Formális nyelvek és a fordítóprogramok alapjai

4. előadás

Előadó: Nagy Sára,mesteroktató
Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék

Véges determinisztikus automata (VDA)

Definíció:

$A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ rendezett ötöst véges determinisztikus automatának nevezzük, ahol

- Q az állapotok nem üres véges halmaza,
- T az input szimbólumok ábécéje,
- $\delta: Q \times T \to Q$ leképezés az állapot-átmeneti függvény,
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot,
- $F \subseteq Q$ elfogadóállapotok halmaza.

Véges determinisztikus automata (VDA)

Véges determinisztikus automata estén a

$\delta: Q \times T \rightarrow Q$ állapot-átmeneti függvény

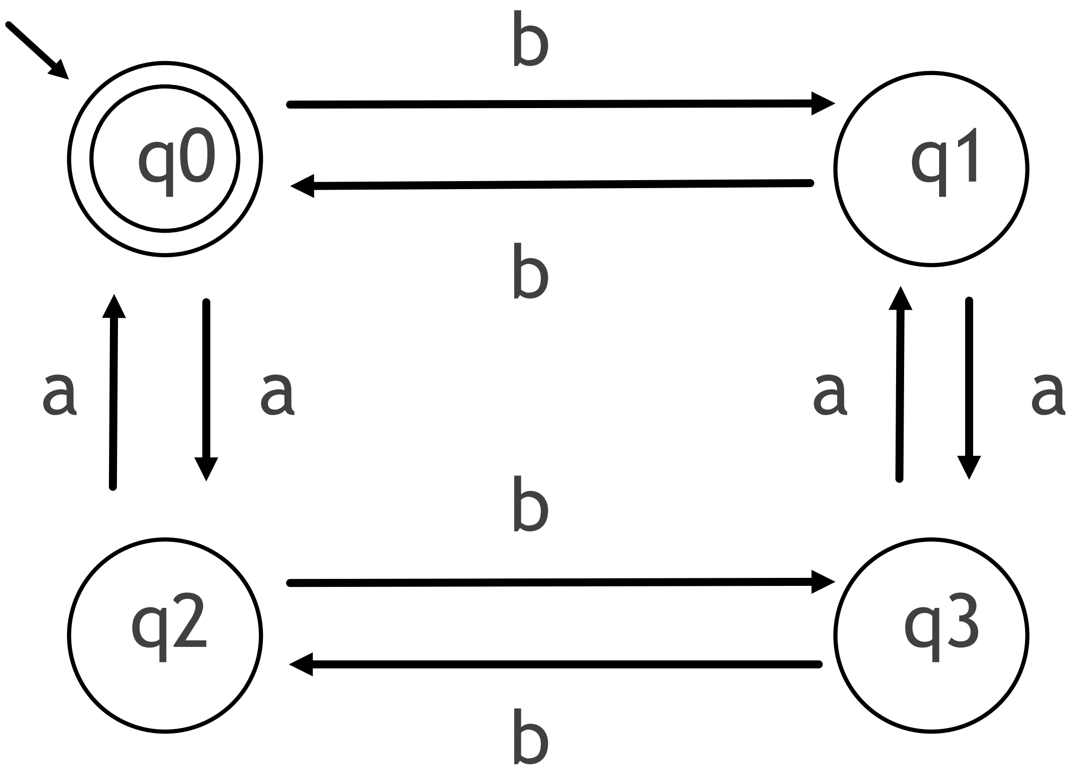
minden (q,a) párra értelmezett, ahol

$(q,a) \in Q \times T$ és egyetlen olyan $p \in Q$ állapot

van, amelyre $\delta(q,a) = p$.

Példa – automata megadása gráffal

δ	a	b
⇄ q0	q2	q1
q1	q3	q0
q2	q0	q3
q3	q1	q2



L(A)={u ∈ T* | u-ban páros sok ‚a’ betű és páros sok ‚b’ betű van}

Alternatív jelölés az állapot-átmenetre

$\delta(q, a) = p$ állapot átmenetet jelölhetjük egy

$qa \to p$ szabállyal.

Ha minden egyes (q, a) párra egyetlen $qa \to p$ szabály van, akkor a véges automata determinisztikus, egyébként nemdeterminisztikus.

Véges nemdeterminisztikus automata (VNDA)

Definíció:

$A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ rendezett ötöst véges nemdeterminisztikus automatának nevezzük, ahol

- Q az állapotok nem üres véges halmaza,
- T az input szimbólumok ábécéje,
- $\delta: Q \times T \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ (a Q részhalmazaiba képez)
- $Q_0 \subseteq Q$ a kezdőállapotok halmaza,
- $F \subseteq Q$ elfogadó állapotok halmaza.

