<u>Лабораторная работа № 2</u>
"Фракталы"

Лабораторная работа № 2 выполняется в режиме аудиторного занятия.

План работы:

1. Посмотреть 3 видео, прикрепленные на платформе. Со звуком!
2. Прочитать "Рекомендации по оформлению схем алгоритмов".
3. Пройти тест по оформлению схем алгоритмов.
4. Создать схему алгоритма построения фрактала в редакторе yEd.
5. Написать программу вывода фрактала на экран.

1) **Схема алгоритма построения фрактала**.

Самостоятельно (!!!) создать схему алгоритма отрисовки фрактала (геометрического, если ваш вариант - фрактал алгебраический, и наоборот) в редакторе yEd.

Для этого предварительно посмотреть краткие рекомендации по оформлению схем алгоритмов:

(https://bbb.ssau.ru:8443/playback/presentation/2.3/1df526419a868a35b82dfeccaaeb14d5c2742b98-1661865964059)

и мастер-класс по созданию схем в редакторе yEd:

(https://bbb.ssau.ru:8443/playback/presentation/2.3/1df526419a868a35b82dfeccaaeb14d5c2742b98-1655814856853).

В схеме алгоритма должны использоваться все (!!!) блоки, рассмотренные в МК по yEd.

2) **Программа**.

Самостоятельно (!!!) с нуля написать программу построения фрактала. Использовать старые программы (из интернета, от одногруппников, от предыдущих потоков) НЕЛЬЗЯ!

В случае построения ***геометрического*** фрактала необходимо обеспечить его построение по шагам **методом *L*-систем**.

Можно пользоваться только функцией рисования линии. Никакими встроенными функциями типа библиотеки turtle пользоваться нельзя!

Отрисовка должна производиться, начиная с 0-го шага, и последовательно (по нажатию кнопки формы или клавиши клавиатуры) должны выводиться следующие шаги. (Например, как на рис. 1.)

В случае построения ***алгебраического*** фрактала на экран должно быть выведено изображение фрактала, и должна иметься возможность его масштабирования. Можно пользоваться только функцией рисования пиксела на экране.

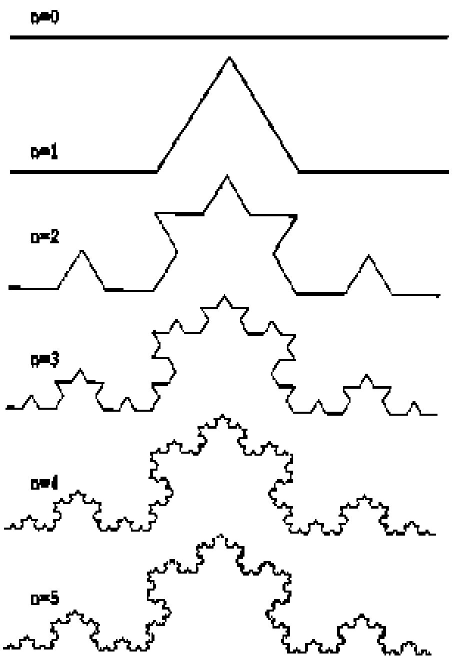


Рис. 1. Кривая Коха

Теоретическая часть

Термин *фрактал* (от латинского *fractus* - "дробный, состоящий из частей") был впервые использован для описания самоподобных структур в работе Бенуа Мандельброта "Фракталы" в 1975 году (*Benoît Mandelbrot "Les objets fractals, forn, hasard et dimension"*). Наиболее общее понятие фрактала, данное Мандельбротом, следующее: *"Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"*.

Яркие примеры применения фракталов к описанию различных природных явлений и объектов даны в книге Мандельброта "Фрактальная геометрия природы" (*Benoit Mandelbrot "The Fractal Geometry of Nature", 1982*). Книга принесла ученому всемирную известность, а фрактальная геометрия была по праву признана важной областью исследования.

Фракталы принято разделять на три группы: геометрические, алгебраические и стохастические.

Геометрические фракталы являются наиболее простыми в получении и самыми наглядными. В простейшем двумерном случае их получают с помощью некоторой ломаной, называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков. составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

В качестве примера рассмотрим процесс построения триадной кривой Коха. Эта кривая была рассмотрена шведским математиков Хельге фон Кох ещё в 1904 году. Процесс построения кривой начинается с единичного отрезка (0-й шаг) (см. рис. 1).

Далее разделим этот отрезок на три равные части и заменим средний интервал двумя связанными отрезками той же длины, как это показано на рисунке. В результате образуется новая ломаная (1-й шаг), состоящая из четырёх звеньев.

На следующем шаге та же операция применяется к каждому из четырёх звеньев в отдельности. Получаются новые ломаные, причём вершины каждой остаются вершинами последующей.

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим фрактальную кривую Коха.

