Logika mintazh 2019/2020 2. félév

1 Ítéletlogika

Adott a következő eldöntésprobléma: $\{\neg(X \wedge \neg Y), Y \supset Z\} \models_0 \neg X \vee Z$

1. (10 pont)
   (a) Készítsen a fenti eldöntésproblémához a teljesen kitöltött közös igazságtáblát!

X	Y	Z	$\neg(X \wedge \neg Y)$	$Y \supset Z$	$\neg X \vee Z$
i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
h	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	h	i	h	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

   (b) Látható, hogy minden interpretációban, amikor a formulahalmaz minden eleme igaz, akkor a következmény formula helyettesítési értéke is igaz, vagyis a szemantikus következmény teljesül!

2. (10 pont) Fejezze be a következő ítéletkalkulusbeli levezetést!
   - Kiindulásként átalakítottuk úgy a formulákat, hogy csak $\supset$ és $\neg$ műveleteket tartalmazzanak. Így a következő levezetést kell ellenőrizni: $X \supset Y, Y \supset Z \vdash_0 X \supset Z$
   - A levezetés első lépése:

1.	$(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$	$[C2, A \parallel X, B \parallel Y, C \parallel Z]$
2.	$(Y \supset Z) \supset (X \supset (Y \supset Z))$	$[C1, A \parallel Y \supset Z, B \parallel X]$
3.	$Y \supset Z$	$[hip]$
4.	$X \supset (Y \supset Z)$	$[mp(2,3]$
5.	$(X \supset Y) \supset (X \supset Z)$	$[mp(1,4)]$
6.	$X \supset Y$	$[hip]$
7.	$X \supset Z$	$[mp(5,6)]$

   Sikerült egy levezetést készíteni, így a szemantikus következmény teljesül.

3. (10 pont) Igazolja természetes levezetéssel, hogy a fenti eldöntésproblémát kifejező levezetés megkonstruálható!
   - A megoldás kiindulásához használja a következőt: $\neg X \vee Y, Y \supset Z \vdash_0 \neg X \vee Z$

$$
(\vee a)\,\dfrac{(\vee b)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{\neg X, Y \supset Z \vdash_0 \neg X}}{\neg X, Y \supset Z \vdash_0 \neg X \vee Z} \qquad (\vee b)\,\dfrac{(\supset a)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{Y, Y \supset Z \vdash_0 Y} \quad \dfrac{\checkmark}{Y, Y \supset Z \vdash_0 Y \supset Z}}{Y, Y \supset Z \vdash_0 Z}}{Y, Y \supset Z \vdash_0 \neg X \vee Z}}{\neg X \vee Y, Y \supset Z \vdash_0 \neg X \vee Z}
$$

   Sikerült minden ágon eljutni az azonosság törvényéig, így a levezetés helyes, vagyis a szemantikus következmény is helyes.

4. (10 pont) Igazolja Gentzen szekvent módszerrel, hogy a fenti eldöntésproblémát kifejező szekvent megalapozható! Megjegyzés:
   - A megoldás kiindulásához használandó szekvent: $\neg(X \wedge \neg Y), Y \supset Z \longrightarrow \neg X \vee Z$
   - Választhat a G és C kalkulusok közül. A választást mindenképp jelezze a megoldás mellett!
     C-kalkulussal:

$$
(\to \vee)\,\dfrac{(\neg \to)\,\dfrac{(\to \wedge)\,\dfrac{(\to \neg)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{X, Y \supset Z \longrightarrow Z, X}}{Y \supset Z \longrightarrow \neg X, Z, X} \qquad (\to \neg)\,\dfrac{(\supset \to)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{Y \longrightarrow \neg X, Z, Y} \quad \dfrac{\checkmark}{Z, Y \longrightarrow \neg X, Z}}{Y, Y \supset Z \longrightarrow \neg X, Z}}{Y \supset Z \longrightarrow \neg X, Z, \neg Y}}{Y \supset Z \longrightarrow \neg X, Z, X \wedge \neg Y}}{\neg(X \wedge \neg Y), Y \supset Z \longrightarrow \neg X, Z}}{\neg(X \wedge \neg Y), Y \supset Z \longrightarrow \neg X \vee Z}
$$

   Sikerült minden ágon eljutni az axiómasémáig, így a szekvent helyes, vagyis a szemantikus következmény is helyes.

