2019 级《高等数学下》试卷

一、填空题

1、$\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=$ ______________

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=3.$

2、曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 ______________

解：$2x+y-4=0$

3、设 $f(x,y)$ 连续，改变二次积分的积分次序：$\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy=$ ______________

解：$\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

4、若区域 $D: x^2+y^2\le 4,$ 则 $\iint\limits_D (1+x+y)dxdy=$ ________________

解: $\iint\limits_D (1+x+y)dxdy=4\pi.$

5、设 L 为连接点 $(1,0)$ 到点 $(0,1)$ 的直线段，则 $\int_L 2xds=$ ________________

解：$\int_L 2xds=\sqrt{2}.$

6、设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$ 按逆时针方向，则曲线积分 $\int_L x^2y^2dx=$ ______________

解: $\int_L x^2y^2dx=0.$

7、设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1,$ 则 $\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)dS=$ ______________

解：$\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)dS=\dfrac{8}{3}\pi.$

8、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(1-\cos\dfrac{1}{n}),$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$ __________；该级数的敛散性为__________.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{2},$ 级数发散。

二、计算题

9、求函数 $u=xy+zf(\dfrac{y}{x})$ 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}.$

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+zf'(\dfrac{y}{x})\cdot\dfrac{-y}{x^2}$；　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+zf'(\dfrac{y}{x})\cdot\dfrac{1}{x}$　　$\dfrac{\partial u}{\partial z}=f(\dfrac{y}{x})$

10、设$z^2y-xz^3-1=0$,求偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：令$F(x,y,z)=z^2y-xz^3-1$,

$F_x'=-z^3,F_y'=z^2,F_z'=2yz-3xz^2$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{z^3}{2yz-3xz^2}=\frac{z^2}{2y-3xz};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{z^2}{3xz^2-2yz}=\frac{z}{3xz-2y}.$$

11、求函数$z=4(x-y)-x^2-y^2$的极值.

解：令$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4-2x=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-4-2y=0\end{cases}\Rightarrow$驻点为$(2,-2)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2$$

$AC-B^2>0,A<0$,极大值$f(2,-2)=8$.

12、计算二重积分$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$,其中$D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$.

解：$I=\int_0^1 dx\int_0^1 e^x\cdot e^y dy=\int_0^1 e^x dx\cdot\int_0^1 e^y dy=(e-1)^2$

13、设二元函数$u(x,y)$,使$du(x,y)=(2x+y)dx+(x-2y)dy$,求$u(x,y)$.

解：$(2x+y)dx+(x-2y)dy$

$=2xdx+ydx+xdy-2ydy=dx^2+dxy-dy^2=d(x^2+xy-y^2)$

$u(x,y)=x^2+xy-y^2$.

14、计算曲线积分$\oint_L(y^2+e^x)dx+(2xy+x+\sin^2 y)dy$,其中$L$: $x^2+y^2=1$,取逆时针方向.

解：画图

由格林公式 $I=\iint\limits_{D}[(2y+1)-2y]d\sigma=\iint\limits_{D}d\sigma=\pi.$

15 利用高斯公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}2xdydz+ydzdx+zdxdy,$ 其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 的下侧.

解：画图

补平面 $\Sigma_1:z=1$（上侧）

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2+1+1)dv=4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1dz$$

$$=4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=4\times2\pi\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=2\pi;$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}2xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi,$

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\pi.$$

16、计算由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围立体 Ω 的体积.

解：画图

法一：$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=2\pi\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\pi}{2}.$

法二：$V=\iint\limits_{D_{xy}}[1-(x^2+y^2)]d\sigma,$ 其中 D_{xy} 是立体在 xoy 面上的投影，即 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$

从而 $V=\iint\limits_{D_{xy}}[1-(x^2+y^2)]d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho=2\pi\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\pi}{2}.$

17、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成关于 $x-2$ 的幂级数，并求 $f^{(n)}(2).$

解：令 $t=x-2,$ 则

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(t+2)^2+3(t+2)+2}=\frac{1}{t^2+7t+12}$$

$$=\frac{1}{(t+3)(t+4)}=\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t+4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{t}{3})^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{t}{4})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)t^n,$$

其中 t 满足 $\left|-\frac{t}{3}\right|<1$ 且 $\left|-\frac{t}{4}\right|<1$, 即 $-3<t<3.$

从而有 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n,\ -1<x<5.$

$f^{(n)}(2)=(-1)^n n!\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)$.因为

$$f(x)=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots+a_n(x-2)^n+a_{n+1}(x-2)^{n+1}+a_{n+2}(x-2)^{n+2}\cdots$$

所以 $f^{(n)}(x)=0+0+0+\cdots+a_n n!+b_{n+1}(x-2)+b_{n+2}(x-2)^2+\cdots$

$$f^{(n)}(2)=a_n n!=(-1)^n n!\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right).$$