Numerikus módszerek 1. **2. ZÁRTHELYI** **2019. december 10.**

Programtervező informatikus Bsc szak

Gyak.vez. neve ______________________ **Név** ______________________

Gyak. ideje ______________________ **Neptun kód** ______________________

Pontszám ______________

1. (4 pont) Tegyük fel, hogy $0 \leq \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra a sorösszeg konstans.
Vagyis $a_{ij} \geq 0$ és $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = c \ \ (1 \leq i, j \leq n)$.
Igazoljuk, hogy ekkor a spektrálsugárra $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty$.

2. (12 pont) Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrixot!

a) Számítsuk ki az A mátrix 1-es és 2-es kondíciószámát!
b) Igazoljuk, hogy $\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) < \mathrm{cond}_1(\mathbf{A})$?

3. (10 pont) Az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Jacobi-iterációt!

a) Bizonyítsuk a konvergenciát!
b) Írjuk fel a hibabecslését!
c) Hány lépést kell tennünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$?

4. (8 pont) Írjuk fel a **3.** feladat lineáris egyenletrendszerére a Gauss–Seidel-iterációt!

a) Bizonyítsuk a konvergenciát!
b) Számítsuk ki $\mathbf{x_1}$ -et a koordinátás alakjában, ha $\mathbf{x_0} = [1,\ 2,\ 3]^T$!
c) Ebben az esetben a Jacobi vagy a G-S iteráció a gyorsabb? Válaszát indokolja!

5. (8 pont) Az $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Richardson-iterációt!

a) Pontosan mely p paraméter értékekre konvergens?
b) Mi az optimális paraméter és mennyi ekkor a kontrakciós együttható?

6. (8 pont) Mi lesz a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix $J = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontása? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!