2021年寒假强基计划备考集训课程讲义（数学）

一、强基计划数学备考要点

序号	主题	高考命题	强基、综评、三一	备注
		关键词		
1	代数变形	灵活性低	灵活性高：配方、分解因式 按目标调结构 参数控制	低频
2	集合运算与划分	子集、交集、并集、补集	容斥计数 集合划分 子集极值	低频
3	函数与方程	函数 函数图像与性质 初等函数 典型函数	凹凸性与对称性 映射 代数变换 特殊函数 抽象函数 函数方程	高频
4	不等式与最值	不等式性质 比较大小 解不等式	重要不等式 自建不等式 证明不等式 最值探究 代数变形灵活性要求高	中频
5	数列与递推	基本概念 等差及其性质 等比数列及其性质 通项与求和公式	重要恒等式 同构转化求通项 和式变换与求和方法 递推方法	高频
6	向量与几何	基本概念 基本运算 基本定理 数量积与投影 法向量与距离、夹角	向量基本定理及其特例 向量与几何 奔驰定理与三角形五心向量表征	低频
7	三角与变换	定义 三角函数图像与性质 三角公式合成公式 三角形中求解与证明	三角变换 三角不等式 最值探究 三角与几何	中频
8	复数与方程	基本概念 代数形式 四则运算 共轭、模与辐角（概念）复数与向量	三角形式 指数形式 乘方开方 复数与几何 复数与几何 复数与方程 单位根	高频
9	微积分	导数与导函数 导数应用（求单调区间、极值、最值与切线） 探究恒成立问题参数条件 探究带参数函数极值点、零点存在条件 极值点偏离多切线问题	极限 连续性直观 基于切线与弦线建立不等式 定积分定义 微积分学基本定理 积分不等式	低频
10	立体几何	空间几何体结构 位置关系平行与垂直论证 空间角与体积求解	空间距离 球 体积计算	中频
11	解析几何	直线与方程 圆与方程 圆锥曲线与标准方程 离心率 直线与曲线位置关系	圆锥曲线与方程 准线与离心率 多参数计算 动点轨迹方程	高频
12	整数与多项式	无	整除及其性质 带余除法与辗转相除 同余及其性质 完系与约系 数论函数 整除分析 同余分析 欧拉定理 费马小定理 不定方程 组合数论 多项式信息提取与应用	中频

13	组合与概率	计数基本原理 排列与排列数 组合与组合数古典概型 几何概型 条件概型 随机变量概率分布	组合恒等式 组合计数 组合极值 集合划分 子集极值 概率 组合证明推理判断（简易博弈）	高频
14	几何与拓展	无	平行与垂直 全等与相似 导角导比例 共点、共线与共圆	低频
15	大学先修课程	无	极限、积分、矩阵、行列式	低频
核心素养		逻辑推理 直观想象 数学运算 数据分析 （部分）	数学抽象（突出） 逻辑推理 数学建模 直观想象 数学运算 数据分析（全面）	

二、按两天时间许可与强基元年试题表现构建讲座内容，安排两部分

序号	主题	高考命题	自主命题	备注
		关键词（选材突出灵活性）		
1	集合运算与划分	子集、交集、并集、补集	容斥计数 集合划分 子集极值	低频
2	函数与方程	函数 函数图像与性质 初等函数 典型函数	凹凸性与对称性 映射 代数变换 特殊函数 抽象函数 函数方程	高频
3	向量与几何	基本概念 基本运算 基本定理 数量积与投影 法向量与距离、夹角	向量基本定理及其特例 向量与几何 奔驰定理与三角形五心向量表征	低频
4	微积分	导数与导函数 导数应用（求单调区间、极值、最值与切线） 探究恒成立问题参数条件 探究带参数函数极值点、零点存在条件 极值点偏离多切线问题	极限 连续性直观 基于切线与弦线建立不等式 定积分定义 微积分学基本定理 积分不等式	低频
5	组合与概率	计数基本原理 排列与排列数 组合与组合数古典概型 几何概型 条件概型 随机变量概率分布	组合恒等式 组合计数 推理与证明 组合极值 集合划分 子集极值 概率 组合几何与图论（简易博弈）	高频
6	几何与拓展	无	平行与垂直 全等与相似 导角导比例 共点、共线与共圆 几何定理 圆幂与圆幂定理 根轴与根心 九点圆 变换	低频
核心素养		逻辑推理 直观想象 数学运算 数据分析 （部分）	数学抽象（突出） 逻辑推理 数学建模 直观想象 数学运算 数据分析（全面）	

三、高校强基计划校考坚持与高考互补性，引领学生整体把握、深度学习.

1.强基计划数学备考应试群体属高考成绩优异学生与高联优胜者，因此强基计划数学备考是优秀考生之间的比拼.这决定强基计划校考不会重复高考题型，试题立意无论是题型还是内容都会坚持与高考互补，更加全面地检测考生数学知识技能与能力素养.

2.在数学知识技能方面与高考互补.高考面向全体高中生，考试内容对课标有所删减，譬

如反三角函数、复数与积分等，高考考查浅显，甚至不考，强基计划命题会关注考试这方面知识技能，掌握程度如何.除检测内容全面之外，对问题的探究也追求全面立意，譬如清北等著名高校强基校考坚持以不定项选择建构试题，要求对同一情境做多方精准探究，以检测考生娴熟的数学探究能力.

3.在数学学习深度、素养积淀上，坚持与高考互补.譬如，高考对数列知识技能的考查，试题立意专注于等差数列与等比数列基础知识与技能，对递推方法关注较弱，强基计划就会侧重检测考生递推能力与同构转化能力考查；再如，高考对集合知识的立意停滞在概念与运算表层，而强基计划则深入考查集合划分与子集极值、构造等组合思维.

4.数学以“思维灵活性”、“表达严谨性”、“应用广泛性”为突出特征，然而，新课标注重基础，严重弱化“灵活性”，而强基计划命题注重突出灵活性立意试题，检测数学探究必备素养.

5.引领拓展、包容多变，这与高考题型稳定少变有明显的互补性，包容数学竞赛、理性认为数学竞赛是一种深度数学学习，基于数学竞赛试题推陈出新用于检测考生问题解决水平.

6.高考不考的平面几何、初等数论、组合数学，强基计划都有较为深入考查几何推理、整数性质与极端性思维方式等组合基本技能.

7.由于强基计划试题立意坚持知识全面与技能深入选拔顶尖人才，因此试题始终坚持创新立意，题目新颖灵活.

四、《强基计划数学备考十五讲》提出各年级学段强基备考策略

1.高一年级开始介入“强基计划”数学备考，有利因素是面向高考的常态教学还不十分紧张，时间比较充裕，因此，可以面向全国高中数学联赛全面学习，既有希望争取更多机会，又能历练、培育自己时如金的习惯，不利的因素是学生这时高中基础知识积淀不足，需要自己持之以恒，顽强拼搏，自觉拓展知识技能.

2.高二年级开始介入“强基计划”数学备考，有利条件是对高中数学知识、技能已有较多积淀，对学习高考之外内容有比较强的理解能力，效率较高，但时间已不足以按照全国高中数学联赛的只是广度与难度系统学习，可以按照本文建构的十五个主题深入、全面学习，具体可以按照本书系统学习、历练、积淀、全面提升.

3.高三年级开始迎战“强基计划”数学备考，十分有利的条件是已经学完高考内容，知识技能已经有丰厚的积淀，具备支撑进一步深入学习更多数学知识的条件，但高三教学已经全面进入高考总复习，每天时间都抓得很紧，已经没有更多的时间用于扩展知识性学习，因此，笔者提出高三学生应坚持的“三段式”备考策略：

其一，参加培训，在教师整体引领下，开拓视野，积淀技能；

其二，适应真题训练，培育素养，发展能力；

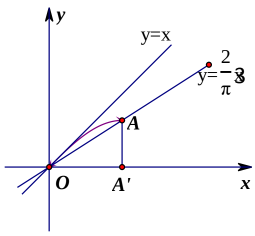
其三，坚持以《强基计划数学备考十五讲》为蓝本，持续学习、提升.

其中一、二两项应融合进行，听完讲座，立即跟进“以真题适应性训练作为实战演练”，经历实战演练，再及时跟进“学习指导”（真题精析）；第三项是指学生应持续学习，保持培训成果，能力得以持续提升.

四、强基计划与高考在知识广度与深度各方互补性都淋漓尽致地表现在《强基计划数学备考十五讲》之中，选用“十五讲”作为持续提升，保持培训、引领成果，是最佳选择.

譬如三角函数主题，高考突出三角函数图象与性质、三角形中的三角问题，三角变换灵活性检测较弱；强基计划则突出考查图象与性质的深入应用，三角变换灵活性.

例 1 基于下图，函数 $y=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 夹在直线 $y=\frac{2}{\pi}x$ 与 $y=x$ 之间，所以



$\frac{2}{\pi}x < sinx < x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$；同理，可建立$\frac{3}{\pi}x < sinx < x\left(0 < x < \frac{\pi}{6}\right)$.由此可探究$\frac{1}{4} < sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{3}$的正整数$n = 10,11,12$.

例 2 作三角变换$sin\pi x - cos\pi x = \sqrt{2}sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$，调结构

$$f(x) = \frac{sin\pi x - cos\pi x + 2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) + 2}{\sqrt{x}},$$

再由对称性转化函数$f(x) = \frac{sin\pi x - cos\pi x + 2}{\sqrt{x}}$在闭区间$\left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$上的最小值等同于函数$f(x) = \frac{\sqrt{2}sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) + 2}{\sqrt{x}}$在区间$\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$（递减）上的最小值$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$，引领读者拓展常态数学学习中基于单调性探究最值的狭隘观点.

例 3(北京大学)设a、$b \in R$,并且对一切$x \in R$,都有$acosx + bcos2x \geq -1$，求$a + b$的最大值 .作者以这样的多参数题材，引领读者探究极端数据，建构优美简捷解法.

解析 一方面，取$x = \frac{2\pi}{3}$，得$-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \geq -1 \Rightarrow a + b \leq 2$，从而$(a + b)_{max} \leq 2$.

