, pág 58, capítulo 3, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

Para os vetores da Fig. 3-12, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, determine (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}$, (c) o módulo e (d) a orientação de $\vec{a} \times \vec{c}$, (e) o módulo e (f) a orientação de $\vec{b} \times \vec{c}$.

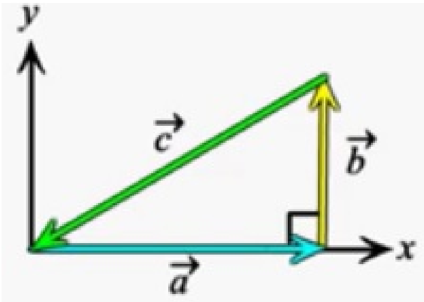


Figura 1: Fig. 3-12

Resolução P2: Observamos que o problema se refere ao produto vetorial. É conhecido que o produto vetorial entre dois vetores resulta em um novo vetor perpendicular ao plano definido por esses vetores, assim $\theta = 90°$. Usamos a regra da mão direita para determinar o sentido do vetor.

Observação: como a soma dos vetores é igual a zero, temos,

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$$

para determinar o módulo de $\vec{c}$ usaremos o teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}$$

$$c = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$
$$c = \sqrt{16 + 9}$$
$$c = \sqrt{25}$$
$$c = 5$$

(a) usamos $|\vec{a} \times \vec{b}| = absen\theta$, temos,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = (4)(3)sen(90°)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 12 \cdot 1$$
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$$

então o módulo é 12.

(b) Usando a regra da mão direita, observamos que o vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ aponta na direção do produto $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, ou seja, no sentido positivo do eixo z.

(c) Queremos o módulo de $\vec{a} \times \vec{c}$. Lembrando que $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$, temos:

$$|\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times (\vec{-a} - \vec{b})|$$

de acordo com a propiedade do produto vetorial, $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + u \vec{\times} \vec{w}$, então:

$$|\vec{a} \times (-\vec{a} - \vec{b})| = |\vec{a} \times (-\vec{a}) + \vec{a} \times (-\vec{b})|$$

O produto de um vetor por seu oposto é sempre zero, então

$$\vec{a} \times (-\vec{a}) = 0$$

assim ficamos com

$$|\vec{a} \times (-\vec{a} - \vec{b})| = |0 + \vec{a} \times (-\vec{b})|$$

e $|\vec{a} \times (-\vec{b})| = |(4)(-3)sen(90°)|$, teremos então,

$$|\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times (\vec{-a} - \vec{b})| = |-12| = 12$$

.

(d) o vetor $\vec{a} \times (-\vec{b})$ aponta na direção do produto $\vec{i} \times (-\vec{j}) = -\vec{k}$, ou seja, no sentido negativo do eixo z.

(e) temos o mesmo procedimento dos itens anteriores, asssim,

$$|\vec{b} \times \vec{c} = |\vec{b} \times (-\vec{a} - \vec{b})| = |\vec{b} \times (-\vec{a}) + \vec{b} \times (-\vec{b})|$$

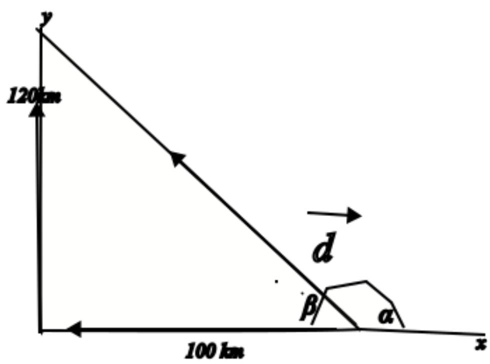
$$|\vec{b} \times \vec{c} = |\vec{b} \times (-\vec{a} - \vec{b})| = |(3)(4)sen(90°)| = 12$$

(f) o vetor aponta no sentido positivo do eixo z.

Problema 3 (Problema 05, pág 56, capítulo 3, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

O objetivo de um navio é chegar a um porto situado 120 km ao norte do ponto de partida, mas uma tempestade inesperada o leva para um local situado a 100 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância o navio deve percorrer e (b) qual rumo deve tomar para chegar ao destino?

