9. gyakorlat

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények feltételes szélsőértékei

1. feladat. *Határozza meg az $f(x,y) := x^2 + y^2$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes lokális minimumhelyeit a $g(x,y) = x + 2y - 4 = 0$ feltételre vonatkozóan.*

(a) *Mi a feladat geometriai tartalma?*

(b) *Oldja meg a feladatot úgy, hogy a korlátozó feltételből y kifejezésével visszavezeti egyváltozós szélsőérték-problémára.*

(c) *Oldja meg a feladatot a Lagrange-szorzók módszerével.*

Megoldás.

(a) Mivel az egyenes egy (x,y) pontjának az origótól vett távolsága $\sqrt{x^2+y^2}$, ezért a feladat az egyenes origóhoz legközelebbi pontjának a meghatározása.

(b) A $g(x,y) = x + 2y - 4 = 0$ egyenletből $y = -\frac{1}{2}x + 2$ adódik. Ezért a feladat a

$$h(x) := f\big(x, -\tfrac{1}{2}x + 2\big) = x^2 + \big(-\tfrac{1}{2}x + 2\big)^2 = \tfrac{5}{4}x^2 - 2x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvény lokális minimumhelyeinek a megkeresése. Mivel

$$h'(x) = \frac{5}{2}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{4}{5} \text{ és } h''(x_0) = \frac{5}{2} > 0,$$

ezért x_0 a h másodfokú polinomnak egyetlen lokális minimumhelye. Következésképpen az $(x_0, y_0) = \big(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\big)$ pont az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozó egyetlen feltételes lokális minimumhelye.

(c) A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

A szükséges feltétel: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert

$$f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big) \text{ és } g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (1,2) \neq \big(0,0\big) \quad \big(\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 4) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2x + \lambda &= 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 2y + 2\lambda &= 0 \\ g(x,y) &= x + 2y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Az első és a második egyenletből adódó $x = -\frac{\lambda}{2}$ és $y = -\lambda$ értékeket a harmadik egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$x + 2y - 4 = -\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 4 = -\frac{5}{2}\lambda - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{8}{5}.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát:

$$x_0 = \frac{4}{5}, \quad y_0 = \frac{8}{5}, \quad \lambda_0 = -\frac{8}{5}.$$

Következésképpen csak az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pontban lehet lokális feltételes szélsőérték. A hozzá tartozó Lagrange-szorzó: $\lambda_0 = -\frac{8}{5}$.

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 1, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2;$$

$$D(x,y;\lambda) := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) - 1(1 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + 2 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = -10 < 0.$$

Így $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0$, ezért az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont az egyetlen feltételes lokális minimumhely. ■

1. megjegyzés. A kapott (x_0, y_0) pont egyúttal *abszolút* feltételes minimumhely is. Ez az állítás a **(b)** esetben abból következik, hogy h egy másodfokú, pozitív főegyütthatójú polinom, aminek x_0 *abszolút* minimumhelye.

A **(c)** esetben pedig tekintsük az

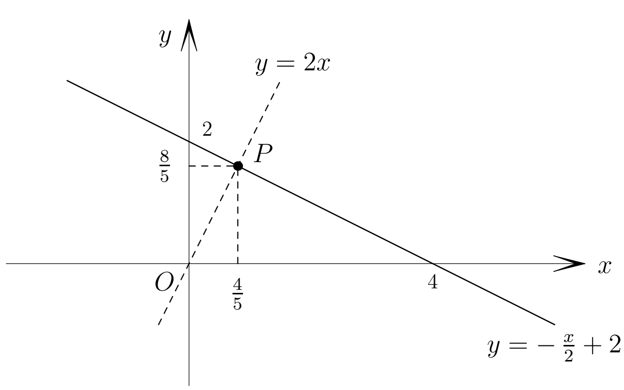
$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \tfrac{8}{5} \cdot g(x,y) = x^2 + y^2 - \tfrac{8}{5} \cdot (x + 2y - 4) \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

Lagrange-függvényt. Mivel

$$\mathcal{L}(x,y) = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

ezért az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont $\mathcal{L}$-nek *abszolút* minimumhelye. Így (x_0, y_0) az f függvénynek a $g = 0$ feltétel melletti *abszolút* feltételes minimumhelye is.

