9. gyakorlat

Iterációs módszerek: egyszerű iteráció és a Jacobi-iteráció

1. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k+1})} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall\ \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

2. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall\ \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! $\boldsymbol{x}^{(0)} = 0$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

3. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-t. A megoldáshoz a $J(1)$ Jacobi-iterációt szeretnénk alkalmazni.

(a) Konvergens-e tetszőleges $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ esetén?

(b) Írjuk fel a hibabecslést!

(c) $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki a $\boldsymbol{x}^{(1)}$-et és $\boldsymbol{x}^{(2)}$-t a a mátrixos és a koordinátás felírás segítségével!

(d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

4. Konvergál-e az A mátrixra felírt $J(1)$ iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Írjuk fel az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt!

(a) Milyen ω-ra lesz konvergens az eljárás?

(b) Melyik ω-ra a leggyorsabb a konvergencia?

6. Konvergál-e az A mátrixra felírt S(1) iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS

Emlékeztető:

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **kontrakció**, ha

$$\exists\ 0 < q < 1 : \quad \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \le q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n).$$

Ha $\|B\| < 1$, akkor $\varphi(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ kontrakció az $\mathbb{R}^n$-en alkalmazott vektornormához illeszkedő mátrixnormát tekintve. Ekkor $q := \|B\|$.

Banach-féle fixponttétel

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kontrakció a $0 < q < 1$ együtthatóval, akkor

1. φ-nek egyértelműen létezik $\mathbf{x}^*$ fixpontja;
2. az $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ sorozat konv. $\forall \mathbf{x}^{(0)}$ esetén:
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$$
3. hibabecslés
$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$\|B\| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \quad \text{konvergál } \forall\ \mathbf{x}^{(0)}.$$

$$\varrho(B) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \quad \text{konvergál } \forall\ \mathbf{x}^{(0)}.$$

1. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall\, \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

Megoldás:

(a) B szimmetrikus márix, ezért $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = \max\{0.5, 0.4, 0.5\} = \frac{1}{2} := q < 1$, azaz a módszer bármely $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ esetén konvergens.

(b) A fixpont-tétel alapján az alábbi hibabecslést írhatjuk fel ∞ normában:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty$$

Ha $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, akkor

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = B \cdot \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c} = \boldsymbol{c}$$

amelyből

$$\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \|\boldsymbol{c}\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Ekkor a hibabecslés:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

Így ahhoz, hogy elérjük a 10^{-3} pontosságot, legalább 10 iterációs lépésre lesz szükségünk, ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} &\leq 10^{-3} \\ 10^3 &\leq 2^k \\ 10 &\leq k. \end{aligned}$$

(c)

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longrightarrow \quad (I - B)\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

innen a LER

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

2. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! $\boldsymbol{x}^{(0)} = 0$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

Megoldás:

(a) $\|B\|_1 = 1$, az oszlopnorma nem mond semmit a konvergenciáról. $\|B\|_\infty = 0.9 < 1$, ezért ebben a normában konvergens a sorozat minden kezdővektor esetén. ($q = 0.9$)

(b) Hibabecslés:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \frac{0.9^k}{0.1} \cdot 0.3 < 10^{-3} \quad \Longrightarrow \quad k \geq 76.$$

(c)

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longrightarrow \quad (I - B)\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

innen a LER

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.1 \\ -0.5 & 0.7 & -0.1 \\ 0 & -0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

3. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-t. A megoldáshoz a $J(1)$ Jacobi-iterációt szeretnénk alkalmazni.

(a) Konvergens-e tetszőleges $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ esetén?

(b) Írjuk fel a hibabecslést!

(c) $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki $\boldsymbol{x}^{(1)}$-et és $\boldsymbol{x}^{(2)}$-t a mátrixos és a koordinátás felírás segítségével!

(d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

Megoldás:

Legyen $A = L + D + U$, ekkor

$$(L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad D\mathbf{x} = -(L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

innen

$$\mathbf{x} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b},$$

és a

Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := B_J\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_J,$$

ahol

$$B_J = -D^{-1}(L + U) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{c}_J = D^{-1}\boldsymbol{b}.$$

A Jacobi-iteráció koordinátás alakja:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Ha A szigorúan diagonálisan domináns a mátrix soraira, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-re felírt Jacobi-iteráció konvergens tetszőleges kezdővektor esetén.

(a) A feladatunk (Jacobi-iterációs) átmeneti mátrixa

$$B_J = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix},$$

amelyből $\|B_J\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$, azaz az iteráció bármely $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ esetén konvergens. Figyelembe véve, hogy B_J szimmetrikus, megjegyezzük, hogy

$$\varrho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{8}} = \|B_J\|_2.$$

Második megoldás: Az A mátrix szig.diag.dom. a soraira nézve, a tételünk biztosítja az iteráció konvergenciáját tetszőleges kezdővektor esetén.

