Sveučilište u Zagrebu
Geotehnički fakultet

Zadaci s vježbi iz kolegija Fizika 1

Akademska godina 2018./2019.

doc. dr. sc. Ivan Hip
dr. sc. Marko Petric
dr. sc. Davor Stanko

4. siječnja 2021.

Sadržaj

1 MATEMATIČKI TEMELJI

1.1 Vektori

1.1. Nacrtajte slijedeća tri vektora u xy-ravnini: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ i izračunajte računski i grafički:

a) Nacrtajte sva tri vektora u xy-ravnini.

b) Koja dva vektora su okomita? Provjerite!

c) Izračunajte računski i grafički $\vec{a} + \vec{b}$.

d) Izračunajte računski i grafički $\vec{b} - \vec{c}$.

---

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 2\vec{j}) = -9$
$\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -7$
$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$

b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -5\vec{i} + \vec{j}$

1.2. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Izračunajte:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

c) $|\vec{a} \times \vec{b}|$

d) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

e) Izračunajte $|\vec{c}|$, gdje je $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ i usporedite s rezultatom c).

f) $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$ i usporedite s rezultatom d).

---

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73,4^\circ$$

c) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha = \sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\sin(73,4^\circ)$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| \approx 13,42$$

d) $\vec{c} = ?$

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_yb_z - a_zb_y) - \vec{j}(a_xb_z - a_zb_x) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6-6) - \vec{j}(3-(-3)) + \vec{k}(2-2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{144+36} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6+6) - \vec{j}(-3-3) + \vec{k}(2-2)$$

$$\vec{c} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

1.2 Mjerne jedinice

1.3. Pretvorite mjerene jedinice:

a) $0,1746\ rad =$ $\qquad\qquad\quad$ $^\circ$

b) $18,3\ MJ =$ $\qquad\qquad$ J

c) $0,016\ kN =$ $\qquad\qquad$ mN

d) $100\ \mu g =$ $\qquad\qquad$ kg

e) $8,2\ kmh^{-1} =$ $\qquad\qquad$ ms^{-1}

f) $36\ dana =$ $\qquad\qquad$ min

g) $2\ cm^2 =$ $\qquad\qquad$ m^2

h) $10\ L =$ $\qquad\qquad$ m^3

---

a) $0,1746\ rad = 0,1746\ rad\ \frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 10,00^\circ$

b) $0,016\ kN = 1,6\cdot10^{-2}\cdot10^3 N = 1,6\cdot10^1 N =$

$= 1,6\cdot10^1\cdot10^3\cdot10^{-3} N = 1.6\cdot10^4\ mN$

c) $18,3\ MJ = 1,83\cdot10^1\cdot10^6\ J = 1,83\cdot10^7\ J$

d) $100\ \mu g = 10^2\cdot10^{-6}\ g = 10^{-4}\ g =$

$= 10^{-4}\cdot10^{-3}\cdot10^3\ g = 10^{-7}\ kg$

e) $8,2\ kmh^{-1} = 8,2\frac{1000m}{3600s} = \frac{82}{36}\ ms^{-1} = 2,28\ ms^{-1}$

f) $36\ dana = 36 \cdot 24\ h = 36 \cdot 24 \cdot 60\ min = 51840\ min$

g) $2\ cm^2 = 2\ (cm)^2 = 2\ (10^{-2}m)^2 = 2 \cdot 10^{-4}m^2 = 0,0002\ m^2$

h) $10\ L = 10\ dm^3 = 10\ (dm)^3 = 10\ (10^{-1}m)^3 = 10 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 10^{-2}\ m^3 = 0.01\ m^3$

2

KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

2.1. Gibanje materijalne točke (MT) opisano je vektorom položaja

$$\vec{r}(t) = (v_0 t)\vec{j} + (z_0 - \frac{1}{2}gt^2)\vec{k}.$$

U trenutku $t = 0\ s$ MT se nalazi na visini $z_0 = 80\ m$, a iznos početne brzine je $v_0 = 30\ ms^{-1}$. Iznos ubrzanja slobodnog pada je $g = 9,81\ ms^{-2}$, ali radi lakšek računanja može se uzeti približna vrijednost $g = 10\ ms^{-2}$.

a) Izračunajte položaj MT svakih pola sekunde i skicirajte putanju u yz-ravnini.

b) Odredite vektor trenutne brzine $\vec{v}(t)$.

c) Izračunajte i skicirajte trenutnu brzinu u trenucima $t_1 = 1\ s$, $t_2 = 2\ s$, $t_3 = 3\ s$ i $t_4 = 4\ s$.

d) Odredite trenutno ubrzanje $\vec{a}(t)$ i skicirajte ga u nekoliko točaka putanje.

Uvrstimo zadane vrijednosti u $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (30ms^{-1}t)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}t^2)\vec{k}$$

a) $\vec{r}(t = 0,0s) = (30ms^{-1}0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0s)^2)\vec{k} = 0m\vec{j} + 80m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 0,5s) = (30ms^{-1}0,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0,5s)^2)\vec{k} = 15m\vec{j} + 78,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 1,0s) = (30ms^{-1}1,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,0s)^2)\vec{k} = 30m\vec{j} + 75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 1,5s) = (30ms^{-1}1,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,5s)^2)\vec{k} = 45m\vec{j} + 68,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 2,0s) = (30ms^{-1}2,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,0s)^2)\vec{k} = 60m\vec{j} + 60m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 2,5s) = (30ms^{-1}2,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,5s)^2)\vec{k} = 75m\vec{j} + 48,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 3,0s) = (30ms^{-1}3,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,0s)^2)\vec{k} = 90m\vec{j} + 35m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 3,5s) = (30ms^{-1}3,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,5s)^2)\vec{k} = 105m\vec{j} + 18,75m\vec{k}$

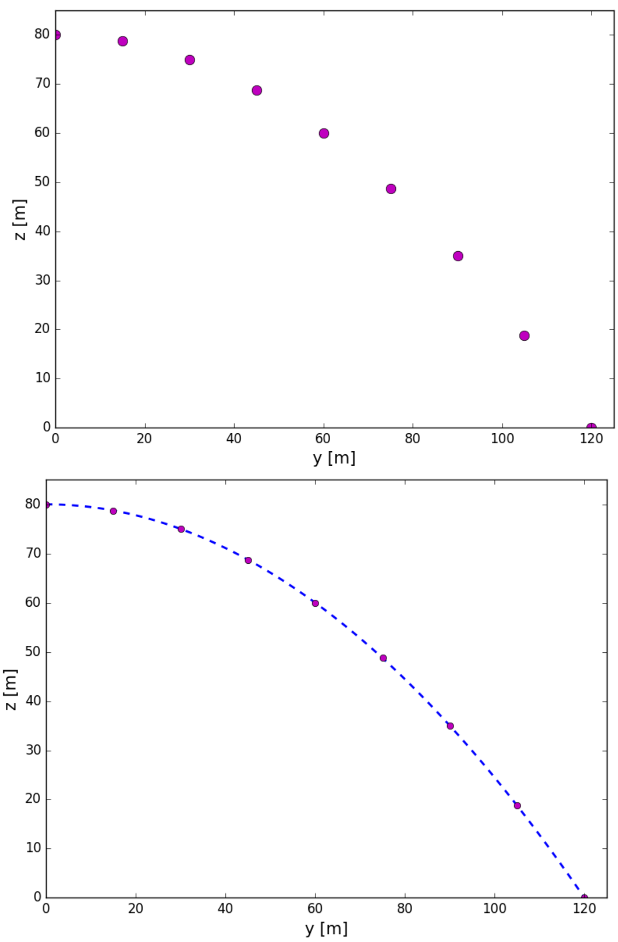
$\vec{r}(t = 4,0s) = (30ms^{-1}4,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(4,0s)^2)\vec{k} = 120m\vec{j} + 0m\vec{k}$

b)

