Analízis

Szántó Ádám
Eötvös Loránd Tudományegyetem - Informatikai Kar

Utolsó módosítás: **2012. február 7.**

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

„Ha a matematikustól megkérdezik, hogy mi az ő vizsgálódásának tárgya, sokkal nehezebb helyzetben van, mint bárki más. És még kényesebb helyzetbe kerül, ha több-kevesebb erőfeszítéssel már valamennyire sikerült megmagyaráznia munkájának anyagát. Mert azonnal ott van a második kérdés: mire való erőlködése, mi a célja, mi a haszna. Csak nagyon kevesen értik meg, hogy tevékenysége több egyszerű szellemi tornánál, több mint a sakkozó szórakozása. A többiek előtt hivatkozhatnék a matematikus a fizikusra, a mérnökre, hogy tanúskodjanak munkájának fontossága mellett. De ez a hivatkozás nem őszinte meggyőződéséből fakadna. Mert ritkán ösztönzi őt munkájára a fizikusnak vagy a mérnöknek közvetlen szükséglete. Ő nem várja be a szükséglet parancsát, hanem saját invenciójától kapja utasításait problémáinak megválasztására. És ha a matematikusok nem művelnék tudományukat magáért a tudományért, nem alkották volna meg azt a matematikai apparátust, amely nélkül a szükség idején a fizikus fegyvertelen volna." (H. Poincaré: Science et Méthode.)

A fenti idézet tökéletesen mutatja be mindazt, ami sokak számára érthetetlen a matematika tudományában. Szinte kivétel nélkül mindenkiben felmerül a kérdés, hogy „mire jó mindez?" A matematika az élet számos területén megfordul, különösképpen igaz ez az analízis tudományára, a matematikának ezt az ágát tanítják informatikusok, fizikusok, vegyészek, mérnökök, gazdasági szakemberek számára, kik hol itt hol ott felhasználják azt munkájuk során. Az analízis kiváltképp fontos a matematika tudományok között, jelen jegyzet pedig ezt a tudományágat hivatott bemutatni kellő részletességgel. Mielőtt belevágnánk a részletekbe, tisztáznunk kell a legfontosabb alapfogalmakat, melyekre építve vezetjük be az olvasót az analízis világába.

1.1. Logikai állítások

1.1. Definíció. *Állításnak nevezünk egy olyan kiejelentést, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.*

Bármi, amit a matematikában közölni szeretnénk, állítások formájában fogalmazzuk meg azt. Néhány egyszerű állítás, például: „Az alma piros”; „A tábla zöld”; stb. Állításaink között gyakran valamilyen kapcsolat áll fenn, például vegyünk két állítást: „Az alma piros”, illetve: „Az alma gyümölcs”. Kapcsoljuk össze ezt a két állítást: „Az alma piros és gyümölcs”. Nyilván ez is egy állítás, mely jelen esetben még igaz is. Nézzük meg, milyen kapcsolatokat alakíthatunk ki állításaink között:

1.2. Definíció. *A logikai műveletek állításokból gyártanak új állításokat. Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egy-egy állítás.*

1. *és, jele: $\wedge$*
   Az $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ értéke pontosan akkor igaz, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is igaz.

2. *vagy, jele: $\vee$ (megengedő vagy, ez fontos mert többféle is van)*
   Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ értéke pontosan akkor hamis, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is hamis.

3. *nem, jele: $\neg$*
   $\neg\mathcal{A}$ pontosan akkor igaz, ha $\mathcal{A}$ hamis (és fordítva).

4. *következtetés (implikáció), jele: $\Longrightarrow$*
   $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ pontosan akkor igaz, ha $\neg\mathcal{A}$ vagy $\mathcal{B}$ igaz.

5. *ekvivalencia, jele: $\Longleftrightarrow$*
   $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ pontosan akkor igaz, ha $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ és $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ is igaz.

Ezek azok a logikai műveletek, melyeket az analízisben a legtöbbször alkalmazunk. Vannak olyan állítások, melyek bizonyos változókat tartalmaznak, ezeket *nyitott mondatok*nak nevezzük. Igazságértékük a változó értékétől függ. Ilyen például a következő kifejezés:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Ilyenkor ha pl. $x = 2$, az állítás igaz, de pl. $x = 3$ esetben már hamis. Fontos szerepük van a logikai állításokban az ún. *kvantoroknak*, ezek a $\exists$ (létezik) és $\forall$ (minden) kvantorok. Nézzük ennek ismeretében a következő állítást:

$$(\forall x)\, x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$

Ebben a formában az állítás azt jelenti, hogy minden lehetséges x paraméterre $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Egész számokra az állítás valóban igaz, valósakra viszont már nem, hisz pl. $x = 1,5$ esetén a kifejezés értéke $-0,25$.
A kvantoros kifejezéseket amennyiben nem megtévesztő, a fenti zárójeles forma helyett általában így írjuk:

$$\forall x : x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$

Legyen most $\mathcal{A}(x)$ egy állítás (x a változó), ekkor az állítás *tagadása* íly módon definiálható:

$$\neg(\forall x : \mathcal{A}(x)) = \exists x : \neg\mathcal{A}(x),$$
$$\neg(\exists x : \mathcal{A}(x)) = \forall x : \neg\mathcal{A}(x).$$

A módszer tehát: az állítást megelőző kvantort megcseréljük, majd a belső állítást tagadjuk. Amennyiben több kvantor előzi meg az állítást, ugyanilyen módon mindet megcseréljük, majd magát az állítást tagadjuk. Például ha $\mathcal{B}(x, y, z)$ egy állítás 3 változóval, és így néz ki a kifejezésünk:

$$\forall x : \exists y : \forall z : \mathcal{B}(x, y, z),$$

akkor ennek a kifejezésnek a tagadása így fest:

$$\exists x : \forall y : \exists z : \neg\mathcal{B}(x, y, z).$$

A fent szereplő állításunk (melyet igaznak véltünk az egész számokra) tagadása ezek alapján:

$$\exists x : x^2 - 3x + 2 < 0.$$

1.2. Halmazok

Egy halmazt akkor tekintünk ismertnek, ha minden jól megfogalmazható dologról el tudjuk dönteni, hogy hozzá tartozik vagy nem tartozik hozzá. Ebben az értelemben tehát egy halmaz dolgok (nem feltétlen számok) összességét jelenti. Például mondhatjuk, hogy „vesszük a pozitív páros számok halmazát."

Ez értelmes, hisz ezeket ismerjük.
Legyen A egy halmaz, x egy jól definiált „dolog”. Ha x hozzátartozik a halmazhoz, akkor ezt $x \in A$ jelölje. Ha nem tartozik hozzá, akkor ezt $x \notin A$ jelöli.
Egy halmaz elemeit többféleképp adhatunk meg, ilyen például az egyszerű felsorolás:

$$A := \{x, y, z\}.$$

Fontos, hogy nem értelmezzük halmazok esetében a többszörös szereplést, úgy tekintjük, hogy az elemek pontosan egyszer szerepelnek a halmazban. Megadható továbbá egy értelmes tulajdonság segítségével:

$$B := \{x \,|\, x \text{ valós szám és } x^2 < 2\}.$$

Amennyiben bevezetjük a valós számok halmazára a $\mathbb{R}$ jelölést, ezt így is megfogalmazhatjuk:

$$B := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}.$$

1.3. Definíció. *Legyenek A és B halmazok. Azt mondjuk, hogy A része vagy részhalmaza a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül. Jele: $A \subset B$.*

Amennyiben pl. B a természetes számok halmaza, A pedig a páros természetes számoké, akkor $A \subset B$ teljesül, hisz minden páros természetes szám egyben természetes szám is.

1.4. Definíció. *Legyenek A és B halmazok. Az A halmaz egyenlő a B halmazzal, ha ugyanazok az elemei. Jele: $A = B$.*

A matematikában szokás a fenti $\subset$ ún. *relációt valódi részhalmaz*nak nevezni, és a $\subseteq$ relációt használni arra, ha a két halmaz akár egyenlő is lehet. Mi most a $\subset$ relációt fogjuk arra az esetre is használni, ahol egyenlőség is teljesülhet. Könnyen meggondolható, hogy tetszőleges A és B halmazok pontosan akkor egyenlőek, ha $A \subset B$ és $B \subset A$ egyaránt teljesülnek. Íly módon fogjuk halmazok egyenlőségét bizonyítani, külön-külön bizonyítjuk mindkét oldali tartalmazást, és amennyiben sikerrel jártunk, a vizsgált halmazok egyenlőek.

Most definiálunk néhány olyan műveletet, melyekkel halmazokból újabb halmazokhoz juthatunk.

1.5. Definíció. *Legyenek A és B halmazok.*
Az A és B egyesítése (uniója) az a halmaz, amelyre

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \,\vee\, x \in B\}.$$

Az A és B metszete (közös része) az a halmaz, amelyre

$$A \cap B := \{x \,|\, x \in A \,\wedge\, x \in B\}.$$

Az A és B különbsége az a halmaz, amelyre

$$A \setminus B := \{x \,|\, x \in A \,\wedge\, x \notin B\}.$$

Elképzelhető, hogy valamely művelet során olyan halmazhoz jutunk, melynek nem lesz eleme. Az ilyen halmazt *üres halmaz*nak nevezzük. Jele: $\emptyset$. A halmazok egyenlősége révén belátható, hogy pontosan egy üres halmaz létezik, hisz ha több volna, ezek megegyeznének, hisz mindnek ugyanazok az elemei, nevezetesen semmi sem.

1.6. Definíció. *Legyen H halmaz, és $A \subset H$ egy részhalmaza. Az A halmaz H-ra vonatkozó komplementerén az $A' := H \setminus A$ halmazt értjük.*

A fenti definícióban a H halmazt *alaphalmaz*nak is szokás nevezni. Amennyiben H jelöli a természetes számokat, $A \subset H$ pedig a páros természetes számok halmaza (a nullát is beleértve), akkor A' éppen a páratlan számok halmazát jelenti.
A következő tételt *De-Morgan-azonosságok*nak is szokás nevezni:

1.1. Tétel. *Legyen H halmaz, $A, B \subset H$. Ekkor*

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{és} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Bizonyítás.

$$(A \cup B)' = H \setminus (A \cup B) = \{x \,|\, x \in H \,\wedge\, x \notin (A \cup B)\} =$$

$$= \{x \,|\, x \in H \,\wedge\, (x \notin A \,\wedge\, x \notin B)\} =$$

$$= \{x \,|\, (x \in H \,\wedge\, x \notin A) \,\wedge\, (x \in H \,\wedge\, x \notin B)\} = A' \cap B'.$$ Másik állítás:

$$(A \cap B)' = H \setminus (A \cap B) = \{x \,|\, x \in H \,\wedge\, x \notin (A \cap B)\} =$$

$$\{x \,|\, x \in H \,\wedge\, (x \notin A \,\vee\, x \notin B)\} =$$

$$= \{x \,|\, (x \in H \,\wedge\, x \notin A) \,\vee\, (x \in H \,\wedge\, x \notin B)\} = A' \cup B'.$$

Ezzel állításunkat maradéktalanul igazoltuk. □

Később meg fogjuk említeni a speciális bizonyítási típusokat. A fentit *direkt bizonyítás*nak nevezzük. Elindultunk az egyenlőség egyik oldalából, majd ekvivalens átalakításokkal a kívánt alakhoz jutottunk. Hozzá kell szoknunk a bizonyításhoz, minden állításunkat bizonyítani fogjuk, hisz így lesz következetes amit tanulunk.

1.7. Definíció. *Az a és b elemekből álló rendezett párnak nevezzük az (a, b) alakot, ahol*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

Itt lényegében két elem között állítottunk fel sorrendiséget. Vegyük észre, hogy amennyiben sorrendet nem definiálunk, egy kételemű halmazhoz jutunk. A rendezett párok segítségével definiálhatók a halmazok szorzata.

1.8. Definíció. *Legyenek A és B halmazok. Az A és B Descartes-szorzata:*

$$A \times B := \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}.$$

Például $A := \{1, 4, 6\}$, $B := \{2, 6\}$ esetén

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 6)\}.$$

1.3. Függvények

Függvények alatt halmazok közötti egyértelmű hozzárendeléseket értünk. Ha f-fel jelöljük a függvényt, akkor a függvény által egy x elemhez hozzárendelt elemet $f(x)$-szel jelöljük. Amennyiben az X halmaz bizonyos elemeit az Y halmaz bizonyos elemeihez rendeljük hozzá, $\mathcal{D}_f$ jelöli az f függvény *értelmezési tartományát*, vagyis

$$\mathcal{D}_f = \{x \in X \,|\, x\text{-hez } f \text{ hozzárendel valamit}\},$$

ami az X egy részhalmaza. Az f függvény $\mathcal{R}_f$-fel jelölt *értékkészlete* Y-nak részhalmaza és

$$\mathcal{R}_f = \{y \in Y \,|\, y = f(x) \text{ valamely } x \in \mathcal{D}_f\text{-re}\}.$$

Egy ilyen függvényt $f : X \to Y$ jelöl, mely tehát a következőt jelenti:

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \subset X : f(x) \in Y.$$

Egy függvény grafikonját rendezett párok segítségével definiálhatjuk:

1.9. Definíció. *Egy $f : X \to Y$ függvény grafikonja a $\mathcal{D}_f \times \mathcal{R}_f$ Descartes-szorzat alábbi részhalmaza:*

$$graph(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathcal{D}_f\},$$

vagyis az $(x, f(x))$ alakú pontok halmaza, ahol x az f értelmezési tartományából való.

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja tehát az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, vagyis a sík egy részhalmaza, és az $(x, f(x))$ alakú pontokat tartalmazza. Amennyiben $f(x) = x^2$, tehát a függvény minden számhoz annak négyzetét rendeli, akkor (x, x^2) alakú pontokról van szó.

1.10. Definíció. *Legyen $f : X \to Y$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f kölcsönösen egyértelmű vagy injektív, ha különböző $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ elemeknek különböző Y-beli elemeket feleltet meg, azaz*

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f,\ x_1 \neq x_2 \text{ esetén } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Másképp:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Az $f : X \to Y$ bijektív függvény vagy bijekció, ha f injektív, továbbá $\mathcal{D}_f = X$ és $\mathcal{R}_f = Y$.

1.11. Definíció. *Legyen $f : X \to Y$ injektív függvény. Ekkor az f inverze vagy inverzfüggvénye az az*

$$f^{-1} : Y \to X,\ \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$$

függvény, mely egy $y \in \mathcal{R}_f$ ponthoz azt az egyértelműen létező $x \in \mathcal{D}_f$ pontot rendeli, amelyre $f(x) = y$, vagyis

$$\text{bármely } f(x) = y \in \mathcal{R}_f \text{ esetén } f^{-1}(y) = x.$$

Megjegyzés: Világos, hogy ha $f : X \to Y$ injektív, akkor az $f^{-1} : Y \to X$ függvényre $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$, továbbá f^{-1} is injektív. Ha f bijektív, akkor f^{-1} is bijektív.

Könnyen meggondolható, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor $graph(f^{-1}) \subset \mathbb{R}^2$ úgy nyerhető, hogy $graph(f)$-et tükrözzük a 45°-os $(y = x)$ egyenesre.

1.12. Definíció. *Legyen $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ függvények. Ekkor az f és g függvények kompozíciója az az $f \circ g : X \to Z$ függvény, melyre*

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\},$$

továbbá bármely $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Nézzünk a kompozícióra egy példát. A g függvény minden szám duplájához 1-et adjon hozzá

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := 2x + 1;$$

az f függvény pedig minden számot emeljen négyzetre

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2,$$

ekkor

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$$

lesz f és g kompozíciója. Az $f \circ g$ kiejtésben: „f kör g.”

