Нахождение обратной матрицы методом Жордана с выбором главного элемента по строке

Смирнов Георгий

310 группа

1. Блочный метод Жордана.

Дана матрица $A^{n\times n}$. Требуется найти обратную к ней матрицу A^{-1}, используя блочный метод Жордана с выбором главного элемента по строке. Пусть $n = m\cdot l + s$. Тогда матрицу A можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \dots & A_{1l}^{m\times m} & A_{1,\ l+1}^{m\times s} \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \dots & A_{2l}^{m\times m} & A_{2,\ l+1}^{m\times s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{l1}^{m\times m} & A_{l2}^{m\times m} & \dots & A_{ll}^{m\times m} & A_{l,l+1}^{m\times s} \\ A_{l+1,\ 1}^{s\times m} & A_{l+1,\ 2}^{s\times m} & \dots & A_{l+1,\ l}^{s\times m} & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{pmatrix}$$

Обратную матрицу находим, используя присоединённую матрицу $B = E^{n\times n}$, так же разделённую на блоки.

1.1 Шаги блочного метода Жордана.

Все шаги метода Жордана будут описаны для произвольного $k =\ 1\dots l$. Шаги для $k = l+1$ будут описаны отдельно. Начинаем с $k = 1$:

1. В k-ой строке матрицы A считаем обратные матрицы для тех блоков $A_{kj}^{m\times m}$ $(j = k\dots l)$, для которых это возможно. Если нет обратимых блоков, метод не применим для заданного m. Иначе выберем в качестве главного элемента $A_{kk}^{m\times m}$ такой блок $A_{kj}^{m\times m}$, что норма $\|(A_{kj}^{m\times m})^{-1}\|$ минимальна[1]. Для этого меняем k-й и j-й столбцы матрицы A (столбцы матрицы B на данном этапе не меняем).

2. С помощью обычного метода Жордана находим $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$.

3. Для $j =\ k+1\dots l$ умножаем блоки $A_{kj}^{m\times m}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$, а для $j = l+1$ умножаем блок $A_{k,\ l+1}^{m\times s}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$:

$$\begin{aligned} A_{kj}^{m\times m} &\longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times A_{kj}^{m\times m} \\ A_{k,\ l+1}^{m\times s} &\longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times A_{k,\ l+1}^{m\times s} \end{aligned}$$

4. Для $j =\ 1\dots l$ умножаем блоки $B_{kj}^{m\times m}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$, а для $j = l+1$ умножаем блок $B_{k,\ l+1}^{m\times s}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$:

$$\begin{aligned} B_{kj}^{m\times m} &\longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times B_{kj}^{m\times m} \\ B_{k,\ l+1}^{m\times s} &\longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times B_{k,\ l+1}^{m\times s} \end{aligned}$$

---

[1] В качестве нормы матрицы A принимаем $\|A^{m\times m}\| := \max\limits_{i=1,\dots,m}\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ij}|$

5. Для $i = 1 \dots k-1, k+1, \dots l+1$ в матрицах A и B из i-той строки вычитаем k-ую, умноженную на $A_{ik}^{m\times m}$:

$$\begin{array}{lll} i = 1\dots k-1,\ k+1,\dots l, & j = k+1\dots l & A_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (A_{ij}^{m\times m} - A_{ik}^{m\times m} \times A_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1 & A_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{ik}^{m\times m} \times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \\ i = l+1, & j = k\dots l & A_{l+1,\ j}^{s\times m} \longrightarrow (A_{l+1,\ j}^{s\times m} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times A_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1 & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} i = 1\dots k-1,\ k+1,\dots l, & j = 1\dots l & B_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (B_{ij}^{m\times m} - A_{ik}^{m\times m} \times B_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1 & B_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (B_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{ik}^{m\times m} \times B_{k,\ l+1}^{m\times s}) \\ i = l+1, & j = 1\dots l & B_{l+1,\ j}^{s\times m} \longrightarrow (B_{l+1,\ j}^{s\times m} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times B_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1 & B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times B_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

6. Если $k \neq l$ увеличиваем k на 1 и переходим к 1-ому шагу. Иначе переходим на 6-ой шаг.

