Нахождение обратной матрицы блочным методом Жордана с выбором главного элемента по строке

Смирнов Георгий

310 группа

Дана матрица $A^{n\times n}$. Требуется найти обратную к ней матрицу A^{-1}, используя блочный метод Жордана с выбором главного элемента по строке. Пусть $n = m\cdot l + s$. Тогда матрицу A можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \dots & A_{1l}^{m\times m} & A_{1,\ l+1}^{m\times s} \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \dots & A_{2l}^{m\times m} & A_{2,\ l+1}^{m\times s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{l1}^{m\times m} & A_{l2}^{m\times m} & \dots & A_{ll}^{m\times m} & A_{l,l+1}^{m\times s} \\ A_{l+1,\ 1}^{s\times m} & A_{l+1,\ 2}^{s\times m} & \dots & A_{l+1,\ l}^{s\times m} & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{pmatrix}$$

Обратную матрицу находим, ипользуя присоединённую матрицу $B = E^{n\times n}$, так же разделённую на блоки.

1. Метод Жордана. Все шаги метода Жордана будут описаны для произвольного $k = 1\dots l$. Шаги для $k = l+1$ будут описаны отдельно. Начинаем с $k = 1$:

1. В k-ой строке матрицы A считаем обратные матрицы для тех блоков $A_{kj}^{m\times m}$ $(j = k\dots l)$, для которых это возможно. Если нет обратимых блоков, метод не применим для заданного m. Иначе выберем в качестве главного элемента $A_{kk}^{m\times m}$ такой блок $A_{kj}^{m\times m}$, что норма $\|(A_{kj}^{m\times m})^{-1}\|$ минимальна[1]. Для этого меняем k-й и j-й столбцы матрицы A (столбцы матрицы B на данном этапе не меняем).

2. С помощью обычного метода Жордана находим $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$.

3. Для $j = k+1\dots l$ умножаем блоки $A_{kj}^{m\times m}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$, а для $j = l+1$ умножаем блок $A_{k,\ l+1}^{m\times s}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$:

$$\begin{aligned} &A_{kj}^{m\times m} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times A_{kj}^{m\times m} \\ &A_{k,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times A_{k,\ l+1}^{m\times s} \end{aligned}$$

4. Для $j = 1\dots l$ умножаем блоки $B_{kj}^{m\times m}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$, а для $j = l+1$ умножаем блок $B_{k,\ l+1}^{m\times s}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$:

$$\begin{aligned} &B_{kj}^{m\times m} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times B_{kj}^{m\times m} \\ &B_{k,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times B_{k,\ l+1}^{m\times s} \end{aligned}$$

5. Для $i = 1\dots k-1, k+1,\dots l+1$ в матрицах A и B из i-той строки вычитаем k-ую, умноженную на $A_{ik}^{m\times m}$:

$$\begin{array}{lll} i = 1\dots k-1,\ k+1,\dots,l, & j = k+1\dots l & A_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (A_{ij}^{m\times m} - A_{ik}^{m\times m}\times A_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1 & A_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{ik}^{m\times m}\times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \\ i = l+1, & j = k\dots l & A_{l+1,\ j}^{s\times m} \longrightarrow (A_{l+1,\ j}^{s\times m} - A_{l+1,\ k}^{s\times m}\times A_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1 & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} - A_{l+1,\ k}^{s\times m}\times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

[1] В качестве нормы матрицы A принимаем $\|A^{m\times m}\| := \max\limits_{i=1,\dots,m}\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ij}|$

$$\begin{array}{lll}
i = 1\dots k-1,\ k+1,\dots l, & j = 1\dots l & B^{m\times m}_{ij} \longrightarrow (B^{m\times m}_{ij} - A^{m\times m}_{ik} \times B^{m\times m}_{kj}) \\
 & j = l+1 & B^{m\times s}_{i,\ l+1} \longrightarrow (B^{m\times s}_{i,\ l+1} - A^{m\times m}_{ik} \times B^{m\times s}_{k,\ l+1}) \\
i = l+1, & j = 1\dots l & B^{s\times m}_{l+1,\ j} \longrightarrow (B^{s\times m}_{l+1,\ j} - A^{s\times m}_{l+1,\ k} \times B^{m\times m}_{kj}) \\
 & j = l+1 & B^{s\times s}_{l+1,\ l+1} \longrightarrow (B^{s\times s}_{l+1,\ l+1} - A^{s\times m}_{l+1,\ k} \times B^{m\times s}_{k,\ l+1})
\end{array}$$