Метод L-систем. Наиболее простым способом построения геометрических фракталов является метод L-систем, разработанный Аристидом Линденмайером (Aristid Lindenmayer Mathematical models for cellular interaction in development I. Filaments with one-sided inputs. *Journal of Theoretical Biology*, 1968 - 18). Биолог по образованию, Линденмайер предложил метод описания сложных природных объектов и процессов с помощью простых составляющих и некоторых правил их преобразования. При этом он использовал определенную формальную грамматику, опирающуюся на правила генерации и преобразования символьных строк.

Пусть имеется некоторая состоящая из произвольных символов строка, называемая аксиомой, и набор строк, называемых правилами. Каждое правило имеет вид ***символ → строка***.

Пример:

Аксиома: **acb**
Правила: **a → ab,**
b → a

Сначала (на 0 шаге) положим результирующую строку равной аксиоме.

Далее начнем просматривать строку слева направо. Если очередной символ не задает никакого правила, то он просто переносится в новую результирующую строку. Если же очередной символ является первым символом одного из правил, то он заменяется на строку из соответствующего правила. Для рассмотренного примера:

0-й шаг:	**a c b**	Результирующая строка S_0: **acb**
1-й шаг:	**ab c a**	Результирующая строка S_1: **abca**
2-й шаг:	**ab a c ab**	Результирующая строка S_2: **abacab**
3-й шаг:	**ab a ab c ab a**	Результирующая строка S_3: **abaabcaba**

и так далее.

Линденмайер рассматривал L-системы, как формальный способ описания развития биологических объектов, но позже L-системы нашли применение в компьютерной графике. Оказалось, что с их помощью очень удобно рисовать фракталы и различные природные объекты с самоподобной структурой. Метод построения графических объектов с помощью L-систем ещё называют "черепашьей графикой" (turtle geometry).

Пусть имеется некоторый исполнитель ("черепашка"), который может выполнить набор команд. Черепашка перемещается по плоскости. Текущее ***состояние черепашки задается координатами x, y и углом*** α, определяющим направление, в котором ползет черепашка. ***Угол*** α – это угол между положительным направлением оси x и направлением взгляда черепашки. Предположим, что у черепашки есть память, организованная в виде стека (т.е. черепашка может запомнить несколько значений, но вспоминать их она будет в обратном порядке: то, что запомнила последним, вспомнит первым, то, что запомнила предпоследним, вспомнит вторым и т.д.). Пусть начальное положение черепашки задается координатами x_0, y_0 и направлением движения α_0. Кроме того, пусть задано значение шага h, на который перемещается черепашка по команде "вперед" и угол β, на который поворачивает черепашка по команде "повернуть направо" или по команде "повернуть налево".

Пусть черепашка умеет выполнять следующие команды (каждая команда кодируется одним символом):

"**F**" – переместиться вперед на шаг h в направлении α, оставив след (нарисовав отрезок);

"**f**" – переместиться вперед на шаг h в направлении α, не оставляя следа;

"**+**" – повернуть направо (по часовой стрелке) на угол β (изменить направление движения);

"**–**" – повернуть налево (против часовой стрелки) на угол β (изменить направление движения);

"**[**" – запомнить (отложить в стек) текущее состояние (x, y, α);

"**]**" – вспомнить (взять из стека и установить) последнее сохраненное в памяти состояние (x, y, α).

Программой для черепашки является строка, в которой, кроме указанных символов, могут встречаться и любые другие. Черепашка просматривает строку-программу символ за символом. Команды она выполняет, а символы, не являющиеся командами, пропускает.

В качестве примера рассмотрим построение управляющей строки для триадной кривой Коха.

В этом случае:
аксиома: F
правило: F → F–F++F–F
угол β=360/6=60°

На 0 шаге: **F**
На 1 шаге: **F–F++F–F**
На 2 шаге: **F–F++F–F – F–F++F–F ++ F–F++F–F – F–F++F–F**
На 3 шаге: **F–F++F–F – F–F++F–F ++ F–F++F–F – F–F++F–F – F–F++F–F – F–F++F–F ++ F–F++F–F – F–F++F–F ++ F–F++F–F – F–F++F–F ++ F–F++F–F – F–F++F–F – F–F++F–F – F–F++F–F ++ F–F++F–F – F–F++F–F**
…
Изображение линий этих шагов приведено на рис. 1.

Алгебраические фракталы

Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в **n**-мерных пространствах.

В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта (см. рис. 2). Алгоритм его построения достаточно прост и основан на простом итеративном выражении:

$$Z_{k+1} = Z_k^2 + Z_0, \qquad (1)$$

где Z_k - комплексная переменная.

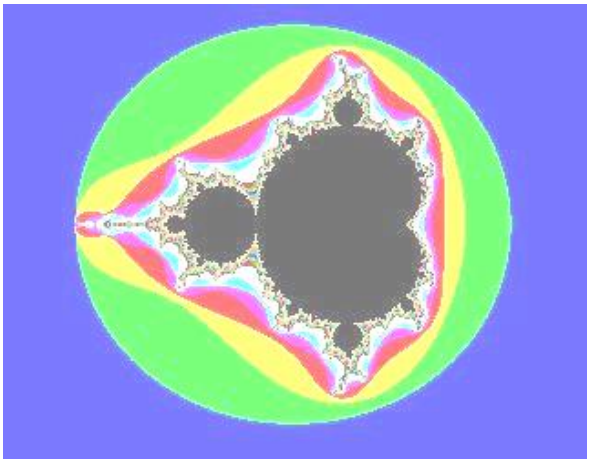


Рис. 2. Множество Мандельброта

Для создания фрактала, необходимо для каждой точки изображения выполнить цикл итераций согласно формуле (1).