Megjegyzés: VNDA a VDA általánosítása

Példa

Legyen $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ a következő, ahol

$Q = \{q0, q1, q2\}$, $T = \{a, b\}$, $Q_0 = \{q0\}$, $F = \{q2\}$ és

$\delta(q0, a) = \{q1\}$, $\delta(q0, b) = \emptyset$

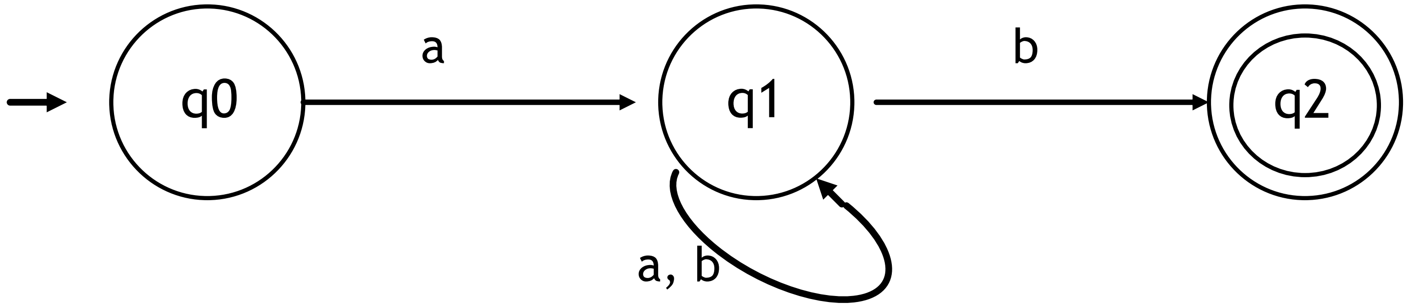
$\delta(q1, a) = \{q1\}$, $\delta(q1, b) = \{q1, q2\}$

$\delta(q2, a) = \emptyset$, $\delta(q2, b) = \emptyset$

$L(A)=\{u \in T^*$ | az u szó ’a’ betűvel kezdődik és ’b’ betűre végződik$\}$

Példa – nemdeterminisztikus automata megadása táblázattal és gráffal

δ	a	b
→ q0	q1	
q1	q1	q1, q2
← q2		



Közvetlen redukció

Legyen $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ egy véges nemdeterminisztikus automata és legyenek **u, v ∈ QT*** .
(Konfiguráció: aktuális állapot, input hátralévő része.)

Azt mondjuk, hogy az A automata az u konfigurációt a v konfigurációra redukálja közvetlenül (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan

$qa \rightarrow p$ szabály (azaz $\delta(q, a) = p$) és van olyan $w \in T^*$ szó, amelyre

$u = qaw$ és $v = pw$ teljesül.

Redukció

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ véges automata az

$u \in QT^*$ konfigurációt a $v \in QT^*$ konfigurációra redukálja (jelölés: $u \underset{A}{\Rightarrow}^* v$),

ha vagy $u = v$, vagy van olyan

$z \in QT^*$, amelyre $u \underset{A}{\Rightarrow}^* z$ és $z \underset{A}{\Rightarrow} v$ teljesül.

Automata által elfogadott nyelv

Definíció:

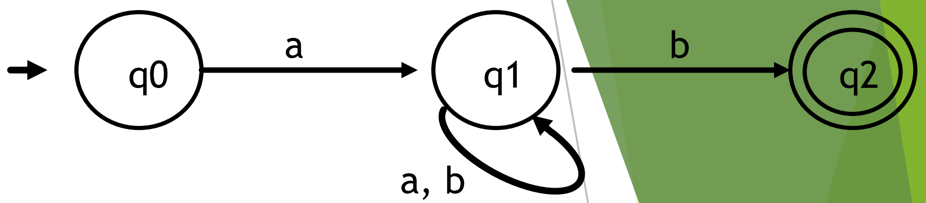
Az $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ véges automata által elfogadott nyelv alatt az

$L(A) := \{u \in T^* \mid \exists q_0 u \underset{A}{\Rightarrow}^* p, \quad q_0 \in Q_0 \text{ és } p \in F\}$

szavak halmazát értjük.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy van olyan működése az automatának, hogy egy kezdőállapotból indulva és végig olvasva az inputot elfogadóállapotba jut.

Példa



$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$

δ: $q_0a \rightarrow q_1$, $q_1a \rightarrow q_1$, $q_1b \rightarrow q_1$, $q_1b \rightarrow q_2$

Redukálás:

Kérdés: $aabb \in L(A)$?

Első próbálkozás:

$q_0aabb \Rightarrow q_1abb \Rightarrow q_1bb \Rightarrow q_1b \Rightarrow q_1$ $\quad q_1 \notin F$

Második próbálkozás:

$q_0aabb \Rightarrow q_1abb \Rightarrow q_1bb \Rightarrow q_1b \Rightarrow q_2$ $\quad q_2 \in F$,
azaz az **aabb** jó szó.

Harmadik próbálkozás:

$q_0aabb \Rightarrow q_1abb \Rightarrow q_1bb \Rightarrow q_2b$ Nem tudtuk végig olvasni a szót.

Emlékeztető:
3-típusú grammatikák normálformája

Tétel:

Minden 3-as típusú nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai

A $\rightarrow$ **aB**, ahol A, B $\in$ N és a $\in$ T vagy

A $\rightarrow$ **ε** alakúak, ahol A $\in$ N.

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Tétel:

Minden 3-as típusú L nyelvhez megadható egy véges nemdeterminisztikus automata, és fordítva, minden nemdeterminisztikus automata 3-as típusú nyelvet ismer fel.

$(\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{VNDA}}, \mathcal{L}_{\mathrm{VNDA}} \subseteq \mathcal{L}_3)$

Megjegyzés: Már láttuk, hogy $\mathcal{L}_{\mathrm{reg}} \subseteq \mathcal{L}_3$, így a reguláris kifejezésekhez (lexikális egységekhez) építhető automata.

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

Legyen L egy 3-as típusú nyelv. Ez azt jelenti, hogy megadható egy G=(N,T,P,S) 3-as normál formájú grammatikával is.

