

Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Nejc Jenko, Petja Murnik

15. januar 2025

1. Uvod

Pri predavanjih predmeta RPGO smo se ukvarjali z Bernsteinovimi baznimi polinomi ene in dveh spremenljivk, ki se pogosto uporabljajo pri različnih aplikacijah v numerični matematiki. Njihova preprosta definicija in koristne lastnosti, kot sta pozitivnost in lastnost particije enote, jih postavljajo v ospredje pri reševanju problemov, kot so aproksimacija funkcij, interpolacija in modeliranje geometrijskih objektov.

V tej nalogi bomo raziskali razširitev Bernsteinovih baznih polinomov na tri spremenljivke. Ta posplošitev omogoča uporabo teh polinomov v še bolj zahtevnih aplikacijah, kot so modeliranje tridimenzionalnih površin in simulacija geometrijskih oblik. Poleg tega bomo podrobneje obravnavali njihove matematične lastnosti ter predstavili nekaj praktičnih primerov uporabe v računalniški grafiki in drugih področjih.

2. Prostor polinomov treh spremenljivk

Definicija 1. Naj bo $d \in \mathbb{N}_0$. **Prostor polinomov treh spremenljivk** stopnje d je definiran kot

$$\mathcal{P}_d = \left\{ p \mid p(x, y, z) := \sum_{0 \leq i+j+k \leq d} a_{ijk} x^i y^j z^k; a_{ijk} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1)$$

Lema 1. Naj bo \mathcal{P}_d definiran kot v definiciji 1. Potem velja, da je $\dim \mathcal{P}_d = \binom{d+3}{3}$. Nadalje monomi $\{x^i y^j z^k\}_{0 \leq i+j+k \leq d}$ tvorijo njegovo bazo.

Preden se lotimo dokaza leme, vpeljimo noticajo odvodov, ki nam bo prišla prav tako pri dokazu kot tudi v nadaljevanju. Naj bo D_w^l operator parcialnega odvoda po spremenljivki w reda l . Potem definiramo $D^\alpha := D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2} D_z^{\alpha_3}$ za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, kjer je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ ter vpeljimo še $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Dokaz. Opazimo najprej, da monomi oblike $\{x^i y^j z^k\}_{0 \leq i+j+k \leq d}$ razpenjajo \mathcal{P}_d , kar sledi direktno iz definicije prostora. Opazimo tudi, da $|(i, j, k) : 0 \leq i+j+k \leq d, i, j, k \in \mathbb{N}_0| = \binom{d+3}{3} = \dim \mathcal{P}_d$. Pokazati moramo še linearno neodvisnost.

Predpostavimo, da je polinom $p(x, y, z) = \sum_{0 \leq i+j+k \leq d} a_{ijk} x^i y^j z^k$ identično enak 0. Potem so tudi vsi njegovi mešani odvodi identično enaki 0. Po drugi strani pa z direktnim odvajanjem dobimo $D_x^i D_y^j D_z^k p(x, y, z)|_{x=0, y=0, z=0} = a_{ijk}$ za vsak $0 \leq i+j+k \leq d$. Torej linearna neodvisnost velja, ter je s tem dokazana lema. \square

V nadaljevanju bomo predstavili drugo bazo prostora \mathcal{P}_d , zato nadaljne lastnosti baze monomov ne bomo raziskovali. Za uvedbo Bernsteinovih baznih polinomov, potrebujemo uvedbo baricentričnih koordinat glede na tetraeder, kar je vpeljano v naslednjem razdelku.

Pred tem pa pa predstavimo še lemo, ki nam pove, kako oceniti normo polinoma $p \in \mathcal{P}_n$.

Lema 2. Naj bo T tetraeder z volumnom V_T , potem obstaja konstanta K odvisna le od d , da za vsak $p \in \mathcal{P}_d$ ter $1 \leq q < \infty$

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \leq K \|p\|_{\infty,T} \leq K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T}, \quad (2)$$

kjer je $\|\cdot\|_{q,T}$ standardna L_q norma glede na tetraeder T .

