Bernsteinovi bazni polinomi treh spremenljivk

Nejc Jenko, Petja Murnik

7. januar 2025

1. Uvod

Pri predavanjih predmeta RPGO smo obravnavali Bernsteinove bazne polinome ene ter dveh spremenljivk, ki smo jih uporabili pri različnih aplikacijah pri numerični matematiki. V tem delu bomo predstavili Bernsteinove bazne polinome treh spremenljivk, ki so razširitev prej omenjenih.

2. Prostor polinomov treh spremenljivk

Definicija 1. *Naj bo $d \in \mathbb{N}_0$. Prostor polinomov treh spremenljivk stopnje n je definiran kot*

$$\mathbb{P}_d = \left\{ \sum_{0 \le i+j+k \le d} a_{ijk} x^i y^j z^k ; a_{ijk} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1}$$

Lema 1. *Naj bo $\mathbb{P}_d$ kot v definiciji 1. Potem je $\dim \mathbb{P}_d = \binom{d+3}{3}$. Nadalje monomi $\left\{ x^i y^j z^k \right\}_{0 \le i+j+k \le d}$ tvorijo njegovo bazo.*

Preden se lotimo dokaza leme, vpeljimo noticajo odvodov, ki nam ba prišla prav tako pri dokazu kot tudi v nadaljevanju. Naj bo D_w^l operator parcialniega odvoda po spremenljivki w reda l. Potem definiramo $\mathrm{D}^\alpha := \mathrm{D}_x^{\alpha_1} \mathrm{D}_y^{\alpha_2} \mathrm{D}_z^{\alpha_3}$ za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, kjer je $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}_0$ ter vpeljimo še $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Dokaz. Opazimo najprej, da monomi oblike $\{x^i y^j z^k\}_{0 \le i+j+k \le d}$ razpenjanjo $\mathbb{P}_d$, kar sledi direktno it definicije prostora. Opazimo tudi, da $|\,(i,j,k) : 0 \le i+j+k \le d, i,j,k \in \mathbb{N}_0| = \binom{d+3}{3} = \dim \mathbb{P}_d$. Pokazati moramo še linearno neodvisnost.

Predpostavimo, da je polinom $p(x,y,z) = \sum_{0 \le i+j+k \le d} a_{ijk} x^i y^j z^k$ identično enak 0. Potem so tudi vsi njegovi mešani odvodi identično enaki 0. Po drugi strani pa z direktnim odvajanjem dobimo $D_x^i D_y^j D_k^z p(x,y,z)|_{x=0,y=0,z=0} = a_{ijk}$ za vsak $0 \le i+j+k \le d$. Torej linearna neodvisnost velja, ter je s tem dokazana lema. □

V nadaljevanju bomo prestavili drugo bazo prostora $\mathbb{P}_d$, zato nadaljne lastnosti baze monomov ne bomo raziskovali. Za uvedbo Bernsteinovih baznih polinomov, potrebujemo uvedbo baricentričnih koordinat glede na tetraeder, kar je vpeljano v naslednjem razdelku.

Pred tem pa pa prestavimo še lemo, ki nam pove, kako oceniti normo polinoma $p \in \mathbb{P}_n$.

Lema 2. *Naj bo T tetraeder z volumnom V_T, potem obstaja konstanta K odvisna le od d, da za vsak $p \in \mathbb{P}_d$ ter $1 \le q < \infty$*

$$V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T} \le K \|p\|_{\infty l,T} \le K V_T^{-1/q} \|p\|_{q,T}, \tag{2}$$

kjer je $\|\cdot\|_{q,T}$ standardna L_q norma glede na tetraeder T.

Dokaz. TODO □

TODO razmislimo pravzaprav če rabmo to lemo ter dokaz.

Izrek 1. *TODO*

3. Baricentrične koordinate

Analogno z ravninskim primerom, želimo tudi v $\mathbb{R}^3$ uvesti stabilnejšo bazo za prostor $\mathbb{P}_d$, ki bo temeljila na Bernsteinovih baznih polinomih, za kar moramo najeprej vpeljati baricentrične koordinate glede na tetraeder.

