# Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Nejc Jenko, Petja Murnik

17. januar 2025

## 1. Uvod

Pri predavanjih predmeta RPGO smo se ukvarjali z Bernsteinovimi baznimi polinomi ene in dveh spremenljivk, ki se pogosto uporabljajo pri različnih aplikacijah v numerični matematiki. Njihova preprosta definicija in koristne lastnosti, kot sta pozitivnost in lastnost particije enote, jih postavljajo v ospredje pri reševanju problemov, kot so aproksimacija funkcij, interpolacija in modeliranje geometrijskih objektov.

V tej nalogi bomo raziskali razširitev Bernsteinovih baznih polinomov na tri spremenljivke. Ta posplošitev omogoča uporabo teh polinomov v še bolj zahtevnih aplikacijah, kot so modeliranje tridimenzionalnih površin in simulacija geometrijskih oblik. Poleg tega bomo podrobneje obravnavali njihove matematične lastnosti ter predstavili nekaj praktičnih primerov uporabe v računalniški grafiki in drugih področjih.

## 2. Prostor polinomov treh spremenljivk

**Definicija 1.** *Naj bo $d \in \mathbb{N}_0$. **Prostor polinomov treh spremenljivk** stopnje $d$ je definiran kot*

$$\mathcal{P}_d = \left\{ p | p(x,y,z) := \sum_{0 \leq i+j+k \leq d} a_{ijk} x^i y^j z^k ; a_{ijk} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1}$$

**Lema 1.** *Naj bo $\mathcal{P}_d$ definiran kot v definiciji 1. Potem velja, da je $\dim \mathcal{P}_d = \binom{d+3}{3}$. Nadalje monomi $\left\{x^i y^j z^k\right\}_{0 \leq i+j+k \leq d}$ tvorijo njegovo bazo.*

Preden se lotimo dokaza leme, vpeljimo noticajo odvodov, ki nam bo prišla prav tako pri dokazu kot tudi v nadaljevanju. Naj bo $\mathrm{D}_w^l$ operator parcialniega odvoda po spremenljivki $w$ reda $l$. Potem definiramo $\mathrm{D}^\alpha := \mathrm{D}_x^{\alpha_1} \mathrm{D}_y^{\alpha_2} \mathrm{D}_z^{\alpha_3}$ za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, kjer je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ ter vpeljimo še $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

*Dokaz.* Opazimo najprej, da monomi oblike $\{x^i y^j z^k\}_{0 \leq i+j+k \leq d}$ razpenjanjo $\mathcal{P}_d$, kar sledi direktno it definicije prostora. Opazimo tudi, da $|\,(i,j,k) : 0 \leq i+j+k \leq d, i,j,k \in \mathbb{N}_0| = \binom{d+3}{3} = \dim \mathcal{P}_d$. Pokazati moramo še linearno neodvisnost.

Predpostavimo, da je polinom $p(x,y,z) = \sum_{0 \leq i+j+k \leq d} a_{ijk} x^i y^j z^k$ identično enak 0. Potem so tudi vsi njegovi mešani odvodi identično enaki 0. Po drugi strani pa z direktnim odvajanjem dobimo $D_x^i D_y^j D_k^z p(x,y,z)|_{x=0,y=0,z=0} = a_{ijk}$ za vsak $0 \leq i+j+k \leq d$. Torej linearna neodvisnost velja, ter je s tem dokazana lema. □

V nadaljevanju bomo prestavili drugo bazo prostora $\mathcal{P}_d$, zato nadaljne lastnosti baze monomov ne bomo raziskovali. Za uvedbo Bernsteinovih baznih polinomov, potrebujemo uvedbo baricentričnih koordinat glede na tetraeder, kar je vpeljano v naslednjem razdelku.

Pred tem pa pa prestavimo še lemo, ki nam pove, kako oceniti normo polinoma $p \in \mathcal{P}_n$.

