5. gyakorlat

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-típusú függvények folytonossága és határértéke

1. feladat. *Határozza meg és szemléltesse az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit és szintvonalait. Milyen felülettel szemléltethető a függvény a térbeli koordináta-rendszerben?*

(a) $f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2 \le 1\big)$,

(b) $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$.

Megoldás. **(a)** A függvény értelmezési tartománya az x-y síkon az origó középpontú 1 sugarú zárt körlap. Mivel $f(x,y) \ge 0$ minden $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ pontban, ezért a függvény grafikonja a felső félsíkban van. Tekintsük az x-y síkkal párhuzamos síkmetszeteket: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = c$, azaz $x^2+y^2 = 1-c$. Világos, hogy $0 \le c \le 1$ és f a c értéket az x-y síkon az $x^2+y^2 = 1-c$ egyenletű kör pontjaiban veszi fel. Ez azt jelenti, hogy a függvény grafikonja egy forgásfelület. Ennek az x-z síkkal vett síkmetszete ($y=0$ miatt) a $z = \sqrt{1-x^2}$ egyenletű görbe, azaz az x-z sík origó középpontú 1 sugarú körívének a felső félsíkba eső része. A szóban forgó felület tehát ennek a görbének a z tengely körüli forgatásával kapott $\mathbb{R}^3$-bel halmaz, azaz az origó középpontú 1 sugarú gömbfelület felső féltérbe eső része.

(b) Az előző gondolatmenetet követve azt kapjuk, hogy a függvény garfikonja az x-z síkbeli $z = e^{-x^2}$ egyenletű (Gauss-)görbéjének a z tengely körüli megforgatásával adódó forgásfelület. ■

2. feladat. *A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az*

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos az $a := (0,0)$ pontban.

Megoldás. A pontbeli folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(*) \qquad \begin{gathered} \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \text{ esetén} \\ |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon, \end{gathered}$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren, azaz

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |\sqrt{|xy|} - 0| = \sqrt{|xy|} \le$$

$$\text{(most alkalmazzuk az } \ |xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \ \text{ egyenlőtlenséget)}$$

$$\le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy (*) rögzített $\varepsilon > 0$ valós szám esetén tetszőleges $\delta \in (0, \sqrt{2}\varepsilon)$ számmal teljesül, ezért $f \in C\{(0,0)\}$. ■

3. feladat. *Mutassa meg, hogy az*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & ha\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos az $a := (0,0)$ pontban.

Megoldás. A bizonyításához alkalmazzuk a folytonosságra vonatkozó átviteli elv 2. állítását. Az alapján elég *egy* olyan origóhoz tartó pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke a $(0,0)$ pontban felvett függvényértéktől, azaz 0-tól különböző.

Vegyük észre, hogy az $y = x$ pontjaiban a függvény étéke 1, mert

$$f(x,y) = f(x,x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tekintsük például az

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Világos, hogy ez a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$$

és $f(x_n, y_n) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \to 1$, ha $n \to +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0,0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban. ■

4. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & ha\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy az f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0,0)\}$.

Megoldás. Legyen $m \in \mathbb{R}$ egy rögzített paraméter, és tekintsük a függvényértékeket az $y = mx$ egyenletű egyenes pontjaiban:

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x^2 \cdot (mx)}{x^4 + (mx)^2} = m \cdot \frac{x}{x^2 + m^2}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ és } f(0,0) = 0.$$

Ezek a valós-valós függvények tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ paraméter esetén folytonosak, ami azt is jelenti, hogy mindegyik egyenes origóhoz közeli pontjaiban a függvényértékek közel vannak a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0) = 0$ függvényértékhez.

A feladat második állítása azonban azt jelenti, nem igaz az, hogy az origóhoz közeli *tetszőleges* pontban felvett függvényértékek is közel vannak a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0)=0$ függvényértékhez. Ezt az állítást a folytonosságra vonatkozó átviteli elv 2. részének a felhasználásával igazolhatjuk. Olyan origóhoz tartó pontsorozatot kell tehát keresnünk, amelyhez tartozó függvényértékek sorozata nem tart az $f(0,0)=0$ számhoz.

Vegyük észre, hogy most az $y = mx^2$ parabolák mentén kaphatunk ilyen sorozatokat, mivel

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x^2 \cdot (mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Legyen például $m = 1$, és vegyük például az

$$\big(x_n, y_n\big) = \big(x_n, x_n^2\big) := \left(\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Világos, hogy ez a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to (0,0), \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$$

és $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \to \frac{1}{2}$, ha $n \to +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0,0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban. ■

5. feladat. *Mutassa meg, hogy*

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$

(b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$

Megoldás. **(a)** A pontbeli határérték definíció alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(*) \qquad \begin{gathered} \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \text{ esetén } \quad \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon, \end{gathered}$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren, azaz

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pontban

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le$$

$$\left(\text{most alkalmazzuk az } \ |xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \ \text{ egyenlőtlenséget}\right)$$

$$\le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a (*) egyenlőtlenség rögzített $\varepsilon > 0$ esetén tetszőleges $\delta \in (0, 2\varepsilon)$ számmal teljesül, és ez az állítás bizonyítását jelenti.

(b) Mivel $\lim\limits_a f = A \iff \lim\limits_a (f - A) = 0 \iff \lim\limits_a |f - A| = 0$, ezért azt kell bebizonyítani, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2 \right| = 0,$$

azaz

$$(**) \qquad \begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ &\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \ \text{ esetén } \ \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2 \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren, azaz

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pontban

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2 \right| &= \frac{\left|(x^2+y^2+1) - 2\sqrt{x^2+y^2+1} + 1\right|}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \sqrt{x^2+y^2+1} - 1 = \\ &= \left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \\ &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a (**) egyenlőtlenség rögzített $\varepsilon > 0$ esetén tetszőleges $\delta \in (0, \varepsilon)$ számmal teljesül, és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

6. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az*

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvénynek az $a := (0,0)$ pontban nincs határértéke.

Megoldás. A bizonyításhoz a határértékre vonatkozó átviteli elv 2. állítását használjuk fel. Az alapján elég *két* olyan origóhoz tartó pontsorozatot találni, amelyekre a függvényértékek sorozatának a határértéke különböző.

Rögzített $m \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük az $y = mx$ egyenletű egyenes pontjaiban a függvényértékeket:

$$f(x,y) = f(x, mx) = \frac{x^2(mx)^2}{x^2(mx)^2 - (x-mx)^2} = \frac{m^2x^2}{m^2x^2 + (1-m)^2}.$$

Ebből már látható, hogy $m=0$ és $m=1$ esetben kaphatunk alkalmas pontsorozatokat.

Legyen $m=0$, azaz tekintsük az x-tengely pontjait. Ha például $(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{és} \quad f(x_n, y_n) = f\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 0 + \left(\frac{1}{n} - 0\right)^2} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ha viszont az $y=x$ egyenletű egyenesen tekintjük az $(u_n, v_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ pontsorozatot, akkor

$$(u_n, v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{és} \quad f(u_n, v_n) = f\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Mivel két különböző origóhoz tartó pontsorozat esetén a függvényértékek sorozatának a határértéke különböző, ezért a függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban. $\blacksquare$