Az ítéletlogika alapjai

September 8, 2020

Tartalomjegyzék

1 Feladatok

1.1 Formalizálás

Formalizáljuk a következő állításokat!

1. Egyszerű állítások:
   (a) Esik az eső.
   (b) Nem süt a Nap.
   (c) Felhős az ég.
   (d) Péter okos.
   (e) Péter nem okos.
2. Összetett állítások:
   (a) Péter okos és vicces.
   (b) Ha Péter vicces, akkor ismer egy jó viccet.
   (c) Péter okos vagy vicces.
   (d) Esik az eső és nem süt a Nap.
   (e) Süt a Nap vagy felhős az ég.
   (f) Ha esik az eső, akkor felhős az ég.
   (g) Ha tudok formalizálni és készülök az órákra, akkor jó jegyet fogok kapni.
   (h) Esik a hó, de nincs hideg és a szél sem fúj.
   (i) Megveszem az almát, ha érett vagy nem kukacos.
   (j) Csak akkor veszem meg az almát, ha érett vagy nem kukacos.
   (k) Anna nem ment el az iskolába.
   (l) Nem igaz, hogy Anna nem ment el az iskolába.
   (m) Lóránt vagy moziba ment vagy színházba, de nincs otthon.
3. Összefüggő állítások:
   (a) Ha elalszom, akkor - föltételezve, hogy reggelizni is szeretnék - nem érek be időben a gyakorlatra.
   (b) Feltéve, hogy nem alszom el, elérem a buszt és időben beérek a gyakorlatra.
   (c) De ha nem érek be időben a gyakorlatra, annak ellenére, hogy nem aludtam el, akkor reggelizni is szeretnék.
   (d) Csak akkor nem igaz, hogy időben érek be a gyakorlatra vagy elérem a buszt, ha reggelizni is szeretnék.
4. Következmény vizsgálatok:
   (a) Nyomozós feladat: Betörtek egy árúházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
      1) Ha férfi a tettes, akkor kistermetű.
      2) Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be.
      3) A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott.
      4) Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanúk vallomása hiteles, akkor az ablakon mászott be.
      5) A helyszíni szemlén megállapították, hogy az ablakon senki sem mászott be.

      A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi.
   (b) Igaz-e a következő állítások alapján, hogy elmegyek sétálni?
      1) Ha nyár van, akkor süt a Nap és meleg van.
      2) Ha meleg van és jó a kedvem, akkor elmegyek sétálni.
      3) Nyár van és jó a kedvem.

1.2 Zárójelezés

1. Zárójelezzük be teljesen a következő formulákat!

   (a) $\neg\neg A \supset \neg B \vee B \wedge \neg A \supset A$

   (b) $A \wedge \neg C \supset \neg B \supset A \vee B$

   (c) $B \vee \neg C \wedge B \supset \neg\neg A \wedge C \wedge B$

2. Hagyjuk el az összes felesleges zárójelet a következő formulákról!

   (a) $(((A \wedge B) \supset C) \supset ((\neg A \vee \neg B) \wedge C))$

   (b) $((\neg B \wedge (\neg C \wedge A)) \supset (A \supset B))$

   (c) $((((A \supset \neg B) \supset \neg A) \vee \neg B) \wedge A)$

1.3 Igazságtábla és szemantikus tulajdonságok

1. Készítsük el a következő formulákhoz az igazságtáblájukat, majd vizsgáljuk meg, hogy milyen szemantikus tulajdonság(ok) olvasható(k) le róluk!

   (a) $A \wedge B \supset B \supset \neg A$

   (b) $\neg A \wedge \neg B \supset \neg A \vee B$

   (c) $(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg A \vee B)$

   (d) $A \wedge B \vee C \supset \neg C$

   (e) $A \vee B \supset \neg(\neg C \wedge \neg A) \vee \neg A$

   (f) $\neg(\neg A \wedge B \supset \neg C) \wedge \neg(\neg B \supset \neg C \wedge A)$

2. Tautológikusan ekvivalens-e a következő két formula? (Az igazságtáblájuk azonos?)

   (a) $A \supset B \equiv \neg A \vee B$

   (b) $\neg(A \wedge \neg B \supset \neg A) \equiv A \wedge \neg B$

   (c) $\neg A \supset \neg B \wedge A \supset \neg B \equiv A \vee \neg A$

   (d) $A \wedge \neg B \supset \neg A \vee B \equiv \neg B \vee A$

3. Formalizáljuk a következő következmény vizsgálatokat, majd közös igazságtáblán ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e.

