Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Nejc Jenko, Petja Murnik

8. februar 2025

1. Uvod

Pri predavanjih predmeta RPGO smo se ukvarjali z Bernsteinovimi baznimi polinomi ene in dveh spremenljivk, ki se pogosto uporabljajo pri različnih aplikacijah v numerični matematiki. Njihova preprosta definicija in koristne lastnosti, kot sta pozitivnost in lastnost particije enote, jih postavljajo v ospredje pri reševanju problemov kot so aproksimacija funkcij, interpolacija ter modeliranje geometrijskih objektov.

V tej nalogi bomo raziskali razširitev Bernsteinovih baznih polinomov na tri spremenljivke. Ta posplošitev omogoča uporabo teh polinomov v še bolj zahtevnih aplikacijah, kot so modeliranje tridimenzionalnih površin in simulacija geometrijskih oblik. Poleg tega bomo podrobneje obravnavali njihove matematične lastnosti ter predstavili nekaj praktičnih primerov uporabe v računalniški grafiki in drugih področjih.

2. Prostor polinomov treh spremenljivk

Definicija 1. *Naj bo $d \in \mathbb{N}_0$. **Prostor polinomov treh spremenljivk** stopnje d je definiran kot*

$$\mathcal{P}_d = \left\{ p : p(x,y,z) = \sum_{0 \le i+j+k \le d} a_{ijk} x^i y^j z^k,\ a_{ijk} \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

Lema 1. *Naj bo $\mathcal{P}_d$ definiran kot v definiciji 1. Potem velja, da je $\dim \mathcal{P}_d = \binom{d+3}{3}$. Nadalje monomi $\left\{x^i y^j z^k\right\}_{0 \le i+j+k \le d}$ tvorijo njegovo bazo.*

Preden se lotimo dokaza leme, vpeljimo noticajo odvodov, ki nam bo prišla prav tako pri dokazu kot tudi v nadaljevanju. Naj bo D_w^l operator parcialniega odvoda po spremenljivki w reda l. Potem definiramo $\mathrm{D}^\alpha := \mathrm{D}_x^{\alpha_1} \mathrm{D}_y^{\alpha_2} \mathrm{D}_z^{\alpha_3}$ za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, kjer je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ ter vpeljimo še $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Dokaz. Opazimo najprej, da monomi oblike $\{x^i y^j z^k\}_{0 \le i+j+k \le d}$ razpenjanjo $\mathcal{P}_d$, kar sledi direktno it definicije prostora. Opazimo tudi, da $|\,(i,j,k) : 0 \le i+j+k \le d, i,j,k \in \mathbb{N}_0| = \binom{d+3}{3} = \dim \mathcal{P}_d$. Pokazati moramo še linearno neodvisnost.

Predpostavimo, da je polinom $p(x,y,z) = \sum_{0 \le i+j+k \le d} a_{ijk} x^i y^j z^k$ identično enak 0. Potem so tudi vsi njegovi mešani odvodi identično enaki 0. Po drugi strani pa z direktnim odvajanjem dobimo $D_x^i D_y^j D_k^z p(x,y,z)|_{x=0,y=0,z=0} = a_{ijk}$ za vsak $0 \le i+j+k \le d$. Torej linearna neodvisnost velja, ter je s tem dokazana lema. $\square$

V nadaljevanju bomo prestavili drugo bazo prostora $\mathcal{P}_d$, zato nadaljne lastnosti baze monomov ne bomo raziskovali. Za uvedbo Bernsteinovih baznih polinomov, potrebujemo uvedbo baricentričnih koordinat glede na tetraeder, kar je vpeljano v naslednjem razdelku.

Pred tem pa pa prestavimo še lemo, ki nam pove, kako oceniti normo polinoma $p \in \mathcal{P}_n$.

Lema 2. *Naj bo T tetraeder z volumnom V_T, potem obstaja konstanta K odvisna le od d, da za vsak $p \in \mathcal{P}_d$ ter $1 \le q < \infty$*

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \le \|p\|_{\infty l,T} \le K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T}, \tag{2}$$

kjer je $\|\cdot\|_{q,T}$ standardna L_q norma glede na tetraeder T.

Dokaz. Za prvo neenakost računamo

$$\int_T |p(t)|^q dt \le \int_T \left(\sup_{t \in T} |p(t)| \right)^q dt = \left(\sup_{t \in T} |p(t)| \right)^q \int_T 1 dt = \|p\|_{\infty,T}^q \cdot V_T$$

ter če začetek in konec q-korenimo, dobimo željeno.