7. С помощью обычного метода Жордана находим $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$. Если блок необратим, то метод не применим для заданного m.

8. Для $j = 1\dots l$ умножаем блоки $B_{l+1,\ j}^{s\times m}$ слева на $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$, для $j = l+1$ умножаем блок $B_{l+1,\ l+1}^{s\times s}$ слева на $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$:

$$\begin{array}{l} B_{l+1,j}^{s\times m} \ \longrightarrow \ (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1} \times B_{l+1,\ j}^{s\times m} \\ B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \ \longrightarrow \ (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1} \times B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{array}$$

9. Для $i = 1\dots l$ в матрице B из i-той строки вычитаем $(l+1)$-ую, умноженную на $A_{i,\ l+1}^{m\times s}$:

$$\begin{array}{lll} i = 1\dots l, & j = 1\dots l & B_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (B_{ij}^{m\times m} - A_{i,\ l+1}^{m\times s} \times B_{l+1,\ j}^{s\times m}) \\ & j = l+1 & B_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (B_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{i,\ l+1}^{m\times s} \times B_{l+1,\ l+1}^{s\times s}) \end{array}$$

В результате вышепредставленных шагов получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} E_{11}^{m\times m} & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}_{11}^{m\times m} & \tilde{B}_{12}^{m\times m} & \dots & \tilde{B}_{1l}^{m\times m} & \tilde{B}_{1,\ l+1}^{m\times s} \\ 0 & E_{22}^{m\times m} & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}_{21}^{m\times m} & \tilde{B}_{22}^{m\times m} & \dots & \tilde{B}_{2l}^{m\times m} & \tilde{B}_{2,\ l+1}^{m\times s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E_{ll}^{m\times m} & 0 & \tilde{B}_{l1}^{m\times m} & \tilde{B}_{l2}^{m\times m} & \dots & \tilde{B}_{ll}^{m\times m} & \tilde{B}_{l,\ l+1}^{m\times s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{l+1,\ l+1}^{s\times s} & \tilde{B}_{l+1,\ 1}^{s\times m} & \tilde{B}_{l+1,\ 2}^{s\times m} & \dots & \tilde{B}_{l+1,\ l}^{s\times m} & \tilde{B}_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{array}\right)$$

Если бы мы искали матрицу, обратную к матрице A, методом Жордана с выбором главного элемента по столбцу, переставляя только строки матрицы A, в правой части мы получили бы обратную матрицу. Однако в методе Жордана с выбором главного элемента по строке в матрице A мы переставляем не строки, а столбцы. Пусть $U_1, U_2, \dots, U_l$ - элементарные матрицы, соответствующие перестановкам столбцов. Тогда перестановки столбцов меняют матрицу следующим образом:

$A \longrightarrow AU_1 \dots U_l$

Так как $AU_1 \dots U_l = E$, то $(AU_1 \dots U_l)^{-1} = U_l^{-1} \dots U_1^{-1} A^{-1} = E$. Откуда обратная матрица равна $A^{-1} = U_1 \dots U_l$. Следовательно, чтобы получить ответ, необходимо поменять у матрицы $\tilde{B}$ строки так, как у матрицы A менялись столбцы:

$A^{-1} = U_1 \dots U_l \tilde{B}.$

1.2 Функции getBlock и putBlock.

```
void getBlock(const double* matrix, double* bl, int g, int h, int n, int m)
{
  int k = (n/m) ;
  if(g == k)
  {
    if(h == k)
    {
      memcpy(bl, matrix + (g * n * m + h * (n % m) * m), sizeof(double) * (n % m) * (n % m));
    }
    else
    {
      memcpy(bl, matrix + (g * n * m + h * (n % m) * m), sizeof(double) * (n % m) * m);
    }
  }
  else
  {
    if(h == k)
    {
      memcpy(bl, matrix + (g * n * m + h * m * m), sizeof(double) * (n % m) * m);
    }
    else
    {
      memcpy(bl, matrix + (g * n * m + h * m * m), sizeof(double) * m * m);
    }
  }
}
void putBlock(double* matrix, const double* bl, int g, int h, int n, int m)
{
  int k = (n/m);
  if(g == k)
  {
    if(h == k)
    {
      memcpy(matrix + (g * n * m + h * (n % m) * m), bl,  sizeof(double) * (n % m) * (n % m));
    }
    else
    {
      memcpy(matrix + (g * n * m + h * (n % m) * m), bl,  sizeof(double) * (n % m) * m);
    }
  }
  else
  {
    if(h == k)
    {
      memcpy(matrix + (g * n * m + h * m * m), bl, sizeof(double) * (n % m) * m);
    }
    else
    {
      memcpy(matrix + (g * n * m + h * m * m), bl,  sizeof(double) * m * m);
    }
  }
}
```

1.3 Оценка числа операций.

1. Для нахождения обратной $m\times m$ матрицы обычным методом Жордана требуется порядка $3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}$ операций.

2. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$: $m \cdot m \cdot (m + m - 1) = 2m^3 - m^2$.

3. Количество операций для умножения двух матриц $m \times s$ и $s \times m$: $m \cdot m \cdot (s + s - 1) = 2m^2 s - m^2$.

4. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$ и $m \times s$: $m \cdot s \cdot (m + m - 1) = 2m^2 s - ms$.

5. Количество операций для всех обращений в методе Жордана порядка: $(\sum\limits_{i=0}^{l-1}(3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot (l - i)) + (3s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}) = (3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot \frac{(l^2 + l)}{2} + (3s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2})$

6. Количество операций при реализации умножения матриц в пунктах 3, 4 и 8: $(\sum\limits_{i=1}^{l}(l + l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + (l+l) \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2 = (\sum\limits_{i=1}^{l}(2l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + 2l \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2$

7. Количество операций при реализации пунктов 5 и 9: $(\sum\limits_{i=1}^{l}((l - 1) \cdot (l + l - i) \cdot (2m^3 - m^2) + (l - 1) \cdot (l + l - i) \cdot m \cdot m + (l - 1) \cdot (2sm^2 - sm) \cdot 2 + (l - 1) \cdot 2sm) + (l + l - i) \cdot (2sm^2 - ms) + (l + l - i) \cdot ms + 2 \cdot (2ms^2 - s^2) + 2 \cdot s^2) + l^2 \cdot (2m^2 s - m^2) + l^2 \cdot m^2 = (\sum\limits_{i=1}^{l}(l - 1) \cdot ((2l - i) \cdot 2m^3 + 4sm^2) + 2(2l - i) \cdot sm^2 + 4ms^2) + 2sl^2 m^2 + 2lms^2$

8. Суммируем результаты, полученные в пунктах 5, 6, 7: $(3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot \frac{(l^2 + l)}{2} + (3s^3 - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}) + (\sum\limits_{i=1}^{l}(2l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + 2l \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2 + (\sum\limits_{i=1}^{l}(l - 1) \cdot ((2l - i) \cdot 2m^3 + 4sm^2) + 2(2l - i) \cdot sm^2 + 4ms^2) + 2sl^2 m^2 + 2lms^2 = m^3 \cdot (0.5l^2 + 1.5l + 3l^3) + m^2 \cdot (\frac{l-7l^2}{4} + 5ls + 6sl^3 - 3sl^2) + m \cdot (-0.25l^2 - 0.25l - 3ls + 8ls^2) + 5s^3 - 1.5s^2 - 0.5s$

9. Для $m = 1$: $3n^3 + O(n^2)$.