(b) A hibabecslést az alábbi módon kapjuk:

$$\|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}\|_\infty = \frac{1}{2^{k-1}}\|\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}\|_\infty$$

(c) Ha $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{0}$, akkor

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = B_J \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{c}_J = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 2/4 \\ 3/4 \end{bmatrix},$$

és

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = B_J \cdot \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{c}_J = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/8 \\ 4/8 \\ 6/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ 7/8 \end{bmatrix}$$

Koordinátás alakban is felírhatjuk vektorok elemeit az alábbi formula segítségével.

A Jacobi-iteráció koordinátás alakja:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Alkalmazzuk a formulát a feladatra. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{4}(-1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 3) = -\frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{3}{4} \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{4}(-1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2) = -\frac{1}{4} \cdot (-2) = \frac{2}{4} \\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{4}(0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3) = -\frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

és

$$x_1^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(-1\cdot\frac{2}{4}-3\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{8}$$
$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(-1\cdot\frac{3}{4}-1\cdot\frac{3}{4}-2\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{14}{4}\right) = \frac{7}{8}$$
$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(-1\cdot\frac{2}{4}-3\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{8}.$$

(d) Mivel $\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{c}_J$, ezért $\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \|\boldsymbol{c}_J\|_\infty = \frac{3}{4}$. Innen a hibabecslés

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ahhoz, hogy 10^{-3}-nál kisebb hibát kapjunk, k-t úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k < 10^{-3}$$

teljesüljön. Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $1500 < 2^k$, melyből $k \ge 11$.

4. Konvergál-e az A mátrixra felírt $J(1)$ iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Írjuk fel az átmeneti mátrixot, a $B_J = -D^{-1}(L+U)$ összefüggés alapján:

$$B_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy jelen esetben nem tudjuk alkalmazni egyik elégséges feltételt sem: a sor-, az oszlop- és a Frobenius norma mindegyike nagyobb 1-nél. Továbbá, az A mátrix **nem** szig. diag. dom. a soraira nézve. Ahhoz, hogy a konvergenciát igazoljuk, ellenőriznünk kell a szükséges és elégséges feltételt, azaz meg kell mutatnunk, hogy $\varrho(B_J) < 1$.

A sajátértékek meghatározásához, először írjuk fel B_J karakterisztikus polinomját:

$$P(\lambda) = \det(B_J - \lambda\cdot I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda\cdot(\lambda^2-2) - 1\cdot(-2\lambda+4) + 2\cdot(2-2\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda + 2\lambda - 4 + 4 - 4\lambda = -\lambda^3.$$

A sajátértékeket ebből könnyen meghatározhatjuk:

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0,$$

azaz a $\lambda = 0$ háromszoros sajátérték. Ez viszont azt jelenti, hogy $\varrho(B_J) = 0 < 1$, azaz teljesül a konvergencia szükséges és elégséges feltétele.

5. Írjuk fel az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt!

(a) Milyen ω-ra lesz konvergens az eljárás?

(b) Melyik ω-ra a leggyorsabb a konvergencia?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -D^{-1}(L+U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

Az első egyenletet szorozzuk meg ω-val, a másodikat $(1-\omega)$-val, és adjuk össze őket:

$$\mathbf{x} = \Big[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\Big]\,\mathbf{x} + \omega D^{-1}\mathbf{b}$$

Innen a **csillapított Jacobi-iteráció**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Big[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\Big]\,\mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1}\mathbf{b},$$

melynek mátrixa

$$B_{J(\omega)} = (1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U) = (1-\omega)\cdot I + \omega B_J.$$

Láthatjuk, hogy az $\omega = 1$ esetben a Jacobi-iterációt kapjuk, ezért gyakran használjuk a $B_{J(1)}$ jelölést a mátrixára. Továbbá, átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)} + \omega\,\mathbf{x}_J^{(k+1)}.$$

(a) Milyen ω-ra lesz konvergens az eljárás?

> Ha az Ax = b LER-re a Jacobi-iteráció konvergens minden kezdőértékre, akkor $0 < \omega < 1$-re a csillapított Jacobi-iteráció is az.

Az A mátrix szigorúan diagonálisan domináns a soraira nézve, ezért a Jacobi-iteráció konvergens minden $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén. A fenti tétel alapján a csillapított Jacobi-módszer $0 < \omega < 1$ esetén konvergens tetsz. kezdőértékkel. Milyen más ω értékekre konvergens?

