2017 级《高等数学下》试卷

一、填空题

1、函数 $z=\ln(x^2+y^2-1)$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$ ______________

解：$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-4.$

2、曲面 $z=e^{yz}+x\cdot\sin(x+y)$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2},0,1+\dfrac{\pi}{2})$ 处的切平面方程为 ______________

解：$x+(1+\dfrac{\pi}{2})y-z+1=0.$

3、若函数 $z=2x^2+2y^2+3xy+ax+by+c$ 在点 $(-2,3)$ 处取得极小值 -3,

则 $a\cdot b\cdot c=$ ________

解：$a\cdot b\cdot c=30.$

4、设 $f(x,y)$ 连续，改变二次积分的积分次序：$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx=$ ______________

解：$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

5、设 $f(x,y)$ 连续，化积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$ 为极坐标下的二次积分，则

$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy=$ ________________

解：$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

6、计算对弧长的曲线积分 $\int_L (y-x)ds$, 其中 L 为连接点 $(-3,0)$ 到点 $(0,3)$ 的直线段，则

$\int_L (y-x)ds=$ _______________

解：$\int_L (y-x)ds=9\sqrt{2}.$

7、计算对坐标的曲线积分 $\oint_L xy^2dy-x^2ydx$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 按逆时针方向，则 $\oint_L xy^2dy-x^2ydx=$ ______________

解：$\oint_L xy^2dy-x^2ydx=\dfrac{\pi}{2}a^4.$

8、计算对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(3x+2y+2z-2)dS$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦

限中的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(3x+2y+2z-2)dS=$ ______________

解：$\iint\limits_{\Sigma}(3x+2y+2z-2)dS=\frac{\sqrt{3}}{6}.$

9、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，则 p 的取值范围是______________

解： $p>1$

二、计算题

10、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确定，其中 a,b,c 为常数， F 具有连续偏导数，且 $aF_u+bF_v\neq 0,$ 证明：$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$

解：令 $cx-az$ 为 1 号，$cy-bz$ 为 2 号，则 $F_x{}'=cF_1{}',F_y{}'=cF_2{}',F_z{}'=-aF_1{}'-bF_2{}',$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x{}'}{F_z{}'}=\frac{cF_1{}'}{aF_1{}'+bF_2{}'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y{}'}{F_z{}'}=\frac{cF_2{}'}{aF_1{}'+bF_2{}'},$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c(aF_1{}'+bF_2{}')}{aF_1{}'+bF_2{}'}=c.$$

11、已知空间上三点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),$ 在此空间上求一点 $M,$ 使其到点 A、B、C 的距离平方和为最小.

解：点设为 (x,y,z)

即求 $u=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$

$$+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3$$

的最小值点。

$$令\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-x_1)+2(x-x_2)+2(x-x_3)=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}=2(y-y_1)+2(y-y_2)+2(y-y_3)=0\\ \frac{\partial u}{\partial z}=2(z-z_1)+2(z-z_2)+2(z-z_3)=0\end{cases}$$

得唯一驻点 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3})$ 为所求。

12、计算 $I=\iint\limits_{D}[\cos(x-1)^2+e^{y^2}]dxdy$, 其中区域 D 是由 $x=0, y=x, y=1$ 所围成的闭区域.

解：画图

$$I=\iint\limits_{D}\cos(x-1)^2 d\sigma+\iint\limits_{D}e^{y^2}d\sigma=\int_0^1 dx\int_x^1\cos(x-1)^2 dy+\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1(1-x)\cos(x-1)^2 dx+\int_0^1 ye^{y^2}dy$$（对于左边的定积分，令 $u=1-x$）

$$=\int_0^1 u\cos u^2 du+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}dy^2=\frac{1}{2}\int_0^1\cos u^2 du^2+\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\sin u^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}(e-1)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 1+\frac{1}{2}(e-1)$$

13、验证 $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12e^y)dy$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，

并求 $u(x,y)$.

解：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 是全微分

$$(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12e^y)dy$$

$$=3x^2ydx+8xy^2dx+x^3dy+8x^2ydy+12e^ydy$$

$$=ydx^3+4y^2dx^2+x^3dy+4x^2dy^2+12de^y$$

$$=dx^3y+4dx^2y^2+12de^y$$

$$=d(x^3y+4x^2y^2+12e^y)$$

$$\therefore u(x,y)=x^3y+4x^2y^2+12e^y$$

14、计算 $\oiint\limits_{\Sigma}2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$, 其中 Σ 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体 Ω ($\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$) 的边界曲面的外侧.

解：画图

根据高斯公式

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2z+z-2z)dv=\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}r^3dr=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cdot 4$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}(\sin\varphi)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}.$$

15、将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成关于 $x-2$ 的幂级数.

解：令 $t=x-2, x=t+2$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{t+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{t}{2})^n,\quad |-\frac{t}{2}|<1 \text{即} -2<t<2$$

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}},\quad 0<x<4$$