另一方面，取$(a, b) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$，则对一切$x \in R$，都有$\frac{4}{3}cosx + \frac{2}{3}cos2x = \frac{4}{3}cosx + \frac{2}{3}(2cos^2x - 1) = \frac{1}{3}(2cosx + 1)^2 - 1 \geq -1$，从而$(a + b)_{max} \geq \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$.

综上，得$(a + b)_{max} = 2$.

例 4 求值$cos^5\frac{\pi}{9} + cos^5\frac{5\pi}{9} + cos^5\frac{7\pi}{9}$，在书中给出三种解法，突出“公式自建”、“构造”、“递推”等，引领学生深入探究，引领深度学习，培育数学素养.此类问题引起广泛兴趣，譬如“求值：$sin^4 10° + sin^4 50° + sin^4 70°$”（清华大学），“求证：$tan^8 20° + tan^8 40° + tan^8 80° = 1070163$.”(《叶军工作站》第 149 期问题 A，详见王芝平特级教师数学公众号“平说数学”近期文稿），等等.

例 5 试题（哈工大）函数$f(x) = 1 - acosx - bsinx - Acos2x - Bsin2x$，其中常数$a$、$b$、$A$、$B \in R$.如果对一切$x \in R$，都有$f(x) \geq 0$.求证：$(1) a^2 + b^2 \leq 2$；$(2) A^2 + B^2 \leq 1$.

解析：2010 年哈尔滨工业大学自主招生试题直接引入第十九届 IMO 第 4 题，原证较繁琐，下面给出笔者新证 .

（1）任取$x \in R$，有$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + asinx - bcosx + Acos2x + Bsin2x$，由题设，可知$f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$（两式中$x$是同一个值），即$2 + (a - b)sinx - (a + b)cosx \geq 0$，$\forall x \in R$，所以$2 - \sqrt{(a + b)^2 + (a - b)^2} \geq 0$，即$a^2 + b^2 \leq 2$.

（2）任取$x \in R$，有$f(x + \pi) = 1 + acosx + bcosx - Acos2x - Bsin2x \geq 0$，再由条件，得$f(x) + f(x + \pi) \geq 0$，即$2 - 2Acos2x - 2Bsiin2x \geq 0$，即$Acos2x + Bsiin2x \leq 1$，$x \in R$，所以$\sqrt{A^2 + B^2} \leq 1$，即$A^2 + B^2 \leq 1$.

评注：根据熟知三角公式：任取$x \in R$，都有

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0，\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$$

可得$f(x)+f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+f\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=3$，按题意$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+f\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\geq 0$，所以得有界性$0\leq f(x)\leq 3(x\in R)$.

等等，引领学生深度学习、思维靓点无处不在，枚不胜举.

例 6 本主题详实讲解反三角函数概念、图象、运算，不出所料，强基元年复旦大学、清华大学分别深入地考查了反三角函数运算：

（复旦大学）$arcsin\frac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8}+arcsin\frac{3}{4}$的值是（　）A.$\frac{\pi}{3}$　　$B.\frac{\pi}{2}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D. 以上都不对；

（清华大学）$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}=(\quad)$

A.$\dfrac{3\pi}{4}$　　$B.\pi$　　$C.\dfrac{3\pi}{2}$　　D. 前三个选项都不对.

本书承传了《自主招生数学备考十二讲》的立意思想，但不是该书的再版，也不是其修订，是全新撰写.作者根据强基要求，撰写了“大学先修课程”这个主题，不出所料近期清华大学正式公布《清华大学 2021 年丘成桐数学科学领军人才培养计划招生办法》明确其专业测试，除中学数学全部内容之外，还包括微积分、线性代数、群与群作用的基本概念

第一讲 集合运算与划分

一、知识要点

要点		关键词	备注
概念		确定性　列举法（无序性，互异性）　描述法　venn 图　空集　有限集　无限集　专有集合N、N^*、Z、Q、R、C	
子集		子集　真子集　相等　性质	
运算	运算	交集$A\cap B$　并集$A\cap B$　补集C_UA	
	性质	$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=A$	
容斥原理		$\left\lvert\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right\rvert=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left\lvert A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right\rvert$	有限集
集合划分		$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$A_i\neq\emptyset(1\leq i\leq n)$，$A_i\cap A_j=\emptyset(1\leq i<j\leq n)$	加法原理
子集极值		子集族极值探究方法　Spenner定理	
方法技能		集合应用　数形结合　二维表格　递推方法　组合分析　二维表格　极端性方法与整体处理　发展代数新思维	

详见《强基计划数学备考十五讲》.

二、典例精析

例 1 设a、$b\in R$，定义$A=\{(x,y)\mid y=ax+b,x\in Z\}$，$B=\{(x,y)\mid y=3x^2+15,x\in Z\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 144\}$. 问：是否存在$a$、$b$，满足$A\cap B\neq\phi$，并且$(a,b)\in C$？

例 2 现将正整数数列分成两组，使得两组中均不包含无穷等差数列，则这种分组方法数（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 无穷多　　D. 前三个答案都不对

例 3 设$M=\left\{(x,y,z,u)\left|\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-u}{z+u}+\frac{u-x}{u+x}>0,x、y、z、u\in D\right.\right\}$，

若$D=\{1,2,3,\cdots,10\}$，求 M 中元素个数$|M|$.

三、课堂练习

1.给定$n\in N^*$，集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$的一组子集$A_1,A_2,\cdots,A_k$，其中任意两个子集互补包含，即对一切$1\le i<j\le k$，都有$A_i\not\subseteq A_j$，并且$A_i\not\supseteq A_j$.

（1）当$n=5$时，求k_{min}；

（2）对$n\in N^*$，给出k的最小值$f(n)$；

（3）如果集合$S=\{1,2,3,\cdots,8\}$的一组子集$A_1,A_2,\cdots,A_k$中，不存在 3 个子集A_i、A_j、$A_l(1\le i<j<l\le k)$，满足$A_i\subseteq A_j\subseteq A_l$，或$A_i\supseteq A_j\supseteq A_l$，给出$k_{max}$.

四、学习指导

（一）实战演练

1.已知$M=\{(x,y)|x^2+(y-4)^2=1\}$，$N=\left\{(x,y)|\frac{x^2}{9}+y^2=1\right\}$，任取$P\in M$，$Q\in N$，则$|PQ|_{max}=$(　　).

A. 6　　B. $3\sqrt{3}+1$　　C. $2\sqrt{7}+1$　　D. $4\sqrt{2}+1$

2.函数$y=f(x)$的定义域为 D，若存在M，使得对任意$x\in D$，都有$|f(x)|\le M$，则称函数$f(x)$有界. 问：函数$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x},x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$是否有界？并证明你的结论 .

3.已知$S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$的一组 3 元子集A_1，A_2，…，A_k满足$|A_i\cap A_j|\le 1$，$\forall 1\le i<j\le k$，求k_{max}.

4.求最小的正整数n，使得集合$S=\{1,2,3,\cdots,24\}$的任一n元子集A都含所有 3 个两两互素的元素.

5.求满足下列条件的三元集合组（A，B，C）的个数：其中$|X|$表示集合X中元素个数 .

（1）$A,B,C\subseteq\{1,2,\cdots,8\}$；

（2）$|A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=2$；

（3）$|A|=|B|=|C|=4$.

（二）答案

题号	1	2	3	4	5
答案	B	无界	7	17	45360

详见《强基计划数学备考十五讲》.

第二讲 函数与导数

一、知识要点

（一）基本概念

要点	核心			备注
映射	$f: A \to B, A \ni x \mapsto y \in B$			A、B $\neq \emptyset$
函数	$y = f(x), x \in$ A			数集 A、B $\neq \emptyset$
三要素	定义域 A: 自变量x取值集合	对应关系f:定义出元素之间的对应，或称算法	值域C：函数值的集合	定义域 A 与对应关系f决定值域 M
图像	函数$y = f(x), x \in$ A的图像是指点集 F $= \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$			函数的直观表现
	定义本质（映射）在图像上的直观表现：函数图像在坐标系里表现为一条曲线 C，它与任一竖直直线$x = a$至多交于一点.			数形结合基础
形态	解析式	曲线	表格	函数思想方法应用广泛

（二）基本函数

要点	核心	自主探究	
		图像	性质
常数函数	$y = c$		
正比例函数	$y = kx(k \neq 0)$		
一次函数	$y = kx + b(k \neq 0)$		
反比例函数	$y = \frac{k}{x}(k \neq 0)$		
一次分式函数	$y = \frac{ax + b}{cx + d}(ad \neq bc)$		
幂函数	$y = x^a$		
指数函数	$y = a^x(a > 0$ 且$a \neq 1)$		
对数函数	$y = log_a x(a > 0$ 且$a \neq 1)$		
复合函数	$y = f(g(x))$ 外函数$y = f(u)$，内函数$u = g(x)$		

（三）基本性质

1.单一函数自身性质

要点	核心		备注
单调性	递增区间I	$\forall x_1$、$x_2 \in I$，$f(x_1) < f(x_2)$	增函数：在定义域 A 上递增
	递减区间I	$\forall x_1$、$x_2 \in I$，$f(x_1) > f(x_2)$	减函数：在定义域 A 上递减
	几何直观	增函数图像从左至右上升，减函数图像从左至右递减	

