

# Úkol č. 1

DOBRUŠE LUKÁŠOVÁ, KATARÍNA GAŽOVÁ, TEREZIE  
POLÁČKOVÁ, JAKUB VOBORSKÝ & PETR CHALOUPEK



## Úvod

Cílem této práce je analýza časových řad, a to konkrétně vývoj indexu spotřebitelských cen (CPI), a výnosovou míru tří měsíčních pokladničních poukázek na sekundárním trhu (IR). Obě časové řady jsme získali z FREDu, časové řady zachycují období mezi lety 1980 až 2008. Data mají měsíční charakter a jsou sezónně očištěna<sup>1</sup>.

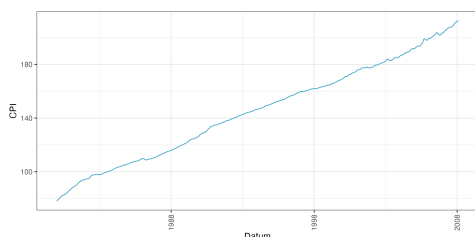
## Úloha č. 1

Nejprve jsem si obě časové řady vykreslili, jak je vidět z obrázku 1 a 2 obě časové řady jsou nestacionární. Potřebujeme je tedy upravit tak, aby byly stacionární.

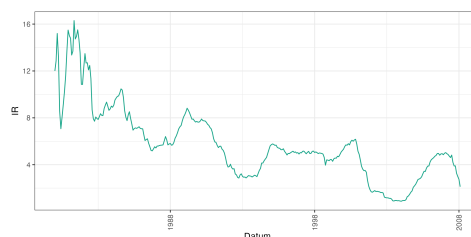
<sup>1</sup>Skript a podkladové soubory se nachází v zip. souboru odevzdaném spolu s tímto komentářem, případně jsou dostupné na [GitHubu](#).

Za tímto účelem jsme nejprve CPI linearizovali pomocí transformace na logaritmy, a následně odstranili trend pomocí difference (obrázek 3). V případě výnosů 3-měsíčních pokladničních poukázek jsme použili pouze difference (obrázek 4).

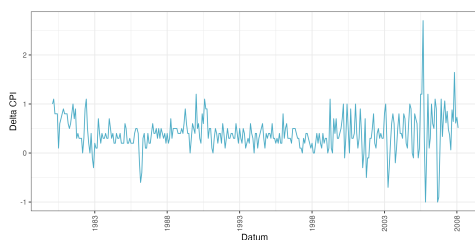
Obrázek 1: CPI



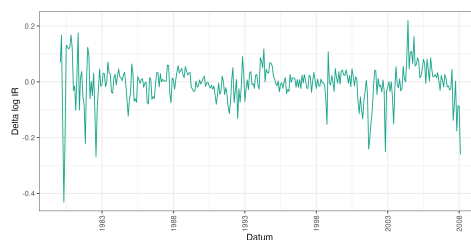
Obrázek 2: IR



Obrázek 3:  $\Delta \log \text{CPI}$



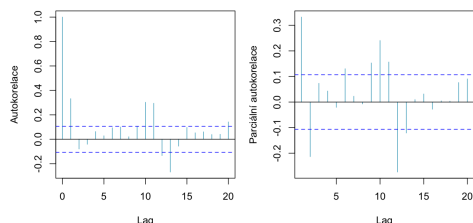
Obrázek 4:  $\Delta \text{IR}$



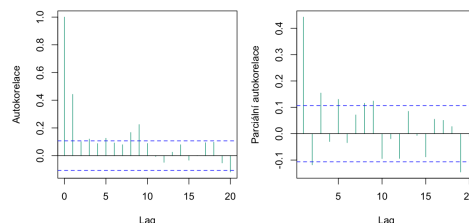
## Úloha č. 2

V úloze číslo jsme se pokoušeli zvolit nejvhodnější modely pro popis námi vybraných časových řad. Grafy 5 a 6 zobrazují autokorelační funkci (ACF) a parciální autokorelační funkci (PACF) časové řady CPI, které poskytly důležité informace pro volbu vhodného ARMA modelu. Postupné slábnutí autokorelace na zpožděních hodnotách by mohlo indikovat přítomnost autoregresní složky vyššího řádu. PACF ukazovala významný kladný efekt na prvním zpoždění, zatímco na dalších zpožděních docházelo k jeho postupnému útlumu, což mohlo ukazovat nižší řád autoregresního modelu. Tyto charakteristiky naznačovaly, že vhodnou volbou by mohl být ARMA model s vyšším autoregresním řádem a případně nižším řádem MA složky. PACF graf pro časovou řadu IR ukázal prudký pokles po prvním lagu, což by mohlo naznačovat AR proces nízkého řádu. Pro odhad ARMA modelů jsme použili mřížkové vyhledávání, kde jsme pro obě časové řady (CPI a IR) zkoušeli všechny kombinace autoregresních ( $p$ )

