Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Nejc Jenko, Petja Murnik

8. februar 2025

1. Uvod

Pri predavanjih predmeta RPGO smo se ukvarjali z Bernsteinovimi baznimi polinomi ene in dveh spremenljivk, ki se pogosto uporabljajo pri različnih aplikacijah v numerični matematiki. Njihova preprosta definicija in koristne lastnosti, kot sta pozitivnost in lastnost particije enote, jih postavljajo v ospredje pri reševanju problemov kot so aproksimacija funkcij, interpolacija ter modeliranje geometrijskih objektov.

V tej nalogi bomo raziskali razširitev Bernsteinovih baznih polinomov na tri spremenljivke. Ta posplošitev omogoča uporabo teh polinomov v še bolj zahtevnih aplikacijah, kot so modeliranje tridimenzionalnih površin in simulacija geometrijskih oblik. Poleg tega bomo podrobneje obravnavali njihove matematične lastnosti ter predstavili nekaj praktičnih primerov uporabe v računalniški grafiki in drugih področjih.

2. Prostor polinomov treh spremenljivk

Definicija 1. *Naj bo $d \in \mathbb{N}_0$.* ***Prostor polinomov treh spremenljivk*** *stopnje d je definiran kot*

$$\mathcal{P}_d = \left\{ p : p(x,y,z) = \sum_{0 \le i+j+k \le d} a_{ijk} x^i y^j z^k,\ a_{ijk} \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

Lema 1. *Naj bo $\mathcal{P}_d$ definiran kot v definiciji 1. Potem velja, da je $\dim \mathcal{P}_d = \binom{d+3}{3}$. Nadalje monomi $\left\{x^i y^j z^k\right\}_{0 \le i+j+k \le d}$ tvorijo njegovo bazo.*

Preden se lotimo dokaza leme, vpeljimo noticajo odvodov, ki nam bo prišla prav tako pri dokazu kot tudi v nadaljevanju. Naj bo D_w^l operator parcialniega odvoda po spremenljivki w reda l. Potem definiramo $\mathrm{D}^\alpha := \mathrm{D}_x^{\alpha_1} \mathrm{D}_y^{\alpha_2} \mathrm{D}_z^{\alpha_3}$ za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, kjer je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ ter vpeljimo še $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Dokaz. Opazimo najprej, da monomi oblike $\{x^i y^j z^k\}_{0 \le i+j+k \le d}$ razpenjanjo $\mathcal{P}_d$, kar sledi direktno it definicije prostora. Opazimo tudi, da $|\,(i,j,k) : 0 \le i+j+k \le d, i,j,k \in \mathbb{N}_0| = \binom{d+3}{3} = \dim \mathcal{P}_d$. Pokazati moramo še linearno neodvisnost.

Predpostavimo, da je polinom $p(x,y,z) = \sum_{0 \le i+j+k \le d} a_{ijk} x^i y^j z^k$ identično enak 0. Potem so tudi vsi njegovi mešani odvodi identično enaki 0. Po drugi strani pa z direktnim odvajanjem dobimo $D_x^i D_y^j D_k^z p(x,y,z)|_{x=0,y=0,z=0} = a_{ijk}$ za vsak $0 \le i+j+k \le d$. Torej linearna neodvisnost velja, ter je s tem dokazana lema. $\square$

V nadaljevanju bomo prestavili drugo bazo prostora $\mathcal{P}_d$, zato nadaljne lastnosti baze monomov ne bomo raziskovali. Za uvedbo Bernsteinovih baznih polinomov, potrebujemo uvedbo baricentričnih koordinat glede na tetraeder, kar je vpeljano v naslednjem razdelku.

Pred tem pa pa prestavimo še lemo, ki nam pove, kako oceniti normo polinoma $p \in \mathcal{P}_n$.

