2021级概率论与数理统计B（A）卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题4分，共40分）

1. $\frac{13}{21}$；　**2.** 0.992；　**3.** $\frac{7}{10}$；　**4.** $\boldsymbol{a}=1,\boldsymbol{b}=-1$；　**5.** $\frac{1}{2}$；

6. 4；　**7.** $\frac{1}{2(\text{n-1})}$；　**8.** 34；　**9.** $\overline{X}-1$；　**10.** 1；

二、 计算题（22分）

11（10分）

解：设事件A表示顾客买下该包口罩，$B_i\left(i=0,1,2\right)$，分别表示每包口罩中有i个口罩不合格.

则 $P\left(B_0\right)=0.8,\quad P(B_1)=0.1,\quad P(B_2)=0.1$，

$P(A\mid B_0)=1,\quad P(A\mid B_1)=C_{19}^4\div C_{20}^4=0.8,\quad P(A\mid B_2)=C_{18}^4\div C_{20}^4=\frac{12}{19}$ 3分

（1）顾客买了一包口罩的概率$P(A)$

$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times0.8+0.1\times\frac{12}{19}=0.94$ 6分

（2）该包口罩全部合格的概率$P\left(B_0|A\right)$

$P(B_0|A)=\frac{P\left(B_0\right)P\left(A|B_0\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0.8}{0.94}=\frac{40}{47}\approx0.85$ 10分

12（12分）

解：（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，这样

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_1^2 a\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=a\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=a(\frac{5}{2}-2)=\frac{1}{2}a=1$，

所以$a=2$. 2分

（2）$P\left(1<X<\frac{3}{2}\right)=\int_1^{\frac{3}{2}}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}}=2(\frac{13}{6}-2)=\frac{1}{3}$，

X的取值落在区间$\left(1,\frac{3}{2}\right)$内的概率为$\frac{1}{3}$. 6分

（3）分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，

当$x<1$，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$，..................7分

当$1\le x<2$，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{x}2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=2\left(t+\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^x=2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$$，……9 分

当$x\ge 1$，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_{1}^{2}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_{2}^{x}0dt=1$$,…….11 分

所以$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 2\left(x+\frac{1}{x}-2\right), & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$。 ………12 分

三、计算题（共 28 分）

13（16 分）

解：由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx=1$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^x Axydy\right)dx=\frac{A}{8}\Rightarrow A=8$$,…………3 分

（1）$E(X)=\int_0^1\left(\int_0^x x\cdot 8xydy\right)dx=\frac{4}{5}$，$E(Y)=\int_0^1\left(\int_0^x y\cdot 8xydy\right)dx=\frac{8}{15}$，……7 分

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\int_0^1\left(\int_0^x x^2\cdot 8xydy\right)dx-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\int_0^1\left(\int_0^x y^2\cdot 8xydy\right)dx-(\frac{8}{15})^2=\frac{11}{225}.$$ ………10 分

（2）$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\int_0^1\left(\int_0^x xy\cdot 8xydy\right)dx-\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$,…….12 分

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{2\sqrt{66}}{33}.$$ ……………..14 分

（3）$D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)+4Cov(X,Y)=\frac{17}{75}$. ……….16 分

14（12 分）

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,b)dx=\int_0^1(b+1)x^{b+1}dx=\frac{b+1}{b+2}$. ………..3 分

令$\frac{b+1}{b+2}=\overline{X}\Rightarrow b=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，所以未知参数$b$的矩估计量$\hat{b}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$. …….6 分

（2）对于总体X的样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L(b)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,b)=\begin{cases}(b+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^b, & 0<x_i<1,(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$ ，…….8 分

当 $0<x_i<1,(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(b)>0$.

$\ln L(b)=n\ln(b+1)+b\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ，$\Rightarrow \dfrac{d\ln L(b)}{db}=\dfrac{n}{b+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ，…………..10 分

令 $\dfrac{d\ln L(b)}{db}=\dfrac{n}{b+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\Rightarrow b=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ ，…………11 分

所以未知参数 b 的最大似然估计量为 $\hat{b}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$. ………..12 分

四、综合题（共 10 分）

15（10 分）

解：（1）由于在 $-1<x<1$ 上，$f_X(x)\neq 0$，其他 $f_X(x)=0$.

既然 $Y=X^2+1$，所以在 $1<y<2$ 上，$f_Y(y)\neq 0$，其他 $f_Y(y)=0$.

所以当 $y\le 1$ 时，$F_Y(y)=0$，……………………1 分

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$，……………………..2 分

当 $1<y<2$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2+1\le y\}=P\{-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f_X(x)dx=\int_{-\sqrt{y-1}}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{\sqrt{y-1}}(1-x)dx=2\sqrt{y-1}-y+1.$$

……………5 分

于是得到 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ 2\sqrt{y-1}-y+1, & 1<y<2,,\\ 1, & \mathrm{y}\ge 2,\end{cases}$$

这样 Y 的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$. …………8 分

（2）由于 $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4}\right)\subset(1,2)$，

所以 $P\left\{\dfrac{5}{4}<Y\le\dfrac{7}{4}\right\}=F_Y\left(\dfrac{7}{4}\right)-F_Y\left(\dfrac{5}{4}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}$. ………10 分