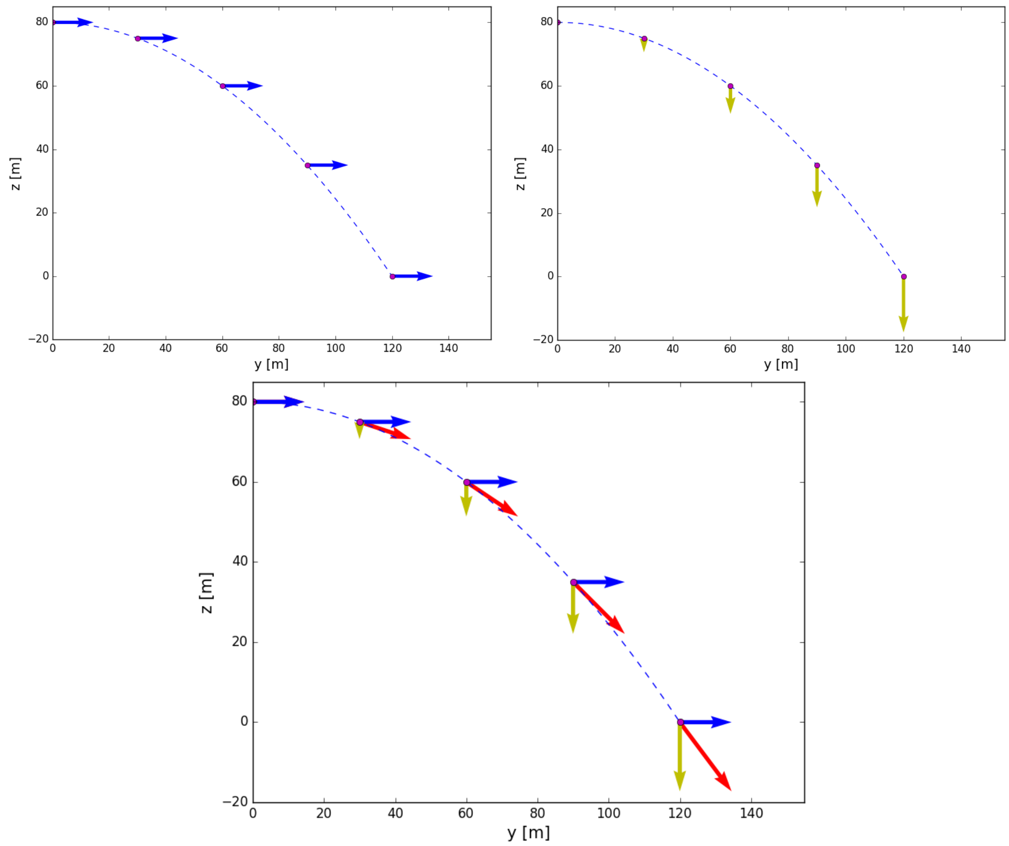
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(z_0\vec{k} + v_0 t\vec{j} - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{j} - gt\vec{k}$$



Slika 2.1: *(lijevo)* Položaj MT za svakih $0,5$ s. *(desno)* Putanja MT do udarca o tlo.



Slika 2.2: *(gore-lijevo)* Komponenta brzine u y-smjeru. *(gore-desno)* Komponenta brzine u z-smjeru.*(dolje)* Brzina tijela s komponentama.

c) $\vec{v}(t) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}t\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}1s\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 2s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 20\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 3s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 30\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 4s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 40\ ms^{-1}\vec{k}$

$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-10\ ms^{-1})^2} = 31,623\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-20\ ms^{-1})^2} = 36,055\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-30\ ms^{-1})^2} = 42,43\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-40\ ms^{-1})^2} = 50,0\ ms^{-1}$

d)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(v_0\vec{j} - gt\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}(t) = -g\vec{k} = -9,81\ ms^{-2}\vec{k} \approx -10\ ms^{-2}\vec{k}$$

2.2. Materijalna točka (MT) giba se u prostoru tako da joj se vektor položaja mijenja u vremenu u skladu s relacijom

$$\vec{r}(t) = 6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k}\ [m].$$

Izračunajte:

(a) Vektor položaja MT u $t = 0,5\ s$.
(b) Trenutnu brzinu i iznos trenutne brzine u $t = 0,5\ s$.
(c) Trenutno ubrzanje i iznos trenutnog ubrzanja u $t = 0,5\ s$.

---

a) U relaciju $\vec{r}(t)$ potrebno je uvrstiti traženo vrijeme
$\vec{r}(t = 0,5s) = 6 \cdot 0,5^4\vec{i} + 4 \cdot 0,5^2\vec{j} + 3 \cdot 0,5\vec{k}$
$\vec{r}(t = 0,5s) = 0,375\vec{i} + 1\vec{j} + 1,5\vec{k}\ [m]$.

b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je derivirati po vremenu $\vec{r}(t)$
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k}\right)$
$\vec{v}(t) = 24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}$
$\vec{v}(t = 0,5) = 24 \cdot 0,5^3\vec{i} + 8 \cdot 0,5\vec{j} + 3\vec{k}$
$\vec{v}(t = 0,5) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\ [ms]$
$|\vec{v}(t = 0,5)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83\ [ms]$

c) $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$
$\vec{a}(t) = 72t^2\vec{i} + 8\vec{j}$
$\vec{a}(t = 0,5) = 72 \cdot 0,5^2\vec{i} + 8\vec{j}$
$\vec{a}(t = 0,5) = 18\vec{i} + 8\vec{j}$
$|\vec{a}(t = 0,5)| = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7\ [ms^{-2}]$.

2.3. Vektor trenutne brzine materijalne točke koja se giba u xy-ravnini zadan je izrazom

$$\vec{v}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j}\ [ms^{-1}].$$

U trenutku $t = 0\ s$ vektor položaja materijalne točke je

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t = 0s) = 2\vec{i} + 3\vec{j}\ [m].$$

Izračunajte vektor položaja $\vec{r}(t)$ materijalne točke $t = 1,2\ s$.

Rješavamo inverzni problem i tražimo $\vec{r}(t) =?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$$

Trebamo riješiti integral $I = \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$.

$$I = \int_0^t 4\tau\vec{i}d\tau + \int_0^t 3\tau^2\vec{j}d\tau = 4\vec{i}\int_0^t \tau d\tau + 3\vec{j}\int_0^t \tau^2 d\tau =$$

$$= 4\frac{t^2}{2}\vec{i} + 3\frac{t^3}{3}\vec{j} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$$

Vratimo se u $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} = 2(1 + t^2)\vec{i} + (3 + t^3)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t = 1,2\ s) = 2(1 + 1,2^2)\vec{i} + (3 + 1,2^3)\vec{j} = 4,88\vec{i} + 4,728\vec{j}\ \ [m]$$

3.1. Tijelo je bačeno koso prema gore pod kutom od $30°$ prema horizontali početnom brzinom iznosa $20\ ms^{-1}$ s visine $10\ m$ iznad tla. Izračunajte (zanemarite otpor zraka):

a) Vrijeme udarca tijela o tlo.

b) Domet tijela.

c) Kolika je maksimalna visina koju tijelo postigne tijekom leta?

---

a) $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

Početni uvijeti: $\vec{r}_0 = z_0\vec{k}$, $\quad \vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\vec{j} + v_0\sin\alpha\vec{k} \quad \vec{g} = -g\vec{k}$

$\vec{r}(t) = z_0\vec{k} + v_0\cos\alpha\vec{j}t + v_0\sin\alpha\vec{k}t - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}$

$\vec{r}(t) = (v_0\cos\alpha\cdot t)\vec{j} + (z_0 + v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{k}$

$\vec{r}(t) = y\vec{j} + z\vec{k}$, gdje je $y = v_0\cos\alpha\cdot t$ i $z = z_0 + v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

Vrijeme udarca tijela o tlo $t = t_u$ kada je $z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = z_0 + v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$$t_{1,2} = \frac{v_0\sin\alpha \pm \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2 + 2gz_0}}{g}.$$

Za navedene podatke rješenja su $t_1 = 2,77\ s$ i $t_2 = -0,74\ s$, fizikalno rješenje je $t_1 = 2,77\ s$.

b) Kako bismo dobili domet, $D = v_y t$ tijela moramo znati komponentu brzine u y-smjeru i vrijeme udarca tijala o tlo. Vrijeme znamo iz prvog djela zadatka, a komponentu brzine možemo dobiti

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left((v_0\cos\alpha\cdot t)\vec{j} + (z_0 + v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{k}\right).$$

Dobivamo komponente brzine su: $v_y = v_0\cos\alpha \quad$ i $\quad v_z = v_0\sin\alpha - gt$.

$D = y(t = t_1) = v_0\cos\alpha\cdot t_1$

$D = y(t = 2,77\ s) = 20\ ms^{-1}\cos 30°\cdot 2,77\ s = 47,98\ m$

c) Potražimo trenutak u kojem je komponenta brzine u z-smjeru $v_z = 0$ jer je tada tijelo u na maksimalnoj visini $z = z_{max}$.

$$\vec{v}(t) = v_0\cos\alpha\vec{j} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{k}$$

komponente brzina su: $v_y(t) = v_0\cos\alpha$ i $v_z(t) = v_0\sin\alpha - gt$. Nakom izjednačivanja komponete v_z s nulom izrazimo

$$v_0\sin\alpha - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t_H = \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

Potražimo maksimalnu visinu

$$z_{max} = z(t = t_H) = z_0 + v_0\sin\alpha\cdot t_H - \frac{1}{2}gt_H^2$$

$$z_{max} = z_0 + v_0\sin\alpha\cdot\frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$z_{max} = z_0 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = 15,1\ m$$

3.2. Položaj materijalne točke koja se giba po kružnici polumjera $R = 2\ m$ opisuje funkcija

$$s(t) = s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct})\ \ [m]$$

pri čemu su $s_0 = 2\ m$, $b = 8\ m$ i $c = 0.2s^{-1}\ s$.

a) Izračunajte s koordinatu i skicirajte položaj materijalne točke na kružnici u trenucima $t = 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 30\ s$.

b) Gdje će se materijalna točka zaustaviti kad $t \to \infty$?

c) Izračunajte iznos i skicirajte vektor brzine u trenucima $t = 3\ s$ i $t = 6\ s$.