Dokaz. Prva neenakost sledi direktno iz Hölderjeve neenakosti, saj je

$$\|p\|_{q,T} \leq V_T^{1/q} \|p\|_{\infty,T}. \quad (3)$$

Za drugo neenakost pa uporabimo dejstvo, da je \mathcal{P}_d končno dimenzionalen prostor, zato so vse norme ekvivalentne. Torej obstaja konstanta K , odvisna le od d , da velja

$$\|p\|_{\infty, T} \leq K \|p\|_{q, T}. \quad (4)$$

Združimo obe neenakosti in dobimo

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q, T} \leq K \|p\|_{\infty, T} \leq K V_T^{-1/q} \|p\|_{q, T}. \quad (5)$$

S tem je lema dokazana. \square

Izrek 1. *TODO*

3. Baricentrične koordinate

Analogno z ravninskim primerom, želimo tudi v \mathbb{R}^3 uvesti stabilnejšo bazo za prostor \mathcal{P}_d , ki bo temeljila na Bernsteinovih baznih polinomih, za kar moramo najprej vpeljati baricentrične koordinate glede na tetraeder.

Definicija 2. *Rečemo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ **nedegeneriran**, če ima neničelen volumen. Rečemo, da so vozlišča V_1, V_2, V_3, V_4 tetraedra T v **kanoničnem redu**, če lahko T rotiramo in transliramo tako, da ploskev $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ leži v ravnini $z = 0$ in je pozitivno orientirana ter je z koordinata vozlišča V_4 pozitivna.*

Od sedaj naprej predpostavimo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ v kanoničnem redu in ni degeneriran. Za vozlišče V_i velja $V_i = (x_i, y_i, z_i)$. Postavimo

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Znano je dejstvo, da velja $\det(M) = 6V_T$, kjer je V_T volumen tetraedra T .

Lema 3. *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ tetraeder v kanoničnem redu. Potem za vsako točko $V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ obstajajo enolično določene $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R}$, da velja*

$$V = \phi_1 V_1 + \phi_2 V_2 + \phi_3 V_3 + \phi_4 V_4 \quad (7)$$

ter

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 1. \quad (8)$$

Vrednostim $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ rečemo **baricentrične koordinate** točke V glede na tetraeder T .

Dokaz. Enačbi 7 in 8 sta ekvivalentni sledečemu nesingularnem sistemu:

$$M \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (9)$$

\square

V dokazu opazimo, da z uporabo Cramerjevega pravila dobimo

$$\phi_1 = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Podobno bi dobili za ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 . Opazimo tudi, da lahko i -to baricentrično koordinato izračunamo kot $\frac{V_{\tilde{T}_i}}{V_T}$, kjer je $V_{\tilde{T}_i}$ prostornina tetraedra, ki ga dobimo, če zamenjamo i -to vozlišče s točko V . Naprej bi z razvojem determinante v izrazu (10) dokazali naslednjo lemo.

Lema 4. *Za vsak $i = 1, 2, 3, 4$ je funkcija ϕ_i linearni polinom v x, y, z , ki doseže vrednost 1 v oglišču V_i in izgine v vseh točkah na ploskvi tetraedra T , ki leži nasproti V_i . Poleg tega velja $0 \leq \phi_i \leq 1$, kadar (x, y, z) leži v T .*

4. Bernsteinovi bazni polinomi

Definicija 3. *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ tetraeder v kanoničnem redu. **Bernsteinov bazni polinom** stopnje n glede na tetraeder T je definiran kot*

$$B_{ijkl}^d := \frac{d!}{i!j!k!l!} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l, \quad i + j + k + l = d, \quad (11)$$

kjer je $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ baricentrične koordinate funkcije glede na tetraeder T . V primeru, ko je kateri izmed indeksov i, j, k, l negativen, nastavimo $B_{ijkl}^d = 0$.