1.13. Definíció. *Legyen $f : X \to Y$ és $H \subset \mathcal{D}_f$. Az f függvény H-ra való leszűkítése az az $f_{|H} : H \to Y$ függvény, amelyre bármely $x \in H$ esetén $f_{|H}(x) := f(x)$.*

Fontos fogalom még, hogy mit értünk megszámlálható, illetve megszámlálhatóan végtelen halmazokon.

1.14. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A halmaz véges, ha létezik egy $\phi : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció valamely n pozitív egész számra.*
Azt mondjuk, hogy az A halmaz megszámlálhatóan végtelen, ha létezik $\phi : A \to \mathbb{N}$ bijekció.
Azt mondjuk, hogy az A halmaz megszámlálható, ha létezik $\phi : A \to \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_\phi = A$ injektív függvény.

Vegyük észre a definíció egyszerűségét: az első állítás mindösszesen annyit mondd, hogy elemeit „megcímkézhetjük” sorszámokkal egy ismert n pozitív egész számig. A második állítás ugyanez, csak nem egy adott n-ig megyünk, hanem végtelenig, de minden elemhez egyértelműen hozzá van rendelve egy konkrét szám. A harmadik állítás annyiban tér el a másodiktól, hogy nem követeljük meg, hogy $\mathcal{R}_\phi = \mathbb{N}$ legyen, csupán minden A-beli elemhez hozzá legyenek rendelve egyértelműen természetes számok.

Most felsoroljuk a legtöbbet használt számhalmazokat:

$\mathbb{N}$ természetes számok, a 0-t is beleértve;
$\mathbb{Z}$ egész számok;
$\mathbb{Q}$ racionális számok (felírhatók egész számok hányadosaként);
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{Q}^*$ irracionális számok;
$\mathbb{R}$ valós számok;
$\mathbb{R}^+$ pozitív valós számok;
$\mathbb{R}^-$ negatív valós számok (hasonlóan: $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}^+$, stb.)

1.4. Bizonyítási típusok

Korábban már említettük, hogy vizsgálataink során nagyon fontos, hogy állításainkat alá tudjuk kellőképp támasztani. A direkt bizonyításra a halmazoknál már láttunk egy példát, most nézzük meg a másik kettő bizonyítási típust.

1.4.1. Indirekt bizonyítás

Ennél a bizonyítási típusnál a bizonyítandó állítást letagadjuk, majd a tagadott állítást kezdjük el direkt úton bizonyítani, és ha sikerül egyértelmű ellentmondást kapnunk (lehetetlen állítást), akkor az eredeti állításunk igaz volt. Jó példa erre a $\sqrt{2}$ irracionalitása.

1.1. Állítás. *A $\sqrt{2}$ szám irracionális.*

Bizonyítás. Indirekt úton tegyük fel az állítás tagadását, vagyis azt, hogy a $\sqrt{2}$ racionális, és induljunk ki ebből. Ha a $\sqrt{2}$ racionális, felírható két egész szám hányadosaként ($a, b \in \mathbb{Z}$):

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2.$$

Itt fontos tulajdonság, hogy a és b relatív prímek, ami azt jelenti, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1, más szóval, a tört nem egyszerűsíthető tovább, ez a legegyszerűbb alak. Az átalakításokból látszik, hogy a^2 egy páros szám, így a is páros, tehát felírható $a = 2c$ alakban, ahol $c \in \mathbb{Z}$. Helyettesítsük be ezt az alakot:

$$2 = \frac{(2c)^2}{b^2} \implies 2b^2 = 4c^2 \implies b^2 = 2c^2.$$

Ebből azt látjuk, hogy b^2 is páros, amiből következik, hogy b is páros.

Tudjuk tehát, hogy a és b is páros számok, ez viszont ellentmond annak a feltevésnek, miszerint a és b relatív prímek, hisz párosságuk révén a legnagyobb közös osztójuk legalább 2. Más szóval, $\dfrac{a}{b}$ tovább egyszerűsíthető, pedig feltettük, hogy ez a legegyszerűbb alak. Így ellentmondás adódott az indirekt feltevéssel, tehát az eredeti állítás, miszerint $\sqrt{2}$ irracionális, igaz. $\square$

1.4.2. Teljes indukció

Amennyiben $\mathcal{A}(x)$ egy olyan állítás, ahol $x \in \mathbb{N}$, és azt kell bebizonyítanunk, hogy az állítás minden természetes számra egyaránt teljesül, akkor legtöbbször a teljes indukciós bizonyítás alkalmazható. A módszer lényege: először megnézzük az $\mathcal{A}(1)$, $\mathcal{A}(2)$, stb. "kicsi" eseteket, hátha már itt ellentmondásba ütközünk, és akkor kijelenthetjük, hogy az állításunk nem igaz. Ha az első néhány számra az állítás igaz, akkor a következő lépés, az úgynevezett indukciós feltevés, miszerint feltételezzük, hogy állításunk igaz valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra. Ezután megpróbáljuk bizonyítani az $\mathcal{A}(n+1)$ alakot, alkalmazva benne az indukciós feltevést. Ha itt helyes a bizonyítás, akkor mondhatjuk, hogy az állításunk teljesül minden természetes számra. A módszer a természetes számok felépítésén alapszik, lényegében az történik, hogy tetszőleges természetes szám esetén belátjuk, hogy a rákövetkezőjére is teljesül az állítás, ezáltal minden természetes számra teljesül.

1.2. Állítás.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bizonyítás. Nézzük meg a kicsi eseteket. $n=1$ esetén $1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ igaz. $n=2$ esetén $1+2 = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$ szintén igaz.
Most alkalmazzuk az indukciós feltevést: Tegyük fel, hogy az állításunk igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, tehát amit feltettünk:

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

Most ennek felhasználásával próbáljuk belátni az állítást $n+1$-re, tehát most a bizonyítandó állítás:

$$1+2+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Az indukciós feltevést alkalmazzuk, szemléltessük, ez mit is jelent:

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Innen tehát a bal oldal:

$$\frac{n^2+n}{2}+(n+1)=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}.$$

Jobb oldal pedig:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+2n+n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2},$$

A két oldal tehát valóban megegyezik, így az eredeti állításunkat igazoltuk minden n természetes szám esetére. $\square$

1.5. Nagyoperátorok

A későbbiekben nagyban megkönnyíti majd a bizonyításokat az úgynevezett nagyoperátorok bevezetése. Legtöbb esetben az összeg (szumma) és a szorzat (produktum) nagyoperátorokat fogjuk használni:

1.15. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, továbbá $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges olyan számok, melyeken az összeadás és szorzás műveletek értelmezve vannak. Ekkor*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

továbbá

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n=\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Nincs itt másról szó, csupán az összeg és szorzat leírásának egyszerűsítéséről. Érdemes lehet megemlítenünk, hogy a nulla tagú összeg értéke mindíg nulla, a nulla tagú szorzaté pedig 1. Az i számot mindkét esetben futóindexnek is nevezzük, és azt mondjuk: "i megy 1-től n-ig." A nagyoperátorok nem csak konkrét darabszámra használhatók, logikai állításokat is írhatunk az operátorok alá úgy, hogy a lehetőségek közül az igazakat vesszük figyelembe. Például legyen $A=\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 20\}$, vagyis a természetes számok 1-től 20-ig. Nincs rá szükségünk, hogy ismerjük A elemeinek a számát, ha össze akarjuk adni az összes elemét, ezt így is jelölhetjük:

$$\sum_{n \in A} n.$$

Természetesen produktumnál ugyanígy használható. Ez pontosan az A-beli összes szám összegét jelöli. Lehetőségünk van további állításokkal szükíteni a kört, tehát ha például csak a páros számok összege érdekel minket az A halmazból, akkor a

$$\sum_{\substack{n \in A \\ 2 | n}} n$$

kifejezés a 2-vel osztható A-beli elemek összegét jelenti. Az is előfordulhat, hogy az $a_1, \ldots, a_n$ számok sorrendje mérvadó, ilyenkor előfordulhat például egy ilyen kifejezés:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i - a_j.$$

Ez azt jelenti, hogy az összes olyan számok különbségét adjuk össze, ahol az első tag előrébb van, mint a második. Nézzünk erre egy példát. Legyen $n = 3$, továbbá $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $a_3 = 6$. Ekkor

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_i - a_j = (4 - 5) + (4 - 6) + (5 - 6) = -4.$$

2. fejezet

Valós számok struktúrája

„Meg akarom tudni, mi lakozik az emberek szívében, miért ragyognak a csillagok, és miért szabja meg a dolgok rendjét a számokban lakozó pitagoraszi erő.” (Bertrand Russell)

Egészen kiskorunk óta számolunk valós számokkal, különféle műveleteket végzünk velük, hatványozzuk, abszolút értékét vesszük a számoknak, mégsem ismertük eddig az alapigazságokat (axiómákat) melyek körül övezik őket. Most ezekkel fogunk megismerkedni.

2.1. Műveletek és rendezés

Legyen $\mathbb{R}$ nem üres halmaz. Tegyük fel, hogy van még egy összeadásnak nevezett $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és egy szorzásnak nevezett $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

a1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás)
a2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)
a3. van olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$ (az összeadás egységeleme)
a4. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $-a \in \mathbb{R}$ ellentett elem, hogy $a + (-a) = 0$.

m1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitás)
m2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asszociativitás)
m3. van olyan $1 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = a$ (a szorzás

egységeleme)
m4. bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén van olyan $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ reciprok elem, hogy $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

d. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (disztributív a szorzás az összeadásra nézve)

Meggondolva világos, hogy ezek a tulajdonságok mind teljesülnek a valós számok halmazára erre a két műveletre. Definiálnunk kell még azonban a rendezési szabályokat is.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$-en van egy olyan $\leq$ (kisebb vagy egyenlőnek nevezett) ún. rendezési reláció, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

r1. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq a$ (reflexív)
r2. ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$ (antiszimmetrikus)
r3. ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ (tranzitív)
r4. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$ (teljes)
r5. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén ha $a \leq b$, akkor $a + c \leq b + c$
r6. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén ahol $0 \leq c$, ha $a \leq b$, akkor $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Kényelmi szempontból megállapodunk abban, hogy az $a \leq b$, $a \neq b$ helyett $a < b$ jelölést használjuk. Ezen szabályok összessége alapján levezethető az összes egyenlőséggel és egyenlőtlenséggel kapcsolatos, korábbiakban ismert szabály. Kiegészítésül említsünk még meg három fogalmat.

2.1. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$.

Ez a definíció biztosítja számunkra az osztás elvégezhetőségét a valós számokkal. Definiáljuk az abszolút érték fogalmát.

2.2. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az x *abszolút értéke*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az abszolút érték nevezetes egyenlőtlenségei:

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |x|$;

2. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon$. Ekkor $(x \leq \varepsilon \text{ és } -x \leq \varepsilon) \iff |x| \leq \varepsilon$;

3. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $|a+b| \leq |a| + |b|$ (háromszög-egyenlőtlenség);

4. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

A tulajdonságok közül az utolsó kettőnek érdemes megmutatni a bizonyítását, az első kettőben nincs különösebb nehézség. Nézzük a 3-as tulajdonságot. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív kifejezés áll, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 \implies 2ab \leq 2|ab| \implies ab \leq |ab|,$$

az utóbbi alak pedig mindíg teljesül, hisz bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq |x|$. Nézzük meg most a negyedik állítás bizonyítását. Használjuk fel, hogy $a = a - b + b$. Ekkor a harmadik tulajdonság felhasználásával

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $-|b|$-t, ezzel nem változik az egyenlőtlenség:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$b = b - a + a \implies |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$$

Most $-|a|$-t adva hozzá az oldalakhoz:

$$|b| - |a| \leq |b - a| \implies -(|a| - |b|) \leq |b - a| = |a - b|$$

Felhasználva a fenti második tulajdonságot $x := |a| - |b|$, $\varepsilon := |a - b|$ szereposztással, éppen azt jelenti, hogy $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

2.2. Intervallumok

Munkánk során szinte mindíg találkozni fogunk az intervallum fogalmával, valószínűleg ismerjük is a fogalmat, ám nézzük a pontos definíciót.

2.3. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy I *intervallum*, ha bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén ha $x_1 < x < x_2$, akkor $x \in I$.

A definíció tehát azt mondja ki, hogy az intervallum bármely két különböző pontja közötti elemek is részei az intervallumnak. Nézzük meg a nevezetes intervallumokat, melyekkel találkozunk sokat munkánk során.

2.1. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az alábbi halmazok mindegyike intervallum.*

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$; $(0, +\infty) =: \mathbb{R}^+$
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$; $(-\infty, 0) =: \mathbb{R}^-$
$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$

Két speciális fajta intervallum, az $[a, a] = \{a\}$ és az $(a, a) = \emptyset$ az ún. elfajuló intervallumok.

Függvényeknél gyakran nem a teljes valós számok halmazán értelmezzük a leképezéseket, hanem leszűkítjük azt valamely valós intervallumra. Később látni fogunk erre számos példát. Most definiáljunk egy másik, különösen fontos fogalmat.

2.4. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Az A szám ε *sugarú környezetén* a

$$k_\varepsilon(A) := (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

nyílt intervallumot értjük.

Ez egy roppant egyszerű fogalom, és számos alkalommal fogjuk felhasználni. Nézzünk egy példát. Legyen $A = -4$, $\varepsilon = 1$, ekkor

$$k_1(-4) = (-5, -3),$$

tehát azok az $x \in \mathbb{R}$ számok, melyre $-5 < x < -3$.

A valós számoknak egy nagyon fontos alapigazsága, a teljességi axióma (vagy Dedekind-féle axióma):

2.1. Állítás. ***Teljességi axióma.*** *Ha $A, B \subset \mathbb{R}$ nem üres részhalmazai a valós számoknak, továbbá $\forall a \in A$ és $\forall b \in B : a \leq b$, akkor*

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq b \, (\forall a \in A, \forall b \in B),$$

ahol ξ-t szokás szétválasztó elemnek nevezni.

Mivel a valós számoknak részét képezik a természetes, egész illetve racionális számok, megvizsgáljuk most ezek szerkezetét is részletesen.

2.3. Természetes és egész számok

Vizsgáljuk meg, mitől lesz a valós számoknak egy $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ részhalmaza a természetes számok halmaza.

2.5. Definíció. *Legyen* $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *olyan részhalmaz, melyre*

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. *bármely* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $n + 1 \in \mathbb{N}$
3. *bármely* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $n + 1 \neq 0$ *(a 0 az „első" elem)*
4. *abból, hogy* $S \subset \mathbb{N}$*, továbbá* $0 \in S$ *illetve bármely* $n \in S$ *esetén* $n + 1 \in S$*, akkor teljes indukcióval kapjuk, hogy* $S = \mathbb{N}$

Az $\mathbb{R}$*-nek az ilyen* $\mathbb{N}$ *részhalmazát a természetes számok halmazának nevezzük. Innen úgy konstruálhatók az egész számok halmaza, hogy*

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{m \in \mathbb{R} \,|\, -m \in \mathbb{N}\}.$$

A fenti négy tulajdonságot szokás még Peano-axiómáknak is nevezni, ezek biztosítják a természetes számok egyértelműségét, az olyan részhalmazát $\mathbb{R}$-nek, melyre ezek teljesülnek, biztosan állíthatjuk, hogy az a természetes számok halmaza lesz.

2.4. Racionális számok

A valós számok racionális részhalmazát a következő módon definiálhatjuk.

$$\mathbb{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \text{van olyan } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0, \text{ hogy } x = \frac{p}{q} \right\}.$$

A valós számok halmaza egyértelműen kettébontható racionális és irracionális számok halmazára, melyek diszjunktak (nincs metszetük), így $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$, ahol $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, az irracionális számok halmaza. Később be fogjuk bizonyítani, hogy minden nyílt valós intervallumban végtelen sok racionális és irracionális szám van.

