



Lista de Exercícios

Funções exponenciais

Problema 1 (Stewart, J. Cálculo. Vol.1, 7ª Ed., p. 53, Prob. 1-4)

1-4. Utilize a Propriedade dos Exponentes para reescrever e simplificar a expressão.

1. a) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. a) $8^{\frac{4}{3}}$

b) $x(3x^2)^3$

3. a) $b^8(2b)^4$

b) $\frac{(6y^3)^4}{2y^5}$

4. a) $\frac{[(x^{2n}) \times x^{3n-1}]}{x^{n+2}}$

b) $\frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{(ab)^{\frac{1}{3}}}$

Resolução P1:

Tendo em vista as Propriedades dos Expoentes:

Se a e b forem números positivos e x e y, quaisquer números reais, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$

2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

Assim, resolvemos os itens:

$$1. \text{ a) } \frac{4^{-3}}{2^{-8}} = \frac{4^{-3}}{(2^2)^{-4}} = \frac{4^{-3}}{4^{-4}} = 4^{-3} \times 4^4 = 4^{-3+4} = 4$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{[(x \times x^3)]^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x \times x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$2. \text{ a) } 8^{\frac{4}{3}} = 8 \times 8^{\frac{1}{3}} = 8 \times 2 = 16$$

$$\text{b) } x(3x^2)^3 = x \times (3^3 \times (x^2)^3) = x \times (27x^6) = 27x^7$$

$$3. \text{ a) } b^8(2b)^4 = b^8 \times (2^4 \times b^4) = b^8 \times (16 \times b^4) = 16b^{12}$$

$$\text{b) } \frac{(6y^3)^4}{2y^5} = \frac{6^4 \times (y^4)^4}{2y^5} = \frac{1296 \times y^{12}}{2y^5} = \frac{1296}{2} \times y^{12} \times y^{-5} = 648y^{12-5} = 648y^7$$

$$4. \text{ a) } \frac{[(x^{2n}) \times x^{3n-1}]}{x^{n+2}} = \frac{x^n(x^n \times x^{3n-1})}{x^n \times x^2} = \frac{x^n \times x^{3n-1}}{x^2} = \frac{x^{3n+n} \times x^{-1}}{x^2} = \frac{x^{3n+n}}{x^2 \times x} = \frac{x^{4n}}{x^3} = x^{4n-3}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{(ab)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(ab^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(ab)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} \times b^{-\frac{1}{12}} = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{12}}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{b}}.$$

Problema 2 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5ª Ed., p. 128, Prob. 6.1)

Calcule:

$$1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x \quad (1)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x \quad (2)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \quad (3)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (0, 13)^x \quad (4)$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x - 3^x] \quad (5)$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2^x}{1 - 3^x} \quad (6)$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} \quad (7)$$

h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x + 2^{-x}] \quad (8)$$

i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x} \quad (9)$$

j)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [2^x + 2^{-x}] \quad (10)$$

Resolução P2:

1. a) vamos substituir, x por $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{+\infty} \quad (11)$$

e esse limite é igual a $+\infty$

b) vamos substituir, x por $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{-\infty} \quad (12)$$

e esse limite é igual a zero.

c) vamos substituir, x por $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} \quad (13)$$

E assim concluimos que a solução desse limite é zero.

d) vamos substituir, x por $+\infty$ logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (0, 13)^{+\infty} \quad (14)$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual zero

e) vamos substituir x por $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^{+\infty} - 3^{+\infty}] \quad (15)$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual a indeterminação e para obtermos um resultado vamos colocar o termo de maior grau em evidência, logo vai ficar:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x [\frac{2^x}{3^x} - 1]) \quad (16)$$

no entanto, fazendo a substituição, continua dando indeterminação, então vamos modificar mais um pouco essa função para não dar indeterminação novamente.

logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x * \lim_{x \rightarrow +\infty} ([\frac{2}{3}]^x - 1) \quad (17)$$

logo substituindo x por $+\infty$, o limite vai dar $-\infty$.

f) vamos substituir, x por $+\infty$, porém, da uma indeterminação, vamos precisar usar a regra de l'Hopital que diz, basta derivar para eliminar a indeterminação. Derivando:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-lh(2)2^x}{-lh(3)3^x} \quad (18)$$

logo usando as propriedades do calculo do limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-lh(2)}{-lh(3)} * \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3}\right]^x \quad (19)$$

