LISTA DE EXERCÍCIOS
GRUPO PET - IFCE CAMPUS SOBRAL

TÓPICO 3: Centro de Massa e Momento Linear

Problema 1 (Problema nº01, pág. 236, capítulo 9, do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)
Uma partícula de $2,00\,\text{kg}$ tem coordenadas $xy\,(-1,20\,\text{m}, 0,500\,\text{m})$ e uma partícula de $4,00\,\text{kg}$ tem coordenadas $xy\,(0,600\,\text{m}, -0,750\,\text{m})$. Ambas estão em um plano horizontal. Em que coordenada (a) x e (b) y deve ser posicionada uma terceira partícula de $3,00\,\text{kg}$ para que o centro de massa do sistema de três partículas tenha coordenadas $(-0,500\,\text{m}, -0,700\,\text{m})$?

Resolução P1: Sabemos que o centro de massa é dado por:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \text{e} \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Assim resolveremos a questão.

a) A coordenadado x do centro de massa do sistema é

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Logo

$$-0,500\,m = \frac{(2,00\,kg)(-1,20\,m) + (4,00\,kg)(0,600\,m) + (3,00\,kg)x_3}{2,00\,kg + 4,00\,kg + 3,00\,kg}$$

que nos dá

$$\boxed{x_3 = -1,50\,m}$$

b)A coordenda y do centro de massa do sistema é

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Logo

$$-0,700\,m = \frac{(2,00\,kg)(5,00\,m) + (4,00\,kg)(-0,750) + (3,00\,kg)y_3}{2,00\,kg + 4,00\,kg + 3,00\,kg}$$

Que nos dá

$$\boxed{y_3 = -1,43\,m}$$

Problema 2 (Problema nº12, pág. 238 , capítulo 9 , do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)

Dois patinadores, um de 65 kg e outro de 40 kg, estão em uma pista de gelo e seguram as extremidades de uma haste de 10 m de comprimento e massa desprezível. Os patinadores se puxam ao longo da haste até se encontrarem. Qual é a distância percorrida pelo patinador de 40 kg?

Resolução P2: Como o centro de massa do sistema de dois patinadores não se move, os patinadores se encontram no centro de massa do sistema. Chamando de x a distância entre o patinador de 40 kg e o centro de massa, temos:

$$(65\,kg)(10m - x) = (40\,kg)x \Rightarrow x = 6,2\,m.$$

Assim, a distância percorrida pelo patinador de 40 kg é $6,2\,m$.

Problema 3 (Questão nº06, pág. 237, capítulo 9 do livro Fundamentos de Física - Halliday e Resnick, vol.1, 9ª edição)
A Fig. 9-39 mostra uma caixa cúbica que foi construída com placas metálicas uniformes de espessura desprezível. A caixa não tem tampa e tem uma aresta $L = 40$ cm. Determine (a) a coordenada x, (b) a coordenada y e (c) a coordenada z do centro de massa da caixa.

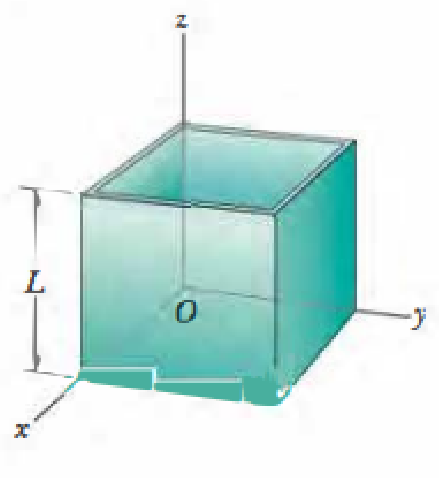

Figura 1: livro Fundamentos de Física

Resolução P3: Como a questão menciona que a caixa é homogênea, o centro de massa de cada placa coincide com o centro geométrico de cada uma delas. Podemos tratá-las como se toda sua massa estivesse concentrada nesse ponto e, como a espessura é desprezível, o centro geométrico está localizado no centro da área de cada placa.