   (a) 1) Ha esik az eső, akkor nem süt a Nap.
   2) Süt a Nap vagy felhős az ég.
   K Ha esik az eső, akkor felhős az ég.

   (b) 1) Elmegyek a könyvtárba vagy moziba, de biztos nem maradok otthon.
   2) Akkor és csak akkor megyek könyvtárba,ha nem megyek moziba.
   3) Nem maradok otthon.
   K Otthon maradok vagy könyvtárba megyek.

   (c) 1) Ha esik az eső, akkor fúj a szél.
   2) Esik az eső és nem fúj a szél.
   K Nem esik az eső.

   (d) 1) Ha süt a Nap és jó a kedvem, akkor elmegyek sétálni.
   2) Csak akkor van jó kedvem, ha süt a Nap.
   3) Jó kedvem van vagy nem megyel el sétálni.
   K Süt a Nap vagy nincs jó kedvem.

2 Megoldások

2.1 Formalizálás

Formalizáljuk a következő állításokat!

1. Egyszerű állítások:
   (a) E
   (b) $\neg N$, ahol N - süt a Nap
   (c) F
   (d) O
   (e) $\neg O$, ahol O - Péter okos.
2. Összetett állítások:
   (a) $O \wedge V$, ahol
   - O - Péter okos.
   - V - Péter vicces.

   (b) $V \supset I$, ahol
   - V - Péter vicces.
   - I - Péter ismer egy jó viccet.

   (c) $O \vee V$, ahol
   - O - Péter okos.
   - V - Péter vicces.

   (d) $E \wedge \neg N$, ahol
   - E - Esik az eső.
   - N - Süt a Nap.

   (e) $N \vee F$, ahol
   - N - Süt a Nap.
   - F - Felhős az ég.

   (f) $E \supset F$, ahol
   - E - Esik az eső.
   - F - Felhős az ég.

   (g) $(F \wedge K) \supset J$, ahol
   - F - Tudok formalizálni.
   - K -Készülök az órákra.
   - J - Jó jegyet fogok kapni.

   (h) $E \wedge \neg H \wedge \neg S$, ahol
   - E - Esik a hó.
   - H - Hideg van.
   - S - Fúj szél.

   (i) $(E \vee \neg K) \supset M$, ahol
   - M - Megveszem az almát.
   - E - Érett az alma.
   - K - Kukacos az alma.

   (j) $M \supset (E \vee \neg K)$, hasonló jelölés, mint az előző.

   (k) $\neg A$, ahol
   - A - Anna elment az iskolába.

(l) $\neg\neg A$, hasonló jelölés, mint az előző.

(m) $(M \vee S) \wedge \neg O$, ahol
- M - Lóránt moziba ment.
- S - Lóránt színházba ment.
- O - Lóránt otthon van.

3. Összefüggő állítások:

E - Elalszom.
R - Szeretnék reggelizni.
G - Beérek időben a gyakorlatra.
B - Elérem a buszt.

(a) $E \supset (R \supset \neg G)$ vagy $(E \wedge R) \supset \neg G$
(b) $\neg E \supset (B \wedge G)$
(c) $(\neg G \wedge \neg E) \supset R$
(d) $\neg(G \vee B) \supset R$

4. Következmény vizsgálatok:

(a) Nyomozós feladat:
F - Férfi a tettes.
K - Kistermetű a tettes.
R - A tettes férfiruhát hordott.
A - A tettes az ablakon mászott be.
H - A szemtanők vallomása hiteles.