Стартовое значение $Z_0=x_0+iy_0$, где x_0, y_0 - координаты точки изображения, для которой выполняется цикл.

Цикл выполняется до тех пор, пока не выполнится условие завершения цикла, но не более MAXCOLOR раз. Условие остановки цикла для множества Мандельброта $|Z_k| > 2$. После остановки цикла ***текущая точка окрашивается в цвет, который зависит от количества выполненных итераций***.

Псевдокод цикла, который необходимо запускать для каждой точки из области вычислений, имеет следующий вид:

```
n:=0; z0:=z;
while (УсловиеПродолжения(zn)&&(n<MAXCOLOR))
do begin
    zn+1:=ПравилоПреобразования(zn);
    inc(n);
end;
```

Значение *n* - количество выполненных итераций цикла интерпретируется как цвет точки изображения, для которой выполнялся цикл.

Напомним, что над комплексным числом $Z = x + iy$ можно производить следующие арифметические действия:

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа;

$Z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy$ - квадрат комплексного числа;

$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$ - сумма комплексных чисел;

$(a+ib)\cdot(c+id) = (a\cdot c-b\cdot d)+i(a\cdot d+c\cdot b)$ - произведение комплексных чисел;

$(a+ib)/(c+id) = (ac+bd)/(c^2+d^2)+i((cb-ad)/(c^2+d^2))$ - частное.

Стохастические фракталы

Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Типичный представитель данного класса фракталов "Плазма" (см. рис. 3). Для ее построения возьмем прямоугольник и для каждого его угла случайным образом определим цвет. Далее находим центральную точку прямоугольника и раскрашиваем ее в цвет равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число. Чем больше случайное число - тем более "рваным" будет рисунок. Если мы теперь скажем, что цвет точки - это высота над уровнем моря - получим вместо плазмы - горный массив. Именно на этом принципе моделируются горы в большинстве программ. С помощью алгоритма, похожего на плазму строится карта высот, к ней применяются различные фильтры, накладываем текстуру и, пожалуйста, фотореалистичные горы готовы.

