Plus généralement, pour des fonctions intégrables sur la surface $\theta(\mathcal{D})$, nous avons la formule de changement de variables

$$\int_{\theta(\mathcal{D})} f(x_1,x_2)\ dx_1dx_2 = \int_{\mathcal{D}} f(\theta(u_1,u_2))\ \left|\frac{\partial\theta^1}{\partial u_2}\frac{\partial\theta^2}{\partial u_1} - \frac{\partial\theta^1}{\partial u_1}\frac{\partial\theta^2}{\partial u_2}\right|\ du_1du_2$$

avec la transformation

$$(u_1,u_2)\in\mathcal{D}\mapsto\theta(u_1,u_2)=(\theta^1(u_1,u_2),\theta^2(u_1,u_2))=(x_1,x_2)\in\theta(\mathcal{D})$$

2.2.4 Lois uniformes sur des disques

Comment placer au hasard le diament d'une platine sur un disque vinyl ? Peut-on élaborer une pizza en plaçant tous les ingrédients de façon totalement hasardeuse ? Comment simuler un mauvais joueur de flechette sur ordinateur ? Un géomètre a-t-il la possibilité de choisir un point $X=(X_1,X_2)$ au hasard dans le disque unité

$$\mathcal{D}=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x_1^2+x_2^2<1\right\}\ ?$$

Comme dans le cas des choix de points au hasard dans des pavés examiné dans la section précédente, nous commencerons par noter que la probabilité de choisir (X_1,X_2) dans un sous ensemble régulier $B\subset\mathcal{D}$ correspond simplement au rapport des surfaces de B et de $\mathcal{D}$

$$\mathbb{P}\left((X_1,X_2)\in B\right)=\frac{\text{Aire}(B)}{\text{Aire}(\mathcal{D})}\quad\text{avec}\quad\text{Aire}(\mathcal{D})=\int_{\mathcal{D}} dx_1\ dx_2=\pi$$

Tout point (x_1,x_2) du disque peut être paramétrisé par la donnée d'un angle a et d'un rayon r. Plus précisément, nous avons la formule de changement de coordonnée polaires

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & r\ \cos a\\ x_2 & = & r\ \sin a\end{array}\right.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl}\theta:\ \mathcal{D}'=\mathcal{D}-([0,1[\times\{0\}) & \longrightarrow &]0,1[\times]0,2\pi[\\ (x_1,x_2) & \mapsto & \theta(x_1,x_2)=(r,a)\end{array}$$

transforme donc de façon bi-univoque le disque unité $\mathcal{D}$, auquel on a oté soigneusement le petit segment $([0,1[\times\{0\})$, en un joli petit rectangle

$$\theta(\mathcal{D}')=]0,1[\times]0,2\pi[$$

Si (X_1,X_2) est uniforme sur $\mathcal{D}$, quelle est la loi du point

$$\theta(X_1,X_2)=(R,A)$$

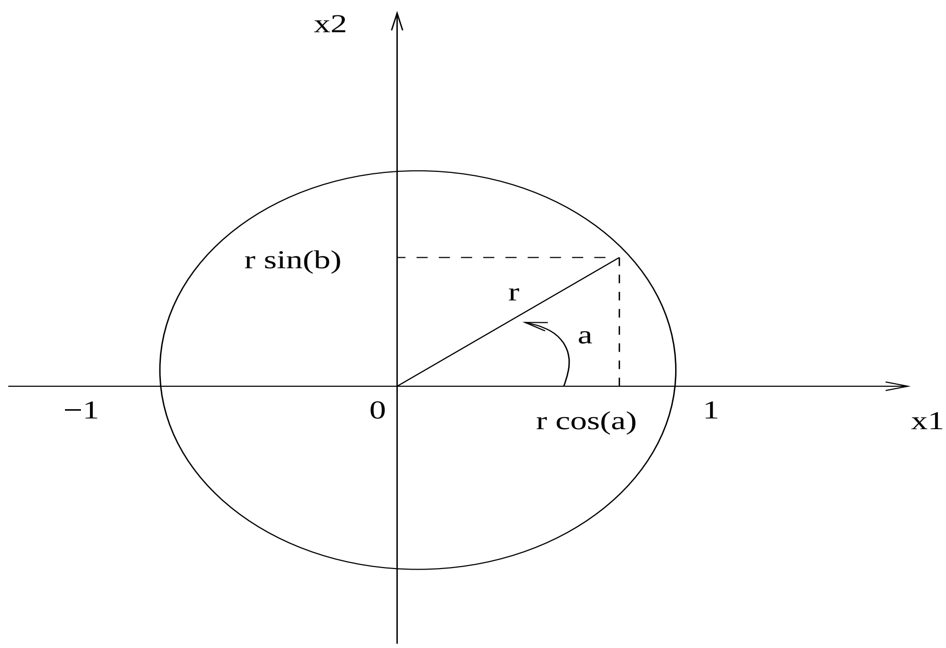

FIG. 2.5 – Coordonnées polaires

sur le pavé $]0,1[\times]0,2\pi[$? Pour répondre à cette question, il convient de noter les associations d'éléments de surface infinitésimale

$$dx_1 dx_2 \ \rightsquigarrow\ \left| \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial a} - \frac{\partial x_1}{\partial a}\frac{\partial x_2}{\partial r} \right| \times dr da$$

Dans notre situation, nous avons

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \cos a\ , \quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin a$$

et

$$\frac{\partial x_1}{\partial a} = -r\ \sin a\ , \quad \frac{\partial x_2}{\partial a} = r\ \cos a$$