1) $F \supset K$
2) $K \supset A$
3) $F \vee R$
4) $R \wedge H \supset A$
5) $\neg A$
K $\neg F$

(b) Elmegyek sétálni?

Ny - Nyár van.
N - Süt a Nap.
M - Meleg van.
J - Jó a kedvem.
S - Elmegyek sétálni.

1) $Ny \supset N \wedge M$
2) $M \wedge J \supset S$
3) $Ny \wedge J$
K S

2.2 Zárójelezés

1. Zárójelezzük be teljesen a következő formulákat!
   (a) $(\neg\neg A \supset ((\neg B \vee (B \wedge \neg A)) \supset A))$
   (b) $((A \wedge \neg C) \supset (\neg B \supset (A \vee B)))$
   (c) $((B \vee (\neg C \wedge B)) \supset ((\neg\neg A \wedge C) \wedge B))$ vagy
   $((B \vee (\neg C \wedge B)) \supset (\neg\neg A \wedge (C \wedge B)))$

2. Hagyjuk el az összes felesleges zárójelet a következő formulákról!
   (a) $(A \wedge B \supset C) \supset (\neg A \vee \neg B) \wedge C$
   (b) $\neg B \wedge \neg C \wedge A \supset A \supset B$
   (c) $(((A \supset \neg B) \supset \neg A) \vee \neg B) \wedge A$

2.3 Igazságtábla és szemantikus tulajdonságok

1. Készítsük el a következő formulákhoz az igazságtáblájukat, majd vizsgáljuk meg, hogy milyen szemantikus tulajdonság(ok) olvasható(k) le róluk!

   (a) $((A \wedge B) \supset (B \supset \neg A))$

A	B	$((A \wedge B) \supset (B \supset \neg A))$
i	i	$((i \wedge i) \supset (i \supset \neg i)) = h$
i	h	$((i \wedge h) \supset (h \supset \neg i)) = i$
h	i	$((h \wedge i) \supset (i \supset \neg h)) = i$
h	h	$((h \wedge h) \supset (h \supset \neg h)) = i$

   - Van olyan interpretáció, ahol a helyettesítési érték *igaz*, így **kielégíthető**.
   - Nem minden interpretációban *igaz* a helyettesítési érték, így nem tautológia.
   - Nem minden interpretációban *hamis* a helyettesítési érték, így nem kielégíthetetlen.

   (b) $((\neg A \wedge \neg B) \supset (\neg A \vee B))$

A	B	$((\neg A \wedge \neg B) \supset (\neg A \vee B))$
i	i	$((\neg i \wedge \neg i) \supset (\neg i \vee i)) = i$
i	h	$((\neg i \wedge \neg h) \supset (\neg i \vee h)) = i$
h	i	$((\neg h \wedge \neg i) \supset (\neg h \vee i)) = i$
h	h	$((\neg h \wedge \neg h) \supset (\neg h \vee h)) = i$

   - Van olyan interpretáció, ahol a helyettesítési érték *igaz*, így **kielégíthető**.
   - Minden interpretációban *igaz* a helyettesítési érték, így **tautológia**.
   - Nem minden interpretációban *hamis* a helyettesítési érték, így nem kielégíthetetlen.

   (c) $(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg A \vee B)$

A	B	$(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg A \vee B)$
i	i	$(\neg i \vee \neg i) \wedge i \wedge (\neg i \vee i) = h$
i	h	$(\neg i \vee \neg h) \wedge i \wedge (\neg i \vee h) = h$
h	i	$(\neg h \vee \neg i) \wedge h \wedge (\neg h \vee i) = h$
h	h	$(\neg h \vee \neg h) \wedge h \wedge (\neg h \vee h) = h$

   - Nincs olyan interpretáció, ahol a helyettesítési érték *igaz*, így nem kielégíthető.
   - Nem minden interpretációban *igaz* a helyettesítési érték, így nem tautológia.
   - Minden interpretációban *hamis* a helyettesítési érték, így **kielégíthetetlen**.