Resolução P3:



Logo observando a figura, $\vec{d} = (-100\,\hat{i} + 120\,\hat{j})$ km.

(a) a questão quer saber a distância que o navio deve percorrer, para responder isso precisamos calcular o módulo:

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-100)^2 + (120)^2}$$

Calculando

$$|\vec{d}| = 156\,\text{km}$$

(b) Na questão pede para descobrirmos qual o rumo o navio deve tomar para chegar ao destino. Para isso, basta nós descobrirmos o ângulo β.

Sabendo que

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Logo

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{120}{100}$$

e para isolar o α teremos que calcular

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{120}{100}\right)$$

$$\alpha = 50,2°$$

Lembrando que

$$\alpha + \beta = 180°$$

$$\beta = 180° - 50,2°$$

$$\beta = 129,8°$$

Problema 4 (Problema 09, pág 56, capítulo 3, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

Dois vetores são dados por:

$$\vec{a} = (4,0\,m)\widehat{i} - (3,0\,m)\widehat{j} + (1,0\,m)\widehat{k}$$

e

$$\vec{b} = (-1,0\,m)\widehat{i} + (1,0\,m)\widehat{j} + (4,0\,m)\widehat{k}$$

Determine, em termos de vetores unitários, (a) $\vec{a} + \vec{b}$; (b) $\vec{a} - \vec{b}$; (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Resolução P4: Resolvendo o problema por partes.

(a) Para determinar $\vec{a}+\vec{b}$, basta somar as componentes correspondentes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = [(4-1)\widehat{i} + (-3+1)\widehat{j} + (1+4)\widehat{k}]m = (3\widehat{i} - 2\widehat{j} + 5\widehat{k})m$$

Portanto,

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\,m\widehat{i} - 2\,m\widehat{j} + 5\,m\widehat{k}$$

(b) Agora, para determinar $\vec{a} - \vec{b}$, basta subtrair as componentes correspondentes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = [(4+1)\widehat{i} + (-3-1)\widehat{j} + (1-4)\widehat{k}]m = (5\widehat{i} - 4\widehat{j} - 3\widehat{k})m$$

Portanto,

$$\vec{a} - \vec{b} = 5\,m\widehat{i} - 4\,m\widehat{j} - 3\,m\widehat{k}$$

(c) Para encontrar $\vec{c}$ tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$, podemos substituir os valores conhecidos.

Sabemos que

$$\vec{a} - \vec{b} = 5\,m\widehat{i} - 4\,m\widehat{j} - 3\,m\widehat{k}$$

E o vetor $\vec{c}$ pode ser representado dessa forma:

$$c = c_x\widehat{i} + c_y\widehat{j} + c_z\widehat{k}$$

Substituindo os valores conhecidos em $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=0$:

$$[(5\widehat{i}-4\widehat{j}-3\widehat{k})+(c_x\widehat{i}+c_y\widehat{j}+c_z\widehat{k})]m=(0\widehat{i}+0\widehat{j}+0\widehat{k})m$$

Agora, agrupando as componentes:

$$[(5+c_x)\widehat{i}+(-4+c_y)\widehat{j}+(-3+c_z)\widehat{k}]m=(0\widehat{i}+0\widehat{j}+0\widehat{k})m$$

Logo,

$$\vec{c}=-5\,m\widehat{i}+4\,m\widehat{j}+3\,m\widehat{k}.$$

Problema 5 (Problema 58, pág 59, capítulo 3, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

Um vetor $\vec{d}$ tem módulo $2,5\,\mathrm{m}$ e aponta para o norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação de $4,0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação de $-3,0\vec{d}$.

Resolução P5: (a) Sabemos que os vetores unitários $\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$, correspondem, respectivamente aos eixos x,y,z no sistema de coordenadas. O vetor $\vec{d}$ aponta na direção norte, ou seja, está sobre o eixo y, logo:

$$\vec{d}=(2,5\,m)\hat{\jmath}$$

Quando multipicamos um vetor por uma constante, mudamos apenas o módulo desse vetor, então teremos que:

$$|4,0\vec{d}|=|4,0\cdot 2,5\,m|=10\,m$$

(b) $4,0\vec{d}$ é positivo, logo, esse vetor está sobre o eixo y e tem mesmo sentido que o vetor $\vec{d}$, apontando para a direção norte.

