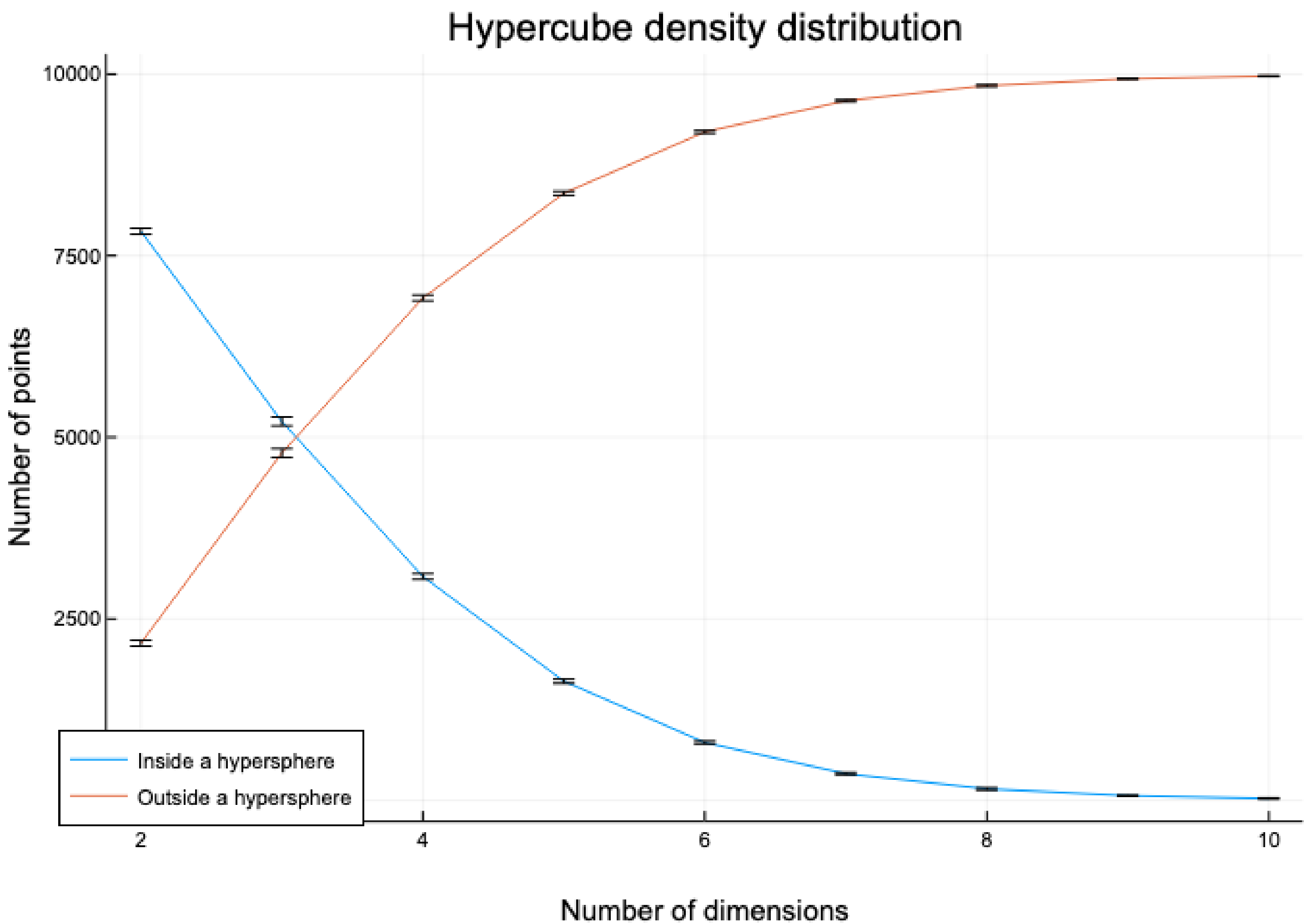
Klątwa wymiaru

Mamy hiperkulę o promieniu równym 1 wpisaną w hipersześcian o krawędziach długości 2. Zapełniamy hipersześcian losowymi punktami o równomiernym rozkładzie.

Punkt 1

Mierzymy rozkład punktów wewnątrz wielowymiarowego sześcianu.