2. megjegyzés. A **(b)** és **(c)** módszerekkel kapott válaszok megegyeznek az elemi geometriából ismert eredménnyel, amit az alábbi ábrán szemléltetünk:



Az $y = 2x$ egyenletű egyenes merőleges az $y = -\frac{x}{2} + 2$ egyenesre, mert a meredekségük szorzata $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. A szóban forgó egyenes és az origó távolsága pedig $\sqrt{f\big(x_0, y_0\big)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

2. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := xy \quad \textit{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Keresse meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett

(a) *elemi úton,*

(b) *a Lagrange-szorzók módszerével.*

Megoldás.

(a) Az elemi megoldás alapötlete az egyszerűen igazolható

$$-\frac{x^2+y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad \big(\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

egyenlőtlenségek alkalmazása.

A $H_g := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x,y) = 0\big\}$ halmaz pontjaiban $x^2 + y^2 = 1$, ezért a fenti egyenlőtlenségek alapján

$$-\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2} \qquad \big(\forall\,(x,y) \in H_g\big).$$

Világos, hogy az első egyenlőtlenségben egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = -y$. Mivel $x^2 + y^2 = 1$, ezért $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez viszont azt jelenti, hogy az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontok az f függvény abszolút (következésképpen lokális) feltételes minimumhelyei a $g = 0$ feltétel mellett.

Hasonlóan adódik az is, hogy az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontok az f függvény abszolút (következésképpen lokális) feltételes maximumhelyei a $g = 0$ feltétel mellett.

(b) A feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

A szükséges feltétel: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert

$f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ és $g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (2x, 2y) \neq \big(0,0\big) \;\; \big(\forall\,(x,y) \in H_g\big)$.

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= y + 2\lambda x &&= 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= x + 2\lambda y &&= 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 &&= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Az $x = 0$ nem megoldás (hiszen akkor y is 0 lenne, ami a 3. egyenlet miatt lehetetlen), ezért az első egyenletből $2\lambda = -\frac{y}{x}$. Ezt a 2. egyenletbe beírva $x - \frac{y^2}{x} = 0$, azaz $x^2 = y^2$ adódik. A 3. egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $2x^2 = 1$. Ezek alapján az egyenletrendszernek az alábbi megoldásaiban *lehetnek* a feltételes lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2},$$
$$P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 2x, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2y;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 1 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda;$$

ezért

$$D(x,y;\lambda) := \det\begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{bmatrix} =$$
$$= \det\begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{bmatrix} = 8(xy - \lambda).$$

Így

$$D(P_1, \lambda_1) = D(P_2, \lambda_1) > 0 \implies P_1 \text{ és } P_2 \text{ feltételes lokális maximumhelyek},$$
$$D(P_3, \lambda_2) = D(P_4, \lambda_2) < 0 \implies P_3 \text{ és } P_4 \text{ feltételes lokális minimumhelyek}.$$

Megjegyzés. Az előzőekből az is következik, hogy körbe írható maximális területű téglalap a négyzet. ■

3. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := 2x + 3y \quad \textit{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Határozza meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett.

Megoldás.

A szükséges feltételre vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ és

$$g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (2x, 2y) \neq \big(0,0\big)$$

$\forall\,(x,y)\in\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x,y)=0\big\}$ pontban (hiszen g' csak az origóban egyenlő $(0,0)$-val, és az origó nem pontja az $x^2+y^2=1$ egyenletű körvonalnak).

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=2x+3y+\lambda(x^2+y^2-1)\quad\big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

A szóban forgó tétel szerint a lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned}\partial_1\mathcal{L}(x,y)&=2+2\lambda x &&=0\\ \partial_2\mathcal{L}(x,y)&=3+2\lambda y &&=0\\ g(x,y)&=x^2+y^2-1&&=0\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaiból adódnak.