G alapján megkonstruálható egy

$A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ egy véges nemdeterminisztikus automata úgy, hogy L=L(G)=L(A).

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

Feleltessünk meg minden nemterminálisnak egy állapotot. Jelölje q_A az $A \in N$-hez rendelt állapotot.

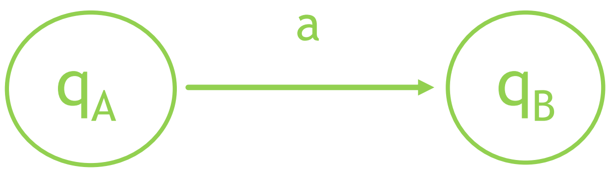
$A = (\{q_A \mid A \in N\}, T, \delta, q_S, F)$

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

Legyen $\delta(q_A, a) = q_B$,akkor és csak akkor, ha $A \rightarrow aB \in P$.

$q_A a \rightarrow q_B$



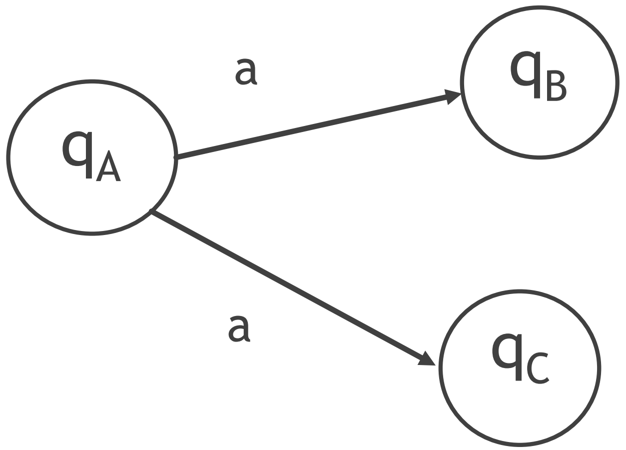
Legyen $q_A \in F$,akkor és csak akkor, ha $A \rightarrow \varepsilon \in P$.

3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

Az így létrehozott automata lehet nemdeterminisztikus.

Ha például $A \to aB \in P$ és $A \to aC \in P$ szabály is van, akkor ennek az alábbi automata felel meg.



3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

Bizonyítás vázlat:

A konstrukcióból adódik, ha

$S \underset{G}{\Rightarrow}{}^*u$,akkor $q_S \underset{A}{\Rightarrow}{}^*u$ és fordítva.

A tétel megfordításának bizonyítása hasonló, csak ott A automatához konstruáljuk meg a G 3-as típusú grammatikát.

Példa

L:={u ∈ {a,b}* | az u szó ’a’ betűvel kezdődik és ’b’ betűre végződik}

$G=(\{S,A,B\},\{a,b\},P,S)$

$A=(\{q_S,q_A,q_B\},\{a,b\}, \delta,\{q_S\},\{q_B\})$

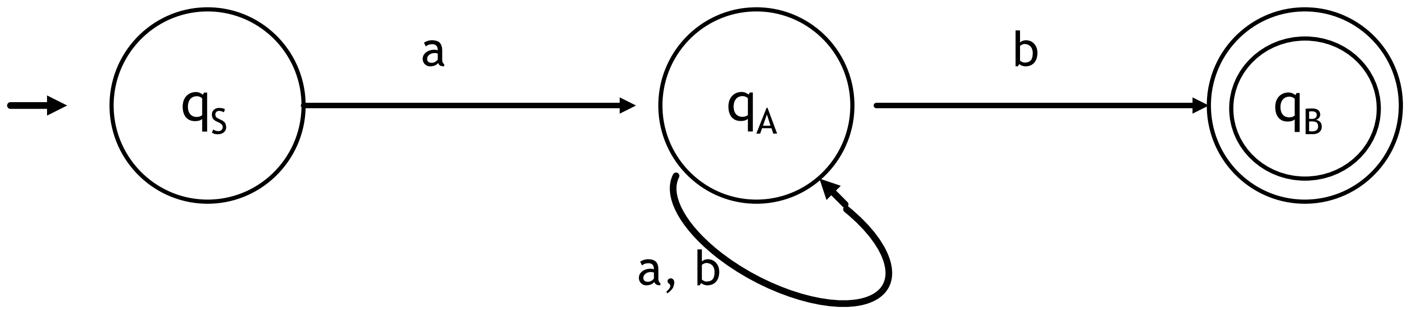
P: $S \rightarrow aA$

$A \rightarrow aA$

$A \rightarrow bA$

$A \rightarrow bB$

$B \rightarrow \varepsilon$



Nemdeterminisztikus automaták determinisztikussá tétele

Tétel:

Minden $A=(Q,T,\delta,Q_0,F)$ nemdeterminisztikus automatához megadható egy $A'=(Q',T,\delta',q_0',F')$ véges determinisztikus automata, hogy $L(A')=L(A)$.

$$(\mathcal{L}_{VNDA} \subseteq \mathcal{L}_{VDA})$$

3-as típusú nyelvek és automaták kapcsolata

$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{VNDA}}$ és $\mathcal{L}_{\mathrm{VNDA}} \subseteq \mathcal{L}_3$

(3-as normál formájú grammatika átírható automatává és fordítva.)

