一、填空题（每题 **4** 分，共 **40** 分）

1. 0; 2. 充分； 3. 1 ； 4. $2xf'(x^2)$； 5. $x=\dfrac{3}{4}$； 6. $(0,0)$；

7. $e^{x^2}+C$； 8. $2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$；9. $0<q<1$ ； 10. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ .

二、计算题（每题 **6** 分，共 **18** 分）

11．解：$\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[e^x(1+\dfrac{x}{e^x})\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=e\lim_{x\to0}\left[(1+\frac{x}{e^x})^{\frac{e^x}{x}}\right]^{\frac{1}{e^x}}$$

$$=e^2.$$

12．解：$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{1}$$

$$=1$$

13. 解： $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$

$$y''=\frac{e^y\cdot y'\left(1-xe^y\right)-e^y\left(-e^y-xe^yy'\right)}{\left(1-xe^y\right)^2}$$

$$=\frac{e^yy'+e^{2y}}{\left(1-xe^y\right)^2}=\frac{e^{2y}\left(2-xe^y\right)}{\left(1-xe^y\right)^3}$$

三、计算题（每题 **6** 分，共 **18** 分）

14．解：令$\sqrt{5-4x}=t$， $x=\dfrac{1}{4}\left(5-t^2\right)$， $dx=-\dfrac{1}{2}tdt$

当$x=-1$时，$t=3$；当$x=1$时，$t=1$

原式$=\displaystyle\int_3^1\frac{\frac{1}{4}\left(5-t^2\right)}{t}\left(-\frac{1}{2}t\right)dt=\frac{1}{8}\int_1^3\left(5-t^2\right)dt=\frac{1}{6}$

15. 解： 原式$=\displaystyle\int e^{-x}d\sin x=e^{-x}\sin x-\int\sin x\,de^{-x}$

$$=e^{-x}\sin x-\left(e^{-x}\cos x-\int\cos xde^{-x}\right)$$

$$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos xdx$$

$$\int e^{-x}\cos xdx=\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x-\cos x\right)+C$$

16. 解：$y=e^{-\int\cos xdx}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos xdx}dx+C\right)$

$$=e^{-\sin x}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}dx+C\right)=e^{-\sin x}\left(x+C\right)$$

**四、计算与应用题（每题 8 分，共 24 分）**

17. 解：对应的齐次方程的特征方程为$r^2-5r+6=0$ ，$r_1=2;r_2=3$，

对应的齐次方程的通解为$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$；

由于$\lambda=2$是特征方程的单根，设 $y^*=x\left(b_0x+b_1\right)e^{2x}$，代入原方程得：

$b_0=-\frac{1}{2}$，$b_1=-1$

所以 $y^*=x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$

原微分方程的通解：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)e^{2x}$

18. 解：对方程两边关于$x$求导得$e^y y'+y+xy'=0$

将$x=0$代入原方程得$y=1$，

再将$x=0,y=1$代入上式得$y'|_{x=0}=-\frac{1}{e}$

再关于$x$求导可得$e^y y'^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0$

所以$y''(0)=\frac{1}{e^2}$

19. 解：平面$x-2y+4z-7=0$的法向量：$n_1=\left(1,-2,4\right)$

平面$3x+5y-2z+1=0$的法向量：$n_2=\left(3,5,-2\right)$

所求平面的法向量$n=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=\left(-16,14,11\right)$

则所求平面方程为$16x-14y-11z-65=0$。