(c) Assim como calculamos o módulo no item (a), temos que:

$$|-3,0\vec{d}|=|-3,0\cdot 2,5\,m|=7,5\,m.$$

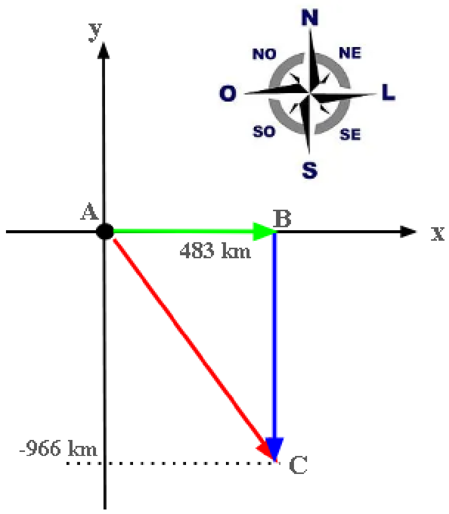
(d) Como o vetor $-3,0\vec{d}$ possui sinal negativo, ele está sobre o eixo y, porém com sentido contrário ao vetor $\vec{d}$, logo aponta em direção ao sul.

TÓPICO 2: Movimento Bidimensional

Problema 6 (Problema 08, pág 81, capítulo 4, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

Um avião voa 408 km para leste, da cidade A para a cidade B, em 45 min, e depois 966 km para o sul, da cidade B para uma cidade C, em 1,5 h. Para a viagem inteira, determine (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento do avião, (c) o módulo e (d) a direção da velocidade média e (e) a velocidade escalar média.

Resolução P6: Primeiro, vamos fazer a figura conforme o enunciado e os dados indicados na questão.



Escolhemos um sistema de coordenadas com $\hat{i}$ apontando para leste e $\hat{j}$ apontando para o sul. O primeiro deslocamento é $\vec{r}_{AB} = 483$ km$\hat{i}$ e o segundo é $\vec{r}_{BC} = -966$ km$\hat{j}$.

O deslocamento total é

$$\Delta\vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC} = (483\ km)\hat{i} + (-966\ km)\hat{j}$$

.

(a) O que nos dá o módulo

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \sqrt{(483\text{ km})^2 + (-966\text{ km})^2} = \sqrt{233289\text{ km}^2 + 933156\text{ km}^2}$$

$$= \sqrt{1166445\text{ km}^2} = 1080\text{ km}$$

Logo, $\Delta\vec{r}_{AC} = 1,08 \cdot 10^3$ km.

(b) Podemos observar que temos um triângulo retângulo onde temos o carteto oposto e o adjacente, então, podemos calcular a tangente.

Logo, vamos calcular a tangente para sabermos o ângulo.

$$tg(\theta) = \frac{-966\text{ km}}{483\text{ km}} = -2$$

Assim, o ângulo θ será o arco tangente de -2:

$$\theta = tg^{-1}(2) = -63,4°$$

Logo, $\theta = 63,4°$ ao sul à partir do leste.

(c) Para encontrarmos o módulo, precisamos encontrar primeiro a velocidade média. A velocidade média pode ser expressa por:

$$\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}_{AC}}{\Delta t}$$

onde $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, então

$$= (45 \text{ min} \cdot \frac{1\ h}{60\ min}) + 1,5\ h$$

$$= 0,75\ h + 1,5\ h = 2,25\ h$$

Substituindo esses valores na equação, teremos

$$\vec{V} = \frac{(483\ km)\hat{\imath} + (-966\ km)\hat{\jmath}}{2,25\ h}$$

$$\vec{V} = (\frac{215\ km}{h})\hat{\imath} + (\frac{-429\ km}{h})\hat{\jmath}$$

Logo, o módulo de $\vec{V}$ será,

$$\vec{V} = \sqrt{(\frac{215\ km}{h})^2 + (\frac{-429\ km}{h})^2}$$

$$= \sqrt{46225(\frac{km^2}{h^2}) + 184041(\frac{km^2}{h^2})} = \sqrt{230266(\frac{km^2}{h^2})}$$