10. Для $m = n$: $5n^3 + O(n^2)$

2. Блочный р - поточный метод Жордана.

Дана матрица $A^{n\times n}$. Требуется найти обратную к ней матрицу A^{-1}, используя блочный р - поточный метод Жордана с выбором главного элемента по строке. Пусть $n = m \cdot l + s$. Тогда матрицу A можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \dots & A_{1l}^{m\times m} & A_{1,\ l+1}^{m\times s} \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \dots & A_{2l}^{m\times m} & A_{2,\ l+1}^{m\times s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{l1}^{m\times m} & A_{l2}^{m\times m} & \dots & A_{ll}^{m\times m} & A_{l,l+1}^{m\times s} \\ A_{l+1,\ 1}^{s\times m} & A_{l+1,\ 2}^{s\times m} & \dots & A_{l+1,\ l}^{s\times m} & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{pmatrix}$$

Для нахождения обратной матрицы используем присоединённую матрицу $B = E^{n\times n}$, разделённую на блоки аналогичным образом.

2.1 Разделение на потоки.

Теперь разделим строки матриц A и E между p потоками. 1-й поток - родительский. Далее, потоку с номером q ($q \ \le\ p$) будут соответствовать строки с номерами $q \ +\ p\cdot t$ ($t \in \mathbb{N},\ q \ +\ p\cdot t \le (l\ +\ 1)$).

2.2 Шаги блочного р - поточного метода Жордана.

Все шаги метода Жордана будут описаны для произвольного $k = \ 1\dots l$. Шаги для $k = l+1$ будут описаны отдельно. Начинаем с $k = 1$:

1. В k-ой строке матрицы A хотим посчитать обратные для тех блоков $A_{kj}^{m\times m}$ ($j = k\dots l$), для которых это возможно. Для этого распределим блоки $A_{kj}^{m\times m}$ ($j = k\dots l$) между потоками таким образом, как в начале распределили строки (в силу того, что матрица квадратная и количество блоков в строке равно количеству блоков в столбце, нумерация столбцов согласно их потокам соответствует аналогичной нумерации строк). После этого, в каждом потоке найдем обратные матрицы (обычным методом Жордана) для тех блоков, для которых это возможно. Среди них в каждом потоке выберем блок с минимальной нормой[2]. Если ни в одном из потоков не удалось найти обратимые блоки, метод не применим для заданного m. Иначе, среди уже найденных минимальных выберем в качестве главного элемента $A_{kk}^{m\times m}$ такой блок $A_{kj}^{m\times m}$, что норма $\|(A_{kj}^{m\times m})^{-1}\|$ будет минимальна для всех (**первая** точка синхронизации для текущего k). Далее, в каждом из потоков меняем k-й и j-й столбцы матрицы A (столбцы матрицы B на данном этапе не меняем).

2. С помощью обычного метода Жордана обращаем $A_{kk}^{m\times m}$.

3. В потоке, который соответствует k-ой строке, для $j = \ k+1\dots l$ умножаем блоки $A_{kj}^{m\times m}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$, а для $j = l+1$ умножаем блок $A_{k,\ l+1}^{m\times s}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$:

   $$A_{kj}^{m\times m} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1} \times A_{kj}^{m\times m}$$
   $$A_{k,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1} \times A_{k,\ l+1}^{m\times s}$$

   В этом же потоке, для $j = \ 1\dots l$ умножаем блоки $B_{kj}^{m\times m}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$, а для $j = l+1$ умножаем блок $B_{k,\ l+1}^{m\times s}$ слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$:

   $$B_{kj}^{m\times m} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1} \times B_{kj}^{m\times m}$$
   $$B_{k,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1} \times B_{k,\ l+1}^{m\times s}$$

[2] В качестве нормы матрицы A принимаем $\|A^{m\times m}\| := \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$

На этом шаге **вторая** точка синхронизации для текущего k.