E assim podemos concluir que quando substituimos o x por $+\infty$ o limite vai ser zero.

g) vamos substituir x por $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^- + \infty \quad (20)$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual, Zero.

h) ao substituir x por $+\infty$, vamos ter uma indeterminação. E para solucionar essa indeterminação, vamos usar uma das propriedades de limites.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [2^x] + \lim_{x \rightarrow +\infty} [2^{-x}] \quad (21)$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual $+\infty$.

i) vamos substituir x por $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^-(-\infty) \quad (22)$$

Logo, a solução desse limite é $-\infty$.

j) ao substituir x por $-\infty$, vamos ter uma indeterminação.

E para solucionar essa indeterminação, vamos usar uma das propriedades de limites.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [2^x] + \lim_{x \rightarrow -\infty} [2^{-x}] \quad (23)$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual $+\infty$

Problema 3 (Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 9ª Ed., p. 90, Prob. 232)

232. Resolva a equação $2^{3x+2} \cdot 3^{3x-1} = 8$.

Resolução P3:

Para resolver a equação: $2^{3x+2} \cdot 3^{3x-1} = 8$, podemos começar igualando 8 a uma potência:

$$8 = 2^3. \text{ Ficando da seguinte forma: } 2^{3x+2} \cdot 3^{3x-1} = 2^3$$

Agora, podemos usar a propriedade das potências de mesma base para igualar os expoentes:

$$3x + 2 = 3$$

Isolando x obteremos:

$$3x = 3 - 2$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Portanto, a solução da equação é. $x = \frac{1}{3}$.

Problema 4 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10ª Ed., p.41, Prob. 74)

Determine os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$.

Resolução P4:

Para resolver o problema usaremos o método da redução a uma base comum. Esse método é usado quando ambos os membros da equação forem redutíveis a potências de mesma base. Utilizando as propriedades de potências, podemos reorganizar a equação, igualando as bases da seguinte forma:

$$10^2 \cdot 10^x = (10^3)^{\frac{5}{x}} \implies 10^2 \cdot 10^x = 10^{\frac{5}{x}}$$

Como a função exponencial é injetora, ou seja, para valores diferentes de x , tem-se uma imagem também diferente, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais. Usando essa propriedade teremos:

$$10^2 \cdot 10^x = 10^{\frac{5}{x}} \implies 2 + x = \frac{5}{x}$$

Reorganizando a equação:

$$2 \cdot x + x^2 = 15 \implies x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$$

Calculando o valor de Δ :

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (1) \cdot (-15)$$

$$\Delta = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

Encontrando as raízes da equação de 2º grau:

$$x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ ou } x_2 = -5$$

Portanto, os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[5]{1000^5}$, são:

$$S = \{3, -5\}$$

Problema 5 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10ª Ed., p. 89, Prob. 226)

O crescimento de certa cultura de bactérias obedece à função

$$X(t) = Ce^{kt},$$

em que $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t \geq 0$; C e k são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias $X(0)$ duplica em 4 horas, quantas delas se pode esperar no fim de 6 horas?

Resolução P5:

Primeiro, vamos usar a informação de que o número inicial de bactérias duplica em 4 horas para determinar os valores de C e k .

Sabemos que $X(4)$ deve ser igual a duas vezes o valor inicial $X(0)$, ou seja, $X(4) = 2X(0)$.

Substituindo na fórmula:

$$X(4) = Ce^{4k} = 2C$$

Agora, podemos cancelar o termo C em ambos os lados da equação:

$$e^{4k} = 2$$

Tomando o logaritmo natural (neperiano) em ambos os lados:

$$4k = \ln(2)$$

Agora, podemos encontrar o valor de k :

$$k = \frac{\ln(2)}{4}$$

Agora que conhecemos o valor de k , podemos usar a função $X(t)$ para encontrar o número de bactérias no final de 6 horas, ou seja, $X(6)$:

$$X(6) = Ce^{6k}$$

Substituindo o valor de k :

$$X(6) = Ce^{\frac{3\ln(2)}{2}}$$

$$X(6) = C(e^{\ln(2)})^{3/2}$$

Como $e^{\ln(2)} = 2$:

$$X(6) = C(2^{3/2})$$

A raiz quadrada de 2 elevada ao cubo é igual a $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$:

$$X(6) = C(2\sqrt{2})$$

Portanto, no final de 6 horas, podemos esperar que o número de bactérias seja igual a C vezes $2\sqrt{2}$.