Logo, o módulo será

$$\vec{V} = \frac{480\ km}{h}$$

(d) Como o vetor velocidade média é obtido dividindo o vetor deslocamento pelo intervalo de tempo, que é uma grandeza escalar positiva, esta divisão não muda seu sentido, logo, a direção e o sentido do vetor velocidade média são os mesmo do vetor deslocamento calculado no item (b), assim $\theta = 63,4°$ ao sul à partir do leste.

(e) A velocidade escalar média é a razão da distância efetivamente pecorrida pelo avião e o tempo gasto. Logo,

$$V = \frac{483\ km + 966\ km}{2,25\ h}$$

$$= \frac{1449\ km}{2,25\ h}$$

Assim,

$$V = \frac{644km}{h}$$

Problema 7 (Problema 29, pág 82, capítulo 4, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

A velocidade de lançamento de um projétil é cinco vezes maior que a velocidade na altura máxima. Determine o ângulo de lançamento θ_0.

<u>Resolução P7:</u> Escolhemos como origem o ponto de lançamento. Na altura máxima $v_y = 0$ e portanto, $v = v_x = v_0$. De acordo com o enunciado, $v_0 = 5v$. Como $v_0 cos\theta_0 = v_0 x = v$, temos:

$$(5v)cos\theta_0 = v = cos^{-1}(\frac{1}{5}) = 78,5°$$

.

Problema 8 (Problema 03, pág 81, capítulo 4, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

Um pósitron sofre um deslocamento $\Delta\vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ e termina com o vetor posição $\vec{r} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$, em metros. Qual era o vetor posição inicial do pósitron?

Resolução P8: Dados: $\Delta\vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ é a variação da posição, e o vetor posição final é $\vec{r} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ e queremos o vetor posição inicial $\vec{r_0}$.

O problema é trivial, se $\Delta r = \vec{r} - \vec{r_0}$. Movemos o vetor $\vec{r_0}$ para antes da igualdade e o vetor Δr para depois da igualdade, assim temos:

$$\vec{r_0} = \vec{r} - \Delta r$$

Agora basta substituir os dados e calcular as componentes correspondentes:

$$\vec{r_0} = (3\vec{j} - 4\vec{4}) - (2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$\vec{r_0} = (0\vec{i} - 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{j} - 4\vec{k} - 6\vec{k})$$

$$\vec{r_0} = (-2\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k})\ m$$

Então o vetor posição inicial do pósitron é $\vec{r_0} = (-2m)\vec{i} + (6m)\vec{j} - (10m)\vec{k}$.

Problema 9 (Problema 19, pág 82, capítulo 4, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

A aceleração de uma partícula que se move apenas em um plano horizontal xy é dada por $\vec{a} = 3t\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath}$, onde $\vec{a}$ está em metros por segundo ao quadrado e t em segundos. Em $t = 0$, o vetor posição $\vec{r} = (20,0\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (40,0\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$ indica a localização da partícula, que nesse instante tem uma velocidade $\vec{v} = (5,00\,\mathrm{m/s})\hat{\imath} + (2,00\,\mathrm{m/s})\hat{\jmath}$. Em $t = 4,00\,\mathrm{s}$, determine (a) o vetor posição em termos dos vetores unitários e (b) o ângulo entre a direção do movimento e o semieixo x positivo.