Lema 2. *Naj bo T tetraeder z volumnom V_T, potem obstaja konstanta K odvisna le od d, da za vsak $p \in \mathcal{P}_d$ ter $1 \le q < \infty$*

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \le \|p\|_{\infty l,T} \le K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T}, \tag{2}$$

kjer je $\|\cdot\|_{q,T}$ standardna L_q norma glede na tetraeder T.

Dokaz. Za prvo neenakost računamo

$$\int_T |p(t)|^q dt \le \int_T \left(\sup_{t \in T} |p(t)| \right)^q dt = \left(\sup_{t \in T} |p(t)| \right)^q \int_T 1 dt = \|p\|_{\infty,T}^q \cdot V_T$$

ter če začetek in konec q-korenimo, dobimo željeno.

Za drugo neenakost pa uporabimo dejstvo, da je $\mathcal{P}_d$ končno dimenzionalen prostor, zato so vse norme ekvivalentne. Torej obstaja konstanta K, odvisna le od d, da velja

$$\|p\|_{\infty,T} \leq K \|p\|_{q,T} .$$

Združimo obe neenakosti in dobimo

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \leq \|p\|_{\infty,T} \leq K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} .$$

S tem je lema dokazana. □

3. Baricentrične koordinate

Analogno z ravninskim primerom, želimo tudi v $\mathbb{R}^3$ uvesti stabilnejšo bazo za prostor $\mathcal{P}_d$, ki bo temeljila na Bernsteinovih baznih polinomih, za kar moramo najeprej vpeljati baricentrične koordinate glede na tetraeder.

Definicija 2. *Rečemo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$* ***nedegeneriran****, če ima neničelen volumen. Rečemo, da so vozlišča V_1, V_2, V_3, V_4 tetraedra T v* ***kanoničnem redu****, če lahko T rotiramo in transliramo tako, da ploskev $\langle V_1, V_2, V_3\rangle$ leži v ravnini $z = 0$ in je pozitivno orientirana ter je z koordinata vozlišča V_4 pozitivna.*

Od sedaj naprej predpostavimo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ v kanoničnem redu in ni degeneriran. Za vozlišče V_i velja $V_i = (x_i, y_i, z_i)$. Postavimo

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Znano je dejstvo, da velja $\det(M) = 6V_T$, kjer je V_T volumen tetraedra T.

Lema 3. *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ tetraeder v kanoničnem redu. Potem za vsako točko $V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ obstajajo enolično določene $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R}$, da velja*

$$V = \phi_1 V_1 + \phi_2 V_2 + \phi_3 V_3 + \phi_4 V_4 \tag{4}$$

ter

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 1. \tag{5}$$

Vrednostim $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ rečemo ***baricentrične koordinate*** *točke V glede na tetraeder T.*

Dokaz. Enačbi 4 in 5 sta ekvivalentni sledečemu nesingularnem sistemu:

$$M \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{6}$$

□

V dokazu opazimo, da z uporabo Cramerjevega pravila dobimo

$$\phi_1 = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Podobno bi dobili za ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4. Opazimo tudi, da lahko i-to baricentrično koordinato izračunamo kot $\frac{V_{\widetilde{T_i}}}{V_T}$, kjer je $V_{\widetilde{T_i}}$ prostornina tetraedra, ki ga dobimo, če zamenjamo i-to vozlišče s točko V. Naprej bi z razvojem determinante v izrazu (7) dokazali naslednjo lemo.