Coordenadas do centro de massa:

- $(x_1, y_1, z_1) = (0, 20, 20)$ para face do plano yz
- $(x_2, y_2, z_2) = (20, 0, 20)$ para face do plano xz
- $(x_3, y_3, z_3) = (02, 20, 0)$ para face do plano xy
- $(x_4, y_4, z_4) = (40, 20, 20)$ para face do plano yz

- $(x_5, y_5, z_5) = (20, 40, 20)$ para face do plano xz

As placas têm as mesmas dimensões e massas iguais. Vamos denominar a massa de cada uma por m.

Vamos usar a expressão $x_m = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. Observação: aplicamos a expressão para todos os itens, substituindo os valores conforme necessário.

a)

$$x_m = \frac{(m.x_1 + m.x_2 + m.x_3 + m.x_4 + m.x_5)}{5m}$$

colocamos m em evidência

$$x_m = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}{5}$$

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}{5}$$

$$x_m = \frac{(0 + 20 + 20 + 40 + 20)}{5}$$

$$x_m = \frac{100}{5}$$

$$x_m = 20\,cm$$

.

b)

$$y_m = \frac{(m.y_1 + m.y_2 + m.y_3 + m.y_4 + m.y_5)}{5m}$$

colocamos m em evidência

$$y_m = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)}{5}$$

$$y_m = \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)}{5}$$

$$y_m = \frac{(20 + 0 + 20 + 20 + 40)}{5}$$

$$y_m = \frac{100}{5}$$

$$y_m = 20\,cm$$

.

c)

$$z_m = \frac{(m.z_1 + m.z_2 + m.z_3 + m.z_4 + m.z_5)}{5m}$$

colocamos m em evidência

$$z_m = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} \frac{(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)}{5}$$

$$z_m = \frac{(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)}{5}$$

$$z_m = \frac{(20 + 20 + 0 + 20 + 20)}{5}$$

$$z_m = \frac{80}{5}$$

$$z_m = 16\, cm$$

.

Problema 4 (Problema nº19, pág. 238, capítulo 9, do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)
Um caminhão de 2100 kg viajando para o norte a 41 km/h vira para leste e acelera até 51 km/h. (a) Qual é a variação da energia cinética do caminhão? Quais são (b) o módulo e (c) o sentido da variação do momento?

Resolução P4: Dados do problema:

$$V_A = 41\, km/h \Longrightarrow 11,38\, m/s$$

Consideraremos o sentido positivo do movimento para o norte. Escrevendo a velocidade do caminhão na direção norte em termos de vetores unitários temos:

$$V_A = (11,38\, m/s)\, \hat{\jmath}$$

Logo após o caminhão se desloca no sentido leste com velocidade de :

$$V_B = 51\, km/h \Longrightarrow 14,16\, m/s$$

Escrevendo em termos de vetores unitários:

$$V_B = (14,16\, m/s)\, \hat{\imath}$$

(a) A energia cinética inicial do caminhão é:

$$K_A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot {V_A}^2$$

A energia cinética final é:

$$K_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot {V_B}^2$$

A variação de energia cinética é:

$$\begin{aligned}
\Delta K &= K_B - K_A \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot {V_B}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot {V_A}^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot ({V_B}^2 - V_A^2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2100 \cdot (14,16^2 - 11,38^2) \\
\Delta K &= 74.551,26\, J
\end{aligned}$$

(b) Temos que :

$$\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{V} \cdot m$$

Momento linear inicial do caminhão:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\rho_A} &= \overrightarrow{V_A} \cdot m \\
&= 2100\, kg \cdot (11,38\, m/s)\, \hat{\jmath} \\
&= (23898\, kg \cdot\ m/s)\, \hat{\jmath}
\end{aligned}$$

momento linear final do caminhão:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\rho_B} &= \overrightarrow{V_B} \cdot m \\
&= 2100\, kg \cdot (14,16\, m/s)\, \hat{\imath} \\
&= (29736\, kg \cdot\ m/s)\, \hat{\imath}
\end{aligned}$$