A $\lambda=0$ nyilván nem megoldás, ezért az első és a második egyenletből $x=-\frac{1}{\lambda}$ és $y=-\frac{3}{2\lambda}$ adódik. Ezeket az értékeket a 3. egyenletbe beírva azt kapjuk, hogy

$$x^2+y^2-1=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}-1=\frac{13-4\lambda^2}{4\lambda^2}=0\quad\Longrightarrow\quad\lambda=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, tehát a *lehetséges* feltételes lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{3}{\sqrt{13}}\right),\quad \lambda_1=\frac{\sqrt{13}}{2},$$
$$P_2\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right),\quad \lambda_2=-\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Az elégséges feltétel: Mivel minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y)=2x,\qquad \partial_2 g(x,y)=2y;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y)=2\lambda,\quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y)=0=\partial_{21}\mathcal{L}(x,y),\quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y)=2\lambda;$$

ezért

$$D(x,y;\lambda):=\det\begin{bmatrix}0&\partial_1 g(x,y)&\partial_2 g(x,y)\\ \partial_1 g(x,y)&\partial_{11}\mathcal{L}(x,y)&\partial_{12}\mathcal{L}(x,y)\\ \partial_2 g(x,y)&\partial_{21}\mathcal{L}(x,y)&\partial_{22}\mathcal{L}(x,y)\end{bmatrix}=$$
$$=\det\begin{bmatrix}0&2x&2y\\2x&2\lambda&0\\2y&0&2\lambda\end{bmatrix}=-8\lambda\big(x^2+y^2\big).$$

Így

$$D\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{\sqrt{13}}{2}\right)<0\quad\Longrightarrow\quad P_1 \text{ feltételes lokális minimumhely},$$
$$D\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}};-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)>0\quad\Longrightarrow\quad P_2 \text{ feltételes lokális maximumhely}.\ \blacksquare$$

4. feladat. *Tekintse az*

$$f(x,y) := x^2 + y^2, \quad g(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 3 \qquad \big((x,y)^2 \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvényeket, és határozza meg az f feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett.

Megoldás.

A szükséges feltételre vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$ és

$$g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)\big) = (2x+y, x+2y) \neq \big(0,0\big)$$

$\forall\,(x,y) \in \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; g(x,y) = 0\big\}$ pontban.

A feladat Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó *szükséges* feltétel az x, y, λ ismeretlenekre az alábbi egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2x + 2\lambda x + \lambda y \quad = 0, \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 2y + \lambda x + 2\lambda y \quad = 0, \\ g(x,y) &= x^2 + xy + y^2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Az első- és a második egyenlet összegéből azt kapjuk, hogy

$$2(x+y) + 3\lambda(x+y) = (x+y)(2+3\lambda) = 0.$$

Ez két esetben teljesülhet:

(i) Ha $\lambda = -\frac{2}{3}$. Ekkor az első egyenletből $x = y$, ezt felhasználva a harmadikból $x = \pm 1$ adódik. A $P_1(1,1)$ és a $P_2(-1,-1)$ pontok tehát lehetséges lokális szélsőértékhelyek.

(ii) Ha $x + y = 0$, akkor a harmadik egyenlet alapján $x = \pm\sqrt{3}$. Tehát a $P_3(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ és a $P_4(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ pontok is lehetséges szélsőértékhelyek. Ebben az esetben $\lambda = -2$.

Az elégséges feltétel. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\begin{gathered} \partial_1 g(x,y) = 2x + y, \qquad \partial_2 g(x,y) = x + 2y; \\ \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2 + 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = \lambda = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2 + 2\lambda, \end{gathered}$$

ezért

$$D(x,y;\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0 & 2x+y & x+2y \\ 2x+y & 2+2\lambda & \lambda \\ x+2y & \lambda & 2+2\lambda \end{bmatrix}.$$

$\underline{P_1(1,1),\ \lambda=-\frac{2}{3}}$:

$$D\big(1,1;-\tfrac{2}{3}\big)=\det\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ 3 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3}\\ 3 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix}=(-3)\cdot(2+2)+3\cdot(-2-2)=-24<0,$$

ezért a $P_1(1,1)$ pont *feltételes lokális minimumhely.*

$\underline{P_2(-1,-1),\ \lambda=-\frac{2}{3}}$:

$$D\big(-1,-1;-\tfrac{2}{3}\big)=\det\begin{bmatrix}0 & -3 & -3\\ -3 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3}\\ -3 & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix}=D\big(1,1;-\tfrac{2}{3}\big)=-24<0,$$

ezért a $P_2(-1,-1)$ pont is *feltételes lokális minimumhely.*

$\underline{P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3}),\ \lambda=-2}$: Mivel $D(\sqrt{3},-\sqrt{3};-2)=24>0$, ezért a $P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ pont *feltételes lokális maximumhely.*

$\underline{P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3}),\ \lambda=-2}$: Mivel $D(-\sqrt{3},\sqrt{3};-2)=24>0$, ezért a $P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ pont *feltételes lokális maximumhely.*