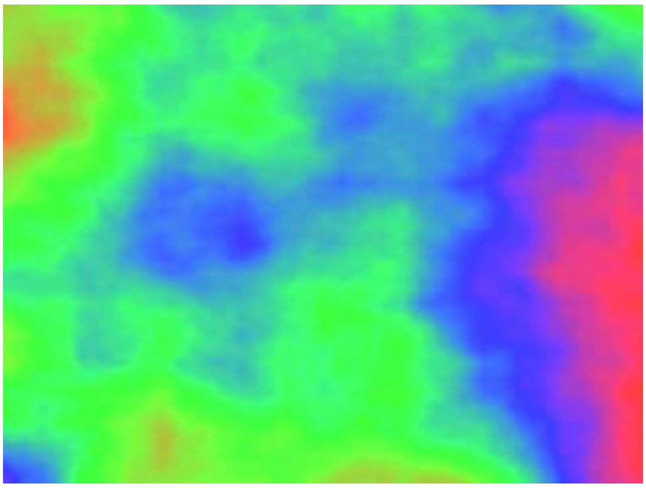
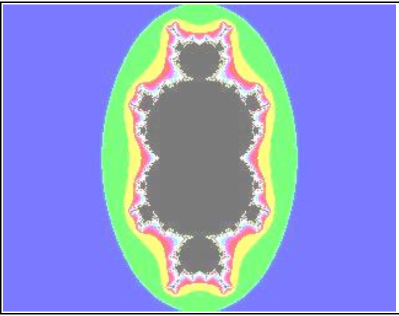
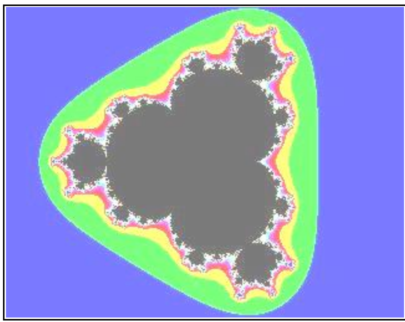
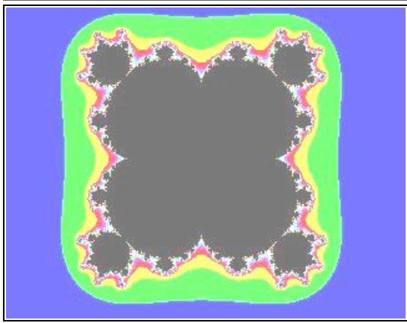
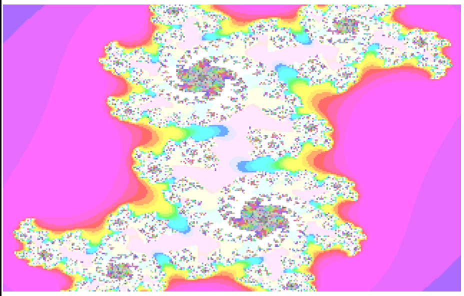
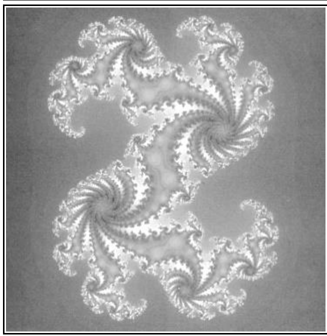
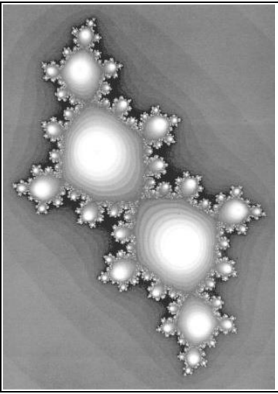
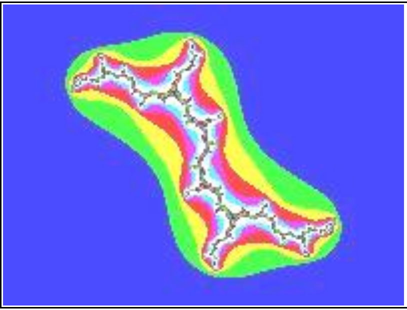
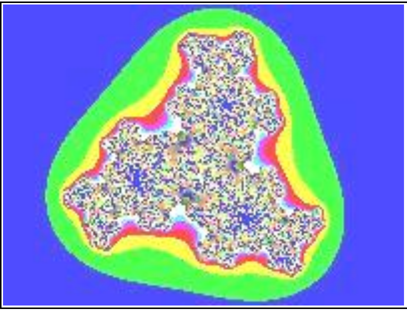
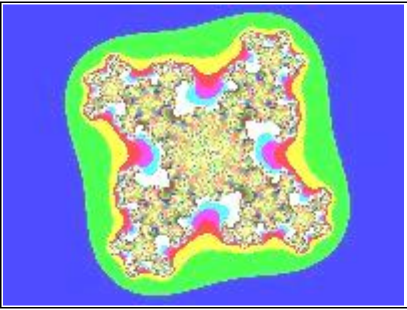
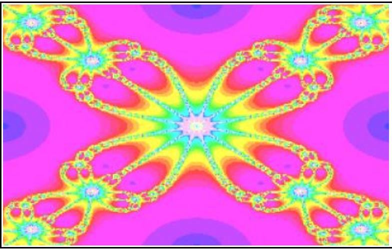
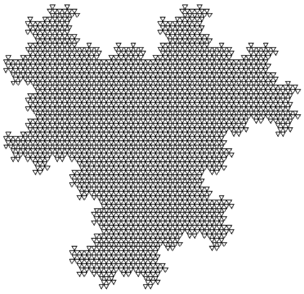
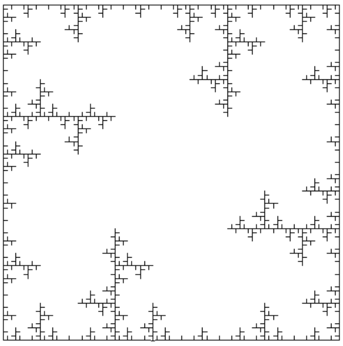
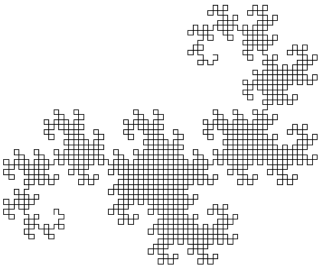
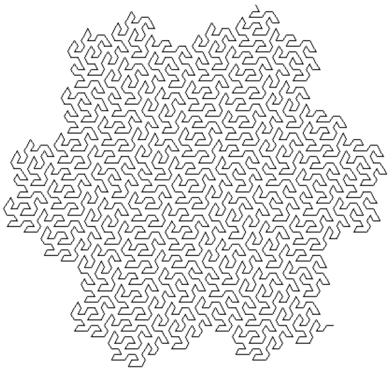
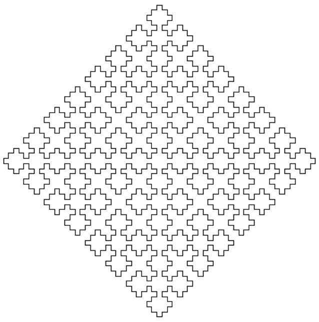


