# Számításelmélet

## 13. előadás

előadó: Kolonits Gábor
kolomax@inf.elte.hu

# PSPACE-teljes problémák

A hierarchia tétel alapján tudjuk, hogy $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$.

# PSPACE-teljes problémák

A hierarchia tétel alapján tudjuk, hogy $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$.

Az a sejtésünk, hogy a fenti tartalmazások valódiak.

# PSPACE-teljes problémák

A hierarchia tétel alapján tudjuk, hogy NP $\subseteq$ PSPACE $\subseteq$ EXPTIME.

Az a sejtésünk, hogy a fenti tartalmazások valódiak.

Számos érdekes probléma tartozik ebbe az osztályba, köztük számos olyan akármekkora táblán játszható kétszemélyes játék nyerő állásainak meghatározása, ahol a lépésszám polinomiálisan korlátozott, a játékosok felváltva lépnek és aktuális lépésük függ az ellenfél előző lépésétől.

# PSPACE-teljes problémák

A hierarchia tétel alapján tudjuk, hogy NP $\subseteq$ PSPACE $\subseteq$ EXPTIME.

Az a sejtésünk, hogy a fenti tartalmazások valódiak.

Számos érdekes probléma tartozik ebbe az osztályba, köztük számos olyan akármekkora táblán játszható kétszemélyes játék nyerő állásainak meghatározása, ahol a lépésszám polinomiálisan korlátozott, a játékosok felváltva lépnek és aktuális lépésük függ az ellenfél előző lépésétől.

A PSPACE-teljes problémák a problémaosztály legnehezebb problémái.

# Teljesen kvantifikált Boole formulák

## Definíció

**Teljesen kvantifikált Boole formulának** (TKBF-nek) nevezünk egy olyan formulát, melyben minden ítéletváltozó univerzális vagy egzisztenciális kvantorral kötött, ráadásul úgy, hogy a formula két részre osztható: elől vannak a kvantorok és utána egy kvantormentes ítéletlogikai formula.

# Teljesen kvantifikált Boole formulák

## Definíció

**Teljesen kvantifikált Boole formulának** (TKBF-nek) nevezünk egy olyan formulát, melyben minden ítéletváltozó univerzális vagy egzisztenciális kvantorral kötött, ráadásul úgy, hogy a formula két részre osztható: elől vannak a kvantorok és utána egy kvantormentes ítéletlogikai formula.

A kvantorok hatásköre a saját pozíciójuktól a formula végéig tart.

# Teljesen kvantifikált Boole formulák

## Definíció

**Teljesen kvantifikált Boole formulának** (TKBF-nek) nevezünk egy olyan formulát, melyben minden ítéletváltozó univerzális vagy egzisztenciális kvantorral kötött, ráadásul úgy, hogy a formula két részre osztható: elől vannak a kvantorok és utána egy kvantormentes ítéletlogikai formula.

A kvantorok hatásköre a saját pozíciójuktól a formula végéig tart.

**Példák:**

$\varphi_1 = \exists x_1 \forall x_2 (x_1 \to x_2)$

# Teljesen kvantifikált Boole formulák

## Definíció

**Teljesen kvantifikált Boole formulának** (TKBF-nek) nevezünk egy olyan formulát, melyben minden ítéletváltozó univerzális vagy egzisztenciális kvantorral kötött, ráadásul úgy, hogy a formula két részre osztható: elől vannak a kvantorok és utána egy kvantormentes ítéletlogikai formula.

A kvantorok hatásköre a saját pozíciójuktól a formula végéig tart.

**Példák:**

$\varphi_1 = \exists x_1 \forall x_2 (x_1 \rightarrow x_2)$

$\varphi_2 = \exists x_1 \forall x_2 ((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$

# Teljesen kvantifikált Boole formulák

**Definíció**

**Teljesen kvantifikált Boole formulának** (TKBF-nek) nevezünk egy olyan formulát, melyben minden ítéletváltozó univerzális vagy egzisztenciális kvantorral kötött, ráadásul úgy, hogy a formula két részre osztható: elől vannak a kvantorok és utána egy kvantormentes ítéletlogikai formula.

A kvantorok hatásköre a saját pozíciójuktól a formula végéig tart.

**Példák:**

$\varphi_1 = \exists x_1 \forall x_2 (x_1 \rightarrow x_2)$

$\varphi_2 = \exists x_1 \forall x_2 ((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$

A TKBF-ek zártak, igazságértékük változókiértékeléstől független.

# Teljesen kvantifikált Boole formulák

**Definíció**

**Teljesen kvantifikált Boole formulának** (TKBF-nek) nevezünk egy olyan formulát, melyben minden ítéletváltozó univerzális vagy egzisztenciális kvantorral kötött, ráadásul úgy, hogy a formula két részre osztható: elől vannak a kvantorok és utána egy kvantormentes ítéletlogikai formula.

A kvantorok hatásköre a saját pozíciójuktól a formula végéig tart.

**Példák:**

$\varphi_1 = \exists x_1 \forall x_2 (x_1 \to x_2)$

$\varphi_2 = \exists x_1 \forall x_2 ((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$

A TKBF-ek zártak, igazságértékük változókiértékeléstől független.

$\varphi_1$ igaz, hiszen bármi is $x_2$ igazságértéke, ha $x_1$-et hamisra állítjuk az ítéletlogikai rész igaz lesz.

# Teljesen kvantifikált Boole formulák

### Definíció

**Teljesen kvantifikált Boole formulának** (TKBF-nek) nevezünk egy olyan formulát, melyben minden ítéletváltozó univerzális vagy egzisztenciális kvantorral kötött, ráadásul úgy, hogy a formula két részre osztható: elől vannak a kvantorok és utána egy kvantormentes ítéletlogikai formula.

A kvantorok hatásköre a saját pozíciójuktól a formula végéig tart.

**Példák:**

$\varphi_1 = \exists x_1 \forall x_2 (x_1 \to x_2)$
$\varphi_2 = \exists x_1 \forall x_2 ((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$

A TKBF-ek zártak, igazságértékük változókiértékeléstől független.

$\varphi_1$ igaz, hiszen bármi is $x_2$ igazságértéke, ha $x_1$-et hamisra állítjuk az ítéletlogikai rész igaz lesz.

$\varphi_2$ hamis, hiszen $x_1$ akár igaz akár hamis, van $x_2$-nek olyan igazságértéke, hogy az egyik tag hamis lesz.

# $\textsc{QSat}$ PSPACE-teljes

**Definíció**

$\textsc{QSat} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ igaz teljesen kvantifikált Boole formula$\}$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

**Definíció**

$\textsc{Qsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ igaz teljesen kvantifikált Boole formula$\}$.

Az alábbi tétel szerint $\textsc{Qsat}$ a legnehezebb problémák közé tartozik a PSPACE osztályon belül.

# $\textsc{QSat}$ PSPACE-teljes

**Definíció**

$\textsc{QSat} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ igaz teljesen kvantifikált Boole formula$\}$.

Az alábbi tétel szerint $\textsc{QSat}$ a legnehezebb problémák közé tartozik a PSPACE osztályon belül.

**Tétel**

$\textsc{QSat}$ PSPACE-teljes.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

**Definíció**

$\textsc{Qsat} = \{\langle\varphi\rangle \,|\, \varphi$ igaz teljesen kvantifikált Boole formula$\}$.

Az alábbi tétel szerint $\textsc{Qsat}$ a legnehezebb problémák közé tartozik a PSPACE osztályon belül.

**Tétel**

$\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes.

A PSPACE-teljességet a polinom idejű visszavezetésre nézve értjük.

# QSAT PSPACE-teljes

**Bizonyítás:** QSAT PSPACE-beliségéhez tekintsük az ÉRTÉK($\varphi$) függvényt, mely visszaadja a $\varphi$ TKBF igazságértékét. ÉRTÉK($\varphi$)-t kiszámíthatjuk a következő rekurzív algoritmussal.

# QSAT PSPACE-teljes

**Bizonyítás:** QSAT PSPACE-beliségéhez tekintsük az ÉRTÉK($\varphi$) függvényt, mely visszaadja a $\varphi$ TKBF igazságértékét. ÉRTÉK($\varphi$)-t kiszámíthatjuk a következő rekurzív algoritmussal.

**function** ÉRTÉK($\varphi$)
  **if** $\varphi = \forall x \psi$ **then return** ÉRTÉK($\psi^i$) $\wedge$ ÉRTÉK($\psi^h$)
  **else if** $\varphi = \exists x \psi$ **then return** ÉRTÉK($\psi^i$) $\vee$ ÉRTÉK($\psi^h$)
  **else return** $B(\varphi)$

ahol ha $\psi$ egyetlen szabad változóval rendelkező formula

$\psi^i$ : $\psi$ egyetlen szabad változóját igazzal helyettesítjük.

$\psi^h$ : $\psi$ egyetlen szabad változóját hamissal helyettesítjük.

továbbá ha $\varphi$ változómentes formula

$B(\varphi)$: a $\varphi$ kiértékelésével kapott igazságérték.

# QSAT PSPACE-teljes

**Bizonyítás:** QSAT PSPACE-beliségéhez tekintsük az ÉRTÉK($\varphi$) függvényt, mely visszaadja a $\varphi$ TKBF igazságértékét. ÉRTÉK($\varphi$)-t kiszámíthatjuk a következő rekurzív algoritmussal.

**function** ÉRTÉK($\varphi$)
  **if** $\varphi = \forall x \psi$ **then return** ÉRTÉK($\psi^i$) $\wedge$ ÉRTÉK($\psi^h$)
  **else if** $\varphi = \exists x \psi$ **then return** ÉRTÉK($\psi^i$) $\vee$ ÉRTÉK($\psi^h$)
  **else return** $B(\varphi)$

ahol ha $\psi$ egyetlen szabad változóval rendelkező formula

$\psi^i$ : $\psi$ egyetlen szabad változóját igazzal helyettesítjük.

$\psi^h$ : $\psi$ egyetlen szabad változóját hamissal helyettesítjük.

továbbá ha $\varphi$ változómentes formula

$B(\varphi)$: a $\varphi$ kiértékelésével kapott igazságérték.

