# 2020 级概率论与数理统计 B（A）卷参考答案及评分标准

**一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）**

**1.** $\frac{1}{18}$**；** **2.** $\frac{4}{5}$**；** **3.** $\frac{7}{10}$**；** **4.** $1-e^{-1}$**；** **5.** 一定**；**

**6.** $\frac{5}{7}$**；** **7.** $\frac{4}{5}$**；** **8.** $\frac{2}{3}$**；** **9.** $4$**；** **10.** $1-\alpha$**；**

**二、 计算题（12 分）**

**11（12 分）解：**设 $A$ 表示“目标被击落”，$B_1,B_2,B_3$ 分别表示“甲、乙、丙击中目标”，$C_i$ 表示“有 $i$ 个人击中目标”（$i=1,2,3$），则由已知得：

$$P(B_1)=0.4,\quad P(B_2)=0.5,\quad P(B_3)=0.8$$

$$C_1=B_1\bar{B}_2\bar{B}_3 \cup \bar{B}_1B_2\bar{B}_3\cup\bar{B}_1\bar{B}_2B_3,$$

$$P(C_1)=P(B_1\bar{B}_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1B_2\bar{B}_3)+P(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3)=0.34$$ 3 分

$$C_2=B_1B_2\bar{B}_3\cup B_1\bar{B}_2B_3\cup\bar{B}_1B_2B_3$$

$$P(C_2)=P\left(B_1B_2\bar{B}_3\right)+P\left(B_1\bar{B}_2B_3\right)+P\left(\bar{B}_1B_2B_3\right)=0.44$$ 6 分

$$C_3=B_1B_2B_3$$

$$P(C_3)=P\left(B_1B_2B_3\right)=0.16$$ 9 分

因为 $P\left(A|C_1\right)=0.3,\quad P\left(A|C_2\right)=0.6$

由全概率公式得 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(C_i)P(A|C_i)=0.526$ 12 分

**三、计算题（共 24 分）**

**12（12 分）解：**（1）由 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$ 可以知道

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$， 2 分

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}$

$$=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}$$

$$=\int_2^3\frac{x^2}{9}dx+\int_1^y\frac{x^2}{9}dx=\frac{y^3+18}{27},$$ 4 分

当 $y \ge 2$ 时， $F_Y(y)=P\{Y \le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y<2\}+P\{Y=2\}$

$=P\{X \ge 2\}+P\{1<X<2\}+P\{X \le 1\}$

$=\int_2^3 \frac{x^2}{9}dx+\int_1^2 \frac{x^2}{9}dx+\int_0^1 \frac{x^2}{9}dx=1$ 6 分

所以 $Y$ 分布函数是 $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<1 \\ \frac{y^3+18}{27}, & 1 \le y<2 \\ 1, & y \ge 2 \end{cases}$。 8 分

（2） $P\{X \le Y\}=P\{X<Y\}+P\{X=Y\}=P\{X \le 1\}+P\{1<X<2\}$

$=\int_0^1 \frac{x^2}{9}dx+\int_1^2 \frac{x^2}{9}dx=\frac{8}{27}.$ 12 分

**13（12 分）解：**（1） 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$ 得到

$$\int_0^1 \int_0^{+\infty} ce^{-x}ydxdy=\frac{c}{2}=1 \Rightarrow c=2.$$ 2 分

（2） $X$ 的边缘概率密度函数为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=2\int_0^1 e^{-x}y\,dy=e^{-x}$. 当 $x \le 0$ 时，$f_X(x)=0$.

因此 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

6 分

$Y$ 的边缘概率密度函数为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

由于 $f_Y(y)=\int_0^{+\infty} 2e^{-x}ydx=2y, 0 \le y \le 1.$

因此 $f_Y(y)=\begin{cases} 2y, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

10 分

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 所以 $X$ 和 $Y$ 相互独立. 12 分

## 四、综合题（共 24 分）

**14（12 分）解：** 由于 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ 独立同分布，且都服从 $X \sim N(0,1)$，由

正态分布的可加性得:

$\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3 \sim N(0,3),\quad \boldsymbol{X}_4+\boldsymbol{X}_5 \sim N(0,2)$，　　3 分

即$\boldsymbol{Y}_1=\dfrac{\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1),\quad \boldsymbol{Y}_2=\dfrac{\boldsymbol{X}_4+\boldsymbol{X}_5}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，

由于$\boldsymbol{Y}_1$，$\boldsymbol{Y}_2$是独立的，故$Y_1^2+Y_2^2 \sim \chi^2(2)$，　　6 分

从而$\boldsymbol{Y}=a(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3)^2+b(\boldsymbol{X}_4+\boldsymbol{X}_5)^2=3a\boldsymbol{Y}_1^2+2b\boldsymbol{Y}_2^2 \sim \chi^2(n)$

9 分

所以$a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{1}{2},n=2$.　　12 分

**15（12 分）解：** （1）由于

$$f(x,\theta)=F'(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases},$$　　2 分

从而$E(\boldsymbol{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\theta\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\theta}}dx=\dfrac{\theta}{\theta-1}$

$\Rightarrow \theta=\dfrac{E(\boldsymbol{X})}{E(\boldsymbol{X})-1}$.

$\Rightarrow \boldsymbol{\theta}$ 的矩估计$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\dfrac{\overline{\boldsymbol{X}}}{\overline{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{1}}$　　6 分

（2）由于 $L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\dfrac{\theta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta+1}}$，

$\ln L=n\ln\theta-(\theta+1)\ln x_1\ln x_1\cdots\ln x_n$.　　9 分

令$\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta}=0\Rightarrow\dfrac{n}{\theta}-\ln x_1\ln x_1\cdots\ln x_n=0$

得到$\theta$的最大似然估计$\hat{\theta}=\dfrac{n}{\ln\boldsymbol{X}_1\ln\boldsymbol{X}_1\cdots\ln\boldsymbol{X}_n}$ .　　12 分