Výroková logika – Tablá

Úvod do výpočtovej logiky

Jozef Šiška

2013/2014

Hilbertovský kalkul
Dôkaz

Analytické tablá

Hilbertovský kalkul

Schémy axiom

A1 $(A \to (B \to A))$

A2 $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

A3 $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$

A4 $((A \wedge B) \to A)$, $((A \wedge B) \to B)$

A5 $(A \to (B \to (A \wedge B)))$

A6 $((A \to (A \vee B))$, $(B \to (A \vee B))$

A7 $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

Odvodzovacie pravidlo

MP $\dfrac{A, A \to B}{B}$

Hilbertovský kalkul – dôkaz

Definícia

Dôkaz Dôkaz formuly X z množiny predpokladov S je postupnosť formúl $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ taká, že každá formula Y_i je predpoklad z S, alebo je to inštancia niektorej z axiom, alebo vznikla aplikáciou odvodzovacieho pravidla na formuly ktoré sa vyskujú pred ňou.

Hovoríme, že formula X je dokázateľná z množiny predpokladov X (značíme $S \vdash X$) ak existuje dôkaz X z S.

Hilbertovský kalkul – dôkaz

Definícia

Dôkaz Dôkaz formuly X z množiny predpokladov S je postupnosť formúl $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ taká, že každá formula Y_i je predpoklad z S, alebo je to inštancia niektorej z axiom, alebo vznikla aplikáciou odvodzovacieho pravidla na formuly ktoré sa vyskujú pred ňou.

Hovoríme, že formula X je dokázateľná z množiny predpokladov X (značíme $S \vdash X$) ak existuje dôkaz X z S.

Vety o úplnosti

- Formula X je dokázateľná z prázdnej množiny predpokladov vtt X je tautológia ($\emptyset \vdash X$ vtt $\models X$)
- Nech T je konečná množina formúl, potom formula X je dokázateľná z T vtt keď X vyplýva z T ($T \vdash X$ vtt $T \models X$).

Analytické tablá

Pozorovanie

Uvažujme ľubovoľnú interpretáciu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly.

1. 1.1 *Ak negácia $\neg X$ je pravdivá, tak X je nepravdivá.*
   1.2 *Ak negácia $\neg X$ je nepravdivá, tak X je pravdivá.*
2. 2.1 *Ak konjunkcia $(X \wedge Y)$ je pravdivá, tak obidve formuly X a Y sú pravdivé.*
   2.2 *Ak konjunkcia $(X \wedge Y)$ je nepravdivá, tak X alebo Y je nepravdivá formula.*
3. 3.1 *Ak disjunkcia $(X \vee Y)$ je pravdivá, tak X alebo Y je pravdivá formula.*
   3.2 *Ak disjunkcia $X(\wedge Y)$ je nepravdivá, tak formuly X a Y sú nepravdivé.*
4. 4.1 *Ak implikácia $(X \rightarrow Y)$ je pravdivá, tak X je nepravdivá alebo Y je pravdivá formula.*
   4.2 *Ak implikácia $(X \rightarrow Y)$ je nepravdivá, tak X je pravdivá a Y je nepravdivé formula.*

Označené formuly

Definícia

Označená formula Nech X je formula, potom TX a FX sú označené formuly.

Nech i je interpretácia (v je boolovské ohodnotenie):

- TX je pravdivá pri i (v) vtt X je pravdivá pri i (v) a naopak.
- FX je pravdivá pri i (v) ak X je nepravdivá pri i (v) a naopak.

(T.j. $TX \equiv X$, $FX \equiv \neg X$)

Stupeň označenej formuly TX alebo FX je stupeň formuly X.

$$\frac{T\phi \land \psi}{\begin{array}{c} T\phi \\ T\psi \end{array}} \qquad \frac{F\phi \land \psi}{F\phi \mid F\psi} \qquad \frac{T\neg\phi}{F\phi}$$

$$\frac{F\phi \lor \psi}{\begin{array}{c} F\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{T\phi \lor \psi}{T\phi \mid T\psi} \qquad \frac{F\neg\phi}{T\phi}$$

$$\frac{F\phi \to \psi}{\begin{array}{c} T\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{T\phi \to \psi}{F\phi \mid T\psi}$$

$$\frac{T\phi \wedge \psi}{\begin{array}{c} T\phi \\ T\psi \end{array}} \qquad \frac{F\phi \wedge \psi}{F\phi \mid F\psi} \qquad \frac{T\neg\phi}{F\phi}$$

$$\frac{F\phi \vee \psi}{\begin{array}{c} F\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{T\phi \vee \psi}{T\phi \mid T\psi} \qquad \frac{F\neg\phi}{T\phi}$$

$$\frac{F\phi \to \psi}{\begin{array}{c} T\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{T\phi \to \psi}{F\phi \mid T\psi}$$

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Analytické tablo

Definícia

Analytické tablo pre označenú formulu X je binárny strom, ktorého vrcholy sú výskyty označených formúl a ktorý je skonštruovaný nasledovne:

- Sasmostatný vrchol s X (koreň) je tablo pre X.
- Nech $\mathcal{T}$ je nejaké tablo pre X, nech Y je nejaký jeho list. Potom $\mathcal{T}$ môžeme rozšíriť pomocou ktorejkoľvek z nasledujúcich dvoch operácií:
  - A Ak sa na vetve v_Y (ceste z koreňa do Y) vyskytuje nejaké α, tak môžeme pripojiť α_1 alebo α_2 ako jediného syna Y.
  - B Ak sa na vetve v_Y vyskytuje nejaké β, tak môžeme (súčasne) pripojiť β_1 ako ľavého a β_2 ako pravého syna Y.

Definícia (Priame rozšírenie)

Nech $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ sú binárne stromy, ktorých vrcholy sú výskyty označených formúl. Potom $\mathcal{T}_2$ nazývame *priamym rozšírením* $\mathcal{T}_1$, ak $\mathcal{T}_2$ vzniklo jednou aplikáciou operácie A alebo B.