*Példa:* Ha $\psi = \forall x(x \wedge \neg y)$, akkor $\psi^h = x \wedge \neg h$.
Ha $\varphi = i \wedge \neg h \rightarrow h$, akkor $B(\varphi) = h$.

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

# Qsat PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\text{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\text{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\text{Érték}(\varphi_i) = \text{Érték}(\varphi_{ii}) \wedge \text{Érték}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

## $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 ((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2 ((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\textsc{Érték}(\varphi_i) = \textsc{Érték}(\varphi_{ii}) \wedge \textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\textsc{Érték}(\varphi_i) = \textsc{Érték}(\varphi_{ii}) \wedge \textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.
$\varphi_{hh} = ((\neg h \vee h) \wedge (h \vee \neg h))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hh}) = B(\varphi_{hh}) = i$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\textsc{Érték}(\varphi_i) = \textsc{Érték}(\varphi_{ii}) \wedge \textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.
$\varphi_{hh} = ((\neg h \vee h) \wedge (h \vee \neg h))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hh}) = B(\varphi_{hh}) = i$.

$\varphi_h = \forall x_2((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))$.

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\text{ÉRTÉK}(\varphi_i) = \text{ÉRTÉK}(\varphi_{ii}) \wedge \text{ÉRTÉK}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.
$\varphi_{hh} = ((\neg h \vee h) \wedge (h \vee \neg h))$ $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{hh}) = B(\varphi_{hh}) = i$.

$\varphi_h = \forall x_2((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))$.

$((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_{i} = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\textsc{Érték}(\varphi_{i}) = \textsc{Érték}(\varphi_{ii}) \wedge \textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.
$\varphi_{hh} = ((\neg h \vee h) \wedge (h \vee \neg h))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hh}) = B(\varphi_{hh}) = i$.

$\varphi_{h} = \forall x_2((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))$.

$((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\textsc{Érték}(\varphi_{h}) = \textsc{Érték}(\varphi_{hi}) \wedge \textsc{Érték}(\varphi_{hh}) = h \wedge i = h$.

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\text{ÉRTÉK}(\varphi_i) = \text{ÉRTÉK}(\varphi_{ii}) \wedge \text{ÉRTÉK}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.
$\varphi_{hh} = ((\neg h \vee h) \wedge (h \vee \neg h))$ $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{hh}) = B(\varphi_{hh}) = i$.

$\varphi_h = \forall x_2((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))$.

$((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\text{ÉRTÉK}(\varphi_h) = \text{ÉRTÉK}(\varphi_{hi}) \wedge \text{ÉRTÉK}(\varphi_{hh}) = h \wedge i = h$.

$\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$.

# QSAT PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $\quad ((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\text{ÉRTÉK}(\varphi_i) = \text{ÉRTÉK}(\varphi_{ii}) \wedge \text{ÉRTÉK}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.
$\varphi_{hh} = ((\neg h \vee h) \wedge (h \vee \neg h))$ $\text{ÉRTÉK}(\varphi_{hh}) = B(\varphi_{hh}) = i$.

$\varphi_h = \forall x_2((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))$.

$((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $\quad ((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\text{ÉRTÉK}(\varphi_h) = \text{ÉRTÉK}(\varphi_{hi}) \wedge \text{ÉRTÉK}(\varphi_{hh}) = h \wedge i = h$.

$\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$.

$\forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))^i = \varphi_i$.
$\forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))^h = \varphi_h$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

Például $\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$-re:

$\varphi_{ii} = ((\neg i \vee i) \wedge (i \vee \neg i))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ii}) = B(\varphi_{ii}) = i$.
$\varphi_{ih} = ((\neg i \vee h) \wedge (i \vee \neg h))$. $\textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = B(\varphi_{ih}) = h$.

$\varphi_i = \forall x_2((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))$

$((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg i \vee x_2) \wedge (i \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\textsc{Érték}(\varphi_i) = \textsc{Érték}(\varphi_{ii}) \wedge \textsc{Érték}(\varphi_{ih}) = i \wedge h = h$.

$\varphi_{hi} = ((\neg h \vee i) \wedge (h \vee \neg i))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hi}) = B(\varphi_{hi}) = h$.
$\varphi_{hh} = ((\neg h \vee h) \wedge (h \vee \neg h))$ $\textsc{Érték}(\varphi_{hh}) = B(\varphi_{hh}) = i$.

$\varphi_h = \forall x_2((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))$.

$((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^i = \varphi_{ii}$. $((\neg h \vee x_2) \wedge (h \vee \neg x_2))^h = \varphi_{ih}$.

$\textsc{Érték}(\varphi_h) = \textsc{Érték}(\varphi_{hi}) \wedge \textsc{Érték}(\varphi_{hh}) = h \wedge i = h$.

$\varphi = \exists x_1 \forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))$.

$\forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))^i = \varphi_i$.
$\forall x_2((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2))^h = \varphi_h$.

$\textsc{Érték}(\varphi) = \textsc{Érték}(\varphi_i) \vee \textsc{Érték}(\varphi_h) = h \vee h = h$.

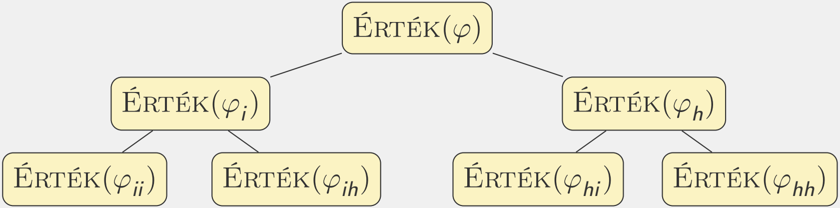
# QSAT PSPACE-teljes

A rekurzív függvényhívások fája:

- $\textsc{Érték}(\varphi)$
  - $\textsc{Érték}(\varphi_i)$
    - $\textsc{Érték}(\varphi_{ii})$
    - $\textsc{Érték}(\varphi_{ih})$
  - $\textsc{Érték}(\varphi_h)$
    - $\textsc{Érték}(\varphi_{hi})$
    - $\textsc{Érték}(\varphi_{hh})$

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

A rekurzív függvényhívások fája:




Az algoritmus tárigénye a formula méretébe lineáris, hiszen a rekurzív hívási fa mélysége $O(n)$ és elég a rekurzió minden szintjén egy változó igazságértékét tárolni (a második gyerekre csak akkor hívjuk meg az eljárást, ha a szülő értéke nem következik az első gyerek értékéből, ha pedig meghívtuk a második gyerekre, abból következik az első gyerek visszaadott értéke). Tehát $\textsc{Qsat} \in$ PSPACE.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

A PSPACE-nehézség bizonyításához legyen $L$ tetszőleges PSPACE-beli nyelv. Megmutatjuk, hogy $L \leqslant_p \textsc{Qsat}$. Legyen $M = \langle Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy $p(n)$ többlet tárigényű $L$-et eldöntő offline Turing gép és $w$ az $M$ egy tetszőleges $n (n \in \mathbb{N})$ hosszú bemenete. Feltehető, hogy $p(n)$ polinom és $p(n) \geqslant n$. Megadunk egy $\varphi$ TKBF-et úgy, hogy $w \in L(M)$ akkor és csak akkor, ha $\langle \varphi \rangle \in \textsc{Qsat}$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

A PSPACE-nehézség bizonyításához legyen $L$ tetszőleges PSPACE-beli nyelv. Megmutatjuk, hogy $L \leqslant_p \textsc{Qsat}$. Legyen $M = \langle Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy $p(n)$ többlet tárigényű $L$-et eldöntő offline Turing gép és $w$ az $M$ egy tetszőleges $n (n \in \mathbb{N})$ hosszú bemenete. Feltehető, hogy $p(n)$ polinom és $p(n) \geqslant n$. Megadunk egy $\varphi$ TKBF-et úgy, hogy $w \in L(M)$ akkor és csak akkor, ha $\langle \varphi \rangle \in \textsc{Qsat}$.

A tárigényre vonatkozó korlátból adódik, hogy $M$-nek $w$-re vonatkozó számítása legfeljebb $h = 2^{cp(n)}$ különböző konfigurációt tartalmaz valamely $c > 0$-ra. Így feltehető, hogy $M$ legfeljebb $h$ lépésben elfogadja vagy elutasítja $w$-t, és az előző előadáson látottak alapján az is, hogy egyetlen elfogadó állapot van.

# QSAT PSPACE-teljes

A bizonyítás során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a konfigurációkat az egyetlen munkaszalag tartalma, ezen szalag fejének helyzete és az aktuális állapot együttesen meghatározzák.

# QSAT PSPACE-teljes

A bizonyítás során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a konfigurációkat az egyetlen munkaszalag tartalma, ezen szalag fejének helyzete és az aktuális állapot együttesen meghatározzák.

A lehetséges konfigurációk legyenek $c_1, \ldots, c_h$, köztük $c_1 = c_{\text{kezdő}}$, $c_h = c_{\text{elfogadó}}$.

# QSAT PSPACE-teljes

A bizonyítás során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a konfigurációkat az egyetlen munkaszalag tartalma, ezen szalag fejének helyzete és az aktuális állapot együttesen meghatározzák.

A lehetséges konfigurációk legyenek $c_1, \ldots, c_h$, köztük $c_1 = c_{\text{kezdő}}$, $c_h = c_{\text{elfogadó}}$.

Ítéletváltozók: $x_{i,j,s}$ $(1 \leqslant i \leqslant h, 1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma)$.
$x_{i,j,s}$ annak az állításnak felel meg, hogy $c_i$ $j$-edik betűje $s$.

# QSAT PSPACE-teljes

A bizonyítás során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a konfigurációkat az egyetlen munkaszalag tartalma, ezen szalag fejének helyzete és az aktuális állapot együttesen meghatározzák.

A lehetséges konfigurációk legyenek $c_1, \ldots, c_h$, köztük $c_1 = c_{\text{kezdő}}$, $c_h = c_{\text{elfogadó}}$.

Ítéletváltozók: $x_{i,j,s}$ $(1 \leqslant i \leqslant h, 1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma)$.
$x_{i,j,s}$ annak az állításnak felel meg, hogy $c_i$ $j$-edik betűje $s$.