Obrázek 5:  $\Delta \log \text{CPI}$



Obrázek 6:  $\Delta \text{IR}$



a klouzavě průměrných ( $q$ ) složek v rozsahu 0 až 10. Nejprve jsme vytvořili datový rámec obsahující všechny možné kombinace hodnot  $p$  a  $q$ , poté jsme pro každou z nich odhadli model pomocí funkce `arima()` s pořadím  $(p, 0, q)$ , přičemž jsme předpokládali stacionární časovou řadu.

## Úloha č. 3

Pro časové řady CPI a IR jsme začali výběrem nejlepších modelů na základě kritérií Akaikeho a Bayes-Schwarzova informačního kritéria. AIC se používá k výběru modelu, který nejlépe vyváží vhodnost přizpůsobení datům a složitost, zatímco BIC poskytuje přísnější penalizaci za složitost modelu a je vhodnější pro predikci. Pro každý model jsme spočítali hodnoty kritérií a následně vybrali modely s nejnižšími hodnotami jako nejlepší za každou skupinu.

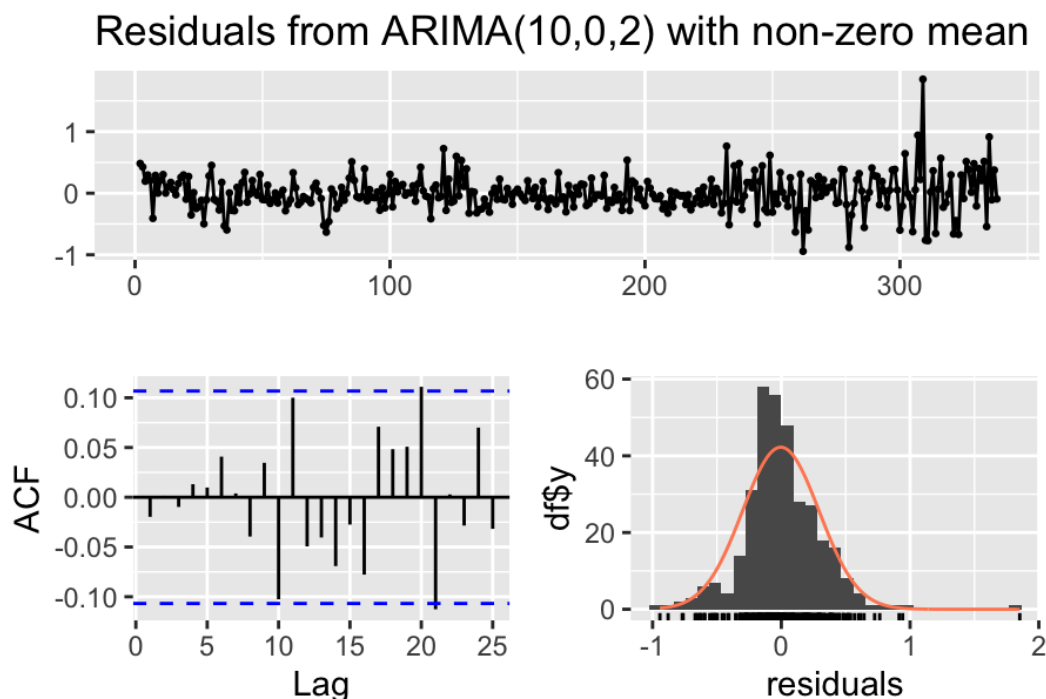
Tabulka 1: Srovnání ARMA modelů

Časová řada	Model	Kritérium	Hodnota
CPI	ARMA (10, 6)	AIC	157,94
CPI	ARMA (10, 2)	BIC	168,51
IR	ARMA (6, 7)	AIC	-970,33
IR	ARMA (0, 1)	BIC	-940,48