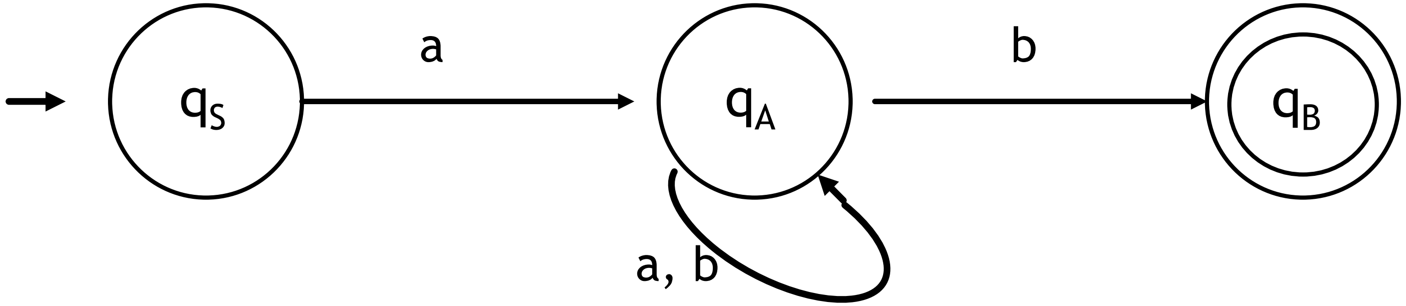
$\mathcal{L}_{\mathrm{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{VNDA}}$ (Definíció alapján triviális.)

Ha $\mathcal{L}_{\mathrm{VNDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{VDA}}$ is teljesülne, akkor

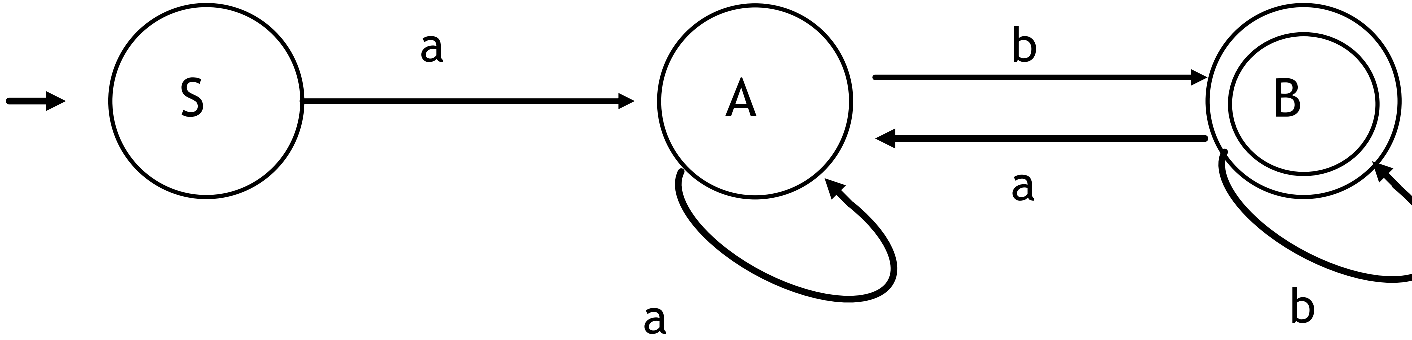
$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\mathrm{VNDA}} = \mathcal{L}_{\mathrm{VDA}}.$$

Példa

L:={u ∈ {a,b}* | az u szó ’a’ betűvel kezdődik és ’b’ betűre végződik}



Mj.: Ez VNDA.



Mj.: Ez VDA.

Determinisztikus automata megkonstruálása:

Legyen **Q'**:= $\mathcal{P}$(**Q**) ,azaz Q összes részhalmazainak halmaza, azaz hatványhalmaza.

Legyen a δ': Q' x T → Q' a következőképpen definiálva:

$$\boldsymbol{\delta'(q',a) :=} \bigcup_{q\in q'} \boldsymbol{\delta(q,a)}, \text{ ahol } q'\in Q' \text{ és } a\in T.$$

Legyen $q_0' := Q_0$ és $F' := \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\}$.

Konstrukció helyességének bizonyítása
($L(A) \subseteq L(A')$)

Lemma1:

$\forall$ $q,p \in Q$ és $q' \in Q'$ és $u,v \in T^*$ esetén, ha

$$qu \underset{A}{\Rightarrow}^* pv \text{ és } q \in q', \text{ akkor}$$

$\exists p' \in Q'$ úgy, hogy

$$q'u \underset{A'}{\Rightarrow}^* p'v \text{ és } p \in p'.$$

Ha $u \in L(A)$, akkor $\exists$ $q_0 u \underset{A}{\Rightarrow}^* p$,ahol $q_0 \in Q_0$ és $p \in F$.

Lemma1 alapján $\exists p' \in Q'$ úgy, hogy $q_0'u \underset{A'}{\Rightarrow}^* p'$ és $p \in p'$.

De $p \in F$, így $p' \cap F \neq \emptyset$, azaz $p' \in F'$ azaz $u \in L(A')$.

Konstrukció helyességének bizonyítása
(L(A')⊆L(A))

Lemma2:

$\forall$ q',p'∈Q' és p∈Q és u,v∈T* esetén, ha

$q'u \underset{A'}{\Rightarrow^*} p'v$ és p∈p', akkor

∃q∈Q úgy, hogy

$qu \underset{A}{\Rightarrow^*} pv$ és q ∈q'.

Ha u∈L(A'), akkor ∃ $q_0'u \underset{A'}{\Rightarrow^*} p'$ és p'∈F'.