5. (10 pont) Igazolja tabló módszerrel a következtetés helyességét!
(1. típusú megoldás:)

Dedukciós tétel kétszeres használata után: $\models \neg(X \wedge \neg Y) \supset (Y \supset Z) \supset (\neg X \vee Z)$

$$
\begin{array}{c}
\text{F } \neg(X \wedge \neg Y) \supset (Y \supset Z) \supset (\neg X \vee Z) \text{ (1)} \\
| \\
\text{T } \neg(X \wedge \neg Y) \text{ (2)} \\
| \\
\text{F } (Y \supset Z) \supset (\neg X \vee Z) \text{ (3)} \\
| \\
\text{F } X \wedge \neg Y \text{ (6)} \\
| \\
\text{T } Y \supset Z \text{ (8)} \\
| \\
\text{F } \neg X \vee Z \text{ (4)} \\
| \\
\text{F } \neg X \text{ (5)} \\
| \\
\underline{\text{F } Z} \\
| \\
\underline{\text{T } X} \\
\begin{array}{cc}
\underline{\text{F } X} & \text{F } \neg Y \text{ (7)} \\
| & | \\
\lightning & \underline{\text{T } Y} \\
 & \begin{array}{cc}
\underline{\text{F } Y} & \underline{\text{T } Z} \\
| & | \\
\lightning & \lightning
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Minden ágon zárt a tabló, így a $\neg(\neg(X \wedge \neg Y) \supset (Y \supset Z) \supset (\neg X \vee Z))$ formula kielégíthetetlen, vagyis a szemantikus következmény teljesül!

(2. típusú megoldás:)
Visszakövetkeztetéssel: $\{\neg(X \wedge \neg Y), Y \supset Z, \neg(\neg X \vee Z)\}$

$$
\begin{array}{c}
\text{T } \neg(X \wedge \neg Y) \wedge (Y \supset Z) \wedge \neg(\neg X \vee Z) \text{ (1)} \\
| \\
\text{T } \neg(X \wedge \neg Y) \text{ (2)} \\
| \\
\text{T } Y \supset Z \text{ (7)} \\
| \\
\text{T } \neg(\neg X \vee Z) \text{ (3)} \\
| \\
\text{F } X \wedge \neg Y \text{ (6)} \\
| \\
\text{F } \neg X \vee Z \text{ (4)} \\
| \\
\text{F } \neg X \text{ (5)} \\
| \\
\underline{\text{F } Z} \\
| \\
\underline{\text{T } X} \\
\begin{array}{cc}
\underline{\text{F } X} & \text{F } \neg Y \text{ (7)} \\
| & | \\
\lightning & \underline{\text{T } Y} \\
 & \begin{array}{cc}
\underline{\text{F } Y} & \underline{\text{T } Z} \\
| & | \\
\lightning & \lightning
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Minden ágon zárt a tabló, így a $\neg(X \wedge \neg Y) \wedge (Y \supset Z) \wedge \neg(\neg X \vee Z)$ formula kielégíthetetlen, vagyis a $\{\neg(X \wedge \neg Y), Y \supset Z, \neg(\neg X \vee Z)\}$ formulahalmaz is kielégíthetetlen így a szemantikus következmény teljesül.

2 Elsőrendű logika

1. (15 pont) Adott a következő elsőrendű formula: $\exists x \forall y Q(x,y) \wedge \neg P(z) \supset \neg \forall x(Q(x,k(x)) \vee P(x))$.

   (a) Adja meg a formula prímkomponenseit!

   (b) Írja fel az értéktábla fejlécét!

   (c) Töltse ki az értéktáblát azon interpretáció esetén, ahol $U = \{1,2,3\}$,
   k^I : rákövetkező univerzumon belül (3 rákövetkezője 1),
   P^I : szám páros, Q^I: első szám osztója a másodiknak.

z	$\exists x \forall y Q(x,y)$	$P(z)$	$\forall v(Q(v,k(v)) \vee P(v))$	$((1 \wedge \neg 2) \supset \neg 3)$
1	i	h	h	i
2	i	i	h	i
3	i	h	h	i

   (d) Mit tudunk leolvasni a 3 alap szemantikus tulajdonságról az értéktábla alapján? A formula kielégíthető. Nem kielégíthetetlen. Nem tudjuk, hogy logikai törvény-e.

2. (25 pont) Adott a következő szemantikus következmény:

$$\{\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(g(x))\} \models \forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(g(y)))$$

   Mutassuk meg rezolúcióval, hogy a szemantikus következmény teljesül!

   (a) Adja meg ehhez a változóidegen elsőrendű klózhalmazt!