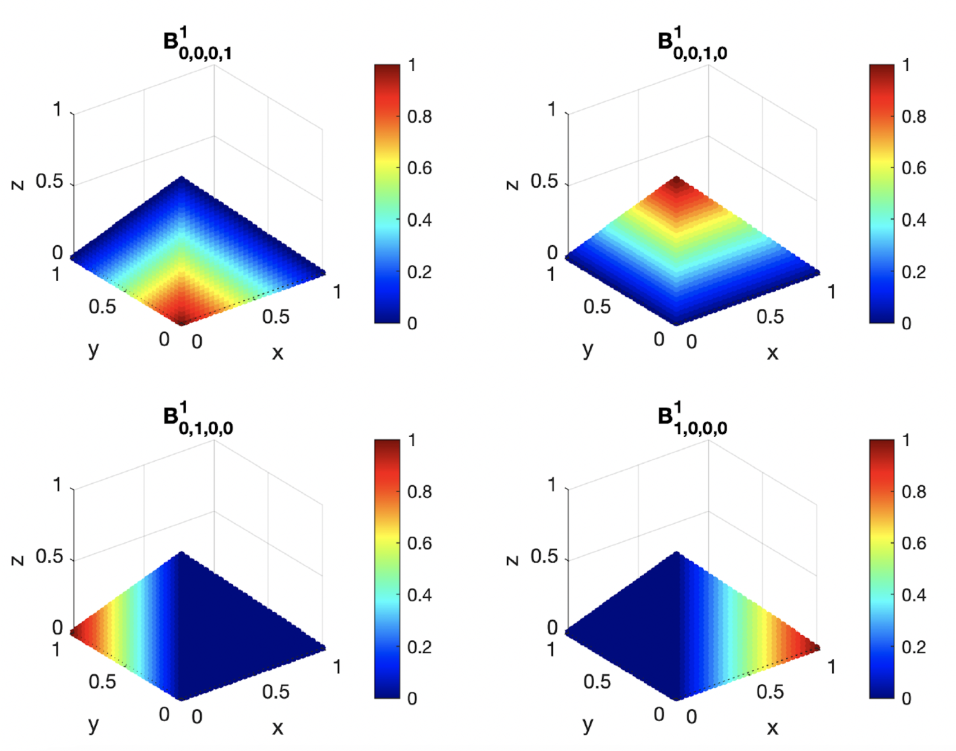
Lema 4. *Za vsak $i = 1, 2, 3, 4$ je funkcija ϕ_i linearni polinom v x, y, z, ki doseže vrednost 1 v oglišču V_i in izgine v vseh točkah na ploskvi tetraedra T, ki leži nasproti V_i. Poleg tega velja $0 \le \phi_i \le 1$, kadar (x, y, z) leži v T.*

4. Bernsteinovi bazni polinomi

Definicija 3. *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ tetraeder v kanoničnem redu.* ***Bernsteinov bazni polinom*** *stopnje n glede na tetraeder T je definiran kot*

$$B^d_{ijkl} := \frac{d!}{i!j!k!l!}\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l, \quad i + j + k + l = d, \tag{8}$$

kjer je $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ baricentrične koordinate funkcije glede na tetraeder T. V primeru, ko je kateri izmed indeksov i, j, k, l negativen, nastavimo $B^d_{ijkl} = 0$.



Slika 1: Bernsteinovi polinomi stopnje 1 v treh spremenljivkah.

Izrek 1. *Bernsteinovi bazni polinomi B^d_{ijkl} tvorijo bazo prostora $\mathcal{P}_d$. Prav tako velja*

$$\sum_{i+j+k+l=d} B^d_{ijkl}(V) = 1, \quad \forall V \in \mathbb{R}^3 \tag{9}$$

ter

$$0 \le B^d_{ijkl}(V) \le 1, \quad \forall V \in T. \tag{10}$$

Dokaz. Označimo z $\mathcal{B}_d := \left\{B^d_{ijkl}\right\}_{0 \le i+j+k+l \le 1}$ množica Bernsteinovih polinomov.

Za dokaz enakosti (9) pokažemo, da velja

$$1 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)^d = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{d!}{i!j!k!l!}\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l$$

.

Tu opazimo tudi, da je v $1 \in \mathrm{Lin}\mathcal{B}_d$. Dokaza izjave o bazi prostora, se bomo lotili z induklcijo po d. Za $d = 0$ smo pokazali zgoraj. Lotimo se sedaj primera, ko je $d = 1$.

