

# Numerikus módszerek 1.

6. előadás: Vektor- és mátrixnormák

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Vektornormák
- 2 Mátrixnormák
- 3 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 4 Mátrixnormák további tulajdonságai – válogatás

- 1 Vektornormák
- 2 Mátrixnormák
- 3 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 4 Mátrixnormák további tulajdonságai – válogatás

## **Definíció:** vektorok „hossza”

Az  $x \in \mathbb{R}^n$  vektor hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját” jelölje  $\|\cdot\|_2$ .

A következőképpen számolható:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^\top x} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A (vektor)norma a „hossz”, „nagyság” általánosítása.

**Definíció:** vektornorma

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  rögzített. Az  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést vektornormának nevezzük, ha:

- ❶  $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n),$
- ❷  $\|x\| = 0 \iff x = 0,$
- ❸  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n),$
- ❹  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n).$

Azaz a leképezés „pozitív”, „pozitív homogén” és „szubadditív” (háromszög-egyenlőtlenség). Ezek a vektornormák *axiómái*.

**Állítás:** skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az  $\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  skaláris szorzat, akkor az  $f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  függvény *norma*. Jele:  $\|x\|_2$ .

**Biz.:** Nem kell.

Ez a „hagyományos hossz”.



**Állítás:** Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

**Biz.:** Bármely  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén  $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \\ &= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|_2^2} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Diszkrimináns nempozitív:  $\langle x, y \rangle^2 - \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \leq 0$ , így

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2.$$



**Állítás:** Gyakori vektornormák  $(1, 2, \infty)$ 

A következő formulák vektornormákat **definiálnak**  $\mathbb{R}^n$  felett:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$  (Manhattan-norma),
- $\|x\|_2 := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$  (Euklideszi-norma),
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n |x_i|$  (Csebisev-norma).

**Biz.:** Hf.



**Példa:** vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok 1, 2,  $\infty$  normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\|x\|_1 = 3 + 4 = 7, \quad \|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \|x\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4.$$

$$\|y\|_1 = 4 + |-8| + 1 = 13, \quad \|y\|_2 = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{73}, \\ \|y\|_\infty = \max\{4, |-8|, 1\} = 8.$$

**Állítás:**  $p$ -normák

A következő  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty).$$

**Biz.:** Nem kell. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkovszki-egyenlőtlenség.

**Megjegyzések:**

- $0 \leq p < 1$  esetén nem norma,
- $p_1 \leq p_2 \implies \|x\|_{p_1} \geq \|x\|_{p_2}$ ,
- Speciális esetek:  $p = 1 \rightsquigarrow \|x\|_1$ ,  $p = 2 \rightsquigarrow \|x\|_2$ ,
- Sőt:  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ .

**Állítás:** normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_{\infty},$
- $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_{\infty},$
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2,$
- sőt ezek alapján  $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$

**Biz.:** Nem kell.



(Az elsőbe könnyű belegondolni, a negyedike láttunk példát.)

**Definíció:** ekvivalens normák

Az  $\|\cdot\|_a$  és  $\|\cdot\|_b$  vektornormák *ekvivalensek*, ha  $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ , hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

**Állítás:** végesdimenziós normák ekvivalenciája

Tetszőleges  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett vektornorma ekvivalens az Euklideszi-vektornormával. (Azaz adott végesdimenziós térben minden norma ekvivalens.)

**Definíció:** konvergencia vektornormában

Az  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  sorozat konvergens, ha létezik  $x^* \in \mathbb{R}^n$  melyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

$x^*$  a sorozat határértéke.

**Megj.:** Mivel  $\mathbb{R}^n$ -en a vektornormák ekvivalensek, ezért ha egy sorozat konvergens az egyik vektornormában, akkor mindegyikben.

**Ekvivalens** átfogalmazások a konvergenciára:

- Az  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  sorozat konvergens, ha létezik  $x^* \in \mathbb{R}^n$  melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq N_0 : \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

- Az  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  sorozat konvergens, ha létezik  $x^* \in \mathbb{R}^n$  melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq N_0 : x_k \in K_\varepsilon(x^*).$$

**Matlab** példák  $p$ -normákra, egységgömbökre ( $p = 1, 2, \infty, \dots$ ).

- 1 Vektornormák
- 2 Mátrixnormák**
- 3 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 4 Mátrixnormák további tulajdonságai – válogatás

**Definíció:** mátrixnorma

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  rögzített. Az  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

- ❶  $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❷  $\|A\| = 0 \iff A = 0,$
- ❸  $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❹  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}),$
- ❺  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}).$

Ugyanaz, mint a vektornormáknál, plusz: „szubmultiplikativitás”. Ezek a mátrixnormák axiómái.