<table>
<tr><td rowspan="3">对称性</td><td>轴对称</td><td>函数图像关于直线$x=a$对称：
$\forall x\in A$，$f(a-x)=f(a+x)$</td><td>偶函数：图像以 y 轴为对称轴</td></tr>
<tr><td>中心对称</td><td>函数图像关于点(a,b)对称：
$\forall x\in A$，$f(a-x)+f(a+x)=2b$</td><td>奇函数：图像以原点为对称中心</td></tr>
<tr><td>变式</td><td colspan="2">（1）$\forall x\in A$，$f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$
（2）$\forall x\in A$，$f(m-x)=f(n+x)\Leftrightarrow f\left(\frac{m+n}{2}-x\right)=f\left(\frac{m+n}{2}+x\right)$
（3）$\forall x\in A$，$f(a-x)+f(a+x)=2\mathrm{b}\Leftrightarrow f(2a-x)+f(x)=2b$
（4）$\forall x\in A$，$f(m-x)+f(n+x)=2\mathrm{b}$
$\Leftrightarrow f\left(\frac{m+n}{2}-x\right)+f\left(\frac{m+n}{2}+x\right)=2b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">周期性</td><td>定义</td><td>函数以$\mathrm{T}(\neq 0)$为周期是指：
$\forall x\in A$，$f(x+\mathrm{T})=f(x)$</td><td>与对称性不同</td></tr>
<tr><td>充分条件</td><td colspan="2">图像有两条竖直对称轴:$x=a$，$x=b(a\neq b)$，则有周期$T=2(a-b)$;
图像有两个等“高对”称中心:(a,c)，(b,c)，则有周期$T=2(a-b)$;
图像有对称轴:$x=a$与对称中心$(b,c)(a\neq b)$，则有周期$T=4(a-b)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">凹凸性</td><td>图象下凸</td><td>函数图像在区间I上向下凸是指
$\forall x_1$、$x_2\in I$，$\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)\geq f(\lambda x_1+\mu x_2)$，其中$\lambda$、$\mu>0$ 且$\lambda+\mu=1$.</td><td rowspan="2">建不等式
探究最值
意义重大</td></tr>
<tr><td>图像上凸</td><td>函数图像在区间I上向下凸是指
$\forall x_1$、$x_2\in I$，$\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)\leq f(\lambda x_1+\mu x_2)$，其中$\lambda$、$\mu>0$ 且$\lambda+\mu=1$.</td></tr>
</table>

2.两个函数之间关联关系

<table>
<tr><th>要点</th><th colspan="2">核心</th><th>备注</th></tr>
<tr><td rowspan="5">平移</td><td rowspan="5">a、$b>0$</td><td>把$y=f(x)$图像向右平移a单位，得到函数$y=f(x-a)$</td><td></td></tr>
<tr><td>把$y=f(x)$图像向左平移a单位，得到函数$y=f(x+a)$</td><td></td></tr>
<tr><td>把$y=f(x)$图像向上平移b单位，得到函数$y=f(x)+b$</td><td></td></tr>
<tr><td>把$y=f(x)$图像向下平移b单位，得到函数$y=f(x)-b$</td><td></td></tr>
<tr><td>把$y=f(x)$图像向左平移a单位，再向上平移b单位，得到函数
$y=f(x+a)+b$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="8">对称</td><td colspan="2">把$y=f(x)$图像关于直线$x=a$对称，得到函数$y=f(2a-x)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">把$y=f(x)$图像关于直线$y=b$对称，得到函数$y=2b-f(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">把$y=f(x)$图像关于点$\mathrm{C}(a,b)$作中心对称，得到函数$y=2b-f(2a-x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>特别</td><td>函数$y=f(x)$与$y=f(-x)$，图象关于 y 轴对称
函数$y=f(x)$与$y=-f(x)$，图象关于 x 轴对称
函数$y=f(x)$与$y=-f(-x)$，图象关于原点轴对称</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">把$y=f(x)$图像关于直线$\mathrm{y}=x+a$对称，得到函数$y=f^{-1}(x+a)+a$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">把$y=f(x)$图像关于直线$\mathrm{y}=-x+a$对称，得到函数$y=a-f^{-1}(a-x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>特例</td><td>函数$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$，图像关于直线$\mathrm{y}=\mathrm{x}$对称（互为反函数）
函数$y=f(x)$与$y=-f^{-1}(-x)$，图像关于直线$\mathrm{y}=-\mathrm{x}$对称</td><td></td></tr>
<tr><td>其他</td><td>函数$y=f(x)$的图像如何变换成函数$y=|f(x)|$的图像？
函数$y=f(x)$的图像如何变换成函数$y=f(|\mathrm{x}|)$的图像？
函数$y=f(x)$的图像如何变换成函数$y=|f(|x|)|$的图像？</td><td></td></tr>
</table>

伸缩	A、$k>0$	把函数$y=f(x)$图像上各点横坐标伸长$(k<1)$到或缩短$(k>1)$到原来的k倍，得到函数$y=f(kx)$的图象；把函数$y=f(x)$图像上各点纵坐标伸长到$(k>1)$或缩短到$(k<1)$原来的 k 倍，得到函数$y=kf(x)$的图象.	
	复合	$y=f(x)\to y=f(-x)\to y=f(-\mathrm{k}x)$	
综合	$y=f(x)\to y=f(x+1)\to y=f(2x+1)\to y=f(-2x+1)$ 或 $y=f(x)\to y=f(2x)\to y=f\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=f(2x+1)\to y=f(-2x+1)$		

（四）典型函数

要点	核心	自主探究
		图像与性质
双勾函数	$y=x+\frac{1}{x}$，$y=x^3+\frac{3}{x}$，$\cdots$	奇函数， 递增区间$(-\infty,-1)$、$(1,+\infty)$ 递减区间$(-1,0)$、$(0,1)$ 在$(0,+\infty)$上，$y_{min}=f(1)$ 若$f(x_1)=f(x_2)$,则$\lvert x_1+x_2\rvert\geq 2$
单勾函数	$y=x^2+\frac{2}{x},y=x^2-\frac{2}{x},y=\frac{1}{x^2}+2x,\cdots$	……
无勾函数	$y=x-\frac{1}{x}$，$\cdots$	……
一次分式和函数	$y=\frac{a_1}{x-b_1}+\frac{a_2}{x-b_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-b_n}$	……
绝对值和函数	$y=\lvert x-a_1\rvert+\lvert x-a_2\rvert+\cdots+\lvert x-a_n\rvert$	……

（五）导数及其应用

要点	关键词	备注
导数	定义—导数 导函数 求导方法——基本导数公式、四则运算、复合运算	
应用	单调区间-极值-最值-不等式 热点不等式 切线-割线-不等式-最值 多切线 凹凸性-不等式-最值 函数极值点、零点存在的参数条件与性质 典型函数 极值点偏移不等式 探究恒成立问题中的参数范围	
方法	差函数 分离参数 比值代换 适度放缩 替换公式 转化化归	
积分	定义 算法——微积分学基本定理 极限直观	
不等式	热点不等式 以导数与积分自建不等式	

详见《强基计划数学备考十五讲》.

二、典例精析

例 1 设$a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geq 3)$成等差数列，求项数$n$的最大值，使得

$$\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\cdots+\lvert a_n\rvert=\lvert a_1+1\rvert+\lvert a_2+1\rvert+\cdots+\lvert a_n+1\rvert$$

$=|a_1-2|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-2|=507$.

例 2 求极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

例 3 幂指函数求导：求函数$\mathrm{y}=x^x$的导数.

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 的单调区间、极值与最值.

例 5 证明下列不等式：

(1)$e^{x-1}-lnx\geq 1$，$\forall \mathrm{x}\in(0,+\infty)$；

(2)$x^2e^x-lnx>1$，$\forall \mathrm{x}\in(0,+\infty)$；

(3)$e^xlnx+\frac{2}{x}e^{x-1}>1$，$\forall \mathrm{x}\in(0,+\infty)$.

例 6 已知函数$f(x)=\frac{4}{x^3+4}$.

（1）过点$\mathrm{A}(0,1)$作函数$y=f(x)$图象的切线l，求l的方程；

（2）非负数a、b、c、d满足$a+b+c+\mathrm{d}=4$，求$g=af(b)+bf(c)+cf(d)+df(a)$的最小值；

例 7 求证：$-1<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1}-\ln n\leq\dfrac{1}{2},\forall n\in N^*$.

例 8 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$，求$a$的取值范围，使得对任何$x\geqslant 0$，都有 $f(x)\leqslant ax$.

三、课堂练习

1.定义在对称数集上的任一函数$f(x)$都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

（1）由$y=\lg(10^x+1)$可得偶函数$f(x)=lg(10^x+1)-\frac{x}{2}(x\in R)$；

（2）由$\mathrm{y}=2^{\frac{x}{2}}$可得奇函数$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}(x\in R)$.

（3）由$y=x+x^2$可拓展定义：奇函数$f(x)=\begin{cases}x(1+x),x\geq 0\\ x(1-x),x>0\end{cases}$，偶函数$g(x)=\begin{cases}x(1+x),x\geq 0\\ x(x-1),x>0\end{cases}$.

2.已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-100x+5000}$，则 f (1)+f (2)+⋯+f (100)的值是__________.

3.组合恒等式

（1）$C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

（2）$2\cdot 1C_n^2+3\cdot 2C_n^3x+\cdots+n(n-1)C_n^nx^{n-2}=n(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

（3）$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，其中实数 $p>-1$

5. $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x), x\in(0,1)$.

（1）求 $f(x)$ 的最小值；

（2）设正数 $p_i\left(i=1,2,\cdots,2^n;n\in N^*\right)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}x_i=1$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{2^n}p_i\log_2 p_i\ge -n$.

6.函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}e^{-ax}$，求 a 的取值范围，使得对任意的 x∈(0,1)，恒有 f(x)>1.

7.设 $f(x)=x\ln x(x>0)$，解答

（1）求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

（2）若 $f(x_1)=f(x_2)$ 且 $x_1\neq x_2$，求证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{1}{e}>\sqrt{x_1x_2}$.

四、学习指导

（一）实战演练

1.求满足 $\dfrac{1}{4}<\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{1}{3}$ 的所有正整数之和 S 的值 .

2.函数 $f(x)=\frac{sin\pi x}{x^2-x+1}$，则（　　）

A. $f(x)\le\dfrac{4}{3}$　　　　B. 曲线 $y=f(x)$ 存在对称轴

C. $|f(x)|\le 5|x|$　　　　D. 曲线 $y=f(x)$ 存在对称中心

3.实数 a、b、c 满足

$$\begin{cases}2^a+4^b=2^c\\4^a+2^b=4^c\end{cases},$$

求实数 c 的最小值.