Če enačbo (4) zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \phi_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \phi_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \phi_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} + \phi_4 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

ter pogledamo le prvo vrstico in upoštevamo $1 = \sum_{i+j+k+l} B_{ijkl}^{d-1}$ računamo

$$x = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} B_{ijkl}^{d-1} = \star$$

Poglejmo posebej prvi člen

$$\begin{aligned}
x_1\phi_1 &= x_1\phi_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} B_{ijkl}^{d-1} = x_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!} \phi_1^{i+1}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{j+k+l=d-1-i} x_1 \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!} \phi_1^{i+1}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l \right) = \\
&= \sum_{\tilde{\imath}=1}^{d} \left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{x_i\tilde{\imath}}{d} \frac{d!}{\tilde{\imath}!j!k!l!} \phi_1^{\tilde{\imath}}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l \right) = \\
&= \sum_{\tilde{\imath}=0}^{d} \left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{\tilde{\imath}x_1}{d} B_{\tilde{\imath}jkl}^d \right) = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{i}{d} x_1 B_{ijkl}^d,
\end{aligned}$$

kjer smo v prehodu na 3. vrstico označili $\tilde{\imath} = i + 1$. Združimo vse člene ter dobimo

$$\star = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4}{d} B_{ijkl}^d(x, y, z)$$

Podobna izraza bi dobili za spremenljivki y in z, s čimer smo torej pokazali, da izjava velja za $d = 1$ (saj ulomek tolmačimo kot konsanto ter je to ravno definicija linearne ogrinjače). Lotimo se sedaj indukcijskega koraka.

Naj trditev velja za vse polinome oblike $x^\mu y^\nu z^\kappa$, kjer $\mu+\nu+\kappa \leq d-1$. Potem za $\mu+\nu+\kappa = d$ ter nek c_{ijkl} velja

$$\begin{aligned}
x^\mu y^\nu z^\kappa &= x\left(x^{\mu-1}y^\nu z^\kappa\right) = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} c_{ijkl} B_{ijkl}^{d-1}(x, y, z) = \\
&= x \sum_{i+j+k+l=d} d_{ijkl} B_{ijkl}^d(x, y, z),
\end{aligned}$$

kjer je d_{ijkl} dobljen na podoben način kot v primeru $d = 1$. Skupaj z dejstvom, da je $\dim(\mathcal{P}_d) = \binom{d+3}{3}$ enako številu baznih funkcij v $\mathcal{B}_d$ dokažemo izjavo, da Bernsteinovi bazni polinomi tvorijo bazo $\mathcal{P}_d$.

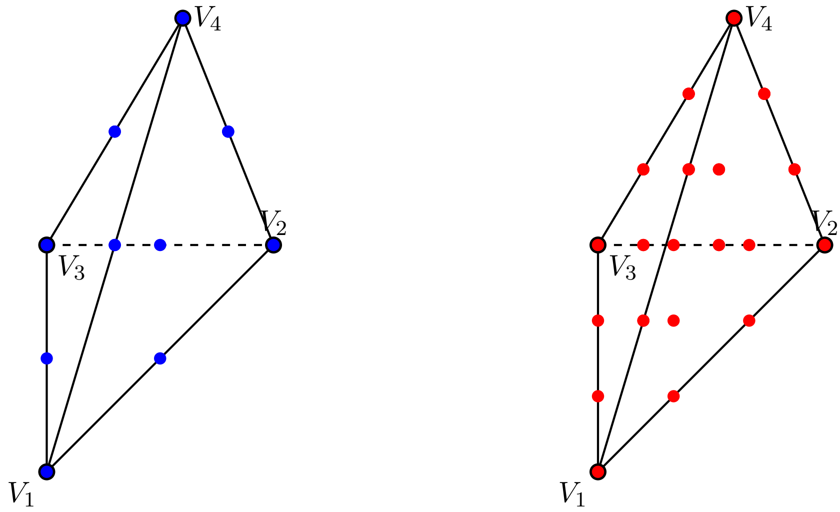
Izjava o spodnji ter zgornji meji Bernsteinovih baznih funkcij sledi direktno iz lastnosti baricentričnih koordinat. $\square$