**Lema 2.** *Naj bo $T$ tetraeder z volumnom $V_T$, potem obstaja konstanta $K$ odvisna le od $d$, da za vsak $p \in \mathcal{P}_d$ ter $1 \leq q < \infty$*

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \leq \|p\|_{\infty l,T} \leq K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T}, \tag{2}$$

*kjer je $\|\cdot\|_{q,T}$ standardna $L_q$ norma glede na tetraeder $T$.*

*Dokaz.* Za prvo neenakost računamo

$$\int_T |p(t)|^q dt \leq \int_T \left( \sup_{t \in T} |p(t)| \right)^q dt = \left( \sup_{t \in T} |p(t)| \right)^q \int_T 1 dt = \|p\|_{\infty,T}^q \cdot V_T$$

ter če začetek in konec $q$-korenimo, dobimo željeno.

Za drugo neenakost pa uporabimo dejstvo, da je $\mathcal{P}_d$ končno dimenzionalen prostor, zato so vse norme ekvivalentne. Torej obstaja konstanta $K$, odvisna le od $d$, da velja

$$\|p\|_{\infty,T} \leq K \|p\|_{q,T} . \tag{3}$$

Združimo obe neenakosti in dobimo

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \leq \|p\|_{\infty,T} \leq K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} . \tag{4}$$

S tem je lema dokazana. □

**Izrek 1.** *TODO*

## 3. Baricentrične koordinate

Analogno z ravninskim primerom, želimo tudi v $\mathbb{R}^3$ uvesti stabilnejšo bazo za prostor $\mathcal{P}_d$, ki bo temeljila na Bernsteinovih baznih polinomih, za kar moramo najeprej vpeljati baricentrične koordinate glede na tetraeder.

**Definicija 2.** *Rečemo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$* ***nedegeneriran****, če ima neničelen volumen. Rečemo, da so vozlišča $V_1, V_2, V_3, V_4$ tetraedra $T$ v* ***kanoničnem redu****, če lahko $T$ rotiramo in transliramo tako, da ploskev $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ leži v ravnini $z = 0$ in je pozitivno orientirana ter je $z$ koordinata vozlišča $V_4$ pozitivna.*

Od sedaj naprej predpostavimo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ v kanoničnem redu in ni degeneriran. Za vozlišče $V_i$ velja $V_i = (x_i, y_i, z_i)$. Postavimo

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Znano je dejstvo, da velja $\det(M) = 6V_T$, kjer je $V_T$ volumen tetraedra $T$.

**Lema 3.** *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ tetraeder v kanoničnem redu. Potem za vsako točko $V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ obstajajo enolično določene $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R}$, da velja*

$$V = \phi_1 V_1 + \phi_2 V_2 + \phi_3 V_3 + \phi_4 V_4 \tag{6}$$

*ter*

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 1. \tag{7}$$

*Vrednostim $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ rečemo* ***baricentrične koordinate*** *točke $V$ glede na tetraeder $T$.*

*Dokaz.* Enačbi 6 in 7 sta ekvivalentni sledečemu nesingularnem sistemu:

$$M \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{8}$$

□

V dokazu opazimo, da z uporabo Cramerjevega pravila dobimo

$$\phi_1 = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Podobno bi dobili za $\phi_2, \phi_3, \phi_4$. Opazimo tudi, da lahko $i$-to baricentrično koordinato izračunamo kot $\frac{V_{\widetilde{T_1}}}{V_T}$, kjer je $V_{\widetilde{T_i}}$ prostornina tetraedra, ki ga dobimo, če zamenjamo $i$-to vozlišče s točko $V$. Naprej bi z razvojem determinante v izrazu (9) dokazali naslednjo lemo.

**Lema 4.** *Za vsak $i = 1, 2, 3, 4$ je funkcija $\phi_i$ linearni polinom v $x, y, z$, ki doseže vrednost 1 v oglišču $V_i$ in izgine v vseh točkah na ploskvi tetraedra $T$, ki leži nasproti $V_i$. Poleg tega velja $0 \leq \phi_i \leq 1$, kadar $(x, y, z)$ leži v $T$.*

## 4. Bernsteinovi bazni polinomi

**Definicija 3.** *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ tetraeder v kanoničnem redu.* ***Bernsteinov bazni polinom*** *stopnje $n$ glede na tetraeder $T$ je definiran kot*

$$B^d_{ijkl} := \frac{d!}{i!j!k!l!} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l, \quad i + j + k + l = d, \tag{10}$$