Dalším krokem byla analýza reziduí. Pro každý z vybraných modelů jsme provedli kontrolu reziduí s cílem zjistit, zda jsou normálně rozdělena a mají charakter bílého šumu. K tomu jsme použili Ljung-Box testy pro autokorelaci reziduí. Pokud test ukázal  $p$ -hodnotu menší než 0,05, naznačuje to, že rezidua nejsou

náhodná a nejsou tak splněny předpoklady modelu. Jelikož p-hodnoty tohoto testu byly všechny větší než hladina významnosti, nezamítli jsme nulovou hypotézu o tom, že data neobsahují autokorelaci. Postup grafické diagnostiky demonstrujeme na nejlepším modelu CPI podle BIC. Vidíme, že rezidua dobře

Obrázek 7: Rozložení reziduí ARMA (10, 2) modelu CPI

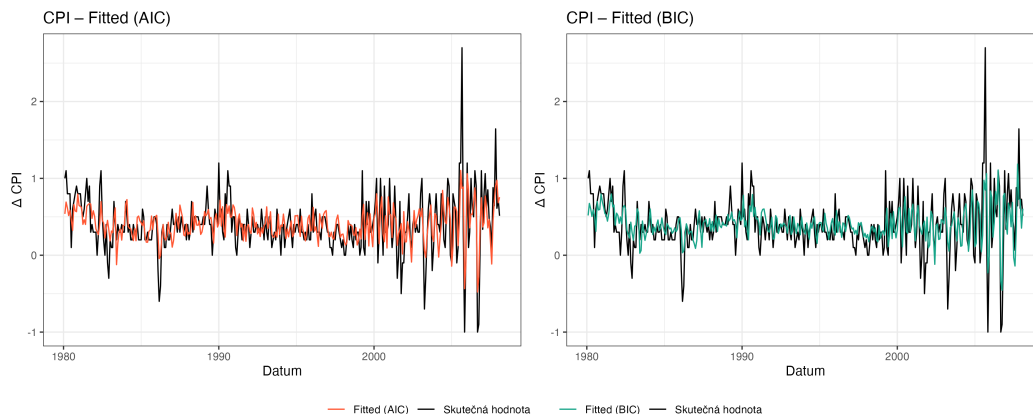


reflektují normální rozdělení. Jediný vzorek v autokorelační funkci, který lehce překračuje kritickou hodnotu, naznačuje, že mezi hodnotami v tomto specifickém zpoždění existuje slabá, ale statisticky významná korelace, která by mohla indikovat malý nedostatek v modelu.

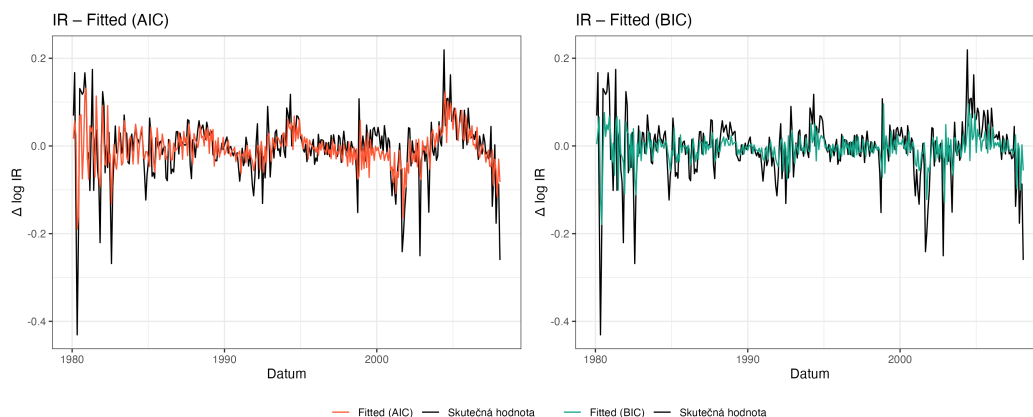
## Úloha č. 4

Cílem této analýzy bylo vyrovnat časové řady CPI a IR a následně posoudit kvalitu těchto modelů. K tomu jsme použili vizuální srovnání skutečných a vyrovnaných hodnot (viz obrázky 8 a 9). Nejprve jsme vykreslili skutečné hodnoty CPI a IR v čase a porovnali je s hodnotami predikovanými pomocí modelů s kritérii AIC a BIC. Skutečné hodnoty byly znázorněny černou křivkou,

Obrázek 8: *Fitted* hodnoty CPI



Obrázek 9: *Fitted* hodnoty IR



zatímco *fitted* hodnoty modelů byly odlišeny barvou – červená pro model AIC a tyrkysová pro model BIC. Při pohledu na grafy bylo patrné, že oba modely přibližně sledují trend skutečných dat.