Egy $I$ interpretáció akkor és csak akkor írja le azt, hogy a $c_i$ konfiguráció legális, ha

# QSAT PSPACE-teljes

A bizonyítás során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a konfigurációkat az egyetlen munkaszalag tartalma, ezen szalag fejének helyzete és az aktuális állapot együttesen meghatározzák.

A lehetséges konfigurációk legyenek $c_1, \ldots, c_h$, köztük $c_1 = c_{\text{kezdő}}$, $c_h = c_{\text{elfogadó}}$.

Ítéletváltozók: $x_{i,j,s}$ $(1 \leqslant i \leqslant h, 1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma)$.
$x_{i,j,s}$ annak az állításnak felel meg, hogy $c_i$ $j$-edik betűje $s$.

Egy $I$ interpretáció akkor és csak akkor írja le azt, hogy a $c_i$ konfiguráció legális, ha

- minden $1 \leqslant j \leqslant p(n)$-re pontosan egy $s \in Q \cup \Gamma$ van, amelyre $x_{i,j,s}$ igaz

# QSAT PSPACE-teljes

A bizonyítás során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a konfigurációkat az egyetlen munkaszalag tartalma, ezen szalag fejének helyzete és az aktuális állapot együttesen meghatározzák.

A lehetséges konfigurációk legyenek $c_1, \ldots, c_h$, köztük $c_1 = c_{\text{kezdő}}$, $c_h = c_{\text{elfogadó}}$.

Ítéletváltozók: $x_{i,j,s}$ $(1 \leqslant i \leqslant h, 1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma)$. $x_{i,j,s}$ annak az állításnak felel meg, hogy $c_i$ $j$-edik betűje $s$.

Egy $I$ interpretáció akkor és csak akkor írja le azt, hogy a $c_i$ konfiguráció legális, ha

- minden $1 \leqslant j \leqslant p(n)$-re pontosan egy $s \in Q \cup \Gamma$ van, amelyre $x_{i,j,s}$ igaz
- pontosan egy $1 \leqslant j \leqslant p(n)$-hez van olyan $s \in Q$, hogy $x_{i,j,s}$ igaz

# QSAT PSPACE-teljes

*Jelölés:* ha $X$ ítéletváltozók egy halmaza, akkor $\exists X$-szel rövidítjük az $X$-beli változók egzisztenciális kvantifikálását, azaz a $\exists x_1 \cdots \exists x_m$-et, ha $X = \{x_1, \ldots x_m\}$.

# QSAT PSPACE-teljes

*Jelölés:* ha $X$ ítéletváltozók egy halmaza, akkor $\exists X$-szel rövidítjük az $X$-beli változók egzisztenciális kvantifikálását, azaz a $\exists x_1 \cdots \exists x_m$-et, ha $X = \{x_1, \dots x_m\}$. $\forall X$-re analóg módon.

# QSAT PSPACE-teljes

*Jelölés:* ha $X$ ítéletváltozók egy halmaza, akkor $\exists X$-szel rövidítjük az $X$-beli változók egzisztenciális kvantifikálását, azaz a $\exists x_1 \cdots \exists x_m$-et, ha $X = \{x_1, \dots x_m\}$. $\forall X$-re analóg módon.

Mi csak konfigurációkat azonosító változóhalmazokat fogunk tekinteni, azaz az $X_k = \{x_{k,j,s} \mid 1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma\}$ változóhalmaz megfelel a $c_k$ konfigurációnak minden $1 \leqslant k \leqslant h$-ra.

# QSAT PSPACE-teljes

*Jelölés:* ha $X$ ítéletváltozók egy halmaza, akkor $\exists X$-szel rövidítjük az $X$-beli változók egzisztenciális kvantifikálását, azaz a $\exists x_1 \cdots \exists x_m$-et, ha $X = \{x_1, \ldots x_m\}$. $\forall X$-re analóg módon.

Mi csak konfigurációkat azonosító változóhalmazokat fogunk tekinteni, azaz az $X_k = \{x_{k,j,s} \mid 1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma\}$ változóhalmaz megfelel a $c_k$ konfigurációnak minden $1 \leqslant k \leqslant h$-ra.

*Példa:* Legyen $c_k = aqbb$ egy konfiguráció.

A következő formula azt írja le, hogy az $X_k$-beli változók értékei úgy vannak beállítva, hogy azok a $c_k$ konfigurációt határozzák meg.

$$\exists X_k (x_{k,1,a} \wedge x_{k,2,q} \wedge \ x_{k,3,b} \wedge x_{k,4,b} \wedge \bigwedge_{x \in X_k \setminus H} \neg x),$$

ahol $H = \{x_{k,1,a}, x_{k,2,q}, x_{k,3,b}, x_{k,4,b}\}$.

A formula persze igaz és mérete $O(p(n))$.

# QSAT PSPACE-teljes

$\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell)$ egy olyan formulát jelöl, ami akkor és csak akkor igaz, ha minden $1 \leqslant j \leqslant p(n)$, $s \in Q \cup \Gamma$-ra $x_{k,j,s}$ és $x_{\ell,j,s}$ igazságértéke ugyanaz.

# QSAT PSPACE-teljes

EQ$(X_k, X_\ell)$ egy olyan formulát jelöl, ami akkor és csak akkor igaz, ha minden $1 \leqslant j \leqslant p(n)$, $s \in Q \cup \Gamma$-ra $x_{k,j,s}$ és $x_{\ell,j,s}$ igazságértéke ugyanaz.

$\varphi_{k,\ell,t}$ jelölje azt a TKBF-et, ami akkor és csak akkor igaz, ha $c_k$-ból legfeljebb $2^t$ konfigurációátmenettel el lehet jutni $c_\ell$-be.

# QSAT PSPACE-teljes

$\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell)$ egy olyan formulát jelöl, ami akkor és csak akkor igaz, ha minden $1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma$-ra $x_{k,j,s}$ és $x_{\ell,j,s}$ igazságértéke ugyanaz.

$\varphi_{k,\ell,t}$ jelölje azt a TKBF-et, ami akkor és csak akkor igaz, ha $c_k$-ból legfeljebb $2^t$ konfigurációátmenettel el lehet jutni $c_\ell$-be.

Ekkor az ELÉR $\in \mathrm{SPACE}(\log^2 n)$ bizonyításánál látott módon $\varphi_{k,\ell,t}$ igaz, akkor és csak akkor, ha van olyan $1 \leqslant m \leqslant h$, hogy $\varphi_{k,m,t-1}$ és $\varphi_{m,\ell,t-1}$ is igaz.

# QSAT PSPACE-teljes

$\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell)$ egy olyan formulát jelöl, ami akkor és csak akkor igaz, ha minden $1 \leqslant j \leqslant p(n)$, $s \in Q \cup \Gamma$-ra $x_{k,j,s}$ és $x_{\ell,j,s}$ igazságértéke ugyanaz.

$\varphi_{k,\ell,t}$ jelölje azt a TKBF-et, ami akkor és csak akkor igaz, ha $c_k$-ból legfeljebb $2^t$ konfigurációátmenettel el lehet jutni $c_\ell$-be.

Ekkor az ELÉR $\in$ SPACE$(\log^2 n)$ bizonyításánál látott módon $\varphi_{k,\ell,t}$ igaz, akkor és csak akkor, ha van olyan $1 \leqslant m \leqslant h$, hogy $\varphi_{k,m,t-1}$ és $\varphi_{m,\ell,t-1}$ is igaz.

$\varphi_{k,\ell,0}$ leírható egy $O(p(n))$ hosszú $\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell) \vee \varphi'_{k,\ell,0}$ formulával, ahol $\varphi'_{k,\ell,0}$ azt írja le, hogy $c_k \vdash c_\ell$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

$\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell)$ egy olyan formulát jelöl, ami akkor és csak akkor igaz, ha minden $1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma$-ra $x_{k,j,s}$ és $x_{\ell,j,s}$ igazságértéke ugyanaz.

$\varphi_{k,\ell,t}$ jelölje azt a TKBF-et, ami akkor és csak akkor igaz, ha $c_k$-ból legfeljebb $2^t$ konfigurációátmenettel el lehet jutni $c_\ell$-be.

Ekkor az $\textsc{Elér} \in \mathrm{SPACE}(\log^2 n)$ bizonyításánál látott módon $\varphi_{k,\ell,t}$ igaz, akkor és csak akkor, ha van olyan $1 \leqslant m \leqslant h$, hogy $\varphi_{k,m,t-1}$ és $\varphi_{m,\ell,t-1}$ is igaz.

$\varphi_{k,\ell,0}$ leírható egy $O(p(n))$ hosszú $\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell) \vee \varphi'_{k,\ell,0}$ formulával, ahol $\varphi'_{k,\ell,0}$ azt írja le, hogy $c_k \vdash c_\ell$. Ugyanis a konfigurációk $O(p(n))$ hosszúak, a változás 2x3-as „ablaka" $O(p(n))$ pozícióban lehet és konstans féleképpen tölthető ki, a többi változó egyenlősége szintén egy $O(p(n))$ hosszú részformulával leírható.

# Qsat PSPACE-teljes

$\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell)$ egy olyan formulát jelöl, ami akkor és csak akkor igaz, ha minden $1 \leqslant j \leqslant p(n), s \in Q \cup \Gamma$-ra $x_{k,j,s}$ és $x_{\ell,j,s}$ igazságértéke ugyanaz.

$\varphi_{k,\ell,t}$ jelölje azt a TKBF-et, ami akkor és csak akkor igaz, ha $c_k$-ból legfeljebb $2^t$ konfigurációátmenettel el lehet jutni $c_\ell$-be.

Ekkor az Elér $\in$ SPACE$(\log^2 n)$ bizonyításánál látott módon $\varphi_{k,\ell,t}$ igaz, akkor és csak akkor, ha van olyan $1 \leqslant m \leqslant h$, hogy $\varphi_{k,m,t-1}$ és $\varphi_{m,\ell,t-1}$ is igaz.

$\varphi_{k,\ell,0}$ leírható egy $O(p(n))$ hosszú $\mathrm{EQ}(X_k, X_\ell) \vee \varphi'_{k,\ell,0}$ formulával, ahol $\varphi'_{k,\ell,0}$ azt írja le, hogy $c_k \vdash c_\ell$. Ugyanis a konfigurációk $O(p(n))$ hosszúak, a változás 2x3-as „ablaka" $O(p(n))$ pozícióban lehet és konstans féleképpen tölthető ki, a többi változó egyenlősége szintén egy $O(p(n))$ hosszú részformulával leírható.