4.定义在 R 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足方程 $x-f(g(x))=0$ 有实数解，则 $g(f(x))$ 不可能是（　）

A. $x^2+x-\dfrac{1}{5}$　B. $x^2+x+\dfrac{1}{5}$　C. $x^2-\dfrac{1}{5}$　D. $x^2+\dfrac{1}{5}$.

5.求解下列方程: $x^3+2\sqrt{11}x^2+11x+\sqrt{11}+1=0$.

6.已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 没有不动点，判断这个函数是否有稳定点？

7.定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，求 $f\left(\frac{121}{2}\right)$.

8.定义在$(-1,1)$上的函数$f(x)$满足两个条件：①$f(x)>0,\forall x\in(-1,0)$；②$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right),x,y\in(-1,1)$. 则$f(x)$为（　）

A.奇函数　　B.偶函数　　C.减函数　　D.有界函数

9. 设$a,b\in R$，已知对任意的实数x，有$a\cos x+b\cos 2x\ge -1$恒成立，求$a+b$的最大值 .

10.在 R 上定义的可导非常值函数$f(x)$和$g(x)$满足：$f'(0)=0$，并且$\forall x,y\in R$，都有$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$，$g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$.求证：$f^2(x)+g^2(y)=1$.

11.已知$a>0$，且$a\ne 1$，考虑方程$a^x=x^a$在 $0,+\infty$ 内的根.

（1）若方程有唯一实数根，求a的取值范围；

（2）若方程有两个实数根x_1,x_2 $0<x_1<x_2$ ，求证：$x_1+x_2>2e$.

12.已知函数$f(x)=ae^x-\frac{1}{2}x^2-b(a,b\in R)$有两个极值点$x_1$，$x_2$，并且$\frac{x_2}{x_1}\ge 2$，则实数$a$的取值范围是____________.

13.已知函数$f(x)=\frac{lnx}{x}(x>0)$.

（1）求$f(x)$的单调区间、极值与最值；

（2）求a的取值范围，使得函数$y=log_a x$的定义域与值域均是区间$[m,n](m<n)$.

14. $f(x)$的导函数$f'(x)$连续，并且$f(0)=0$以及$f'(0)=a$，记曲线$y=f(x)$上与点$P(t,0)$最近的点为$Q(s,f(s))$，求$\lim\limits_{t\to 0}\frac{s}{t}$的值.

（二）参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	33	ABC	$c_{min}=log_2 3-\frac{5}{3}$	B	$-1-\sqrt{11},\frac{1-\sqrt{11}+\sqrt{8-2\sqrt{11}}}{2}$，$\frac{1-\sqrt{11}+\sqrt{8-2\sqrt{11}}}{2}$	略	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	AC	2

题号	10	11	12	13	14				

答案	略	$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$	$\left(0,\frac{ln2}{2}\right]$.	略	$\frac{1}{1+a^2}$				

详见《强基计划数学备考十五讲》.

第三讲 向量与几何

一、知识要点

要点	核心		备注
概念	向量 大小 方向 平行与共线 同向与反向 负向量 零向量		
运算	加法与减法 平行四边形法则与三角形法则 数乘向量（大小与方向）		
基本定理	共线向量基本定理	基底有 1 个非零向量构成	特例极端重要
	平面向量基本定理	基底由 2 个不共线向量构成	
	空间向量基本定理	基底由 3 个不共面向量构成	
坐标表示	基于向量基本定理建立向量坐标表示，把向量运算表现为代数运算		
数量积	非零向量夹角 数量积定义 运算性质 投影 非零向量单位化 坐标算法 夹角、长度与距离		
奔驰定理	三角形重心及其向量表征 欧拉定理与欧拉线 奔驰定理与平面划分 三角形五心及其向量表征		
几何应用	平行与垂直的向量条件 几何中平行与垂直的证明 几何图形中数量积计算，应注重垂直的简化作用		

详见《强基计划数学备考十五讲》

二、典例精析

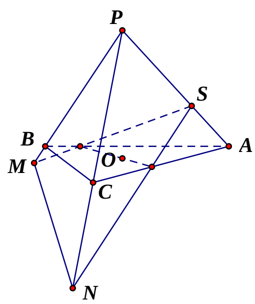
例 1 ΔABC 内部一点 O 满足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求 ΔAOC 的面积与 ΔABC 的面积之比.

例 2 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$AB=3,AC=5$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$____________.

例 3 正△ABC 的中心为 O，在其内切圆上任取一点 P，计算 $\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$.

例 4△ABC 的外心记作 O，若 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，求 $sin(\angle BAC)$ 的值.

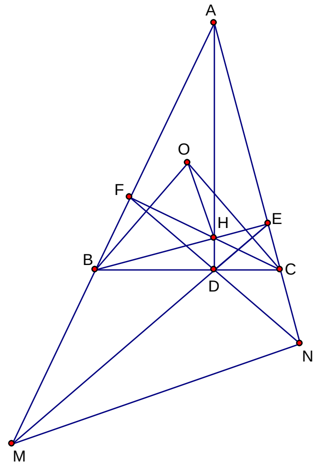
例 5 正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱长为 l，过其底面中心 O 作动平面 α 交线段 PC 于点 S，交 PA 、 PB 的延长线分别于 M 、 N ，则 $\frac{1}{PS}+\frac{1}{PM}+1$ ____________.



三、课堂练习

1.求点 $A(1,-2)$ 关于直线 $l:3x+4y-20=0$ 的对称点 A'.

2.给出 4 个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$，使得其中任意两个之和与另外两个之和垂直.



3.如图，在ΔABC中，O为外心，三条高AD、BE、CF相交于点H，直线ED和AB相交于点M，直线FD和AC相交于点N.（1）求证：$OB \perp DF$，$OC \perp DE$；（2）计算$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{MN}$.

四、学习指导

（一）实战演练

1.在ΔABC所在平面上取定一点O，则

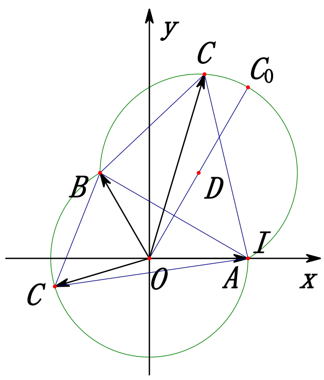
（1）计算数量积$f = \overrightarrow{BC} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C} \right) =$_______________；

（2）动点P满足$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C} \right) (\lambda \in R)$，则动点$P$的轨迹过$\Delta ABC$的______；

（3）动点P满足$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C} \right) (\lambda \in R)$，则动点$P$的轨迹过$\Delta ABC$的______.

2.向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$满足$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$，$< \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} > = 60^\circ$，则$|\vec{c}|$的最大值等于（　　）

（A）2　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）1



3.圆O的半径为3，一条弦AB=4，P为圆O上任意一点，则$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP}$的最大值为(　　　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. 1　　C.2　　D.4

4.已知△ABC，若对任意$t \in R$，$|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{AC}|$，则△ABC一定为（　　）

A. 锐角三角形　B. 钝角三角形　C. 直角三角形　D. 答案不确定

5.已知$|\overrightarrow{OA}| = 2$，$|\overrightarrow{OB}| = 1$，$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{PQ}|$在$t_0$处取得最小值，当$t_0 \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$时，求$\theta = < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >$的取值范围.

（二）参考答案

题号	1	2	3	4	5
答案	（1）0；（2）垂心；（3）外心	$\left\|\vec{c}\right\|_{\max}=2$	4	直角三角形	$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$

详见《强基计划数学备考十五讲》

第四讲　不等式与最值

一、知识要点

<table>
<tr><td>要点</td><td colspan="2">核心</td><td>备注</td></tr>
<tr><td>概念</td><td colspan="2">不等号 不等式 矛盾不等式 条件不等式（特称量词命题）
绝对不等式（恒成立，全称量词命题）</td><td></td></tr>
<tr><td>性质</td><td colspan="2">不等式操作变形依据.
重点：不等式两边乘以同一个负数，不等号改变方向</td><td rowspan="3">灵活性要求高</td></tr>
<tr><td>求解</td><td colspan="2">发展解不等式新思维　积极主动避免讨论 不被动讨论</td></tr>
<tr><td rowspan="2">证明</td><td>重要不等式</td><td>均值不等式　柯西不等式　排序不等式　幂平均不等式 伯努利不等式　绝对值不等式 对数不等式　自建不等式</td></tr>
<tr><td>证明不等式</td><td>比较法 综合法与分析法 反证法 数学归纳法 调结构 局部不等式 支撑线不等式</td><td rowspan="2">一致</td></tr>
<tr><td rowspan="2">探究</td><td>多元最值</td><td>重要不等式 调结构 对称排序 齐次化增设条件 平移增设条件</td></tr>
<tr><td>复合最值</td><td>应用内层最值放缩，建构目标</td><td></td></tr>
</table>

详见《强基计划数学备考十五讲》.

二、典例精析

例 1 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$， $x\in\ 0,1$ ，比较 $\left|\log_a\ 1-x\ \right|$ 与 $\left|\log_a\ 1+x\ \right|$ 的大小.

例 2 不等式$\frac{1}{5x^2-4x+11}\leq-\frac{1}{24}x+\frac{1}{8}$的解集是__________________.

例 3 任取a、b、$c>0$，求证：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

例 4 设 $a,b,c>0$. 记 $f=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}$ ，求f_{max}.

例 5 任给 $n\in N^*$，求证：$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}<3$.

例 6 函数 $f\left(x\right)=\left|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+ax+b\right|$ 在闭区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值 M 与参数 a,b 有关，则 M 的最小值是______________.

例 7 求最大实数m，使得对满足$a+b+c=1$的一切正数a,b,c，都有

$$10(a^3+b^3+c^3)-m(a^5+b^5+c^5)\geq 1.$$

三、课堂练习

1.设$a,b,c>0$．记$f=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}$，解答

（1）求证：$f>1$；

2.任取x_1、$x_2\in(-1,2)$，比较$f=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$与$g=\frac{3}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2+6$的大小.

3.求出$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2020\sqrt{2020}}$的整数部分.

4.任取实数$x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\leq x_5$，令$A=\left(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\left|x_i-x_j\right|\right)^2$，$B=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\left(x_i-x_j\right)^2$，则满足$\boldsymbol{A}\leq\boldsymbol{aB}$恒成立的最小的实数$a=$ ________.