2.5. Korlátosság

A továbbiakban valós részhalmazok tulajdonságait vizsgáljuk, elsőként definiáljuk, mit értünk egy részhalmaz maximumán, illetve minimumán.

2.6. Definíció. *Egy nem üres $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak létezik maximuma, ha*

$$\exists \alpha \in H : \forall x \in H : x \leq \alpha.$$

Jele: $\max H := \alpha$*, a* H *maximális eleme. Hasonlóan, létezik minimum, ha*

$$\exists \beta \in H : \forall x \in H : \beta \leq x.$$

Jele: $\min H := \beta$*, a* H *minimális eleme.*

A definíció formális, kiolvasva annyit jelent (maximum esetében), hogy létezik olyan szám a halmazban, amely minden halmazbéli elemnél nagyobb, vagy egyenlő. Oda kell ügyelnünk arra, hogy nem mindíg létezik minimum és maximum, például ha vesszük a $(0, 1)$ nyílt intervallumot. Ebben nem tudunk sem minimumot, sem maximumot megfogalmazni. Egy másik példa:

$$H := \left\{ 1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \,|\, n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Ebben a halmazban létezik minimum (0), de maximum nem létezik. Megfogalmazhatjuk, mit értünk azon, hogy egy nem üres H részhalmaznak nincs maximuma, nyílván a definícióbéli állítást kell tagadnunk a tanult módon:

$$\emptyset \neq H \subset \mathbb{R} \text{ halmaznak nincs maximuma} \iff \forall \alpha \in H : \exists x \in H : x > \alpha,$$

tehát minden H-beli elemnél van nagyobb H-beli elem. Hasonló állítás érvényes, ha H-nak nincs minimuma.

2.7. Definíció. *Egy nem üres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről korlátos (f. k.), ha*

$$\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in H : x \leq K.$$

Hasonlóan, egy nem üres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz alulról korlátos (a. k.), ha

$$\exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in H : k \leq x.$$

2.8. Definíció. *A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos, ha felülről és alulról is korlátos.*

Figyeljük meg a hasonlóságot a maximummal és minimummal. Csupán annyi a különbség, hogy most a korlát tetszőleges valós szám lehet, míg maximum vagy minimum csak halmazon belül lehet. A fentebb említett $(0, 1)$ intervallum korlátos, hisz alulról korlátos (pl. 0 egy alsó korlát), és felülről is korlátos (1 egy felső korlát). Pontosan ugyanezek a korlátok megfelelnek a másik példánknak, melyet H-val jelöltünk. Egyből észrevehető lehet, hogy ha találtunk egy felső (vagy alsó) korlátot, akkor már végtelen sokat is találtunk egyben. Ezt is megfogalmazzuk a következő tételben:

2.2. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$. Ekkor*

1. Ha H felülről korlátos és K felső korlát, akkor $\forall K' > K$ is felső korlát;

2. A H halmaz korlátos $\iff \exists K \geq 0 : \forall x \in H : |x| \leq K$.

Bizonyítás. Az első állítás bizonyítása definícióból adódik. Az ott szereplő $x \leq K$ állításba behelyettesítve a tételben szereplő állítást:

$$x \leq K < K' \implies x < K',$$

így K' felső korlát. A második állításnak először a $\Rightarrow$ irányát bizonyítjuk. Tegyük fel tehát, hogy H korlátos, ez azt jelenti, hogy

$$\exists K, k \in \mathbb{R} : \forall x \in H : x \leq K \text{ és } x \geq k.$$

Ezt kicsit átírva

$$k \leq x \leq K.$$

Itt kettő eset lehetséges. Elképzelhető, hogy $0 \leq x \leq K$, ekkor $|x| \leq K$ teljesül. Lehet, hogy $k \leq x < 0$, ekkor $|x| \leq |k|$ egy jó választás. Így minden esetben találtunk megfelelő pozitív valós számot.
Nézzük most a tétel másik irányát. Tegyük fel tehát, hogy

$$\exists K \geq 0 : \forall x \in H : |x| \leq K.$$

Mivel $x \leq |x|$ minden x valós számra, így $x \leq K$ teljesül, tehát a felülről vett korlátosságot beláttuk. Hasonlóan, mivel minden H-beli elem abszolút értékben 0 és K között van, így abszolút érték nélkül $-K$ és K között szerepel minden halmazbéli elem, így $-K$-val alulról is korlátosak, tehát korlátosak. □

Mivel ha van felső (vagy alsó) korlát, beláttuk, hogy olyankor végtelen sok is van. Be fogjuk azonban bizonyítani, hogy a felső korlátok halmazának létezik minimuma, illetve az alsó korlátok halmazának pedig maximuma. Ezt bizonyítja a következő tétel.

2.3. Tétel. ***Szuprémum-elv.*** *Tegyük fel, hogy egy nem üres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről korlátos. Ekkor H felső korlátjai között van legkisebb, azaz:*

$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \,|\, K \textit{ felső korlátja } H\textit{-nak.}\}$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért nevezzük el B-nek a felső korlátok halmazát, vagyis

$$B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak.}\}.$$

Ekkor $B \neq \emptyset$, hisz létezik felső korlát, ez volt a feltétel. Továbbá a felső korlát definíciójából adódóan

$$\forall a \in H \text{ és } \forall K \in B : a \leq K.$$

Ebben a pontban a teljességi axióma feltételei teljesülnek, azaz létezik szétválasztó ξ elem, melyre

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq K \, (\forall a \in H, \forall K \in B).$$

Ez a ξ a legkisebb felső korlát, ugyanis

1. ξ felső korlát, hisz $\forall x \in H : x \leq \xi$;

2. legkisebb felső korlát, ugyanis $\forall K \in B : K \geq \xi$.

Így tehát ξ a keresett érték. □

2.4. Tétel. ***Infímum-elv.*** *Tegyük fel, hogy egy nem üres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz alulról korlátos. Ekkor H alsó korlátjai között van legnagyobb, azaz:*

$$\exists \max\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ alsó korlátja } H\text{-nak.}\}$$

Bizonyítás. A fentihez teljesen hasonló módon. □

2.9. Definíció. *A legkisebb felső korlátot a H halmaz szuprémumának nevezzük, és* $\sup H$*-val jelöljük. A legnagyobb alsó korlátot a H halmaz infímumának nevezzük, és* $\inf H$*-val jelöljük.*

A valós számokkal definiálhatjuk, az ún. *kibővített valós számok* halmazát. Ennek a definíciója: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. A rendezést a következőképp értelmezzük ezen a halmazon: $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$. Ennek segítségével megállapodunk abban, hogy ha egy H halmaz felülről nem korlátos, akkor $\sup H := +\infty$. Hasonlóan, ha alulról nem korlátos, úgy $\inf H := -\infty$. Fontos észrevétel, hogy szuprémum mindíg létezik, ám maximum nem feltétlen. A következő tétel a szuprémum és infímum létezését vizsgálja.

2.5. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$. Ekkor*

1. $\exists \max H \iff \sup H \in H$. *Ekkor* $\max H = \sup H$;

2. $\exists \min H \iff \inf H \in H$. *Ekkor* $\min H = \inf H$.

Bizonyítás. Elegendő az első állítást belátni, az alapján már könnyedén megy a második. Nézzük tehát a $\Rightarrow$ irányt. Tegyük fel, hogy $\exists \max H$. Ekkor tudjuk, hogy $\max H \in H$, és $\forall x \in H : \max H \geq x$. Tudjuk, hogy szuprémum létezik, és indirekt úton tegyük fel, hogy $\sup H \notin H$. Mivel a maximumhoz hasonlóan $\forall x \in H : \sup H \geq x$, de nincs benne a H-ban, így a maximumnál nagyobbnak kell legyen. Ám mivel a maximum is egy felső korlát, ellentmondás adódott, mert így nem a szuprémum a legkisebb felső korlát. Így tehát beláttuk, hogy $\sup H \in H$, az utóbbi következtetéssel pedig azt is, hogy $\max H = \sup H$, hisz a maximumtól bármely különböző H-beli elem már kisebb nála. Hasonlóan, a másik iránynál is. Tegyük fel, hogy $\sup H \in H$. Ekkor bármely nála kisebb elem már nem felső korlát, így $\exists \max H$ és $\sup H = \max H$, hisz benne van a H-ban. □

Érdemes még két kiegészítő tételt megfogalmazni, melyek bizonyítása már az eddigiekből adódik.

2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor*

$$\xi = \sup H \iff \begin{cases} \forall x \in H : x \leq \xi \, (\xi \textit{ felső korlát}) \\ \xi \textit{ a legkisebb felső korlát.} \end{cases}$$

Így $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in H : \xi - \varepsilon < x \leq \xi$, tehát bármely ξ-nél kisebb szám már nem felső korlát.

2.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos. Ekkor*

$$\xi = \inf H \iff \begin{cases} \forall x \in H : x \geq \xi \, (\xi \textit{ alsó korlát}) \\ \xi \textit{ a legnagyobb alsó korlát.} \end{cases}$$

Így $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in H : \xi \leq x < \xi + \varepsilon$, tehát bármely ξ-nél nagyobb szám már nem alsó korlát.

Van még egy tétel, mely a teljességi axióma, és a szuprémum-elv kapcsolatát mutatja meg.

2.8. Tétel. *A teljességi axióma $\iff$ A szuprémum-elv.*

Bizonyítás. A $\Rightarrow$ irányt már láttuk, hisz a szuprémum-elvet a teljességi axióma segítségével bizonyítottuk be. A másik irány bizonyításának gondolata, hogy (felhasználva a szuprémum és infímum-elvet) ha van egy nem üres felülről korlátos halmazunk, akkor tudjuk már, hogy létezik a halmaznak szuprémuma, legyen ez ξ. Most tekintsük a felső korlátok halmazát, vegyük észre, hogy ez a halmaz alulról korlátos, hisz ξ egy alsó korlátja, definíció szerint ez a legnagyobb alsó korlát. Így ξ szétválasztó elemként szolgál a két halmaz között. $\square$

Most az eddig ismert fogalmakkal definiáljuk a valós számoknak két igen fontos tulajdonságát.

2.5.1. Arkhimédeszi tulajdonság

2.9. Tétel. $\forall a > 0$ *és* $\forall b \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : b < na.$

Bizonyítás. Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel az állításunk tagadását, vagyis

$$\exists a > 0 \text{ és } \exists b \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : b \geq na.$$

Most konstruáljuk meg az a szám többszöröseinek a halmazát.

$$H := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor a feltevésből látjuk, hogy ez a halmaz nem üres és felülről korlátos, hisz pl. b egy felső korlát, emiatt $\exists \sup H =: \xi$. Mivel ξ legkisebb felső korlát, így $\xi - a$ már nem felső korlát, azaz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 a > \xi - a$. Látható, hogy $n_0 a \in H$. Innen átalakítással

$$n_0 a > \xi - a \implies (n_0 + 1)a > \xi,$$

ez pedig ellentmondás, hisz $(n_0 + 1)a \in H$, ξ pedig felső korlát. $\square$

Az Arkhimédeszi tulajdonság egy fontos következménye, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Ezt úgy láthatjuk, hogy a tulajdonságot $a = \varepsilon$, $b = 1$ szereposztással alkalmazzuk. Egy másik fontos következmény, amiről már beszéltünk, hogy bármely valós nyílt intervallumban végtelen sok racionális és irracionális szám van. Ezt fogjuk most bizonyítani. Elsőnek azt az állítást bizonyítjuk, hogy minden intervallumban létezik racionális szám, majd azt, hogy létezik irracionális, majd ezekből általánosítjuk, hogy végtelen sok is létezik.

2.10. Tétel. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b : \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Bizonyítás. A bizonyítás első felében tegyük fel, hogy $a \geq 0$. Tehát

$$a \geq 0 \implies b - a > 0 \overset{\text{Arkh. tul.}}{\implies} \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a} \implies \frac{1}{n} < b - a.$$

Konstruáljunk egy A halmazt a következő módon:

$$A := \left\{ j \in \mathbb{N} \,\middle|\, j \cdot \frac{1}{n} = \frac{j}{n} \leq a \right\}$$

Ekkor létezik egy olyan k eleme az A halmaznak, hogy $k + 1$ már nem eleme az A-nak. Ugyanis indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\forall k \in A : k + 1 \in A.$$

Tudjuk, hogy $0 \in A$, hisz $\frac{0}{n} = 0 \leq a$. Ebből és a feltevésből indukcióval azt kapnánk, hogy $A = \mathbb{N}$, ami ellentmondás, hisz $\exists j \in \mathbb{N} : \frac{j}{n} > a$. Így tehát tudjuk, hogy van olyan k eleme A-nak, hogy $k + 1$ már nem lesz eleme, tehát

$$\frac{k}{n} \leq a \qquad \text{és} \qquad \frac{k+1}{n} > a.$$

Innen átalakításokkal kapjuk a következőt:

$$a < \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + b - a = b.$$

Innen pedig azt látjuk, hogy $a < \frac{k+1}{n} < b$, ahol $\frac{k+1}{n} \in \mathbb{Q}$, tehát találtunk az (a, b) intervallumban racionális számot.

Ha $a < 0 < b$, akkor $r := 0 \in \mathbb{Q}$ egy jó választás. Ha $a < b \leq 0$, akkor $0 \leq -b < -a$, a fentiek alapján pedig

$$\exists r \in \mathbb{Q} : -b < r < -a \implies a < -r < b, \text{ és } -r \in \mathbb{Q},$$

állításunkat tehát maradéktalanul bizonyítottuk. □

Ebből a tételből bizonyítható, hogy minden intervallumban végtelen sok racionális szám van, ugyanis: veszünk egy tetszőleges intervallumot, a fentiek alapján találunk benne racionális számot. Most felezzük el az intervallumot, most a talált racionális szám csak az egyik félben van benne. Most vesszük a másik intervallumot, abban is tudunk találni a fentiek alapján racionális számot, és így tovább. Az intervallum felezést végtelenszer ismételhetjük (Arkhimédeszi tulajdonság miatt), így végtelen sok racionális szám adódik.

2.11. Tétel. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b : \exists q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < q < b.$

Bizonyítás. Most az (a, b) intervallumot csökkentsük $\sqrt{2}$-vel, így a kapott intervallum: $(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2})$. Előző tétel alapján

$$\exists r \in \mathbb{Q} : a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2} \implies a < r + \sqrt{2} < b.$$

Itt $r + \sqrt{2}$ irracionális, ugyanis ha racionális lenne,

$$s := r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies s - r = \sqrt{2} \in \mathbb{Q},$$

ami nyilvánvaló ellentmondás. □

Az előzőekhez hasonlóan itt is igazolható, hogy végtelen sok irracionális szám található bármely nyílt intervallumban.

2.5.2. Cantor-tulajdonság

2.12. Tétel. *Legyenek $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ ún. egymásba skatulyázott zárt intervallumok, vagyis*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor ezen intervallumoknak van közös pontja, vagyis

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az intervallumok határait rendezzük halmazokba:

$$A := \{a_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad B := \{b_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Ezek a halmazok nem üresek, továbbá $a_n \leq b_m\ (\forall n, m \in \mathbb{N})$, ugyanis:

1. Ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$;

2. Ha $n > m$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Így a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : a_n \leq \xi \leq b_m\ (\forall n, m \in \mathbb{N}) \implies a_n \leq \xi \leq b_n\ (\forall n \in \mathbb{N}) \implies$$
$$\implies \xi \in [a_n, b_n]\ (\forall n \in \mathbb{N}) \implies \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Így állításunkat maradéktalanul igazoltuk. □

Megjegyzés: Bizonyítható a következő:
Teljességi axióma $\iff$ Arkhimédeszi + Cantor-tulajdonság.