Azonban a $\varphi_{k,\ell,t} = \exists X_m(\varphi_{k,m,t-1} \wedge \varphi_{m,\ell,t-1})$ rekurzió nem jó, mivel ez exponenciális sok rekurzív hívást és így exponenciális méretű formulát és időigényt eredményezne.

# QSAT PSPACE-teljes

Ehelyett:

$$\varphi_{k,\ell,t} = \exists X_m \forall X_i \forall X_j ((\mathrm{EQ}(X_i, X_k) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_m)) \vee (\mathrm{EQ}(X_i, X_m) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_\ell)) \to \varphi_{i,j,t-1}),$$

# QSAT PSPACE-teljes

Ehelyett:

$$\varphi_{k,\ell,t} = \exists X_m \forall X_i \forall X_j ((\mathrm{EQ}(X_i, X_k) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_m)) \vee (\mathrm{EQ}(X_i, X_m) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_\ell)) \rightarrow \varphi_{i,j,t-1}),$$

ami összesen csak $O(\log h) = O(p(n))$ rekurzív hívást eredményez (hiszen $w \in L$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_{1,h,\lceil \log_2 h \rceil}$ igaz) és $\varphi_{k,\ell,t}$ $\varphi_{i,j,t-1}$-n kívüli része $O(p(n))$ méretű ($\forall\, 1 \leqslant t \leqslant \lceil \log_2 h \rceil$-re).

# QSAT PSPACE-teljes

Ehelyett:

$$\varphi_{k,\ell,t} = \exists X_m \forall X_i \forall X_j ((\mathrm{EQ}(X_i, X_k) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_m)) \vee$$
$$(\mathrm{EQ}(X_i, X_m) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_\ell)) \to \varphi_{i,j,t-1}),$$

ami összesen csak $O(\log h) = O(p(n))$ rekurzív hívást eredményez (hiszen $w \in L$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_{1,h,\lceil \log_2 h \rceil}$ igaz) és $\varphi_{k,\ell,t}$ $\varphi_{i,j,t-1}$-n kívüli része $O(p(n))$ méretű ($\forall\, 1 \leqslant t \leqslant \lceil \log_2 h \rceil$-re).

Tehát $\varphi' := \exists X_1 \exists X_h (\varphi_K \wedge \varphi_{1,h,\lceil \log_2 h \rceil} \wedge \varphi_V)$ polinom időben kiszámítható, ahol a $\varphi_K$ és $\varphi_V$ részformulák literálok 1-1 olyan konjunkciója, melyek $M$ $w$-hez tartozó $c_1$ kezdő- és $c_h$ elfogadó konfigurációját írják le.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

Ehelyett:

$$\varphi_{k,\ell,t} = \exists X_m \forall X_i \forall X_j ((\mathrm{EQ}(X_i, X_k) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_m)) \vee (\mathrm{EQ}(X_i, X_m) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_\ell)) \rightarrow \varphi_{i,j,t-1}),$$

ami összesen csak $O(\log h) = O(p(n))$ rekurzív hívást eredményez (hiszen $w \in L$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_{1,h,\lceil \log_2 h \rceil}$ igaz) és $\varphi_{k,\ell,t}$ $\varphi_{i,j,t-1}$-n kívüli része $O(p(n))$ méretű ($\forall\, 1 \leqslant t \leqslant \lceil \log_2 h \rceil$-re).

Tehát $\varphi' := \exists X_1 \exists X_h (\varphi_K \wedge \varphi_{1,h,\lceil \log_2 h \rceil} \wedge \varphi_V)$ polinom időben kiszámítható, ahol a $\varphi_K$ és $\varphi_V$ részformulák literálok 1-1 olyan konjunkciója, melyek $M$ $w$-hez tartozó $c_1$ kezdő- és $c_h$ elfogadó konfigurációját írják le.

A kapott formulában nem feltétlen van minden kvantor a formula elején, de ez a kvantorok kiemelésével orvosolható, így $L \leqslant_p \textsc{Qsat}$.

# $\textsc{Qsat}$ PSPACE-teljes

Ehelyett:

$$\varphi_{k,\ell,t} = \exists X_m \forall X_i \forall X_j ((\mathrm{EQ}(X_i, X_k) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_m)) \vee (\mathrm{EQ}(X_i, X_m) \wedge \mathrm{EQ}(X_j, X_\ell)) \to \varphi_{i,j,t-1}),$$

ami összesen csak $O(\log h) = O(p(n))$ rekurzív hívást eredményez (hiszen $w \in L$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_{1,h,\lceil \log_2 h \rceil}$ igaz) és $\varphi_{k,\ell,t}$ $\varphi_{i,j,t-1}$-n kívüli része $O(p(n))$ méretű ($\forall\, 1 \leqslant t \leqslant \lceil \log_2 h \rceil$-re).

Tehát $\varphi' := \exists X_1 \exists X_h (\varphi_K \wedge \varphi_{1,h,\lceil \log_2 h \rceil} \wedge \varphi_V)$ polinom időben kiszámítható, ahol a $\varphi_K$ és $\varphi_V$ részformulák literálok 1-1 olyan konjunkciója, melyek $M$ $w$-hez tartozó $c_1$ kezdő- és $c_h$ elfogadó konfigurációját írják le.

A kapott formulában nem feltétlen van minden kvantor a formula elején, de ez a kvantorok kiemelésével orvosolható, így $L \leqslant_p \textsc{Qsat}$.

Ezzel $\textsc{Qsat}$ PSPACE-beli és PSPACE-nehéz, tehát PSPACE-teljes.

# QSAT mint kétszemélyes játék

**Megjegyzés:** QSAT-nak az a változata is PSPACE teljes, amikor a kvantormentes résznek KNF-nek kell lennie. Ez nem teljesen nyilvánvaló, hiszen egy ítéletlogikai formulával tautologikusan ekvivalens KNF megadása akár exponenciális méretű formulát is eredményezhet.

# QSAT mint kétszemélyes játék

**Megjegyzés:** QSAT-nak az a változata is PSPACE teljes, amikor a kvantormentes résznek KNF-nek kell lennie. Ez nem teljesen nyilvánvaló, hiszen egy ítéletlogikai formulával tautologikusan ekvivalens KNF megadása akár exponenciális méretű formulát is eredményezhet.

A QSAT azon megszorítása amikor csak olyan bemeneteket tekintünk ahol a kvantorok alternálnak, az első és az utolsó kvantor a $\exists$, és a kvantormentes rész egy KNF, felfogható úgy, mint az alábbi **kétszemélyes játék**.

# QSAT mint kétszemélyes játék

**Megjegyzés:** QSAT-nak az a változata is PSPACE teljes, amikor a kvantormentes résznek KNF-nek kell lennie. Ez nem teljesen nyilvánvaló, hiszen egy ítéletlogikai formulával tautologikusan ekvivalens KNF megadása akár exponenciális méretű formulát is eredményezhet.

A QSAT azon megszorítása amikor csak olyan bemeneteket tekintünk ahol a kvantorok alternálnak, az első és az utolsó kvantor a $\exists$, és a kvantormentes rész egy KNF, felfogható úgy, mint az alábbi **kétszemélyes játék**.

Tegyük fel, hogy adott egy ilyen alakú $\varphi$ TKBF. Az első játékos választja meg a páratlan sorszámú változók értékét, és a célja a formula igazzá tétele. A második választja meg a páros sorszámú változók értékét, és a célja a formula hamissá tétele. Nyilvánvaló, hogy az első játékosnak akkor és csak akkor van nyerő stratégiája ebben a játékban, ha $\langle\varphi\rangle \in \textsc{QSAT}$.

# QSAT mint kétszemélyes játék

**Megjegyzés:** QSAT-nak az a változata is PSPACE teljes, amikor a kvantormentes résznek KNF-nek kell lennie. Ez nem teljesen nyilvánvaló, hiszen egy ítéletlogikai formulával tautologikusan ekvivalens KNF megadása akár exponenciális méretű formulát is eredményezhet.

A QSAT azon megszorítása amikor csak olyan bemeneteket tekintünk ahol a kvantorok alternálnak, az első és az utolsó kvantor a $\exists$, és a kvantormentes rész egy KNF, felfogható úgy, mint az alábbi **kétszemélyes játék**.

Tegyük fel, hogy adott egy ilyen alakú $\varphi$ TKBF. Az első játékos választja meg a páratlan sorszámú változók értékét, és a célja a formula igazzá tétele. A második választja meg a páros sorszámú változók értékét, és a célja a formula hamissá tétele. Nyilvánvaló, hogy az első játékosnak akkor és csak akkor van nyerő stratégiája ebben a játékban, ha $\langle\varphi\rangle \in \textsc{QSat}$.

Ez a változat is PSPACE-teljes.

# Földrajzi játék

## Definíció

A **Földrajzi játék** a következő kétszemélyes játék. Adott egy $G$ irányított gráf és annak egy $p$ csúcsa. A két játékos $p$-ből kiindulva felváltva jelöli meg $G$ még meg nem jelölt csúcsait, mindig az utoljára megjelölt csúcsból elérhető csúcsok közül választva. Az veszít, aki nem tud további csúcsot megjelölni.

# Földrajzi játék

## Definíció

A **Földrajzi játék** a következő kétszemélyes játék. Adott egy $G$ irányított gráf és annak egy $p$ csúcsa. A két játékos $p$-ből kiindulva felváltva jelöli meg $G$ még meg nem jelölt csúcsait, mindig az utoljára megjelölt csúcsból elérhető csúcsok közül választva. Az veszít, aki nem tud további csúcsot megjelölni.

**1. példa:** Alíz és Borcsa a következő játékot játssza. Megyeszékhelyeket mondanak felváltva, a következő játékosnak az előző játékos által mondott város utolsó betűjével kell kezdenie a sajátját.

# Földrajzi játék

**Definíció**

A **Földrajzi játék** a következő kétszemélyes játék. Adott egy $G$ irányított gráf és annak egy $p$ csúcsa. A két játékos $p$-ből kiindulva felváltva jelöli meg $G$ még meg nem jelölt csúcsait, mindig az utoljára megjelölt csúcsból elérhető csúcsok közül választva. Az veszít, aki nem tud további csúcsot megjelölni.

