Geometria Analítica (2025-1) | Prova 3 | ICEx/UNIFAL-MG

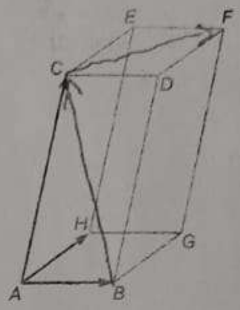
Ciência da Computação | Prof. Tiago J. Arruda

Álgebra Vetorial[1]

1. **(2,5 pt.)** Resolva os exercícios abaixo.

   (a) **(1,0 pt.)** Em um triângulo $\triangle ABC$, seja M um ponto no lado BC tal que $2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{AM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

   (b) **(1,5 pt.)** Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AH} = \vec{w}$, utilize o paralelepípedo da figura ao lado para determinar os vetores $\vec{a} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CF}$ e $\vec{b} = 3\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{AF}$ em termos de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



2. **(2,0 pt.)** Considere a base canônica $\varepsilon = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   (a) **(1,0 pt.)** Sendo $\vec{u} = \left(2 - \dfrac{m}{2}\right)\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v} = -6\vec{i} + m\vec{j}$, determine os valores de m para os quais os vetores *não* são paralelos.

   (b) **(1,0 pt.)** Sendo $\vec{a} = (1, 3, m+1)$, $\vec{b} = (2, 1, m)$ e $\vec{c} = (1, 1, 2)$, calcule m para que os vetores sejam L.D.

3. **(2,5 pt.)** Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -1, -3)$ e $\vec{w} = (1, 1, -2)$ expressos na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

   (a) **(0,5 pt.)** O vetor $\vec{u}$ é uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$? Justifique.

   (b) **(1,0 pt.)** Determine o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, onde $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.

   (c) **(1,0 pt.)** Escreva $\vec{t} = (1, 0, 2)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e determine os coeficientes dessa combinação.

4. **(3,0 pt.)** São dados os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, 1, 1)$ em um sistema de coordenadas ortogonal, na base canônica.

   (a) **(1,0 pt.)** Mostre que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo em $\mathbb{R}^3$ e determine sua área usando *produto vetorial*.

   (b) **(1,0 pt.)** Calcule o vetor projeção ortogonal de $\overrightarrow{BC}$ na direção de $\overrightarrow{BA}$ (isto é, $\text{Proj}_{\overrightarrow{BA}}\,\overrightarrow{BC}$) e comente o resultado.

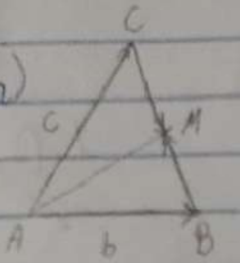
   (c) **(1,0 pt.)** Determine o comprimento da altura do triângulo relativa ao vértice A e à base BC e calcule o cosseno do ângulo $A\hat{B}C$.

[1] Coloque o nome completo nas folhas de prova e escreva o resultado final das questões à caneta. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. Não é permitido o uso de quaisquer equipamentos eletrônicos. Data da Avaliação: 28/05/2025

10,0 (DEZ)

Prova 3 GA — Petrônio Dias de Carvalho Júnior

1-a)



$2\vec{BM} = 3\vec{MC}$

$\vec{AM} = ?$

$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$

$\vec{AM} = \vec{b} + 3\vec{MC}/2$

$\vec{AB} = \vec{b}$

$\vec{AC} = \vec{c}$

$\vec{BM} = 3\vec{MC}/2$

$\vec{MC} = 2\vec{BM}/3$

$\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM}$

$\vec{AM} = \vec{c} + (-2\vec{BM}/3)$

$\vec{BC} = c - b$

$\vec{BC} = \vec{BM} + \vec{MC}$

$\vec{BC} = \vec{BM} + 2\vec{BM}/3$

$c - b = 5\vec{BM}/3$

$3c - 3b = 5\vec{BM}$

$\vec{BM} = 3/5\, c - 3/5\, b$

1,0

$\vec{AM} = \vec{b} - 3/5\,\vec{b} + 3/5\,\vec{c}$ $\quad$ $\vec{AM} = 2/5\,\vec{b} + 3/5\,\vec{c}$