Izrek 2. *Bernsteinovi bazni polinomi B_{ijkl}^d tvorijo bazo prostora \mathcal{P}_d . Prav tako velja*

$$\sum_{i+j+k+l=d} B_{ijkl}^d(V) = 1, \quad \forall V \in \mathbb{R}^3 \quad (12)$$

ter

$$0 \leq B_{ijkl}^d(V) \leq 1, \quad \forall V \in T. \quad (13)$$

Dokaz. Označimo z $\mathcal{B}_d := \{B_{ijkl}^d\}_{0 \leq i+j+k+l \leq 1}$ množica Bernsteinovih polinomov.

Za dokaz enakosti (12) pokažemo, da velja

$$1 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)^d = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{d!}{i!j!k!l!} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l$$

.

Tu opazimo tudi, da je $v \cdot 1 \in \text{Lin} \mathcal{B}_d$. Dokaza izjave o bazi prostora, se bomo lotili z indukcijo po d . Za $d = 0$ smo pokazali zgoraj. Lotimo se sedaj primera, ko je $d = 1$.

Če enačbo (7) zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \phi_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \phi_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \phi_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} + \phi_4 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ter pogledamo le prvo vrstico in upoštevamo $1 = \sum_{i+j+k+l} B_{ijkl}^{d-1}$ računamo

$$x = (x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 + x_3 \phi_3 + x_4 \phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} B_{ijkl}^{d-1} = \star$$

Poglejmo posebej prvi člen

$$\begin{aligned}
x_1\phi_1 &= x_1\phi_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} B_{ijkl}^{d-1} = x_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!} \phi_1^{i+1} \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{j+k+l=d-1-i} x_1 \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!} \phi_1^{i+1} \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l \right) = \\
&= \sum_{\tilde{i}=1}^d \left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{i}} \frac{x_1 \tilde{i}}{d} \frac{d!}{\tilde{i}!j!k!l!} \phi_1^{\tilde{i}} \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l \right) = \\
&= \sum_{\tilde{i}=0}^d \left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{i}} \frac{\tilde{i}x_1}{d} B_{ijkl}^d \right) = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{i}{d} x_1 B_{ijkl}^d,
\end{aligned}$$

kjer smo v prehodu na 3. vrstico označili $\tilde{i} = i + 1$. Združimo vse člene ter dobimo

$$\star = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4}{d} B_{ijkl}^d(x, y, z) \quad (15)$$

Podobna izraza bi dobili za spremenljivki y in z , s čimer smo torej pokazali, da izjava velja za $d = 1$ (saj ulomek tolmačimo kot konsanto ter je to ravno definicija linearne ogrinjače). Lotimo se sedaj indukcijskega koraka.

Naj trditev velja za vse polinome oblike $x^\mu y^\nu z^\kappa$, kjer $\mu + \nu + \kappa \leq d - 1$. Potem za $\mu + \nu + \kappa = d$ ter nek c_{ijkl} velja

$$\begin{aligned}
x^\mu y^\nu z^\kappa &= x \left(x^{\mu-1} y^\nu z^\kappa \right) = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} c_{ijkl} B_{ijkl}^{d-1}(x, y, z) = \\
&= x \sum_{i+j+k+l=d} d_{ijkl} B_{ijkl}^d(x, y, z),
\end{aligned}$$

kjer je d_{ijkl} dobljen na podoben način kot v primeru $d = 1$. Skupaj z dejstvom, da je $\dim(\mathcal{P}_d) = \binom{d+3}{2}$ enako številu baznih funkcij v \mathcal{B}_d dokažemo izjavo, da Bernsteinovi bazni polinomi tvorijo bazo \mathcal{P}_d .