**1. példa:** Alíz és Borcsa a következő játékot játssza. Megyeszékhelyeket mondanak felváltva, a következő játékosnak az előző játékos által mondott város utolsó betűjével kell kezdenie a sajátját.

Alíz: Szolnok

# Földrajzi játék

### Definíció

A **Földrajzi játék** a következő kétszemélyes játék. Adott egy $G$ irányított gráf és annak egy $p$ csúcsa. A két játékos $p$-ből kiindulva felváltva jelöli meg $G$ még meg nem jelölt csúcsait, mindig az utoljára megjelölt csúcsból elérhető csúcsok közül választva. Az veszít, aki nem tud további csúcsot megjelölni.

**1. példa:** Alíz és Borcsa a következő játékot játssza. Megyeszékhelyeket mondanak felváltva, a következő játékosnak az előző játékos által mondott város utolsó betűjével kell kezdenie a sajátját.

Alíz: Szolnok
Borcsa: Kecskemét

# Földrajzi játék

**Definíció**

A **Földrajzi játék** a következő kétszemélyes játék. Adott egy $G$ irányított gráf és annak egy $p$ csúcsa. A két játékos $p$-ből kiindulva felváltva jelöli meg $G$ még meg nem jelölt csúcsait, mindig az utoljára megjelölt csúcsból elérhető csúcsok közül választva. Az veszít, aki nem tud további csúcsot megjelölni.

**1. példa:** Alíz és Borcsa a következő játékot játssza. Megyeszékhelyeket mondanak felváltva, a következő játékosnak az előző játékos által mondott város utolsó betűjével kell kezdenie a sajátját.

Alíz: Szolnok
Borcsa: Kecskemét
Alíz: Tatabánya

# Földrajzi játék

**Definíció**

A **Földrajzi játék** a következő kétszemélyes játék. Adott egy $G$ irányított gráf és annak egy $p$ csúcsa. A két játékos $p$-ből kiindulva felváltva jelöli meg $G$ még meg nem jelölt csúcsait, mindig az utoljára megjelölt csúcsból elérhető csúcsok közül választva. Az veszít, aki nem tud további csúcsot megjelölni.

**1. példa:** Alíz és Borcsa a következő játékot játssza. Megyeszékhelyeket mondanak felváltva, a következő játékosnak az előző játékos által mondott város utolsó betűjével kell kezdenie a sajátját.

Alíz: Szolnok
Borcsa: Kecskemét
Alíz: Tatabánya

Alíz nyert, mert Borcsa nem tud mondani A-val új megyeszékhelyt.

# Földrajzi játék

**Definíció**

A **Földrajzi játék** a következő kétszemélyes játék. Adott egy $G$ irányított gráf és annak egy $p$ csúcsa. A két játékos $p$-ből kiindulva felváltva jelöli meg $G$ még meg nem jelölt csúcsait, mindig az utoljára megjelölt csúcsból elérhető csúcsok közül választva. Az veszít, aki nem tud további csúcsot megjelölni.

**1. példa:** Alíz és Borcsa a következő játékot játssza. Megyeszékhelyeket mondanak felváltva, a következő játékosnak az előző játékos által mondott város utolsó betűjével kell kezdenie a sajátját.

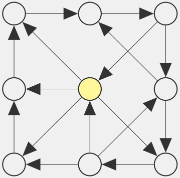
Alíz: Szolnok
Borcsa: Kecskemét
Alíz: Tatabánya

Alíz nyert, mert Borcsa nem tud mondani A-val új megyeszékhelyt.

Ez egy földrajzi játék a megyeszékhelyek a gráfján, ahol $u$ városból akkor vezet irányított út $v$ városba, ha $u$ utolsó betűje megegyezik $v$ első betűjével (amennyiben a kezdőváros rögzített).

# Földrajzi játék

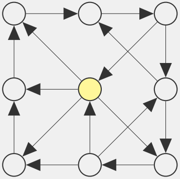
**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.

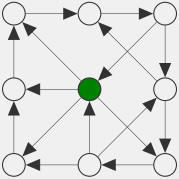


: startcsúcs

# Földrajzi játék

**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.

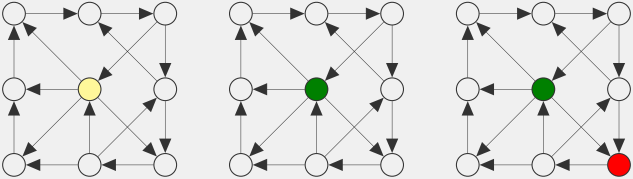




 : startcsúcs

# Földrajzi játék

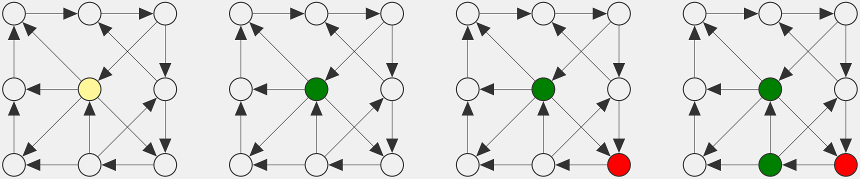
**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.



: startcsúcs

# Földrajzi játék

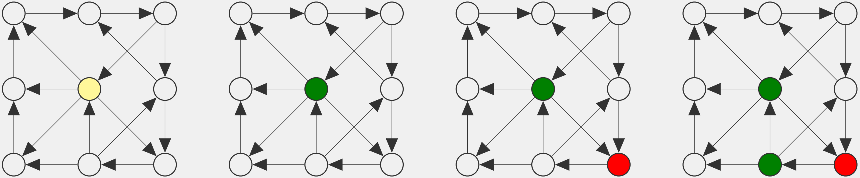
**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.



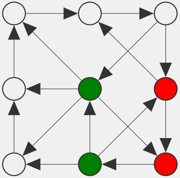
: startcsúcs

# Földrajzi játék

**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.

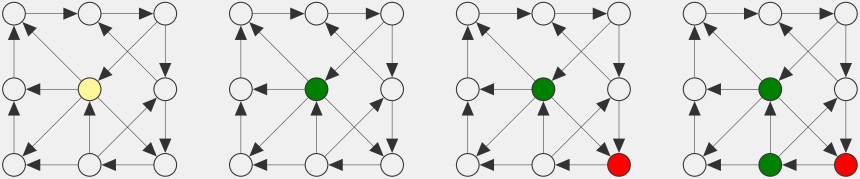


: startcsúcs

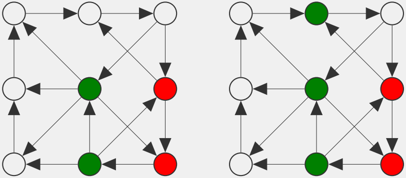


# FÖLDRAJZI JÁTÉK

**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.

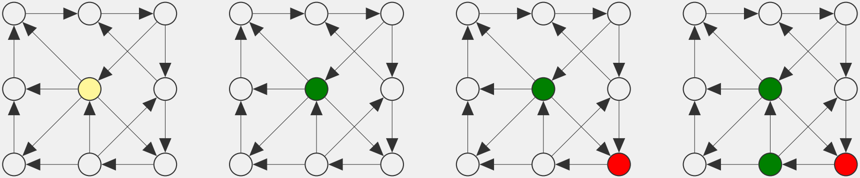


: startcsúcs

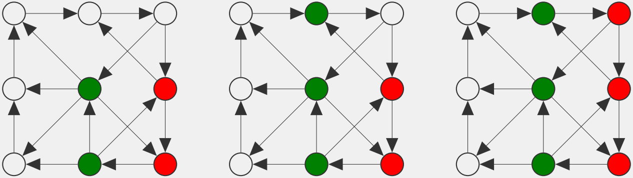


# Földrajzi játék

**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.

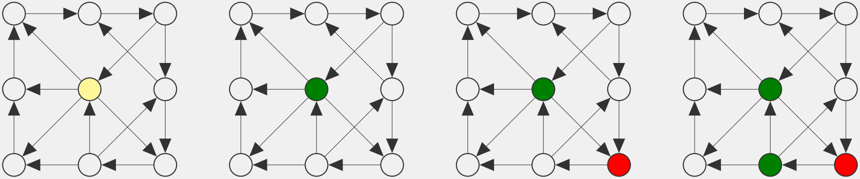


: startcsúcs

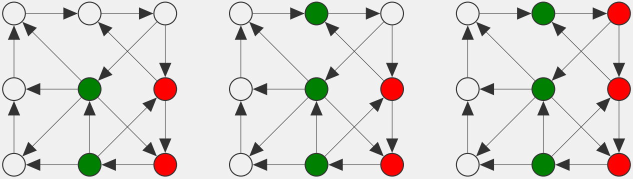


# Földrajzi játék

**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.



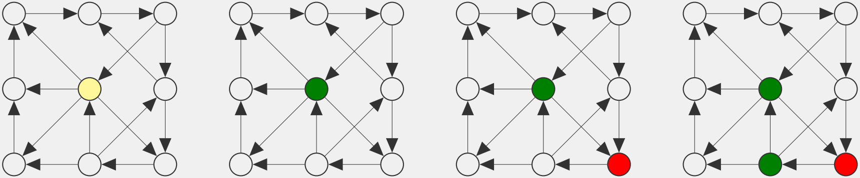
: startcsúcs



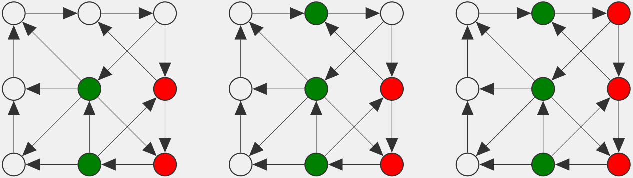
Borcsa nyert, Alíz nem tud lépni.

# Földrajzi játék

**2. példa:** Az előző játék általánosítása, ha **Alíz** és **Borcsa** egy tetszőleges gráfon játszanak. Alíz kezd.



: startcsúcs



Borcsa nyert, Alíz nem tud lépni.