4. ***Замечание.*** *Этот шаг выполняется всеми потоками параллельно. Шаг описан для q-го потока.* Для $i = q + p \cdot t$ ($t \in \mathbb{N}$, $q + p \cdot t < (l + 1)$, $q \neq k$) в матрицах A и B из i-той строки вычитаем k-ую, умноженную на $A_{ik}^{m\times m}$:

$$\begin{array}{ll} j = k+1\dots l: & A_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (A_{ij}^{m\times m} - A_{ik}^{m\times m} \times A_{kj}^{m\times m}) \\ j = l+1: & A_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{ik}^{m\times m} \times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} j = 1\dots l: & B_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (B_{ij}^{m\times m} - A_{ik}^{m\times m} \times B_{kj}^{m\times m}) \\ j = l+1: & B_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (B_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{ik}^{m\times m} \times B_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

   Если $(l + 1)$-я строка попала в поток с номером q:

$$\begin{array}{lll} i = l+1, & j = k\dots l: & A_{l+1,\ j}^{s\times m} \longrightarrow (A_{l+1,\ j}^{s\times m} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times A_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1: & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} i = l+1, & j = 1\dots l: & B_{l+1,\ j}^{s\times m} \longrightarrow (B_{l+1,\ j}^{s\times m} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times B_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1: & B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} - A_{l+1,\ k}^{s\times m} \times B_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

5. Дожидаемся, пока все потоки закончат выполнение предыдущего шага (**третья** точка синхронизации для текущего k). Если $k \neq l$ увеличиваем k на 1 и переходим к 1-ому шагу. Иначе переходим на следующий шаг.

6. С помощью обычного метода Жордана в потоке, который соответствует $l + 1$ - ой строке, находим $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$ Если блок необратим, то метод не применим для заданного m.

7. В этом же потоке для $j = 1\dots l$ умножаем блоки $B_{l+1,\ j}^{s\times m}$ слева на $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$, для $j = l+1$ умножаем блок $B_{l+1,\ l+1}^{s\times s}$ слева на $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$:

$$\begin{array}{l} B_{l+1,j}^{s\times m} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1} \times B_{l+1,\ j}^{s\times m} \\ B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1} \times B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{array}$$

   Два последних шага - **первая** точка синхронизации для $k = l + 1$.

8. ***Замечание.*** *Этот шаг выполняется всеми потоками параллельно. Шаг описан для q-ого потока.* Для $i = q + p \cdot t$ ($t \in \mathbb{N}$, $q + p \cdot t < (l + 1)$) в матрице B из i-той строки вычитаем $(l+1)$-ую, умноженную на $A_{i,\ l+1}^{m\times s}$:

$$\begin{array}{ll} j = 1\dots l: & B_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (B_{ij}^{m\times m} - A_{i,\ l+1}^{m\times s} \times B_{l+1,\ j}^{s\times m}) \\ j = l+1: & B_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (B_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{i,\ l+1}^{m\times s} \times B_{l+1,\ l+1}^{s\times s}) \end{array}$$

9. Дожидаемся выполнения всех потоков (**вторая** точка синхронизации для $k = l + 1$) и выходим из алгоритма.

В результате вышепредставленных шагов получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} E_{11}^{m\times m} & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}_{11}^{m\times m} & \tilde{B}_{12}^{m\times m} & \dots & \tilde{B}_{1l}^{m\times m} & \tilde{B}_{1,\ l+1}^{m\times s} \\ 0 & E_{22}^{m\times m} & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}_{21}^{m\times m} & \tilde{B}_{22}^{m\times m} & \dots & \tilde{B}_{2l}^{m\times m} & \tilde{B}_{2,\ l+1}^{m\times s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E_{ll}^{m\times m} & 0 & \tilde{B}_{l1}^{m\times m} & \tilde{B}_{l2}^{m\times m} & \dots & \tilde{B}_{ll}^{m\times m} & \tilde{B}_{l,\ l+1}^{m\times s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{l+1,\ l+1}^{s\times s} & \tilde{B}_{l+1,\ 1}^{s\times m} & \tilde{B}_{l+1,\ 2}^{s\times m} & \dots & \tilde{B}_{l+1,\ l}^{s\times m} & \tilde{B}_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{array}\right)$$