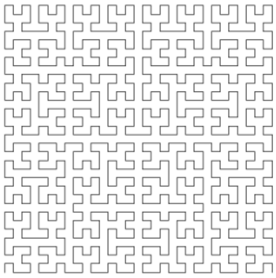
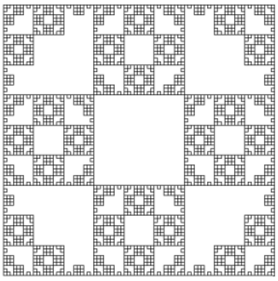
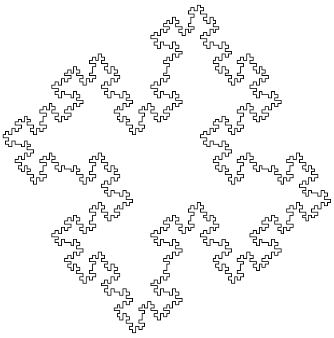
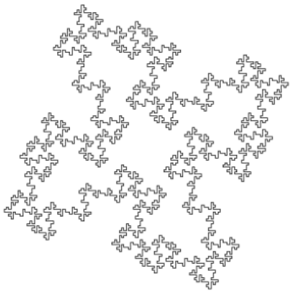
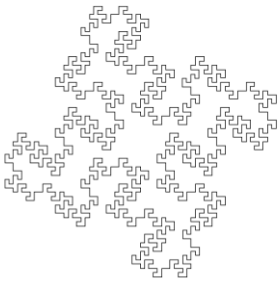
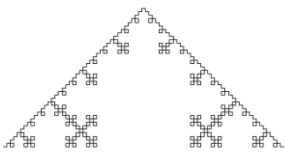
Рис. 3. "Плазма"

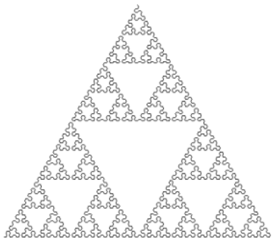
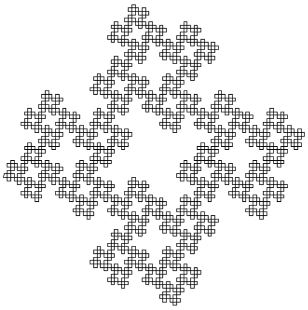
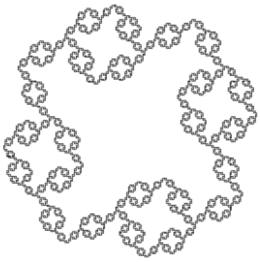
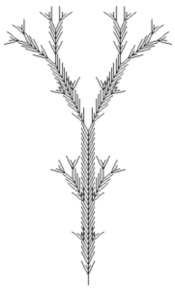
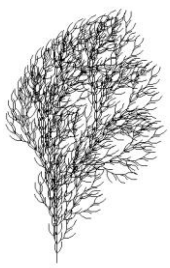
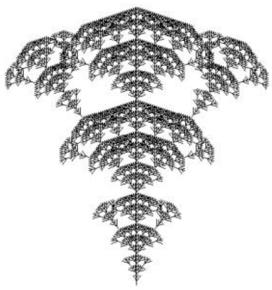
Индивидуальные задания по теме "Фракталы"

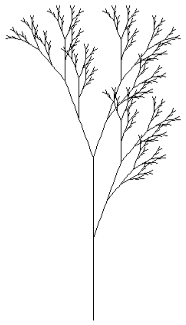
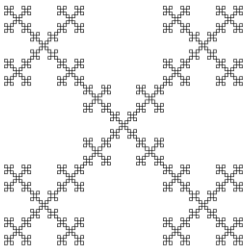
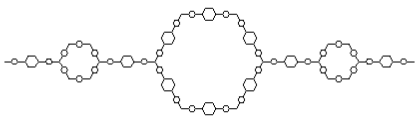
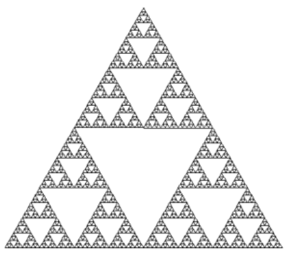
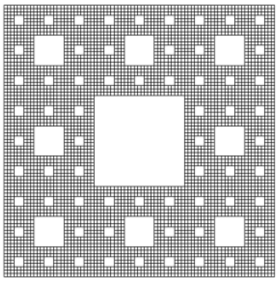
№ варианта	Изображение	Описание
Аналитические фракталы		
1		**Множество Мандельброта** $Z_{k+1} = Z_k^3 + Z_0$, $x \in (-2{,}2;\ 1)$, $y \in (-1{,}2;\ 1{,}2)$. Условие остановки цикла $\lvert Z_k \rvert > 2$
2		$Z_{k+1} = Z_k^4 + Z_0$, границы и условие остановки цикла как в варианте 1
3		$Z_{k+1} = Z_k^5 + Z_0$, границы и условие остановки цикла как в варианте 1
4		**Множество Жулиа** $Z_{k+1} = Z_k^2 + C$, C=0,36+i·0,36, $x \in (-1;\ 1)$, $y \in (-1{,}2;\ 1{,}2)$. Условие завершения цикла $\lvert Z_k \rvert > 2$.
5		Множество Жулиа C=0,32+i·0,043, итерационная формула, границы и условие остановки цикла как в варианте 4