6. Если $k \neq l$ увеличиваем k на 1 и переходим к 1-ому шагу. Иначе переходим на 6-ой шаг.

7. С помощью обычного метода Жордана находим $(A^{s\times s}_{l+1,\ l+1})^{-1}$. Если блок необратим, то метод не применим для заданного m.

8. Для $j = 1\dots l$ умножаем блоки $B^{s\times m}_{l+1,\ j}$ слева на $(A^{s\times s}_{l+1,\ l+1})^{-1}$, для $j = l+1$ умножаем блок $B^{s\times s}_{l+1,\ l+1}$ слева на $(A^{s\times s}_{l+1,\ l+1})^{-1}$:

$$\begin{array}{l}
B^{s\times m}_{l+1,j} \longrightarrow (A^{s\times s}_{l+1,\ l+1})^{-1} \times B^{s\times m}_{l+1,\ j} \\
B^{s\times s}_{l+1,\ l+1} \longrightarrow (A^{s\times s}_{l+1,\ l+1})^{-1} \times B^{s\times s}_{l+1,\ l+1}
\end{array}$$

9. Для $i = 1\dots l$ в матрице B из i-той строки вычитаем $(l+1)$-ую, умноженную на $A^{m\times s}_{i,\ l+1}$:

$$\begin{array}{lll}
i = 1\dots l, & j = 1\dots l & B^{m\times m}_{ij} \longrightarrow (B^{m\times m}_{ij} - A^{m\times s}_{i,\ l+1} \times B^{s\times m}_{l+1,\ j}) \\
 & j = l+1 & B^{m\times s}_{i,\ l+1} \longrightarrow (B^{m\times s}_{i,\ l+1} - A^{m\times s}_{i,\ l+1} \times B^{s\times s}_{l+1,\ l+1})
\end{array}$$

В результате вышепредставленных шагов получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc}
E^{m\times m}_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}^{m\times m}_{11} & \tilde{B}^{m\times m}_{12} & \dots & \tilde{B}^{m\times m}_{1l} & \tilde{B}^{m\times s}_{1,\ l+1} \\
0 & E^{m\times m}_{22} & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}^{m\times m}_{21} & \tilde{B}^{m\times m}_{22} & \dots & \tilde{B}^{m\times m}_{2l} & \tilde{B}^{m\times s}_{2,\ l+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & E^{m\times m}_{ll} & 0 & \tilde{B}^{m\times m}_{l1} & \tilde{B}^{m\times m}_{l2} & \dots & \tilde{B}^{m\times m}_{ll} & \tilde{B}^{m\times s}_{l,\ l+1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & E^{s\times s}_{l+1,\ l+1} & \tilde{B}^{s\times m}_{l+1,\ 1} & \tilde{B}^{s\times m}_{l+1,\ 2} & \dots & \tilde{B}^{s\times m}_{l+1,\ l} & \tilde{B}^{s\times s}_{l+1,\ l+1}
\end{array}\right)$$

Если бы мы искали матрицу, обратную к матрице A, методом Жордана с выбором главного элемента по столбцу, переставляя только строки матрицы A, в правой части мы получили бы обратную матрицу. Однако в методе Жордана с выбором главного элемента по строке в матрице A мы переставляем не строки, а столбцы. Пусть $U_1, U_2, \dots, U_l$ - элементарные матрицы, соответствующие перестановкам столбцов. Тогда перестановки столбцов меняют матрицу следующим образом:

$A \longrightarrow AU_1 \dots U_l$

Так как $AU_1 \dots U_l = E$, то $(AU_1 \dots U_l)^{-1} = U_l^{-1} \dots U_1^{-1} A^{-1} = E$. Откуда обратная матрица равна $A^{-1} = U_1 \dots U_l$. Следовательно, чтобы получить ответ, необходимо поменять у матрицы $\tilde{B}$ строки так, как у матрицы A менялись столбцы:

$A^{-1} = U_1 \dots U_l \tilde{B}$.