---

a) Kako bismo izračunali s koordinatu uvrštavamo zadane trenutke u funkciju

$$s(t) = s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct}).$$

$s(t = 0\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0,2s^{-1} \cdot 0s}) = 2\ m$

$s(t = 3\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0,2s^{-1} \cdot 3s}) \approx 5,6095\ m$

$s(t = 6\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0,2s^{-1} \cdot 6s}) \approx 7,5904\ m$

$s(t = 9\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0,2s^{-1} \cdot 9s}) \approx 8,6776\ m$

$s(t = 30\ s) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0,2s^{-1} \cdot 30s}) \approx 9,9802\ m$

b) $s(t) = ?$ kada $t \to \infty$

$$s(t \to \infty) = 2\ m + 8\ m(1 - \mathrm{e}^{-0,2s^{-1} \cdot \infty})$$

c)

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

$$|\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct})\right) = bc\mathrm{e}^{-ct}$$

$|\vec{v}(t = 3\ s)| = 8\ m \cdot 0,2\ ^{-1}\mathrm{e}^{-0,6} \approx 0,8781 ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 6\ s)| = 8\ m \cdot 0,2\ ^{-1}\mathrm{e}^{-0,6} \approx 0,4819 ms^{-1}$

3.3. Za gibanje opisano u prethodnom zadatku izračunajte tangencijalno i radijalno ubrzanje te iznos ukupnog ubrzanja $|\vec{a}(t)|$ materijalne točke u trenucima $t = 3\ s$ i $t = 6\ s$.

Kako bismo mogli izračunati iznos ubrzanja moramo prvo izračunati tangencijalno $\vec{a}_\tau$ i radijalno $\vec{a}_r$ ubrzanje.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(s_0 + b(1 - \mathrm{e}^{-ct})\right) = bc\mathrm{e}^{-ct}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(bc\mathrm{e}^{-ct}\right) = -bc^2\mathrm{e}^{-ct}$$

$$\vec{a}_\tau = -bc^2\mathrm{e}^{-ct}\vec{\tau}$$

Ostaje za izračunati radijalnu komponentu ubrzanja.

$$\vec{a}_r = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n}$$

$$\vec{a}_r = \frac{b^2c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R}\vec{n}$$

Ukupno ubrzanje je:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_r = -bc^2\mathrm{e}^{-ct}\vec{\tau} + \frac{b^2c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R}\vec{n}$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-bc^2\mathrm{e}^{-ct})^2 + \left(\frac{b^2c^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R}\right)^2} = \sqrt{b^2c^4\mathrm{e}^{-2ct}\left(1 + \frac{b^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R^2}\right)}$$

$$|\vec{a}(t)| = bc^2 \mathrm{e}^{-ct}\sqrt{1+\frac{b^2\mathrm{e}^{-2ct}}{R^2}}$$

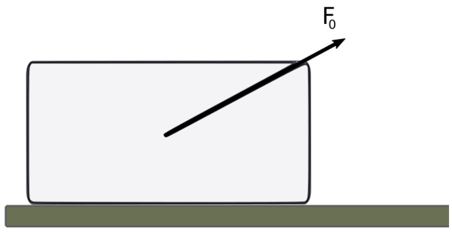
$$|\vec{a}(t=3\ s)| = 8m\cdot(0,2s^{-1})^2\cdot\mathrm{e}^{-0,2s^{-1}\cdot 3s}\sqrt{1+\frac{(8m)^2\mathrm{e}^{-2\cdot 0,2s^{-1}\cdot 3s}}{(2m)^2}} = 0,4236ms^{-2}$$

$$|\vec{a}(t=6\ s)| = 8m\cdot(0,2s^{-1})^2\cdot\mathrm{e}^{-0,2s^{-1}\cdot 6s}\sqrt{1+\frac{(8m)^2\mathrm{e}^{-2\cdot 0,2s^{-1}\cdot 6s}}{(2m)^2}} = 0,1509ms^{-2}$$

3

DNAMIKA MATERIJALNE TOČKE

4.1. Vanjska sila iznosa $\vec{F_0} = 18\ N$ djeluje pod kutom od $\alpha = 28°$ prema horizontali na blok mase $m = 3\ kg$. Izračunajte iznos ubrzanja kada je kinetičko trenje između bloka i podloge $\mu_k = 0,4$.



$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Radimo projekcije na y i z os

$$\textbf{y:}\ \ \vec{F}_0 \cdot \vec{j} + \vec{G} \cdot \vec{j} + \vec{R} \cdot \vec{j} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{j} = m\vec{a} \cdot \vec{j} \qquad / \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{j}| \cos\alpha + |\vec{G}||\vec{j}| \cos\frac{\pi}{2} + |\vec{R}||\vec{j}| \cos\frac{\pi}{2} + |\vec{F}_{tr}||\vec{j}| \cos\pi = m|\vec{a}||\vec{j}| \cos 0$$

$$F_0 \cos\alpha + 0 + 0 - F_{tr} = ma \tag{3.1}$$

$$\textbf{z:}\ \ \vec{F}_0 \cdot \vec{k} + \vec{G} \cdot \vec{k} + \vec{R} \cdot \vec{k} + \vec{F}_{tr} \cdot \vec{k} = m\vec{a} \cdot \vec{k} \qquad / \cdot \vec{k}$$

$$|\vec{F}_0||\vec{k}| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + |\vec{G}||\vec{k}| \cos\pi + |\vec{R}||\vec{k}| \cos 0 + |\vec{F}_{tr}||\vec{k}| \cos\frac{\pi}{2} = m|\vec{a}||\vec{k}| \cos\frac{\pi}{2}$$

$$F_0 \sin\alpha - G + R = 0 \tag{3.2}$$

Iz gornjeg izraza možemo izraziti silu reakcije podloge $R = mg - F_0 \sin\alpha$, gdje smo za silu težu (G) zapisali kao masa (m) puta ubrzanje sile teže (g).
Sila trenja koja nam se javlja u izrazu 3.1 možemo zapisati kao umonožak faktura kinetičkoga trenja i sili pritiska na podlogu, a sila pritiska na podlugu je jednaka težini tijela koja je po iznosu jednaka sili reakcije podloge tako pišemo: $F_{tr} = \mu_k F_\perp = \mu_k T = \mu_k R$. Silu reakcije podloge možemo zamjeniti izrazom koji smo dobili iz jednadžbe 3.2 i dobivamo konačni izraz:

$$F_0 \cos\alpha - \mu_k(mg - F_0 \sin\alpha) = ma$$

$$a = \frac{F_0}{m} (\cos\alpha + \mu_k \sin\alpha) - \mu_k g$$

$$a = \frac{18N}{3kg}(\cos 28^\circ + 0,4\sin 28^\circ) - 0,4 \cdot 9,81ms^{-2} = 2,5\ ms^{-2}$$

4.2. Vanjska sila iznosa $F_0 = 50\ N$ djeluje na blok A mase $m_A = 5\ kg$ koji vuče blok B mase $m_B = 3\ kg$ (vidjeti skicu).

a) Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga ako pretpostavimo da nema trenja.

b) Izračunajte iznos sile kojom blokovi djeluju jedan na drugoga kada je koeficijent kinetičkog trenja između blokova i podloge $\mu_k = 0,3$.

Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A $T = |\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}|$.

a) Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\textbf{blok B:}\quad \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B = m_B\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\textbf{blok A:}\quad \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A = m_A\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok B na os y i z

$$\textbf{B,z:}\quad 0 - G_B + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = G_B$$

$$\textbf{B,y:}\quad T_{AB} + 0 + 0 = m_B a \quad \Rightarrow \quad T = m_B a$$

Isto radimo za blok A:

$$\textbf{A,z:}\quad 0 + 0 + G_A + R_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = G_A$$

$$\textbf{A,y:}\quad F_0 - T_{BA} + 0 + 0 = m_A a \quad \Rightarrow \quad F_0 - T = m_A a$$

U poslijednji izraz možemo zamjeniti napetost niti T sa izrazom iz **B,y**

$$F_0 - m_B a = m_A a$$

$$m_A a + m_B a = F_0$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} = \frac{50N}{5kg + 3kg} = 6,25\ ms^{-2}$$

$$T = m_B a = 3kg \cdot 6,25ms^{-2} = 18,75\ N$$

b) Zapišemo sve sile koje djeluju na

$$\textbf{blok A:}\quad \vec{F}_0 + \vec{T}_{BA} + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} = m_A\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

$$\textbf{blok B:}\quad \vec{T}_{AB} + \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} = m_B\vec{a} \qquad / \cdot \vec{j} / \cdot \vec{k}$$

Radimo projekciju sila za blok A na os y i z

$$\textbf{A,y:}\quad F_0 - T_{BA} + 0 + 0 - F_{tr,A} = m_A a \quad \Rightarrow \quad F_0 - T - \mu_k R_A = m_A a$$

$$\textbf{A,z:}\quad 0 + 0 + G_A + R_A + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = G_A$$

Dobivamo $F_0 - T - \mu_k G_A = m_A a$. Isto radimo za blok B:

$$\textbf{B,y:} \quad T_{AB} + 0 + 0 - F_{tr,B} = m_B a \quad \Rightarrow \quad T - \mu_k R_B = m_B a$$

$$\textbf{B,z:} \quad 0 - G_B + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = G_B$$

Dobivamo $T = m_B a + \mu_k G_B$.