Resolução P9:

(a) Para encontrar o vetor posição no instante dado, podemos integrar o vetor aceleração duas vezes. Integrando a primeira vez, encontraremos o vetor velocidade e integrando novamente encontraremos o vetor posição. Podemos escrever o vetor $\vec{a}$ da seguinte forma:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} \cdot dt = d\vec{v}$$

Integrando dos dois lados da igualdade:

$$\int \vec{a} \cdot dt = \vec{v} + \vec{c} \quad (1)$$

Substituindo $\vec{a} = (3t\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath})$ em (1):

$$\int (3t\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath})dt = \vec{v} + \vec{c}$$

Resolvendo a integral:

$$\frac{3t^2}{2}\hat{\imath} + \frac{4t^2}{2}\hat{\jmath} + \vec{c} = \vec{v}$$

$$\vec{v}(t) = 1,5t^2\hat{\imath} + 2t^2\hat{\jmath} + \vec{c} \quad (2)$$

Para encontrar a constante $\vec{c}$, calcularemos $\vec{v}$, quando $t = 0$

$$\vec{v}(0) = \vec{c} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2):

$$\vec{v}(t) = (1,5t^2 + 5)\hat{\imath} + (2t^2 + 2)\hat{\jmath}$$

Integrando $\vec{v}$, para encontrar o vetor posição:

$$\int [(1,5t^2 + 5)\hat{\imath} + (2t^2 + 2)\hat{\jmath}]\ dt =$$

$$\left(\frac{1,5t^3}{3} + 5t\right)\hat{\imath} + \left(\frac{2t^3}{3} + 2t\right)\hat{\jmath} + \vec{c_1} = \vec{x} \quad (4)$$

Para encontrar $\vec{c_1}$, podemos calcular $\vec{x}$, com $t = 0$.

$$\vec{x}(0) = \vec{c_1} = (20\hat{\imath} + 40\hat{\jmath})m \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4):

$$\vec{x}(t) = \left(0,5t^3 + 5t + 20\right)\hat{\imath} + \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t + 40\right)\hat{\jmath}$$

Calculando $\vec{x}$, quando $t = 4$:

$$\vec{x}(4) = (72\hat{\imath} + 90,7\hat{\jmath})m$$

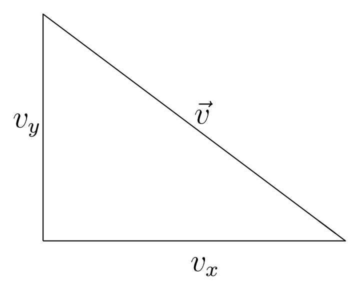
ou

$$\vec{x}(4) = (72\,m)\hat{\imath} + (90,7\,m)\hat{\jmath}$$

(b) A direção do movimento se refere ao vetor velocidade, logo temos que encontrar o vetor $\vec{v}$ no instante $t = 4$.

$$\vec{v}(4) = (29\hat{\imath} + 34\hat{\jmath})\ m/s$$

O ângulo que queremos encontrar, é o ângulo entre o vetor $\vec{v}$ e o eixo x. Na figura abaixo podemos ver a representação de $\vec{v}$ e suas componentes v_x e v_y.



Considerando o ângulo oposto à v_y como θ, podemos calcular a tangente desse ângulo. Sabendo que $\text{tg}(\theta) = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$, teremos:

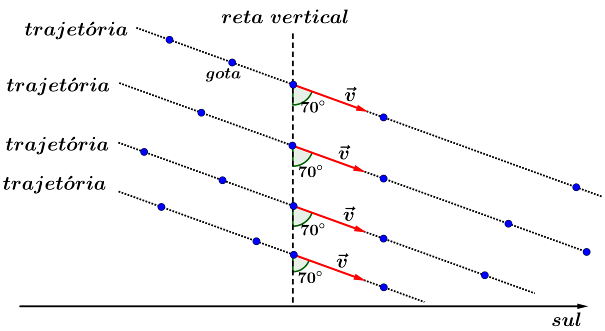
$$\text{tg } (\theta) = \frac{v_y}{v_x} =$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{34}{29}\right) = 49,5°.$$

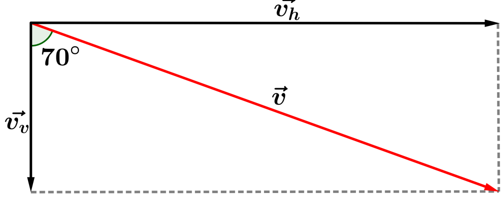
Problema 10 (Problema 75, pág 86, capítulo 4, Fundamentos de Física vol.1-Resnick, 9.Ed.)