Definicija 2. *Naj bo $T := \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ nedegeneriran tetraeder v $\mathbb{R}^3$. To pomeni, da ima neničelen volumen. Rečemo, da so vozlišča V_1, V_2, V_3, V_4 tetraedra T v kanoničnem redu, če rotiramo in transliramo T tako, da ploskev $\langle V_1, V_2, V_3\rangle$ leži v ravnini $z = 0$, je pozitivno orientiran ter je z koordinata vozlišča V_4 pozitivna.*

Od sedaj naprej predpostavimo, da je tetraeder $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ v kanoničnem redu, kjer za vozlišče V_i velja $V_i = (x_i, y_i, z_i)$. Postavimo

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

kjer je znano dejstvo, da velja $\det(M) = 6V_T$, kjer je V_T volumen tetraedra T.

Lema 3. *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ tetraeder v kanoničnem redu. Potem za vsako točko $V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ obstajajo enolično določene $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \in \mathbb{R}$, da velja*

$$V = \phi_1 V_1 + \phi_2 V_2 + \phi_3 V_3 + \phi_4 V_4 \tag{4}$$

ter

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 1. \tag{5}$$

Količinam $\phi_1, \dots, \phi_4$ rečemo baricentrične koordinate točke V glede na tetraeder T.

Dokaz. Enačbi 4 in 5 sta ekvivalentni sledečemu nesingularnem sistemu:

$$M \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{6}$$

□

V dokazu opazimo, da z uporabo Cramerjevega pravila dobimo

$$\phi_1 = \frac{1}{\det(M)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Podobno bi dobili za ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4. Opazimo tudi, da lahko i-to baricentrično koordinato izračunamo kot $\frac{V_{\widetilde{T_i}}}{V_T}$, kjer je $V_{\widetilde{T_i}}$ prostornina tetraedra, ki ga dobimo, če zamenjamo i-to vozlišče s točko V. Naprej bi z razvojem determinante v izrazu (7) dokazali naslednjo lemo.

Lema 4. *Za vsak $i = 1, 2, 3, 4$ je funkcija ϕ_i linearni polinom v x, y, z, ki doseže vrednost 1 v oglišču V_i in izgine v vseh točkah na ploskvi tetraedra T, ki leži nasproti V_i. Poleg tega velja $0 \le \phi_i \le 1$, kadar (x, y, z) leži v T.*

4. Bernsteinovi bazni polinomi

Definicija 3. *Naj bo $T = \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ tetraeder v kanoničnem redu. Bernsteinov bazni polinom stopnje n glede na tetraeder T je definiran kot*

$$B^d_{ijkl} := \frac{d!}{i!j!k!l!} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l, \quad i + j + k + l = d, \tag{8}$$

kjer je $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ baricentrične koordinate funkcije glede na tetraeder T. V primeru, ko je kateri izmed indeksov i, j, k, l negativen, nastavimo $B^d_{ijkl} = 0$.

Izrek 2. *Bernsteinovi bazni polinomi B^d_{ijkl} tvorijo bazo prostora $\mathbb{P}_d$. Prav tako velja*

$$\sum_{i+j+k+l=d} B^d_{ijkl}(V) = 1, \quad \forall V \in \mathbb{R}^3 \tag{9}$$

ter

$$0 \leq B^d_{ijkl}(V) \leq 1, \quad \forall V \in T. \tag{10}$$

Dokaz. Označimo z $\mathcal{B}_d := \left\{B^d_{ijkl}\right\}_{0\leq i+j+k+l\leq 1}$ množica Bernsteinovih polinomov.

Za dokaz enakosti (9) pokažemo, da velja

$$1 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)^d = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{d!}{i!j!k!l!} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l$$

.

Tu opazimo tudi, da je v $1 \in \mathrm{Lin}\mathcal{B}_d$. Dokaza izjave o bazi prostora, se bomo lotili z induklcijo po d. Za $d = 0$ smo pokazali zgoraj. Lotimo se sedaj primera, ko je $d = 1$.

Če enačbo (4) zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \phi_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \phi_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \phi_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} + \phi_4 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

ter pogledamo le prvo vrstico in upoštevamo $1 = \sum_{i+j+k+l} B^{d-1}_{ijkl}$ računamo

$$x = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} B^{d-1}_{ijkl} = \star$$

