Függvények aszimptotikus növekedési üteme

I. Általános összefüggések

A. Definíciók

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- f-nek g aszimptotikus felső korlátja (jelölése: $f(n) = O(g(n))$; ejtsd: $f(n)$ = nagyordó $g(n)$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \le c \cdot g(n)$ minden $n \ge N$-re.
- f-nek g aszimptotikus alsó korlátja (jelölése: $f(n) = \Omega(g(n))$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \ge c \cdot g(n)$ minden $n \ge N$-re.
- f-nek g aszimptotikus éles korlátja (jelölése: $f(n) = \Theta(g(n))$) ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$ minden $n \ge N$-re.

Megjegyzés: aszimptotikusan nemnegatív (egy küszöbindextől nemnegatív) értékű sorozatokra is kiterjeszthető.

B. Tulajdonságok

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is tekinthetők a $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvényeken (pl. $(f, g) \in \Theta \Leftrightarrow f = \Theta(g)$).

1. O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h) \ \Rightarrow\ f = O(h)$)
2. O, Ω, Θ reflexív
3. Θ szimmetrikus
4. O, Ω fordítottan szimmetrikus ($f = O(g) \ \Leftrightarrow g = \Omega(f)$)
5. (köv.) Θ ekvivalenciareláció, a $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények egy osztályozását adja. Az egyes függvényosztályokat általában "legegyszerűbb" tagjukkal reprezentáljuk. Pl. 1 (korlátos függvények), n (lineáris függvények), n^2 (négyzetes függvények).

6. $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Összeadásra való zártság)

7. Legyen $c > 0$ konstans $f = O(g) \Rightarrow c \cdot f = O(g)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Pozitív konstanssal szorzásra való zártság)

8. $f + g = \Theta(\max\{f, g\})$ (szekvencia tétele). A domináns tag határozza meg egy összeg aszimptotikus nagyságrendjét.

C. Ha létezik az f/g határérték

- ha $f(n)/g(n) \to +\infty \quad \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$ és $f(n) \neq O(g(n))$
- ha $f(n)/g(n) \to c \quad (c > 0) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$
- ha $f(n)/g(n) \to 0 \quad \Rightarrow f(n) = O(g(n))$ és $f(n) \neq \Omega(g(n))$

D. Hibatagok jelölésére

Példa:

$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + O(n)$.

$(n + 1)^k = n^k + kn^{k-1} + O(n^{k-2})$.

II. Konkrét függvények

(a) $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,

(b) Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,

(c) Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$,

(d) Minden $a, b > 1$-re $\log_a n = \Theta(\log_b n)$,

(e) Minden $c > 0$ -ra $\log_2 n = O(n^c)$, de $\log_2 n \neq \Omega(n^c)$.

III. Feladatok

1. Mutassunk példát olyan f és g fv-ekre, melyekre

   (a) $f = O(g)$, de $f \neq \Omega(g)$,

   (b) $f = \Omega(g)$, de $f \neq O(g)$,

   (c) $f = \Theta(g)$

   Igazoljuk állításainkat közvetlenül a definíciók felhasználásával!

2. Igazoljuk O tranzitivitását!

3. Igazoljuk Θ szimmetrikusságát!

4. Igazoljuk a **C** pont állítását!

5. Igazoljuk a **II** pont állításait!

6. Mit mondhatunk arról az f függvényről, melyre $f(1) = 1$, $f(2) = 10$, és $f(3) = 100$?

   (1) $f(n) = O(10^n)$,

   (2) $f(n) = 10^{O(n)}$,

   (3) Egyik fenti állítás sem igaz minden esetben.

7. Hasonlítsuk össze az alábbi 2 függvényt aszimptotikus növekedésük szerint! $f(n) = 5 \cdot 2^n + n^3$, $g(n) = 3^n + 2 \cdot n$.

8. Lássuk be, hogy $n \geq 6$-ra

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

9. Lássuk be, hogy $\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$.

10. Rendezzük aszimptotikus nagyságrendjük szerint az alábbi függvényeket!

$\log_3(n!)$,	$(2/3)^n$,	$4\log_{17}(n+5)$,
$n^{1,01} + 3\sqrt{n}$,	$100n^{100} + 3^n$,	$n!$,
$n^{0,03} + 2\ln n$,	$3^n + 2^n$,	$n^{3/2}$.