A variação do momento linear será:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Delta}\rho &= \overrightarrow{\rho}_B - \overrightarrow{\rho}_A \\
&= (29736\, \hat{\imath} - 23898\, \hat{\jmath})\, km \cdot m/s
\end{aligned}$$

Calculando o módulo da variação do momento linear:

$$\begin{aligned}
\Delta\rho &= \sqrt{(29736)^2 + (-23898)^2} \\
&= 38148,9 km \cdot m/s
\end{aligned}$$

(c) Traçando um triângulo retângulo sobre a trajetória do caminhão, temos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{C.O.}{C.A.} = \frac{23898}{29736} = 0,8036$$

$\theta = \operatorname{arctg}(0,8036) = 38,785°$ **ao sul do leste**.

Problema 5 (Problema nº18, pág. 238, capítulo 9, do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)
Uma bola de 0,70 kg está se movendo horizontalmente com uma velocidade de 5,0 m/s quando se choca com uma parede vertical e ricocheteia com uma velocidade de 2,0 m/s. Qual é o módulo da variação do momento linear da bola?

Resolução P5: Como a bola está se movendo apenas em uma direção, vamos considerar que ela se movimenta sobre o eixo x, com sentido positivo sendo para a direita. Assim, podemos escrever as velocidades inicial e final em termos dos vetores uniários da seguinte forma:

$$\vec{v}_{inicial} = (5,0\,m/s)\,\hat{i} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{final} = (-2,0\,m/s)\,\hat{i}$$

O momento linear é dado por $\vec{p} = m\vec{v}$, logo a variação do momento linear da bola será:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{final} - \vec{p}_{inicial}$$

$$\Delta\vec{p} = m \cdot \vec{v}_{final} - m \cdot \vec{v}_{inicial}$$

$$\Delta\vec{p} = m \cdot (-2,0\,m/s)\,\hat{i} - m \cdot (5,0\,m/s)\,\hat{i}$$

$$\Delta\vec{p} = m \cdot \left[(-2,0\,m/s)\,\hat{i} - (5,0\,m/s)\,\hat{i}\right]$$

$$\Delta\vec{p} = m \cdot (-7,0\,m/s)\,\hat{i}$$

Como $m = 0,70\,kg$

$$\Delta\vec{p} = 0,70\,kg \cdot (-7,0\,m/s)\,\hat{i}$$

$$\Delta\vec{p} = \left(-4,9\,\frac{kg \cdot m}{s}\right)\,\hat{i}$$

Agora vamos calcular o módulo de $\Delta\vec{p}$

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{\left(-4,9\,\frac{kg \cdot m}{s}\right)^2}$$

$$\boxed{|\Delta\vec{p}| = 4,9\,\frac{kg \cdot m}{s}}$$

TÓPICO 4: Colisões

Problema 6 (Problema nº55, pág. 242, capítulo 9, do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)
Um bloco de 5 kg com uma velocidade escalar de 3,0 m/s colide com um bloco de 10 kg com uma velocidade escalar de 2,00 m/s que se move na mesma direção e sentido. Após a colisão, o bloco de 10 kg passa a se mover no mesmo sentido com uma velocidade de 2,5 m/s. (a) Qual é a velocidade do bloco de 5 kg imediatamente após a colisão? (b) De quanto varia a energia cinética total do sistema dos dois blocos por causa da colisão? (c) Suponha que a velocidade do bloco de 10 kg após o choque é 4,0 m/s. Qual é, nesse caso, a variação da energia cinética total? (d) Explique o resultado do item (c).

Resolução P6: Primeiro vamos escolher um eixo x apontando no sentindo inicial do movimento dos blocos.

(a) De acordo com a lei da conservação do momento, temos:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(5\,kg)(3,0\,m/s) + (10\,kg)(2,0\,m/s) = (5\,kg)v_{1f} + (10\,kg)(2,5\,m/s)$$
$$15 + 20 = 5v_{1f} + 25$$
$$v_{1f} = \frac{35-25}{5} = 2$$

o que nos dá $v_{1f} = 2\,m/s$. Assim, a velocidade do bloco de 5,0 kg imediatamente após a colisão é $2,0\,m/s$.