## Úloha č. 5

V této úloze jsme měli za úkol vytvořit predikci našich časových řad pomocí ARMA modelů.

Stacionární data jsme převedli na časové řady s měsíční frekvencí. Predikce jsme provedli dvěma způsoby: rekurzivním rozšiřujícím se okénkem, kde se trénovací data postupně zvětšují, a posouvajícím se okénkem s délkou 120 měsíců, obě s čtyřkrokovým horizontem.

Část pro natrénování modelu je od roku 1980 do července 2002, testovací část od srpna 2002 do února 2008. Pro CPI jsme použili ARMA(10, 6) a ARMA(10, 2), pro IR ARMA(6, 7) a ARMA(0, 1).

Přesnost jsme změřili pomocí MSPE, RMSPE a MAPE a výsledky shrnuli do tabulek 4 a 5 (obě tabulky jsou příloha tohoto dokumentu).

Jako nejlepší model pro CPI se ukázal ARMA(10,6), jak pro rolling window, tak pro expanding window přístup, chybovost modelu roste s horizontem, což se dá očekávat, avšak je stále docela dost nepřesný (odchylka MAPE je 30%+ u všech predikcí), avšak ARMA(10, 6) model vyhazoval NA hodnoty, a měli jsme problémy s konvergencí.

Pro predikci úrokových sazeb byli obě formy obou modelů výrazně přesnější než pro CPI (odchylky MAPE jsou jednociferné), avšak jednodušší model ARMA(0,1) byl marginálně přesnější při použití expanding window, zatímco u rolling window byl marginálně přesnější model ARMA(6, 7), ale ten stejně jako složitější model ARMA(10, 6) měl problém s konvergencí.

## Úloha č. 6

Z modelů vybraných pro CPI měl ARMA(10, 6) měl hodnotu rozptylu reziduí 0,08145, zatímco ARMA(10, 2) 0,08821, čili první model byl o trochu lepší jak ve vyrovnávání dat, tak při predikci, jak je možné se přesvědčit z úlohy č. . Zatímco u modelů vybraných pro IR byl model ARMA(6, 7) lepší ve vyrovnávání dat (0,002856 vs. 0,003526 pro ARMA(0, 1)), v predikčních schopnostech bylo skóre 1:1, každý z nich byl v predikci o trochu lepší v rolling window přístupu vs. expanding window přístupu.

Tabulka 2: Model: NAIVE\_CPI

<b>MSPE</b>	0,4815	0,8787	0,9038	0,7082
<b>RMSPE</b>	0,6939	0,9374	0,9507	0,8416
<b>MAPE</b>	0,5116	0,6983	0,7133	0,6303

Tabulka 3: Model: NAIVE\_IR

<b>MSPE</b>	0,0059	0,0069	0,0046	0,0071
<b>RMSPE</b>	0,0767	0,0828	0,0682	0,0844
<b>MAPE</b>	0,0554	0,0595	0,0453	0,0606

## Úloha č. 7

Implementovali jsme naivní predikci pro obě časové řady. Pro každou řadu jsme vytvořili cyklus, kde pro každý krok predikce jsme zjistili rozdíl mezi predikovanou hodnotou a skutečnou hodnotou. Poté jsme spočítali průměrné chyby, konkrétně MSPE (průměr čtverců chyb), RMSPE (druhá odmocnina MSPE) a MAPE (průměr absolutních procentuálních chyb). Nakonec jsme tyto výsledky vypsali, abychom získali přehled o výkonnosti naivních predikcí pro obě časové řady CPI a IR.

Z tabulky 2 a 3 je patrné, že naivní model pro CPI vykazoval vyšší chyby v predikci než model pro IR. MSPE pro CPI se pohyboval v rozmezí od 0,4815 do 0,9038, což naznačovalo, že model měl v některých obdobích výraznější odchylky. RMSPE pro CPI se pohyboval od 0,6939 do 0,9507 a MAPE mezi 0,5116 a 0,7133, průměrná procentuální chyba byla tedy relativně vysoká a model pro CPI nebyl příliš přesný.