IV. Megoldások

1. (a) $f(n) = 3n + 4$, $g(n) = 2n^2 + 1$

   $n \geq 1$-re $f(n) = 3n+4 \leq 3n^2+4 < 8n^2+4 = 4g(n)$. Tehát $N = 1, c = 4$ például jó.

   Ha $2n^2 + 1 \leq c(3n+4)$ igaz lenne valamely $c > 0$-ra és $n > N$-re akkor $(2n^2 + 1)/(3n + 4) \leq c$ teljesülne. Azonban a baloldalon álló tört nem korlátos ($+\infty$ a határértéke).

   (b) $f(n) = 2n^2 + 1$ és $g(n) = 3n + 4$ jó.

   (c) $f(n) = 3n + 4$, $g(n) = 5n + 1$. Ekkor minden n-re $f(n) = 3n + 4 \leq 20n + 4 = 5g(n)$ és $g(n) = 5n + 1 \leq 6n + 8 = 2f(n)$. Tehát pédául $N = 0$, $c_1 = 1/2$ és $c_2 = 5$ jó választás.

2. $f = O(g)$: $\exists c_1 > 0, N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N_1 :\ f(n) \leq c_1 g(n)$

   $g = O(h)$: $\exists c_2 > 0, N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N_2 :\ g(n) \leq c_2 h(n)$

   Így $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} :\ f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1 c_2 h(n)$. Mivel $c_1, c_2 > 0$, ezért $c_1 c_2 > 0$. Tehát $f = O(h)$.

3. $f = \Theta(g)$: $\exists c_1, c_2 > 0, N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N :\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$.

   Ekkor
   $$\forall n \geq N : \frac{1}{c_2} \cdot f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} \cdot f(n).$$

4. Mivel $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ezért

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{f}{g} = \begin{cases} 0 & \text{1. eset} \\ c(> 0) & \text{2. eset} \\ +\infty & \text{3. eset} \end{cases}$$

   1. eset: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : f(n)/g(n) \leq \varepsilon$, tehát pl. $\varepsilon = 5$-tel: $\forall n \geq N : f(n) \leq 5 \cdot g(n)$.

   2. eset: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c - \varepsilon \leq f(n)/g(n) \leq c + \varepsilon$. Pl. $\varepsilon = c/2$-vel:

   $(c/2)g(n) \leq f(n) \leq (3c/2)g(n)$

   3. eset: $\forall K > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ f(n)/g(n) \geq K$, így pl. $K = 77$ esetén $\forall n \geq N$-re $f(n)/g(n) \geq 77$, azaz $f(n) \geq 77 \cdot g(n)$.

5. (a) ha $a_k > 0$, akkor

$$\frac{p(n)}{n^k} = \frac{a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0}{n^k} = a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_0\frac{1}{n^k} \to a_k > 0$$

Tehát a **C** szerint $p(n) = \Theta(n^k)$.

(b)
- $x > 1$-re $x \leq 2^x$

  Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy $n+1 \leq 2^n$. Létezik $n \in \mathbb{N}:\ n \leq x \leq n+1$. $x \leq n+1 \leq 2^n \leq 2^x$.
- Ha $c > 1$, akkor $\exists\, n_1, n > n_1$: $c^n \geq 2$.

  $\varepsilon := c-1 > 0$. $c^n = (1+\varepsilon)^n = \binom{n}{0}1^n\varepsilon^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\varepsilon^1 + \ldots = 1 + n\varepsilon + \delta$, ahol $\delta \geq 0$.
- Ha $c > 1$ és $k \in \mathbb{N}$ akkor $n^k = O(c^n)$.