$$F_0 - m_B a - \mu_k m_B g - \mu_k m_A g = m_A a$$

Posložimo i izrazimo ubrzanje

$$F_0 - \mu_k (m_A + m_B) g = (m_A + m_B) a$$

$$a = \frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g$$

$$a = \frac{50N}{5kg + 3kg} - 0,3 \cdot 9,81 ms^{-2} = 3,307 \ ms^{-2}$$

Još moramo izračunati napetost niti

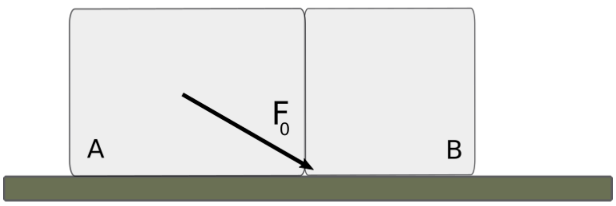
$$T = m_B (a + \mu_k g)$$

Ubrzanje možemo zamjeniti s dobivenim izrazom

$$T = m_B \left(\frac{F_0}{m_A + m_B} - \mu_k g + \mu_k g \right) = \frac{m_B F_0}{m_A + m_B}$$

$$T = 18,75 \ N$$

4.3. Vanjska sila iznosa $F_0 = 42 \ N$ djeluje pod kutem od $\vartheta = 30°$ prema horizontali na blok A mase $m_A = 5 \ kg$ koji gura blok B mase $m_B = 2 \ kg$ (vidjeti skicu). Izračunajte iznos ubrzanja blokova A i B kada je kinetičko trenje između blokova i podloge $\mu_k = 0,3$.



Iznos sile kojom blok A djeluje na blok B jednaka je iznosu sile kojom blok B djeluje na blok A $|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}|$.
Zapisujemo sve sile na tijelo A

$$\textbf{A:} \quad \vec{F}_0 + \vec{G}_A + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{F}_{BA} = m_A \vec{a} \qquad / \cdot \vec{k} / \cdot \vec{j}$$

i radimo projekcije na os z i y.

$$\textbf{A,z:} \quad F_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) - m_A g + R_A + 0 + 0 = 0$$

Funkciju $\cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta)$ možemo raspisati preko funkcije zbroja

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\vartheta - \sin\frac{\pi}{2} \sin\vartheta = -\sin\vartheta$$

$$-F_0 \sin\vartheta - m_a g + R_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = m_A g + F_0 \sin\vartheta$$

Što ćemo ursti u izraz za y os.

$$\textbf{A,y:}\quad F_0\cos\vartheta + 0 + 0 - F_{tr,A} - F_{BA} = m_A a$$
$$F_0\cos\vartheta - \mu_k R_A - F_{BA} = m_A a$$
$$F_0\cos\vartheta - \mu_k(m_A g + F_0\sin\vartheta) - F_{BA} = m_A a \tag{3.3}$$

Zapisujemo sve sile na tijelo B

$$\textbf{B:}\quad \vec{G}_B + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{F}_{AB} = m_B\vec{a} \qquad /\cdot\vec{k}/\cdot\vec{j}$$

i radimo projekcije na os z i y.

$$\textbf{B,z:}\quad -m_B g + R_B + 0 + 0 = 0 \quad\Rightarrow\quad R_B = m_B g$$
$$\textbf{B,y:}\quad 0 + 0 - F_{tr,B} + F_{AB} = m_B a \quad\Rightarrow\quad F_{AB} = m_B a + \mu_k R_B$$

Spajanjem posljednja dva izraza dobivamo:

$$F_{AB} = m_B a + \mu_k m_B g. \tag{3.4}$$

U izraz 3.3 umjesto F_{BA} uvrstimo 3.4 dobivamo:

$$F_0\cos\vartheta - \mu_k(m_A g + F_0\sin\vartheta) - m_B a - \mu_k m_B g = m_A a.$$
$$a(m_A + m_B) = F_0\cos\vartheta - \mu_k\left[(m_A + m_B)g + F_0\sin\vartheta\right]$$
$$a = \frac{F_0\cos\vartheta - \mu_k\left[(m_A + m_B)g + F_0\sin\vartheta\right]}{m_A + m_B}$$
$$a = \frac{42N\cos 30^\circ - 0,3\left[(5kg + 2kg)9,81ms^{-2} + 42N\sin 30^\circ\right]}{5kg + 2kg} = 1,353\ ms^{-2}$$

5.1. Tijelo klizi po kosini nagiba $\alpha = 35^\circ$. Koeficijent kinetičkog trenja između tijela i kosine je $\mu_k = 0,58$. Izračunajete iznos ubrzanja tijela.

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$
$$\vec{F}_0 + \vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Silu teže možemo rastaviti na dvije komponente okomito na kosinu $\vec{G}_\perp = G\cos\alpha(-\vec{k})$ i paralelno $\vec{G}_{||} = G\sin\alpha\vec{j}$

$$G\sin\alpha\vec{j} - G\cos\alpha\vec{k} + R\vec{k} - F_{tr}\vec{j} = ma\vec{j} \qquad /\cdot\vec{j}/\cdot\vec{k}$$

Radimo projekcije na y i z os

$$G\sin\alpha - 0 + 0 - F_{tr} = ma \quad\Rightarrow\quad G\sin\alpha - \mu_k R = ma$$
$$0 - G\cos\alpha + R - 0 = 0 \quad\Rightarrow\quad R = G\cos\alpha$$

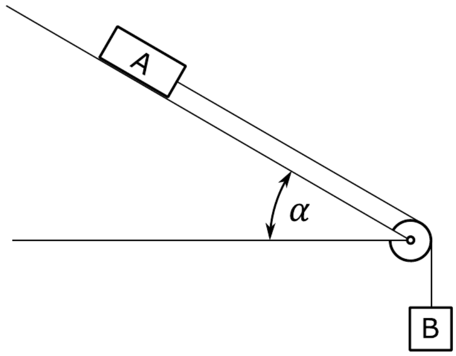
$$G\sin\alpha - \mu_k G\cos\alpha = ma$$
$$mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = ma$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$
$$a = 9,81ms^{-2}(\sin 35^\circ - 0,58\cos 35^\circ) = 0,966\ ms^{-2}$$

5.2. Na slici dolje je sustav od dva utega mase $m_A = 10\ kg$ i $m_B = 5\ kg$. Uteg B povezan je tankom nerastezljivom niti s utegom A. Kosina na kojoj se nalazi uteg A nagnuta je pod kutom $\alpha = 30°$, a koeficijent kinetičkog trenja između kosine i utega A iznosi $\mu_k = 0,2$.

a) Skicirajte problem i označite sve sile i smjer gibanja (vektor ubrzanja) cijelog sustava.

b) Izračunajte iznos ubrzanja cijelog sustava.

c) Izračunajte iznos sile napetosti niti.



---

a) Na tijelo A djeluju sila teže ($\vec{G}_A$) prema dolje koju rastavljamo na dvije komponente: silu okomitu na kosinu ($\vec{G}_{A,\perp}$) i silu usporednu s kosinom prema dolje ($\vec{G}_{A,||}$), zatim djeluje sila trenja ($\vec{F}_{tr,A}$), sila reakcije podloge $\vec{R}_A$ i sila kojom uteg B vuče uteg A (sila napetosti niti $\vec{T}_{BA}$). Na uteg B djeluju samo dvije sile, sila teža prema dolje ($\vec{G}_B$) i napetost niti prema gore ($\vec{T}_{AB}$).

Sila napetosti niti kojom djeluje uteg A na uteg B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

b) Za uteg B možemo pisati

$$\vec{G}_B + \vec{T}_{AB} = m_B\vec{a},$$

$$G_B - T = m_B a \quad \Rightarrow \quad T = m_B(g - a). \tag{3.5}$$

Zapisujemo sve sile koje djeluju na uteg A

$$\vec{G}_{A,||} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A\vec{a}.$$

Radimo projekciju sila na smjer gibanja

$$G_{A,||} - F_{tr,A} + T = m_A a$$

$$m_A g \sin\alpha - \mu_k m_A g \cos\alpha + T = m_A a$$

Napetost niti možemo zamjeniti izrazom 3.5 i dobivamo

$$m_A g \sin\alpha - \mu_k m_A g \cos\alpha + m_B g - m_B a = m_A a.$$

Nakom sređivanja dobivamo konačni izraz

$$(m_A \sin\alpha - \mu_k m_A \cos\alpha + m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_A(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha) + m_B}{m_A + m_B}\, g.$$

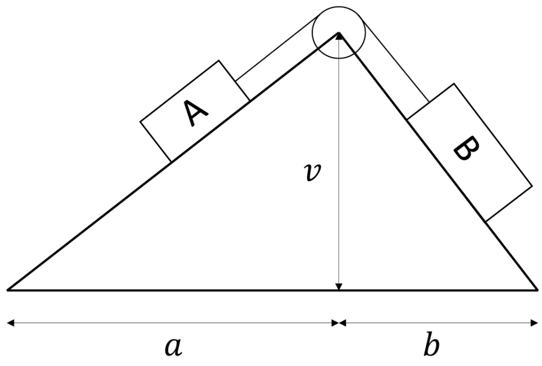
Uvrstimo zadane vrijednosti

$$a = \frac{10\ kg(\sin 30° - 0,2\cos 30°)}{10\ kg + 5\ kg}\ 9,81\ ms^{-2} = 5,41\ ms^{-2}$$

c) Kako bismo dobili iznos sile napetosti niti uvrštavamo dobivenu akceleraciju u izrac 3.5

$$T = 5\ kg(9,81\ ms^{-2} - 5,41\ ms^{-2}) = 22\ N$$

5.3. Koeficijent kinetičkog trena između blokova i podloge je $\mu_k = 0,2$, a dimenzije i mase su: $a = 5\ m$, $b = 3\ m$, $v = 4\ m$, $m_A = 10\ kg$ i $m_B = 15\ kg$. Koliki je iznos ubrzanja blokova prikazanih na slici?