Izjava o spodnji ter zgornji meji Bernsteinovih baznih funkcij sledi direktno iz lastnosti baricentričnih koordinat. \square

Iz izreka 2 sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathcal{P}_d$ lahko zapišemo na enoličen način kot

$$p = \sum_{i+j+k+l=d} c_{ijkl} B_{ijkl}^d. \quad (16)$$

Tak zapis imenujemo **B-forma** ter koeficiente c_{ijkl} **B-koeficienti**. Množico domenskih točk definiramo ter označimo kot

$$\mathcal{D}_{d,T} := \left\{ \zeta_{ijkl}^T := \frac{iV_1 + jV_2 + kV_3 + lV_4}{d} \right\}_{i+j+k+l=d}. \quad (17)$$

TODO slika z domenskimi točkami.

Nadalje pripišemo vsaki domenski točki ζ_{ijkl}^T B-koeficient c_{ijkl} za $i + j + k + l = d$. Torej lahko zapišemo B-koeficiente kot $\{c_\zeta\}_{\zeta \in \mathcal{D}_{d,T}}$ tako da če $\zeta = \zeta_{ijkl}^T$, potem je $c_\zeta = c_{ijkl}$.

Izrek 3. Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ zapisan v obliki (16). Označimo z $F_1 := \langle V_2, V_3, V_4 \rangle$ ploskev tetraedra T nasproti vozlišču V_1 . Potem velja

$$p|_{F_1} = \sum_{j+k+l=d} c_{0jkl} B_{0jkl}^d = \sum_{j+k+l=d} c_{jkl}^{F_1} B_{jkl}^{F_1,d}, \quad (18)$$

kjer $c_{jkl}^{F_1} := c_{0jkl}$ ter so $B_{jkl}^{F_1,d}$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje d glede na trikotnik F_1 .

Podobne formule veljajo za ostale ploskve tetraedra T .

Dokaz. Upošteva je dejstvo, da je $B_{0jkl}^d = 0$ za vsako $V \in F_1$ (ker je tam $\phi_1 = 0$), trditev sledi nemudoma. \square

5. de Casteljaujev algoritem

V tem razdelku bomo predstavili de Casteljaujev algoritem. Algoritem omogoča učinkovito in stabilno izračunavanje vrednosti polinomov v B-formi. Algoritem temelji na rekurzivni zvezi:

$$B_{ijkl}^d = \phi_1 B_{i-1,j,k,l}^{d-1} + \phi_2 B_{i,j-1,k,l}^{d-1} + \phi_3 B_{i,j,k-1,l}^{d-1} + \phi_4 B_{i,j,k,l-1}^{d-1},$$

Izrek 4. Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ zapisan v obliki B-forme (16). Njegove koeficiente označimo z $c_{ijkl}^{(0)} = c_{ijkl}$, $i + j + l + k = d$. Naj ima točka V baricentrične koordinate $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$.

Potem velja:

$$p(V) = \sum_{i+j+k+l=d} c_{ijkl}^{(d)} B_{ijkl}^d(V),$$

kjer so $c_{ijkl}^{(r)}$ definirani kot:

$$c_{ijkl}^{(r)} = \phi_1 c_{i-1,j,k,l}^{(r-1)} + \phi_2 c_{i,j-1,k,l}^{(r-1)} + \phi_3 c_{i,j,k-1,l}^{(r-1)} + \phi_4 c_{i,j,k,l-1}^{(r-1)},$$

za $i+j+k+l = d$, $r = 1, 2, \dots, d$.

Direktno iz tega izreka sledi želeni algoritem.

Algoritem 1. (de Casteljaujev algoritem)

1. Za $r = 0$ nastavi $c_{ijkl}^{(0)} = c_{ijkl}$ za $i + j + k + l = d$.

2. Za $r = 1, 2, \dots, d$ izračunaj

$$c_{ijkl}^{(r)} = \phi_1 c_{i-1,j,k,l}^{(r-1)} + \phi_2 c_{i,j-1,k,l}^{(r-1)} + \phi_3 c_{i,j,k-1,l}^{(r-1)} + \phi_4 c_{i,j,k,l-1}^{(r-1)},$$

za $i + j + k + l = d$.

3. Vrednost polinoma p v točki V je enaka

$$p(V) = \sum_{i+j+k+l=d} c_{ijkl}^{(d)} B_{ijkl}^d(V).$$