Za drugo neenakost pa uporabimo dejstvo, da je $\mathcal{P}_d$ končno dimenzionalen prostor, zato so vse norme ekvivalentne. Torej obstaja konstanta K, odvisna le od d, da velja

$$\|p\|_{\infty,T} \leq K \|p\|_{q,T} .$$

Združimo obe neenakosti in dobimo

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \leq \|p\|_{\infty,T} \leq K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} .$$

S tem je lema dokazana. □

3. Baricentrične koordinate

Analogno z ravninskim primerom, želimo tudi v $\mathbb{R}^3$ uvesti stabilnejšo bazo za prostor $\mathcal{P}_d$, ki bo temeljila na Bernsteinovih baznih polinomih, za kar moramo najeprej vpeljati baricentrične koordinate glede na tetraeder.

Definicija 2. *Rečemo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ **nedegeneriran**, če ima neničelen volumen. Rečemo, da so vozlišča V_1, V_2, V_3, V_4 tetraedra T v **kanoničnem redu**, če lahko T rotiramo in transliramo tako, da ploskev $\langle V_1, V_2, V_3\rangle$ leži v ravnini $z = 0$ in je pozitivno orientirana ter je z koordinata vozlišča V_4 pozitivna.*

Od sedaj naprej predpostavimo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ v kanoničnem redu in ni degeneriran. Za vozlišče V_i velja $V_i = (x_i, y_i, z_i)$. Postavimo

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Znano je dejstvo, da velja $\det(M) = 6V_T$, kjer je V_T volumen tetraedra T.

Lema 3. *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ tetraeder v kanoničnem redu. Potem za vsako točko $V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ obstajajo enolično določene $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R}$, da velja*

$$V = \phi_1 V_1 + \phi_2 V_2 + \phi_3 V_3 + \phi_4 V_4 \tag{4}$$

ter

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 1. \tag{5}$$

*Vrednostim $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ rečemo **baricentrične koordinate** točke V glede na tetraeder T.*

Dokaz. Enačbi 4 in 5 sta ekvivalentni sledečemu nesingularnem sistemu:

$$M \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{6}$$

□

V dokazu opazimo, da z uporabo Cramerjevega pravila dobimo

$$\phi_1 = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Podobno bi dobili za ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4. Opazimo tudi, da lahko i-to baricentrično koordinato izračunamo kot $\frac{V_{\widetilde{T_i}}}{V_T}$, kjer je $V_{\widetilde{T_i}}$ prostornina tetraedra, ki ga dobimo, če zamenjamo i-to vozlišče s točko V. Naprej bi z razvojem determinante v izrazu (7) dokazali naslednjo lemo.

Lema 4. *Za vsak* $i = 1, 2, 3, 4$ *je funkcija* ϕ_i *linearni polinom v* x, y, z, *ki doseže vrednost* 1 *v oglišču* V_i *in izgine v vseh točkah na ploskvi tetraedra* T, *ki leži nasproti* V_i. *Poleg tega velja* $0 \leq \phi_i \leq 1$, *kadar* (x, y, z) *leži v* T.

4. Bernsteinovi bazni polinomi

Definicija 3. *Naj bo* $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ *tetraeder v kanoničnem redu.* ***Bernsteinov bazni polinom*** *stopnje* n *glede na tetraeder* T *je definiran kot*

$$B^d_{ijkl} := \frac{d!}{i!j!k!l!}\phi_1^i\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l, \quad i + j + k + l = d, \tag{8}$$

kjer je $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ *baricentrične koordinate funkcije glede na tetraeder* T. *V primeru, ko je kateri izmed indeksov* i, j, k, l *negativen, nastavimo* $B^d_{ijkl} = 0$.

Izrek 1. *Bernsteinovi bazni polinomi* B^d_{ijkl} *tvorijo bazo prostora* $\mathcal{P}_d$. *Prav tako velja*

$$\sum_{i+j+k+l=d} B^d_{ijkl}(V) = 1, \quad \forall V \in \mathbb{R}^3 \tag{9}$$

ter

$$0 \leq B^d_{ijkl}(V) \leq 1, \quad \forall V \in T. \tag{10}$$

Dokaz. Označimo z $\mathcal{B}_d := \left\{B^d_{ijkl}\right\}_{0\leq i+j+k+l\leq 1}$ množica Bernsteinovih polinomov.

Za dokaz enakosti (9) pokažemo, da velja

$$1 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)^d = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{d!}{i!j!k!l!}\phi_1^i\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l$$

.

Tu opazimo tudi, da je v $1 \in \mathrm{Lin}\mathcal{B}_d$. Dokaza izjave o bazi prostora, se bomo lotili z induklcijo po d. Za $d = 0$ smo pokazali zgoraj. Lotimo se sedaj primera, ko je $d = 1$.