Sila napetosti niti kojom djeluje blok A na blok B jednaka je po iznosu sili napetosti kojom uteg B djeluje na uteg A stoga pišemo

$$|\vec{T}_{AB}| = |\vec{T}_{BA}| = T.$$

Kako bismo mogli rastaviti sile moramo izračunati kuteve α i β

$$\tan\alpha = \frac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{4m}{5m} = 38,66^\circ,$$

$$\tan\beta = \frac{v}{b} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\frac{4m}{3m} = 53,13^\circ.$$

Zapisujemo sve sile koje djeluju na blok A i množimo skalarno s $\cdot\vec{j}$

$$\vec{G}_{A,||} + \vec{G}_{A,\perp} + \vec{R}_A + \vec{F}_{tr,A} + \vec{T}_{BA} = m_A\vec{a} \quad / \cdot \vec{j}$$

Dobivamo sile u usporedne s lijevim nagibom kosine

$$-m_A g\sin\alpha - \mu_k m_A g\cos\alpha + T = m_A a.$$

Izrazimo napetosti niti

$$T = m_A g\sin\alpha + \mu_k m_A g\cos\alpha + m_A a. \tag{3.6}$$

Isto radimo za blok B

$$\vec{G}_{B,||} + \vec{G}_{B,\perp} + \vec{R}_B + \vec{F}_{tr,B} + \vec{T}_{AB} = m_B\vec{a} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$m_B g\sin\beta - \mu_k m_B g\cos\beta - T = m_B a \tag{3.7}$$

Uvrštavamo izraz 3.6 za napetost niti u izraz 3.7

$$m_B g\sin\beta - \mu_k m_B g\cos\beta - m_A g\sin\alpha - \mu_k m_A g\cos\alpha - m_A a = m_B a.$$

Sređujemo izraze:

$$g\left[m_B(\sin\beta - \mu_k\cos\beta) - m_A(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)\right] = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_B(\sin\beta - \mu_k\cos\beta) - m_A(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)}{m_A + m_B}\ g$$

$$a = \frac{15kg(\sin 53,13^\circ - 0,2\cos 53,13^\circ) - 10kg(\sin 38,66^\circ + 0,2\cos 38,66^\circ)}{10kg + 15kg}\ 9,81\ ms^{-2}$$

$$a = 0,94\ ms^{-2}$$

4

ZAKONI OČUVANJA

6.1. Materijalna točka pomaknuta je u $xy-$ravnini iz točke A čiji je vektor položaja $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j}\ [m]$ u točku B kojoj je vektor položaja $\vec{r}_B = 2\vec{i} - 3\vec{j}\ [m]$. Tijekom pomaka na nju je djelovala stalna sila $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}\ [N]$. Izračunajte rad sile $\vec{F}$.

$$W_{F,AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = konst. \quad \Rightarrow \quad W_{F,AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta\vec{r} = (2\vec{i} - 3\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} - 5\vec{j}$$

$$W_{F,AB} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (\vec{i} - 5\vec{j}) = -17\ J$$

6.2. Tijelo počinje klizati iz stanja mirovanja na visini od $0,8$ metara na vrhu kosine. Kolika je brzina tijela na dnu kosine ako je nagib kosine $30°$, koeficijent kinetičkog trenja $0,43$?

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,G}(B) = E_k(A) + E_{p,G}(A) + W_{AB}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r}$$

Ostalo je za izračunati rad sile trenja

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}_{tr}||\Delta\vec{r}| \cos\sphericalangle(\vec{F}_{tr}, \Delta\vec{r}) = F_{tr}\Delta r \cos(\pi)$$

Pomak tijela Δr možemo izaraziti iz visine kosine i kuta $\Delta r = H/\sin\vartheta$. Potrebno je još zapisati silu trenja koja ovisi o kinematičkom koeficijentu trenja i sili kojom tijelo pritišće podlogu $F_{tr} = \mu_k mg \cos\vartheta$.

$$\vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r} = -\mu_k mg \cos\vartheta \frac{H}{\sin\vartheta} = -\mu_k mgH \cot\vartheta$$

Vraćamo se u zakon očuvanja energije

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH - \mu_k mgH \cot\vartheta$$

$$v = \sqrt{2gH(1 - \mu_k \cot\vartheta)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81\ ms^{-2} \cdot 0,8\ m(1 - 0,43 \cdot \cot 30°)} = 2,0\ ms^{-1}$$

6.3. Konstanta opruge koja se koristi za ispucavanje kuglice flipera mase 80 grama je 138 Nm^{-1}. Koliko centrimetara treba povući ručicu flipera (tj. stisnuti oprugu) da bi se kuglica ispalila brzinom iznosa $5ms^{-1}$?

Pišemo zakon očuvanja energije

$$E_k(B) + E_{p,el}(B) = E_k(A) + E_{p,el}(A) + W_{AB}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2 + 0 + 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2$$

$$\Delta x = v\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$\Delta x = 5ms^{-1}\sqrt{\frac{0,08kg}{138Nm^{-1}}} = 0,12\ m$$

7.1. Automobil mase $m = 2000\ kg$ giba se uz kosinu nagiba $\vartheta = 15°$ stalnom brzinom iznosa 60 kmh^{-1}. Ukupna sila otpora (trenje kotrljanja i otpor zraka) iznosi $|\vec{F}_{otp}| = 2000\ N$, a visina kosine je $h = 60\ m$. Izračunajte:

a) pogonsku silu automobila;
b) rad pogonske sile od početka do kraja kosine;
c) snagu automobila.

---

a) Ako je brzina stalna tada je rezultantna sila na automobil jednaka je nuli; $\vec{v} = konstanta \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_R = \vec{0}$.

$$\vec{F} + \vec{F}_{otp} + \vec{G}_{||} + \vec{G}_{\perp} + \vec{R} = \vec{0} \qquad / \cdot \vec{j}$$

$$F - F_{otp} - mg\sin\vartheta = 0$$

$$F = F_{otp} + mg\sin\vartheta$$

$$F = 2000N + 2000kg\ 9,81ms^{-2}\ \sin 15° = 7078,03\ N$$

b)

$$W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos 0°$$

Pomak automobila možemo izraziti preko visine kosine i kuta

$$W = F\frac{h}{\sin\vartheta} = 7078,03\frac{60m}{\sin 15°} = 1640844\ J$$

c)

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv$$

Iznos brzine automobila je $v = 60\ kmh^{-1} = 60\frac{1000\ m}{3600\ s} = 16,67\ ms^{-1}$

$$P = 7078,03\ N16,67\ ms^{-1} = 117967\ W$$

7.2. Ledolomac mase 6000 tona s ugašenim motorom nalijeće brzinom 30 kmh^{-1} na santu leda koja se giba brzinom 2 kmh^{-1} u istom smjeru. Poslije sudara zajedno se kreću brzinom 5 kmh^{-1}. Kolika je masa sante leda?

Zapisujemo zakona očuvanja količine gibanja i izražavamo masu sante leda

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$
$$m_2v_2 - m_2v' = m_1v' - m_1v_1$$
$$m_2 = \frac{v' - v_1}{v_2 - v'}m_1$$
$$m_2 = \frac{5\ kmh^{-1} - 30\ kmh^{-1}}{2\ kmh^{-1} - 5\ kmh^{-1}}6000\ t = 50000\ t$$

7.3. Klizač mase 70 kg koji stoji na ledu odbacuje od sebe u horizontalnom smjeru predmet mase 3 kg brzinom od 8 ms^{-1}. Koliko će se klizač pomaknuti, ako je koeficijent kinetičkog trenja između leda i klizaljki 0,02?

Prije početka gibanja klizač miruje zajedno s predmetom $v' = 0$ stoga možemo izraziti iz zakona očuvanja količine gibanja brzinu klizača na početku njegovog gibanja

$$(m_1 + m_2)v' = m_1v_1 + m_2v_2$$
$$0 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -\frac{m_2}{m_1}v_2$$

Zapisujemo zakon očuvanja energije za klizača

$$E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A) + W_{AB}.$$

Budući da nema promjene visine potencijalna energija klizača je jednaka nuli, a kako na kraju svojega gibanja staje njegova kinetička energija $E_k(B)$ će također biti jednaka nuli

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{r}$$
$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + F_{tr}\Delta r \cos\sphericalangle(\vec{F}_{tr}, \Delta\vec{r})$$
$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + F_{tr}\Delta r \cos\pi$$
$$\Delta r = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{\mu_k g} = \frac{m_2^2v_2^2}{2\mu_k m_1^2 g}$$
$$\Delta r = \frac{(3\ kg)^2 \cdot (8\ ms^{-1})^2}{2 \cdot 0,02 \cdot (70\ kg)^2 \cdot 9,81\ ms^{-2}} = 0,3\ m$$

7.4. Kolikom se maksimalnom brzinom izraženom u kilometrima na sat može gibati automobil mase 1400 kg i snage 45 kW po cesti na kojoj je koeficijent kinetičkog trenja 0,08? (Otpor zraka se zanemaruje.)

