Wyjaśnienia do labolatorium

Sfera Blocha

Qbit jest dowolną kombinacja liniową

$$a|0\rangle + b|1\rangle \tag{1}$$

taką, że

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, a, b \in C \tag{2}$$

Korzystając z postaci trygonometrycznej dla liczb zespolonych mamy:

$$a = |a|e^{i\phi_1}, \phi_1 \in [0, 2\pi] \tag{3}$$

$$b = |b|e^{i\phi_2}, \phi_2 \in [0, 2\pi] \tag{4}$$

Natomiast korzytajac z (2) możemy sparametryzować:

$$|a| = cos(\theta_1) \tag{5}$$

$$|b| = sin(\theta_1) \tag{6}$$

gdzie $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Wtedy (1) ma postać:

$$\begin{aligned} cos(\theta_1)e^{i\phi_1}|0\rangle + sin(\theta_1)e^{i\phi_2}|1\rangle = \\ e^{i\phi_1}(cos(\theta_1)|0\rangle + sin(\theta_1)e^{i(\phi_2-\phi_1)}|1\rangle) = \\ e^{i\phi_1}(cos(\theta_1)|0\rangle + sin(\theta_1)e^{i\phi}|1\rangle) \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie $\phi = \phi_2 - \phi_1$ oraz $\phi \in [0, 2\pi]$

Czynnik $e^{i\phi_1}$ to faza globalna, której nie możemy zaobserwować przy pomiarze qbitu. Dlatego najbardziej ogólna postac qbitu to:

$$cos(\theta_1)|0\rangle + e^{i\phi}sin(\theta_1)|1\rangle \tag{8}$$

gdzie $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oraz $\phi \in [0, 2\pi]$ Postać tę mapuje się na wektor w tzw. sferze Blocha:

$$cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi}sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle \tag{9}$$

gdzie $\theta \in [0, \pi]$ oraz $\phi \in [0, 2\pi]$

`https://quantum-computing.ibm.com/composer/docs/guide/advanced-single-qubit-gates`

Bramki jako obroty

Każde działanie bramki jednokubitowej to obrót wektora na sferze Blocha.

W [http://www.lassp.cornell.edu/mermin/qcomp/chap1.pdf (sekcja A2)] można znaleźć wyprowadzenie wzoru na bramkę w zależności od skojarzonej z nią osi obrotu $\vec{n}$ i kąta θ.

$$U(\vec{n},\theta) = e^{(i\frac{\theta}{2})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} = cos(\frac{\theta}{2}) + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}sin(\frac{\theta}{2})$$

gdzie

$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$$

Bramki Pauliego $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, są obrotami o kąt π wokół osi x,y,z (zgodnie z nazwami bramek).

Zobacz też [https://quantum-computing.ibm.com/composer/docs/operations-glossary/operations-glossary]
Uwaga: w nowej wersji dokumentacji używa się wizualizacji QSphere, która rózni się od sfery Blocha. Więcej o QSphere i jej róznicy w stosunku do Sfery Blocha tutaj [https://quantum-computing.ibm.com/composer/docs/iqx/visualizations#q-sphere-view]

Dowolny obrot na sferze Blocha jest maksymalnie złożeniem trzech obrotów. Te trzy obroty można definiować na różne sposoby (i różne sposoby znajdziemy w literaturze) np dowolna bramka unitarna może być przedstawiona jako złożenie obrotu o kąt γ wokół osi z, potem o kąt θ wokół osi x, i potem o kąt δ znowu wokół z.

$$\begin{aligned} U_z(\gamma)U_x(\theta)U_z(\delta) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\delta)}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{i(\gamma-\delta)}\sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\gamma-\delta)}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\gamma+\delta)}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{i\beta}\sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{-i\beta}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\alpha}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = U(\theta,\alpha,\beta) \end{aligned} \tag{10}$$

IBM przyjął inną (ale równoważną) parametryzację. Szczegóły uniwersalnej bramki U zaimplementowanej w IBM:
[https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.circuit.library.UGate.html]