Erre a gráfra és kezdőcsúcsra Borcsának van nyerő stratégiája.
Az előző játék bizonyítja, Alíznak mindig csak 1 lépése volt.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

**Definíció**

Földrajzi játék$=\{\langle G, p\rangle \mid$ a $G$ irányított gráfban $p$ kezdőcsúccsal az 1. játékosnak van nyerő stratégiája$\}$

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

**Definíció**

Földrajzi játék$=\{\langle G, p\rangle \mid$ a $G$ irányított gráfban $p$ kezdőcsúccsal az 1. játékosnak van nyerő stratégiája$\}$

**Tétel**

Földrajzi játék PSPACE-teljes.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

**Definíció**

Földrajzi játék$=\{\langle G, p\rangle \mid$ a $G$ irányított gráfban $p$ kezdőcsúccsal az 1. játékosnak van nyerő stratégiája$\}$

**Tétel**

Földrajzi játék PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** A játék **állása** alatt $G$ csúcsainak egy olyan 2 színnel színezését értjük, ahol az egyik színosztály a jelölt, a másik a jelöletlen csúcsok, és még az az információ, hogy ki következik soron.

# FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-teljes

**Definíció**

FÖLDRAJZI JÁTÉK$=\{\langle G, p\rangle \mid$ a $G$ irányított gráfban $p$ kezdőcsúccsal az 1. játékosnak van nyerő stratégiája$\}$

**Tétel**

FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** A játék **állása** alatt $G$ csúcsainak egy olyan 2 színnel színezését értjük, ahol az egyik színosztály a jelölt, a másik a jelöletlen csúcsok, és még az az információ, hogy ki következik soron.

FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-beliségének belátásához készítsük el a játék fáját, ahol a csúcsok az állások és egy állás gyerekei a lehetséges következő állások. Irányítsuk a fát a levelektől a gyökér felé.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

A leveleket értékeljük ki igazra vagy hamisra aszerint, hogy az az 1. játékosnak a győzelmét vagy vereségét jelenti-e.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

A leveleket értékeljük ki igazra vagy hamisra aszerint, hogy az az 1. játékosnak a győzelmét vagy vereségét jelenti-e.
Bármely más, nem levél állás tekinthető egy VAGY kapunak ha az 1. játékos van soron, illetve egy ÉS kapunak, ha a 2. játékos következik. A kettőnél több bemenettel rendelkező kapuk helyettesíthetők bináris kapukkal.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

A leveleket értékeljük ki igazra vagy hamisra aszerint, hogy az az 1. játékosnak a győzelmét vagy vereségét jelenti-e.
Bármely más, nem levél állás tekinthető egy VAGY kapunak ha az 1. játékos van soron, illetve egy ÉS kapunak, ha a 2. játékos következik. A kettőnél több bemenettel rendelkező kapuk helyettesíthetők bináris kapukkal.
A kiértékelés polinom tárral elvégezhető, mert

- minden játék polinomiális hosszúságú (legfeljebb a gráf csúcsszáma)

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

A leveleket értékeljük ki igazra vagy hamisra aszerint, hogy az az 1. játékosnak a győzelmét vagy vereségét jelenti-e.
Bármely más, nem levél állás tekinthető egy VAGY kapunak ha az 1. játékos van soron, illetve egy ÉS kapunak, ha a 2. játékos következik. A kettőnél több bemenettel rendelkező kapuk helyettesíthetők bináris kapukkal.
A kiértékelés polinom tárral elvégezhető, mert

- minden játék polinomiális hosszúságú (legfeljebb a gráf csúcsszáma)
- adott állásból polinomiális tárral megkonstruálható minden lehetséges következő állás, illetve ha nincs következő állás akkor eldönthető ki nyert

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

A leveleket értékeljük ki igazra vagy hamisra aszerint, hogy az az 1. játékosnak a győzelmét vagy vereségét jelenti-e.
Bármely más, nem levél állás tekinthető egy VAGY kapunak ha az 1. játékos van soron, illetve egy ÉS kapunak, ha a 2. játékos következik. A kettőnél több bemenettel rendelkező kapuk helyettesíthetők bináris kapukkal.
A kiértékelés polinom tárral elvégezhető, mert

- minden játék polinomiális hosszúságú (legfeljebb a gráf csúcsszáma)
- adott állásból polinomiális tárral megkonstruálható minden lehetséges következő állás, illetve ha nincs következő állás akkor eldönthető ki nyert
- a játékfa polinomiális magasságú, és ez akkor is igaz, ha csak bináris kapukat használunk (az eredeti játékfában a fokszám nem nagyobb, mint $G$-ben a maximális ki-fok, ami konstans).

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

A leveleket értékeljük ki igazra vagy hamisra aszerint, hogy az az 1. játékosnak a győzelmét vagy vereségét jelenti-e.
Bármely más, nem levél állás tekinthető egy VAGY kapunak ha az 1. játékos van soron, illetve egy ÉS kapunak, ha a 2. játékos következik. A kettőnél több bemenettel rendelkező kapuk helyettesíthetők bináris kapukkal.
A kiértékelés polinom tárral elvégezhető, mert

- minden játék polinomiális hosszúságú (legfeljebb a gráf csúcsszáma)
- adott állásból polinomiális tárral megkonstruálható minden lehetséges következő állás, illetve ha nincs következő állás akkor eldönthető ki nyert
- a játékfa polinomiális magasságú, és ez akkor is igaz, ha csak bináris kapukat használunk (az eredeti játékfában a fokszám nem nagyobb, mint $G$-ben a maximális ki-fok, ami konstans).

Ezekből a QSAT-nál már látott érvelés alapján következik, hogy a játékfa polinom tárral kiértékelhető.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Földrajzi játék PSPACE-nehézségének bizonyításához Qsat alternáló kvantoros, KNF magú változatát vezetjük vissza rá polinom időben.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Földrajzi játék PSPACE-nehézségének bizonyításához Qsat alternáló kvantoros, KNF magú változatát vezetjük vissza rá polinom időben.

Legyen tehát $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \cdots \exists x_k \psi$ TKBF, ahol $\psi = c_1 \wedge \cdots \wedge c_m$, ahol $m \geqslant 1$ és a $c_i$-k klózok, azaz $\psi$ KNF.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Földrajzi játék PSPACE-nehézségének bizonyításához Qsat alternáló kvantoros, KNF magú változatát vezetjük vissza rá polinom időben.

Legyen tehát $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \cdots \exists x_k \psi$ TKBF, ahol $\psi = c_1 \wedge \cdots \wedge c_m$, ahol $m \geqslant 1$ és a $c_i$-k klózok, azaz $\psi$ KNF.

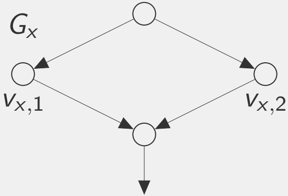
Megkonstruáljuk a $G_\varphi$ gráfot a következőképpen. Először minden $\varphi$-beli $x$ változóhoz elkészítjük az alábbi $G_x$ részgráfot.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Földrajzi játék PSPACE-nehézségének bizonyításához Qsat alternáló kvantoros, KNF magú változatát vezetjük vissza rá polinom időben.

Legyen tehát $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \cdots \exists x_k \psi$ TKBF, ahol $\psi = c_1 \wedge \cdots \wedge c_m$, ahol $m \geqslant 1$ és a $c_i$-k klózok, azaz $\psi$ KNF.

Megkonstruáljuk a $G_\varphi$ gráfot a következőképpen. Először minden $\varphi$-beli $x$ változóhoz elkészítjük az alábbi $G_x$ részgráfot.

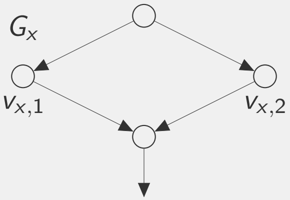


# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Földrajzi játék PSPACE-nehézségének bizonyításához Qsat alternáló kvantoros, KNF magú változatát vezetjük vissza rá polinom időben.

Legyen tehát $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \cdots \exists x_k \psi$ TKBF, ahol $\psi = c_1 \wedge \cdots \wedge c_m$, ahol $m \geqslant 1$ és a $c_i$-k klózok, azaz $\psi$ KNF.

Megkonstruáljuk a $G_\varphi$ gráfot a következőképpen. Először minden $\varphi$-beli $x$ változóhoz elkészítjük az alábbi $G_x$ részgráfot.




A $G_x$ részgráfok „egymás alatt” vannak és össze vannak kötve.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

$G_\varphi$-nek van egy csúcsa ami $\psi$-vel van címkézve. Az ebből kiinduló élek olyan csúcsokba vezetnek, melyek rendre $\psi$ klózaival vannak címkézve. Tartozik egy csúcs minden literálhoz is. Minden klóznak megfelelő csúcsból vezessen él azoknak a literáloknak megfelelő csúcsokhoz, amelyekből az adott klóz áll.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

$G_\varphi$-nek van egy csúcsa ami $\psi$-vel van címkézve. Az ebből kiinduló élek olyan csúcsokba vezetnek, melyek rendre $\psi$ klózaival vannak címkézve. Tartozik egy csúcs minden literálhoz is. Minden klóznak megfelelő csúcsból vezessen él azoknak a literáloknak megfelelő csúcsokhoz, amelyekből az adott klóz áll.

Minden literállal címkézett csúcsból egyetlen él induljon ki a következőképpen. Ha a csúcs $x$-el van címkézve valamely $x$ változóra, akkor a belőle kiinduló él $G_x$ $v_{x,1}$ csúcsába, ha $\neg x$-el van címkézve, akkor $G_x$ $v_{x,2}$ csúcsába vezessen.