Vizsgáljuk meg a csillapított iteráció $B_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeit!

$$B_{J(\omega)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{\omega}{4} & 0 \\ \frac{\omega}{4} & 1-\omega & \frac{\omega}{4} \\ 0 & \frac{\omega}{4} & 1-\omega \end{bmatrix},$$

a karakterisztikus polinomjának

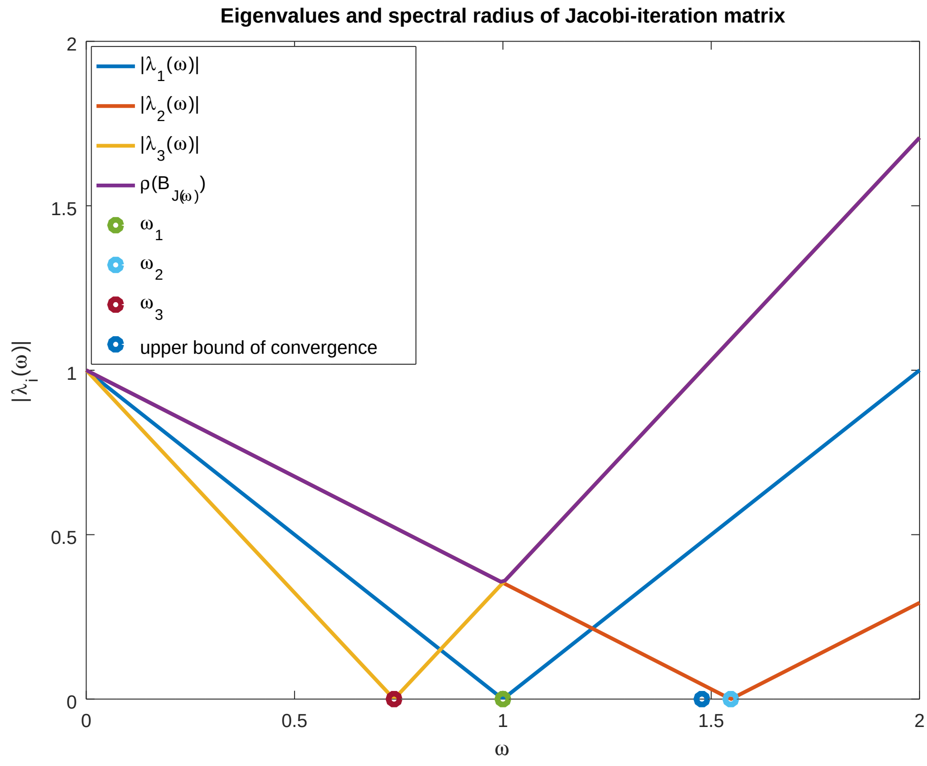
$$\begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & \frac{\omega}{4} & 0 \\ \frac{\omega}{4} & 1-\omega-\lambda & \frac{\omega}{4} \\ 0 & \frac{\omega}{4} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = (1-\omega-\lambda)\left(1-\omega-\lambda+\frac{\omega}{\sqrt{8}}\right)\left(1-\omega-\lambda-\frac{\omega}{\sqrt{8}}\right)$$

gyökei

$$\lambda_1 = 1-\omega$$
$$\lambda_2 = 1-\omega+\frac{\omega}{\sqrt{8}} = 1-\omega\cdot\frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{8}}$$
$$\lambda_3 = 1-\omega-\frac{\omega}{\sqrt{8}} = 1-\omega\cdot\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{8}}$$

Látható, hogy mindhárom sajátérték lineárisan függ ω-tól. A $J(\omega)$ iteráció konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele, hogy $|\lambda_i(\omega)| < 1$. Mivel a $|\lambda_i(\omega)|$ függvények grafikonja V alakú, ábrázolásukhoz jelöljük az x-tengellyel való metszéspontjukat rendre ω_i-vel:

$$\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1}, \qquad \omega_3 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1}$$



. A fentiek értelmében a konvergencia pontosan akkor teljesül, ha

$$\omega \in (0; 2\omega_3) = \left(0; \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1}\right) = (0; 1.4776).$$

(b) A konvergencia sebessége $B_{J(\omega)}$ spektrálsugarától függ. Esetünkben a spektrálsugár akkor minimális (és így akkor a leggyorsabb a konvergencia), ha

$$|\lambda_3(\omega_{opt})| = |\lambda_2(\omega_{opt})|$$

teljesül. Innen azonban

$$-\left(1 - \omega_{opt} - \omega_{opt} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}}\right) = 1 - \omega_{opt} + \omega_{opt} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}},$$

melyből

$$2 = 2 \cdot \omega_{opt} \to \omega_{opt} = 1,$$

ami azt jelenti, hogy a feladatunkra az eredeti Jacobi-módszer gyorsabb bármelyik paraméteres változatánál.