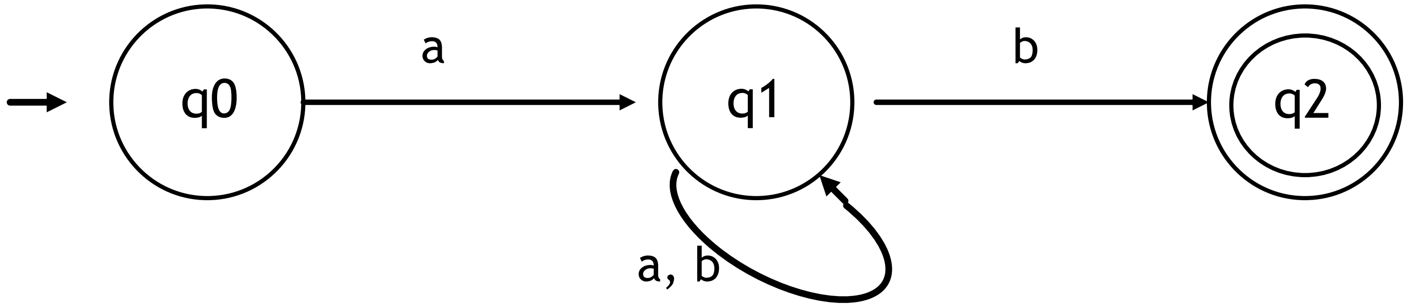
F' definiciója alapján van olyan p∈p', hogy p∈F.

Lemma2 alapján ∃q_0∈Q úgy, hogy $q_0u \underset{A}{\Rightarrow^*} p$,ahol $q_0 \in q_0'(=Q_0)$.

De p∈F, azaz u∈L(A).

Példa:
L:={u ∈ {a,b}* | az u szó ’a’ betűvel kezdődik és ’b’ betűre végződik}

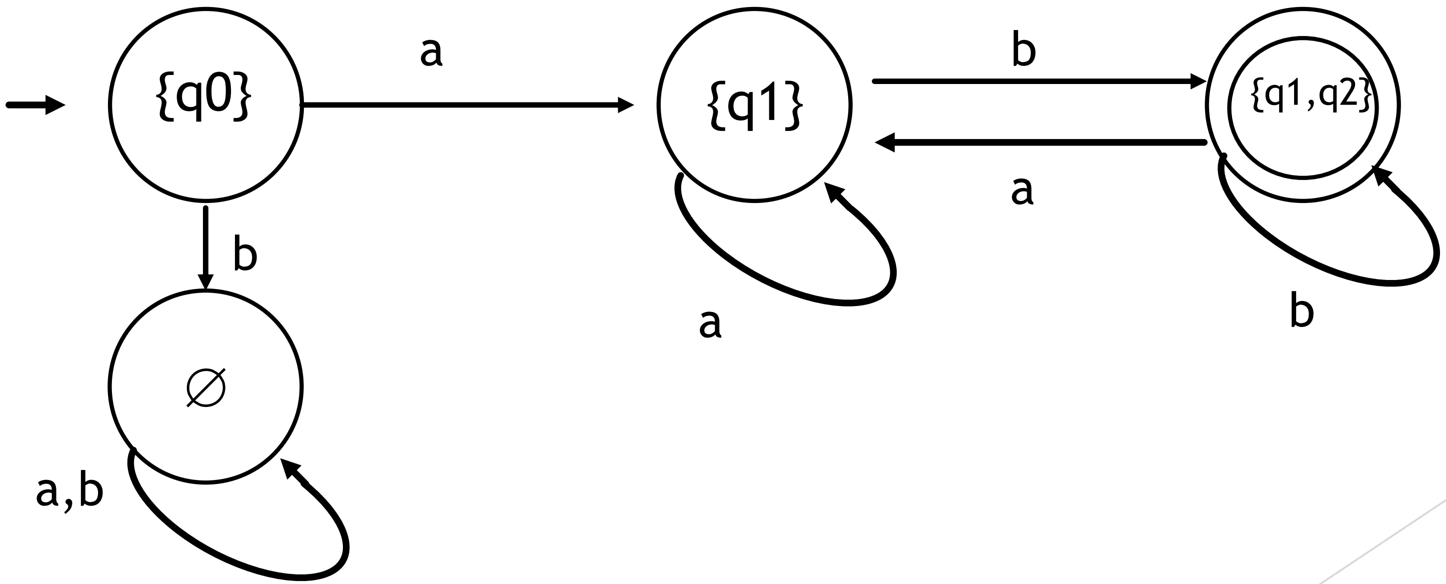
δ	a	b
→ q0	q1	
q1	q1	q1, q2
← q2		



Példa: L:={u ∈ {a,b}* | az u szó ’a’ betűvel kezdődik és ’b’ betűre végződik}

δ	a	b
→ q0	q1	
q1	q1	q1, q2
← q2		

δ’	a	b
→ {q0}	{q1}	∅
{q1}	{q1}	{q1,q2}
← {q1,q2}	{q1}	{q1,q2}
∅	∅	∅



Kleene tétele

Tétel: $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\text{reg}}$

Minden reguláris nyelvhez adható 3-as típusú grammatika, és fordítva minden 3-as típusú nyelv felépíthető az elemi reguláris nyelvekből a reguláris műveletek véges sokszori alkalmazásával.