   (d) $(((A \wedge B) \vee C) \supset \neg C)$

A	B	C	$(((A \wedge B) \vee C) \supset \neg C)$
i	i	i	h
i	i	h	i
i	h	i	h
h	i	i	h
i	h	h	i
h	i	h	i
h	h	i	h
h	h	h	i

   - Van olyan interpretáció, ahol a helyettesítési érték *igaz*, így **kielégíthető**.

- Nem minden interpretációban *igaz* a helyettesítési érték, így nem tautológia.
- Nem minden interpretációban *hamis* a helyettesítési érték, így nem kielégíthetetlen.

(e) $((A \vee B) \supset (\neg(\neg C \wedge \neg A) \vee \neg A))$

A	B	C	$((A \vee B) \supset (\neg(\neg C \wedge \neg A) \vee \neg A))$
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	i
h	i	i	i
i	h	h	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	i

- Van olyan interpretáció, ahol a helyettesítési érték *igaz*, így **kielégíthető**.
- Minden interpretációban *igaz* a helyettesítési érték, így **tautológia**.
- Nem minden interpretációban *hamis* a helyettesítési érték, így nem kielégíthetetlen.

(f) $(\neg((\neg A \wedge B) \supset \neg C) \wedge \neg(\neg B \supset (\neg C \wedge A)))$

A	B	C	$(\neg((\neg A \wedge B) \supset \neg C) \wedge \neg(\neg B \supset (\neg C \wedge A)))$
i	i	i	h
i	i	h	h
i	h	i	h
h	i	i	h
i	h	h	h
h	i	h	h
h	h	i	h
h	h	h	h

- Nincs olyan interpretáció, ahol a helyettesítési érték *igaz*, így nem kielégíthető.
- Nem minden interpretációban *igaz* a helyettesítési érték, így nem tautológia.
- Minden interpretációban *hamis* a helyettesítési érték, így **kielégíthetetlen**.

2. Tautologikusan ekvivalens-e a következő két formula? (Az igazságtáblájuk azonos?)

(a) $A \supset B \equiv \neg A \vee B$

A	B	$A \supset B$	$\neg A \vee B$
i	i	i	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	h	i	i

A közös igazságtáblán látszik, hogy az minden interpretációban azonos a formulák helyettesítési értéke, így tautologikusan ekvivalensek.

(b) $\neg(A \wedge \neg B \supset \neg A) \equiv A \wedge \neg B$

A	B	$\neg((A \wedge \neg B) \supset \neg A)$	$A \wedge \neg B$
i	i	h	h
i	h	i	i
h	i	h	h
h	h	h	h

A közös igazságtáblán látszik, hogy az minden interpretációban azonos a formulák helyettesítési értéke, így tautologikusan ekvivalensek.

(c) $\neg A \supset \neg B \wedge A \supset \neg B \equiv A \vee \neg A$

A	B	$(\neg A \supset ((\neg B \wedge A) \supset \neg B))$	$A \vee \neg A$
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	i	i
h	h	i	i

A közös igazságtáblán látszik, hogy az minden interpretációban azonos a formulák helyettesítési értéke, így tautologikusan ekvivalensek.

(d) $A \wedge \neg B \supset \neg A \vee B \equiv \neg B \vee A$

A	B	$((A \wedge \neg B) \supset (\neg A \vee B))$	$\neg B \vee A$
i	i	i	i
i	h	h	i
h	i	i	h
h	h	i	i

A közös igazságtáblán látszik, hogy a 2. és 3. interpretációkban nem azonos a formulák helyettesítési értéke, így nem tautologikusan ekvivalensek.

3. Formalizáljuk a következő következmény vizsgálatokat, majd közös igazságtáblán ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e.

(a) $\{E \supset \neg N, N \vee F\} \models_0 E \supset F$

E	N	F	$E \supset \neg N$	$N \vee F$	$E \supset F$
i	i	i	h	i	i
i	i	h	h	i	h
i	h	i	i	i	i
h	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	h	i	i	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	h	i

Minden interpretációban, amikor a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke igaz, akkor a következményformula helyettesítési értéke is igaz, így a következmény helyes!

