

Numerikus módszerek 1.

12. előadás: A Newton-módszer és társai

Krebsz Anna

ELTE IK

- ① A Newton-módszer és konvergenciatételei
- ② Húrmódszer és szelőmódszer
- ③ Általánosítás többváltozós esetre

Feladat

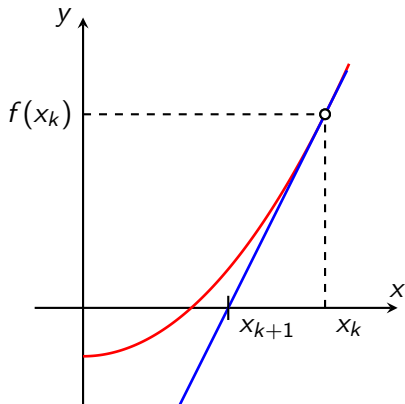
Keressük meg egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists?$, 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \quad x^* = ?$$

- 1 A Newton-módszer és konvergenciatételei
- 2 Húrmódszer és szelőmódszer
- 3 Általánosítás többváltozós esetre

Geometriai megközelítés:

$f, x_k \rightarrow \text{érintő} \rightarrow \text{zérushely } (y=0) \rightarrow x_{k+1}$



Az érintő egyenlete:

$$\begin{aligned}y - f(x_k) &= f'(x_k) \cdot (x - x_k) \\-f(x_k) &= f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \\-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} &= x_{k+1} - x_k \\x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\end{aligned}$$

Analitikus megközelítés:

f gyöke $\approx x_k$ körüli Taylor-polinomának gyöke

$$0 = f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \dots$$

Definíció: Newton-módszer

Adott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőpont esetén a *Newton-módszer* alakja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Példa

Írjuk fel a Newton-módszert a $\sqrt{2}$ értékének közelítésére, és számoljuk ki a közelítő sorozat első néhány elemét valamely kezdőpontból!

Megj.: babiloni módszer (\sqrt{n} számítása).

Általában másodrendben konvergens!

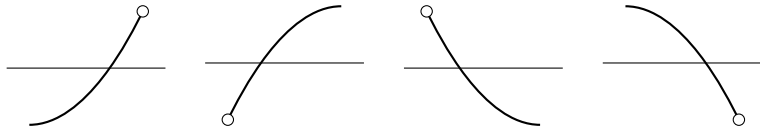
Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

- 1 $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
- 2 f' és f'' állandó előjelű,
- 3 $x_0 \in [a; b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer (által adott (x_k) sorozat) monoton konvergál x^* -hoz.

Megj.: 4 eset van:



Biz.: Csak az $f' > 0$, $f'' > 0$ esetre (a többi hasonló)

$\Rightarrow f(x_0) > 0$.

- ① Taylor-formula másodfokú maradéktaggal, x_k középponttal:
 $\exists \xi_k \in (x, x_k)$ vagy (x_k, x) :

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2.$$

Az x_{k+1} helyen: $\exists \xi_k \in (x_{k+1}, x_k)$ vagy (x_k, x_{k+1})

$$f(x_{k+1}) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)}_{=0 \text{ (def. alapján)}} + \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{(x_{k+1} - x_k)^2}_{>0}.$$

Tehát $f(x_k) > 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$).

Newton-módszer – monoton konvergencia

- ② Az (x_k) sorozat monoton fogyó,

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{>0} < x_k;$$

valamint az (x_k) sorozat alulról korlátos,

$$0 = f(x^*) < f(x_k), \quad f \text{ szig. mon. nő} \implies x^* < x_k$$

így az (x_k) sorozat konvergens, $\hat{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$.

- ③ Kell: $\hat{x} = x^*$. Elég: $f(\hat{x}) = 0$. ($f \in C[a; b]$, f szig. mon.)

$$f(\hat{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(x_{k+1} - x_k)^2}_{\rightarrow 0 \text{ (Cauchy)}} = 0. \quad \square$$

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

- 1 $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
- 2 f' állandó előjelű,
- 3 $m_1 = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)| > 0$,
- 4 $M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)| < +\infty$, innen $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$.
- 5 $x_0 \in [a; b] : |x_0 - x^*| < r := \min \left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer másodrendben konvergál a gyökhöz, és az

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*|^2$$

hibabecslés érvényes.

Röviden: Ha elég közelről indulunk, akkor gyorsan odatalálunk.

Megjegyzés:

- $|x_0 - x^*| < r := \min \left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$, azaz legyünk „elég közel”, de azért mindenesetre legyünk $[a; b]$ -n belül is.
- A monoton konvergencia feltételeinek esetén is másodrendű lesz a konvergencia, hiszen előbb-utóbb „elég közel” kerülünk a gyökhöz.