C

b) $\vec{AB} = \vec{u}$

$\vec{AC} = \vec{v}$

$\vec{AH} = \vec{w}$

$\vec{a} = 2\vec{BC} - \vec{CF}$

$\vec{b} = 3\vec{HD} - \vec{BE} + 2\vec{AF}$

$\vec{a} = 2.(-\vec{AB} + \vec{AC}) - (\vec{AH} + \vec{AB})$

$\vec{a} = 2.(-u + v) - (w + \vec{u})$

$\vec{a} = -2\vec{u} + 2\vec{v} - w - \vec{u}$

$\vec{b} = 3.(\vec{HB} + \vec{AC}) - (\vec{BH} + \vec{AC}) + 2(\vec{AG} + \vec{AC})$

$\vec{a} = -3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$

$\vec{b} = 3.(-AH + AB + AC) - (-AB + AH + AC) + 2(AB + AH + AC)$

$\vec{b} = -3\vec{w} + 3\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{u} - \vec{w} - \vec{v} + 2\vec{u} + 2\vec{w} + 2\vec{v}$

$\vec{b} = 6\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w}$

C

$\vec{b} = -2\vec{w} + 6\vec{u} + 4\vec{v}$

1,5

2-a) $\vec{u} = (2 - m/2)\vec{i} + \vec{j}$ $\quad$ $\vec{v} = -6\vec{i} + m\vec{j}$ $\quad$ L.I

$$\begin{vmatrix} 2 - m/2 & 1 \\ -6 & m \end{vmatrix}$$

$\det = 2m - m^2/2 + 6$

$-m^2/2 + 2m + 6 \neq 0$

1,0

$\Delta = 4 - 4 \cdot -1/2 \cdot 6$

$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$

$\frac{-2 \pm 4}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$

$= \frac{-6}{-1} = 6$

$m \neq -2$

$m \neq 6$

C

b) $\vec{a} = (1, 3, m+1)$ $\quad \vec{b} = (2, 1, m)$ $\quad \vec{c} = (1, 1, 2)$ $\quad$ L.D

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & m+1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$det = 2 + 3m + 2m + 2 - m - 1 - m - 12$

$det = -9 + 3m = 0$

$3m = 9$

$m = 3$

$m = 3$

1,0

$3 - \vec{u} = (1, 2, 3)$

$\vec{v} = (1, -1, -3)$

$\vec{w} = (1, 1, -2)$

0,5

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$det = 2 \cancel{-6} \cancel{+3} \cancel{+3} + 3 + 4$

$det = 9$

$det \neq 0$

$\vec{u}$ não é uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pois os vetores formam um conjunto L.I

b) $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$

$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

$\vec{b} = (1,2,3) + (2,-2,-6) - (3,3,-6)$

$\vec{b} = (3, 0, -3) - (3, 3, -6)$

$\vec{b} = (0, -3, 3)$

$\vec{a} = (1, 2, 3) - (1, -1, -3)$

$\vec{a} = (0, 3, 6)$

$\cos\theta = \dfrac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{9}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{18}}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{9}{\sqrt{810}}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + (-9) + 18$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{0 + 9 + 36} = \sqrt{45}$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{0 + 9 + 9} = \sqrt{18}$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 18 \\ \hline 360 \\ 45+ \\ \hline 810 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 810 & 2 \\ 405 & 3 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{810}$