Funções logarítmicas

Problema 6 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10ª Ed., p. 103, Prob. 282)

Resolva as equações:

$$1. \text{ a) } \log(x^{\log x}) = 1$$

$$b) x^{\log x - 1} = 100$$

$$c) \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$$

Resolução P6:

Antes de mais nada é importante saber que para $\log_a b = x$ existir é necessário que $0 < a \neq 1$ e $b > 0$. Dessa maneira, as soluções das equações devem satisfazer essas condições.

Observação: Quando a base de um logaritmo é igual a 10 ela pode ser omitida. Por exemplo: $\log_{10} 5$ pode ser escrito como $\log 5$. Assim, quando a base for omitida durante a resolução abaixo devemos ter em mente que se trata de um logaritmo de base 10.

1. a) Para este caso a condição de existência dos logaritmos é $\boxed{x > 0}$ (I).

Assim: $\log(x^{\log x}) = 1$, usando $\log_a b^a = a \cdot \log_a b$ temos que $\log(x^{\log x}) = \log x \cdot \log x$

$$\Rightarrow \log x \cdot \log x = 1$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 1, \text{ aplicando a raiz quadrada dos dois lados da igualdade}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\log x)^2} = \sqrt{1} \Rightarrow \log x = \pm 1$$

$$\boxed{\log x = 1} \text{ (II)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\log x = -1} \text{ (III)}$$

Sabemos que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, aplicando isto em (II) e em (III), temos:

$$\bullet \log x = 1 \Rightarrow 10^1 = x$$

$$\boxed{x = 10}$$

$$\bullet \log x = -1 \Rightarrow 10^{-1} = x, \text{ usando a propriedade de potências } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ temos que } 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{10}}$$

Assim, concluímos que $x = 10$ ou $x = \frac{1}{10}$ satisfazem a condição de existência (I). Logo, temos como solução:

$$S = \left\{ \frac{1}{10}, 10 \right\}$$

b) Neste caso a condição de existência dos logaritmos é $\boxed{0 < x \neq 1}$ (I).

Assim: $x^{\log x - 1} = 100$, aplicando logaritmo de base x dos dois lados da igualdade

$$\Rightarrow \log_x(x^{\log x - 1}) = \log_x 100, \text{ usando } \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b \text{ temos que } \log_x(x^{\log x - 1}) = (\log x - 1) \cdot \log_x x$$

$$\Rightarrow (\log x - 1) \cdot \log_x x = \log_x 100, \text{ pela propriedade } \log_a a = 1 \text{ temos que } \log_x x = 1$$

$$\Rightarrow (\log x - 1) \cdot 1 = \log_x 100$$

$$\Rightarrow \log x - 1 = \log_x 100, \text{ utilizando } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ temos que } \log_x 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} x} = \frac{\log 100}{\log x}$$

$$\Rightarrow \log x - 1 = \frac{\log 100}{\log x}, \text{ como } \log 100 = \log 10^2$$

$$\Rightarrow \log x - 1 = \frac{\log 10^2}{\log x}, \text{ usando a propriedade } \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b \text{ temos que } \log 10^2 = 2 \cdot \log 10$$

$$\Rightarrow \log x - 1 = \frac{2 \cdot \log 10}{\log x}, \text{ utilizando a propriedade } \log_a a = 1 \text{ temos que } \log 10 = 1$$

$$\Rightarrow \log x - 1 = \frac{2 \cdot 1}{\log x}$$

$$\Rightarrow \log x - 1 = \frac{2}{\log x}, \text{ fazendo } \log x = t, \text{ temos:}$$

$$\Rightarrow t - 1 = \frac{2}{t}$$

$$\Rightarrow (t - 1) \cdot t = 2$$

$$\Rightarrow t^2 - t = 2, \text{ subtraindo 2 de cada lado da igualdade}$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0, \text{ que é uma equação do } 2^\circ \text{ grau}$$

Para resolver esta equação vamos usar a fórmula $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$, mas antes vamos determinar os seus coeficientes que são: $a = 1, b = -1$ e $c = -2$.