Если бы мы искали матрицу, обратную к матрице A, методом Жордана с выбором главного элемента по столбцу, переставляя только строки матрицы A, в правой части мы получили бы обратную матрицу. Однако в методе Жордана с выбором главного элемента по строке в матрице A мы переставляем не строки, а столбцы. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_l$ - элементарные матрицы, соответствующие перестановкам столбцов. Тогда перестановки столбцов меняют матрицу следующим образом:

$A \longrightarrow AU_1 \ldots U_l$

Так как $AU_1 \ldots U_l = E$, то $(AU_1 \ldots U_l)^{-1} = U_l^{-1} \ldots U_1^{-1} A^{-1} = E$. Откуда обратная матрица равна $A^{-1} = U_1 \ldots U_l$. Следовательно, чтобы получить ответ, необходимо поменять у матрицы $\tilde{B}$ строки так, как у матрицы A менялись столбцы:

$A^{-1} = U_1 \ldots U_l \tilde{B}$.

2.3 Точки синхронизации.

Все точки синхронизации были отмечены в течение описания алгоритма. Всего их $3 \cdot k + 2$.

2.4 Оценка числа операций.

1. Для нахождения обратной $m \times m$ матрицы обычным методом Жордана требуется порядка $3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}$ операций.
2. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$: $m \cdot m \cdot (m + m - 1) = 2m^3 - m^2$.
3. Количество операций для умножения двух матриц $m \times s$ и $s \times m$: $m \cdot m \cdot (s + s - 1) = 2m^2 s - m^2$.
4. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$ и $m \times s$: $m \cdot s \cdot (m + m - 1) = 2m^2 s - ms$.
5. Количество операций при реализации умножения блоков в пунктах 3 и 7: $(\sum\limits_{i=1}^{l}(l + l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + (l+l) \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2 = (\sum\limits_{i=1}^{l}(2l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + 2l \cdot (2m^2 s - ms) + l \cdot (2s^2 m - ms) + 2s^3 - s^2$
6. Не ограничивая общности, считаем, что $p \mid l$, так как иначе в качестве l всегда можем взять такое $\tilde{l} \in \mathbb{N}$, $\tilde{l} > l$, что $p \mid \tilde{l}$ и ограничить наше оценку сверху. Тогда, каждому потоку(кроме родительского, у которого будет на 1 поток больше) принадлежит $i = \frac{l}{p}$ строк.
7. Количество операций для всех обращений в одном потоке порядка: $(3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot \frac{(l^2 + 1)}{p}$
8. Количество операций при реализации пунктов 4 и 8: $(\sum\limits_{i=1}^{\frac{l}{p}+1} (l+1) \cdot ((2l - p \cdot [\frac{i}{p}]) \cdot 2m^3 + 4sm^2) + 2(2l - i) \cdot sm^2 + 4\frac{ms^2}{p})$
9. Суммируем результаты, получаем: $\frac{m^3}{p} \cdot (3l^3 + 0.5(3l^2 + l)) + m^2 l^2 + \frac{m^2}{p} \cdot (8sl^3 - 3sl^2 + 6ls) + 2m^2 + \frac{m}{p} \cdot (8ls^2 - 0.5l^2 - 0.25l - 3ls) + 6s^3 + ml - 3ls^2$
10. В итоге, для $m = 1$, $p = 1$: $3n^3 + O(n^2)$
11. Для $m = n$, $p = 1$: $5n^3 + O(n^2)$