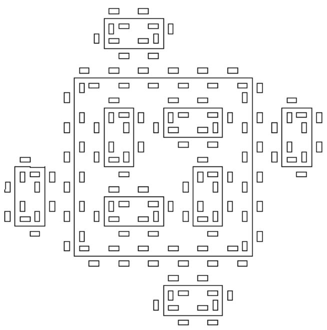
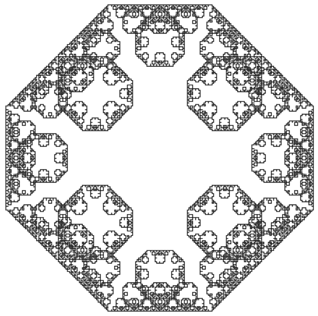
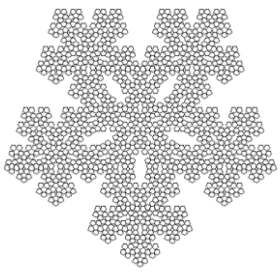
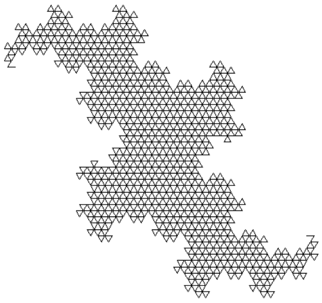
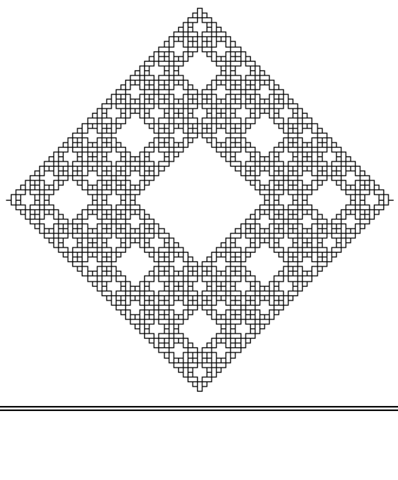
6		Множество Жулиа С =-0,39054-i·0,58679, итерационная формула, границы и условие остановки цикла как в варианте 4
7		Множество Жулиа С=i итерационная формула, границы и условие остановки цикла как в варианте 4
8		Множество Жулиа $Z_{k+1} = Z_k^3 + C$, границы и условие остановки цикла как в варианте 4
9		Множество Жулиа $Z_{k+1} = Z_k^4 + C$, границы и условие остановки цикла как в варианте 4
10		**Крест Ньютона** $Z_{k+1} = \frac{3Z_k^4 + 1}{4Z_k^3}$. $x\in$(-1; 1), $y\in$(-1; 1). Условие остановки цикла $\left\|Z^4 - 1\right\|^2 < \varepsilon$

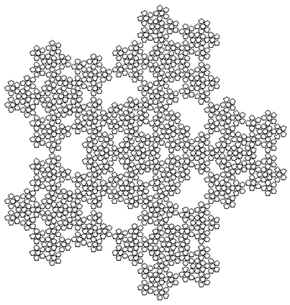
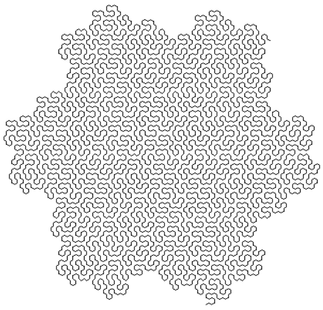
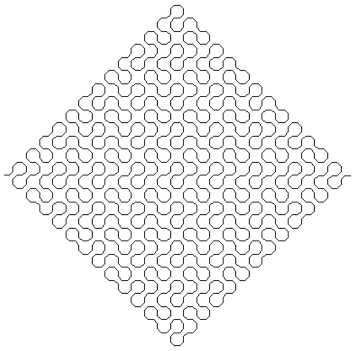
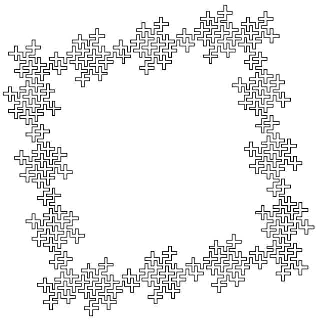
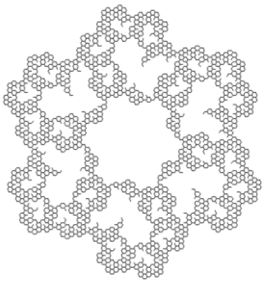
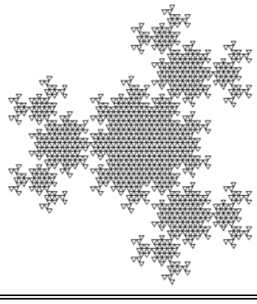
L-системы		
11		Аксиома: F+F+F Правило: F → F-F+F Угол: $\frac{2\pi}{3}$
12		Аксиома: F+F+F+F Правило: F → FF+F++F+F Угол: $\frac{\pi}{2}$ Ледяные фракталы
13		**Кривая дракона** Аксиома: FX Правила: X → X+YF+ Y → -FX-Y Угол: $\frac{\pi}{2}$
14		**Кривая Госпера** Аксиома: XF Правила: X → X+YF++YF-FX--FXFX-YF+ Y → -FX+YFYF++YF+FX--FX-Y Угол: $\frac{\pi}{3}$
15		**Кривая Серпинского** Аксиома: F+XF+F+XF Правило: X → XF-F+F-XF+F+XF-F+F-X Угол: $\frac{\pi}{2}$