2.6. Valós számok hatványai

A valós számokon a hatványozást ún. rekurzív módon definiáljuk. Ez a következőt jelenti:

2.10. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$a^1 := a,\ a^2 := a \cdot a,\ a^3 := a^2 \cdot a, \dots, a^n := a^{n-1} \cdot a, \dots$$

A rekurzió tehát azt jelenti, hogy definiálunk egy alaphatványt ($a^1 = a$), és minden n-edik hatványt visszavezetünk az $n-1$-edik hatványra. A hatványozás segítségével definiálhatjuk a gyökvonást is.

2.11. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a$. A $\sqrt{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete a, azaz $0 \leq \sqrt{a}$, $(\sqrt{a})^2 = a$.*

Könnyen látható, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = |a|$. Nézzük meg a különbséget páratlan és páros kitevőjű gyökök esetén.

2.12. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k+1]{a}$ jelentse azt a valós számot, amelynek $(2k+1)$-edik hatványa a.*

Könnyen észrevehető, hogy ha $0 \leq a$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, és ha $a < 0$, akkor $\sqrt[2k+1]{a}<0$.

2.13. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a$, $k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k]{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek $(2k)$-adik hatványa a.*

Vezessünk be néhány további jelölést. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ az n paritásának megfelelő, akkor

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

Általánosan:

2.14. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ekkor*

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

2.15. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ekkor*

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

2.16. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $a^0 := 1$.*

Ezekkel a definíciókkal egy pozitív valós szám bármely racionális kitevőjű hatványát értelmeztük. Később egy szám m-edik gyökének létezésére és meghatározására tételt fogalmazunk meg. A hatványozásra a következő azonosságok érvényesek:

1. $a \in \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;

2. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$;

3. $a \in \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

A későbbiekben definiáljuk majd egy szám irracionális kitevős hatványait is.

2.7. Nevezetes formulák

Az analízisben bizonyítások során sokszor hivatkozunk nevezetes egyenlőségekre, egyenlőtlenségekre. Ilyen volt például a háromszög-egyenlőtlenség is. Most ki fogunk mondani néhány új nevezetes egyenlőséget, illetve egyenlőtlenséget, és be is bizonyítjuk azokat.

2.7.1. Bernoulli-egyenlőtlenség

2.13. Tétel. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ *és* $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ *esetén*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 1$ *vagy* $a = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 1$ esetén az állítás
$$1 + a \geq 1 + a$$
ez pedig tetszőleges a-ra igaz.

2. Tegyük fel, hogy állításunk igaz valamely $n \in \mathbb{N}^+$ számra! Be kell látni, hogy ekkor az egyenlőtlenség $n+1$-re is teljesül, vagyis
$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a.$$
Az indukciós feltevésünk tehát a következő
$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Mivel $a \geq -1$, így $1+a \geq 0$, ezt beszorozva mindkét oldallal kapjuk, hogy

$$(1+a) \cdot (1+a)^n \geq (1+a) \cdot (1+na) = 1 + (n+1) \cdot a + na^2.$$

Ismerjük a következő azonosságot

$$(1+a)^{n+1} = (1+a) \cdot (1+a)^n,$$

ezt kihasználva kapjuk, hogy

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a + na^2 \geq 1 + (n+1) \cdot a,$$

amit bizonyítani akartunk.

Bizonyítanunk kell még az egyenlőség esetét. Világos, hogy $n = 1$, illetve $a = 0$ esetén egyenlőség teljesül. Ha azt tesszük fel, hogy egyenlőség van, akkor ezt n helyett $n+1$-re felírva, az előző bizonyítás utolsó alakjából kapjuk, hogy

$$(1+a)^{n+1} = 1 + (n+1) \cdot a + na^2 = 1 + (n+1) \cdot a.$$

A fenti egyenletből az marad, hogy $na^2 = 0$. Így tehát vagy $n = 0$, vagy $a^2 = 0$, vagyis $a = 0$ kell legyen. Ezzel állításunkat bizonyítottuk. □

2.7.2. Binomiális tétel

A most következő tételhez ismernünk kell két új fogalmat.

2.17. Definíció. *Egy $n \in \mathbb{N}$ szám faktoriálisát (jelölésben $n!$) rekurzió segítségével definiáljuk. Megállapodás szerint* $0! = 1! := 1$, *és minden szobajövő $n > 1$-re:* $n! := n \cdot (n-1)!$.

Az 5 faktoriálisa tehát $5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Ezt természetesen nem kell mindig kiírnunk, egyszerűen csak pl. 4 faktoriálisa esetén $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. A faktoriális segítségével definiálhatjuk a binomiális együtthatót.

2.18. Definíció. *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. A*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ számot } \binom{n}{k}\text{-val jelöljük, és úgy mondjuk, „}n \text{ alatt a } k\text{”.}$$

A fenti alakot szokás binomiális együtthatónak is nevezni.

Ezekkel a fogalmakkal végre kimondhatjuk a binomiális tételt.

2.14. Tétel. *Tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást itt is teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 0$ esetén az egyenlőség

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} b^0 \implies 1 = 1.$$

2. Tegyük fel, hogy az egyenlőség valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re teljesül. Belátjuk, hogy $n+1$-re is. Használjuk ki, hogy $(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \binom{n}{0} ab^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^n b + \binom{n}{n} a^{n+1} +$$

$$+ \binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{1} ab^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b =$$

$$= \binom{n}{0} b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] ab^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^2 b^{n-1} + \cdots$$

$$\cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b + \binom{n}{n} a^{n+1}.$$

Most felhasználunk két binomiális azonosságot. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ esetén

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \text{ továbbá } \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}, \ \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}.$$

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \binom{n+1}{1} ab^n + \binom{n+1}{2} a^2 b^{n-1} + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n+1}{n} a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

és épp ezt az állítást akartuk belátni. $\square$

2.7.3. Közepek közti egyenlőtlenség

2.15. Tétel. *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ tetszőleges számok ($n \geq 1$). Ekkor*

$$A_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad \textit{(számtani közép)},$$

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad \textit{(mértani/geometriai közép)},$$

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad \textit{(harmonikus közép)}$$

jelöléssel fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$H_n \leq G_n \leq A_n.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bizonyítás. A bizonyítást ebben az esetben is teljes indukcióval végezzük. $n = 1$ esetben az állítás könnyen láthatóan triviális. Tegyük fel most, hogy valamely n-re és tetszőleges $a_1, \ldots, a_n > 0$ számokra

$$A_n \geq G_n.$$

Most be kell látnunk állításunk igazságát A_{n+1} és G_{n+1} esetre. Legyenek adva $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} > 0$ számok, és tegyük fel, hogy úgy vannak sorba rendezve, hogy az a_{n+1} az (egyik) legnagyobb közülük (nyilván a számok sorrendje nem módosítja az állítást). Írjuk fel a bizonyítandó állítást úgy, hogy mindkét oldalt $n+1$-edik hatványra emeljük:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1},$$

Most végezzük el a következő átalakítást:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{(n+1) \cdot A_n + a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1) \cdot A_n}{n+1} + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Feltettük, hogy a_{n+1} maximális az elemek között, ezért könnyen látható, hogy $a_{n+1} - A_n \geq 0$. Így a kapott kifejezést a Binomiális tétel szerint kifejtve a kapott összegben minden tag pozitív. Írjuk fel ezt az összeget:

$$\left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} = \binom{n+1}{0} \left(\frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} +$$

$$+\binom{n+1}{1}A_n\left(\frac{a_{n+1}-A_n}{n+1}\right)^n+\ldots+\binom{n+1}{n}A_n^n\cdot\frac{a_{n+1}-A_n}{n+1}+\binom{n+1}{n+1}A_n^{n+1}.$$

Kihasználva, hogy minden tag pozitív, az összeg értéke csökken, ha csak az utolsó két tagot hagyjuk meg, tehát

$$\left(A_n+\frac{a_{n+1}-A_n}{n+1}\right)^{n+1}\geq\binom{n+1}{n}A_n^n\cdot\frac{a_{n+1}-A_n}{n+1}+\binom{n+1}{n+1}A_n^{n+1}=$$

$$=(n+1)\cdot A_n^n\cdot\frac{a_{n+1}-A_n}{n+1}+A_n^{n+1}=A_n^n(a_{n+1}-A_n)+A_n^{n+1}=A_n^n\cdot a_{n+1}.$$

Az indukciós feltevést kihasználva kapjuk, hogy

$$A_n^n\cdot a_{n+1}\geq G_n^n\cdot a_{n+1}=a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1},$$

mindezeket kihasználva pedig kapjuk, hogy

$$A_{n+1}^{n+1}=\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}\geq a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}=G_{n+1}^{n+1},$$

amit bizonyítani akartunk.
A mértani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség könnyen adódik az előbb bizonyított mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségből. Írjuk fel ez utóbbit az $a_1,\ldots,a_n>0$ számok reciprokaira, azaz

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_n\cdot\ldots\cdot a_n}}.$$

Most vegyük mindkét oldal reciprokát. Ügyeljünk arra, hogy ekkor fordul az egyenlőtlenség:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n},$$

ami épp a bizonyítandó állítás harmonikus és mértani összegek között.
Most lássuk be az egyenlőségeket. Belátjuk, hogy

$$G_n=A_n\implies a_1=\ldots=a_n,$$

A harmonikus közép esete hasonlóan bizonyítható. Tegyük fel indirekt úton, hogy $A_n=G_n$, de valamely két elem különbözik, pl. $a_1\neq a_2$. Most cseréljük ki a_1-t és a_2-t is $\frac{a_1+a_2}{2}$-re, a többi számot hagyjuk változatlanul! Könnyen látható, hogy az

$$\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{a_1+a_2}{2},\ a_3,\ldots,a_n$$

számok számtani közepének értéke változatlanul A_n. Másrészről

$$a_1 \cdot a_2 < \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \iff 0 < (a_1 - a_2)^2$$

teljesül, mivel $a_1 \neq a_2$ (a bizonyított számtani-mértani egyenlőtlenség miatt). Így

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} = A_n = G_n =$$
$$= \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n$ számok mértani közepe nagyobb, mint a számtani közepe, ami ellentmondás. □

A fenti tételhez kapcsolható még egy nevezetes közép, konkrétan a négyzetes közép. Az $a_1, \ldots, a_n > 0$ számok *négyzetes közepe*:

$$Q_n := \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Ezzel a középpel kiegészíthetjük a fenti tételt:

2.16. Tétel. *Az $a_1, \ldots, a_n > 0\,(n \geq 1)$ közepei között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n.$$

Bizonyítás. Az előző tétel miatt már csak a $A_n \leq Q_n$ szorul bizonyításra. Itt is teljes indukcióval végezzük a bizonyítást.

1. Az állítás $n = 1$-re triviálisan teljesül. Lássuk még be, hogy $n = 2$ esetén $A_2 \leq Q_2$, mert erre a későbbiekben még szükségünk lesz. Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \implies \frac{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2}{4} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \implies$$
$$\implies a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2 \implies 0 \leq (a_1 - a_2)^2,$$

   ami teljesül.

2. Tegyük fel, hogy valamely n-re és tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ számokra igaz, hogy $A_n \leq Q_n$. Legyenek adva $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ valósak. Be kell lássuk, hogy a belőlük képzett számtani közép kisebb vagy egyenlő, mint a négyzetes közép, formálisan (négyzetre emelve):

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1}.$$

Alakítsuk át a bal oldalt:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{n^2 A_n^2 + 2nA_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2}.$$

Az indukciós feltevésünk ekvivalens azzal, hogy $A_n^2 \leq Q_n^2$, ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$\frac{n^2 A_n^2 + 2nA_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \leq \frac{n(a_1^2 + \cdot + a_n^2) + 2nA_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2}. \quad (*)$$

A jobb oldal számlálójában a második tagot alakítsuk át:

$$2nA_n \cdot a_{n+1} = 2(a_1 + \cdots + a_n) \cdot a_{n+1} = 2(a_1 \cdot a_{n+1} + \cdots + a_n \cdot a_{n+1}).$$

Alkalmazzuk minden tagra az $n = 2$-re már belátott $G_2 \, (\leq A_2) \leq Q_2$ egyenlőtlenséget. Ebből

$$a_j \cdot a_{n+1} \leq \frac{a_j^2 + a_{n+1}^2}{2}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Így tovább alakítva $(*)$ jobb oldalát:

$$\frac{n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + 2(a_1 \cdot a_{n+1} + \cdots + a_n \cdot a_{n+1}) + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \leq$$

$$\leq \frac{n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + (a_1^2 + \cdots + a_n^2) + na_{n+1}^2 + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1}.$$

Egybevetve mindent, kapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1}.$$

□

2.8. Az $\mathbb{R}^n$ tér

Az alábbiakban a középiskolából ismert vektorok fogalmának egy általánosítását mutatjuk be. Korábban már definiáltuk mit értünk Descartes-szorzat alatt, mindezt két halmazra. Természetesen értelmezhető ennek a fogalomnak az általánosítása tetszőlegesen sok halmazra az alábbi módon.

2.19. Definíció. *Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges halmazok ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor a halmazok n-szeres Descartes-szorzatán a következő halmazt értjük:*

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

A fenti definíció értelmében tehát az n-szeres Descartes-szorzat elemei rendezett szám n-esek. Legyen most a vizsgált halmaz a valós számok halmaza, tehát $\mathbb{R}$. Tudjuk, hogy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz elemei rendezett számpárok, vegyük észre azt, hogy ezen halmaz elemeit neveztük középiskolában vektoroknak! A vektorok lényegében rendezett számpárok voltak, volt első és második koordinátájuk. A fenti halmazt szokás $\mathbb{R}^2$-vel jelölni. Ezzel a meggondolással vezetjük be az $\mathbb{R}^n$ tér fogalmát.
A vektorokat a középiskolában így jelöltük:

$$\underline{a} = (x; y).$$

Ez a jelölés megtévesztő lehet, összekeverhető más fogalmakkal (például a számelméletben két szám legnagyobb közös osztóját is hasonló módon jelöljük). Továbbá nem is praktikus, későbbi vektorműveleteinket kényelmetlenné teszi, ezért a fent látható vektort a továbbiakban így jelöljük:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ez a jelölés még mindíg nem egyértelmű abból a szempontból, hogy nem mondtuk meg x és y milyen értékeket vehetnek fel, milyen számokra definiáltuk őket. Esetünkben a valós számok lesznek a mérvadóak, ezért azt mondjuk, hogy legyenek $x, y \in \mathbb{R}$. Mivel később nem csak kettő, hanem akár 8 komponensű vektorokkal is dolgozni fogunk, kényelmetlen lenne komponensenként kiírni, hogy az elemek milyen számhalmazból valók, pedig ezt kénytelenek vagyunk megtenni, ezért abban megállapodunk, hogy egy vektor elemei mindíg ugyanabból a számhalmazból valók, és bevezetjük a kettő komponensű vektorok halmazát, melyet $\mathbb{R}^2$-vel jelölünk, tehát ebben az esetben

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

írható. A jelölésben az aláhúzás elhagyható, amennyiben egyértelmű, hogy vektorról van szó. A fenti vektor tehát $\mathbb{R}^2$ egy eleme, ami azt jelenti, hogy komponensei $\mathbb{R}$-beli elemek. $\mathbb{R}^2$ tehát a két komponensű vektorok halmaza, a valós számokat ismerve világos, hogy végtelen sok ilyen van.