  Legyen n_1 az előző küszöb. $n > n_1 k$ esetén

  $$n^k = n_1^k k^k \left(\frac{n}{n_1 k}\right)^k \leq n_1^k k^k 2^{\frac{n}{n_1 k}\cdot k} \leq n_1^k k^k c^{\frac{n}{n_1}\cdot n_1} = n_1^k k^k c^n.$$
- $p(n) = O(n^k)$, ahol k $p(n)$ foka. $n^k = O(c^n)$, tehát a tranzitivitás miatt $p(n) = O(c^n)$.
- Indirekt, tegyük fel, hogy létezik $d_1 > 0$ és $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N_1$-re $c^n \leq d_1 p(n)$. Legyen c_1 olyan, hogy $1 < c_1 < c$. Ekkor létezik $d_2 > 0$ és $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N_2$-re $p(n) \leq d_2 c_1^n$. Tehát $n \geq \max N_1, N_2$-re $c^n \leq d_1 p(n) \leq d_1 d_2 c_1^n$. Azaz $(\frac{c}{c_1})^n \leq d_1 d_2$, ami ellentmondás.

(c) ha $c > d > 1$, akkor $c^n/d^n = (c/d)^n \to +\infty$, így **C** szerint $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$.

(d) $\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$. Itt $\log_a b$ konstans, így $\log_a n = \Theta(\log_b n)$.

(e) ha $m = \log_2 n$, akkor $\log_2 n = m^1$ (m polinomja) és $n^c = (2^c)^m$ (m exponenciális függvénye), alkalmazzuk a (b) pontot.

6. (3) a helyes, nem mondhatunk semmit egy függvény viselkedéséről nagy n-ekre a kezdőértékek alapján.

7. $f(n) = 5 \cdot 2^n + n^3$, $g(n) = 3^n + 2 \cdot n$.

   $f(n) = 5;\ 11;\ 28;\ 67 \ldots \quad g(n) = 1;\ 5;\ 13;\ 33; \ldots$

   1. megoldás

   - $5 \cdot 2^n + n^3 = \Theta(2^n)$, valóban: $\frac{5 \cdot 2^n + n^3}{2^n} = 5 + \frac{n^3}{2^n} \to 5$, ebből **C** miatt következik
   - $3^n + 2 \cdot n = \Theta(3^n)$, valóban: $\frac{3^n + 2 \cdot n}{3^n} = 1 + \frac{2n}{3^n} \to 1$, ebből **C** miatt következik
   - Θ tranzitivitása miatt elég a 2^n és 3^n függvényeket aszimptotikusan összehasonlítani. Ezekről viszont tudjuk, hogy a 2.-nak nagyobb az aszimptotikus nagyságrendje.

   2. megoldás

   Közvetlenül is kiszámíthatjuk a határértéket:

   $$\frac{5 \cdot 2^n + n^3}{3^n + 2 \cdot n} = \frac{5 \cdot (2/3)^n + n^3/3^n}{1 + 2 \cdot n/3^n} \to \frac{0}{1} = 0$$

   A számláló 0-hoz tart, mivel két 0-hoz tartó tag összege. A nevező 1-hez tart, mivel a 2. tag 0-hoz tart. Tehát a határérték 0/1=0. Ebből **C** miatt következik, hogy a 2. függvénynek nagyobb az aszimptotikus nagyságrendje.

8. $n \geq 6$-ra teljes indukcióval belátható. Felhasználva, hogy $(1 + 1/n)^n \to e$ alulról és $(1 - 1/n)^n \to 1/e$ felülről.

9. $n \geq 6$-ra $(n/3)^n < n! < (n/2)^n$. Tehát $n(\log_2 n - \log_2 3) < \log_2(n!) < n(\log_2 n - \log_2 2)$. Így

   $$1 - \frac{\log_2 3}{\log_2 n} < \frac{\log_2(n!)}{n \log_2 n} < 1 - \frac{\log_2 2}{\log_2 n},$$

   amiből $\log_2(n!)/(n \log_2 n) \to 1$, **C** miatt következik az állítás.

10. legkisebb az (1):

(4) $\log_3(n!)$,	**(1)** $(2/3)^n$,	**(2)** $4 \log_{17}(n+5)$,
(5) $n^{1{,}01} + 3\sqrt{n}$,	**(7-8)** $100n^{100} + 3^n$,	**(9)** $n!$,
(3) $n^{0{,}03} + 2 \ln n$,	**(7-8)** $3^n + 2^n$,	**(6)** $n^{3/2}$.