(b) A variação da energia cinética total é

$$K_i - K_f = \frac{1}{2}(5)(3)^2 + \frac{1}{2}(10)(2)^2 - \frac{1}{2}(5)(2)^2 - \frac{1}{2}(10)(2,5)^2$$
$$= 22,5 + 20 - 10 - 31,25$$
$$= 42,5 - 41 = -1,25J \approx -1,3\,J$$

.

(c) Nessa situação em que $v_{2f} = 4,0\,m/s$, a lei de conservação do momento nos dá $v_{1f} = -1m/s$ e obtemos $\Delta K = +40J$.

(d) **Resposta pessoal**. A energia cinética pode aumentar, se existir algum fator adicional no sistema, resultando em uma conversão de energia. Por exemplo, existir um pouco de pólvora no local do impacto (nesse caso, a energia química poderá se transformar em energia mecâcina).

Problema 7 (Problema número 72, pág. 244, capítulo 9, do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)
A bola B, que se move no sentido positivo de um eixo x com velocidade v, colide com a bola A inicialmente em repouso na origem. A e B têm massas diferentes. Após a colisão, B se move no sentido negativo do eixo y com velocidade escalar $v/2$. (a) Qual é a orientação de A após a colisão? (b) Mostre que a velocidade de A não pode ser determinada a partir das informações dadas.

Resolução P7: A figura abaixo mostra o movimento das bolas A e B com relação aos eixos x e y, bem como os vetores componentes respectivos.

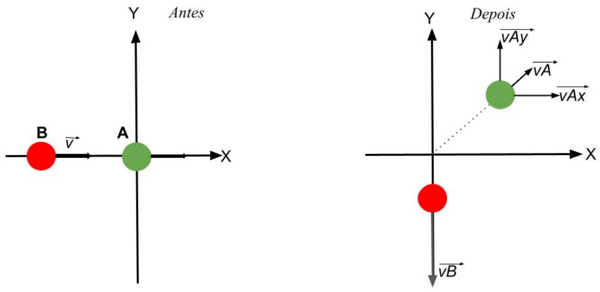

Figura 2: Autor

O momento linear de uma partícula pode ser calculado usando a seguinte expressão:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Antes da colisão:

Considerando o sistema formado pelas duas partículas, o momento linear do sistema será igual ao momento linear da bola B.

$$\vec{p_1} = m_B\vec{v}$$

Como a velocidade inicial da bola B é horizontal, ela tem componentes apenas nessa direção, assim, podemos escrever o momento linear na notação de vetores unitários como:

$$\vec{p_1} = (m_B v)\,\hat{i}.$$

- Depois da colisão:

A bola A se move com velocidade $\vec{v}_A$ cujo vetor forma um ângulo θ com o semi-eixo x positivo.

Calculando o seno e o cosseno do ângulo θ formado pelo vetor velocidade $\vec{v}_A$ e suas componentes v_{Ax} e v_{Ay}, temos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_{Ay}}{v_A} \quad \Rightarrow \quad v_{Ay} = v_A \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{v_{Ax}}{v_A} \quad \Rightarrow \quad v_{Ax} = v_A \cos\theta$$

Escrevendo essas velocidades na notação de vetores unitários, teremos:

$$\vec{v}_A = (v_A \cos\theta)\,\hat{i} + (v_A \operatorname{sen}\theta)\,\hat{j}$$

onde $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são os vetores unitários nas direções x e y, respectivamente.