Biz.:

- ① Alkalmazzuk az f függvényre a Taylor-formulát, x_k középponttal az x^* helyen, másodfokú maradéktaggal.
 $\exists \xi_k \in (x_k, x^*)$ (vagy (x^*, x_k)):

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x^* - x_k)^2.$$

- ② Mindkét oldalt $f'(x_k)$ -val osztva, majd átrendezve és a Newton-módszer képletét felismerve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x^* - x_k + \frac{f''(\xi_k)}{2 \cdot f'(x_k)}(x^* - x_k)^2, \\ \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) - x^* &= x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi_k)}{2 \cdot f'(x_k)}(x^* - x_k)^2, \\ |x_{k+1} - x^*| &\leq \frac{M_2}{2 \cdot m_1} \cdot |x_k - x^*|^2 = M \cdot |x_k - x^*|^2, \end{aligned}$$

ahol M, m_1, M_2 a tételben definiált mennyiségek.

- ③ Bevezetve az $\varepsilon_k := x_k - x^*$ jelölést, így is írhatjuk:

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha (x_k) konvergál és határértéke x^* .

- ④ A Taylor-formából

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|}.$$

Határértéket véve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \neq 0,$$

tehát legalább másodrendben konvergens a sorozat.

Newton-módszer – lokális konvergencia

- 5 Teljes indukcióval belátjuk, hogy a sorozat minden tagja a $K_r(x^*)$ környezetben marad. $|x_0 - x^*| < r$ feltétel volt.

Tegyük fel, hogy $|x_k - x^*| = |\varepsilon_k| < r \leq \frac{1}{M}$, ekkor

$$|\varepsilon_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 = \underbrace{(M|\varepsilon_k|)}_{<1} \cdot |\varepsilon_k| < |\varepsilon_k| < r.$$

- 6 A konvergencia bizonyításához belátjuk, hogy az $|\varepsilon_k|$ hibakorlátok sorozata 0-hoz tart. Bevezetjük a $d_k := M \cdot |\varepsilon_k|$ jelölést.

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 \implies M \cdot |\varepsilon_{k+1}| \leq (M \cdot |\varepsilon_k|)^2 \implies$$

$$d_{k+1} \leq d_k^2 \implies d_k \leq d_{k-1}^2 \leq d_{k-2}^{2 \cdot 2} \leq \dots \leq d_0^{2^k},$$

$$M \cdot |\varepsilon_k| \leq (M \cdot |\varepsilon_0|)^{2^k} \implies |\varepsilon_k| \leq \frac{1}{M} \cdot (M \cdot |\varepsilon_0|)^{2^k}.$$

- 7 Mivel $|\varepsilon_0| = |x_0 - x^*| < \frac{1}{M}$, így $M \cdot |\varepsilon_0| < 1$, ezért $|\varepsilon_k| \rightarrow 0$, ami az (x_k) sorozat konvergenciáját jelenti. □

Megjegyzés:

- Ha $f'(x_k) = 0$, akkor x_{k+1} nincs értelmezve.
- Néha a konvergencia csak elsőrendű (vagy instabillá válik).
Például ha $f'(x^*) = 0$, azaz x^* többszörös gyök.
A Newton-módszerrel x^* közelében $\frac{0}{0}$ alakú osztást végzünk.
- Többszörös gyök esetén például alkalmazzuk a $g(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}$ függvényre a Newton-módszert.
- Másik lehetőség: ha x^* r -szeres gyök, akkor az

$$x_{k+1} := x_k - r \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

módosítást használjuk, amivel másodrendű iterációt kapunk.

- Néha akár harmadrendű is lehet
(v.ö. magasabbrendű konvergencia tétel).

Megjegyzés folyt.:

- Használhattuk volna a magasabbrendű konvergencia tételt is a Newton-módszer lokális konvergencia tételének bizonyítására a $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ megfeleltetéssel, de akkor $f \in C^3[a; b]$ -t kellett volna feltennünk.
- Hívják Newton–Raphson-, ill. Newton–Fourier-módszernek is.
- A módszer nem biztos, hogy konvergál.
- Ciklusba is kerülhet (pontos számolás esetén...).
- A gyökök „vonzásterületein” kívül kaotikus jelenségek. . .

- 1 A Newton-módszer és konvergenciatételei
- 2 Húrmódszer és szelőmódszer
- 3 Általánosítás többváltozós esetre

Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.

