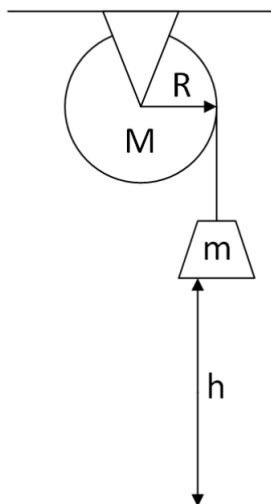


1. Na valjak polumjera R i mase M koji se može rotirati oko horizontalne osi namotana je nit na koju je obješen uteg mase m (vidi skicu). Kolika će biti kutna brzina valjka u trenutku kad uteg padne s visine h ?



Rješenje: $\omega = \sqrt{\frac{4mgh}{R^2(2m+M)}}$.

U početnom trenutku uteg mase m ima potencijalnu energiju u polju sile teže $E_{p,G}(A) = mgh$. Neposredno prije udara o tlo uteg ima kinetičku energiju $E_k(B) = \frac{mv^2}{2}$ i valjak se zavrtio kutnom brzinom ω te ima kinetičku energiju rotacije $E_{k,R}(B) = \frac{I\omega^2}{2}$. Iskoristimo zakon očuvanja energije:

$$E_p(B) + E_k(B) = E_p(A) + E_k(A)$$

$$0 + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mgh + 0.$$

Moment tromosti valjka koji rotira oko svoje osi iznosi $I = \frac{MR^2}{2}$. Također, obodna brzina ruba valjaka jednaka je brzini kojom uteg pada:

$$v = \omega R.$$

Dobivamo:

$$\omega = \sqrt{\frac{4mgh}{R^2(2m+M)}}.$$

Isto rješenje, drugi pristup.

Zadatak je moguće riješiti pomoću jednadžbi gibanja. Kod rotacije krutog tijela moment sile jednak je produktu momenta tromosti i kutnog ubrzanja $N = I\alpha$. Budući da sila napetosti niti T djeluje na obodu valjka, krak sile

je jednak polumjeru utega $N = RT$. Za uteg na koji djeluju sila teža G i napetost niti T pišemo drugi Newtonov zakon $G - T = ma$. Sve zajedno dobivamo:

$$R(G - ma) = I\alpha.$$

Brzina utega jednaka je obodnoj brzini ruba valjka $v = \omega R$, isto vrijedi i za ubrzanje $a = \alpha R$. Uvrštavanjem u gornji izraz dobivamo:

$$\alpha(I + mR^2) = RG,$$

$$\alpha = \frac{Rmg}{I + mR^2} = konst.$$

Za konstantno ubrzanja vrijedi $\omega = \alpha t$ i $\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2$. Kut φ ovisit će o visini s koje pada uteg $\varphi R = h$, ako to iskoristimo dobivamo:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha R}}.$$

Na kraju se dobije:

$$\omega = \alpha t = \frac{Rmg}{I + mR^2} \sqrt{\frac{2h}{\alpha R}} = \sqrt{\frac{4mgh}{R^2(2m + M)}}.$$