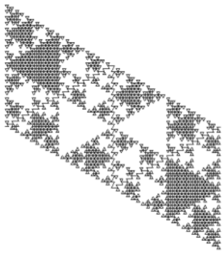
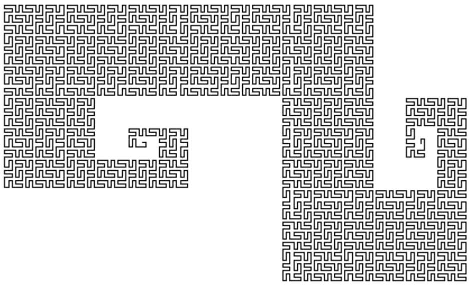
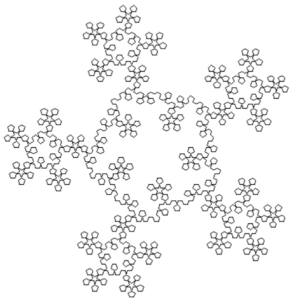
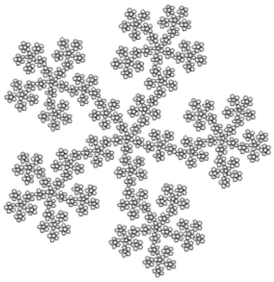
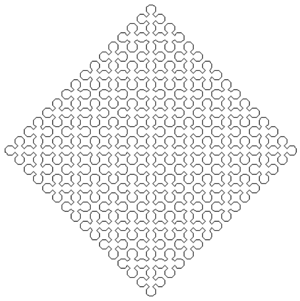
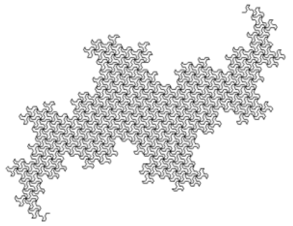
16		**Кривая Гильберта** Аксиома: X Правила: X → -YF+XFX+FY- Y → +XF-YFY-FX+ Угол: $\frac{\pi}{2}$
17		Аксиома: F+F+F+F Правило: F → FF+F+F+F+FF Угол: $\frac{\pi}{2}$
18		Аксиома: F+F+F+F Правило: F → F+F-F-FF+F+F-F Угол: $\frac{\pi}{2}$ Обобщения кривой Коха
19		Аксиома: F+F+F+F Правило: F → F+F-F-FFF+F+F-F Угол: $\frac{\pi}{2}$ Обобщения кривой Коха
20		Аксиома: F+F+F+F Правило: F → F-FF+FF+F+F-F-FF+F+F-F-FF-FF+F Угол: $\frac{\pi}{2}$ Обобщения кривой Коха
21		Аксиома: F Правило: F → F-F+F+F-F Угол: $\frac{\pi}{2}$

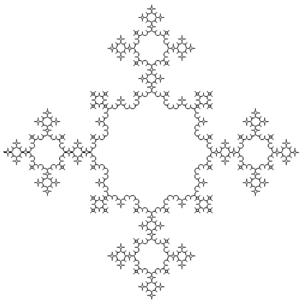
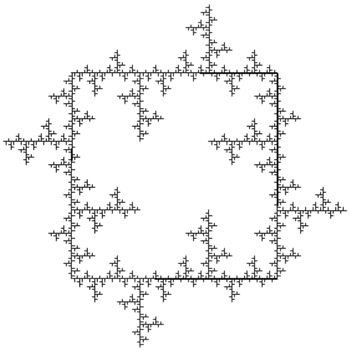
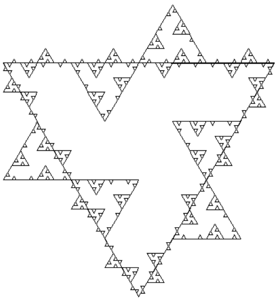
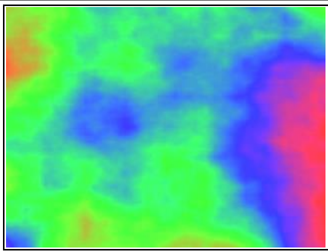
22		Аксиома: YF Правила: X → YF+XF+Y Y → XF-YF-X Угол: $\frac{\pi}{3}$
23		Аксиома: F+F+F+F Правило: F → F+F-F+F+F Угол: $\frac{\pi}{2}$
24		Аксиома: F+F+F+F Правило: F → FF+F+F+F+F+F-F Угол: $\frac{\pi}{2}$
25		**Куст** Аксиома: Y Правила: X → X[-FFF][+FFF]FX Y → YFX[+Y][-Y] Угол: $\frac{\pi}{7}$
26		**Куст** Аксиома: F Правило: F → FF+[+F-F-F]-[-F+F+F] Угол: $\frac{\pi}{8}$
27		**Куст** Аксиома: F Правило: F → F[+FF][-FF]F[-F][+F]F Угол: $\frac{\pi}{5}$