A fenti megkötést alkalmazva mindez általánosítható tetszőleges n komponensű vektorokra, tehát az

$$a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

vektornak n darab komponense van, tehát $\mathbb{R}^n$ egy eleme (a valós számok halmazának önmagával vett n-szeres Descartes-szorzata), komponensei pedig valós számok, tehát $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Két ilyen vektor pontosan akkor egyeznek meg, ha a megfelelő komponenseik egyenlőek. Az ilyen alakú vektorokon vezetjük be a szükséges műveleteket:

2.20. Definíció. *Legyen n rögzített pozitív egész szám, továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ekkor*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{esetén legyen} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{esetén legyen} \quad \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Tehát $\mathbb{R}^n$-beli vektorok összege szintén $\mathbb{R}^n$ eleme úgy, hogy a megfelelő komponenseket összeadjuk, *skalárral* való szorzás esetén pedig minden komponenst megszorzunk az adott számmal. Számmal való szorzás természetesen csak úgy értelmes, ha a szám ugyanabból a számstruktúrából való, mint a vektor elemei.

A valós számokon értelmezve van néhány tulajdonság az összeadásra, ilyen az asszociativitás, tehát bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$-re $(a+b)+c = a+(b+c)$. Kérdés, következik-e ebből a vektorok asszociativitása:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ esetén } \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1 \\ (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2 \\ \vdots \\ (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \\ \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) \\ \vdots \\ \alpha_n + (\beta_n + \gamma_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 + \gamma_1 \\ \beta_2 + \gamma_2 \\ \vdots \\ \beta_n + \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \right).$$

Innen tehát látszik a vektorok asszociatív tulajdonsága. A valós számok az összeadásra nézve kommutatívak is, tehát bármely $a, b \in \mathbb{R}$-re $a + b = b + a$. Természetesen ez vektorokra is teljesül:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ esetén } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \alpha_1 \\ \beta_2 + \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n + \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Összefoglalva tehát, a vektorok asszociativitása és kommutativitása visszavezethető a valós számok asszociativitására, illetve kommutativitására.

Ahhoz, hogy a vektorteret definiálhassuk, szükségünk van még két fontos (az előzőek alapján következetes) fogalom bevezetésére:

2.21. Definíció. *Nullvektornak nevezzük azt a vektort, melynek elemei csupa nullából állnak. Formálisan*

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ melyre } \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}.$$

Tehát minden $\mathbb{R}^n$-beli vektort az összeadással helybenhagy. Mivel a valós számok körében minden számnak létezik ellentettje, tehát amelyhez a számot hozzáadva nullát kapunk, könnyen adódik, hogy vektorok között is létezik ellentett:

2.22. Definíció. *Minden $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz létezik a $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ vektor, melyre $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.*

A definíció egyszerű, az összeadás komponensenként történik, így minden komponens a nulla lesz.

További műveleti szabályok is érvényesek a vektorokra, most mindent egyben összegzünk, bevezetjük a *vektortér* fogalmát:

2.23. Definíció. *Azt mondjuk, $\mathbb{R}^n$ vektortér (vagy lineáris tér) $\mathbb{R}$ felett, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

I. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$*-hez hozzá van rendelve egy* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ *(összeadás);*

II. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ *(kommutativitás);*

III. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n : (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ *(asszociativitás);*

IV. $\exists \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n : \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ *(nullvektor létezése);*

V. $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \exists (-\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n : (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ *(ellentett létezése);*

VI. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$*-hez hozzá van rendelve egy* $\lambda \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *(számmal szorzás);*

VII. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : (\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$ *("asszociativitás");*

VIII. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ *(első disztributivitás);*

IX. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n : \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ *(második disztributivitás);*

X. $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : 1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Ezeket a tulajdonságokat szokás vektortéraxiómáknak is nevezni. Az összeadás minden tulajdonságáról volt már szó, a számmal való szorzás definíciójából és az összeg asszociativitásának és kommutativitásának bizonyításánál alkalmazott módszerből könnyedén ellenőrizhető az utolsó pár tulajdonság teljesülése is. Ezentúl az $\mathbb{R}^n$ alatt mindíg egy vektorteret értünk $\mathbb{R}$ felett.

2.9. Komplex számok

A valós számok körében a gyökök értelmezése során nemnegatív számokra szorítkoztunk. Ennek egyszerű oka, hogy a negatív számoknak nincs páros kitevőjű gyöke a valós számok körében, hisz bármely valós szám páros kitevőjű hatványa nemnegatív. Speciálisan, nincs olyan valós szám, melynek a négyzete -1 lenne. Célszerű kibővíteni a valós számok halmazát oly módon, hogy benne a gyökvonás maradéktalanul elvégezhető legyen. Mindezt tegyük az alábbi módon:

Képzeljük el a valós számegyenest. Ezen a számegyenesen minden valós szám egy vektorként értelmezhető ($\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$-beli vektorok.) Húzzunk most egy tengelyt a 0 ponthoz merőlegesen (tehát a szokásos koordináta rendszert kapjuk). Ennek elemei az $\mathbb{R}^2$-beli számpárok. Vezessük be a következő összeadást és szorzást ezeken (most a szokásos számpár jelölést használjuk a vektoros jelölés helyett):

2.24. Definíció. *Tetszőleges $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ elemekre legyen*

$$x + y := (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2),$$

$$x \cdot y := (x_1 y_1 - x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Vegyük észre a következőt:

$$(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

A fenti koordináta-rendszeres értelmezésben a kapott szám éppen a -1, így tehát találtunk olyan (új) számot, melynek négyzete -1. Az új alatt azt értjük, hogy a $(0,1)$ számot nem tudjuk azonosítani egyetlen valós számmal sem, ez a bevezetett új tengelyen helyezkedik el. Vegyük észre továbbá, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $(x, 0) \in \mathbb{R}$ is teljesül. A komplex számok lényegében $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elemei.

2.25. Definíció. *Jelölje*

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

a komplex számok halmazát. Jelölje továbbá

$$i := (0,1) \in \mathbb{C}.$$

Az i segítségével definiálhatjuk a komplex számok algebrai alakját:

2.26. Definíció. *Az (x, y) komplex számot $x + iy$ alakban írhatjuk, melyet a szám algebrai alakjának nevezünk.*

A fenti jelölés egyértelmű. Nézzünk erre egy példát. Legyen a komplex számunk a $3 + 2i$. Ekkor

$$3 + 2i = (3, 0) + (2, 0) \cdot (0, 1) = (3, 0) + (0, 2) = (3, 2).$$

Általánosan:

2.27. Definíció. *Legyen $z := x + iy \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor a z szám valós része a*

$$\Re(z) := x \quad \text{vagy} \quad Re(z) := x,$$

valós szám, képzetes része pedig az

$$\Im(z) := y \quad \text{vagy} \quad Im(z) := y,$$

valós szám. A z szám konjugáltján az

$$\overline{z} := x - iy$$

komplex számot értjük. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. Ha egy komplex szám valós része nulla, akkor képzetes számnak nevezzük.

Tekintsük a fenti példánkat, legyen $z := 3 + 2i \in \mathbb{C}$. Ekkor tehát

$$\Re(z) = 3, \quad \Im(z) = 2, \quad \overline{z} = 3 - 2i.$$

Az osztás a következő trükk ssegítségével végezhető el: Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$, ahol $z = x + iy$, $w = a + ib\,(x, y, a, b \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{a + ib} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(xa + yb) + i(ya - xb)}{a^2 + b^2}$$

Legyen tehát $z := 3 + 2i$, $w := 4 + i$. Ekkor

$$\frac{3 + 2i}{4 + i} = \frac{(3 + 2i)(4 - i)}{17} = \frac{14 + 5i}{17} = \frac{14}{17} + i\frac{5}{17}.$$

Vegyük észre a következő összefüggést:

$$\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = 1 \cdot (-i) = -i.$$

A definíció alapján azonnal adódnak a következő összefüggések: Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$, ahol $z = x + iy$, $w = a + ib\,(x, y, a, b \in \mathbb{R})$. Ekkor

1. $\overline{\overline{z}} = z$.

   Bizonyítás. $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x - (-iy) = x + iy = z$. $\square$

2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

   Bizonyítás. $\overline{z + w} = \overline{(x + iy) + (a + ib)} = \overline{(x + a) + i(y + b)} =$
   $= (x + a) - i(y + b) = x + a - iy - ib = (x - iy) + (a - ib) = \overline{z} + \overline{w}$. $\square$

3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

   Bizonyítás. $\overline{z \cdot w} = \overline{(x + iy) \cdot (a + ib)} = \overline{(xa - yb) + i(xb + ya)} =$
   $(xa - yb) - i(xb + ya) = xa - yb - ixb - iya = (x - iy) \cdot (a - ib) = \overline{z} \cdot \overline{w}$. $\square$

4. Ha $0 \neq z$, akkor $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.

   Bizonyítás. $\overline{1/z} = \overline{1/(x + iy)} = \overline{(x - iy)/(x^2 + y^2)} =$
   $= \overline{x/(x^2 + y^2) - iy/(x^2 + y^2)} = x/(x^2 + y^2) + iy/(x^2 + y^2) =$
   $= (x + iy)/(x^2 + y^2) = 1/(x - iy) = 1/\overline{z}$. $\square$

5. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.

   Bizonyítás. $z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\Re(z)$. $\square$

6. $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$.

   Bizonyítás. $z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = x + iy - x + iy = 2iy = 2i\Im(z)$. $\square$

Említettük, hogy a komplex számok tekinthetők a sík vektorainak is. Gondoljunk bele, hogy valós a számok körében mit is jelentett egy szám abszolút értéke: a valós számegyenesen elhelyezkedő neki megfelelő vektor hossza. Ugyanilyen értelmezésben használjuk a komplex számok abszolút értékét, eredményként egy valós számot kapunk, mely a komplex számnak megfelelő vektor hossza.

2.28. Definíció. *Legyen $z := x + iy$ komplex szám abszolút értéke:*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vegyük észre, hogy amennyiben a komplex szám valós, tehát $z = x$, úgy $|z| = \sqrt{x^2}$, ami valóban az abszolút érték. Ha $z = x + iy$ és $w = a + ib$, bizonyíthatóak a következő összefüggések:

1. $z\overline{z} = |z|^2$.

   Bizonyítás. $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-xiy+iyx+y^2 = x^2+y^2 = |z|^2$. □

2. Ha $0 \neq z$, akkor $1/z = \overline{z}/|z|^2$.

   Bizonyítás. $1/z = 1/(x + iy) = (x - iy)/x^2 + y^2 = \overline{z}/|z|^2$. □

3. $|z| \geq 0$.

   Bizonyítás. Triviális. □

4. $|z| = |\overline{z}|$

   Bizonyítás. Triviális, hisz előjeltől független definiáltuk. □

5. $|zw| = |z||w|$.

   Bizonyítás. Mindkét oldalt négyzetre emelve: $zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w}$. □

6. $|\Re(z)| \leq |z|$.

   Bizonyítás. $|\Re(z)| \leq |z| \implies |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \implies x^2 \leq x^2 + y^2$. □

7. $|\Im(z)| \leq |z|$.

   Bizonyítás. A fentihez teljesen hasonló módon. □

8. Háromszög-egyenlőtlenség: $|z + w| \leq |z| + |w|$.

   Bizonyítás.

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} =$$

$$= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\Re(z\overline{w}) + |w|^2 \overset{(*)}{\leq} |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 =$$

$$= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

   A $(*)$ lépést igazolja, hogy $\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|$. A kapott alakból négyzetgyökvonással adódik az egyenlőtlenség. □

9. $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$.

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|z| = |(z - w) + w| \le |z - w| + |w| \implies |z| - |w| \le |z - w|,$$

másrészt z és w szerepét felcserélve

$$|w| - |z| \le |z - w|,$$

tehát $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$. $\square$

Értelmezzük komplex számokra az ún. előjelfüggvényt oly módon, hogy $\operatorname{sgn}(0) := 0$, továbbá $\operatorname{sgn}(z) := \frac{z}{|z|}$, ha $0 \ne z$. A fenti jól megszokott példánkkal

$$\operatorname{sgn}(3 + 2i) = \frac{3 + 2i}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} + i\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

3. fejezet

Sorozatok

„Bár napjaink matematikakönyveiben szinte hemzsegnek az absztrakt szimbólumok, ez azonban éppúgy nem jelenti a matematika lényegét, mint ahogy a zene valódi mibenléte sem a hangjegyek jelölésrendszerében keresendő.”
(Keith Devlin)

Az elkövetkezendő fejezetben sok „absztrakt” szimbólum fog szerepelni, ám ez senkit ne tántorítson el. Továbbra is a következetesség a legfőbb célunk. Jelen fejezetben speciális típusú függvényeket, a sorozatokat fogjuk tárgyalni. Egy sorozat is egy függvény, mely a természetes számok halmazán értelmezett. Nézzük a pontos definíciót.

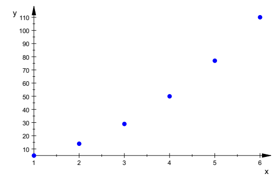
3.1. Definíció. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket valós sorozatoknak nevezzük. Az $a(n)$ jelölést sorozatok esetében inkább a_n-nel jelöljük, és ezt a számot a sorozat n-edik tagjának nevezzük, ahol n az n-edik tag indexe. Magát a sorozatot (a_n)-nel fogjuk jelölni.*

Változó, hogy sorozatok indexelésénél megedik-e a nullát. Mi jelen jegyzetben mindíg 1-től fogunk indexelni. Általában tetszőleges természetes számtól kezdett indexelés megengedett, de erre ritkán van szükség. Nézzünk egy példát sorozatra: legyen $a_n = \frac{1}{n}$, így a sorozat tagjai:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad \dots$$

Ebből a példából jól látszik, hogyan is értelmezzük a sorozatokat.

3.1. Sorozatok megadása



3.1. ábra. A $3n^2 + 2$ sorozat

Egy sorozatot többféle módon megadhatunk. Az iménti példában ún. indextranszformáció segítségével adtuk meg a sorozatot, ez a leggyakoribb eset, ilyenkor úgy definiáljuk a sorozatot, hogy megmondjuk, az adott index hogyan kapcsolódik az értékhez. Ilyen pl. a következő sorozat: $a_n := 3n^2 + 2$. Itt a sorozat első tagja $3 \cdot 1^2 + 2 = 5$, második tagja $3 \cdot 2^2 + 2 = 14$, stb.