A bola B se move no sentido negativo do eixo y com velocidade cujo módulo é igual a metade do módulo da sua velocidade inicial:

$$\vec{v}_B = (-0,5 \cdot v)\,\hat{j}$$

O momento linear do sistema depois da colisão é

$$\vec{p}_2 = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$$

$$= (m_A v_A \cos\theta)\,\hat{i} + (m_A v_A \operatorname{sen}\theta - 0,5 \cdot m_B v)\;\hat{j}$$

Como a colisão acontece num intervalo muito pequeno, qualquer impulso causado por forças externas pode ser desprezado e o momento linear do sistema imediatamente antes e depois da colisão são iguais, logo

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

Na direção x, temos

$$m_B v = m_A v_A \cos\theta$$

Na direção y, temos

$$0,5 \cdot m_B v = m_A v_A \operatorname{sen}\theta$$

Essas duas equações podem ser escritas como um sistema:

$$\begin{cases} m_B v = m_A v_A \cos\theta \\ 0,5 \cdot m_B v = m_A v_A \operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

a) Encontrando a orientação de A após a colisão:

Substituindo $m_B \cdot v$ na segunda equação por $m_A \cdot v_A \cdot \cos\theta$ da primeira, teremos:

$$0,5 \cdot m_A \cdot v_A \cdot \cos\theta = m_A \cdot v_A \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$0,5 \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$$

Dividindo ambos os lados da equação por $\cos\theta$, temos:

$$0,5 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

Calculando o arco tangente,

$$\theta = \operatorname{arctg}(0,5) \approx 27^\circ$$

b) Se resolvermos a primeira equação do sistema para v_A, temos:

$$v_A = \frac{m_B \cdot v}{m_A \cdot \cos\theta}$$

Resolvendo a segunda equação do sistema para v_A, temos:

$$v_A = \frac{0,5 \cdot m_B \cdot v}{m_A \cdot \sin\theta}$$

Sem saber os valores de m_A, m_B e v, é impossível determinar o valor de v_A.

Problema 8 (Questão nº42, pág. 241, capítulo 9 do livro Fundamentos de Física - Halliday e Resnick, vol.1, 9ª edição.)
Um objeto de massa m e velocidade v em relação a um observador explode em dois pedaços, um com massa três vezes maior que o outro; a explosão ocorre no espaço sideral. O pedaço de menor massa fica em repouso em relação ao observador. Qual é o aumento da energia cinética do sistema causado pela explosão, no referencial do observador?

Resolução P8: Analisando a questão, podemos determinar o momento linear inicial ($\vec{\rho}_0$) usando a expressão:

$$\vec{\rho}_0 = m\vec{v}$$

onde m é massa total. Além disso, a energia cinética (K) de uma partícula em movimento depende da massa da partícula e de sua velocidade, de acordo com a equação:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Suponha que antes da explosão o objeto se movia no sentido positivo do eixo x, com uma energia inicial de $k_0 = \frac{1}{2}m.v^2$. Após a explosão, o objeto divide-se em dois pedaços: um com velocidade nula e outro com velocidade v_1, na mesma direção e sentido da velocidade inicial do objeto inteiro, devido à ausência de forças externas no espaço. Na ausência de forças externas, o momento linear de um sistema é conservado de acordo com a lei da conservação do momento linear.

O módulo e a orientação do vetor velocidade do pedaço maior devem permanecer os mesmos devido à conservação da grandeza vetorial $\vec{\rho}$.

O momento linear do pedaço em movimento é três vezes maior que o do pedaço menor, representando $\frac{3}{4}$ da massa total. assim temos :

$$\rho = \frac{3}{4}m.v^2$$

Aplicando a lei da conservação linear

$$\rho = \rho_0$$

$$\frac{3}{4}m.v_1 = m.v$$

$$\frac{3}{4}\cancel{m}.v_1 = \cancel{m}.v$$

$$v_1 = \frac{4}{3}v$$

A energia cinética final (k_f) do sistema é:

$$k_f = \frac{1}{2}\frac{3}{4}mv_1^2$$

$$k_f = \frac{1}{2}\frac{3}{4}m\left(\frac{4}{3}v\right)^2$$

$$k_f = \frac{3}{8}\frac{16}{9}mv^2$$

$$k_f = \frac{3}{\cancel{8}}\frac{\cancel{1}6}{9}mv^2$$

$$k_f = \frac{\cancel{3}}{1}\frac{2}{\cancel{9}}mv^2$$

$$k_f = \frac{1}{1}\frac{2}{3}mv^2$$

assim (k_f) é :

$$k_f = \frac{2}{3}mv^2$$

Variação de energia cinética do sistema (ΔK).

