§ 1. Случайные события

1. Понятие случайного события. Предметом теории вероятностей являются модели *экспериментов со случайными исходами* (*случайных экспериментов*). При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять (воспроизводить) при неизменном комплексе условий произвольное число раз (по крайней мере теоретически). Для реально воспроизводимого эксперимента понятие «наблюдаемый результат» означает, что существует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта с помощью того или иного прибора (в простейшем случае, например, визуально). Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта (*случайное событие*).

Математическая формализация модели случайного эксперимента включает в себя:

1) построение множества элементарных исходов Ω,
2) описание поля событий для данного эксперимента,
3) задание вероятностного распределения на поле событий.

Под *множеством элементарных исходов* понимают множество взаимоисключающих исходов такое, что результатом эксперимента всегда является один и только один исход. Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как событие (возможно, и ненаблюдаемое). Совокупность всех наблюдаемых событий составляет *поле событий* для данного эксперимента.

Понятия, связанные с 2) и 3), определяются строго в аксиоматической теории вероятностей, которая составляет основу всех современных курсов теории вероятностей и их приложений.

Множество Ω для данного эксперимента может быть *дискретным, непрерывным* или иметь более сложную структуру. К дискретным относятся конечные или счетные множества элементарных исходов, к непрерывным — множества типа континуума (любой конечный или бесконечный интервал на числовой прямой является примером множества типа континуума). В дальнейшем мы рассматриваем только такие модели экспериментов, для которых множество элементарных исходов Ω либо дискретно, либо непрерывно.

Говорят, что событие A *произошло* (*наступило, осуществилось, реализовалось*), если результатом эксперимента явился элементарный исход ω, принадлежащий A ($\omega \in A$). Событие, совпадающее с пустым множеством $\varnothing$, называется *невозможным событием*, а событие, совпадающее со всем множеством Ω, — *достоверным событием.*

Два события A и B называются *совместными* (*несовместными*), если в результате эксперимента возможно (невозможно) их совместное осуществление. Другими словами, события A и B совместны, если соответствующие множества A и B имеют общие элементы, и несовместны в противном случае.

Построение множества Ω (если оно не задано при описании эксперимента) осуществляется на практике, исходя из требования, чтобы все интересующие нас результаты данного эксперимента могли быть однозначно описаны на основе построенного множества Ω. Другими словами, если нас интересуют события A, B, C и т. д., являющиеся наблюдаемыми событиями в данном эксперименте, то множество Ω должно состоять из таких исходов, чтобы существовали подмножества данного множества, равносильные событиям A, B, C и т.д.

2. Алгебраические операции над событиями. Поскольку событие отождествляется с множеством, то над событиями можно совершать все операции, выполнимые над множествами. В частности, определены следующие операции и отношения между событиями:

$A \subset B$ (отношение включения множеств: множество A является подмножеством множества B)— *событие A влечет за собой событие B.* Иначе говоря, событие B происходит всякий раз, как происходит событие A.

$A = B$ (отношение эквивалентности множеств) — *событие A тождественно событию B.* Это возможно в том и только в том случае, когда $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$.

$A + B$ (объединение множеств) — *сумма событий.* Это событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из двух событий A или B (не исключающее логическое «или»).

AB (пересечение множеств) — *произведение событий.* Это событие, состоящее в совместном осуществлении событий A и B (логическое «и»). Таким образом, события A и B несовместны, если $AB = \varnothing$.

$A - B$ (множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B)— *разность событий.* Это событие, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит.

$\overline{A} = \Omega - A$ (дополнение множества A до Ω)— *противоположное событие.* Это событие, состоящее в том, что A не происходит (логическое отрицание).

Пример 1. Эксперимент состоит в подбрасывании один раз правильной шестигранной игральной кости. Обозначим X число очков, выпавших на верхней грани кости. Описать множество элементарных исходов Ω и указать состав подмножеств, соответствующих следующим событиям: $A = \{X \text{ кратно трем}\}$, $B = \{X \text{ нечетно}\}$, $C = \{X > 3\}$, $D = \{X < 7\}$, $E = \{X \text{ дробно}\}$, $F = \{0,5 < X < 1,5\}$. Выявить пары совместных событий.

$\lhd$ Введем обозначения для следующих наблюдаемых в данном эксперименте событий: $\omega_k = \{X = k\}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$; $\omega^{(1)} = \{X \text{ — нечетное число}\}$, $\omega^{(2)} = \{X \text{ — четное число}\}$.

На базе данных исходов можно сконструировать два множества элементарных исходов $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ и $\Omega_2 = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\}$. Какое из них больше подходит для формальной модели данного эксперимента? Ясно, что Ω_2 следует «забраковать», поскольку, например, наблюдаемые события $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ A, B, D, E не являются подмножествами множества Ω_2. С другой стороны, все перечисленные события могут быть описаны как подмножества множества Ω_1. Действительно, $A = \{\omega_3, \omega_6\}$, $B = \omega^{(1)} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $D = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\} = \Omega_1$, $E = \varnothing$, $F = \omega_1$. Из написанных равенств, в частности, усматриваем, что исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ разложимы на элементы, которые сами являются исходами данного эксперимента. Таким образом, исходы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ более «элементарны», чем исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$.

Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов, находим пары совместных событий: A и B, A и C, A и D, B и C, B и D, B и F, C и D, D и F. $\rhd$

Пример 3. Игральная кость подбрасывается один раз. Наблюдаемый результат — число очков на верхней грани. События A, B, C, D, E, F описаны в примере 1. Описать состав и выяснить смысл следующих событий: $E_1 = \overline{B}$, $E_2 = \overline{C}$, $E_3 = AB$, $E_4 = A + B$, $E_5 = A - \overline{B}$, $E_6 = E + D$, $E_7 = EF$.

$\lhd$ В обозначениях примера 1 напишем состав указанных событий, используя определение соответствующей алгебраической операции: $E_1 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ — выпало четное число очков; $E_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — выпало число очков, не большее трех; $E_3 = \{\omega_3\}$ — выпавшее число очков нечетно и кратно трем; $E_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$ — выпавшее число очков или нечетно, или кратно трем; $E_5 = AB = E_3$; $E_6 = \varnothing + D = D = \Omega$. $\rhd$

В задачах 18.1–18.10 построить множество элементарных исходов Ω по описанию эксперимента и подмножества, соответствующие указанным событиям.

18.1. Игральная кость подбрасывается дважды. Наблюдаемый результат — пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших в первый и второй раз. События: $A = \{$оба раза выпало число очков, кратное трем$\}$, $B = \{$ни разу не выпало число шесть$\}$, $C = \{$оба раза выпало число очков, большее трех$\}$, $D = \{$оба раза выпало одинаковое число очков$\}$.

18.2. Монета подбрасывается три раза. Наблюдаемый результат — появление герба (г) или цифры (ц) на верхней стороне монеты. События: $A =\{$герб выпал ровно один раз$\}$, $B = \{$ни разу не выпала цифра$\}$, $C = \{$выпало больше гербов, чем цифр$\}$, $D = \{$герб выпал не менее, чем два раза подряд$\}$.

18.3. Монета подбрасывается до первого появления герба. Наблюдаемый результат — общее число подбрасываний. События: $A = \{$герб выпал при третьем подбрасывании$\}$, $B = \{$герб выпал не ранее, чем при третьем подбрасывании$\}$.

18.4. Эксперимент состоит в раскладывании наудачу трех занумерованных шаров по трем ящикам. В каждый ящик может поместиться любое число шаров. Наблюдаемый результат — тройка чисел (i, j, k), где i, j, k — номера ящиков, в которые попали соответственно первый, второй и третий шары. События: $A = \{$первый ящик пустой$\}$, $B = \{$в каждый ящик попало по одному шару$\}$, $C = \{$все шары попали в один ящик$\}$.

Пусть A, B, C — три события, наблюдаемые в данном эксперименте. В задачах 18.35–18.37 выразить указанные события в алгебре событий.

18.35. $E_1 = \{$из трех событий A, B, C произойдет ровно одно$\}$, $F_1 = \{$из трех событий A, B, C произойдет ровно два$\}$.

18.36. $E_2 = \{$из трех событий A, B, C произойдет хотя бы одно$\}$, $F_2 = \{$из трех событий A, B, C произойдет не меньше двух$\}$.

18.37. $E_3 = \{$из трех событий A, B, C не произойдет ни одного$\}$, $F_3 = \{$из трех событий A, B, C произойдет хотя бы два$\}$, $G = \{$из трех событий A, B, C не произойдет хотя бы одно$\}$.

18.39. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рис. 2. Событие $A_k = \{$элемент с номером k вышел из строя$\}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Событие $B = \{$разрыв цепи$\}$. Выразить событие B в алгебре событий A_1, A_2, A_3, A_4.

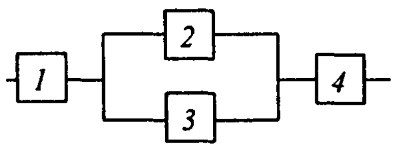

Рис. 2

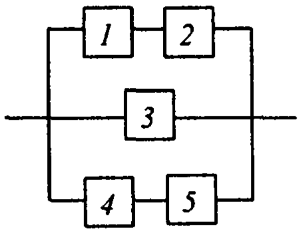

Рис. 3

18.40. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рис. 3. Событие $A_k = \{$элемент с номером k вышел из строя$\}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Событие $B = \{$разрыв цепи$\}$. Выразить событие B в алгебре событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Пусть заданы n множеств Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n, содержащих, вообще говоря, различное число элементов. Множество вида

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,) \,|\, \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}$$

называется *прямым произведением* множеств Ω_1, ..., Ω_n и обозначается

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n.$$

Пусть каждое из множеств Ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, является множеством элементарных исходов некоторого эксперимента E_i. Тогда составной эксперимент, состоящий в проведении последовательно экспериментов E_1, E_2, ... , E_n и наблюдений совместного результата, имеет множество элементарных исходов $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ и называется *последовательностью испытаний*.