Egy másik megadási módszer lehet az esetszétválasztás. Maga a megadás itt is index segítségével történik, ám itt bizonyos feltételeket is kiköthetünk. Ilyen pl a következő sorozat:

$$b_n := \begin{cases} 2n^2, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \\ -n, & \text{ha } n = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

Ebben az esetben tehát a sorozat tagjai:

$$b_1 = -1,\ b_2 = 2 \cdot 2^2 = 8,\ b_3 = -3,\ b_4 = 2 \cdot 4^2 = 32, \ldots$$

Egy harmadik fajta megadási módszer lehet a rekurzív definíció. Rekurzióról volt már szó a valós számok hatványozásának definiálásánál, itt is hasonló az elv: Megadjuk konkrétan a sorozat első tagját, majd megmondjuk, hogy egy tag hogy viszonyul az őt megelőző taghoz. Nézzünk erre is egy példát:

$$c_1 := 1 \qquad \text{és} \qquad c_{n+1} := \sqrt[3]{2c_n}.$$

A sorozat tagjai tehát

$$c_1 = 1,\ c_2 = \sqrt[3]{2 \cdot 1},\ c_3 = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 1}},\ c_4 = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 1}}}, \ldots$$

Nevezetes rekurzív sorozat a Fibonacci-sorozat, ahol a sorozat első két tagja adott, és minden többi tagja az őt megelőző kettő összege, tehát

$$f_1 := 1,\ f_2 := 1, \qquad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$$

A Fibonacci-sorozat tehát rendre a következő értékeket veszi fel:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

3.2. Példák sorozatokra

A sorozatok között van néhány speciális típusú. Ezekkel fogunk most megismerkedni. Néhányukkal középiskolai tanulmányaink során is találkozhattunk már. Ilyen pl. a most bemutatott számtani sorozat:

3.2.1. Számtani sorozat

Számtani sorozatok esetében van két tetszőleges valós szám, legyenek ezek $\alpha, d \in \mathbb{R}$, a sorozat tagjait pedig a következő módon definiáljuk:

$$a_n := \alpha + (n-1)d,$$

ahol α a sorozat első tagja. Számtani sorozatokban minden tag (a másodiktól kezdve) és az őt megelőző tagnak a különbsége állandó. A definícióban szereplő d számot differenciának is nevezzük. Két tag különbsége kiadja ezt a d értéket:

$$a_{n+1} - a_n = \alpha + nd - (\alpha + (n-1)d) = nd - (nd - d) = d.$$

Érdemesebb rekurzív módon definiálni a számtani sorozatot:

$$a_1 := \alpha, \qquad a_{n+1} := a_n + d.$$

Jó példa számtani sorozatra például a páros természetes számok sorozata, ekkor

$$a_1 := 0, \qquad a_{n+1} = a_n + 2.$$

Egy számtani sorozat első n tagjának az összegének meghatározására csináljuk a következőt: Írjuk fel egymás alá az első n-tagot, illetve ugyanezeket fordított sorrendben:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{array}$$

Ezek összege nyilván a keresett összeg kétszerese, hiszen az első n tag mindegyike pontosan kétszer szerepel. Másrészt az egymás alatt lévő számok összege éppen $a_1 + a_n$, hisz pl. $a_2 + a_{n-1}$ esetében:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n.$$

Hasonlóan ellenőrizhető a többi is. Összesen n darab pár van, vagyis az összeg ezek alapján $(a_1 + a_n) \cdot n$. De az általunk keresett összeg (azaz az első n tag összege) ennek éppen a fele, vagyis a helyes képlet:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

3.2.2. Mértani (geometriai) sorozat

Másik igen fontos sorozattípus a mértani, vagy geometriai sorozat. Hasonlóan két valós számunk van, jelölje ezeket $\alpha, q \in \mathbb{R}$, ahol α a sorozat első tagja, ekkor a sorozat n-edik tagja a következőképp kapható:

$$a_n := \alpha \cdot q^{n-1}.$$

A felírásban szereplő q értéket kvóciensnek is nevezzük. Mértani sorozatoknál a második tagtól kezdve minden tag és az őt megelőző tag hányadosa állandó, éppen q:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha \cdot q^n}{\alpha \cdot q^{n-1}} = \frac{q^n}{q^{n-1}} = \frac{q \cdot q^{n-1}}{q^{n-1}} = q.$$

Mértani sorozatok esetében is megfogalmazható rekurzív definíció:

$$a_1 := \alpha, \qquad a_{n+1} := q \cdot a_n.$$

Egy szám hatványait definiálhatjuk mértani sorozat segítségével. Például, ha a 3 hatványait a következő módon definiálhatjuk:

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 3 \cdot a_n.$$

A mértani sorozat első n tagjának összegének meghatározásához írjuk fel tagonként az összeget:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 + q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát q-val:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^n.$$

Most vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \implies S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

3.2.3. Harmonikus sorozat

A harmonikus sorozatok esetében minden tag az indexének reciproka, tehát

$$a_n := \frac{1}{n}$$

Ilyen sorozat tehát a következő:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}.$$

Ennek a típusú sorozatnak a részletösszegével a későbbiekben foglalkozunk.

3.3. Műveletek

Sorozatokkal el tudjuk végezni az alapműveleteket teljesen hétköznapi módon. Nézzük a definíciót.

3.2. Definíció. *Legyen* (a_n), (b_n) *két sorozat, valamint* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

1. $\lambda \cdot (a_n) := (\lambda \cdot a_n)$;
2. $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$;
3. $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n)$;
4. *Ha* $0 \notin \mathcal{R}_b$, *akkor* $\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

3.4. Monotonitás és korlátosság

Sorozatok esetében is érvényben lesz a valós számokra bevezetett korlátosság fogalma. Emlékeztetőül is szolgálhat a következő definíció:

3.3. Definíció. *Legyen* (a_n) *egy sorozat. Ekkor* (a_n)

1. *felülről korlátos, ha* $\exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq K$,
2. *alulról korlátos, ha* $\exists k \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : k \leq a_n$,
3. *korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.*

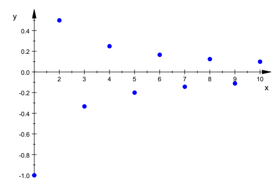
Sorozatok esetében is érvényes a következő összefüggés:

3.1. Tétel. *Az* (a_n) *sorozat korlátos* $\iff \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.

Az állítást valós számhalmazokra már beláttuk, ám könnyen látható a tétel igazsága: Mivel a sorozat minden tagja abszolút értékben kisebb egy valós számnál, így abszolút érték nélkül $-K$ és K között szerepel minden tag, tehát az alsó és felső korlátosság egyaránt teljesül. A szuprémum és infímum fogalmak itt is használatosak.
A számhalmazok esetében nem volt mérvadó a számok egymáshoz viszonyított sorrendje, ám sorozatok esetében igen lényeges, hogy tagjaik milyen sorrendben helyezkednek el. Így meg kell vizsgálnunk, hogy növekedésileg, illetve csökkenésileg hogy viselkednek a tagok. Erre szolgál a monotonitás fogalma.

3.4. Definíció. *Legyen* (a_n) *egy sorozat. Az* (a_n) *sorozat*

1. *monoton növekvő* ($\nearrow$), *ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$,
2. *szigorúan monoton növekvő* ($\uparrow$), *ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$,
3. *monoton csökkenő* ($\searrow$), *ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$,
4. *szigorúan monoton csökkenő* ($\downarrow$), *ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$,
5. *monoton, ha teljesül valamelyik az előző 4 feltétel közül.*



3.2. ábra. Egy nem monoton sorozat

Logikai tanulmányaink alapján, ha azt szeretnénk megfogalmazni, hogy egy sorozat nem monoton, akkor az se nem monoton növekvő, se nem szigorúan monoton növekvő, se nem monoton csökkenő, se nem szigorúan monoton csökkenő. Mivel ha egy sorozat szigorú valamilyen monotonitási értelemben, az magába foglalja a nem szigorú esetet is, így elég a tagadást szigorú esetekre megfogalmazni, tehát

$$\text{Az } (a_n) \text{ nem monoton} \iff \exists n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1} \text{ és } \exists k \in \mathbb{N} : a_k < a_{k+1}.$$

Vegyük észre, hogy ha megengedtünk volna nem szigorú esetet is, akkor nem számítana monotonnak az a sorozat, melynek minden tagja egyenlő, pedig az olyan sorozatra igaz, hogy monoton növekvő, sőt még a monoton csökkenés is.

Nézzünk mindezekre egy példát. Legyen a sorozatunk $\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Ez a sorozat korlátos, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n < n+1$, ezért

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

A sorozat szigorúan monoton növekvő, hisz bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1}.$$

Fontos szerepe lesz később a következő sorozatnak:

$$(e_n) := \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Ez a sorozat monoton növekedő, ugyanis legyen $n \in \mathbb{N}^+$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}}_{n} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1 + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

Ez a sorozat korlátos is, hisz bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy az n-edik tagot $\frac{1}{4}$-del szorozzuk, és azt kell kapnunk, hogy kisebb, vagy egyenlő mint 1. Szintén a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk fel:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

3.5. Konvergencia

Most egy merőben új fogalommal fogunk megismerkedni, mely az analízisben alapfogalom. Külön fejezetet is megérdemelt volna a téma, ám mivel sorozatokon definiáljuk, így lényegében ennek a fejezetnek a részét képezi.
Emlékezzünk vissza, amikor egy szám valamilyen $\varepsilon > 0$ sugarú környezetét definiáltuk. Valamely $A \in \mathbb{R}$ esetében ez a $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ nyílt intervallumot jelentette. Meg fogjuk mutatni, hogy ha egy $a \in \mathbb{R}$ elem benne van ebben a környezetben, az ekvivalens azzal, hogy $|a - A| < \varepsilon$.

3.2. Tétel. *Ha $a, A, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, akkor $a \in k_\varepsilon(A) \iff |a - A| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Nézzük meg az állítás $\Rightarrow$ irányát. Tudjuk, hogy

$$a \in k_\varepsilon(A) \iff A - \varepsilon < a < A + \varepsilon.$$

Most vonjunk ki A-t minden oldalból:

$$A - \varepsilon - A = -\varepsilon < a - A < A + \varepsilon - A = \varepsilon$$

Ez azt jelenti, hogy $0 - \varepsilon < a - A < 0 + \varepsilon$. Mivel ε pozitív szám, ez ekvivalens azzal, hogy $|a - A| < \varepsilon$, amit akartunk belátni.
A másik irány bizonyításához feltesszük, hogy $|a - A| < \varepsilon$, amiből a fentihez teljesen hasonló módon adódik, hogy

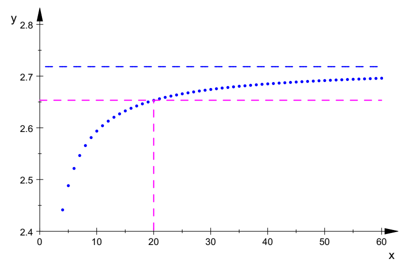
$$-\varepsilon < a - A < \varepsilon.$$

Most minden oldalhoz hozzáadva A-t kapjuk, hogy $A - \varepsilon < a < A + \varepsilon$, amit másként felírva adódik, hogy $a \in k_\varepsilon(A)$, amit akartunk belátni. □

Már definiálhatjuk mit értünk konvergens sorozaton.

3.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, ha*

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n - A| < \varepsilon.$$



3.3. ábra. Egy konvergens sorozat belépett valamely ε sugarú környezetbe. Látható, hogy a környezeten kívül csak véges sok tag van. Az ε értékeket a végtelenségig csökkentve érzékeljük a konvergenciát.

A definíció elsőre kicsit bonyolultnak tűnhet, ám vizsgáljuk meg, mit is jelent pontosan. Informálisan a definíció a következőt mondja ki: Létezik olyan A valós szám, melynek minden környezetéhez létezik a sorozatnak olyan tagja, melytől kezdve mindegyik tag benne van ebben a környezetben. Ez azt is jelenti, hogy az A szám tetszőleges környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van. A definíció nem jelzi, de a lényeg a minél kisebb ε környezetek, az A szám tetszőlegesen apró környezetéhez is van olyan tagja a sorozatnak, melytől kezdve nem lép ki a környezetből. Ilyenkor a sorozat *konvergál* az A értékhez, a végtelenségig közelíti azt.

A fenti definícióban nagyon fontos, hogy bármely pozitív ε-ra teljesül, de különböző ε-okra más-más indextől kezdve. Ezeket a *belépő* indexeket szokás még *küszöbindexeknek* nevezni.

3.3. Tétel. *Ha (a_n) konvergens, akkor a definícióbeli A szám egyértelmű. Ezt a számot a sorozat határértékének nevezzük (azt is mondjuk, hogy (a_n) A-hoz tart). Jelölése:* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, *vagy* $a_n \to A \, (n \to +\infty)$. *Amennyiben csak* $\lim a_n$ *szerepel, olyankor mindíg erre a végtelenben vett határértékre gondolunk.*

Bizonyítás. A tétel nagy része csak definíció, az egyértelműséget kell bizonyítanunk. Indirekt úton tegyük fel, hogy $A_1 \neq A_2$, és a definíció teljesül mindkét számra. Tegyük fel továbbá, hogy $0 < \varepsilon < \frac{|A_1 - A_2|}{2}$, azaz, hogy ε

kisebb, mint a határértékek különbségének fele. Ekkor:

$$\begin{cases} A_1 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : & |a_n - A_1| < \varepsilon \\ A_2 : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : & |a_n - A_2| < \varepsilon \end{cases}$$

Legyen most $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, ekkor mindkét állítás egyszerre teljesül. A háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva végezzük el az alábbi átalakításokat:

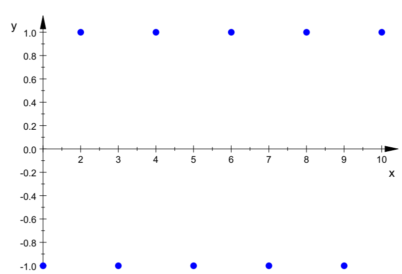
$$0 < |A_1 - A_2| = |(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)| \leq \underbrace{|A_1 - a_n|}_{|a_n - A_1|} + |a_n - A_2| < 2\varepsilon < |A_1 - A_2|,$$

így azt kapnánk, hogy $|A_1 - A_2| < |A_1 - A_2|$, ami egyértelmű ellentmondás, így $A_1 = A_2$ teljesül, tehát a határérték egyértelmű. □

3.6. Definíció. *Az (a_n) sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz*

$$\forall A \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Fontos divergens sorozat a $(-1)^n$ sorozat. Itt minden tag 1 vagy -1 váltakozva, így bármely $A \in \mathbb{R}$-hez található olyan környezet, hogy a -1 vagy az 1 ne legyen benne. Felrajzolva is szépen látszik, hogy a sorozat semmilyen értékhez sem konvergál.



3.4. ábra. A $(-1)^n$ sorozat

Megmutatjuk, hogy léteznek olyan divergens sorozatok, melyeknek létezik határértékük, konkrétan éppen a végtelen:

3.7. Definíció. *Legyen (a_n) egy sorozat.*

1. *Az (a_n) sorozat határértéke $+\infty$, ha*

$$\forall P \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : a_n > P;$$

2. Az (a_n) sorozat határértéke $-\infty$, ha

$$\forall P \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : a_n < P.$$

Egyszerű példa ilyen divergens sorozatokra az (n^2) sorozat, melynek határértéke $+\infty$, míg a $(-n^2)$ határértéke $-\infty$. A fentieket egybevetve konkretizáljuk a dolgokat: ha egy sorozat konvergens, akkor egyértelműen létezik valós határértéke. Ha egy sorozat divergens, akkor vagy létezik határértéke (ilyenkor ez $\pm\infty$), vagy nincs határérték (ilyen a $(-1)^n$).
Mivel a végteleneket is határértékként értelmeztük, célszerű lehet ezekre is kiterjeszteni a környezet fogalmát.

3.8. Definíció. *Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor*

1. $k_\varepsilon(+\infty) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right);$

2. $k_\varepsilon(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$

Tisztáznunk kell még egy fontos dolgot, ami sok esetben félreértéshez vezet. Ha (a_n) egy sorozat, akkor a $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$ azt jelenti, hogy a sorozat konvergens, és létezik véges határértéke. Ha $\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor csak annyit tudunk biztosan mondani, hogy a sorozatnak létezik határértéke.
Most nézzük meg, mikor *ekvikonvergens* két sorozat.

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n) olyan sorozatok, melyre*

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : a_n = b_n.$$

Ekkor (a_n)-nek létezik határértéke $\iff$ (b_n)-nek létezik határértéke, és ekkor $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

Bizonyítás. A definícióból következik. □

Most be fogunk bizonyítani egy alap határértéket. Az „alap” alatt azt értjük, hogy sok bizonyításban fel fogjuk használni.

3.1. Állítás.

