

# Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Nejc Jenko, Petja Murnik

28. december 2024

## 1. Uvod

Pri predavanjih predmeta RPGO smo obravnavali Bernsteinove bazne polinome ene ter dveh spremenljivk, ki smo jih uporabili pri različnih aplikacijah pri numerični matematiki. V tem delu bomo predstavili Bernsteinove bazne polinome treh spremenljivk, ki so razširitev prej omenjenih.

## 2. Prostor polinomov treh spremenljivk

**Definicija 1.** Naj bo  $d \in \mathbb{N}_0$ . Prostor polinomov treh spremenljivk stopnje  $n$  je definiran kot

$$\mathbb{P}_d = \left\{ \sum_{0 \leq i+j+k \leq d} a_{ijk} x^i y^j z^k; a_{ijk} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1)$$

**Lema 1.** Naj bo  $\mathbb{P}_d$  kot v definiciji 1. Potem je  $\dim \mathbb{P}_d = \binom{d+3}{3}$ . Nadalje monomi  $\{x^i y^j z^k\}_{0 \leq i+j+k \leq d}$  tvorijo njegovo bazo.

Preden se lotimo dokaza leme, vpeljimo noticajo odvodov, ki nam ba prišla prav tako pri dokazu kot tudi v nadaljevanju. Naj bo  $D_w^l$  operator parcialnega odvoda po spremenljivki  $w$  reda  $l$ . Potem definiramo  $D^\alpha := D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2} D_z^{\alpha_3}$  za  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , kjer je  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$  ter vpeljimo še  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

*Dokaz.* Opazimo najprej, da monomi oblike  $\{x^i y^j z^k\}_{0 \leq i+j+k \leq d}$  razpenjajo  $\mathbb{P}_d$ , kar sledi direktno iz definicije prostora. Opazimo tudi, da  $|(i, j, k) : 0 \leq i+j+k \leq d, i, j, k \in \mathbb{N}_0| = \binom{d+3}{3} = \dim \mathbb{P}_d$ . Pokazati moramo še linearno neodvisnost.

Predpostavimo, da je polinom  $p(x, y, z) = \sum_{0 \leq i+j+k \leq d} a_{ijk} x^i y^j z^k$  identično enak 0. Potem so tudi vsi njegovi mešani odvodi identično enaki 0. Po drugi strani pa z direktnim odvajanjem dobimo  $D_x^i D_y^j D_z^k p(x, y, z)|_{x=0, y=0, z=0} = a_{ijk}$  za vsak  $0 \leq i+j+k \leq d$ . Torej linearna neodvisnost velja, ter je s tem dokazana lema.  $\square$

V nadaljevanju bomo predstavili drugo bazo prostora  $\mathbb{P}_d$ , zato nadaljne lastnosti baze monomov ne bomo raziskovali. Za uvedbo Bernsteinovih baznih polinomov, potrebujemo uvedbo baricentričnih koordinat glede na tetraeder, kar je vpeljano v naslednjem razdelku.

Pred tem pa predstavimo še lemo, ki nam pove, kako oceniti normo polinoma  $p \in \mathbb{P}_n$ .

**Lema 2.** Naj bo  $T$  tetraeder z volumnom  $V_T$ , potem obstaja konstanta  $K$  odvisna le od  $d$ , da za vsak  $p \in \mathbb{P}_d$  ter  $1 \leq q < \infty$

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \leq K \|p\|_{\infty,T} \leq K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T}, \quad (2)$$

kjer je  $\|\cdot\|_{q,T}$  standardna  $L_q$  norma glede na tetraeder  $T$ .

*Dokaz.* TODO  $\square$

TODO

**Izrek 1.** TODO

## 3. Baricentrične koordinate

Analogno z ravninskim primerom, želimo tudi v  $\mathbb{R}^3$  uvesti stabilnejšo bazo za prostor  $\mathbb{P}_d$ , ki bo temeljila na Bernsteinovih baznih polinomih, za kar moramo najprej vpeljati baricentrične koordinate glede na tetraeder.

**Definicija 2.** Naj bo  $T := \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$  nedegeneriran tetraeder v  $\mathbb{R}^3$ . To pomeni, da ima neničelen volumen. Rečemo, da so vozlišča  $V_1, V_2, V_3, V_4$  tetraedra  $T$  v kanoničnem redu, če rotiramo in transliramo  $T$  tako, da ploskev  $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$  leži v ravnini  $z = 0$ , je pozitivno orientiran ter je  $z$  koordinata vozlišča  $V_4$  pozitivna.

Od sedaj naprej predpostavimo, da je tetraeder  $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$  v kanoničnem redu, kjer za vozlišče  $V_i$  velja  $V_i = (x_i, y_i, z_i)$ . Postavimo

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

kjer je znano dejstvo, da velja  $\det(M) = 6V_T$ , kjer je  $V_T$  volumen tetraedra  $T$ .

**Lema 3.** Naj bo  $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$  tetraeder v kanoničnem redu. Potem za vsako točko  $V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  obstajajo enolično določene  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R}$ , da velja

$$V = \phi_1 V_1 + \phi_2 V_2 + \phi_3 V_3 + \phi_4 V_4 \quad (4)$$

ter

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 1. \quad (5)$$

Količinam  $\phi_1, \dots, \phi_4$  rečemo baricentrične koordinate točke  $V$  glede na tetraeder  $T$ .

*Dokaz.* Enačbi 4 in 5 sta ekvivalentni sledečemu nesingularnem sistemu:

$$M \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (6)$$

□

V dokazu opazimo, da z uporabo Cramerjevega pravila dobimo

$$\phi_1 = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

kjer bi podobno dobili za  $\phi_2, \phi_3, \phi_4$ . Opazimo tudi, da lahko  $i$ -to baricentrično koordinato izračunamo kot  $\frac{V_{\tilde{T}_i}}{V_T}$ , kjer je  $V_{\tilde{T}_i}$  prostornina tetraedra, ki ga dobimo, če zamenjamo  $i$ -to vozlišče s točko  $V$ . Naprej bi z razvojem determinante v izrazu 7 dokazali naslednjo lemo.

**Lema 4.** Za vsak  $i = 1, 2, 3, 4$  je funkcija  $\phi_i$  linearni polinom v  $x, y, z$ , ki doseže vrednost 1 v oglišču  $v_i$  in izgine v vseh točkah na ploskvi tetraedra  $T$ , ki leži nasproti  $v_i$ . Poleg tega velja  $0 \leq \phi_i \leq 1$ , kadar  $(x, y, z)$  leži v  $T$ .

#### 4. Bernsteinovi bazni polinomi