18.42. Произведено три выстрела из орудия по цели. Событие $A_k = \{$попадание при k-м выстреле$\}$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$.

а) Выяснить состав множества Ω, выразив каждый элементарный исход ω_i через события A_k.

б) Записать в алгебре событий следующие события:

$A = \{$ровно одно попадание$\}$, $B = \{$хотя бы одно попадание$\}$, $C = \{$хотя бы один промах$\}$, $D = \{$не меньше двух попаданий$\}$, $E = \{$попадание не раньше, чем при третьем выстреле$\}$.

18.43. Из ящика, содержащего 10 деталей, из которых 3 бракованных, наудачу последовательно и без возвращения извлекается по одной детали до появления бракованной, после чего опыт прекращается. Обозначим исход i-го испытания $\omega_i = \{$бракованная деталь появится при i-м испытании$\}$. Рассмотрим событие $A = \{$придется производить третье по счету извлечение детали$\}$.

а) Сконструировать элементарные исходы данного опыта с помощью алгебраических операций над исходами ω_i, $i = 1,\ 2, \ldots$

б) Записать событие A через элементарные исходы и упростить запись путем алгебраических преобразований.

18.44. Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания. Выигрывает тот, кто первый забросит мяч. События: $A_k = \{$первый баскетболист попадает при своем k-м броске$\}$, $B_k = \{$второй баскетболист попадает при своем k-м броске$\}$; $A = \{$выигрывает первый баскетболист$\}$, $B = \{$выигрывает второй$\}$. Первый баскетболист бросает первым. Определить состав множества элементарных исходов и записать события A и B в алгебре событий.

Пример 2. Эксперимент состоит в радиолокационном обнаружении воздушной цели. Наблюдаемый результат — положение светящегося пятна (отраженного импульса от цели) на экране индикатора цели, имеющего форму круга радиуса 10 см, в декартовой системе координат с началом, совпадающим с центром экрана. Описать множество элементарных исходов и состав подмножеств, соответствующих следующим событиям: $A = \{$цель находится в первом квадранте$\}$, $B = \{$цель находится в круге радиуса 5 см, центр которого совпадает с центром экрана$\}$, $C = \{$цель находится в круге радиуса 2,5 см, центр которого сдвинут на 5 см вдоль оси Ox в отрицательном направлении$\}$. Совместны ли пары событий A и B, A и C, B и C?

◁ Все интересующие нас в данном эксперименте наблюдаемые события связаны с регистрацией положения светящегося пятна на экране индикатора. Удобной формой математического описания элементарного исхода являются в данном случае координаты случайной точки на плоскости, соответствующей, например, центру пятна (предполагается, что пятно представляет собой круг достаточно малого радиуса).

Таким образом, множество Ω непрерывно и может быть записано в виде

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100\}.$$

Подмножества, равносильные указанным событиям, имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \{(x,\, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100,\ x > 0,\ y > 0\}, \\ B &= \{(x,\, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}, \\ C &= \{(x,\, y) \mid (x+5)^2 + y^2 \leqslant 6{,}25\}. \end{aligned}$$

По определению, события совместны, если соответствующие им подмножества имеют общие элементы (пересекаются), и несовместны в противном случае. Поэтому события A и B, B и C совместны, а события A и C несовместны. ▷

В задачах 18.1–18.10 построить множество элементарных исходов Ω по описанию эксперимента и подмножества, соответствующие указанным событиям.

18.5. Производится стрельба по плоской прямоугольной мишени: $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Наблюдаемый результат — координаты точки попадания в декартовой системе координат. По условиям стрельбы непопадание в указанный прямоугольник исключено. События: $A = \{$абсцисса точки попадания не меньше ординаты$\}$, $B = \{$произведение координат точки неотрицательно$\}$, $C = \{$сумма абсолютных величин координат точки превышает единицу$\}$. Выявить пары совместных событий.

18.6. На отрезке $[a, b]$ наудачу ставится точка. Пусть x — координата этой точки. Затем на отрезке $[a, x]$ наудачу ставится еще одна точка с координатой y. Наблюдаемый результат — пара чисел $(x,\ y)$. События: $A = \{$вторая точка ближе к правому концу отрезка $[a, b]$, чем к левому$\}$, $B = \{$расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка$\}$, $C = \{$первая точка ближе ко второй, чем к правому концу отрезка $[a, b]\}$. Выявить пары несовместных событий.

18.7. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат — пара чисел $(x,\ y)$, где x — время прихода Петра, y — время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). Событие $A = \{$встреча состоялась$\}$.

18.8 (продолжение). В условиях эксперимента задачи 18.7 рассмотреть следующие события: $B = \{$Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался$\}$, $C = \{$Ивану не пришлось ждать Петра$\}$.

18.9 (продолжение). В условиях эксперимента задачи 18.7 рассмотреть события: $D = \{$встреча состоялась после 11 ч 30 мин$\}$, $E = \{$Иван опоздал на встречу$\}$, $F = \{$встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут$\}$.