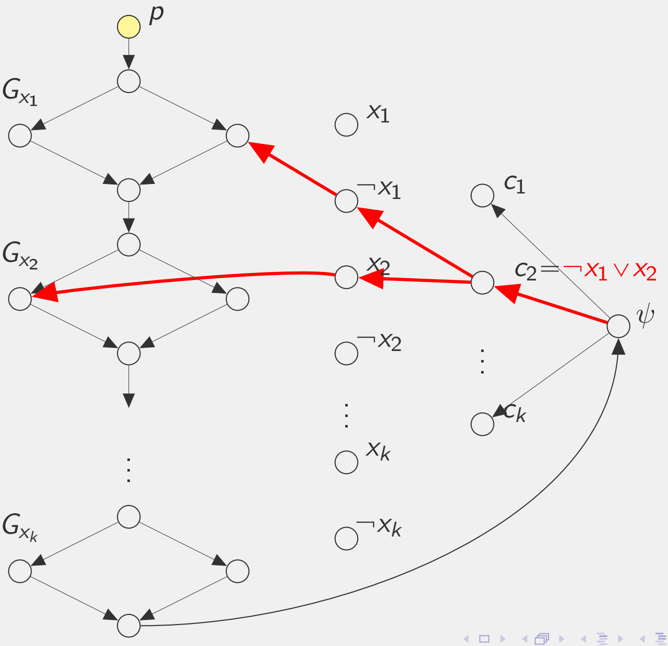
# Földrajzi játék PSPACE-teljes

$G_\varphi$-nek van egy csúcsa ami $\psi$-vel van címkézve. Az ebből kiinduló élek olyan csúcsokba vezetnek, melyek rendre $\psi$ klózaival vannak címkézve. Tartozik egy csúcs minden literálhoz is. Minden klóznak megfelelő csúcsból vezessen él azoknak a literáloknak megfelelő csúcsokhoz, amelyekből az adott klóz áll.

Minden literállal címkézett csúcsból egyetlen él induljon ki a következőképpen. Ha a csúcs $x$-el van címkézve valamely $x$ változóra, akkor a belőle kiinduló él $G_x$ $v_{x,1}$ csúcsába, ha $\neg x$-el van címkézve, akkor $G_x$ $v_{x,2}$ csúcsába vezessen.

A $p$ csúcsból induljon egyetlen él $G_{x_1}$ felső csúcsába, valamint vegyünk hozzá egy élt $G_{x_k}$ alsó csúcsából a $\psi$ címkéjű csúcsba.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes



# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Nézzük meg, hogyan zajlik egy játék $G_\varphi$-ben.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Nézzük meg, hogyan zajlik egy játék $G_\varphi$-ben.

A páratlan sorszámú változóknak megfelelő $G_x$ részgráfok legfelső csúcsaiban az első játékos választja az irányt (azaz kezdetben ő választ egy csúcsot a $p$-ből kiindulva. A páros sorszámúaknak megfelelőkben viszont a második játékos. $G_{x_k}$-ban az első játékos választja az irányt és így a 2. játékos a legalsó csúcsot.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Nézzük meg, hogyan zajlik egy játék $G_\varphi$-ben.

A páratlan sorszámú változóknak megfelelő $G_x$ részgráfok legfelső csúcsaiban az első játékos választja az irányt (azaz kezdetben ő választ egy csúcsot a $p$-ből kiindulva. A páros sorszámúaknak megfelelőkben viszont a második játékos. $G_{x_k}$-ban az első játékos választja az irányt és így a 2. játékos a legalsó csúcsot.

Az első játékosnak kell választania a $\psi$ címkéjű csúcsot. A második játékos választ egy $c$ klózt, majd az első játékos kiválasztja $c$ egy $\ell$ literálját.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Nézzük meg, hogyan zajlik egy játék $G_\varphi$-ben.

A páratlan sorszámú változóknak megfelelő $G_x$ részgráfok legfelső csúcsaiban az első játékos választja az irányt (azaz kezdetben ő választ egy csúcsot a $p$-ből kiindulva. A páros sorszámúaknak megfelelőkben viszont a második játékos. $G_{x_k}$-ban az első játékos választja az irányt és így a 2. játékos a legalsó csúcsot.

Az első játékosnak kell választania a $\psi$ címkéjű csúcsot. A második játékos választ egy $c$ klózt, majd az első játékos kiválasztja $c$ egy $\ell$ literálját.

Itt két lehetőség van: vagy tud a második játékos még korábban nem választott csúcsot választani vagy nem.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Nézzük meg, hogyan zajlik egy játék $G_\varphi$-ben.

A páratlan sorszámú változóknak megfelelő $G_x$ részgráfok legfelső csúcsaiban az első játékos választja az irányt (azaz kezdetben ő választ egy csúcsot a $p$-ből kiindulva. A páros sorszámúaknak megfelelőkben viszont a második játékos. $G_{x_k}$-ban az első játékos választja az irányt és így a 2. játékos a legalsó csúcsot.

Az első játékosnak kell választania a $\psi$ címkéjű csúcsot. A második játékos választ egy $c$ klózt, majd az első játékos kiválasztja $c$ egy $\ell$ literálját.

Itt két lehetőség van: vagy tud a második játékos még korábban nem választott csúcsot választani vagy nem.

$G_\varphi$ konstrukciója miatt a második játékos pontosan akkor tud csúcsot választani, ha a következők egyike teljesül:

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Nézzük meg, hogyan zajlik egy játék $G_\varphi$-ben.

A páratlan sorszámú változóknak megfelelő $G_x$ részgráfok legfelső csúcsaiban az első játékos választja az irányt (azaz kezdetben ő választ egy csúcsot a $p$-ből kiindulva. A páros sorszámúaknak megfelelőkben viszont a második játékos. $G_{x_k}$-ban az első játékos választja az irányt és így a 2. játékos a legalsó csúcsot.

Az első játékosnak kell választania a $\psi$ címkéjű csúcsot. A második játékos választ egy $c$ klózt, majd az első játékos kiválasztja $c$ egy $\ell$ literálját.

Itt két lehetőség van: vagy tud a második játékos még korábban nem választott csúcsot választani vagy nem.

$G_\varphi$ konstrukciója miatt a második játékos pontosan akkor tud csúcsot választani, ha a következők egyike teljesül:

- $\ell = x$ valamely $x$ változóra és $v_{x,1}$-et még nem jelölték meg,

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Nézzük meg, hogyan zajlik egy játék $G_\varphi$-ben.

A páratlan sorszámú változóknak megfelelő $G_x$ részgráfok legfelső csúcsaiban az első játékos választja az irányt (azaz kezdetben ő választ egy csúcsot a $p$-ből kiindulva. A páros sorszámúaknak megfelelőkben viszont a második játékos. $G_{x_k}$-ban az első játékos választja az irányt és így a 2. játékos a legalsó csúcsot.

Az első játékosnak kell választania a $\psi$ címkéjű csúcsot. A második játékos választ egy $c$ klózt, majd az első játékos kiválasztja $c$ egy $\ell$ literálját.

Itt két lehetőség van: vagy tud a második játékos még korábban nem választott csúcsot választani vagy nem.

$G_\varphi$ konstrukciója miatt a második játékos pontosan akkor tud csúcsot választani, ha a következők egyike teljesül:

- $\ell = x$ valamely $x$ változóra és $v_{x,1}$-et még nem jelölték meg,
- $\ell = \neg x$ valamely $x$ változóra és $v_{x,2}$-et még nem jelölték meg.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Ennek megfelelően az első játékos úgy próbálja megválasztani a páratlan indexű ítéletváltozóknak megfelelő gráfokban az irányt, hogy később tudjon bármely klóznak megfelelő csúcshoz egy olyan literálnak megfelelő csúcsot választani, ami olyan csúccsal van összekötve, ami már korábban választásra került.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Ennek megfelelően az első játékos úgy próbálja megválasztani a páratlan indexű ítéletváltozóknak megfelelő gráfokban az irányt, hogy később tudjon bármely klóznak megfelelő csúcshoz egy olyan literálnak megfelelő csúcsot választani, ami olyan csúccsal van összekötve, ami már korábban választásra került.

Ezzel ellentétben a második játékos úgy próbálja megválasztani a páros indexű változóknak megfelelő részgráfokban az irányt, hogy később tudjon olyan $c$ klózt választani, hogy a $c$-ből elérhető csúcsok mindegyike még korábban ki nem választott csúcsokkal legyen összekötve.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Belátható, hogy az 1. játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája $G_\varphi$-ben, ha a $\varphi$-beli kétszemélyes játék során is van, azaz pontosan akkor ha az 1. játékos meg tudja adni a páratlan indexű ítéletváltozók értékét úgy, hogy később akárhogyan is választ a második játékos egy $\psi$-beli klózt, az 1. játékos ki tud választani abban a klózban egy olyan literált, ami igaz lesz a kettejük játéka által meghatározott interpretációban.

# Földrajzi játék PSPACE-teljes

Belátható, hogy az 1. játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája $G_\varphi$-ben, ha a $\varphi$-beli kétszemélyes játék során is van, azaz pontosan akkor ha az 1. játékos meg tudja adni a páratlan indexű ítéletváltozók értékét úgy, hogy később akárhogyan is választ a második játékos egy $\psi$-beli klózt, az 1. játékos ki tud választani abban a klózban egy olyan literált, ami igaz lesz a kettejük játéka által meghatározott interpretációban.

Ebből következik, hogy a $\varphi \mapsto G_\varphi$ megfeleltetés Qsat visszavezetése a Földrajzi játék-ra.

# FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-teljes

Belátható, hogy az 1. játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája $G_\varphi$-ben, ha a $\varphi$-beli kétszemélyes játék során is van, azaz pontosan akkor ha az 1. játékos meg tudja adni a páratlan indexű ítéletváltozók értékét úgy, hogy később akárhogyan is választ a második játékos egy $\psi$-beli klózt, az 1. játékos ki tud választani abban a klózban egy olyan literált, ami igaz lesz a kettejük játéka által meghatározott interpretációban.

Ebből következik, hogy a $\varphi \mapsto G_\varphi$ megfeleltetés QSAT visszavezetése a FÖLDRAJZI JÁTÉK-ra.

Az is könnyen látható, hogy $G_\varphi$ a $\varphi$ méretében polinom időben megkonstruálható, és ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

# További PSPACE-teljes problémák

## 1-típusú szóprobléma

Reguláris grammatikák esetében lineáris, környezetfüggetlen grammatikák esetében pedig köbös időigényű algoritmust (CYK) tanultunk is ismert a szóprobléma eldöntésére az előző félévben.

# További PSPACE-teljes problémák

## 1-típusú szóprobléma

Reguláris grammatikák esetében lineáris, környezetfüggetlen grammatikák esetében pedig köbös időigényű algoritmust (CYK) tanultunk is ismert a szóprobléma eldöntésére az előző félévben.

Mivel $\mathcal{L}_0 =$RE, ezért a 0. típusú szóprobléma eldönthetetlen (de RE-beli).