**Definíció:** Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

**Állítás:** Frobenius-norma

A  $\|\cdot\|_F$  függvény valóban mátrixnorma.

**Biz.:** 1–4. következik a  $\|\cdot\|_2$  vektornorma tulajdonságaiból.  
Az 5. belátható CBS segítségével.



**Példa:** egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 5$$

$$\|B\|_F = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 5^2} = 6$$

- 1 Vektornormák
- 2 Mátrixnormák
- 3 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák**
- 4 Mátrixnormák további tulajdonságai – válogatás

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## **Definíció:** indukált norma, természetes mátrixnormák

Legyen  $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma által indukált mátrixnormának hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

## **Tétel:** indukált normák

Az „indukált mátrixnormák” valóban mátrixnormák.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz.:** Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

- 1 Az  $\|A\|$  értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szupréuma.
- 2 Ha  $A = 0$ , azaz nullmátrix, akkor  $\|Ax\|_v = 0$  minden  $x$  vektorra, így a szupréum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szupréum 0, akkor minden  $x$ -re  $Ax$ -nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha  $A$  nullmátrix.

3

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

**Biz. (folytatás):**

4

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

5  $B = 0 \Rightarrow \|B\| = 0$ , valamint

$$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow \|AB\| = 0.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Ha  $B \neq 0$ , akkor

$$\begin{aligned}\|A \cdot B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0, Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \\ &\leq \sup_{Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

Meggondolható, hogy a  $Bx \neq 0$  feltétel nem változtatja meg a szupréмум értékét; közben bevezettük az  $y := Bx$  jelölést.  $\square$

## Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v=1} \|Ay\|_v.$$

- A sup helyett max is írható.
- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v.$$

Sőt:  $\|A\|$  a legkisebb ilyen felső korlát.



# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## **Definíció:** illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

## **Állítás:** természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

**Biz.:** Láttuk az előbb. Az  $x = 0$  eset meggondolandó.



# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

**Tétel:** Nevezetes mátrixnormák  $(1, 2, \infty)$

A  $\|\cdot\|_p$  ( $p = 1, 2, \infty$ ) vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$  (spektrálnorma).

**Jel.:**  $\lambda_i(M)$ : az  $M$  mátrix  $i$ -edik sajátértéke ( $Mv = \lambda v$ ,  $v \neq 0$ ).

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

## A bizonyítás „dallama”:

- Az adott  $f(A)$  értékre:  $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Van olyan  $x$  vektor, hogy  $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$ .
- Ekkor az  $f(A)$  érték, tényleg a  $\|\cdot\|_v$  vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így:  $\|A\|_v$ .

## Bizonyítás $\|\cdot\|_1$ esetén:

$$\text{Állítás: } \|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( |x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left( \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1.\end{aligned}$$

Legyen  $x = e_k$ , ahol a  $k$ -adik oszlopösszeg maximális. Ekkor

$$\|Ae_k\|_1 = \underbrace{\dots}_{1} \underbrace{\|e_k\|_1}_1.$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Bizonyítás  $\|\cdot\|_\infty$  esetén:**

$$\text{Állítás: } \|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint  $\|\cdot\|_1$  esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel. . .

**Bizonyítás  $\|\cdot\|_2$  esetén:**

$$\text{Állítás: } \|A\|_2 = \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}.$$

- Előbb belátjuk, hogy a sajátértékek nemnegatívak.
- A becslés a diagonalizálás alapján adódik.
- Válasszuk a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort az egyenlőséghez.

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Először belátjuk, hogy  $A^T A$  szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz  $A^T A$  pozitív szemidefinit).

- $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ , azaz  $A^T A$  szimmetrikus, vagyis  $A^T A$  sajátértékei valósak.
- Legyen  $y \neq 0$  az  $A^T A$  mátrix  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektora, azaz

$$A^T A y = \lambda \cdot y.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az  $y^T$  vektorral:

$$y^T A^T A y = \lambda \cdot y^T y.$$

Innen

$$\lambda = \frac{y^T A^T A y}{y^T y} = \frac{(Ay)^T (Ay)}{y^T y} = \frac{\|Ay\|_2^2}{\|y\|_2^2} \geq 0.$$

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

**Biz. (folytatás):** Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve  $Ax$  normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy  $A^T A$  szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik  $U$  ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^T A = U^T D U \quad \Leftrightarrow \quad U A^T A U^T = D$$

úgy, hogy a diagonálisban  $A^T A$  sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az  $y = Ux$  jelölést.

