Нахождение обратной матрицы методом Жордана с выбором главного элемента по строке. MPI алгоритм.

Смирнов Георгий

310 группа

1. Введение

Дана матрица $A^{n\times n}$. Требуется найти обратную к ней матрицу A^{-1}, используя блочный метод Жордана с выбором главного элемента по строке с p процессами. Пусть $n = m\cdot l+s$. Тогда матрицу A можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \dots & A_{1l}^{m\times m} & A_{1,\ l+1}^{m\times s} \\ A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \dots & A_{2l}^{m\times m} & A_{2,\ l+1}^{m\times s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{l1}^{m\times m} & A_{l2}^{m\times m} & \dots & A_{ll}^{m\times m} & A_{l,l+1}^{m\times s} \\ A_{l+1,\ 1}^{s\times m} & A_{l+1,\ 2}^{s\times m} & \dots & A_{l+1,\ l}^{s\times m} & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{pmatrix}$$

Для нахождения обратной матрицы используем присоединённую матрицу $B = E^{n\times n}$, разделённую на блоки аналогичным образом.

2. Описание блочного метода Жордана с p процессами

2.1 Разделение на процессы.

Теперь разделим строки матриц A и B между p процессами. Процессу с номером q ($q \le p$) будут соответствовать строки с номерами $q + p\cdot t$ ($t \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ q + p\cdot t \le (l + 1)$).

2.2 Шаги блочного метода Жордана с p процессами.

Все шаги метода Жордана будут описаны для произвольного $k = 1\dots l$. Шаги для $k = l+1$ будут описаны отдельно. Начинаем с $k = 1$:

1. Для начала разошлем всем процессам текущие k-е строки матриц A и B общим размером $2\cdot m\cdot n$ (здесь **первый** обмен данными). Затем распределим блоки $A_{kj}^{m\times m}$ ($j = k\dots l$) между процессами таким образом, как в начале распределили строки (в силу того, что матрица квадратная и количество блоков в строке равно количеству блоков в столбце, нумерация столбцов согласно их процессам соответствует аналогичной нумерации строк). После этого, в каждом процессе найдем обратные матрицы (обычным методом Жордана) для тех блоков, для которых это возможно. Среди них в каждом процессе выберем блок с минимальной нормой[1]. Произведем обмен данными между процессами: например, с помощью MPI Allreduce. Если ни в одном из процессов не удалось найти обратимые блоки, метод не применим для заданного m. Иначе, среди уже найденных минимальных выберем в качестве главного элемента $A_{kk}^{m\times m}$ такой блок $A_{kj}^{m\times m}$, что норма $\|(A_{kj}^{m\times m})^{-1}\|$ будет минимальна для всех (здесь **второй** обмен

[1] В качестве нормы матрицы A принимаем $\|A^{m\times m}\| := \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$

данными). Далее, в каждом из процессов меняем k-й и j-й столбцы матрицы A (столбцы матрицы B на данном этапе не меняем).

2. С помощью обычного метода Жордана в каждом процессе обращаем $A_{kk}^{m\times m}$.

3. *Этот шаг выполняется всеми процессами независимо.* Умножаем k-ю строку матрицы A слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$ (на первом шаге предварительно разослали всем процессам k-ю строку матрицы A):

$$\begin{array}{ll} j = k+1\dots l: & A_{kj}^{m\times m} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times A_{kj}^{m\times m} \\ j = l+1: & A_{k,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times A_{k,\ l+1}^{m\times s} \end{array}$$

Умножаем k-ю строку матрицы B слева на $(A_{kk}^{m\times m})^{-1}$ (на первом шаге предварительно разослали всем процессам k-ю строку матрицы B):

$$\begin{array}{ll} j = 1\dots l: & B_{kj}^{m\times m} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times B_{kj}^{m\times m} \\ j = l+1: & B_{k,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{kk}^{m\times m})^{-1}\times B_{k,\ l+1}^{m\times s} \end{array}$$

