2018 级《高等数学下》试卷

一、填空题

1、设 $z=\sin\left(x+2^{y}\right)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______________

解：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2^{y}\ln 2\sin(x+2^{y}).$

2、曲面 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $(1,0,0)$ 处的切平面方程是 ______________

解：$2(x-1)-z=0$

3、$I=\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 $D$ 是：$x^2+y^2\le 1$. 由二重积分的几何意义 $I=$ ______

解：$\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma=\dfrac{2}{3}\pi.$

4、设积分区域 $\Omega$：$0\le z\le 1$，$x^2+y^2\le 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(e^{z}xy+3)dv=$ __________________

解：$\iiint\limits_{\Omega}(e^{z}xy+3)dv=3\pi.$

5、若 $L$ 的方程是 $y=1\ (0\le x\le 2)$，则 $\int_{L}yds=$ ________________

解：$\int_{L}yds=2.$

6、若方程 $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^{\lambda}y+12ye^{y})dy=0$ 是全微分方程，则 $\lambda=$ _______

解：$\lambda=2$

7、$\Sigma$ 为平面 $x+y+z=2$ 在第一卦限中的部分, 则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=$ _______

解：$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=4\sqrt{3}.$

8、若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p}}$ 绝对收敛，则 $p$ 的取值范围是______________

解：$p>1$

二、计算题

9、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^{x}-ye^{y}=ze^{z}$ 所确定，求 $dz$.

解：令 $F(x,y,z)=xe^{x}-ye^{y}-ze^{z}$,

$F_x'=e^{x}+xe^{x}=(1+x)e^{x},\ F_y'=-(1+y)e^{y},F_z'=-(1+z)e^{z},$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x{}'}{F_z{}'}=\frac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y{}'}{F_z{}'}=-\frac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z},$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z}dx-\frac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z}dy.$$

10、求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值.

解：令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-8x+2y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x-2y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 驻点为 $(0,0),\ (2,2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-8,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$$

$(0,0):A=-8,B=2,C=-2$

$AC-B^2>0$，$A<0$ 极大 $f(0,0)=0$

$(2,2):A=4,B=2,C=-2$

$AC-B^2<0,$ 不是极值。

11、计算 $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 $D$ 是由 $x^2+y^2=Ry$ 所围成的闭区域.

解：画图

$$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R\sin\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R\sin\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\,d(R^2-\rho^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{2}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\sin\theta}d\theta=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}(R^3|\cos\theta|^3-R^3)d\theta$$

$$=-\frac{R^3}{3}\left(\int_0^{\pi}|\cos\theta|^3d\theta-\pi\right)$$

而 $\int_0^{\pi}|\cos\theta|^3d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3\theta d\theta=\frac{2}{3}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$

$$=\frac{2}{3}-\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{3}-(0-1)+\frac{1}{3}(0-1)=\frac{4}{3}$$

$$I=-\frac{1}{3}R^3\left(\frac{4}{3}-\pi\right)=\frac{\pi}{3}R^3-\frac{4}{9}R^3$$

12、计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} zdv$,其中$\Omega$由不等式$x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$，$x^2+y^2\le z^2$所确定.

解：画图

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cdot 16a^4\cos^4\varphi d\varphi$$

$$=-4a^4\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi d\cos\varphi=-8\pi a^4\cdot\frac{1}{6}\cos^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{4}{3}\pi a^4(\frac{1}{8}-1)=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

13、在一切面积等于$A$的直角三角形中，求斜边最短的直角三角形.

解：设所求直角三角形的长和宽分别为$x,y$

即求$x^2+y^2$在条件$xy=2A$下的最小值

令$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(xy-2A)$

$$\begin{cases}F_x'=2x+\lambda y=0\\ F_y'=2y+\lambda x=0\\ F_\lambda'=xy-2A=0\end{cases}\Rightarrow \text{唯一驻点}(\sqrt{2A},\sqrt{2A})\text{为所求}$$

当长和宽均为$\sqrt{2A}$时，斜边最短。

14、计算曲线积分$\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=4$，$L$的方向为逆时针方向.

解：画图

$$\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}\oint_L ydx-xdy=\frac{1}{4}\iint\limits_D(-1-1)d\sigma$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4=-2\pi.$$

15、计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+z^2dxdy$，其中 $f\left(u\right)$具有一阶连续导数，$\Sigma$为柱面$\left(x-a\right)^2+\left(y-a\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$及平面$z=0,z=1\left(a>0\right)$所围成立体的表面外侧.

解：画图

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{x}f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y}+2z\right]dv=2\iiint\limits_{\Omega}zdv$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_0^1zdz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi\times(\frac{a}{2})^2=\frac{\pi}{4}a^2.$$

16、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$的和函数，并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$的和.

解：因为$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=xe^{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=(xe^{x^2})'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

令$x=1,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=e+2e=3e.$