$v_{max} = 147,44\ kmh^{-1}$

7.5. Automobil mase 1500 kg koji se gibao brzinom 45 kmh^{-1} udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 kmh^{-1}. U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

$F_{tr} = 6093,75$

7.6. Automobil mase 1500 kg koji se gibao brzinom 45 kmh^{-1} udario je u kamion mase 6 tona koji se u istom smjeru gibao brzinom 18 kmh^{-1}. U trenutku sudara prestali su im raditi motori te su se nastavili zajedno gibati još 26 metara dok se nisu zaustavili. Koliki je bio iznos sile trenja tijekom zaustavljanja?

$F_{tr} = 6093,75$

5 KRUTO TIJELO

8.1. Kotač promjera 40 cm vrti se oko nepomične osi tako da se kut zakreta mijenja u vremenu prema sljedećem izrazu:

$$\varphi(t) = 5t + 3t^2 + 4t^4 \ [rad].$$

Izračunajte:

a) Kutnu brzinu vrtnje u trenutku $t = 0,5\ s$.

b) Obodnu brzinu ruba kotača u trenutku $t = 0,5\ s$.

c) Kutno ubrzanje u trenutku $t = 0,5\ s$.

d) Koliko okretaja napravi kotač od $t = 0\ s$ do $t = 0,5\ s$.

---

a) $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5t + 3t^2 + 4t^4)$

$\omega(t) = 5 + 6t + 16t^3$

$\omega(t = 0,5\ s) = 5 + 6 \cdot 0,5 + 16 \cdot 0,5^3 = 10\ rads^{-1}$

b) $v(t) = \omega(t)r = (5 + 6t + 16t^3)r$

$v(t = 0,5\ s) = \omega(t = 0,5)r = 10\ rads^{-1} 0,2\ m = 2\ ms^{-1}$

c) $\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 6t + 16t^3) = 6 + 48t^2$

$\alpha(t = 0,5\ s) = 6 + 48 \cdot 0,5^2 = 18\ rads^{-2}$

d) Označimo broj okretaja s n

$n2\pi = \Delta\varphi$

$n = \frac{1}{2\pi}(\varphi(0,5\ s) - \varphi(0\ s))$

$n = \frac{1}{2\pi}(5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5^2 + 4 \cdot 0,5^4 - 0) = 0,557$ okretaja.

8.2. Homogeni aluminijski valjak polumjera 8 i visine 32 cm rotira oko osi koja je paralelna s osi valjka, a prolazi kroz plašt. Odredite kinetičku energiju rotacije ako napravi 105 okretaja u minuti. Gustoća aluminija je $2,7\ gcm^{-3}$.

Kako bismo izračunali kinetičku energiju rotacije $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ moramo znati moment tromosti oko osi rotacije i iznos kutne brzine. Kako bismo odredili moment tromosti koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I = I_T + Md^2$$

gdje je I_T moment tromosti oko osi koja prolazi kroz centar mase i za valjak iznosi $I_T = \frac{1}{2}MR^2$, M je u ovom slučaju masa valjka, a d je udaljenost između osi koja prolazi centrom mase i osi rotacije. Tako da moment tromosti možemo pisati

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Masu valjka možemo izraziti preko gustoće i volumena valjka ($V = R^2\pi h$),

$$I = \frac{3}{2}\pi\rho h R^4.$$

Ostalo je izračunati kutnu brzinu koja je broj okretaja u sekunti puta 2π

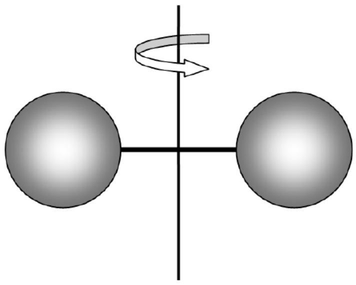
$$\omega = \frac{105}{60\ s}2\pi\ rad = 10,995\ rads^{-1} \simeq 11\ rads^{-1}$$

. Sada možemo izračunati kinetičku energiju rotacije:

$$E_k = \frac{3}{4}\pi\rho h R^4\omega^2 = \frac{3}{4}\pi 2700\ kgm^{-3}(0,08\ m)^4 0,32\ m(11\ rads^{-1})^2$$

$$E_k = 10,0895\ J$$

8.3. Dvije homogene kugle gustoće 2700 kgm^{-3} i polumjera 4 cm spojene su štapom zanemarive mase i duljine 10 cm (vidi skicu). Koliki je moment susutava oko osi koja prolazi polovištem štapa? Moment tromosti kugle oko osi koja prolazi kroz središte je $I = \frac{2}{5}MR^2$.



Moment tromosti sustava I je zbroj momenta tromosti svake kugel, $I = 2I_{kugla}$ Kako bismo odredili moment tromosti kugle koristimo teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem):

$$I_{kugla} = I_T + Md^2$$

$$I_{kugla} = \frac{2}{5}MR^2 + M(\frac{L}{2} + R)^2$$

gdje je M masa jedne kugle, R je njezin radijus, a L je udaljenost između kugli. Udaljenost osi rotacije od centra mase kugle je $d = \frac{L}{2} + R$. Izrazimo masu pomoću gustoće i volumena kugle ($V = \frac{4}{3}R^3\pi$) i dobivamo moment tromosti jedne kugle:

$$I_{kugle} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\left[\frac{2}{5}R^2 + \left(\frac{L}{2} + R\right)^2\right].$$

Moment tromosti sustava je:

$$I = 2I_{kugle} = \frac{8}{3}\pi 2700\ kgm^{-3}(0,04\ m)^3\left[\frac{2}{5}(0,04\ m)^2 + \left(\frac{0,1\ m}{2} + (0,04\ m)\right)^2\right]$$

$$I = 0,01265\ kgm^2.$$

8.4. Kotač se vrti oko nepomične osovine tako da mu se kut zakreta mijenja u vremenu prema izrazu

$$\varphi(t) = te^{-0,1t}[rad].$$

Izračunajte:

a) Kutnu brzinu vrtnje u trenutku $t = 3\ s$.
b) Kutno ubrzanje u trenutku $t = 3\ s$.

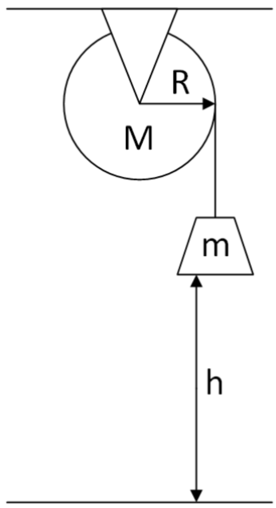
---

a) $\omega(t = 3\ s) = 0,519\ rad/s$
b) $\alpha(t = 3\ s) = -0,126\ rad/s^2$

8.5. Koliko okretaja u minuti treba rotirati homogeni mjedeni valjak oko osi koja je paralelna s osi valjka a prolazi kroz plašt, da bi mu kinetička energija rotacije bila 40 J? Visina valjka je 30 cm, a polumjer 10 cm. Gustoća mjedi je $8,5\ g/cm^3$.

$\nu = 77,92\ okr/min$

8.6. Na valjak polumjera R i mase M koji se može rotirati oko horizontalne osi namotana je nit na koju je obješen uteg mase m (vidi skicu). Kolika će biti kutna brzina valjka u trenutku kad uteg padne s visine h?



$\omega = \sqrt{\frac{4mgh}{R(2m+M)}}$

6
GRAVITACIJA

Kod rješavanja zadataka koristite se sljedećim numeričkim vrijednostima:

- *gravitacijska konstanta:* $\gamma = 6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2$
- *masa Zemlje:* $M_Z = 5,98 \cdot 10^{24}\ kg$
- *polumjer Zemlje:* $R_Z = 6,371 \cdot 10^6\ m$
- *iznos ubrzanja slobodnog pada:* $g = 9,81\ ms^2$

9.1. Odredite visinu iznad površine Zemlje na kojoj će na astronauta djelovati jakost gravitacijskog polja po iznosu jednaka iznosu ubrzanja $a = 0,3g$.