四、学习指导

（一）实战演练

1.比较$\log_2 3$与$\log_3 4$的大小.

2.设$x\in R$，比较$f=x^8-x$与$g=x^5-x^2-1$的大小.

3.不等式$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}\leq 4x+\frac{4}{3}$的解集是________.

4.满足$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}>\frac{3}{2}$的所有正整数$n$的集合是__________.

5.任取x、y、$z\geq 0$，且$x+y+z=1$，求$f=(x+3y+5z)\left(x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{5}z\right)$的最小值与最大值.

6.求$\mathrm{y}=\sqrt{x}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x+27}$的最大值与最小值.

7.非负实数x,y满足$2\mathrm{x}+\mathrm{y}=1$，则$\sqrt{x^2+y^2}+x$有（　　）

A. 最小值$\frac{4}{5}$　　B. 最小值$\frac{2}{5}$　　C. 最大值 1　　D. 最大值$\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

8.求$f\left(x,y\right)=\max\left\{\left|x-2y\right|,\left|x+1\right|,\left|2y-2\right|\right\}\left(x,y\in R\right)$的最小值.

9.设a、b、c、$d\geq 0$，且$a+b+c+d=4$，求$f=\frac{a}{b^3+4}+\frac{b}{c^3+4}+\frac{c}{d^3+4}+\frac{d}{a^3+4}$的最小值.

10.任取非负实数a,b,c，使得$a+b+c=1$，求证：

$$2\leq(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\leq(1+a)(1+b)(1+c).$$

11.给定整数$n\geq 3$，实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足

$$\min_{1\leq i<j\leq n}\left|a_i-a_j\right|=1,\ f=\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|,$$

求f_{min}.

12.正数x、y、z满足$\mathrm{xyz}=1$，求

$$f=\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}$$

的最小值.

（二）参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\log_2 3>\log_3 4$	$f>g$	$\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$	$\{3,4,5,\cdots\}$	1，$\frac{9}{5}$	$\sqrt{13}+3\sqrt{3}$，11	$1,\frac{4}{5}$	1

题号	9	10	11	12
答案	$\frac{2}{3}$	略	$\left[\frac{n^2}{4}\right]$	0

（二）详见《强基计划数学备考十五讲》.

第五讲 组合与概率

一、知识要点

主题	关键词	备注
组合基础	计数基本原理 排列与排列数 组合与组合数 组合数性质 组合恒等式 二项式定理 多项式定理	常态提升
组合计数	变异型排列与组合——重元排列 重元组合 控距排列 圆排列 不定方程非负整数解与正整数解 取整函数计数功能 分类与分步 总控与分离 总控与剔除 递推方法 容斥计数 化归转化——映射转移、折线方法、对称处理、正难则反，等 重建计数对象避免重复计数	组合学一般问题
组合证明	分析与推理（只证必要性，不需构造）	
组合极值	从函数最值到组合最值——极值与构造 表征模式： 构造例子以建构必要性+充分性论证. 先证必要性+构造例子支撑充分性. 建构两种必要性——建构双向不等关系，确定最值（以例子得以必要性——数据不等式+依推理证明建构必要性——反向数据不等式，两者“=”成立）	

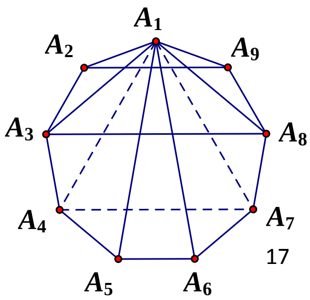
详见《强基计划数学备考十五讲》.

二、典例精析

例 1 把 1,2,3,4,5 排成(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)，使得$a_1<a_2,a_2>a_3,a_3<a_4,a_4>a_5$，求这种排列的个数.

例 2 从一个正 9 边形的 9 个顶点中选出 3 个构成一个等腰三角形的顶点，不同选法种数是（　　）

A. 30　　B. 36　　C. 42　　D. 前三个答案都不对



例 3 将 2 个 a 和 2 个 b 共 4 个字母填在如图所示的 16 个小方格内，每个小方格内至多填 1 个字母. 若使相同字母既不相同也不同列，求这种填法成功得概率.

例 4 顺次连接一个正 2016 边形的一些顶点，可得到正多边形的个数是（　　）

A. 6552　　B. 4536　　C. 3528　　D. 2016

例 5 方程 $x+y+z=2013$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解 $\left(x,y,z\right)$ 的个数是__________.

三、课堂练习

1. 记函数 $f\left(x\right)=\left[x\right]+\left[2x\right]+\left[\frac{5}{3}x\right]+\left[3x\right]+\left[4x\right]\left(0\le x\le 100\right)$ 的值域为 M，求 $card\left(M\right)$.

2.在一次射击比赛中，有 8 个泥质靶子挂成右图所示成 3 列，一位神枪手按如下规则打掉所有靶子：

（1）首先选择将要有一个靶子被打掉的一列；

（2）然后在被选列中打掉尚存的最下面一个靶子.

求打掉这 8 个靶子共有多少种不同的顺序.

3.一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时在每个顶点涂然红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同. 问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

四、学习指导

（一）实战演练

1.用 2,4,6 三个数字构造六位数，但不允许有两个 2 连续出现，求这种六位数的个数.

2.将 16 个数：4 个 1，4 个 2，4 个 3，4 个 4 填入一个 4×4 的矩形中，要求每行每列正好有 2 个偶数，则共有_______种填法.

3.不定方程$x+2y+3z=100$的非负整数解(x,y,z)个数是（　　）

A. 884　　B. 885　　C. 886　　D. 887

4.在一天的不同时刻，经理把文件交给秘书打印，每次都将文件放在秘书要打文件堆的上面，秘书有时间就从最上方取一份文件打印. 若有 n 次文件，且经理是按 1,2，…，n 的顺序依次交来文件. 问：秘书打印完这 n 份文件的可能顺序有多少种？

5.求十进制十位正整数 n 的个数，使得 $11111|n$，并且 n 的十个数码互不相同.

6.用 6 种不同的颜色涂正方体的 6 个面，使得不同的面涂有不同的颜色，求不同的染色方法种数（将正方体任意旋转之后仍然不同的涂色方法，才认为是不同的）.

7.设圆周上共有 n（n≥6）个点，其中每两点之间连一条弦，并且任何 3 条弦在圆内都没有公共点. 求这些弦彼此相交共能构成多少个不同的三角形.

8.将 n 元钱全部兑换为 1 元和 2 元的纸币，求不同兑换方法种数.

9.设 a_n 为下述正整数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n，并且每位数字只能取 1，3，

或 4. 证明：a_{2n}为完全平方数.

10.假定你家订了一份报纸，送报人可能在早上 6:30~7:30 之间把报纸送到你家，你父亲离开家去工作的时间在早上 7:00~8:00 之间. 求你父亲在离开家之前能得到报纸的概率.

11.有序数组(a_1,a_2,a_3,a_4)满足$a_1,a_2,a_3,a_4\in\{1,2,3,4\}$，其中不同数的个数记作$\mathrm{N}(a_1,a_2,a_3,a_4)$，例如$\mathrm{N}(1,1,2,2)=2$，$\mathrm{N}(1,2,3,1)=3$，则所有数$\mathrm{N}(a_1,a_2,a_3,a_4)$的平均值为（　　）

A.$\frac{175}{64}$　　B.$\frac{173}{64}$　　C.$\frac{87}{32}$　　D.$\frac{89}{32}$

12.60 支球队两两比赛，任意两队相互胜率均为 50%，设有两支球队取胜场数相同的概率为$\frac{p}{q}$，$(p,q)=1$，求正整数n，使得$2^n\|q$.

13.一项“过关游戏”规则规定：在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次，如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于2^n，则算过关. 问：

（1）某人在这项游戏中最多能过几关？

（2）求他连过前三关的概率.

（注：骰子是一个在个面上分别标有 1,2,3,4,5,6 点数的质地均匀正方体，抛掷骰子落地静止后，向上一面的点数为出现的点数）

（二）参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	448	44100	884	$\frac{2}{n+1}C_{2n-1}^{n}$	3456	30	$C_n^3+4C_n^4+5C_n^5+C_n^6$

8	9	10	11	12	13
$a_n=\frac{2n+3+(-1)^n}{4}\left(n\in N^*\right)$	递推计数	$\frac{7}{8}$	A	1714	4，$\frac{100}{243}$

详见《强基计划数学备考十五讲》

第六讲 几何拓展

一、知识要点

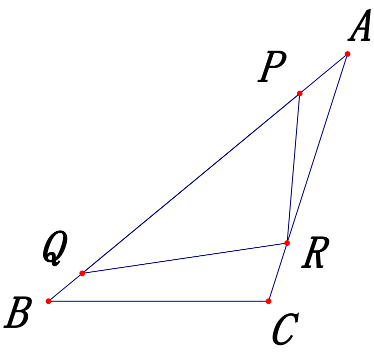
要点		关键词	备注
基础	平行	平行的判定与性质 平行线截比例线段	
	垂直	垂直的判定与性质　等差差幂线定理	
	三角形	三角形全等的判定与性质 中位线 三角形相似的判定与性质 三角形内外角平分线定理	
	圆	圆的定义与性质 圆内接四边形 圆外切四边形	
	四边形	梯形与中位线 平行四边形 矩形 菱形 正方形	
	问题	等长与等角 全等与相似 三点共线 三线共点 四点共圆	
提升	重要定理	梅涅劳斯定理 塞瓦定理 西摩松定理 托来密定理 欧拉定理 九点圆 圆幂定理 根轴定理 根心定理	
	三角形五心	重心 外心 垂心 内心 旁心	

	阿氏圆	阿婆罗尼斯圆	
新概念	变换	平移　对称（轴对称与中心对称）　旋转　位似　反演	本书暂不列入
	调和	调和点列与调和线束　调和四边形及其性质	
	等角	等角线及其性质　等角共轭点	
其他	解析法　向量法　复数法　三角法		

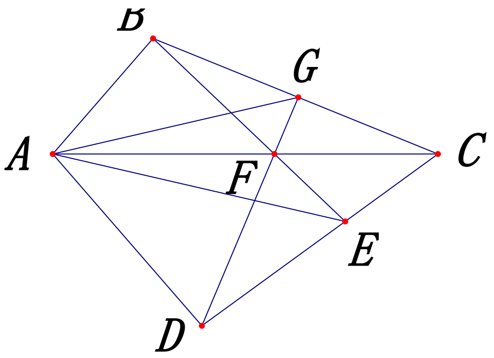
详见《强基计划数学备考十五讲》

二、典例精析

例 1 如图，在△ABC 中，P、Q 将其周长三等分，且 P、Q 在边 AB 上，求证：$\dfrac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} > \dfrac{2}{9}$.