$$\Delta K = k_f - k_0$$

$$\Delta K = \frac{2}{3}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

Colocando mv^2 em evidencia

$$\Delta K = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)mv^2$$

$$\Delta K = \left(\frac{4-3}{6}\right)m.v^2$$

$$\Delta K = \left(\frac{1}{6}\right)m.v^2$$

Problema 9 (Problema nº40, pág. 241, capítulo 9, do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)
Uma nave espacial está se movendo a 4300 km/h em relação à Terra quando, após ter queimado todo o combustível, o motor do foguete (de massa $4m$) é desacoplado e ejetado para trás com uma velocidade de 82 km/h em relação ao módulo de comando (de massa m). Qual é a velocidade do módulo de comando em relação à Terra imediatamente após a separação?

Resolução P9: Para o momento linear, temos a seguinte relação:

$$\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{V} \cdot m$$

Momento linear inicial, antes do motor ser desacoplado e ejetado:

$$\rho_0 = (4m + m) \cdot V_0$$

$$\rho_0 = 5m \cdot V_0$$

Momento linear final, após o motor ser ejetado:

$$\rho_f = 4m \cdot (V - V_r) + m \cdot V$$

$$V_0 = 4300\, km/h \text{ e } V_r = 82\, km/h$$

Como não há a ação de forças externas, podemos usar o princípio de que o momento linear se conserva, ou seja $\rho_0 = \rho_f$.

$$4m \cdot (V - V_r) + m \cdot V = 5m \cdot V_0$$

$$4V - 4V_r + V = 5V_0$$

$$5V = 5V_0 + 4V_r$$

$$V = \frac{5V_0 + 4V_r}{5V}$$

$$V = \frac{5 \cdot 4300 + 4 \cdot 82}{5}$$

$$V = 4365,6 km/h$$

Problema 10 (Problema nº49, pág. 242, capítulo 9, do livro Fundamentos de Física Vol.1- Resnick, 9ª Edição)

Uma bala com 10 g de massa se choca com um pêndulo balístico com 2,00 kg de massa. O centro de massa do pêndulo sobe uma distância vertical de 12 cm. Supondo que a bala fica alojada no pêndulo. Calcule a velocidade inicial da bala.

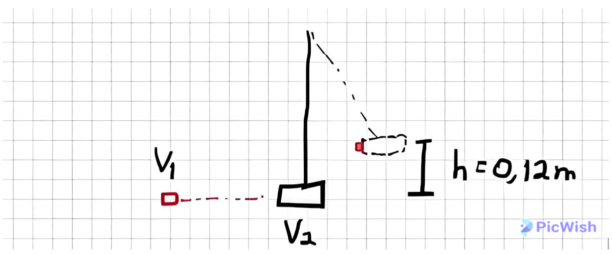

Figura 3: Autor

Resolução P10: Primeiramente vamos calcular as energias $K1 + U1 = K2 + U2$

$$\frac{(m + M)V_2^2}{2} = (m + M)gh$$

Isolando v_2:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Pronto, agora como a questão pede o v_1 vamos usar momento linear

$$p_1 = m \cdot v_1 \quad \text{e} \quad p_2 = (m + M) \cdot v_2$$

$$p_1 = p_2$$

$$m \cdot v_1 = (m + M) \cdot v_2$$

$$v_1 = \frac{(m + M)v_2}{m}$$

Substituindo v_2 por $\sqrt{2gh}$, $m = 0,01kg$, $M = 2kg$, $g = 9,8 < m/s^2$ e $h = 0,12m$

Sendo assim, após a substituição de todos os valores é possível observar que:

$$v_1 = 310\, m/s.$$