Kleene tétele: $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\mathrm{reg}}$

Bizonyítás vázlat:

1. $\mathcal{L}_{\mathrm{reg}} \subseteq \mathcal{L}_3$ korábbi előadáson láttuk
2. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{\mathrm{VDA}}$ előbb láttuk
3. $\mathcal{L}_{\mathrm{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{reg}}$

Kleene tétele: $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{reg}$

Bizonyítás vázlat:

3. $\mathcal{L}_{VDA} \subseteq \mathcal{L}_{reg}$ kiszámítható egy reguláris kifejezés

Legyen A egy n állapotú VDA, azaz

$Q=\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ és

q_1 a kezdőállapot.

Kleene tétele bizonyítás folytatása: $\mathcal{L}_{VDA} \subseteq \mathcal{L}_{reg}$

Azt mondjuk, hogy $q_i u \underset{A}{\Rightarrow}^* q_j$ redukció érinti a q_m állapotot, ha q_m előfordul a redukciós levezetés valamely közbülső lépésében.

Azt mondjuk, hogy a redukció k-megszorított, ha a redukció csak 1 és k közötti indexű állapotot érint közbülső lépésként.

Kleene tétele bizonyítás folytatása: $\mathcal{L}_{VDA} \subseteq \mathcal{L}_{reg}$

$E_{i,j}^{k}$:= { u ∈ T* | ∃ $q_i u \underset{A}{\Rightarrow}^{*} q_j$ k-megszorított redukció}

,ahol 0≤k≤n és 1≤i,j≤n.

$E_{i,j}^{0}$:= { a ∈ T | ∃ $q_i a \rightarrow q_j$ állapotátmenet}, ahol i≠j.

$E_{i,i}^{0}$:= {ε} ∪ { a ∈ T | ∃ $q_i a \rightarrow q_i$ állapotátmenet}

$$\boldsymbol{E_{i,j}^{k} = E_{i,j}^{k-1} \cup E_{i,k}^{k-1} \left(E_{k,k}^{k-1}\right)^{*} E_{k,j}^{k-1}}$$

Kleene tétele bizonyítás folytatása: $\mathcal{L}_{\mathrm{VDA}} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{reg}}$

Legyen I:={elfogadó állapotok indexei}.

$$\mathrm{L(A)} = \bigcup_{i \in I} E_{1,i}^{n}$$

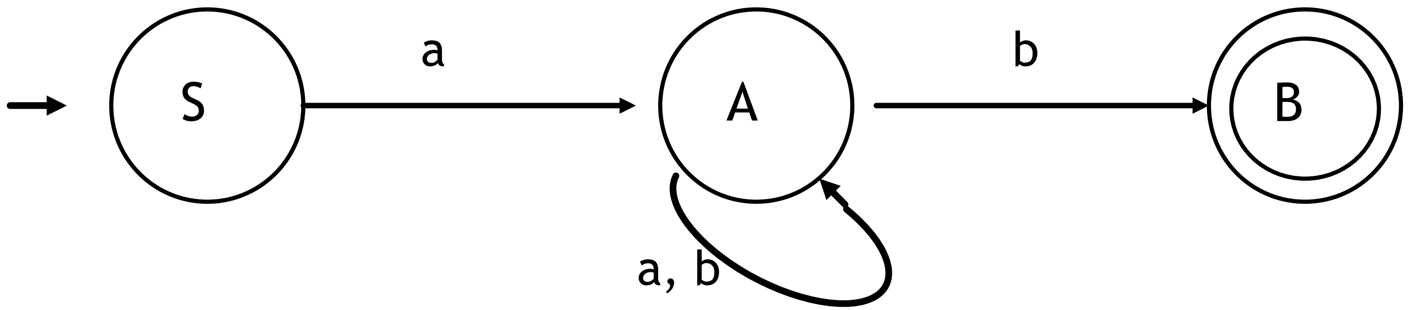
Megjegyzés: A kifejezésekben csak reguláris műveletek (unió, konkatenáció, lezárás) szerepeltek.

Példa: L={a}{a,b}*{b}   / reguláris kifejezéssel: a(a|b)*b /

$S \to aA$

$A \to aA \mid bA \mid bB$

$B \to \varepsilon$



Példa: L={a}{a,b}*{b}

δ'	a	b
→ 1	2	4
2	2	3
← 3	2	3
4	4	4

$L(A)=E_{1,3}^{4}$

$E_{1,3}^{4}=E_{1,3}^{3} \cup E_{1,4}^{3}(E_{4,4}^{3})^{*}E_{4,3}^{3};\ E_{4,3}^{3}=\emptyset$