Če enačbo (4) zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \phi_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \phi_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \phi_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} + \phi_4 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

ter pogledamo le prvo vrstico in upoštevamo $1 = \sum_{i+j+k+l} B^{d-1}_{ijkl}$ računamo

$$x = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} B^{d-1}_{ijkl} = \star$$

Poglejmo posebej prvi člen

$$\begin{aligned}
x_1\phi_1 = x_1\phi_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} B^{d-1}_{ijkl} &= x_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!}\phi_1^{i+1}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l \\
&= \sum_{i=0}^{d-1}\left(\sum_{j+k+l=d-1-i} x_1\frac{(d-1)!}{i!j!k!l!}\phi_1^{i+1}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l\right) = \\
&= \sum_{\tilde{\imath}=1}^{d}\left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{x_i\tilde{\imath}}{d}\frac{d!}{\tilde{\imath}!j!k!l!}\phi_1^{\tilde{\imath}}\phi_2^j\phi_3^k\phi_4^l\right) = \\
&= \sum_{\tilde{\imath}=0}^{d}\left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{\tilde{\imath}x_1}{d}B^d_{\tilde{\imath}jkl}\right) = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{i}{d}x_1 B^d_{ijkl},
\end{aligned}$$

kjer smo v prehodu na 3. vrstico označili $\tilde{\imath} = i + 1$. Združimo vse člene ter dobimo

$$\star = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4}{d} B^d_{ijkl}(x, y, z)$$

Podobna izraza bi dobili za spremenljivki y in z, s čimer smo torej pokazali, da izjava velja za $d = 1$ (saj ulomek tolmačimo kot konsanto ter je to ravno definicija linearne ogrinjače). Lotimo se sedaj indukcijskega koraka.

Naj trditev velja za vse polinome oblike $x^\mu y^\nu z^\kappa$, kjer $\mu+\nu+\kappa \leq d-1$. Potem za $\mu+\nu+\kappa = d$ ter nek c_{ijkl} velja

$$x^\mu y^\nu z^\kappa = x\left(x^{\mu-1} y^\nu z^\kappa\right) = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} c_{ijkl} B^{d-1}_{ijkl}(x, y, z) =$$
$$= x \sum_{i+j+k+l=d} d_{ijkl} B^d_{ijkl}(x, y, z),$$

kjer je d_{ijkl} dobljen na podoben način kot v primeru $d = 1$. Skupaj z dejstvom, da je $\dim(\mathcal{P}_d) = \binom{d+3}{3}$ enako številu baznih funkcij v $\mathcal{B}_d$ dokažemo izjavo, da Bernsteinovi bazni polinomi tvorijo bazo $\mathcal{P}_d$.

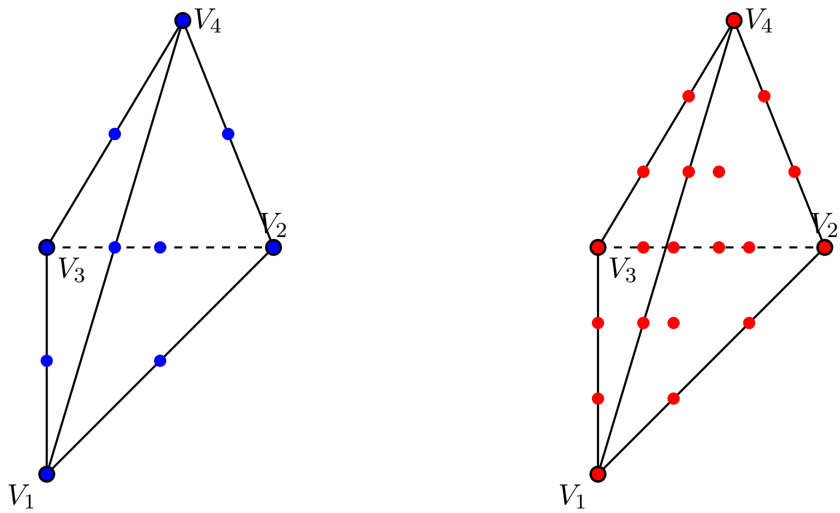
Izjava o spodnji ter zgornji meji Bernsteinovih baznih funkcij sledi direktno iz lastnosti baricentričnih koordinat. $\square$

Iz izreka 1 sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathcal{P}_d$ lahko zapišemo na enoličen način kot

$$p = \sum_{i+j+k+l=d} c_{ijkl} B^d_{ijkl}. \tag{11}$$

Tak zapis imenujemo **B-forma** ter koeficente c_{ijkl} **B-koeficienti**. Množico domenskih točk definiramo ter označimo kot

$$\mathcal{D}_{d,T} := \left\{ \zeta^T_{ijkl} := \frac{iV_1 + jV_2 + kV_3 + lV_4}{d} \right\}_{i+j+k+l=d}. \tag{12}$$



Slika 1: Domenske točke tetraedra stopnje $d = 2$ (modre) in $d = 3$ (rdeče).