(b) $\{(K \vee M) \wedge \neg O, (K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K), \neg O\} \models_0 O \vee K$

K	M	O	$(K \vee M) \wedge \neg O$	$(K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K)$	$\neg O$	$O \vee K$
i	i	i	h	h	h	i
i	i	h	i	h	i	i
i	h	i	h	i	h	i
i	h	h	h	i	h	i
h	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i	h
h	h	i	h	h	h	i
h	h	h	h	h	i	h

Nem minden interpretációban teljesül, hogy amikor a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke igaz, akkor a következményformula helyettesítési értéke is igaz, így a következmény nem helyes!

(c) $\{E \supset F, E \wedge \neg F\} \models_0 \neg E$

E	F	$E \supset F$	$E \wedge \neg F$	$\neg E$
i	i	i	h	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	h	i

Nincs olyan interpretáció, ahol a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke igaz, vagyis a formulahalmaz kielégíthetetlen. Ilyen formulahalmaznak bármilyen formula következménye, így a megadott következmény is helyes.

(d) $\{N \wedge J \supset S, J \supset N, J \vee \neg S\} \models_0 S \vee \neg J$

N	J	S	$N \wedge J \supset S$	$J \supset N$	$J \vee \neg S$	$S \vee \neg J$
i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	h	i	i	h
i	h	i	i	i	h	i
i	h	h	i	i	i	i
h	i	i	i	h	i	i
h	i	h	i	h	i	h
h	h	i	i	i	h	i
h	h	h	i	i	i	i

Minden interpretációban, amikor a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke igaz, akkor a következményformula helyettesítési értéke is igaz, így a következmény helyes!

3 Fejtörők/Gondolkodós feladatok (megoldás nélkül)

1. Vizsgáljuk a következő szemantikus tulajdonságú formulák által alkotott formulákat, melyik tulajdonság teljesül rájuk? Válaszunk indokoljuk!
   (a) (kielégíthetetlen formula) $\supset$ (tetszőleges formula)
   (b) (kielégíthető formula) $\supset$ (kielégíthető formula)
   (c) (tautológia) $\vee$ (tetszőleges formula)
   (d) (kielégíthető formula) $\wedge$ (tetszőleges formula)
2. Gondoljuk végig, hogy helyesek-e a következtetések!
   (a) 1) A gyakorlat érdekes is, meg nem is.
   K Az előadás érdekes.
   (b) 1) A gyakorlat nagyon korán van.
   K Vagy elmarad az előadás, vagy nem.
3. **Fejtörő**

   Hosszú évek keresése után végre ráleltél kis felderítő csapatoddal az inkák ősi aranyvárosára El Dorado-ra. Azonban a helyi lakosok nem vették jó néven, amikor meg akartad lovasítani aranyukat a kincstárból. Az uralkodó úgy döntött, hogy ad nektek egy utolsó esélyt a szabadulásra, ráadásul az összes arany amit elbírtok is magatokkal vihetitek, ha kiálljátok próbáját!

   Az uralkodó felszólította legkiválóbb alkimistáját, hogy álljon elő egy az alkalomhoz méltó próbával. Az alkimista hosszas gondolkodás után négy pohár színes italt helyez eléd, majd azt mondja:

   "Ezen négy pohár ital közül egy szabadulásod kulcsát tartalmazza, míg a másik 3 veszted okozza, segítségül öt állítással szolgálok, választásodhoz sok szerencsét kívánok!"

   Az állítások a következőek:

   (a) Ha a piros ital vagy a kék ital méreg, akkor a zöld is.
   (b) Vagy a lila ital vagy a piros méreg, vagy mindkettő.
   (c) A zöld vagy a kék ital nem méreg, de a piros biztosan.
   (d) Ha a kék méreg, akkor a piros vagy a lila ital is.
   (e) Csak akkor nem méreg a lila, ha a piros sem.

   Melyik színű ital nem méreg? Válaszod indokold!