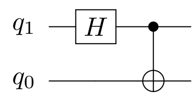
1 Baza Bella

Poprzez układ:



(1)

Możemy przejść z bazy obliczeniowej do bazy Bella:

$$|00\rangle \rightarrow |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|01\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$$

$$|10\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|11\rangle \rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle)$$

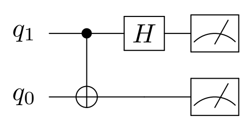
Oznacza to, że qbit, będący wcześniej w stanie:

$$\alpha_0 |00\rangle + \alpha_1 |01\rangle + \alpha_2 |10\rangle + \alpha_3 |11\rangle$$

Przekształca się w stan:

$$\alpha_0 |\psi_0\rangle + \alpha_1 |\psi_1\rangle + \alpha_2 |\psi_2\rangle + \alpha_3 |\psi_3\rangle$$

Aby zmierzyć prawdopodobieństwo na podstawie amplitud w bazie Bella należy zastosować układ "wracający" do bazy obliczeniowej (czyli będący hermitowskim sprzężeniem (1)) oraz bramek pomiaru w bazie obliczeniowej.



(2)

Ten układ nazywamy układem do pomiaru w bazie Bella.

2 Gęste kodowanie

Celem gęstego kodowania jest przesłanie dwóch klasycznych bitów za pomocą łacza mogącego przesłać jeden qbit. Gęste = pakujemy DWA bity do JEDNEGO qbitu.

Do tego celu najlepiej nadaje się baza Bella. Dlaczego ?
Ponieważ przejścia $|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle \rightarrow |\psi_3\rangle$ realizuje się przez działanie na JEDEN qbit.

$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle$ realizujemy poprzez działanie bramką X na jeden (dowolny) z qbitów
$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle$ realizujemy poprzez działanie bramką Z na jeden (dowolny) z qbitów
$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_3\rangle$ realizujemy poprzez działanie bramką XZ na jeden (dowolny) qbit

Dla porównania:
$|00\rangle \rightarrow |11\rangle$ realizujemy poprzez działanie bramkami X na OBA qbity

Zakładając więc, że mamy przygotowany stan splątany:

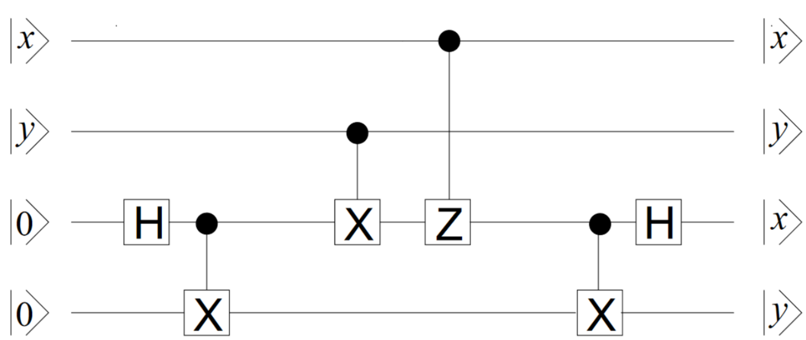
- zapakowany stan $|00\rangle$ do bazy Bella $|\psi_0\rangle$
- przesłany jeden qbit do Boba, a drugi do Alice

To oczywiście dość mocne założenie. Możemy wyobrazić sobie, że takie stany zostały przygotowane wcześniej.

Alice może teraz:

- działając na swoim qbicie zmienić stan $|\psi_0\rangle$ na dowolny inny stan BAZOWY $|\psi_x\rangle$ stosując bramki Z i/lub X
- Następnie wysłać go do Boba.
- Bob, mając oba qbity odczytuje zakodowany stan $|\psi_x\rangle$ stosując pomiar w Bazie Bella. Po pomiarze qbity zmieniają swój stan na stan klasyczny (baza obliczeniowa) odpowiadający $|\psi_x\rangle$.
- Uwaga: gęste kodowanie działa tylko dla stanów klasycznych!

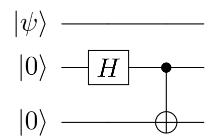
Ostatecznie układ wygląda tak:



Rysunek 1: Obwód kwantowy do gęstego kodowania (źródło [1])

3 Teleportacja kwantowa

Przygotowujemy splątane qbity w bazie Bella i rozsyłamy: dolny do Boba, górny do Alicji. Następnie Alicja dołącza qbit o nieznanym stanie $\psi = a|0\rangle + b|1\rangle$, który chce teleportować.



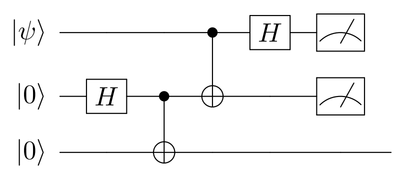
(3)

Stan całości wynosi:

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle)$$

Następnie na dwóch górnych qbitach Alicja stosuje pomiar w bazie Bella czyli CNOT, H oraz bramki pomiaru.



(4)

Po przejsciu przez CNOT (następuje: $|10x\rangle \leftrightarrow |11x\rangle$) i mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|110\rangle + b|101\rangle)$$

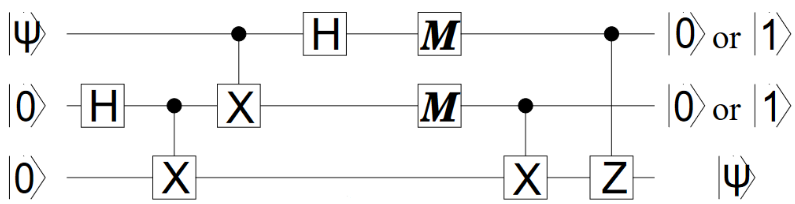
Po przejściu przez H (następuje $|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ oraz $|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$) i mamy:

$$\frac{1}{2}(a|000\rangle + a|100\rangle + a|011\rangle + a|111\rangle + b|010\rangle - b|110\rangle + b|001\rangle - b|101\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}(|00\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) + |10\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + |11\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle))$$

po pomiarze na dwóch górnych qbitach	na dolnym dostajemy	”poprawa” do stanu $\|\psi\rangle$
$\|00\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\|0\rangle + b\|1\rangle)$	I
$\|01\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\|1\rangle + b\|0\rangle)$	X
$\|10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\|0\rangle - b\|1\rangle)$	Z
$\|11\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a\|1\rangle - b\|0\rangle)$	XZ

Wniosek stan dwóch górnych qbitów po pomiarze w bazie Bella daje nam informację, jak odzyskać stan $|\psi\rangle$ na dolnym qbicie. Wystarczy przekazać tę informację Bobowi w sposób klasyczny. Ostatecznie układ wygląda tak:



Rysunek 2: Obwód kwantowy do teleportacji (źródło [1])

Literatura

[1] Dawid A. Mermin, Quantum Computation Lecture Notes and Homework Assignments Cornell, Spring 2006
`http://www.lassp.cornell.edu/mermin/qcomp/CS483.html`