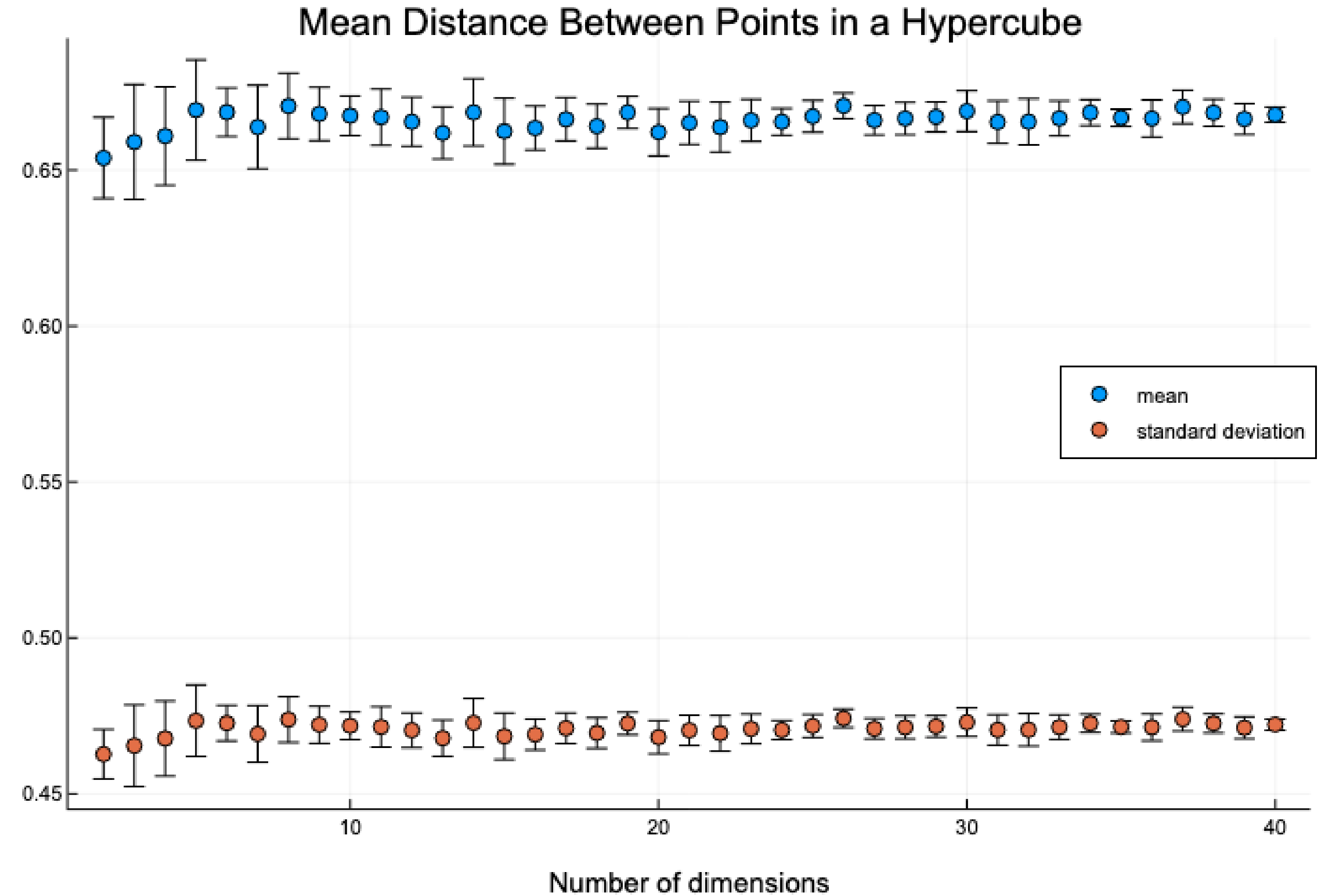


Ustaliłem liczbę punktów na 10^4, dla kazdego wymiaru doświdaczenie ponawiałem 10 razy aby zwiększyć wiarygodoność wyników. Wykres zawiera uśrednione wyniki wraz z odchyleniem standardowym.

Okazuje się, że wraz ze wzrostem ilości wymiarów drastycznie maleje liczba punktów wewnątrz sfery - co oznacza, że narożniki są znacznie bardziej pojemne niż środek sześcianu (hiperkula wpisana w ten sześcian).

Punkt 2

Tutaj będziemy badać odległości między punktami w hipersześcianie.



Znowu kazde doświadczenie powtórzyłem 10 razy, losowałem 100 punktów.