$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

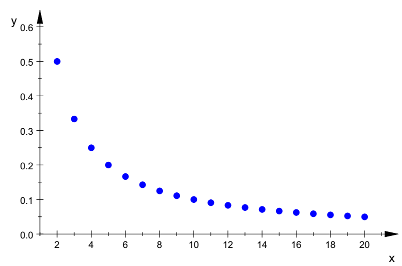
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $\frac{1}{\varepsilon}$ számhoz az Arkhimédeszi-tulajdonság alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ha pedig $n \geq N$, akkor

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Tehát tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén a sorozat tagjai benne vannak a nulla ε sugarú környezetében, tehát a sorozat 0-hoz tart. □

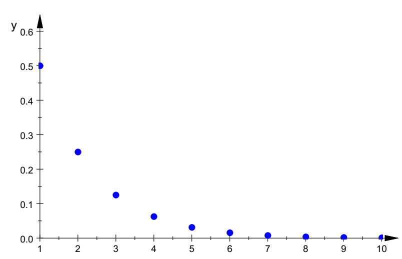


3.5. ábra. Az $\frac{1}{n}$ sorozat

Egy másik érdekes példaként vegyünk egy 1 méteres rudat. Vágjuk félbe, majd az egyik félrudat ismét vágjuk félbe, és így tovább, így a keletkezett rúdhosszak sorozata a következő:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

A fenti állítást alkalmazva belátható, hogy $\lim \frac{1}{2^n} = 0$, azaz a keletkezett új darabok tetszőlegesen kicsik lesznek, méretük „tart nullához."



3.6. ábra. A „rúdfelezés" drasztikusabb csökkenést eredményez

Ezt a jelenséget úgy nevezzük, hogy „gyorsabban tart nullához."

3.9. Definíció. *Legyen* (a_n) *olyan sorozat, melyre* $a_n = a$ *minden* n*-re. Ekkor* (a_n)*-et konstans sorozatnak nevezzük. Ha* $a_n = a$ *csak egy indextől kezdve teljesül, akkor* (a_n) *kvázikonstans sorozat.*

Világos, hogy konstans vagy kvázikonstans sorozatok esetén $\lim a_n = a$. Nézzük meg a konvergencia egy szükséges (de nem elégséges) feltételét.

3.2. Állítás. *Ha az* (a_n) *sorozat konvergens, akkor* (a_n) *korlátos.*

Bizonyítás. A definíció szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |A - \varepsilon|, |A + \varepsilon|\}$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$. □

Az állítás fordítva nem igaz! Tekintsük a $(-1)^n$ sorozatot. Ennek a sorozatnak minden tagja abszolút értékben 1, így korlátos, viszont tudjuk már róla, hogy divergens. Igaz azonban a következő tétel:

3.5. Tétel. *Ha* (a_n) *monoton és korlátos, akkor* (a_n) *konvergens, mégpedig*

1. monoton növő (a_n) *esetén*

$$\lim a_n = \alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \sup(a_n) \in \mathbb{R}$$

2. monoton csökkenő (a_n) *esetén*

$$\lim a_n = \alpha = \inf\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \inf(a_n) \in \mathbb{R}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) monoton nő és korlátos. Ekkor a szuprémum-elv alapján a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak létezik szuprémuma, ez legyen $\alpha := \sup(a_n)$. Be fogjuk bizonyítani, hogy $\lim a_n = \alpha$. Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. A szuprémum tulajdonságai alapján

a. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \alpha$,

b. $\exists N \in \mathbb{N}^+ : a_N > \alpha - \varepsilon$.

Megmutatjuk, hogy a *b.* pontban szereplő N jó küszöbindex ε-hoz. Legyen $n \geq N$ tetszőleges, és becsüljük meg a sorozat n-edik tagját:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy a sorozat monoton növő. Ebből már látjuk, hogy $\lim a_n = \alpha$. □

3.10. Definíció. *Az* $(e_n) := \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ *sorozatról már láttuk korábban, hogy monoton nő és korlátos, ezért a fenti tétel alapján konvergens is. Ennek a sorozatnak a határértékét e-vel jelöljük, ez az ún. Euler-féle szám, tehát*

$$e := \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

3.5.1. A rendezés és a határérték kapcsolata

A most következő tétel egy hasznos eszközt ad kezünkbe sorozatok határértékének meghatározására. Ezt *rendőr-elvnek* vagy *közrefogási elvnek* nevezzük.

3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* (a_n), (b_n), (c_n) *sorozatokra teljesülnek az alábbiak:*

1. $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0\, (n \in \mathbb{N}) : a_n \leq b_n \leq c_n$;

2. $\exists \lim(a_n) = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor $\exists \lim(b_n)$ *és* $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás. Elsőnek az $A \in \mathbb{R}$ esetet bizonyítjuk, utána pedig megnézzük a végtelen eseteket.

1. Legyen $A \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim(a_n) = A$, ezért ε-hoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ természetes számra

   $$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

   teljesül. $\lim(c_n) = A$, tehát ε-hoz létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ természetes számra

   $$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

   Legyen $N := \max\{N_0, N_1, N_2\}$, és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor mindegyik állítás teljesül, tehát

   $$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \implies \lim(b_n) = A.$$

   Tehát ε-hoz N jó küszöbindex, így következik az állítás.

2. Legyen most $A = +\infty$, és tekintsük az (a_n) sorozatot:

   $$\lim(a_n) = +\infty \implies \forall P \in \mathbb{R} : \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1\, (n \in \mathbb{N}) : a_n > P.$$

   Legyen $N := \max\{N_0, N_1\}$. Ekkor

   $$\forall n \geq N\, (n \in \mathbb{N}) : b_n \geq a_n > P \implies b_n > P \implies \lim(b_n) = +\infty.$$

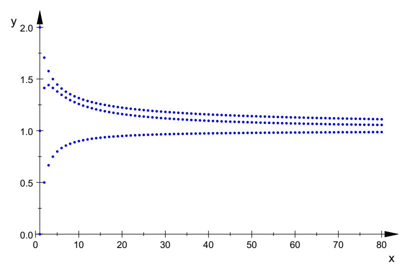
3. Legyen most $A = -\infty$, és tekintsük a (c_n) sorozatot:

$$\lim(c_n) = -\infty \implies \forall P \in \mathbb{R} : \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \, (n \in \mathbb{N}) : c_n < P.$$

Legyen $N := \max\{N_0, N_1\}$. Ekkor

$$\forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : P > c_n \geq b_n \implies P > b_n \implies \lim(b_n) = -\infty.$$

Állításunkat ezzel maradéktalanul igazoltuk. $\square$



3.7. ábra. A közrefogási elv szemléltetése

A tétel tehát nevét onnan kapta, hogy ha egy sorozatot„körül tudunk fogni” kétoldalról olyan sorozatokkal, melyek határértéke megegyezik, úgy biztosak lehetünk abban, hogy a közrefogott sorozat határértéke is az lesz. Természetesen elég, ha csak egy adott indextől kezdve teljesül a körülfogás, hisz határérték szempontjából minket a nagy indexek érdekelnek. A következő tétel két sorozat határértékeinek a kapcsolatát mutatja be a sorozatok rendezése szempontjából.

3.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\exists \lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor*

1. Ha $A > B$, *akkor* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : a_n > b_n$;

2. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : a_n \geq b_n \implies A \geq B$.

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a tétel állításainak megfordításai nem igazak, ugyanis ha $a_n > b_n$ valamely indextől kezdve, abból nem következtethető, hogy $A > B$, ugyanis pl. az $\frac{1}{n}$ sorozat tagjai nagyobbak, mint az $\frac{1}{2^n}$ sorozat tagjai, mégis mindketten nullához tartanak. Másik állításnál hasonlóan, legyen $0 = A \geq B = 0$. Ebből nem következik, hogy $a_n \geq b_n$, hisz pl ha $(a_n) = -\frac{1}{n}$, $(b_n) = \frac{1}{n}$, itt $(b_n) > (a_n)$.
Most nézzük sorban az állítások bizonyítását.

1. Itt négy eset lehetséges:

   a. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}$ végesek. Feltehetjük továbbá, hogy $0 < \varepsilon < \frac{|A-B|}{2}$, hisz a tetszőlegesen kicsi epszilonok az érdekesek. Ekkor

$$(a_n) : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon;$$

$$(b_n) : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Mivel epszilon kisebb, mint a határértékek távolságának fele, és $A > B$, ezért teljesül, hogy

$$\forall n \geq n_0 : b_n < B + \varepsilon < A - \varepsilon < a_n \implies b_n < a_n.$$

b. Legyen most $A = +\infty$, $B \in \mathbb{R}$:

$$(b_n) : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon;$$

$$(a_n) : \text{Legyen } P := B + \varepsilon; \, \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : a_n > B + \varepsilon.$$

Innen pedig: $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\} : a_n > B + \varepsilon > b_n \implies a_n > b_n$.

c. Legyen $A = +\infty$, $B = -\infty$.

$$(a_n) : \forall P \in \mathbb{R} : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : a_n > P;$$

$$(b_n) : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : b_n < P \text{ (az } (a_n) \text{ felírásában lévő } P)$$

Innen pedig: $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\} : a_n > P > b_n \implies a_n > b_n$.

d. Legyen $A \in \mathbb{R}$, $B = -\infty$.

$$(a_n) : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon;$$

$$(b_n) : \text{Legyen } P := A - \varepsilon; \, \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : b_n < A - \varepsilon.$$

Innen pedig: $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\} : a_n > A - \varepsilon > b_n \implies a_n > b_n$.

2. A második állítás bizonyításánál indirekt módon járunk el, felhasználva a már bizonyított első állítást. Indirekt úton tehát tegyük fel, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \, (n \in \mathbb{N}) : a_n \geq b_n \implies A < B.$$

Onnan, hogy $A < B$, az első állítás alapján következik, hogy egy küszöbindextől kezdve $a_n < b_n$, ami pedig ellentmondás, hisz feltettük, hogy $a_n \geq b_n$.

Állításunkat tehát bizonyítottuk. □

3.5.2. Részsorozatok

3.11. Definíció. *Egy* $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton növekedő sorozatot indexsorozatnak nevezünk.*

3.12. Definíció. *Legyenek* (a_n), (b_n) *sorozatok. Azt mondjuk, hogy a* (b_n) *az* (a_n) *sorozat egy részsorozata, ha létezik olyan* $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *indexsorozat, hogy* $b = a \circ \nu$*, azaz* $(b_i) = (a_{\nu_i})$.

Nézzünk erre egy példát. Legyen $(a_n) = \frac{1}{n}$, az indexsorozat pedig $(\nu_n) = 2n$ (szokásos módon 1-től indexelünk). Ekkor

$$(a_{\nu_n}) := \frac{1}{2n}.$$

3.8. Tétel. *Ha az* (a_n) *sorozatnak létezik határértéke, akkor tetszőleges* ν *indexsorozat esetén az* $(a \circ \nu)$ *részsorozatnak is van határértéke, és* $\lim(a \circ \nu) = \lim(a_n)$.

Bizonyítás. Indexsorozatok esetén könnyen észrevehető a definícióból adódóan, hogy $\forall i \in \mathbb{N}$ esetén $\nu_i \geq i$. Így adott $\varepsilon > 0$-hoz ugyanaz az N küszöbindex jó lesz a részsorozathoz is, hisz $\nu_N \geq N$. A bizonyítás egy másik ötlete: ha egy sorozat konvergál egy értékhez az egyenértékű azzal, hogy a határérték bármely környezetén kívülre a sorozatnak csak véges sok tagja esik, ám így a részsorozatnak is csak véges sok tagja esik a környezeteken kívül, tehát a részsorozat is a határértékhez konvergál. □

3.13. Definíció. *Az* (a_n) *sorozat egy* a_m *tagját csúcsnak nevezzük, ha minden* $n \geq m$ *esetén* $a_n \leq a_m$.

Egy sorozatban természetesen több csúcs is lehet. Egy monoton csökkenő sorozatban pl. minden tag csúcs. Ezt kihasználva fogunk most bebizonyítani egy érdekes tételt.

3.9. Tétel. *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás. Tetszőleges (a_n) sorozat esetén két eset lehetséges: vagy végtelen sok csúcsa van a sorozatnak, vagy véges sok (esetleg 0) darab csúcs van. Nézzük az első esetet. Legyen a_{n_1} egy csúcs. Végtelen sok csúcsunk van, így létezik olyan $n_2 > n_1$, hogy a_{n_2} is csúcs. Folytatva az eljárást kapjuk (a_n)-nek a csúcsaiból álló

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

részsorozatát, amely a definíció alapján monoton csökkenő részsorozat.
A második esetben tudjuk, hogy létezik egy olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén a_n nem csúcs. Legyen $n_1 := N$. Mivel a_{n_1} nem csúcs, ezért a csúcs definícióját tagadva adódik, hogy létezik olyan $n_2 > n_1$, hogy $a_{n_2} > a_{n_1}$. Mivel a_{n_2} sem csúcs, így a fenti gondolatmenetet folytatva kapunk egy

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

részsorozatot, mely a fentiek miatt szigorúan monoton növő. Ezzel állításunkat igazoltuk minden esetre. $\square$

A következő tétel a fentinek egy következménye, mely Bolzano-Weierstrass-tétel néven is ismeretes.

3.10. Tétel. *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Tudjuk már, hogy létezik monoton részsorozat. Nyilván ez a részsorozat is korlátos. Onnan pedig hogy monoton és korlátos következik, hogy konvergens. $\square$

3.5.3. Műveletek konvergens sorozatokkal

Korábban már definiáltuk a sorozatokon értelmezett alapműveleteket, most azt fogjuk megvizsgálni, hogy konvergens sorozatok esetében milyen hatással vannak ezek a határértékekre. Elsőnek azokat a sorozatokat vizsgáljuk, melyeknek a határértéke nulla. Az ilyen sorozatokat *nullsorozatok*nak is nevezzük. Nézzük meg, miként hatnak a műveletek a nullsorozatokra.

3.11. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1. $(a_n + b_n)$ *is nullsorozat;*

2. Ha (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(a_n c_n)$ *nullsorozat;*

3. $(a_n b_n)$ *nullsorozat.*

Bizonyítás. Az állításokat sorban bizonyítjuk.

1.
$$(a_n) : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2};$$
$$(b_n) : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \, (n \in \mathbb{N}) : |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Gondoljuk meg, hogy a konvergencia definíciójából adódóan $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú környezetre is feltehetjük az állítást, hisz onnan, hogy $\forall\varepsilon$, tudjuk hogy ez is teljesül, csaképp a küszöbindex lesz más.
Legyen tehát $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva

$$\forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Innen pedig látszik, hogy n_0 küszöbindex mellett $|a_n + b_n| < \varepsilon$, vagyis $\lim(a_n + b_n) = 0$.

2. Mivel (c_n) korlátos, létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \leq K$. Rögzítsük ezt a K értéket, és írjuk fel vele az (a_n) sorozatról ismert adatokat.

$$(a_n) : \forall\varepsilon > 0 : \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n| < \frac{\varepsilon}{K};$$

Innen pedig azt látjuk, hogy

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 := n_1 : \forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n c_n| \leq |a_n||c_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

vagyis n_0 küszöbindex mellett $|a_n c_n| < \varepsilon \implies \lim(a_n c_n) = 0$.

3. Mivel $\lim(b_n) = 0$, így a konvergencia miatt korlátos is, amiből (2-es szerint) következik, hogy $\lim(a_n b_n) = 0$.

Így állításunkat igazoltuk. □

Beláttuk tehát, hogy nullsorozatok összege is nullsorozat, szorzatuk is nullsorozat, illetve hogy egy nullsorozat és egy tetszőleges korlátos sorozat szorzata is nullsorozat. Nyilván így az első állítás különbségre is teljesül. Most vizsgáljuk meg tetszőleges konvergens sorozatokra vonatkozó műveleti tulajdonságokat. Az eredmények nem lesznek meglepőek.