$E_{1,3}^{3}=E_{1,3}^{2} \cup E_{1,3}^{2}(E_{3,3}^{2})^{*}E_{3,3}^{2};$

$E_{1,3}^{2}=E_{1,3}^{1} \cup E_{1,2}^{1}(E_{2,2}^{1})^{*}E_{2,3}^{1};$

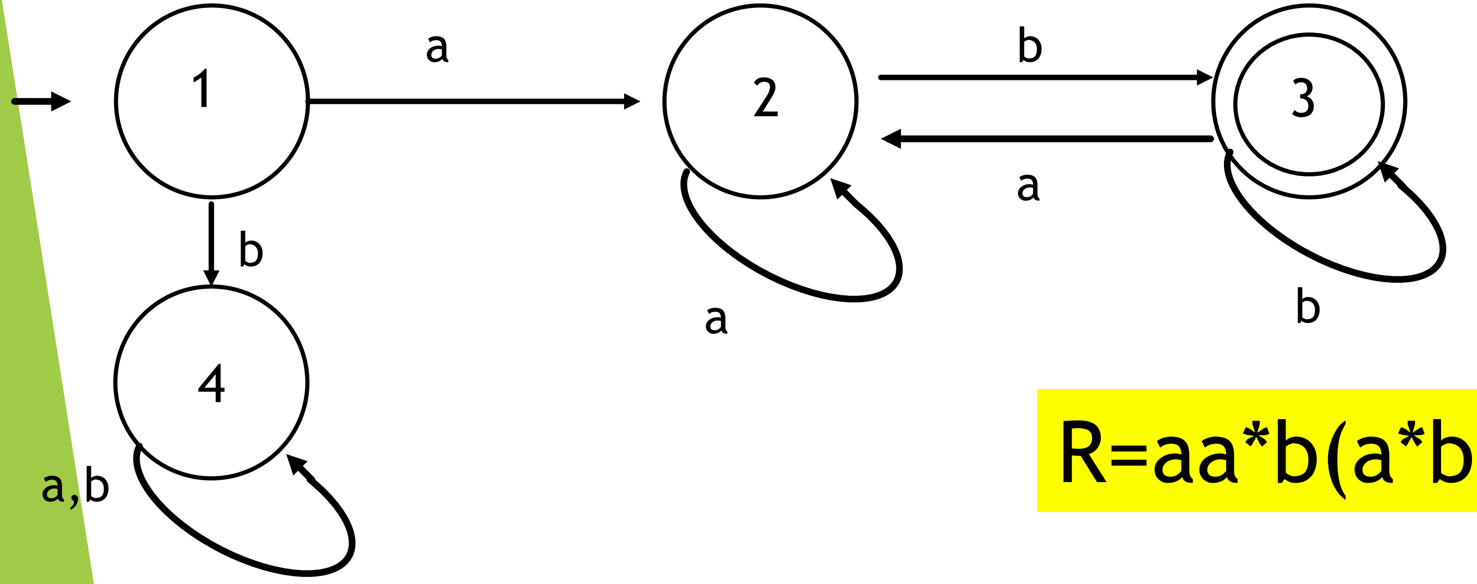
$E_{1,3}^{1}=E_{1,3}^{0} \cup E_{1,1}^{0}(E_{1,1}^{0})^{*}E_{1,3}^{0};\ E_{1,3}^{0}=\emptyset$

$\mathbf{E_{1,3}^{2}}=\emptyset \cup \{a\}\{a\}^{*}\{b\};$

$E_{3,3}^{2}=E_{3,3}^{1} \cup E_{3,2}^{1}(E_{2,2}^{1})^{*}E_{2,3}^{1};$

$\mathbf{E_{3,3}^{2}}=\{\varepsilon, b\} \cup \{a\}\{a\}^{*}\{b\};$

$\mathbf{L(A) = E_{1,3}^{4}}=E_{1,3}^{3}=\{a\}\{a\}*\{b\}\{\{a\}*\{b\}\}*$



R=aa*b(a*b)*

Minimális véges determinisztikus automata

Definíció:
Az A véges determinisztikus automata minimális állapotszámú, ha nincs olyan A′ véges determinisztikus automata, amely ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint A, de A′ állapotainak száma kisebb, mint A állapotainak száma.

Tétel:

Az L reguláris nyelvet felismerő <u>minimális</u> véges determinisztikus automata az izomorfizmus erejéig <u>egyértelmű</u>.

Minimális véges determinisztikus automata

Tétel:

Az L reguláris nyelvet felismerő <u>minimális</u> véges determinisztikus automata (VDA) az izomorfizmus erejéig <u>egyértelmű</u>.

Bizonyítás lépései:

1. Automata összefüggővé tétele
2. Ekvivalens állapotok meghatározása

Összefüggő véges determinisztikus automata

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges determinisztikus automata q állapotát **elérhetőnek** mondjuk,
ha $\exists u \in T^*$ szó, hogy $q_0 u \underset{A}{\Rightarrow}^{*} q$.

(Gráfos ábrázolásban ez azt jelenti, hogy van irányított út q_0-ból q-ba.)

Definíció:

Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges determinisztikus automatát **összefüggőnek** mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.

Összefüggő véges determinisztikus automata

Elérhető állapotok meghatározása:

Legyen $H_0=\{q_0\}$,

$H_{i+1}=H_i \cup \{r \in Q \mid \delta(q,a)=r,\ q \in H_i,\ a \in T\}$ és $i \geq 0$.

$\exists\ k \geq 0 : H_k = H_m$, ahol $m \geq k$. Legyen $H=H_k$.

H halmaz tartalmazza az elérhető állapotokat.

A' legyen az A azon részautomatája, ahol $Q'=H$.

(A $Q \setminus H$ nemelérhető állapotok elhagyhatók.)

Ekvivalens állapotok meghatározása

Definíció:
q ~ p (q és r **ekvivalens** állapotok),
ha $\forall$ u$\in$ T* szóra igaz, hogy qu $\underset{A}{\Rightarrow}^{*}$ r és pu $\underset{A}{\Rightarrow}^{*}$ r' esetén
r$\in$F akkor és csak akkor, ha r'$\in$F.

(Minden szóra igaz, hogy az automatát q-ból indítva vagy p-ből indítva, vagy mind kettő esetben elfogadja a szót, vagy mind kettő esetben elutasítja.)