例 2 如图 1，在四边形 ABCD 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$，在边 CD 上取一点 E，BE 交 AC 于点 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证：$\angle GAC = \angle EAC$.



例 3 如图，在△ABC 中，$\angle A = 60^{\circ}$，AB＞AC，O 是外心，两条高 BE、CF 相交于点 H，点 M、N 分别在线段 BH、HF 上，且 BM=CN，求 $\dfrac{MH+NH}{OH}$.

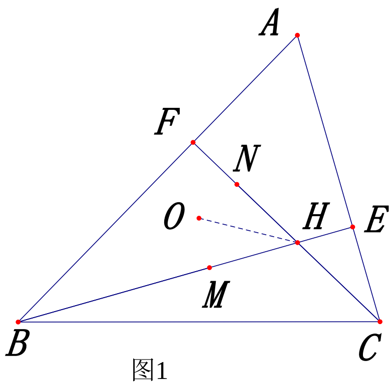
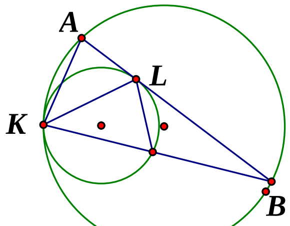


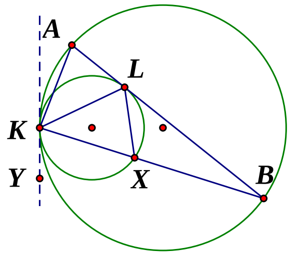
图1

三、课堂练习

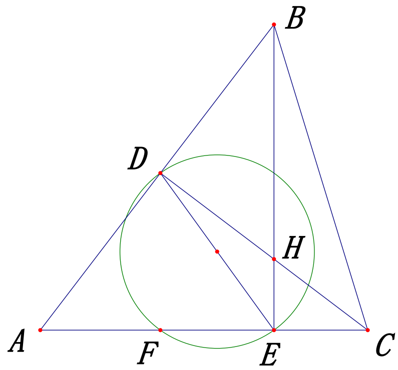
1.两个圆内切于 K，大圆的弦 AB 与小圆切于 L，已知$AK:BK=2:5$，$AL=10$，则 BL 的长为（　　）

A. 24　　B. 25　　C. 26　　D. 前三个答案都不对



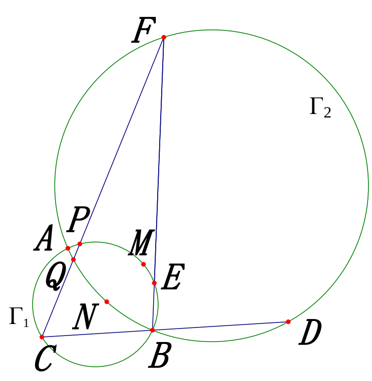


2.在锐角△ABC 中，BE⊥AC 于点 E，CD⊥BA 于点 D，BC=25，CE=7，BD=15. 若 BE 与 CD 相交于点 H，以 DE 为直径作圆交 AC 于另外一点 F，求 AF 的长度.



图一

3.如图 1，两圆Γ_1、Γ_2相交于点 A、B，过点 B 的一条直线分别交圆Γ_1、Γ_2于 C、D，过点 B 的另一条直线分别交圆Γ_1、Γ_2于点 E、F，直线 CF 分别交圆Γ_1、Γ_2于点 P、Q，弧PB、QB的中点分别记作 M、N，若 CD=EF，求证：C、F、M、N 四点共圆.



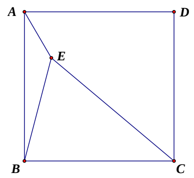
四、学习指导

（一）实战演练

1. 已知$A(2,0)$、$B(2,1)$，对$⊙O: x^2+y^2=16$上的动点 P，则$(2|PA|+|PB|)_{min}=$ ____.

2.正方形 ABCD 内一点 P 满足$AP:BP:CP=1:2:3$，则∠APB=（　　）

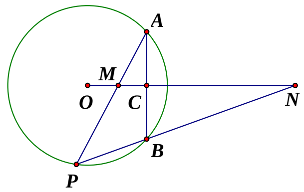
A. 120°　　B. 125°　　C. 150°　　D. 前三个答案都不对



3.AB 是⊙O的直径，CO⊥AB，M 为 AC 的中点，CH⊥MB，则下列正确的选项是（　　）

A. $AM=2OH$　B. $AH=2OH$　C. $\triangle BOH \backsim \triangle BMA$　D. 以上选项都不对

4.AB 为⊙O的一条弦，P 为圆周上一点，OC⊥AB 于 C，PA∩OC = M，PB 交 OC 延长线于 N，则下列说法正确的有（　　）

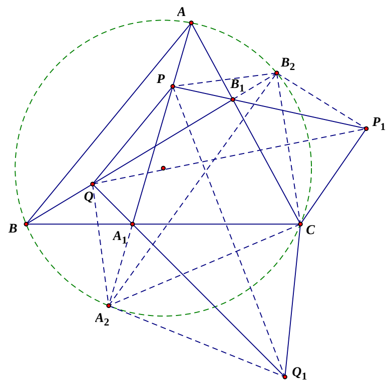


A. O、M、B、P 共圆　　B. A、M、B、N 共圆

C. A、O、P、N 共圆　　D. 前三个答案都不对

5.已知边长为 4 的正△ABC，D、E、F 分别是边 BC、CA、AB 上的点，且$|AE|=|BF|=|CD|=1$，联接 AD、BE、CF，交成△RQS，点 P 在△RQS 内及边上移动，点 P 到△ABC 三边的距离分别为 x、y、z，求 $f=xyz$ 的最小值.

6.在△ABC 中，点A_1在边 BC 上，点B_1在边 AC 上，点 P、Q 分别在线段AA_1和线段BB_1上，并且满足 PQ∥AB. 在直线PB_1上取点P_1，使得点B_1严格位于P、P_1之间，并且$\angle PP_1C=\angle BAC$.类似地，在直线QA_1上取点Q_1，使得点A_1严格位于点Q_1、Q之间，并且$\angle CQ_1Q=\angle CBA$. 求证：P、Q、P_1、Q_1四点共圆.



7.锐角△ABC 的三边满足$a>b>c$，求证：△ABC 内接正方形边长的最大值为$\frac{acsinB}{a+csinB}$.

（二）参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	$\sqrt{37}$	135°	BC	AC	$\frac{648}{2197}\sqrt{3}$	略	$\frac{acsinB}{a+csinB}$

详见《强基计划数学备考十五讲》

第七讲：复数

一、知识要点

复数与方程	基本概念 代数形式 四则运算 共轭、模与辐角（概念）复数与向量	三角形式 指数形式 乘方开方 复数与几何 复数与几何 复数与方程 单位根

1、复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\geq 0)$ 称为复数的三角形式，r 为模，θ 为辐角，

若 $\theta\in[0,2\pi)$，则称为辐角主值，记作 $\arg z=\theta$。有关运算：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

若复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\geq 0)$，则它的 n 次方根是以下 n 个复数：

$$\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})\ (k=1,2,\cdots,n-1)$$

2、复数的指数形式 $z=re^{i\theta}$，r 为复数的模，θ 为辐角，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\Rightarrow e^{i\pi}+1=0$

3、复数乘法 $z_1z_2(z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2))$ 的几何意义：被乘数 z_1 对应的向量，按逆时针旋转一个角 θ_2，再把模变为原来的 r_2 倍。

4、复数的模及其性质

$|z|^2=z\cdot\bar{z}$（其中 $\bar{z}$ 表示复数 z 的共轭复数）

5、单位根

三次单位根及其性质：1，$\omega,\overline{\omega}$是方程$z^3=1$的三个根，其中$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

易知$1+\omega+\omega^2=0,\omega^2=\overline{\omega},\overline{\omega}^2=\omega$

例题分析

例 1：已知复数$z_1=1+\sqrt{3}i,z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$，则$z_1z_2$的辐角主值为______。

例 2：将复数$z=(\sin 75^\circ+i\sin 15^\circ)^3$对应的向量按顺时针旋转$15^\circ$，则所得向量对应的复数为______。

例 3：若复数x,y,z的模长均为 1，且$x+y+z\neq 0$，则$\left|\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|$的值为（ ）

A、$-\frac{1}{2}$　　B、1　　C、2　　D、无法确定

例 4、复数满足$x+\frac{1}{x}=-1$，则$x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}=$________

例 5、已知$|z_1|=3$，$|z_2|=5,|z_1-z_2|=7$，则$\dfrac{z_1}{z_2}=$__________

例 6、已知$|z|=1$，则$|z^2+z+4|$的最小值为__________

例 7、求最小正整数n，使得$I=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i)^n$为纯虚数，并求出$I$．

例 8、已知复数$|z|=2$，则$|z-\dfrac{1}{z}|$的最大值与最小值的和为__________

例 9、在复平面上，满足方程$z\overline{z}+z+\overline{z}=3$的复数$z$所对应的点构成的图形是（　）

A、圆　　　B、两个点　　　C、线段　　　D、直线

例 10、计算：$\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{7}+\arctan\dfrac{1}{8}=$（　）