Iz izreka 1 sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathcal{P}_d$ lahko zapišemo na enoličen način kot

$$p = \sum_{i+j+k+l=d} c_{ijkl} B_{ijkl}^d. \tag{11}$$

Tak zapis imenujemo **B-forma** ter koeficente c_{ijkl} **B-koeficienti**. Množico domenskih točk definiramo ter označimo kot

$$\mathcal{D}_{d,T} := \left\{ \zeta_{ijkl}^T := \frac{iV_1 + jV_2 + kV_3 + lV_4}{d} \right\}_{i+j+k+l=d}. \tag{12}$$



Slika 2: Domenske točke tetraedra stopnje $d = 2$ (modre) in $d = 3$ (rdeče).

Nadalje pripišemo vsaki domenski točki ζ_{ijkl}^T B-koeficent c_{ijkl} za $i + j + k + l = d$. Torej lahko zapišemo B-koeficente kot $\{c_\zeta\}_{\zeta \in \mathcal{D}_{d,T}}$ tako da če $\zeta = \zeta_{ijkl}^T$, potem je $c_\zeta = c_{ijkl}$.

Iz izreka 1 sledi, da za shranjevanje polinoma $p \in \mathcal{P}_d$ zapisanega v B-formi potrebujemo samo vektor B-koeficientov c ter domenske točke $\mathcal{D}_{d,T}$. Iz te ugotovitve bo kasneje sledil tudi de Casteljaujev algoritem.

Izrek 2. *Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ zapisan v obliki B-forme* (11). *Označimo z $F_1 := \langle V_2, V_3, V_4 \rangle$ ploskev tetraedra T nasproti vozlišču V_1. Potem velja*

$$p|_{F_1} = \sum_{j+k+l=d} c_{0jkl} B_{0jkl}^d = \sum_{j+k+l} c_{jkl}^{F_1} B_{jkl}^{F_1,d},$$

kjer $c_{jkl}^{F_1} := c_{0jkl}$ ter so $B_{jkl}^{F_1,d}$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje d glede na trikotnik F_1 .

Podobne formule veljajo za ostale ploskve tetraedra T.

Dokaz. Upoštevaje dejstvo, da je $B_{0jkl}^d = 0$ za vsako $V \in \mathrm{F}_1$ (ker je tam $\phi_1 = 0$), trditev sledi nemudoma. □

Brez dokaza, ki bi med drugimi zahtevnejšimi izreki, uporabil tudi lemo 2, podajmo še spodnjo trditev od stabilnosti B-forme.

Izrek 3. *Naj bo T tetraeder, katerega volumen je V_T. Potem za vsak polinom p zapisan v obliki B-forme* (11) *ter za $1 \leq q \leq \infty$ velja neenakost*

$$\frac{V_T^{1/q}}{K} \|c\|_q \leq \|p\|_{q,T} \leq V_T^{1/q} K \|c\|_q,$$

kjer je K konstanta, ki je odvisna samo od d.

5. de Castljaujev algoritem

V tem razdelku bomo predstavili de Casteljaujev algoritem. Algoritem omogoča učinkovito in stabilno izračunavanje vrednosti polinomov v B-formi. Algoritem temelji na rekurzivni zvezi:

$$B^d_{ijkl} = \phi_1 B^{d-1}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 B^{d-1}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 B^{d-1}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 B^{d-1}_{i,j,k,l-1},$$

Izrek 4. *Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ polinom treh spremenljivk zapisan v obliki B-forme* (11). *Njegove koeficiente označimo z $c^{(0)}_{ijkl} = c_{ijkl}, i+j+l+k = d$. Naj ima točka V baricentrične koordinate $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$.*

Potem velja:

$$p(V) = \sum_{i+j+k+l=d-r} c^{(r)}_{ijkl} B^{d-m}_{ijkl}(V),$$

kjer so $c^{(r)}_{ijkl}$ definirani kot:

$$c^{(r)}_{ijkl} = \phi_1 c^{(r-1)}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 c^{(r-1)}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 c^{(r-1)}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 c^{(r-1)}_{i,j,k,l-1},$$

za i+j+k+l = d, r = 1, 2, . . . , d.