4. *Этот шаг выполняется всеми процессами независимо. Шаг описан для q-го процесса.* Для $i = q + p\cdot t$ ($t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $q + p\cdot t < (l + 1)$, $q + p\cdot t \neq k$) в матрицах A и B из i-той строки вычитаем k-ую, умноженную на $A_{ik}^{m\times m}$:

$$\begin{array}{ll} j = k+1\dots l: & A_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (A_{ij}^{m\times m} - A_{ik}^{m\times m}\times A_{kj}^{m\times m}) \\ j = l+1: & A_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (A_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{ik}^{m\times m}\times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} j = 1\dots l: & B_{ij}^{m\times m} \longrightarrow (B_{ij}^{m\times m} - A_{ik}^{m\times m}\times B_{kj}^{m\times m}) \\ j = l+1: & B_{i,\ l+1}^{m\times s} \longrightarrow (B_{i,\ l+1}^{m\times s} - A_{ik}^{m\times m}\times B_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

Если $(l + 1)$-я строка попала в процесс с номером q:

$$\begin{array}{lll} i = l+1, & j = k\dots l: & A_{l+1,\ j}^{s\times m} \longrightarrow (A_{l+1,\ j}^{s\times m} - A_{l+1,\ k}^{s\times m}\times A_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1: & A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s} - A_{l+1,\ k}^{s\times m}\times A_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} i = l+1, & j = 1\dots l: & B_{l+1,\ j}^{s\times m} \longrightarrow (B_{l+1,\ j}^{s\times m} - A_{l+1,\ k}^{s\times m}\times B_{kj}^{m\times m}) \\ & j = l+1: & B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} - A_{l+1,\ k}^{s\times m}\times B_{k,\ l+1}^{m\times s}) \end{array}$$

В локальной нумерации i меняется немного иначе: $i = 1\dots r$, где r колчество таких $t\in\mathbb{N}$, что $q + p\cdot t \leq (l + 1)$. Учитываем, что если k-я строка принадлежит нашему процессу (т.е. существует такой $t\in\mathbb{N}$, что $q + p\cdot t = k$), то соответствующий этой строке индекс i в локальной нумерации также нужно пропустить.

5. Если $k \neq l$ увеличиваем k на 1 и переходим к 1-ому шагу. Иначе переходим на следующий шаг.

Замечание. *Дальнейшие действия описаны для $k = l + 1$, т.е. для последнего шага алгоритма Жордана. Так же, как и раньше, в начале этого шага алгоритма Жордана рассылаем всем потокам $(l + 1)$-е строки матриц A и B. Далее, все процессы работают независимо друг от друга. Шаги описаны для процесса с номером q.*

6. С помощью обычного метода Жордана находим $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$ Если блок необратим, то метод не применим для заданного m.

7. Умножаем $(l + 1)$-ю строку матрицы B слева на $(A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}$:

$$\begin{array}{ll} j = 1\dots l: & B_{l+1,j}^{s\times m} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}\times B_{l+1,\ j}^{s\times m} \\ j = l+1: & B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \longrightarrow (A_{l+1,\ l+1}^{s\times s})^{-1}\times B_{l+1,\ l+1}^{s\times s} \end{array}$$

8. Для $i = \ q \ + \ p \cdot t$ ($t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ q \ + \ p \cdot t \ < \ (l \ + \ 1)$) в матрице B из i-той строки вычитаем $(l+1)$-ую, умноженную на $A^{m \times s}_{i,\ l+1}$:

$$\begin{array}{ll} j = \ 1 \dots l: & B^{m \times m}_{ij} \longrightarrow (B^{m \times m}_{ij} - A^{m \times s}_{i,\ l+1} \times B^{s \times m}_{l+1,\ j}) \\ j = l+1: & B^{m \times s}_{i,\ l+1} \longrightarrow (B^{m \times s}_{i,\ l+1} - A^{m \times s}_{i,\ l+1} \times B^{s \times s}_{l+1,\ l+1}) \end{array}$$

   В локальной нумерации i меняется немного иначе: $i \ = \ 1 \dots r$, где r колчество таких $t \in \mathbb{N}$, что $q \ + \ p \cdot t \ < \ (l \ + \ 1)$.

9. Выходим из алгоритма.