Összefoglalva:

$$P_1(1,1)\quad \text{és}\quad P_2(-1,-1)$$

feltételes lokális minimumhelyek és $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ a feltételes lokális minimum,

$$P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3})\quad \text{és}\quad P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

pedig feltételes lokális maximumhelyek és $f\big(\sqrt{3},-\sqrt{3}\big)=f\big(-\sqrt{3},\sqrt{3}\big)=6$ a feltételes lokális maximum. ■

1. megjegyzés. A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó *elégséges* feltételt bizonyos esetekben *egyszerűen* is ellenőrizhetjük. Tegyük fel, hogy az (x_0,y_0) pontban a λ_0 Lagrange-szorzóval teljesül a szükséges feltétel, és tekintsük az

$$\mathcal{L}(x,y):=f(x,y)+\lambda_0 g(x,y)\qquad \big((x,y)\in U\big)$$

Lagrange-függvényt.

Ha sikerül *egyszerűen* belátnunk azt, hogy ennek a függvénynek az $(x_0,y_0)\in \operatorname{int} U$ pont lokális (feltétel nélküli) szélsőértékhelye, akkor ez nyilván egyúttal f-nek a $g=0$ feltétel melletti feltételes lokális szélsőértékhelye is.

Ez a helyzet az előbbi feladatnál is.

Vegyük először a $\lambda_0=-2$ Lagrange-szorzóval képzett Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}(x,y)=x^2+y^2-2(x^2+xy+y^2-3)=-(x+y)^2+6\qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)\big).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}$-nek az $y = -x$ egyenletű egyenes minden pontja *abszoút* maximumhely. A $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ egyenletű halmaznak a szóban forgó egyeneshez tartozó pontjai $P_3(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ és $P_4(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Így $\mathcal{L}$-nek ezek a pontok is *abszolút* maximumhelyei, következésképpen P_3 és P_4 az f függvény $g = 0$ fetétel melletti *abszolút* (egyúttal *lokális*) feltételes maximumhelyei.

Ha $\lambda_0 = -2/3$, akkor

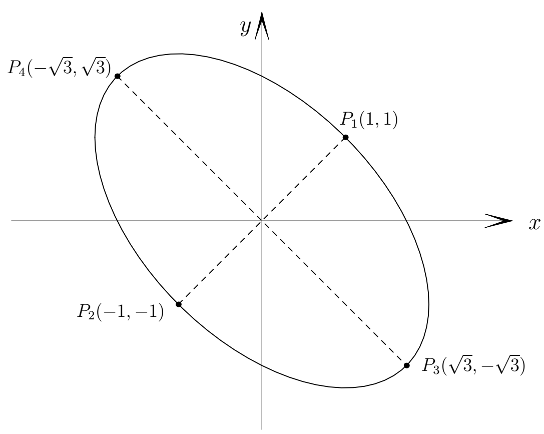
$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \tfrac{2}{3}(x^2 + xy + y^2 - 3) = \tfrac{2}{3}(x - y)^2 + 2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy a $P_1(1, 1)$ és a $P_2(-1, -1)$ pont az f függvény $g = 0$ fetétel melletti *abszolút* (egyúttal *lokális*) feltételes minimumhelyei.

2. megjegyzés. Rajzoltassuk fel egy programmal a korlátozó feltétel által meghatározott

$$H := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2 + xy + y^2 - 3 = 0\big\}$$

síkbeli alakzatot. Ez egy ellipszis amelynek a „nevezetes" pontjai éppen az előzőekben megkapott pontok. Ezt szemlélteti a az alábbi ábra:



A feladat geometriailag azt jelenti, hogy keressük a korlátozó feltétel által leírt ellipszis pontjai és az origó közötti távolságok közül lokálisan a legkisebbet, illetve a legnagyobbat.

Vegyük azonban figyelembe azt, hogy a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz korlátos és zárt, az f függvény folytonos H-n, ezért Weierstrass tétele szerint f-nek a H-n léteznek abszolút szélsőértékei. Ezekben a pontokban az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett lokális szélsőértékei is vannak. Ezek a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok. Így ezek a helyek egyúttal *abszolút* feltételes szélsőértékhelyek is. Az abszolút szélsőértékek:

$$f(P_1) = f(1, 1) = f(P_2) = f(-1, -1) = 2,$$
$$f(P_3) = f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(P_4) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6.$$