Állítás: Ha q és p ekvivalens, akkor qa$\rightarrow$s és pa$\rightarrow$t esetén s és t is ekvivalens állapotok $\forall$ a $\in$ T betűre.

Ekvivalens állapotok meghatározása

Definíció:
q $\sim^{i}$ **p** (q és r i-**ekvivalens** állapotok),
ha $\forall$ u$\in$T* szóra,ahol **ℓ(u)≤i** igaz, hogy
qu $\underset{A}{\Rightarrow}$***** r és pu $\underset{A}{\Rightarrow}$***** r' esetén r$\in$F akkor és csak akkor, ha r'$\in$F.
(Legfeljebb i hosszú szavak esetén a két állapot nem megkülönböztethető.)

Lemma: q $\sim^{i+1}$ p akkor és csak akkor, ha
$\forall$ a $\in$ T-re qa$\rightarrow$r és pa$\rightarrow$t esetén r $\sim^{i}$ t.

Ekvivalens állapotok meghatározása

Tegyük fel, hogy az A automata <u>összefüggő</u>.

$q \sim^0 p$ akkor és csak akkor, ha $q,p \in F$ vagy $q,p \in Q \setminus F$,

Azaz első lépésben két partícióra osztjuk az állapotokat, az elfogadó és a nem elfogadó állapotokra.

$Q = B_1 \cup B_2$, ahol $B_1 := F$ és $B_2 := Q \setminus F$.

Csak az ε szó hossza nulla. A B_1-ben szereplő állapotok elfogadják az üres szót, B_2-ben szereplők pedig elutasítják.

Ekvivalens állapotok meghatározása

Finomítsuk a szavak hossza szerint a partíciókat:

ha q $\sim^{i}$ p és az állapotok k≥2 partícióra vannak osztva, Q = $B_1 \cup \ldots \cup B_k$, akkor p és q pontosan akkor maradnak együtt, ha $\forall a \in T$-re $qa \rightarrow r$ és $pa \rightarrow t$ esetén r és t ugyanabba a B_i partícióba tartoznak, egyébként B_i-t szétbontjuk.

Ha p és q $\forall a \in T$-re az előző lépés partíciói szerint mindig ugyanoda képeznek, akkor q $\sim^{i+1}$ p.

Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg változás van.

Minimális automata megadása

$A' = (Q', T, \delta', q_0', F')$

Q'= {az előző eljárással nyert B_i partíciók}

q_0'= a q_0-t tartalmazó partíció.

F' =az F-ből keletkezett partíciók.

$\delta'(B_i,a)= B_j$, ha $\delta(q,a)=p$ és $q \in B_i$ és $p \in B_j$.

Példa VDA minimalizálására

A =<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, {a,b} , δ, 1 , {2,4,9} >

δ	a	b
→1	3	6
←2	2	5
3	3	5
←4	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
←9	9	5

Példa VDA minimalizálására

δ	a	b
→1	3	6
←2	2	5
3	3	5
←4	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
←9	9	5

Elérhető állapotok:

$H_0 = \{1\}$

$H_1 = \{1\} \cup \{3,6\} = \{1,3,6\}$

$H_2 = \{1,3,6\} \cup \{3,6\} \cup \{3,5\} \cup \{8,7\} = \{1,3,5,6,7,8\}$

$H_3 = \{1,3,5,6,7,8\} \cup \{2,9\} = \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

$H_4 = H_3$

Nem elérhető állapot: 4. (Elhagyható.)

Példa VDA minimalizálására

δ	a	b
→1	3	6
←2	2	5
3	3	5
←4	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
←9	9	5

Partíciónálás:

A = {1,3,5,6,7,8}, B={2,9}

	a	b
1	A	A
3	A	A
5	B	A
6	A	A
7	A	A
8	B	A

	a	b
2	B	A
9	B	A

C={1,3,6,7}, D={5,8}

Példa VDA minimalizálására

Partíciónálás:

B={2,9}, C={1,3,6,7}, D={5,8}

	a	b
1	C	C
3	C	D
6	D	C
7	D	C

	a	b
2	B	D
9	B	D

	a	b
5	B	D
8	B	C

δ	a	b
→1	3	6
←2	2	5
3	3	5
←4	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
←9	9	5

E={1}, F={3}, G={6,7} H={5}, I={8}

Példa VDA minimalizálására

δ	a	b
→1	3	6
←2	2	5
3	3	5
←4	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
←9	9	5

Partíciónálás:

B={2,9}, E={1}, F={3}, G={6,7}, H={5}, I={8}

	a	b
6	I	G
7	I	E

	a	b
2	B	H
9	B	H

J={6}, K={7}

Példa VDA minimalizálására

δ	a	b
→1	3	6
←2	2	5
3	3	5
←4	9	4
5	2	5
6	8	7
7	8	1
8	9	3
←9	9	5

Partíciónálás:

B={2,9}, E={1}, F={3}, H={5}, I={8}

J={6}, K={7}

	a	b
2	B	H
9	B	H

Nincs változás.
A 2,9 állapotok összevonhatók.

Példa VDA minimalizálására

A’ =<{1,29,3,5,6,7,8}, {a,b} , δ’, 1 , {29} >
a minimális automata.

δ'	a	b
→1	3	6
←29	29	5
3	3	5
5	29	5
6	8	7
7	8	1
8	29	3

Köszönöm a figyelmet!