В результате вышепредставленных шагов получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} E^{m \times m}_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}^{m \times m}_{11} & \tilde{B}^{m \times m}_{12} & \dots & \tilde{B}^{m \times m}_{1l} & \tilde{B}^{m \times s}_{1,\ l+1} \\ 0 & E^{m \times m}_{22} & \dots & 0 & 0 & \tilde{B}^{m \times m}_{21} & \tilde{B}^{m \times m}_{22} & \dots & \tilde{B}^{m \times m}_{2l} & \tilde{B}^{m \times s}_{2,\ l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E^{m \times m}_{ll} & 0 & \tilde{B}^{m \times m}_{l1} & \tilde{B}^{m \times m}_{l2} & \dots & \tilde{B}^{m \times m}_{ll} & \tilde{B}^{m \times s}_{l,\ l+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E^{s \times s}_{l+1,\ l+1} & \tilde{B}^{s \times m}_{l+1,\ 1} & \tilde{B}^{s \times m}_{l+1,\ 2} & \dots & \tilde{B}^{s \times m}_{l+1,\ l} & \tilde{B}^{s \times s}_{l+1,\ l+1} \end{array}\right)$$

Если бы мы искали матрицу, обратную к матрице A, методом Жордана с выбором главного элемента по столбцу, переставляя только строки матрицы A, в правой части мы получили бы обратную матрицу. Однако в методе Жордана с выбором главного элемента по строке в матрице A мы переставляем не строки, а столбцы. Пусть $U_1, U_2, \dots, U_l$ - элементарные матрицы, соответствующие перестановкам столбцов. Тогда перестановки столбцов меняют матрицу следующим образом:

$A \longrightarrow AU_1 \dots U_l$

Так как $AU_1 \dots U_l = E$, то $(AU_1 \dots U_l)^{-1} = U_l^{-1} \dots U_1^{-1} A^{-1} = E$. Откуда обратная матрица равна $A^{-1} = U_1 \dots U_l$. Следовательно, чтобы получить ответ, необходимо поменять у матрицы $\tilde{B}$ строки так, как у матрицы A менялись столбцы:

$A^{-1} = U_1 \dots U_l \tilde{B}$.

2.3 Обмен данными.

Все обмены между данными были отмечены в течение описания алгоритма. Всего их $2 \cdot (l \ + \ 1)$ штук. Объем каждого обмена $2 \cdot n \cdot m$.

2.4 Оценка числа операций для одного процесса.

1. Для нахождения обратной $m \times m$ матрицы обычным методом Жордана требуется порядка $3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}$ операций.

2. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$: $m \cdot m \cdot (m \ + \ m \ - \ 1) = 2m^3 \ - \ m^2$.

3. Количество операций для умножения двух матриц $m \times s$ и $s \times m$: $m \cdot m \cdot (s + s - 1) = 2m^2 s - m^2$.

4. Количество операций для умножения двух матриц $m \times m$ и $m \times s$: $m \cdot s \cdot (m \ + \ m \ - \ 1) = 2m^2 s \ - \ ms$.

5. Количество операций при реализации умножения блоков в пунктах 3 и 7: $(\sum\limits_{i=1}^{l}(l + l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + (l+l) \cdot (2m^2s - ms) + l \cdot (2s^2m - ms) + 2s^3 - s^2 = (\sum\limits_{i=1}^{l}(2l - i) \cdot (2m^3 - m^2)) + 2l \cdot (2m^2s - ms) + l \cdot (2s^2m - ms) + 2s^3 - s^2$

6. Не ограничивая общности, считаем, что $p \mid l$, так как иначе в качестве l всегда можем взять такое $\tilde{l} \in \mathbb{N}$, $\tilde{l} > l$, что $p \mid \tilde{l}$. Тогда, каждому процессу принадлежит $i = \frac{l}{p}$ строк.

7. Количество операций для всех обращений в одном процессе порядка: $(3m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}) \cdot \frac{(l^2 + lp)}{2p}$

8. Количество операций при реализации пунктов 4 и 8 в каждом из процессов: $(\sum\limits_{i=1}^{l}(l-1) \cdot ((2l - p \cdot [\frac{i}{p}]) \cdot 2m^3 + 4lm^2) + 2(2l - p \cdot [\frac{i}{p}]) \cdot lm^2)$

9. Суммируем результаты, получаем: $\frac{m^3}{p} \cdot (3l^3 + 0.5(l^2 + 3l)) + \frac{m^2}{p} \cdot (8sl^3 - 3sl^2 + 6ls) + \frac{m}{p} \cdot (8ls^2 - 0.5l^2 - 0.25l - 3ls)$

10. В итоге, для $p = 1$: $m^3 \cdot (3l^3 + 0.5(l^2 + 3l)) + m^2 \cdot (8sl^3 - 3sl^2 + 6ls) + m \cdot (8ls^2 - 0.5l^2 - 0.25l - 3ls)$