Średnia odległość punktów zmierza do 0.66

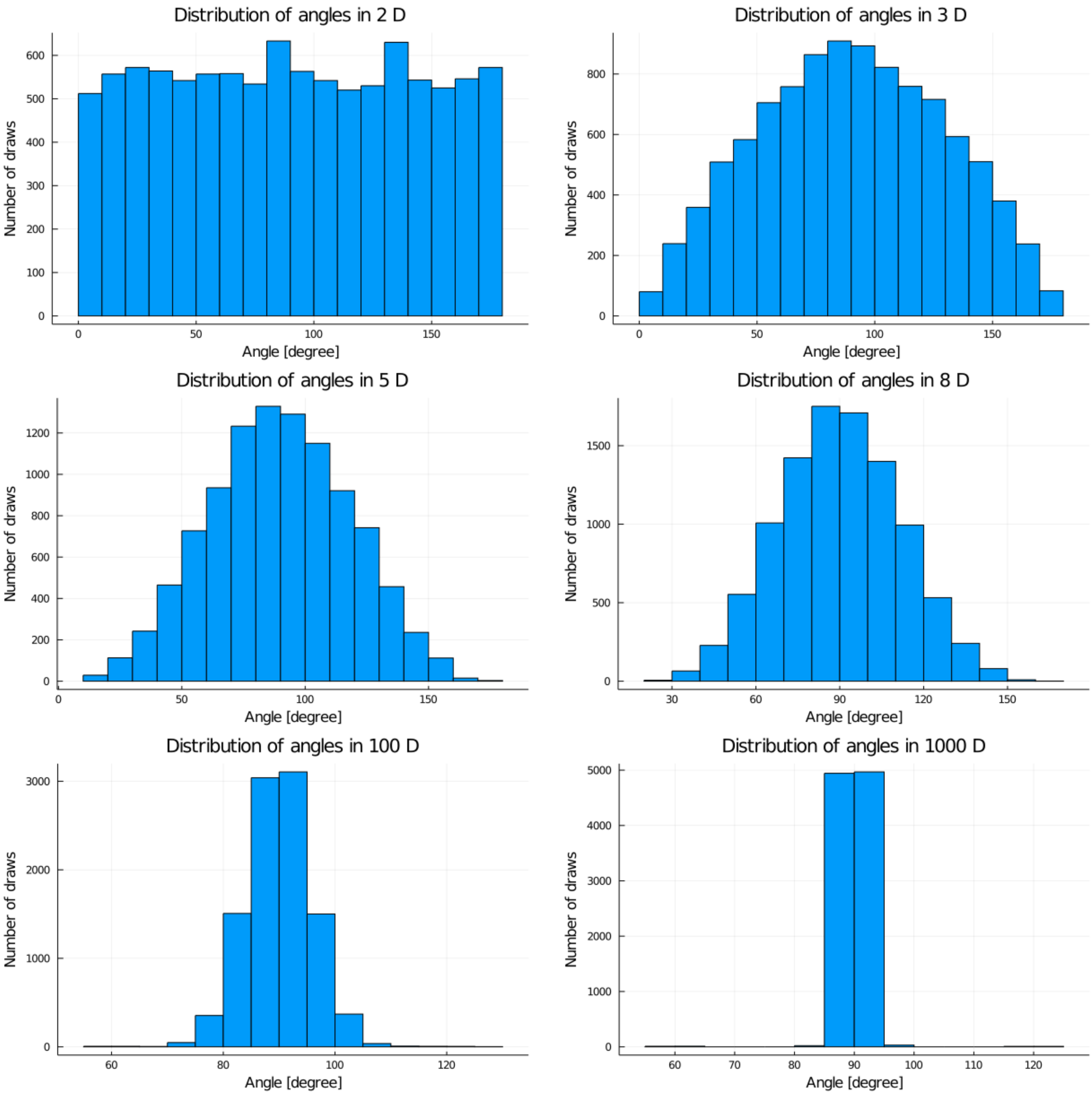
Odchyelenie standardowe zmierza do 0.46

Odchylenie stanowi $\frac{0.46}{0.66} \cdot 100\% \approx 69\%$ średniej.

Wartości te odczytałem z wykresu, więc jest to pewnie dość duże przybliżenie.

Punkt 3

Tutaj badamy rozkład kątów między wektorami utworzonymi z wylosowanych punktów wewnątrz sześcianu.



Losowałem 1000 punktów i do uzyskania poszczególnego histogramu robiłem 10 tysięcy losowań (2 wektory, po 2 punkty na wektor) z których obliczałem kąt z iloczynu wektorowego.

$$\phi(v_1, v_2) = arccos(\frac{v_1 \cdot v_2}{||v_1|| \cdot ||v_2||})$$

Obserwujemy, ze wraz ze wzrostem wymiarów kąty między wektorami są coraz ciaśniej rołożone między kątem 90ř.

Mozemy więc wywnioskować, ze mierzenie podobieństwa między wektorami za pomocą wzoru wyżej (kąta bądź wartości cosinusa) nie będzie się dobrze sprawdzać.