Nadalje pripišemo vsaki domenski točki ζ^T_{ijkl} B-koeficent c_{ijkl} za $i + j + k + l = d$. Torej lahko zapišemo B-koeficente kot $\{c_\zeta\}_{\zeta \in \mathcal{D}_{d,T}}$ tako da če $\zeta = \zeta^T_{ijkl}$, potem je $c_\zeta = c_{ijkl}$.

Izrek 2. *Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ zapisan v obliki B-forme* (11). *Označimo z $F_1 := \langle V_2, V_3, V_4 \rangle$ ploskev tetraedra T nasproti vozlišču V_1. Potem velja*

$$p|_{F_1} = \sum_{j+k+l=d} c_{0jkl} B^d_{0jkl} = \sum_{j+k+l} c^{F_1}_{jkl} B^{F_1,d}_{jkl},$$

kjer $c^{F_1}_{jkl} := c_{0jkl}$ ter so $B^{F_1,d}_{jkl}$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje d glede na trikotnik F_1 .

Podobne formule veljajo za ostale ploskve tetraedra T.

Dokaz. Upoštevaje dejstvo, da je $B^d_{0jkl} = 0$ za vsako $V \in \mathrm{F}_1$ (ker je tam $\phi_1 = 0$), trditev sledi nemudoma. □

Brez dokaza, ki bi med drugimi zahtevnejšimi izreki, uporabil tudi lemo 2, podajmo še spodnjo trditev od stabilnosti B-forme.

Izrek 3. *Naj bo T tetraeder, katerega volumen je V_T. Potem za vsak polinom p zapisan v obliki B-forme* (11) *ter za $1 \le q \le \infty$ velja neenakost*

$$\frac{V_T^{1/q}}{K} \|c\|_q \le \|p\|_{q,T} \le V_T^{1/q} K \|c\|_q,$$

kjer je K konstanta, ki je odvisna samo od d.

5. de Castljaujev algoritem

V tem razdelku bomo predstavili de Casteljaujev algoritem. Algoritem omogoča učinkovito in stabilno izračunavanje vrednosti polinomov v B-formi. Algoritem temelji na rekurzivni zvezi:

$$B^d_{ijkl} = \phi_1 B^{d-1}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 B^{d-1}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 B^{d-1}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 B^{d-1}_{i,j,k,l-1},$$

Izrek 4. *Naj bo $p \in \mathcal{P}_d$ zapisan v obliki B-forme* (11). *Njegove koeficiente označimo z $c^{(0)}_{ijkl} = c_{ijkl}, i + j + l + k = d$. Naj ima točka V baricentrične koordinate $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$.*

Potem velja:

$$p(V) = \sum_{i+j+k+l=d} c^{(d)}_{ijkl} B^d_{ijkl}(V),$$

kjer so $c^{(r)}_{ijkl}$ definirani kot:

$$c^{(r)}_{ijkl} = \phi_1 c^{(r-1)}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 c^{(r-1)}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 c^{(r-1)}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 c^{(r-1)}_{i,j,k,l-1},$$

za $i+j+k+l = d$, $r = 1, 2, \ldots, d$.

Direktno iz tega izreka sledi želeni algoritem.

Algoritem 1. *(de Casteljaujev algoritem)*

1. *Za $r = 0$ nastavi $c^{(0)}_{ijkl} = c_{ijkl}$ za $i + j + k + l = d$.*
2. *Za $r = 1, 2, \ldots, d$ izračunaj*

   $$c^{(r)}_{ijkl} = \phi_1 c^{(r-1)}_{i-1,j,k,l} + \phi_2 c^{(r-1)}_{i,j-1,k,l} + \phi_3 c^{(r-1)}_{i,j,k-1,l} + \phi_4 c^{(r-1)}_{i,j,k,l-1},$$

   za $i + j + k + l = d$.
3. *Vrednost polinoma p v točki V je enaka*

   $$p(V) = \sum_{i+j+k+l=d} c^{(d)}_{ijkl} B^d_{ijkl}(V).$$

6. Zaključek

Literatura

[1] M. J. Lai, L. Schumaker, *Spline Functions on Triangulations*, Cambridge University Press, 2007, strani 434–443.

[2] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, Elsevier, 2001.