*kjer je $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ baricentrične koordinate funkcije glede na tetraeder $T$. V primeru, ko je kateri izmed indeksov $i, j, k, l$ negativen, nastavimo $B^d_{ijkl} = 0$.*

**Izrek 2.** *Bernsteinovi bazni polinomi $B^d_{ijkl}$ tvorijo bazo prostora $\mathcal{P}_d$. Prav tako velja*

$$\sum_{i+j+k+l=d} B^d_{ijkl}(V) = 1, \quad \forall V \in \mathbb{R}^3 \tag{11}$$

*ter*

$$0 \leq B^d_{ijkl}(V) \leq 1, \quad \forall V \in T. \tag{12}$$

*Dokaz.* Označimo z $\mathcal{B}_d := \left\{ B^d_{ijkl} \right\}_{0 \leq i+j+k+l \leq 1}$ množica Bernsteinovih polinomov.

Za dokaz enakosti (11) pokažemo, da velja

$$1 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)^d = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{d!}{i!j!k!l!} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l$$

.

Tu opazimo tudi, da je v $1 \in \mathrm{Lin}\mathcal{B}_d$. Dokaza izjave o bazi prostora, se bomo lotili z induklcijo po $d$. Za $d = 0$ smo pokazali zgoraj. Lotimo se sedaj primera, ko je $d = 1$.

Če enačbo (6) zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \phi_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \phi_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \phi_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} + \phi_4 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \tag{13}$$

ter pogledamo le prvo vrstico in upoštevamo $1 = \sum_{i+j+k+l} B^{d-1}_{ijkl}$ računamo

$$x = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} B^{d-1}_{ijkl} = \star$$

Poglejmo posebej prvi člen

$$\begin{aligned} x_1\phi_1 &= x_1\phi_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} B^{d-1}_{ijkl} = x_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!}\phi_1^{i+1}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l \\ &= \sum_{i=0}^{d-1}\left(\sum_{j+k+l=d-1-i} x_1\frac{(d-1)!}{i!j!k!l!}\phi_1^{i+1}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l\right) = \\ &= \sum_{\tilde{\imath}=1}^{d}\left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{x_i\tilde{\imath}}{d}\frac{d!}{\tilde{\imath}!j!k!l!}\phi_1^{\tilde{\imath}}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l\right) = \\ &= \sum_{\tilde{\imath}=0}^{d}\left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{\tilde{\imath}x_1}{d}B^d_{\tilde{\imath}jkl}\right) = \sum_{i+j+k+l=d}\frac{i}{d}x_1 B^d_{ijkl}, \end{aligned}$$

kjer smo v prehodu na 3. vrstico označili $\tilde{\imath} = i+1$. Združimo vse člene ter dobimo

$$\star = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4}{d} B^d_{ijkl}(x,y,z) \tag{14}$$

Podobna izraza bi dobili za spremenljivki $y$ in $z$, s čimer smo torej pokazali, da izjava velja za $d=1$ ( saj ulomek tolmačimo kot konsanto ter je to ravno definicija linearne ogrinjače). Lotimo se sedaj indukcijskega koraka.

Naj trditev velja za vse polinome oblike $x^\mu y^\nu z^\kappa$, kjer $\mu+\nu+\kappa \le d-1$. Potem za $\mu+\nu+\kappa = d$ ter nek $c_{ijkl}$ velja

$$\begin{aligned} x^\mu y^\nu z^\kappa &= x\left(x^{\mu-1}y^\nu z^\kappa\right) = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4)\sum_{i+j+k+l=d-1} c_{ijkl}B^{d-1}_{ijkl}(x,y,z) = \\ &= x\sum_{i+j+k+l=d} d_{ijkl}B^d_{ijkl}(x,y,z), \end{aligned}$$

kjer je $d_{ijkl}$ dobljen na podoben način kot v primeru $d=1$. Skupaj z dejstvom, da je $\dim(\mathcal{P}_d) = \binom{d+3}{2}$ enako številu baznih funkcij v $\mathcal{B}_d$ dokažemo izjavo, da Bernsteinovi bazni polinomi tvorijo bazo $\mathcal{P}_d$.