Um trem viaja para o sul a 30 m/s em (relação ao solo) em meio a uma chuva que é soprada para o sul pelo vento. As trajetórias das gotas de chuva fazem um ângulo de 70° com a vertical quando medidas por um observador estacionário no solo. Um observador no trem, entretanto, vê as gotas caírem exatamente na vertical. Determine a velocidade escalar das gotas de chuva em relação ao solo.

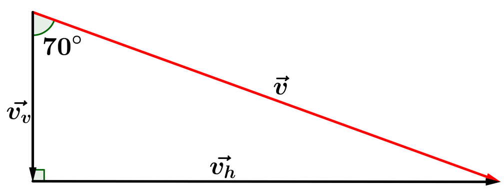
<u>Resolução P10:</u> Vamos considerar a direção sul como sendo a nossa direita. O enunciado nos diz que que a trajetória das gotas fazem 70° com a reta vertical, então o vetor velocidade $\vec{v}$ das gotas, em relação a um observador no solo, também irá fazer 70° com a vertical, como mostra a figura a seguir.



Podemos decompor o vetor velocidade $\vec{v}$ das gotas em uma componente horizontal $\vec{v}_h$ e outra componente vertical $\vec{v}_v$, da seguinte maneira.



Podemos ainda, reorganizar esses vetores, para facilitar nossos cálculos, veja:



Agora temos um triângulo retângulo e, com isso, podemos obter as duas seguintes relações:

- $\text{tg}\ \theta = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow \text{tg}\ 70° = \dfrac{v_h}{v_v} \Rightarrow \boxed{v_v = \dfrac{v_h}{\text{tg}\ 70°}} \quad (i)$

- Do Teorema de Pitágoras temos $\boxed{v^2 = {v_v}^2 + {v_h}^2} \quad (ii)$

Lembrando que v, v_h e v_v mencionados acima são os, respectivos, módulos dos vetores $\vec{v}, \vec{v}_h$ e $\vec{v}_v$.
Vamos substituir (i) em (ii), e isolar v que é justamente o que a questão nos pede.

$$v^2 = \left(\frac{v_h}{\text{tg}\,70°}\right)^2 + {v_h}^2$$

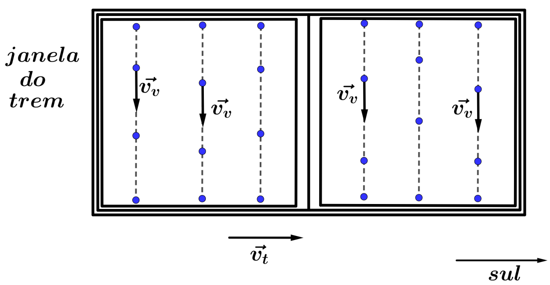
$$v^2 = \frac{{v_h}^2}{(\text{tg}\,70°)^2} + {v_h}^2$$

$$v^2 = \frac{{v_h}^2 + (\text{tg}\,70°)^2 v_h^2}{(\text{tg}\,70°)^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{{v_h}^2 + (\text{tg}\,70°)^2 v_h^2}{(\text{tg}\,70°)^2}}} \quad (iii)$$

Pronto, agora só precisanos descobrir v_h para substituir na expressão acima e encontrar v. Vamos lá!

Até aqui analisamos as gotas em relação ao solo,agora vamos analisar o coportamento das gotas em relação ao trem que está a 30 m/s para o sul. O enunciado nos diz que quem está no trem ver as gotas caírem verticalmente, vejamos a figura.



Podemos observar, que neste caso, a velocidade das gotas é causada apenas pela componente $\vec{v}_v$, sem a componente $\vec{v_h}$. Concluimos, então que $\vec{v}_h = \vec{v}_t$, onde $\vec{v_t}$ é a velocidade do trem. Logo, $v_h = v_t = 30\,m/s$, que era o que faltava encontrar para finalizar nossa solução.

Assim, de (iii) temos:

$$v = \sqrt{\frac{30^2 + (\text{ tg } 70^\circ)^2 30^2}{(\text{ tg } 70^\circ)^2}}$$

$$v = 31,92\,m/s$$

Aproximando,

$$\boxed{v = 32\,m/s}$$