Az egyenes meredeksége:

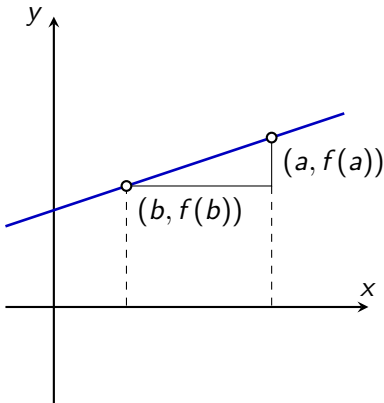
$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

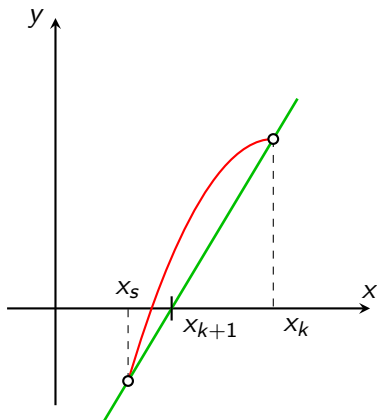
Az egyenes egyenlete:

$$y - f(a) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot (x - a).$$

Ennek zérushelye ($y = 0$):

$$x = a - \frac{f(a) \cdot (a - b)}{f(a) - f(b)}.$$





Definíció: húrmódszer

Az $f \in C[a; b]$ függvény esetén, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor a húrmódszer alakja:

$$x_0 := a, \quad x_1 := b,$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol s a legnagyobb olyan index, amelyre $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$.

Tétel: a húrmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

① $f(a) \cdot f(b) < 0$,

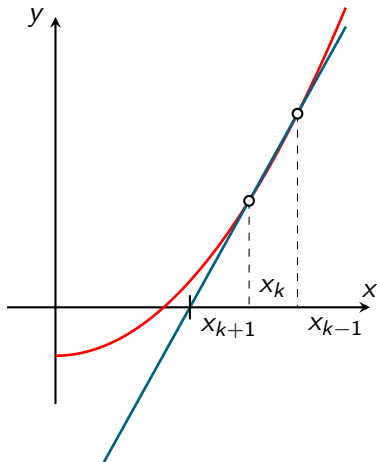
② $M \cdot (b - a) < 1$,

akkor a húrmódszer elsőrendben konvergál az x^* gyökhöz és

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{M} \cdot (M \cdot |x_0 - x^*|)^k$$

teljesül, ahol $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$ ugyanúgy, mint korábban.

Biz.: nélkül.



Definíció: szelőmódszer

Az $f \in C[a; b]$ függvény esetén a *szelőmódszer* alakja:

$$x_0, x_1 \in [a; b],$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Tétel: a szelőmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

- 1 $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
- 2 f' állandó előjelű,
- 3 $x_0, x_1 \in [a; b] :$

$$\left. \begin{array}{l} |x_0 - x^*| \\ |x_1 - x^*| \end{array} \right\} < r := \min \left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\},$$

akkor a szelőmódszer $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ rendben konvergál az x^* gyökhöz. (M a szokásos.)

Biz.: nélkül.

- 1 A Newton-módszer és konvergenciatételei
- 2 Húrmódszer és szelőmódszer
- 3 Általánosítás többváltozós esetre

Feladat

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x) = 0, \quad x = ?, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Legtöbb módszerünk általánosítható többváltozós esetre.

Egyszerű iteráció

$$F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \Phi(x)$$

Banach-féle fixponttétel szerint. . .

Többsváltozós Newton-módszer

Közelítsük F -et az elsőfokú Taylor-polinomjával.

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}),$$
$$F'(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

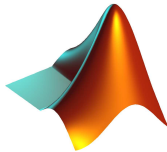
Ezen közelítés zérushelye lesz $x^{(k+1)}$:

- 1 $F'(x^{(k)}) \cdot \underbrace{(x^{(k+1)} - x^{(k)})}_{s^{(k)}} = -F(x^{(k)})$ LER megoldás ($\rightsquigarrow s^{(k)}$),
- 2 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, $s^{(k)}$ a továbblépés iránya.

Definíció: a többváltozós Newton-módszer képlete

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(F'(x^{(k)}) \right)^{-1} \cdot F(x^{(k)})$$

Megj.: A módszer javítható pl. úgy, hogy ne kelljen minden lépésben invertálni és deriváltat számolni \rightsquigarrow Broyden-módszer (lassabb).



- 1 A $\sqrt{2}$ értékének másodrendben konvergens közelítése.
- 2 Példák a Newton-módszer működésére: konvergencia, divergencia, ciklizálás, fraktálszerű jelenségek.

Példa:

Alkalmazzuk a következő kétváltozós függvényre a Newton-módszert!

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

ahol $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $f_2(x) = -x_1^2 - x_2$.

Geometriailag egy fordított parabola és az origó körüli egy sugarú kör metszéspontját keressük.

Megj.:

- Bizonyos pontokban a Newton-módszer nem értelmezett, mert $\det(f'(x^{(k)})) = 0$.

$$\det(F'(x)) = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -2x_1 & -1 \end{vmatrix} = -2x_1 + 4x_1x_2 = 2x_1(2x_2 - 1) = 0$$

$x_1 = 0$ és $x_2 = 0.5$ esetén a módszer nem értelmezett.

- Divergens például $x_0 = [\pm 1 \quad 1]^T$ -ből úgy, hogy az első koordináta sorozat konvergens (de a határérték rossz).