Dokaz. Dokaz izreka sledi iz definicije B-forme in rekurzivne zveze za Bernsteinove bazne polinome. □

Direktno iz tega izreka sledi želeni algoritem.

Algoritem 1. *(de Casteljaujev algoritem)*

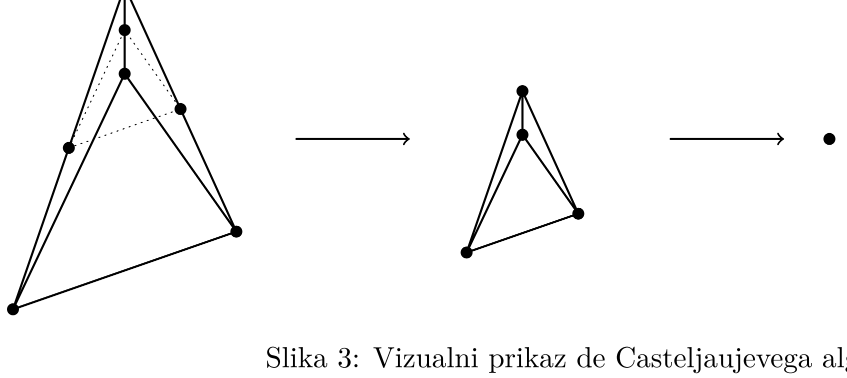
1. *Za $r = 0$ nastavi $c^{(0)}_{ijkl} = c_{ijkl}$ za $i + j + k + l = d$.*
2. *Za $r = 1, 2, \ldots, d$ izračunaj*

   $$c^{(r)}_{ijkl} = \phi_1 c^{(r-1)}_{i+1,j,k,l} + \phi_2 c^{(r-1)}_{i,j+1,k,l} + \phi_3 c^{(r-1)}_{i,j,k+1,l} + \phi_4 c^{(r-1)}_{i,j,k,l+1},$$

   za $i + j + k + l = d - r$.
3. *Vrednost polinoma p v točki V je enaka*

   $$p(V) = c^{(d)}_{0000}.$$

Idejo algoritma prikažemo na spodnji sliki 3 za $d = 2$.



Slika 3: Vizualni prikaz de Casteljaujevega algoritma.

6. Zaključek

V tej seminarski nalogi smo raziskali Bernsteinove bazne polinome treh spremenljivk in njihovo uporabo. Začeli smo z matematično definicijo prostora polinomov treh spremenljivk in razširitvijo pojma Bernsteinovih baznih polinomov iz dveh na tri dimenzije. Predstavili smo njihove lastnosti, kot sta pozitivnost in lastnost particije enote, ter dokazali, da tvorijo bazo prostora polinomov dane stopnje.

Razvili smo tudi baricentrične koordinate, ki so ključne za definicijo Bernsteinovih polinomov v tridimenzionalnem prostoru. Poudarili smo njihove geometrijske lastnosti in povezavo z volumni tetraedra. Prav tako smo podali metodo za oceno norm polinomov v tem prostoru, kar je pomembno za analizo stabilnosti in natančnosti numeričnih algoritmov.

Nazadnje smo podrobno obravnavali de Casteljaujev algoritem, ki omogoča stabilno in učinkovito izračunavanje vrednosti polinomov v B-formi.

V praksi imajo Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk širok spekter uporabnosti, predvsem v računalniški grafiki, geometrijskem modeliranju in numerični analizi. Poleg tega predstavljajo temelj za nadaljnje razširitve v višje dimenzije.

Literatura

[1] M. J. Lai, L. Schumaker, *Spline Functions on Triangulations*, Cambridge University Press, 2007, strani 434–443.

[2] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, Elsevier, 2001.