Jakost gravitacijskog polja Zemlje na visini h možemo zapisati

$$G(h) = \gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}.$$

Tražimo za koju visinu h vrijedi $G(h) = 0,3g$.

$$\gamma \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} = 0,3g$$

$$(R_Z + h)^2 = \frac{\gamma M_z}{0,3g}$$

$$h = \sqrt{\gamma \frac{M_z}{0,3g}} - R_Z$$

$$h = \sqrt{6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2 \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg}{0,3 \cdot 9,81\ ms^2}} - 6,371 \cdot 10^6\ m$$

$$h = 5,271 \cdot 10^6\ m$$

9.2. Umjetni satelit giba se oko Zemlje po kružnoj putanji s periodom vrtnjem $T = 132\,\text{min}$. Koliki je polumjer putanje satelita?

$$F_{cp} = F_{gr}$$

$$ma_{cp} = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

Centripetalnu akceleraciju možemo zapisati preko perioda vrtnje

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \gamma \frac{M_Z m}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\gamma M_Z \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = \sqrt[3]{6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2 5,98 \cdot 10^{24}\ kg \left(\frac{7920\ s}{2\pi}\right)^2}$$

$$r = 8\ 589\ 592,25\ m$$

9.3. Izračunajte period kruženja satelita po kružnoj putanji oko Zemlje, ako je iznos jakosti gravitacijskog polja Zemlje na putanji satelita 3 ms^{-2}?

$$G = \gamma \frac{M_Z}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}$$

Gravitacijsko polje drži satelit na kružnom gibanju

$$G = a_{cp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{G}}$$

Uvrštavanjem prvog izraza u drugi dobivamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G}\sqrt{\gamma \frac{M_Z}{G}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3\ ms^{-2}}\sqrt{6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2 \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg}{3\ ms^{-2}}}}$$

$$T = 12\ 318,16\ s = 205\ min\ 18,16\ s$$

9.4. Na pravcu koji povezuje zvijezdu A i zvijezdu B, koja ima pet puta manju masu od zvijezde A, postoji točka u kojoj bi na svemirski brod djelovale po iznosu iste privlačne sile od zvijezde A i od zvijezde B. Na kojoj udaljenosti od zvijezde A je ta točka, ako je udaljenost među zvijezdama $9,46 \cdot 10^{12}\ m$?

$r = 6,537 \cdot 10^{12}\ m$

9.5. Jakost gravitacijskog polja na površini Marsa je $3,71\ ms^2$. Izračunajte srednju gustoću Marsa pod pretpostavkom da je Mars homogena kugla polumjera 3389 km.

$\rho = 3918,2\ kgm^3$

9.6. Koliki je period satelita koji kruži 300 km iznad Zemljine površine?

$T = 90\ min 20,7\ s$

10.1. Izračunajte gravitacijsku potencijalnu energiju $E_{p,gr}$ i potencijalnu energiju u polju sile teže $E_{p,G}$ mase $m = 1\ kg$ u gravitacijskom polju Zemlje kada se:

a) masa m nalazi na površini Zemlje;
b) masa m je na visini 1 km nad površinom Zemlje;
c) masa m je na visini 1000 km nad površinom Zemlje;
d) usporedite rezultate!

a) $h = 0$

$$E_{p,g}(A) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z}$$

$$E_{p,g}(A) = -6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2 kg^2\ \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\ kg}{6,371 \cdot 10^6\ m} = -62\ 606\ 498,2\ J$$

$$E_{p,G} = mgh = 0\ J$$

b) $h = 10^3\ m$

$$E_{p,g}(B) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(B) = -6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2 kg^2\ \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\ kg}{6,372 \cdot 10^6\ m} = -62\ 596\ 672,9\ J$$

$$E_{p,g}(B) - E_{p,g}(A) = 9\ 825,3$$

$$E_{p,G} = mgh = 9\ 810\ J$$

c) $h = 10^6\ m$

$$E_{p,g}(C) = -\gamma \frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$E_{p,g}(C) = -6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2 kg^2\ \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\ kg}{6,372 \cdot 10^6\ m} = -54\ 112\ 874,8\ J$$

$$E_{p,g}(C) - E_{p,g}(A) = 8\ 493\ 623,4$$

$$E_{p,G} = mgh = 9\ 810\ 000\ J$$

10.2. Do koje maksimalne visine će se dići metak ispaljen s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa 715 ms^{-1}? Masa Mjeseca je $7,34 \cdot 10^{22}\ kg$, a polumjer Mjeseca 1737 km.

Koristimo zakon očuvanja energije. Metak na površini Mjeseca ima gravitacijsku potencijalnu energiju i kinetiču energiju, kada se popne na visinu h ima samo gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{p,g}(h = 0) + E_k(h = 0) = E_{p,g}(h) + E_k(h)$$

$$-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} m v_0^2 = -\gamma \frac{M_M m}{R_M + h} + 0$$

$$R_M + h = \frac{-\gamma M_M}{-\gamma \frac{M_M m}{R_M} + \frac{1}{2} v_0^2}$$

$$h = \frac{-2\gamma M_M R_M}{-2\gamma M_M + v_0^2 R_M} - R_M$$

$$h = \frac{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2 7,34 \cdot 10^{22}\ kg 1,737 \cdot 10^6\ m}{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2 7,34 \cdot 10^{22}\ kg + (715\ ms^{-1})^2 1,737 \cdot 10^6\ m} - 1,737 \cdot 10^6\ m$$

$$h = 173\ 239,9\ m$$

10.3. Prema Zemlji se iz velike ("beskonačne") udaljenosti početnom brzinom iznosa $v_0 = 3\ kms^{-1}$ duž pravca koji prolazi njezinim središtem giba meteor. Koliki će biti iznos brzine meteora u trenutku kada se meteor nađe na udaljenosti $r = 6R_Z$ od središta Zemlje? Što se događa s njegovom brzinom u odnosu na početnu? Koji je razlog tome?

Zapisujemo zakon očuvanja energije

$$E_{p,g}(\infty) + E_k(\infty) = E_{p,g}(6R) + E_k(6R).$$

U beskonačnosti tijelo nema gravitacijsku potencijalnu energiju tako da pišemo

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma\frac{M_Z m}{6R_Z} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = v_0^2 + \gamma\frac{M_Z}{3R_Z}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \gamma\frac{M_Z}{3R_Z}}$$

$$v = \sqrt{(3000\ ms^{-1})^2 + 6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2 \frac{5,98 \cdot 10^{24}\ kg}{3 \cdot 6,371 \cdot 10^6\ m}} = 5465,2\ ms^{-1}$$

10.4.
Izračunajte 2. kozmičku brzinu Merkura pod pretpostavkom da je Merkur homogena kugla polumjera 2440 km i srednje gustoće $5,43 g/cm^3$. Gravitacijska konstanta je $\gamma = 6,67 \cdot 10^{11}\ Nm^2kg^2$.

$v_2 = 4,25\ kms^{-1}$

10.5.
Tijelo je ispaljeno s površine Mjeseca vertikalno u vis brzinom iznosa 3 kms^{-1} . Koliki će biti iznos brzine toga tijela kada se ono nađe u „beskonačnosti“? Masa Mjeseca je $7,34 \cdot 10^{22}\ kg$, a polumjer 1737 km.

$v = 1833,8\ ms^{-1}$

10.6.
Izračunajte iznos brzine kojom bi predmet pušten iz stanja mirovanja na visini od $10^4\ km$ iznad površine Zemlje udario o tlo (kada ne bi bilo atmosfere)?

$v = 8745,5 ms^{-1}$

7 RJEŠENJA

7.1 MATEMATIČKI TEMELJI

---

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - 2\vec{j}) = -9$
   $\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -7$
   $\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$

b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - (2\vec{i} - 3\vec{j}) = -5\vec{i} + \vec{j}$

---

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 73,4^\circ$$

c) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \sin(73,4^\circ)$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \approx 13,42$$

d) $\vec{c} = ?$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6 - 6) - \vec{j}(3 - (-3)) + \vec{k}(2 - 2)$$

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

e)

$$\vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{144 + 36} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| \approx 13,42$$

f)

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6+6) - \vec{j}(-3-3) + \vec{k}(2-2)$$

$$\vec{c} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

---

a) $0,1746\ rad = 0,1746\ rad\ \frac{180^\circ}{\pi\ rad} = 10,00^\circ$

b) $0,016\ kN = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 N = 1,6 \cdot 10^1 N =$

$= 1,6 \cdot 10^1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} N = 1.6 \cdot 10^4\ mN$

c) $18,3\ MJ = 1,83 \cdot 10^1 \cdot 10^6\ J = 1,83 \cdot 10^7\ J$

d) $100\ \mu g = 10^2 \cdot 10^{-6}\ g = 10^{-4}\ g =$

$= 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3\ g = 10^{-7}\ kg$

e) $8,2\ kmh^{-1} = 8,2 \frac{1000m}{3600s} = \frac{82}{36}\ ms^{-1} = 2,28\ ms^{-1}$

f) $36\ dana = 36 \cdot 24\ h = 36 \cdot 24 \cdot 60\ min = 51840\ min$

g) $2\ cm^2 = 2\ (cm)^2 = 2\ (10^{-2}m)^2 = 2 \cdot 10^{-4} m^2 = 0,0002\ m^2$

h) $10\ L = 10\ dm^3 = 10\ (dm)^3 = 10\ (10^{-1}m)^3 = 10 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 10^{-2}\ m^3 = 0.01\ m^3$

7.2 KINEMATIKA MATERIJALNE TOČKE

Uvrstimo zadane vrijednosti u $\vec{r}(t)$.