Par conséquent, nous avons

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial a} - \frac{\partial x_1}{\partial a}\frac{\partial x_2}{\partial r} \right| = r\ \left(\cos^2 a + \sin^2 a\right) = r$$

et donc

$$dx_1 dx_2 \ \rightsquigarrow\ r\ dr da$$

La densité de probabilité du point (X_1, X_2)

$$p^{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\ 1_{\mathcal{D}}(x_1, x_2)\ dx_1, dx_2$$

est donc transformée par θ en la densité de probabilité du point $\theta(X_1, X_2) = (R, A)$

$$p^{R,A}(r, a) = \frac{1}{\pi}\ 1_{\theta(\mathcal{D}')}(r, a)\ r\ drda$$

Pour approfondir notre étude du point (R, A), il convient de noter que la fonction $p^{R,A}$ peut s'exprimer sous la forme d'un produit de densités

$$p^{R,A}(r, a) = \left[2r\ 1_{[0,1]}(r)\ dr\right] \times \left[\frac{1}{2\pi}\ 1_{[0,2\pi]}(a)\ da\right]$$

Ceci nous informe que les deux composantes de rayon R et d'angle A sont indépendantes, de densités respectives

$$p^R(r) = 2r\ 1_{[0,1]}(r)\ dr \quad \text{et} \quad p^A(a) = \frac{1}{2\pi}\ 1_{[0,2\pi]}(a)\ da$$

L'angle A est donc uniforme sur $[0, 2\pi]$, le rayon aléatoire R est distribuée selon une loi rendant plus probables les rayons proches de 1.

Si U désigne une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ alors la variable $(2\pi U)$ à la même loi que A, en effet pour tout $a \in [0, 2\pi]$

$$\mathbb{P}\left(2\pi U \leq a\right) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{a}{2\pi}\right) = \frac{a}{2\pi} = \mathbb{P}\left(A \leq a\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a\ da'.$$

D'autre part, si U' désigne une variable uniforme sur $[0, 1]$ alors $\sqrt{U'}$ a la même loi que R. En effet pour chaque $r \in [0, 1[$ on a bien

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{U'} \leq r\right) = \mathbb{P}\left(U' \leq r^2\right) = r^2 = \mathbb{P}\left(R \leq r\right) = \int_0^r \frac{\partial}{\partial s}(s^2)\ ds.$$

En choisissant U et U' indépendantes, on a donc montré les équivalences en loi

$$\theta(X_1, X_2) \stackrel{\text{loi}}{=} (2\pi U, \sqrt{U'})$$

Par conséquent, si U et U' sont deux variables uniformes et indépendantes sur $[0, 1]$ alors le point (X_1, X_2) de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_1 & = & \sqrt{U'}\ \cos(2\pi U) \\ X_2 & = & \sqrt{U'}\ \sin(2\pi U) \end{array}\right.$$

est uniformément réparti sur le disque unité $\mathcal{D}$. Bien entendu, nous pouvons vérifier directement ce résultat en utilisant la transformation entre les les variables uniformes

(u,u') sur $[0,1]^2$, avec $u \not\in \{\frac{1}{4},\frac{3}{4}\}$, et les points (x_1,x_2) sur le disque donnée par la formule

$$u = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{x_2}{x_1} \quad \text{et} \quad u' = x_1^2 + x_2^2$$

Un simple calcul de dérivées permet d'obtenir les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= -\frac{x_2}{2\pi x_1^2}\ \frac{1}{1+(x_2/x_1)^2} = -\frac{x_2}{2\pi x_1^2}\ \frac{1}{1+(x_2/x_1)^2} \\
\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\pi x_1}\ \frac{1}{1+(x_2/x_1)^2} = \frac{1}{2\pi x_1}\ \frac{1}{1+(x_2/x_1)^2}
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial u'}{\partial x_1} = 2x_1\ , \quad \frac{\partial u'}{\partial x_2} = 2x_2$$

On obtient alors aisément les les associations d'éléments de surface infinitésimale recherchés :

$$du du' \ \rightsquigarrow\ \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u'}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u'}{\partial x_1}\right| \times dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi}\ dx_1 dx_2$$

Notons pour conclure que l'on peut facilement décrire les loi des coordonnées cartésiennes X_1 et X_2. Par exemple la loi du demi-cercle est la loi de X_1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 \in dx_1\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \in dx_1\ ,\ X_2 \in]-1,1[\right) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{1} 1_{\mathcal{D}}(x_1,x_2)\ dx_2\right)\ 1_{]-1,1[}(x_1)\ dx_1 \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2\right)\ 1_{]-1,1[}(x_1)\ dx_1 = \frac{2}{\pi}\ \sqrt{1-x_1^2}\ 1_{]-1,1[}(x_1)\ dx_1
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède on en conclut que la variable aléatoire

$$X_1 = \sqrt{U'}\ \cos(2\pi U)$$

est distribuée selon la loi du demi-cercle.

2.2.5 L'algorithme Box-Muller

Les fluctuations aléatoires de nature gaussienne font vraisemblablement partie des phénomènes aléatoires les plus fréquement observés dans la nature. Cette fréquence s'explique en grande partie par le théorème central de la limite. Ce fameux résultat probabiliste affirme que tout phénomène aléatoire résultant d'une accumulation de petites fluctuations indépendantes de même nature est nécessairement de nature gaussienne ! On utilise donc de tels aléas gaussiens en engéniérie pour décrire les fluctuations d'erreurs de capteurs électroniques, ou tout autre type d'erreurs de modèles. En physique, les répartitions de chaleur, ou de fluides peuvent s'interpréter