Logo:

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow t &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ \Rightarrow t &= \frac{1 \pm 3}{2} \\ \Rightarrow t &= 2 \quad \text{ou} \quad t = -1\end{aligned}$$

Como fizemos $\log x = t$ concluímos que:

$$\boxed{\log x = 2} \text{ (II)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\log x = -1} \text{ (III)}$$

Sabemos que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, aplicando isso em (II) e em (III), temos:

- $\log x = 2 \Rightarrow 10^2 = x$

$$\boxed{x = 100}$$

- $\log x = -1 \Rightarrow 10^{-1} = x$, usando a propriedade de potências $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ temos que $10^{-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} = x$

$$\boxed{x = \frac{1}{10}}$$

Como $x = 100$ ou $x = \frac{1}{10}$ satisfazem a condição (I) temos como solução:

$$S = \left\{ \frac{1}{10}, 100 \right\}$$

c) A condição de existência dos logaritmos é $\boxed{0 < x \neq 1}$ (I).

Assim: $\Rightarrow \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$, vamos elevar os dois lados da igualdade ao quadrado

$$\Rightarrow (\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}})^2 = 10^2$$

$\Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100$, aplicando logaritmo de base x dos dois lados da igualdade

$\Rightarrow \log_x x^{\log \sqrt{x}} = \log_x 100$, pela propriedade $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ temos que

$$\Rightarrow \log_x x^{\log \sqrt{x}} = \log \sqrt{x} \cdot \log_x x$$

$\Rightarrow \log \sqrt{x} \cdot \log_x x = \log_x 100$, como $\log_a a = 1$ temos que $\log_x x = 1$

$$\Rightarrow \log \sqrt{x} \cdot 1 = \log_x 100$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{x} = \log_x 100, \text{ usando } \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \text{ temos que } \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \log x^{\frac{1}{2}} = \log_x 100, \text{ pela propriedade } \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b \text{ temos que } \log x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log x = \log_x 100, \text{ utilizando } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ temos que } \log_x 100 = \frac{\log 100}{\log x}$$

$$\Rightarrow \frac{\log x}{2} = \frac{\log 100}{\log x}, \text{ mas como } \log 100 = \log 10^2$$

$$\Rightarrow \frac{\log x}{2} = \frac{\log 10^2}{\log x}, \text{ pela propriedade } \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b \text{ temos que } \log 10^2 = 2 \cdot \log 10$$

$$\Rightarrow \frac{\log x}{2} = \frac{2 \cdot \log 10}{\log x}, \text{ usando } \log_a a = 1 \text{ temos que } \log 10 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\log x}{2} = \frac{2 \cdot 1}{\log x}$$

$$\Rightarrow \log x \cdot \log x = 2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 = 4, \text{ aplicando a raiz quadrada dos dois lados da igualdade}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\log x)^2} = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow \log x = \pm 2$$

Assim, temos que:

$$\boxed{\log x = 2} \text{ (II)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\log x = -2} \text{ (III)}$$

Sabemos que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, aplicando isso em (II) e em (III), temos:

- $\log x = 2 \Rightarrow 10^2 = x$

$$\boxed{x = 100}$$

- $\log x = -2 \Rightarrow 10^{-2} = x$, pela propriedade de potência $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ temos que $10^{-2} = \frac{1}{10^2} \Rightarrow \frac{1}{10^2} = x$

$$\boxed{x = \frac{1}{100}}$$

Como $x = 100$ ou $x = \frac{1}{100}$ satisfazem a condição de existência (I), temos como solução:

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 100 \right\}$$

Problema 7 (Stewart, J. Cálculo. Vol.1, 7ª Ed., p. 65, Prob. 40)

Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

$$\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$$

Resolução P7:

Quando um número é multiplicado por \ln , usamos a propriedade:

$\ln(a^n) = n \ln a$, isso significa que n estava como expoente, assim temos:

$$\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln c^2$$

Quando temos dois logaritmos de mesma base sendo somados, usamos a propriedade:

$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$, assim temos:

$$\ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln c^2 = \ln(a+b) \cdot (a-b) - \ln c^2$$

fazendo a distributiva de $\ln(a+b) \cdot (a-b)$, temos:

$$\ln(a+b) \cdot (a-b) = \ln(a^2 - b^2), \text{ assim:}$$

$$\ln(a^2 - b^2) - \ln c^2$$

Quando temos subtração entre logaritmos de mesma base usamos a propriedade:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c, \text{ portanto:}$$

$$\boxed{\ln \frac{a^2 - b^2}{c^2}}$$

Problema 8 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5ª Ed., p. 132, Prob. 1)

Calcule:

1. $\log_{10} 100$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 16$

3. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})$

4. $\log_9(\sqrt{3})$
5. $\log_{10} 1$
6. $\log_5(-5)$
7. $\log_a 1 \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
8. $\log_3 243$

Resolução P8:

Conhecendo o Teorema: Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, e $\beta > 0$ dois reais quaisquer. Então existe um único γ real tal que $a^\gamma = \beta$. (página 128)

Portanto, denomina-se logaritmo de β na base a e indica-se por $\gamma = \log_a \beta$.

Assim, $\gamma = \log_a \beta \iff a^\gamma = \beta$, onde $\log_a \beta$ somente está definido para $\beta > 0$, $a > 0$, e $a \neq 1$. (página 129).

Logo, vamos calcular o logaritmo em cada um dos itens.

1. $\log_{10} 100$

$$\gamma = \log_{10} 100$$

$$10^\gamma = 100$$

$$\gamma = 2$$

Logo, o logaritmo de 100 na base 10 é 2.

2. $\log_{\frac{1}{2}} 16$

$$\gamma = \log_{\frac{1}{2}} 16$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma = 16$$

$$\gamma = -4$$

Logo, o logaritmo de 16 na base $\frac{1}{2}$ é -4.

3. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})$

$$\gamma = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma = \sqrt{2}$$

$$\gamma = -\frac{1}{2}$$

Logo, o logaritmo de $\sqrt{2}$ na base $\frac{1}{2}$ é $-\frac{1}{2}$.

$$4. \log_9(\sqrt{3})$$

$$\gamma = \log_9(\sqrt{3})$$

$$9^\gamma = \sqrt{3}$$

$$\gamma = \frac{1}{4}$$

Logo, o logaritmo de $\sqrt{3}$ na base 9 é $\frac{1}{4}$.

$$5. \log_{10} 1$$

$$\gamma = \log_{10} 1$$

$$10^\gamma = 1$$

$$\gamma = 0$$

Logo, o logaritmo de 1 na base 10 é 0.

$$6. \log_5(-5)$$

$$\gamma = \log_5(-5)$$

$$5^\gamma = -5$$

Não existe γ que satisfaça. Ou seja, não existe o logaritmo de -5 na base 5.

$$7. \log_a 1 \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

$$\gamma = \log_a 1$$

$$a^\gamma = 1$$

$$\gamma = 0$$

Logo, o logaritmo de 1 na base a é 0.

$$8. \log_3 243$$

$$\gamma = \log_3 243$$

$$3^\gamma = 243$$

$$\gamma = 5$$

Logo, o logaritmo de 243 na base 3 é 5.

Problema 9 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10ª Ed., p. 103, Prob. 287)

Resolva equação $\log_2(x-2) = \log_2(x^2-x+6) + \log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$.

Resolução P9:

Estabelecendo inicialmente a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\left. \begin{array}{l} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x^2-x+6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x > 2$$

Aplicando as propriedades e transformando os logaritmos à base 2, temos:

$$\log_2(x-2) = \log_2(x^2-x+6) + \log_{2^{-1}}(2x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x-2) = \log_2(x^2-x+6) - \log_{2^{-1}}(2x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x-2) = \log_2 \frac{x^2-x+6}{2x+1} \Rightarrow x-2 = \frac{x^2-x+6}{2x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = x^2 - x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

Analisando as raízes que satisfazem a equação temos:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

Para o conjunto solução, $x = -2$ não convém, pois $x < 2$, logo: $S = 4$.

Problema 10 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10ª Ed., p. 86, Prob. 208)

Seja f a função que a cada quadrado perfeito associa seu logaritmo na base 2. Se $f(x^2) = 2$, determine o valor de x .

Resolução P10:

A função f é definida por:

$$f(x^2) = \log_2(x^2)$$

Se $f(x^2) = 2$, então:

$$\log_2(x^2) = 2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$