$$\vec{r}(t) = (30ms^{-1}t)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}t^2)\vec{k}$$

a) $\vec{r}(t = 0,0s) = (30ms^{-1}0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0s)^2)\vec{k} = 0m\vec{j} + 80m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 0,5s) = (30ms^{-1}0,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(0,5s)^2)\vec{k} = 15m\vec{j} + 78,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 1,0s) = (30ms^{-1}1,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,0s)^2)\vec{k} = 30m\vec{j} + 75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 1,5s) = (30ms^{-1}1,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(1,5s)^2)\vec{k} = 45m\vec{j} + 68,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 2,0s) = (30ms^{-1}2,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,0s)^2)\vec{k} = 60m\vec{j} + 60m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 2,5s) = (30ms^{-1}2,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(2,5s)^2)\vec{k} = 75m\vec{j} + 48,75m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 3,0s) = (30ms^{-1}3,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,0s)^2)\vec{k} = 90m\vec{j} + 35m\vec{k}$

$\vec{r}(t = 3,5s) = (30ms^{-1}3,5s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(3,5s)^2)\vec{k} = 105m\vec{j} + 18,75m\vec{k}$

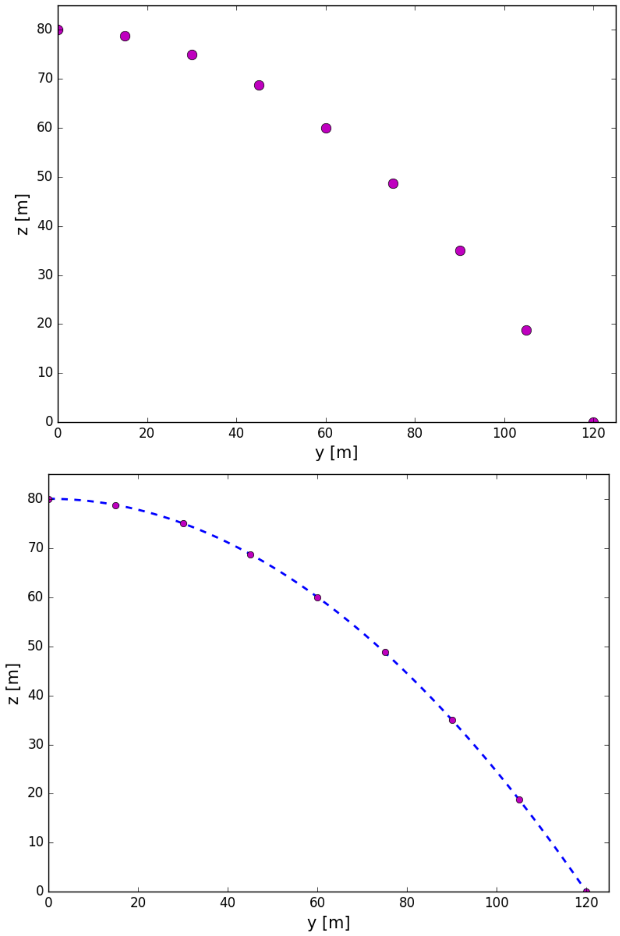
$\vec{r}(t = 4,0s) = (30ms^{-1}4,0s)\vec{j} + (80m - \frac{1}{2}10ms^{-2}(4,0s)^2)\vec{k} = 120m\vec{j} + 0m\vec{k}$

b)

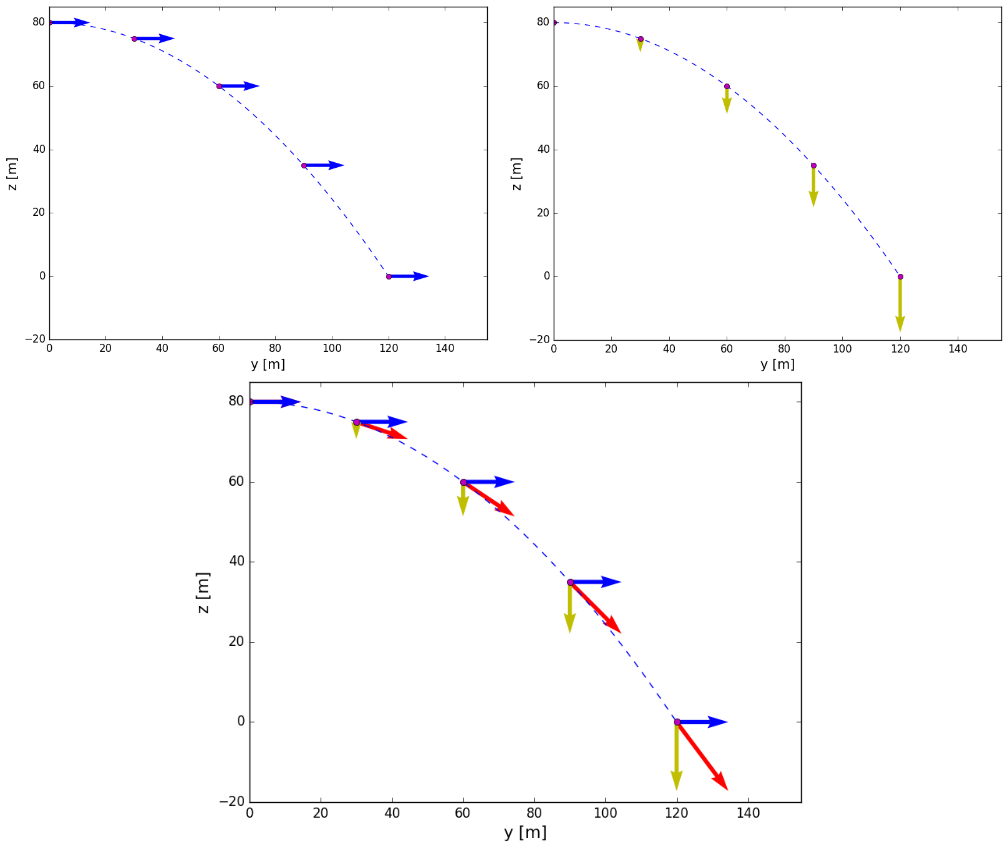
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(z_0\vec{k} + v_0 t\vec{j} - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{j} - gt\vec{k}$$



Slika 7.1: *(lijevo)* Položaj MT za svakih $0,5$ s. *(desno)* Putanja MT do udarca o tlo.



Slika 7.2: *(gore-lijevo)* Komponenta brzine u y-smjeru. *(gore-desno)* Komponenta brzine u z-smjeru.*(dolje)* Brzina tijela s komponentama.

c) $\vec{v}(t) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}t\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-2}1s\vec{k}$

$\vec{v}(t = 1s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 10\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 2s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 20\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 3s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 30\ ms^{-1}\vec{k}$

$\vec{v}(t = 4s) = 30\ ms^{-1}\vec{j} - 40\ ms^{-1}\vec{k}$

$|\vec{v}(t = 1s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-10\ ms^{-1})^2} = 31,623\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 2s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-20\ ms^{-1})^2} = 36,055\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 3s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-30\ ms^{-1})^2} = 42,43\ ms^{-1}$

$|\vec{v}(t = 4s)| = \sqrt{(30\ ms^{-1})^2 + (-40\ ms^{-1})^2} = 50,0\ ms^{-1}$

d)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(v_0\vec{j} - gt\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}(t) = -g\vec{k} = -9,81\ ms^{-2}\vec{k} \approx -10\ ms^{-2}\vec{k}$$

---

a) U relaciju $\vec{r}(t)$ potrebno je uvrstiti traženo vrijeme

$\vec{r}(t = 0,5s) = 6 \cdot 0,5^4\vec{i} + 4 \cdot 0,5^2\vec{j} + 3 \cdot 0,5\vec{k}$

$\vec{r}(t = 0,5s) = 0,375\vec{i} + 1\vec{j} + 1,5\vec{k}\ [m].$

b) Kako bismo dobili brzinu materijalne točke potrebno je derivirati po vremenu $\vec{r}(t)$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 3t\vec{k}\right)$

$\vec{v}(t) = 24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}(t = 0,5) = 24 \cdot 0,5^3\vec{i} + 8 \cdot 0,5\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v}(t = 0,5) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\ [ms]$

$|\vec{v}(t = 0,5)| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,83\ [ms]$

c) $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(24t^3\vec{i} + 8t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

$\vec{a}(t) = 72t^2\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{a}(t = 0,5) = 72 \cdot 0,5^2\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{a}(t = 0,5) = 18\vec{i} + 8\vec{j}$

$|\vec{a}(t = 0,5)| = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7\ [ms^{-2}]$.

Rješavamo inverzni problem i tražimo $\vec{r}(t) =?$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_0^t \vec{v}(\tau)d\tau$$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$$

Trebamo riješiti integral $I = \int_0^t (4\tau\vec{i} + 3\tau^2\vec{j})d\tau$.

$$I = \int_0^t 4\tau\vec{i}d\tau + \int_0^t 3\tau^2\vec{j}d\tau = 4\vec{i}\int_0^t \tau d\tau + 3\vec{j}\int_0^t \tau^2 d\tau =$$

$$= 4\frac{t^2}{2}\vec{i} + 3\frac{t^3}{3}\vec{j} = 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$$

Vratimo se u $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2t^2\vec{i} + t^3\vec{j} = 2(1 + t^2)\vec{i} + (3 + t^3)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t = 1,2\ s) = 2(1 + 1,2^2)\vec{i} + (3 + 1,2^3)\vec{j} = 4,88\vec{i} + 4,728\vec{j}\quad [m]$$