   $\{\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(g(x))\} \models \forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(g(y))) \longrightarrow$ (visszakövetkeztetés)
   $\{\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(g(x)), \neg \forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(g(y)))\}$ kielégíthetetlen?
   $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(g(x)) \Rightarrow$
   $\forall x P(x,f(x)) \wedge \forall x Q(g(x)) \Rightarrow \{P(x,f(x)), Q(g(y))\}$
   $\neg \forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(g(y))) =$
   $\exists x \neg \exists y (P(x,y) \wedge Q(g(y))) =$
   $\exists x \forall y \neg (P(x,y) \wedge Q(g(y))) =$
   $\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(g(y))) \Rightarrow$
   $\forall y (\neg P(\bar{a},y) \vee \neg Q(g(y))) \Rightarrow \{\neg P(\bar{a},y) \vee \neg Q(g(y))\}$

   Változóiban tiszta klózhalmaz: $K := \{P(x,f(x)), Q(g(y)), \neg P(\bar{a},z) \vee \neg Q(g(z))\}$

   (b) Adja meg a Herbrand-univerzum H_0, H_1, H_2 halmazát, majd a klózok alappéldányának legalább 5 elemét!
   konstansok: $\bar{a}$, függvények: $f-1, g-1$

   $H_0 = \{\bar{a}\}$, $H_1 = \{\bar{a}, f(\bar{a}), g(\bar{a})\}$, $H_2 = \{\bar{a}, f(\bar{a}), g(\bar{a}), f(f(\bar{a})), f(g(\bar{a})), g(f(\bar{a})), g(g(\bar{a}))\}$

   Alappéldányok: $\{P(\bar{a}, f(\bar{a})), P(f(\bar{a}), f(f(\bar{a}))), \ldots, Q(g(\bar{a})), Q(g(f(\bar{a}))), \ldots, \neg P(\bar{a},\bar{a}) \vee \neg Q(g(\bar{a})), \ldots\}$

   (c) A Herbrand-univerzum alapján készítsen alaprezolúciós levezetést a szemantikus következmény bizonyítására!

1.	$P(\bar{a}, f(\bar{a}))$	$[\in K]$	$P(x,f(x))\ [x \parallel \bar{a}]$
2.	$\neg P(\bar{a}, f(\bar{a})) \vee \neg Q(g(f(\bar{a})))$	$[\in K]$	$\neg P(\bar{a},z) \vee \neg Q(g(z)\ [z \parallel f(\bar{a})]$
3.	$\neg Q(g(f(\bar{a})))$	$[res(1,2)]$	
4.	$Q(g(f(\bar{a})))$	$[\in K]$	$Q(g(y))[y \parallel f(\bar{a})]$
5.	$\square$	$[res(3,4)]$	

   Sikerült levezetni az üres klózt, így a klózhalmaz kielégíthetetlen, az formulahalmaz kielégíthetetlen és a szemantikus következmény helyes.

   (d) A legáltalánosabb illesztési algoritmus alkalmazásával készítsen elsőrendú rezolúciós levezetést!

1.	$P(x,f(x))$	$[\in K]$	
2.	$\neg P(\bar{a},z) \vee \neg Q(g(z))$	$[\in K]$	
3.	$\neg Q(g(f(\bar{a})))$	$[res(1,2)]$	$(x \parallel \bar{a})(z \parallel f(\bar{a}))$
4.	$Q(g(y))$	$[\in K]$	
5.	$\square$	$[res(3,4)]$	$(y \parallel f(\bar{a}))$

   Sikerült levezetni az üres klózt, így a klózhalmaz kielégíthetetlen, az formulahalmaz kielégíthetetlen és a szemantikus következmény helyes.

Egyéb információk:

- FONTOS: A feladatok még kiegészülnek a megadott ponton belül 1-2 pontos elméletibb, értést tesztelő kérdésekkel. Ezekre látható 1 példa az igazságtáblához és egy az értéktáblához, de a többi feladatnál is lehet. Ezekre a megoldásban nem adunk választ, mert az értést szeretnénk velük vizsgálni.
- Az ítéletlogikai rész 5 feladatából 4 feladat az, ami az alap pontozásba beleszámít. Az, hogy melyik ez a 4, azt a hallgató választhatja meg a dolgozat végén. Ha az 5. feladatra is lesz beadva megoldás, akkor az plusz pontként érvényesül a 3-as jegy elérése után, vagyis ha a hallgató minimum 50 pontot elért *csak a dolgozat alapján.*
- Összesen az összes feladatból 90 pont szerezhető
- A dolgozathoz plusz pont szerezhető még a beadandók minimumja felett megszerzett többletpontokért, ha a hallgató eléri a minimum 35 pontot.
- Ponthatárok: 2-es 40-től, 3-as 50-től, 4-es 60-tól, 5-ös 70-től.