# További PSPACE-teljes problémák

## 1-típusú szóprobléma

Reguláris grammatikák esetében lineáris, környezetfüggetlen grammatikák esetében pedig köbös időigényű algoritmust (CYK) tanultunk is ismert a szóprobléma eldöntésére az előző félévben.

Mivel $\mathcal{L}_0$ =RE, ezért a 0. típusú szóprobléma eldönthetetlen (de RE-beli).

Előző félévben tanultunk egy, az 1-típusú szóproblémát eldöntő exponenciális időigényű algoritmust. Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy az 1-típusú szóprobléma PSPACE-teljes.

# További PSPACE-teljes problémák

## Általánosított, korlátos idejű go játék

**Tétel:** Annak eldöntése, hogy egy $n \times n$-es táblán legfeljebb $n^2$ lépésig játszott go játékban egy adott állás fehér számára nyerő állás-e PSPACE-teljes.

# További PSPACE-teljes problémák

## Általánosított, korlátos idejű go játék

**Tétel:** Annak eldöntése, hogy egy $n \times n$-es táblán legfeljebb $n^2$ lépésig játszott go játékban egy adott állás fehér számára nyerő állás-e PSPACE-teljes.

**Megjegyzés:** A konkrét méretben (például 8x8-as vagy 19x19-es) táblán játszott kétszemélyes játékok (go, dáma, sakk) véges játékok, a PSPACE-teljesség azonban aszimptotikus fogalom. Ezekben a játékokban a keresési tér véges, bár hatalmas.

# További PSPACE-teljes problémák

## Általánosított, korlátos idejű go játék

**Tétel:** Annak eldöntése, hogy egy $n \times n$-es táblán legfeljebb $n^2$ lépésig játszott go játékban egy adott állás fehér számára nyerő állás-e PSPACE-teljes.

**Megjegyzés:** A konkrét méretben (például 8x8-as vagy 19x19-es) táblán játszott kétszemélyes játékok (go, dáma, sakk) véges játékok, a PSPACE-teljesség azonban aszimptotikus fogalom. Ezekben a játékokban a keresési tér véges, bár hatalmas.

**Megjegyzés:** Ha elhagyjuk a lépésszámkorlátot, akkor a probléma EXPTIME-teljessé válik.

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

### Tétel

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

### Tétel

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

**Tétel**

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:
$M$ lehetséges konfigurációinak száma egy $w$ bemenetre legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{|w|}$, ahol $Q$ az $M$ állapothalmaza és $\Gamma$ a szalagábécéje.

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \,|$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

**Tétel**

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:
$M$ lehetséges konfigurációinak száma egy $w$ bemenetre legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{|w|}$, ahol $Q$ az $M$ állapothalmaza és $\Gamma$ a szalagábécéje.
HELYBEN ELFOGADÁS a következő $S$ Turing géppel polinom tárral eldönthető.

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

### Tétel

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:
$M$ lehetséges konfigurációinak száma egy $w$ bemenetre legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{|w|}$, ahol $Q$ az $M$ állapothalmaza és $\Gamma$ a szalagábécéje.
HELYBEN ELFOGADÁS a következő $S$ Turing géppel polinom tárral eldönthető.

- $S$ szimulálja $M$-et $w$-n

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

### Tétel

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:
$M$ lehetséges konfigurációinak száma egy $w$ bemenetre legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{|w|}$, ahol $Q$ az $M$ állapothalmaza és $\Gamma$ a szalagábécéje.
HELYBEN ELFOGADÁS a következő $S$ Turing géppel polinom tárral eldönthető.

- $S$ szimulálja $M$-et $w$-n
- ha $M$ elutasítja $w$-t akkor $S$ lépjen $q_n$-be

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

### Tétel

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:
$M$ lehetséges konfigurációinak száma egy $w$ bemenetre legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{|w|}$, ahol $Q$ az $M$ állapothalmaza és $\Gamma$ a szalagábécéje.
HELYBEN ELFOGADÁS a következő $S$ Turing géppel polinom tárral eldönthető.

- $S$ szimulálja $M$-et $w$-n
- ha $M$ elutasítja $w$-t akkor $S$ lépjen $q_n$-be
- ha $M$ feje elhagyja $w$ területét, akkor $S$ lépjen $q_n$-be

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \,|$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

### Tétel

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:
$M$ lehetséges konfigurációinak száma egy $w$ bemenetre legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{|w|}$, ahol $Q$ az $M$ állapothalmaza és $\Gamma$ a szalagábécéje.
HELYBEN ELFOGADÁS a következő $S$ Turing géppel polinom tárral eldönthető.

- $S$ szimulálja $M$-et $w$-n
- ha $M$ elutasítja $w$-t akkor $S$ lépjen $q_n$-be
- ha $M$ feje elhagyja $w$ területét, akkor $S$ lépjen $q_n$-be
- ha $M$ elfogadja $w$-t, akkor $S$ lépjen $q_i$-be

# További PSPACE-teljes problémák

## Helyben elfogadás problémája

HELYBEN ELFOGADÁS$=\{\langle M, w\rangle \mid$ az $M$ determinisztikus TG úgy fogadja el $w$-t, hogy a fej nem hagyja el $w$ területét$\}$

**Tétel**

HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-teljes.

**Bizonyítás:** HELYBEN ELFOGADÁS PSPACE-beli:
$M$ lehetséges konfigurációinak száma egy $w$ bemenetre legfeljebb $m(w) = |Q| \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{|w|}$, ahol $Q$ az $M$ állapothalmaza és $\Gamma$ a szalagábécéje.
HELYBEN ELFOGADÁS a következő $S$ Turing géppel polinom tárral eldönthető.

- $S$ szimulálja $M$-et $w$-n
- ha $M$ elutasítja $w$-t akkor $S$ lépjen $q_n$-be
- ha $M$ feje elhagyja $w$ területét, akkor $S$ lépjen $q_n$-be
- ha $M$ elfogadja $w$-t, akkor $S$ lépjen $q_i$-be
- ha $M$ $m(w)$-nél többet lép, akkor $S$ lépjen $q_n$-be

# További PSPACE-teljes problémák

Számolni kell a megtett lépéseket. A lépések száma $O(|w|)$ bittel leírható.

# További PSPACE-teljes problémák

Számolni kell a megtett lépéseket. A lépések száma $O(|w|)$ bittel leírható.

Az $S$ determinisztikus TG működése során tehát $O(|w|) = O(|\langle M, w\rangle|)$ tárat használ és $L(S) =$ Helyben elfogadás.

# További PSPACE-teljes problémák

Számolni kell a megtett lépéseket. A lépések száma $O(|w|)$ bittel leírható.

Az $S$ determinisztikus TG működése során tehát $O(|w|) = O(|\langle M, w\rangle|)$ tárat használ és $L(S) =$ Helyben elfogadás.

Tehát Helyben elfogadás $\in$ PSPACE

# További PSPACE-teljes problémák

Számolni kell a megtett lépéseket. A lépések száma $O(|w|)$ bittel leírható.

Az $S$ determinisztikus TG működése során tehát $O(|w|) = O(|\langle M, w\rangle|)$ tárat használ és $L(S) =$ Helyben elfogadás.

Tehát Helyben elfogadás $\in$ PSPACE

Legyen $L \in$ PSPACE tetszőleges. Ekkor van olyan $M$ determinisztikus TG, mely $L$-et $p(n)$ tárral eldönti. Tetszőleges $w$ szóra legyen $f(w) := \langle M', \#^{p(n)} w \#^{p(n)} \rangle$, ahol # egy olyan szimbólum, ami nincs benne $M$ szalagábécéjében, $M'$ pedig $w$ első betűjére teker, majd ugyanúgy működik, mint $M$ #-t $\sqcup$-ként kezelve.

# További PSPACE-teljes problémák

Számolni kell a megtett lépéseket. A lépések száma $O(|w|)$ bittel leírható.

Az $S$ determinisztikus TG működése során tehát $O(|w|) = O(|\langle M, w\rangle|)$ tárat használ és $L(S) =$ Helyben elfogadás.

Tehát Helyben elfogadás $\in$ PSPACE

Legyen $L \in$ PSPACE tetszőleges. Ekkor van olyan $M$ determinisztikus TG, mely $L$-et $p(n)$ tárral eldönti. Tetszőleges $w$ szóra legyen $f(w) := \langle M', \#^{p(n)} w \#^{p(n)}\rangle$, ahol $\#$ egy olyan szimbólum, ami nincs benne $M$ szalagábécéjében, $M'$ pedig $w$ első betűjére teker, majd ugyanúgy működik, mint $M$ $\#$-t $\sqcup$-ként kezelve.

Ekkor $f$ polinom idejű visszavezetés, hiszen $w \in L(M)$ akkor és csak akkor ha $\langle M', \#^{p(n)} w \#^{p(n)}\rangle \in$ Helyben elfogadás.

# További PSPACE-teljes problémák

Számolni kell a megtett lépéseket. A lépések száma $O(|w|)$ bittel leírható.

Az $S$ determinisztikus TG működése során tehát $O(|w|) = O(|\langle M, w\rangle|)$ tárat használ és $L(S) =$ Helyben elfogadás.

Tehát Helyben elfogadás $\in$ PSPACE

Legyen $L \in$PSPACE tetszőleges. Ekkor van olyan $M$ determinisztikus TG, mely $L$-et $p(n)$ tárral eldönti. Tetszőleges $w$ szóra legyen $f(w) := \langle M', \#^{p(n)} w \#^{p(n)}\rangle$, ahol $\#$ egy olyan szimbólum, ami nincs benne $M$ szalagábécéjében, $M'$ pedig $w$ első betűjére teker, majd ugyanúgy működik, mint $M$ $\#$-t $\sqcup$-ként kezelve.

Ekkor $f$ polinom idejű visszavezetés, hiszen $w \in L(M)$ akkor és csak akkor ha $\langle M', \#^{p(n)} w \#^{p(n)}\rangle \in$ Helyben elfogadás.

Így $L \leqslant_p$ Helyben elfogadás bizonyítva, hogy Helyben elfogadás PSPACE-nehéz. Mivel láttuk, hogy PSPACE-beli, ezért PSPACE-teljes is.