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T U^T D U x = (Ux)^T D (Ux) \\ &= y^T D y = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^n d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \cdot \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy  $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2$ .

# Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2, \text{ ezért}$$

$$\|Ax\|_2^2 \leq \dots \leq \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2.$$

$x \neq 0$  esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan  $x \neq 0$  vektor, amire a szuprénum felvételik.

Legyen  $\lambda_m = \max \lambda_i(A^\top A)$  és  $v_m \neq 0$ ,  $\|v_m\|_2 = 1$  a hozzá tartozó sajátvektor.

$$\|Av_m\|_2^2 = (Av_m)^\top (Av_m) = v_m^\top \underbrace{A^\top A}_{\lambda_m \cdot v_m} v_m = \lambda_m \cdot \underbrace{v_m^\top v_m}_{=1} = \lambda_m.$$



**Definíció:** spektrálsugár

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *spektrálsugara*  $\varrho(A) := \max_{i=1}^n |\lambda_i(A)|$ .

**Megj.:** A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

**Állítás:**

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

**Biz.:** Trivi.



## Állítás:

Ha  $A$  normális ( $A^*A = AA^*$ ), akkor  $\|A\|_2 = \varrho(A)$ .  
(Spec.: ha  $A$  önadjungált, akkor normális.)

**Biz.:** Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátrixok esetén létezik  $U$  unitér hasonlósági transzformáció, mellyel  $A$  diagonális alakra hozható.

$$\begin{aligned}U^*AU &= D = \text{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^* \\A^*A &= (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^* \\ \lambda_i(A^*A) &= \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2 \\ \varrho(A^*A) &= \varrho(A)^2\end{aligned}$$

Innen  $\|A\|_2 = \varrho(A^*A)^{1/2} = \varrho(A)$ .

**Példa:**  $\|\cdot\|_1$  és  $\|\cdot\|_\infty$  mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix  $\|\cdot\|_1$  és  $\|\cdot\|_\infty$  mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1 + 2, |-4| + 2\} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + |-4|, 2 + 2\} = 5$$

**Példa:**  $\|\cdot\|_2$  mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix  $\|\cdot\|_2$  mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix},$$

Szerencsénkre látjuk a sajátértékeit...

$$\|A\|_2 = \left( \max_{i=1}^n \lambda_i(A^T A) \right)^{1/2} = \sqrt{\max\{5, 20\}} = \sqrt{20} \approx 4.4721.$$

- 1 Vektornormák
- 2 Mátrixnormák
- 3 Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák
- 4 Mátrixnormák további tulajdonságai – válogatás

## Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

**Biz.:** Tekintsük az  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  egységmátrix normáját.

- Indukált mátrixnormák esetén  $\|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$ .
- Másrészt  $\|I\|_F = \sqrt{n}$ .
- Tehát nincs olyan vektornorma, ami a Frobenius-normát indukálná (ha  $n > 1$ ).



**Állítás:** spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

**Biz.:** Belátjuk, hogy  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

(Legyen  $\lambda$  tetszőleges sajátérték és  $v \neq 0$  a hozzá tartozó sajátvektor.)

$$Av = \lambda v$$

$$Avv^T = \lambda vv^T$$

$$\|A\| \cdot \|vv^T\| \geq \|Avv^T\| = \|\lambda vv^T\| = |\lambda| \cdot \|vv^T\|$$

Leosztva  $\|vv^T\| \neq 0$ -val  $\|A\| \geq |\lambda|$ .



## Feladatok gyakorlatra

Igazoljuk a következő állításokat.

**(a)** Ha  $Q$  ortogonális (unitér), akkor

- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ ,
- $\|Q\|_2 = 1$ ,
- $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$ .

## Feladatok gyakorlatra

(b)  $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^\top A)$ , ahol  $\text{tr}(B) := \sum_{k=1}^n b_{kk}$  a mátrix *nyoma*.

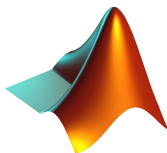
(c) Ha  $Q$  ortogonális (unitér), akkor  $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$ .

(d)  $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A)$ .

(e)  $\|\cdot\|_F$  és  $\|\cdot\|_2$  ekvivalens mátrixnormák.

(f) A Frobenius-norma illeszkedik a kettes vektornormához.





- 1 Indukált mátrixnorma szemléltetése  $\mathbb{R}^2$ ,  $p = 2$  esetén.
- 2 Indukált mátrixnormák közelítő számítása tetszőleges  $\mathbb{R}^n$  és  $p$  esetén ( $m = 100, \dots, 1000$  vektor próbájával).