$9\sqrt{10}$

$405 \,|\, 3$ $\quad 135 \,|\, 3$ $\quad 45$ $\quad 0$

$\cos\theta = \dfrac{9}{9\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$

1,0

c) $\vec{t} = (1,0,2)$ $\quad \vec{u} = (1,2,3)$ $\quad \vec{v} = (1,-1,-3)$ $\quad \vec{w} = (1,1,-2)$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a - b + c = 0 \\ 3a - 3b - 2c = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + \cancel{b} + c = 1 \\ 2a - \cancel{b} + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + \cancel{3b} + 3c = 3 \\ 3a - \cancel{3b} - 2c = 2 \end{cases}$$

$$3a + 2c = 1 \qquad\qquad 6a + c = 5$$

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \quad .(-2) \\ 6a + c = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{6a} - 4c = -2 \\ \cancel{6a} + c = 5 \end{cases}$$

$$-3c = 3$$

$$c = -1$$

$$a = 1$$

$$a + b + c = 1$$

$$1 + b - 1 = 1$$

$$b = \cancel{1} - \cancel{1} + 1$$

$$b = 1$$

$$\begin{array}{r} (1,2,3) \\ +\ (1,-1,-3) \\ \hline (2,1,0) \\ +\ (-1,-1,2) \\ \hline (1,0,2) \end{array}$$

$$\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$$

$$a = 1 \quad c = -1 \quad b = 1$$

C 1,0

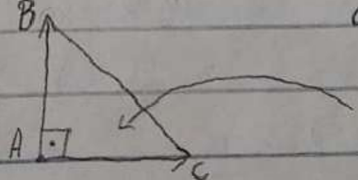
4 - $A = (1,0,1)$ $\quad B = (-1,0,2)$ $\quad C = (1,1,1)$

a) $\vec{AB} = B - A$ $\quad \vec{AC} = C - A$

$\vec{AB} = (-2,0,1)$ $\quad \vec{AC} = (0,1,0)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \, \|\vec{AC}\|} \qquad \cos\theta = \frac{0}{\|\vec{AB}\| \, \|\vec{AC}\|}$$

$$\cos\theta = 0$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 + 0 + 0$$

$$\theta = 90°$$

$$\text{Área} = \|\vec{AC} \times \vec{AB}\| / 2$$

$$\begin{vmatrix} i & j & K \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$i + 0 + 0 + 2K - 0 - 0$

$\vec{i} + 2\vec{K}$

$(1,0,2)$

$$\text{Área} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \cdot 1/2$$

$$\text{Área} = \sqrt{5}/2$$

1,0

C

b) $proj_{\vec{BA}} \vec{BC} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\|^2} \cdot \vec{BA}$ $\qquad$ $\vec{BA} = (2, 0, -1)$ $\quad$ $\vec{BC} = (2, 1, -1)$

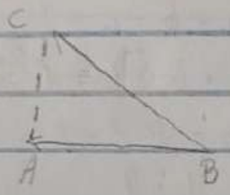
$proj_{\vec{BA}} \vec{BC} = 1 \cdot (2, 0, -1)$

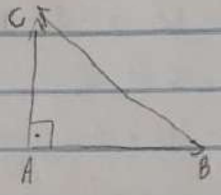
$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 4 + 0 + 1 = 5$

$proj_{\vec{BA}} \vec{BC} = (2, 0, -1)$

$\|\vec{BA}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}^2 = 5$

O valor da projeção de $\vec{BC}$ sobre $\vec{BA}$ é igual a $\vec{BA}$ pois eles formam um triângulo retângulo





1,0

c) $h = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{BC}\|}$ $\qquad$ $h = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ $\qquad$ $h = \sqrt{30}/6$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ $0 + 0 - 2k - 0 - i - 0$

$-i - 2k$

$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\cos\theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{5\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ $\qquad$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$

1,0

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 4 + 0 + 1 = 5$

$\|\vec{BA}\| = \sqrt{5}$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{6}$

$proj_{BC} BA = \frac{BA \cdot BC}{\|BC\|^2} \cdot BC$ $\qquad$ $proj_{BC} BA = \left(\frac{10\sqrt{6}}{6}, \frac{5\sqrt{6}}{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{6}\right)$

$proj_{BC} BA = \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot (2, 1, -1)$ $\qquad$ $BA = proj_{BC} BA + h$

$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ $\qquad$ $(2, 0, -1) = (\frac{10\sqrt{6}}{6}$