Poglejmo posebej prvi člen

$$\begin{aligned}
x_1\phi_1 &= x_1\phi_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} B^{d-1}_{ijkl} = x_1 \sum_{i+j+k+l=d-1} \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!} \phi_1^{i+1} \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{j+k+l=d-1-i} x_1 \frac{(d-1)!}{i!j!k!l!} \phi_1^{i+1} \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l \right) = \\
&= \sum_{\tilde{\imath}=1}^{d} \left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{x_i \tilde{\imath}}{d} \frac{d!}{\tilde{\imath}!j!k!l!} \phi_1^{\tilde{\imath}} \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l \right) = \\
&= \sum_{\tilde{\imath}=0}^{d} \left(\sum_{j+k+l=d-\tilde{\imath}} \frac{\tilde{\imath} x_1}{d} B^d_{\tilde{\imath}jkl} \right) = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{i}{d} x_1 B^d_{ijkl},
\end{aligned}$$

kjer smo v prehodu na 3. vrstico označili $\tilde{\imath} = i + 1$. Združimo vse člene ter dobimo

$$\star = \sum_{i+j+k+l=d} \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3 + lx_4}{d} B^d_{ijkl}(x, y, z) \tag{12}$$

Podobna izraza bi dobili za spremenljivki y in z, s čimer smo torej pokazali, da izjava velja za $d = 1$ (saj ulomek tolmačimo kot konsanto ter je to ravno definicija linearne ogrinjače). Lotimo se sedaj indukcijskega koraka.

Naj trditev velja za vse polinome oblike $x^\mu y^\nu z^\kappa$, kjer $\mu+\nu+\kappa \leq d-1$. Potem za $\mu+\nu+\kappa = d$ ter nek c_{ijkl} velja

$$\begin{aligned}
x^\mu y^\nu z^\kappa &= x \left(x^{\mu-1} y^\nu z^\kappa \right) = (x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + x_3\phi_3 + x_4\phi_4) \sum_{i+j+k+l=d-1} c_{ijkl} B^{d-1}_{ijkl}(x, y, z) = \\
&= x \sum_{i+j+k+l=d} d_{ijkl} B^d_{ijkl}(x, y, z),
\end{aligned}$$

kjer je d_{ijkl} dobljen na podoben način kot v primeru $d = 1$. Skupaj z dejstvom, da je $\dim(\mathbb{P}_d) = \binom{d+3}{2}$ enako številu baznih funkcij v $\mathcal{B}_d$ dokažemo izjavo, da Bernsteinovi bazni polinomi tvorijo bazo $\mathbb{P}_d$.

Izjava o spodnji ter zgornji meji Bernsteinovih baznih funkcij sledi direktno iz lastnosti baricentričnih koordinat. □

Iz izreka 2 sledi, da lahko vsak polinom $p \in \mathbb{P}_d$ lahko zapišemo na enoličen način kot

$$p = \sum_{i+j+k+l=d} c_{ijkl} B^d_{ijkl}. \tag{13}$$

Tak zapis imenujemo **B-forma** ter koeficente c_{ijkl} **B-koeficienti**. Množico domenskih točk definiramo ter označimo kot

$$\mathcal{D}_{d,T} := \left\{ \zeta^T_{ijkl} := \frac{iV_1 + jV_2 + kV_3 + lV_4}{d} \right\}_{i+j+k+l=d}. \tag{14}$$

TODO slika z domenskimi točkami.

Nadalje pripišemo vsaki domenski točki ζ^T_{ijkl} B-koeficent c_{ijkl} za $i + j + k + l = d$. Torej lahko zapišemo B-koeficente kot $\{c_\zeta\}_{\zeta \in \mathcal{D}_{d,T}}$ tako da če $\zeta = \zeta^T_{ijkl}$, potem je $c_\zeta = c_{ijkl}$.

Izrek 3. *Naj bo $p \in \mathbb{P}_d$ zapisan v obliki* (13)*. Označimo z $F_1 := \langle V_2, V_3, V_4 \rangle$ ploskev tetraedra T nasproti vozlišču V_1. Potem velja*

$$p|_{F_1} = \sum_{j+k+l=d} c_{0jkl} B^d_{0jkl} = \sum_{j+k+l} c^{F_1}_{jkl} B^{F_1,d}_{jkl}, \tag{15}$$

kjer $c^{F_1}_{jkl} := c_{0jkl}$ ter so $B^{F_1,d}_{jkl}$ Bernsteinovi bazni polinomi stopnje d glede na trikotnik F_1 .

Podobne formule veljajo za ostale ploskve tetraedra T.

Dokaz. Upoštevaje dejstvo, da je $B^d_{0jkl} = 0$ za vsako $V \in \mathrm{F}_1$ (ker je tam $\phi_1 = 0$), trditev sledi nemudoma. □

TODO stabilnost B forme mogoče nima smisla

5. de Castljaujev algoritem