Izjava o spodnji ter zgornji meji Bernsteinovih baznih funkcij sledi direktno iz lastnosti baricentričnih koordinat. □

Iz izreka 2 sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathcal{P}_d$ lahko zapišemo na enoličen način kot

$$p = \sum_{i+j+k+l=d} c_{ijkl}B^d_{ijkl}. \tag{15}$$

Tak zapis imenujemo **B-forma** ter koeficente $c_{ijkl}$ **B-koeficienti**. Množico domenskih točk definiramo ter označimo kot

$$\mathcal{D}_{d,T} := \left\{\zeta^T_{ijkl} := \frac{iV_1 + jV_2 + kV_3 + lV_4}{d}\right\}_{i+j+k+l=d}. \tag{16}$$

TODO slika z domenskimi točkami.

Nadalje pripišemo vsaki domenski točki $\zeta^T_{ijkl}$ B-koeficent $c_{ijkl}$ za $i+j+k+l=d$. Torej lahko zapišemo B-koeficente kot $\{c_\zeta\}_{\zeta\in\mathcal{D}_{d,T}}$ tako da če $\zeta = \zeta^T_{ijkl}$, potem je $c_\zeta = c_{ijkl}$.

**Izrek 3.** *Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ zapisan v obliki* (15)*. Označimo z $F_1 := \langle V_2, V_3, V_4\rangle$ ploskev tetraedra $T$ nasproti vozlišču $V_1$. Potem velja*

$$p|_{F_1} = \sum_{j+k+l=d} c_{0jkl}B^d_{0jkl} = \sum_{j+k+l} c^{F_1}_{jkl}B^{F_1,d}_{jkl}, \tag{17}$$

*kjer $c^{F_1}_{jkl} := c_{0jkl}$ ter so $B^{F_1,d}_{jkl}$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje $d$ glede na trikotnik $F_1$ .*

Podobne formule veljajo za ostale ploskve tetraedra $T$.

*Dokaz.* Upoštevaje dejstvo, da je $B^d_{0jkl} = 0$ za vsako $V \in \mathrm{F}_1$ (ker je tam $\phi_1 = 0$), trditev sledi nemudoma. $\square$

## 5. de Castljaujev algoritem

V tem razdelku bomo predstavili de Casteljaujev algoritem. Algoritem omogoča učinkovito in stabilno izračunavanje vrednosti polinomov v B-formi. Algoritem temelji na rekurzivni zvezi:

$$B^d_{ijkl} = \phi_1 B^{d-1}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 B^{d-1}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 B^{d-1}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 B^{d-1}_{i,j,k,l-1},$$

**Izrek 4.** *Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ zapisan v obliki B-forme* (15)*. Njegove koeficiente označimo z $c^{(0)}_{ijkl} = c_{ijkl}, i + j + l + k = d$. Naj ima točka $V$ baricentrične koordinate $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$.*

*Potem velja:*

$$p(V) = \sum_{i+j+k+l=d} c^{(d)}_{ijkl} B^d_{ijkl}(V),$$

*kjer so $c^{(r)}_{ijkl}$ definirani kot:*

$$c^{(r)}_{ijkl} = \phi_1 c^{(r-1)}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 c^{(r-1)}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 c^{(r-1)}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 c^{(r-1)}_{i,j,k,l-1},$$

*za $i+j+k+l = d$, $r = 1, 2, \ldots, d$.*

Direktno iz tega izreka sledi želeni algoritem.

**Algoritem 1.** *(de Casteljaujev algoritem)*

1. *Za $r = 0$ nastavi $c^{(0)}_{ijkl} = c_{ijkl}$ za $i + j + k + l = d$.*
2. *Za $r = 1, 2, \ldots, d$ izračunaj*

   $$c^{(r)}_{ijkl} = \phi_1 c^{(r-1)}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 c^{(r-1)}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 c^{(r-1)}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 c^{(r-1)}_{i,j,k,l-1},$$

   *za $i + j + k + l = d$.*
3. *Vrednost polinoma $p$ v točki $V$ je enaka*

   $$p(V) = \sum_{i+j+k+l=d} c^{(d)}_{ijkl} B^d_{ijkl}(V).$$