2. Функции getBlock и putBlock.

```
void getBlock(const double *matrix, double *block, int start, int rows, int columns, int n)
{
  for(int i=0; i<rows; i++)
  {
    for(int j=0; j<columns; j++)
    {
      block[j+columns*i]=matrix[start+j+n*i];
    }
  }
}
void putBlock(double *matrix, const double *block, int start, int rows, int columns, int n)
{
  for(int i=0; i<rows; i++)
  {
    for(int j=0; j<columns; j++)
    {
      matrix[start+j+n*i]=block[j+columns*i];
    }
  }
}
```

3. Оценка числа операций.

1. Для нахождения обратной $m\times m$ матрицы обычным методом Жордана требуется порядка $3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}$ операций.

2. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$: $m \cdot m \cdot (m + m - 1) = 2m^3 - m^2$.

3. Количество операций для умножения двух матриц $m \times s$ и $s \times m$: $m \cdot m \cdot (s + s - 1) = 2m^2 s - m^2$.

4. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$ и $m \times s$: $m \cdot s \cdot (m + m - 1) = 2m^2 s - ms$.

5. Количество операций для всех обращений в методе Жордана порядка: $(\sum\limits_{i=0}^{l-1}(3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot (l - i)) + (3s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}) = (3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot \frac{(l^2+l)}{2} + (3s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2})$

6. Количество операций при реализации умножения матриц в пунктах 3, 4 и 8: $(\sum\limits_{i=1}^{l}(l + l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + (l+l) \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2 = (\sum\limits_{i=1}^{l}(2l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + 2l \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2$

7. Количество операций при реализации пунктов 5 и 9: $(\sum\limits_{i=1}^{l}((l - 1) \cdot (l + l - i) \cdot (2m^3 - m^2) + (l - 1) \cdot (l + l - i) \cdot m \cdot m + (l - 1) \cdot (2sm^2 - sm) \cdot 2 + (l - 1) \cdot 2sm) + (l + l - i) \cdot (2sm^2 - ms) + (l + l - i) \cdot ms + 2 \cdot (2ms^2 - s^2) + 2 \cdot s^2) + l^2 \cdot (2m^2 s - m^2) + l^2 \cdot m^2 = (\sum\limits_{i=1}^{l}(l - 1) \cdot ((2l - i) \cdot 2m^3 + 4sm^2) + 2(2l - i) \cdot sm^2 + 4ms^2) + 2sl^2m^2 + 2lms^2$

8. Суммируем результаты, полученные в пунктах 5, 6, 7: $(3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot \frac{(l^2+l)}{2} + (3s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}) + (\sum\limits_{i=1}^{l}(2l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + 2l \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2 + (\sum\limits_{i=1}^{l}(l - 1) \cdot ((2l - i) \cdot 2m^3 + 4sm^2) + 2(2l - i) \cdot sm^2 + 4ms^2) + 2sl^2m^2 + 2lms^2 = m^3 \cdot (0.5l^2 + 1.5l + 3l^3) + m^2 \cdot (\frac{l-7l^2}{4} + 5ls + 6sl^3 - 3sl^2) + m \cdot (-0.25l^2 - 0.25l - 3ls + 8ls^2) + 5s^3 - 1.5s^2 - 0.5s$

9. Для $m = 1$: $3n^3 + O(n^2)$.

10. Для $m = n$: $5n^3 + O(n^2)$

ваплаполварпаопвр