A、$\dfrac{\pi}{3}$　　B、$\dfrac{\pi}{4}$　　C、$\dfrac{\pi}{5}$　　D、$\dfrac{3\pi}{8}$

例 11、设复数 z 满足 $2|z| \le |z-1|$，则 （ ）

A、$|z|$ 的最大值为 1　　　　B、$|z|$ 最小值为 $\frac{1}{3}$

C、z 的虚部的最大值为 $\frac{2}{3}$　　　　D、z 的实部的最大值为 $\frac{1}{3}$

例 12、ω 是 $x^5=1$ 的一个虚根，则 $\omega(\omega+1)(\omega^2+1)=$ ________

例 13、已知 z 是实部虚部均为正整数的复数，则（ ）

A、$\mathrm{Re}(z^2-z)$ 被 2 整除　　　　B、$\mathrm{Re}(z^3-z)$ 被 3 整除

C、$\mathrm{Re}(z^4-z)$ 被 4 整除　　　　D、$\mathrm{Re}(z^5-z)$ 被 5 整除

例 14、已知关于 z 的方程 $z^{2017}-1=0$ 的所有复数解为 $z_i(i=1,2,\cdots,2017)$，则 $\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{2-z_i}$（ ）

A、是比 $\frac{2017}{2}$ 大的实数　　　　B、是比 $\frac{2017}{2}$ 小的实数

C、是有理数　　　　D、不是有理数

例 15、关于 x 的实系数方程 $x^5+x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有四个相异的纯虚数根,

求 a,b,c,d 满足的条件。

【适应性练习】

1．已知复数 z 满足 $|2z+\frac{1}{z}|=1.$ 则 z 的辐角主值的取值范围是__________。

2．设复数 z=cosθ+isinθ(0≤θ≤π)，复数 z,(1+i)z，$2\bar{z}$ 在复平面上对应的三个点分别是 P，Q，R，当 P，Q，R 不共线时，以 PQ，PR 为两边的平行四边形第四个顶点为 S，则 S 到原点距离的最大值为__________。

3．设复平面上单位圆内接正 20 边形的 20 个顶点所对应的复数依次为 $z_1,z_2,\cdots,z_{20}$,则复数 $z_1^{1995},z_2^{1995},\cdots,z_{20}^{1995}$ 所对应的不同点的个数是__________。

4．已知复数 z 满足|z|=1，则|z+iz+1|的最小值为__________。

5．设 $w=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$，则 $(x-w)(x-w^3)(x-w^7)(x-w^9)$ 的展开式为__________。

6．已知 $(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^n$ $(m,n\in N_+)$，则 mn 的最小值是__________。

7．复平面上，非零复数 z_1,z_2 在以 i 为圆心，1 为半径的圆上，$\overline{z_1}\cdot z_2$ 的实部为零，z_1 的辐角主值为 $\frac{\pi}{6}$，则 $z_2=$__________。

8. 当 $n\in$N, 且 1≤ n ≤100 时，$[(\frac{\sqrt{3}+i}{2})^7+1]^n$ 的值中有实数__________个。

9．已知复数 z_1,z_2 满足 $\frac{z_2}{z_1}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$，且 $Argz_1=\frac{\pi}{3}$，$Argz_2=\frac{\pi}{6}$，$Argz_3=\frac{7}{8}\pi$，则

$Arg\dfrac{z_1+z_2}{z_3}$的值是__________。

10．集合 A={z|z^{18}=1},B={w|w^{48}=1},C={zw|z∈A,w∈B}，问：集合 C 中有多少个不同的元素？

11、设a,b,c为实数，$a,c\neq 0$，方程$ax^2+bx+c=0$的两个虚数根x_1,x_2满足$\dfrac{x_1^2}{x_2}$为实数，则$\sum_{k=0}^{2015}(\dfrac{x_1}{x_2})^k$等于（　　）

A．1　　　　B． 0

C．$\sqrt{3}i$　　　　D．前三个答案都不对

12、已知复数z满足$z+\dfrac{2}{z}$是实数，则$|z+\mathrm{i}|$的最小值等于（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．1　　　　D．前三个答案都不对

13、设$w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5},P(x)=x^2+x+2,$则$P(w)P(w^2)P(w^3)P(w^4)=$（　　）

$(A)9$　　　　$(B)10$　　　　$(C)11$　　　　$(D)12$

14、设复数w,z满足：$|w+z|=1,|w^2+z^2|=4$，则$|wz|$的（　）

(A)的最小值为$\dfrac{5}{4}$　　　　(B)的最小值为$\dfrac{3}{2}$

(C)的最大值为$\dfrac{5}{2}$　　　　(D)的最大值为$\dfrac{11}{4}$

15、已知z_1,z_2是实部虚部均为正整数的复数，则$\dfrac{|z_1+z_2|}{\sqrt{|z_1\cdot z_2|}}$（　　）

A、有最大值 2　　　　B、无最大值

C、有最小值$\sqrt{2}$　　　　D、无最小值

第八讲：解析几何与立体几何

一、知识要点

立体几何	空间几何体结构 位置关系平行与垂直论证 空间角与体积求解	空间距离 球 体积计算
解析几何	直线与方程 圆与方程 圆锥曲线与标准方程 离心率 直线与曲线位置关系	圆锥曲线与方程 准线与离心率 多参数计算 动点轨迹方程

1、两直线所成的角

（1）l_1到l_2的角满足$\tan\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ （k_1,k_2分别表示直线l_1，l_2的斜率）

（2）l_1和l_2的夹角满足$\tan\theta=|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}|$

2、过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上一点(x_0,y_0)的切线方程为

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

3、圆锥曲线统一定义

平面内与一个定点F和一条定直线l的距离的比为常数e的动点轨迹为圆锥曲线，当$e>1$时，表示双曲线；当$e=1$时，表示抛物线；当$0<e<1$时，表示椭圆.定点称为焦点，定直线称为准线.

4、过圆锥曲线上一点$P(x_0,y_0)$的切线方程

（1）椭圆的切线：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

（2）双曲线的切线：$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

（3）抛物线的切线：$y_0y=p(x+x_0)$

（4）一般二次曲线：$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$在切点$P(x_0,y_0)$处的切线方程为：

$Ax_0x+B\dfrac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\dfrac{x_0+x}{2}+E\dfrac{y_0+y}{2}+F=0$，在切点$P(x_0,y_0)$处的法线方程为：$y-y_0=\dfrac{Bx_0+2Cy_0+E}{2Ax_0+By_0+D}(x-x_0)$

5、圆锥曲线的参数方程

（1）椭圆参数方程$\begin{cases}x=a\cos\alpha\\ y=bsin\alpha\end{cases}$ （2）双曲线参数方程$\begin{cases}x=a\sec\alpha\\ y=b\tan\alpha\end{cases}$

（3）抛物线参数方程$\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$

6、点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上异于长轴两端点的任一点， F_1,F_2 是两焦点， $\angle F_1PF_2=\theta$ ，$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$ ，对于双曲线， $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cot\frac{\theta}{2}$.

立体几何部分（了解）

1、射影面积公式： $S^{'}=S\cdot\cos\alpha$

2、空间余弦定理（三面角公式）：平面 α,β 相交于直线 l ， A,D 为 l 上两点，射线 DB 在平面 α 内，射线 DC 在平面 β 内，已知 $\angle BDC=\theta,\angle BDA=\theta_1,\angle CDA=\theta_2$ ，且 θ,θ_1,θ_2 都是锐角，φ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，则 $\cos\varphi=\frac{\cos\theta-\cos\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_1\sin\theta_2}$ ，特别地，当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时， $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

3、欧拉公式： $V+F-E=2$ （V、F、E 分别表示凸多面体的顶点个数、面数、棱数）由此可以得到：正多面体只有五种（正四、六、八、十二、二十面体）

【例题分析】

已知关于 x,y 的二元二次方程 $3x^2-2xy+3y^2-2x-2y-1=0$ ，试判断方程所表示的曲线的类型.

1、已知平面上两点 $A(4,1), B(0,4)$，在直线 $l: 3x-y-1=0$ 上找到一点 M，使得 $|MA|-|MB|$ 最大，则点 M 的坐标为________，最大值为________.

类似问题：求一点 P，使 $|PA|+|PB|$ 最小.

2、D, E, F 分别是 ΔABC 三边 AB, BC, CA 上的动点，它们分别从 A、B、C 出发，各自以一定的速度向 B、C、A 移动.当 $t=1$ 时，分别到达 B、C、A.则（　　）

A、ΔDEF 的重心是一个定点

B、$S_{\Delta DEF} \geq \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

C、若 ΔABC 是正三角形，则 ΔDEF 始终保持正三角形

D、$\Delta DEF \sim \Delta ABC$

3、在坐标平面内，纵横坐标都是整数的点叫做整点．我们用 I 表示所有直线的集合，M 表示恰好通过一个整点的直线的集合，N 表示不通过任何整点的直线的集合，P 表示通过无穷多个整点的直线的集合，则下列表达式正确的是（　　）

A、$M \cup N \cup P = I$　　B、$M \neq \varnothing$　　C、$N \neq \varnothing$　　D、$P \neq \varnothing$