Naopak, pro model IR byly výsledky mnohem lepší. MSPE se pohybovalo mezi 0,0046 a 0,0071, což znamenalo menší odchylky mezi predikovanými a skutečnými hodnotami. RMSPE bylo v rozmezí od 0,0682 do 0,0844 a MAPE mezi 0,0453 a 0,0606, naivní model pro IR měl mnohem nižší průměrné procentuální chyby, a tím byla predikce úrokových sazeb přesnější.

Tento rozdíl v přesnosti predikcí ukazoval, že naivní modely lépe fungují pro IR, který vykazoval stabilnější změny, než pro CPI, který byl více volatilní.

## Úloha č. 8

Vybrali jsme modely ARMA(10,2) pro CPI a ARMA(0,1) pro IR jako nejlepší kvůli jejich spolehlivé konvergenci, ačkoli ARMA(10,6) a ARMA(6,7) měly mírně lepší statistiky (viz úlohy a ).

Srovnali jsme predikce modelů se skutečnými hodnotami  $\Delta$  CPI a  $\Delta \log$  IR v testovacím období (srpen 2002 – únor 2008). Oba modely sledují obecný trend, ale přesnost klesá s rostoucím horizontem (viz úloha ). Ve srovnání s naivní predikcí (viz úloha ) ARMA modely překonaly naivní model, jak u CPI, tak u IR.

Out-of-sample predikce s 95% intervaly spolehlivosti ukazují větší nejistotu u CPI kvůli vyšší volatilitě, zatímco IR má užší intervaly díky stabilnější dynamice a nižšímu rozptylu reziduí, a jak je vidě, a zároveň nejistota roste s horizontem.

## Závěr

Analyzovali jsme časové řady vývoje inflace a výnosu amerických T-bills pro roky 1980-2008. Za nejlepší jsme, díky jejich spolehlivé konvergenci vybrali modely ARMA(10, 2) pro CPI a ARMA(0, 1) pro IR. Predikční schopnost modelů pro CPI byla výrazně nižší než pro úrokové sazby, což se dalo očekávat, oba modely ale překonaly naivní predikce.



Tabulka 4: Posuvné okénko

model	p	q	MSPE_h1	MSPE_h2	MSPE_h3	MSPE_h4	RMSPE_h1	RMSPE_h2	RMSPE_h3	RMSPE_h4	MAPE_h1	MAPE_h2	MAPE_h3	MAPE_h4
CPLAIC	10	6	0,2104	0,3154	0,3173	0,3099	0,4587	0,5616	0,5633	0,5566	0,3700	0,4310	0,4408	0,4461
CPLBIC	10	2	0,3050	0,3608	0,3702	0,4048	0,5523	0,6006	0,6085	0,6362	0,3999	0,4509	0,4643	0,4951
IR_AIC	6	7	0,0048	0,0047	0,0051	0,0064	0,0693	0,0682	0,0714	0,0801	0,0472	0,0439	0,0452	0,0515
IR_BIC	0	1	0,0045	0,0055	0,0057	0,0067	0,0673	0,0745	0,0752	0,0820	0,0457	0,0521	0,0533	0,0571

Tabulka 5: Rozšiřující se okénko

model	p	q	MSPE_h1	MSPE_h2	MSPE_h3	MSPE_h4	RMSPE_h1	RMSPE_h2	RMSPE_h3	RMSPE_h4	MAPE_h1	MAPE_h2	MAPE_h3	MAPE_h4
CPLAIC	10	6	0,1567	0,1967	0,1481	0,1545	0,3959	0,4435	0,3848	0,3931	0,3141	0,3688	0,3359	0,3421
CPLBIC	10	2	0,2531	0,3054	0,2947	0,3019	0,5031	0,5526	0,5429	0,5494	0,3794	0,4241	0,4197	0,4284
IR_AIC	6	7	0,0053	0,0064	0,0082	0,0075	0,0726	0,0803	0,0908	0,0869	0,0539	0,0644	0,0696	0,0641
IR_BIC	0	1	0,0050	0,0064	0,0065	0,0066	0,0710	0,0797	0,0804	0,0811	0,0495	0,0553	0,0560	0,0566