28		**Куст** Аксиома: X Правила: F → FF X → F[+X]F[-X]+X Угол: $\frac{\pi}{9}$
29		**Куст** Аксиома: F-F-F-F Правило: F → F-F+F+F-F Угол: $\frac{\pi}{2}$
30		**Сорняк** Аксиома: F Правило: F → F[+F]F[-F]F Угол: $\frac{\pi}{7}$
31		Аксиома: F Правила: F → FXF X → [-F+F+F]+F-F-F+ Угол: $\frac{\pi}{3}$
32		**Треугольник Серпинского** Аксиома: FXF--FF--FF Правила: F → FF X → --FXF++FXF++FXF-- Угол: $\frac{\pi}{3}$
33		**Ковёр Серпинского** Аксиома: F Правило: F → FFF[+FFF+FFF+FFF] Угол: $\frac{\pi}{2}$

34		**Мозаика** Аксиома: F-F-F-F Правила: F → F-b+FF-F-FF-Fb-FF+b-FF+F+FF+Fb+FFF b → bbbbbb Угол: $\frac{\pi}{2}$ Здесь b означает переместиться вперёд на один шаг, не прорисовывая след.
35		**Кривая Леви** Аксиома: F++F++F++F Правило: F → -F++F- Угол: $\frac{\pi}{4}$
36		Аксиома: F++F++F++F++F Правило: F → F++F++F+++++F-F++F Угол: $\frac{\pi}{5}$
37		Аксиома: F Правило: F → F+F-F Угол: $\frac{2\pi}{3}$
38		**Ковёр Серпинского** Аксиома: F Правила: F → F+F-F-F-b+F+F+F-F b → bbb Угол: $\frac{\pi}{2}$ Здесь b означает переместиться вперёд на один шаг, не прорисовывая след.

39		Аксиома: F-F-F-F-F Правило: F → F-F++F+F-F-F Угол: $\frac{2\pi}{5}$
40		Аксиома: X Правила: F → X → -F++F-X-F--F+Y---F--F+Y+F++F-X+++F++F-X-F++F-X+++F--F+Y-- Y → +F++F-X-F--F+Y+F--F+Y---F--F+Y---F++F-X+++F++F-X+++F--F+Y Угол: $\frac{\pi}{6}$
41		Аксиома: FX Правила: F → X → FX-FY-FX+FY+FX+FY+FX+FY+FX-FY-FX-FY-FX-FY-FX+FY+FX Y → FY Угол: $\frac{\pi}{4}$
42		Аксиома: XYXYXYX+XYXYXYX+XYXYXYX+XYXYXYX Правила: F → X → FX+FX+FXFY-FY- Y → +FX+FXFY-FY-FY Угол: $\frac{\pi}{2}$
43		Аксиома: F--F--F--F--F--F Правило: F → -F[--F--F]++F--F+ Угол: $\frac{\pi}{6}$
44		Аксиома: F+F+F Правило: F → F+FF-F Угол: $\frac{2\pi}{3}$

45		Аксиома: X Правила: F → X → FY+FYFY-FY Y → FX-FXFX+FX Угол: $\frac{2\pi}{3}$
46		Аксиома: X Правила: F → X → FX+FX+FXFYFX+FXFY-FY-FY- Y → +FX+FX+FXFY-FYFXFY-FY-FY Угол: $\frac{\pi}{2}$
47		Аксиома: X-X-X-X-X Правила: F → X → FX-FX-FX+FY+FY+FX-FX Y → FY+FY-FX-FX-FY+FY+FY Угол: $\frac{2\pi}{5}$
48		Аксиома: F-F-F-F-F Правило: F → F-F-F++F+F-F Угол: $\frac{2\pi}{5}$
49		Аксиома: L--F--L--F Правила: L → +R-F-R+ R → -L+F+L- Угол: $\frac{\pi}{4}$
50		Аксиома: X Правила: X → F-F-F+F+FX++F-F-F+F+FX--F-F-F+F+FX F → Угол: $\frac{\pi}{3}$

51		Аксиома: F++++F Правило: F → F+F+F++++F+F+F Угол: $\frac{\pi}{4}$
52		Аксиома: F+F+F+F++F-F-F-F Правило: F → F+F++F+FF Угол: $\frac{\pi}{2}$
53		Аксиома: F++F++F+++F--F--F Правило: F → FF++F++F++FFF Угол: $\frac{\pi}{3}$
Стохастические фракталы		
54		Плазма