4、三条直线 $4x+y=4, mx+y=0, 2x-3my=4$ 不能围成三角形，则 $m=$（　　）

A、4　　B、$\frac{2}{3}$　　C、$-\frac{1}{6}$　　D、-1

5、平面上整点到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是（　　）

A、$\frac{\sqrt{34}}{170}$　　B、$\frac{\sqrt{34}}{85}$　　C、$\frac{1}{20}$　　D、以上都不对

6、设曲线 $C: y=x^3-x$，将 C 沿 x 轴、y 轴正向分别平行移动 a, b 单位长度后得到曲线 C_1，下列说法正确的是（　　）

A、曲线 C_1 关于点 (a,b) 对称

B、曲线 C_1 与曲线 C 关于点 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ 对称

C、若 $b=\frac{a^3}{4}-a$，则曲线 C_1 与曲线 C 有且仅有一个公共点

D、过平面上任意一点都存在无数条直线 l 与曲线 C 恰有一个公共点

7、已知直线$l: kx-y-2=0$与曲线$C: \sqrt{1-(y-1)^2}=|x|-1$，下列说法正确的是（　　）

A、曲线C关于y轴对称

B、曲线C关于x轴对称

C、若直线l与曲线C恰有一个公共点，则$k=\pm 2$

D、若直线l与曲线C有两个不同的交点，则$k\in[-2,-\frac{4}{3})\cup(\frac{4}{3},2]$

8、已知实数x, y满足$x^2+y^2-4x+1=0$，则（　　）

A、$x-y\le 2+\sqrt{6}$　　　B、$x\le\sqrt{3}y$

C、$x^2+y^2\ge 2+\sqrt{3}$　　D、$x^2-y^2\ge -1$

9、在平面直角坐标系内，过点$P(x,y)(xy\ne 0)$作直线l与坐标轴相交所成三角形面积等于a，则这样的直线l（　　）

A、必存在 4 条

B、必存在 3 条，但不能确定必存在 4 条

C、必存在 2 条，但不能确定必存在 3 条

D、必存在 1 条，但不能确定必存在 2 条

10、满足$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$的整点的个数是（　　）

A、16　　B、17　　C、18　　D、19

11、极坐标方程$\rho=\frac{1}{1-\cos\theta+\sin\theta}$所确定的曲线是（　　）

A、圆　　B、椭圆　　C、双曲线　　D、抛物线

12、已知椭圆的左右焦点为F_1, F_2，以F_1F_2为直径的圆交椭圆于 4 个不同的点，若这 4 个点和两个焦点F_1, F_2恰好组成一个正六边形，那么椭圆的离心率（　　）

A、$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B、$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C、$e=\sqrt{3}-1$　　D、$e=\sqrt{2}-1$

13、设双曲线$xy=1$的两支为C_1，C_2，三角形PQR顶点位于此双曲线上.则（　　）

A、若PQR是正三角形，P、Q、R三点可能在同一支上

B、若PQR是正三角形，P、Q、R不可能在双曲线的同一支上

C、若PQR是等腰直角三角形，P、Q、R三点可能在同一支上

D、若PQR是正三角形，且$P(-1,-1)$在C_2上，Q、R在C_1上，则$S_{\Delta PQR}=6\sqrt{3}$

14、设A,B是抛物线$y=x^2$上的不同于原点的两点，O是坐标原点，若$OA\perp OB$，则（　　）

A、$|OA|\cdot|OB|\geq 2$　　B、$|OA|+|OB|\geq 2\sqrt{2}$

C、直线AB过抛物线$y=x^2$焦点　　D、O到直线AB的距离小于等于 1

15、已知集合$A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)|(x-a)^2+(y-b)^2=1\}$．若$A\cap B=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$，则（　　）

A、$0<a^2+b^2<2$　　B、$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$

C、$x_1+x_2=a$且$y_1+y_2=b$　　D、$a^2+b^2=2ax_1+2by_1$

16、设不等式组$\begin{cases}|x|+|y|\leq 2\\ y+2\leq k(x+1)\end{cases}$所表示的平面区域为$D$，其面积为$S$,则（　　）

A、若$S=4$，则k的值唯一　　B、若$S=\frac{1}{2}$，则k的值有 2 个

C、若D为三角形，则$0<k\leq\frac{2}{3}$　　D、若D为五边形，则$k>4$

17、设曲线L的方程为$y^4+(2x^2+2)y^2+(x^4-2x^2)=0$，则（　　）

A、L是轴对称图形　　B、L是中心对称图形

C、$L\subset\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$　　D、$L\subset\{(x,y)|-\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}\}$

18、设双曲线$C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=k(a>2,k>0)$，椭圆$C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$．若$C_2$的短轴长与$C_1$的实轴长的比值等于$C_2$的离心率，则$C_1$在$C_2$的一条准线上截得线段的长为（　）

A、$2\sqrt{2+k}$　　B、2　　C、$4\sqrt{4+k}$　　D、4

19、当实数m变化时，不在任何直线$2mx+\left(1-m^2\right)y-4m-4=0$上的所有点$\left(x,y\right)$形成的图形的面积为（　　）

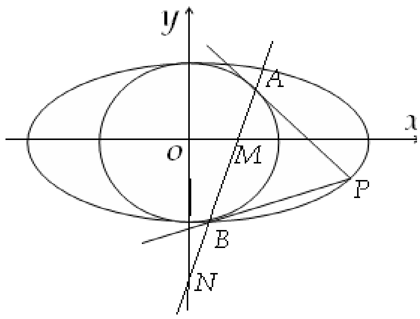
A、2　　　B、4　　　C、2π　　　D、4π

20、已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>b>0\right)$和圆$O$：$x^2+y^2=b^2$，过椭圆上一点$P$引圆$O$的两条切线，切点分别为$A,B$.

（Ⅰ）若圆O过椭圆的两个焦点，求椭圆的离心率e；

（Ⅱ） 若椭圆上存在点P，使得$\angle APB=90^\circ$，求椭圆离心率e的取值范围；

（Ⅲ）设直线AB与x轴、y轴分别交于点M，N，求证：$\frac{a^2}{|ON|^2}+\frac{b^2}{|OM|^2}$为定值 .



21、C_{70}分子是与C_{60}分子类似的球状多面体结构，它有70个顶点，每个顶点连接三条棱，各面是五边形或六边形，则C_{70}分子中五边形的个数为_______，六边形的个数为_______.

22、半径为R的球内部装有四个半径相同的小球，则小球半径r的最大值是（　）

A、$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}R$　　　B、$\frac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}R$　　　C、$\frac{1}{1+\sqrt{3}}R$　　　D、$\frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}R$

23、若四面体的一条棱长为x，其余棱长均为1，体积是$V(x)$，则$V(x)$在其定义域上为（　）

A、增函数但无最大值　　　　B、增函数且有最大值

C、不是增函数且无最大值　　D、不是增函数但有最大值

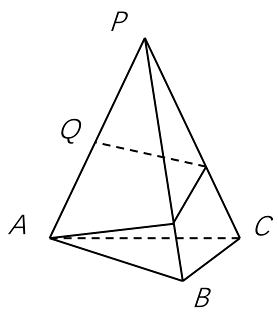
24、一圆锥正放，它的高为h，圆锥内水面高为$\frac{2}{3}h$，将圆锥倒放，倒置后水面高度为_______.

25、设扇形的圆心角为60°，面积为6π，将它围成一个圆锥，则此圆锥的表面积是（　）

A、$\frac{11\pi}{2}$　　B、7π　　C、$\frac{13\pi}{2}$　　D、8π

26、一正四棱锥的体积为$\frac{\sqrt{2}}{3}$，正四棱锥表面积的最小值等于_______.

27、如图，已知正三棱锥 P-ABC 的侧棱长为$\sqrt{3}+1$，底面边长为$\sqrt{2}$，Q是侧棱 PA 的中点，一条折线从 A 点出发，绕侧面一周到 Q 点，则这条折线长度的最小值为________



28、边长为 2 的正方形$ABCD$与正方形$ABEF$所在平面成60°的角，M,N分别是线段AC和BF上的点，且$AM=FN$，则线段MN长度的取值范围是（　）

A、$[\frac{1}{2},2]$　　B、$[1,2]$　　C、$[\sqrt{2},2]$　　D、$[\sqrt{3},2]$

第九讲：不等式、数列综合

一、知识要点

不等式与最值	不等式性质 比较大小 解不等式	重要不等式 自建不等式 证明不等式 最值探究 代数变形灵活性要求高
数列与递推	基本概念 等差及其性质 等比数列及其性质 通项与求和公式	重要恒等式 同构转化求通项 和式变换与求和方法 递推方法

二、例题分析

1、证明：对任意实数 $a>1,b>1$， 有 $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 8$.

2、设 ΔABC 的三内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，其周长为 1.

求证：$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\geq 3(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C})$.

3.给定正整数 n 和正常数 a，对于满足不等式 ${a_1}^2+{a_{n+1}}^2\leq a$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 和式 $\sum_{i=n+1}^{2n+1}a_i$ 的最大值为（　　）。

（A）$\frac{\sqrt{10a}}{2}(n+1)$　　（B）$\frac{\sqrt{10a}}{2}\cdot n$　　（C）$\frac{\sqrt{5a}}{2}(n+1)$　　（D）$\frac{\sqrt{5a}}{2}\cdot n$

4、设 n 是一个正整数，则函数 $x+\frac{1}{nx^n}$ 在正实半轴上的最小值是（　　）。

（A）$\frac{n-1}{n}$　　（B）$\frac{n+2}{n+1}$　　（C）$\frac{n+1}{n}$　　（D）$\frac{n}{n+1}$

5、设 $x_1,x_2,...,x_n\in R_+$，且 $x_1+x_2+...+x_n=1$，求证

$$\frac{x_1^2}{1+x_1}+\frac{x_2^2}{1+x_2}+...+\frac{x_n^2}{1+x_n}\geq\frac{1}{n+1}$$

6、已知实数 $x_i\in[-6,10]$，$\sum_{i=1}^{10}x_i=50$，$i=1、2、3、\cdots、10$，当 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2$ 取到最大值时，有多少个-6？

7、设 a_n 是 $(2-\sqrt{x})^n$ 的展开式中 x 项的系数（$n=2,3,4\ldots$），则极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^2}{a_2}+\frac{2^3}{a_3}+\cdots\frac{2^n}{a_n}\right)=$（　　）

（A）15　　（B）6　　（C）17　　（D）8

8、设 $(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$，其中 x_n,y_n 为整数，求 $n\to\infty$ 时，$\frac{x_n}{y_n}$ 的极限。

9、设数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_{n+3}\leq a_n+3,a_{n+2}\geq a_n+2$，则 $a_{2021}=$________

10、已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$a_{n+1}=-a_n-2b_n$，且$b_{n+1}=6a_n+6b_n$，又$a_1=2,b_1=4$。求：

（1）a_n,b_n；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$。

11、x,y,z为正实数，且$x+y+z=1$，则$\dfrac{xyz}{(4x+1)(9x+y)(4y+z)(9z+1)}$的最大值为（　　）

A、$\dfrac{1}{24^2}$　　B、$\dfrac{1}{32^2}$　　C、$\dfrac{1}{36^2}$　　D、前三个答案都不对

12、已知$x^2+y^2+z^2=1$，求$\sqrt{3}xy+yz$的最小值.