3.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\exists \lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$, $\exists \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

1. $(a_n + b_n)$ *is konvergens, és* $\lim(a_n + b_n) = A + B$;

2. $(a_n b_n)$ *is konvergens, és* $\lim(a_n b_n) = AB$;

3. Ha $0 \notin \mathcal{R}_b$ *és* $B \neq 0$, *akkor* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *is konvergens, és* $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$.

Bizonyítás. Vegyük észre a következő összefüggést:

$$\lim(a_n) = A \iff \lim(a_n - A) = 0.$$

Ennek alapján az első állítás ekvivalens azzal, hogy

$$\lim((a_n + b_n) - (A + B)) = 0,$$

ezt kell belátnunk. Mivel $\lim(a_n - A) = \lim(b_n - B) = 0$, így ezek összege is nullsorozat, tehát

$$[(a_n - A) + (b_n - B)] = [(a_n + b_n) - (A + B)]$$

nullsorozat. Állításunkat ezzel beláttuk. Nézzük meg most a második állítást. Itt hasonló meggondolással azt kell belátnunk, hogy

$$\lim(a_n b_n - AB) = 0.$$

Itt már egy fokkal trükkösebben járunk el:

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \leq$$

$$\leq |b_n||a_n - A| + |A||b_n - B|.$$

Mivel $|b_n|$ korlátos sorozat (hisz konvergens), $|a_n - A|$ pedig nullsorozat, így szorzatuk nullsorozat. A konstans $|A|$ sorozat nyilván korlátos, míg $|b_n - B|$ nullsorozat, így ezek szorzata is nullsorozat, az összeg tehát szintén nullsorozat. Megjegyezzük, hogy ha egy tetszőleges (a_n) sorozat nullsorozat, akkor $|(a_n)|$ is nullsorozat lesz, hisz a konvergencia definíciójában is abszolútérték szerepel. Ez az állítás fordítva is teljesül. Abszolút értékben lévő nullsorozat abszolút érték nélkül is nullsorozat marad. Ennek az az oka, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számra $\big||x|\big| = |x|$. Ezek alapján tehát ott tartunk, hogy

$$(|a_n b_n - AB|) \text{ nullsorozat} \implies \lim(a_n b_n - AB) = 0,$$

amit akartunk belátni. Az utolsó állítás bizonyításához ki kell mondanunk egy segédtételt:

3.13. Tétel. *(segédtétel). Ha* (b_n) *konvergens, és* $\lim(b_n) = B \neq 0\,(0 \notin \mathcal{R}_b)$, *akkor*

$$\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \text{ korlátos.}$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $B > 0$. Ekkor

$$\varepsilon = \frac{B}{2} = \frac{|B|}{2} > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\,(n \in \mathbb{N}) : |b_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Most átalakításokkal:

$$|b_n| = |(b_n - B) + B| = |B - (B - b_n)| \geq \big||B| - |B - b_n|\big| \overset{(*)}{\geq}$$
$$\overset{(*)}{\geq} \left||B| - \frac{|B|}{2}\right| = \left|\frac{|B|}{2}\right| = \frac{|B|}{2}.$$

A $(*)$ előtti lépés az abszolút értékek különbségére vonatkozó tulajdonság alapján történt, a $(*)$ lépés oka pedig, hogy $|b_n - B| < \frac{|B|}{2}$, így $|B|$-ből egy $|B - b_n|$-nél nagyobb számot kell kivonnunk, így értéke csökken. A fenti alakból azt látjuk, hogy

$$|b_n| \geq \frac{|B|}{2} \implies \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|B|},$$

tehát a korlátosság teljesül. □

Folytassuk a harmadik állítás bizonyításánál. Igazolnunk kell, hogy $\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right)$ nullsorozat. Végezzünk el átalakításokat:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|a_nB - Ab_n|}{|b_nB|} = \frac{|a_nB - AB + BA - Ab_n|}{|b_nB|} =$$
$$= \frac{|B(a_n - A) + A(B - b_n)|}{|b_nB|} \leq \frac{|B||a_n - A|}{|b_n||B|} + \frac{|A||B - b_n|}{|b_n||B|} =$$
$$= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{\text{nullsorozat}} + \underbrace{\frac{|A|}{|B|}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}.$$

A fenti jelölésből szépen látszik, miért kapunk végeredményben nullsorozatot, így állításunkat maradéktalanul igazoltuk. □

A szorzásra vonatkozó tételt alkalmazhatjuk úgy is, hogy benne $(b_n) = (a_n)$, így hatványozást eredményezünk. Innen szinte azonnal következik, hogy ha $\lim(a_n) = A$, és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\lim(a_n^p) = A^p$.
A műveletek közül még hátravan annak az esetnek a vizsgálata, mi történik a határértékkel, ha a sorozat minden tagját valamilyen konstans értékkel szorozzuk:

3.14. Tétel. *Legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$, *továbbá* $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\lim(\lambda a_n) = \lambda A.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $(\lambda a_n - \lambda A) = (\lambda(a_n - A))$. Mivel $(a_n - A)$ nullsorozat, (λ) pedig konstans sorozat, így konvergens tehát korlátos is, ezek alapján ezek szorzata nullsorozat, tehát

$$\lim(\lambda(a_n - A)) = 0 \implies \lim(\lambda a_n) = \lambda A.$$

□

Fentebb említettük, hogy nullsorozat esetén az abszolút értékű sorozat is nullsorozat lesz. Most általánosítani fogjuk ezt a gondolatot tetszőleges valós határértékre.

3.15. Tétel. *Legyen* $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\lim(|a_n|) = |A|.$$

Bizonyítás. Írjuk fel az alábbi egyenlőtlenséget:

$$0 \leq \big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

A jobb oldalon egy nullsorozat szerepel. A bal szélen lévő konstans 0 is egy nullsorozat. A rendőr-elv alapján ekkor a középső tag is nullsorozat lesz, így állításunkat beláttuk. □

3.16. Tétel. *Legyen* $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$, $(a_n) > 0\,(\forall n \in \mathbb{N})$ *és* $q \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor*

$$\lim(\sqrt[q]{a_n}) = \sqrt[q]{A}.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságait alkalmazva könnyen meggondolható az alábbi:

$$\left|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{A}\right| = |a_n - A| \cdot \frac{1}{(\sqrt[q]{a_n})^{q-1} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-2}(\sqrt[q]{A}) + \cdots + (\sqrt[q]{A})^{q-1}}$$

A második tényező q darab pozitív korlátos sorozat összegének a reciproka, tehát korlátos, így szorozva egy nullsorozattal, nullsorozatot kapunk, ami a bizonyítandó állítás. □

Alkalmazzuk most a tanult tételeket egy példán. Legyen a feladat a következő:

$$\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = ?$$

Észrevehető, hogy nem tudunk még azonosságokat alkalmazni, hisz minden n-es tag $\pm\infty$ valamelyikéhez tart. Alkalmazzuk a következő gyakorlati trükköt: minden tagot osszunk el a domináns n-el, azaz a legnagyobb kitevőjű n-nel.

$$\lim \frac{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} = \lim \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Ezzel a lépéssel a sorozaton nem módosítottunk. A most kapott alakot vizsgáljuk meg: Tudjuk, hogy $\frac{1}{n}$ nullsorozat, amiknek a szorzata is nullsorozat, tehát $\frac{1}{n^2}$ szintén nullsorozat. $2 \cdot \frac{1}{n}$ egy korlátos (2) és egy nullsorozat szorzata, ami szintén nullsorozat. A (3) sorozat a 3-hoz konvergál. A nevezőben egy konstans és egy nullsorozat összege található. Most felhasználva a tanult tételeket:

$$\lim \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}.$$

Vegyük észre, hogy a határérték pont a sorozatban szereplő legmagasabb fokú tagok együtthatóinak hányadosa. Ennek az az oka, hogy ők a *domináns tagok*. A hatványozás sokkal radikálisabb változást eredményez mint a számmal szorzás, és minket határérték szempontjából az elég nagy tagok érdekelnek. Vegyük észre minél nagyobb értéket helyettesítünk be, a domináns tagok nagyságrenddel nagyobbak lesznek a többinél.

A következőkben a konvergencia definíciójának nézzük meg egy ekvivalensét, a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot.

3.5.4. Cauchy-féle konvergencia-kritérium

A konvergencia definíciójában szerepel egy komoly nehézség. Ahhoz hogy használni tudjuk, meg kell sejteni azt az $A \in \mathbb{R}$ számot, amelyhez a sorozat tagjai tetszőlegesen közel kerülnek. Ezt kiküszöbölhetjük. Mindenek előtt vezessük be a Cauchy-sorozat fogalmát.

3.14. Definíció. *Az (a_n) sorozat Cauchy-sorozat (ejtsd: „Kosi-sorozat”), ha*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \, (n, m \in \mathbb{N}) : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tehát egy sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha bármely pozitív epszilonhoz létezik olyan küszöbindex, melytől kezdve a sorozatnak tetszőleges két tagja epszilonnál közelebb vannak egymáshoz. A most következő tételt hívjuk *Cauchy-féle konvergencia-kritérium*nak:

3.17. Tétel. *Legyen (a_n) tetszőleges sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás. Nézzük az állítás $\Rightarrow$ irányát. Tegyük fel tehát, hogy (a_n) konvergens. Ekkor $\exists \lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 :$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tehát (a_n) Cauchy-sorozat.
Lássuk a bizonyítás másik irányát. Tegyük fel, hogy az (a_n) Cauchy-sorozat. Itt a bizonyítás több lépésben történik.

1. (a_n) korlátos: Tudjuk, hogy (a_n) Cauchy-sorozat, ezért pl. $\varepsilon = 1$-hez

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \, (n, m \in \mathbb{N}) : |a_n - a_m| < 1,$$

   Ebből pedig az következik, hogy $\forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) :$

$$|a_n| = |(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}| \leq 1 + |a_{n_0}| \implies$$

$$\implies |a_n| \leq K := \max\{1 + |a_{n_0}|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}, \qquad (\forall n \in \mathbb{N});$$

   így (a_n) korlátos.

2. A Bolzano-Weierstrass tétel alapján korlátos sorozatnak létezik valamilyen (a_{n_k}) konvergens részsorozata, ahol $\lim(a_{n_k}) = A \in \mathbb{R}$.

3. Meg fogjuk mutatni, hogy A az egész sorozat határértéke is. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$|a_n - A| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - A)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|.$$

   Tudjuk, hogy $\lim(a_{n_k}) = A$, tehát

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n^* \in \mathbb{N} : \forall k \geq n^* \, (k \in \mathbb{N}) : |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Tudjuk továbbá, hogy (a_n) Cauchy-sorozat, tehát

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n^{**} \in \mathbb{N} : \forall n, n_k \geq n^{**} \, (n, n_k \in \mathbb{N}) : |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Legyen most $n_0 := \max\{n^*, n^{**}\}$. Ekkor

$$\forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

   ebből pedig az következik, hogy $\lim(a_n) = A$,

így állításunkat maradéktalanul igazoltuk. □

3.5.5. Divergens sorozatok, végtelen határérték

Korábban már definiáltuk mit értünk divergens sorozaton, illetve azon belül, hogy mit értünk végtelen határértéken. Most ezeket a sorozatokat fogjuk részletesebben vizsgálni, megnézzük a kapcsolatait a konvergens sorozatokkal.
Korábban beláttuk, hogy ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens, és a határérték az ezeknek megfelelő szuprémum vagy infímum. Most ezt a tételt fogjuk kiegészíteni, megnézzük mi történik, ha a monotonitás mellé a korlátosságot nem engedjük meg. Sejthető, hogy végtelen határértéket fogunk kapni.

3.18. Tétel. *Ha az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről nem korlátos, akkor (a_n) divergens és*

$$\lim(a_n) = +\infty.$$

Ha az (a_n) sorozat monoton csökkenő és alulról nem korlátos, akkor (a_n) divergens és

$$\lim(a_n) = -\infty.$$

Bizonyítás. (a_n) felülről nem korlátos, azaz

$$\forall P \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > P.$$

Az (a_n) viszont monoton növekedő, ahonnan:

$$\forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : a_n \geq a_{n_0} > P \implies \lim(a_n) = +\infty.$$

A másik állítás teljesen ugyanígy igazolható. □

Ezzel a tétellel és a már korábban igazolttal együtt kapjuk a következményt, miszerint minden monoton sorozatnak létezik határértéke. A részsorozatoknál tanultaknál láttuk, hogy egy konvergens sorozat minden részsorozata is az eredeti sorozat határértékéhez konvergál. Ez a tétel könnyen meggondolhatóan végtelenbe tartó divergens sorozatokra is érvényes marad. A bizonyítás teljesen hasonló az ott elvégzetthez.
Emlékeztetjük az olvasót a kibővített valós számok halmazára:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Ne feledjük, hogy $\pm\infty$ csak szimbólumok, és nem valós számok! Most egy tétel keretein belül felsoroljuk a határértékek és műveletek kapcsolatát kibővített valós számokra.

3.19. Tétel. *Tetszőleges* (a_n), (b_n) *sorozatokra:*

1. *Ha* $\lim(a_n) = +\infty$ *és* (b_n) *alulról korlátos (pl. konvergens, vagy* $+\infty$*-hez tart), akkor* $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.
2. *Ha* $\lim(a_n) = +\infty$ *és* (b_n)*-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. egy pozitív számhoz vagy* $+\infty$*-hez tart), akkor* $\lim(a_n b_n) = +\infty$.
3. *Ha* $\lim(a_n) = +\infty$ *és* (b_n)*-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. egy negatív számhoz vagy* $-\infty$*-hez tart), akkor* $\lim(a_n b_n) = -\infty$.
4. *Ha* $\lim(a_n) = -\infty$ *és* (b_n) *felülről korlátos (pl. konvergens, vagy* $-\infty$*-hez tart), akkor* $\lim(a_n + b_n) = -\infty$.
5. *Ha* $\lim(a_n) = -\infty$ *és* (b_n)*-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. egy pozitív számhoz vagy* $+\infty$*-hez tart), akkor* $\lim(a_n b_n) = -\infty$.
6. *Ha* $\lim(a_n) = -\infty$ *és* (b_n)*-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. egy negatív számhoz vagy* $-\infty$*-hez tart), akkor* $\lim(a_n b_n) = +\infty$.
7. *Ha* $\lim(a_n) = \pm\infty$*, akkor* $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$.
8. *Ha* $\lim(a_n) = 0$*, és* $a_n > 0$ *egy indextől kezdve, akkor* $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = +\infty$*, ha pedig* $a_n < 0$ *egy indextől kezdve, akkor* $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = -\infty$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az állításokat sorjában.

1. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel (b_n) alulról korlátos, így létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n \geq L$. Tudjuk továbbá, hogy az (a_n) határértéke $+\infty$, így a $K - L$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > K - L$. Tehát $n \geq N$ esetén

$$a_n + b_n > K - L + L = K,$$

ahonnan következik az állítás.

2. Legyen $K > 0$ tetszőleges szám. Mivel (b_n)-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja, így létezik egy olyan $L \in \mathbb{R}^+$ szám és $N_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $b_n \geq L$. Tudjuk továbbá, hogy az (a_n) határértéke $+\infty$, ezért $\frac{K}{L}$-hez létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$

esetén $a_n \geq \frac{K}{L}$. Nézzük az esetet, ahol mindkét állítás teljesül, vagyis legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n \geq N$ indexekre

$$a_n \cdot b_n > \frac{K}{L} \cdot L = K,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\frac{K}{L} > 0$ és $L > 0$. Így következik az állítás.

A 3.-6. állítások a fentiekkel analóg módon beláthatók.

7. Nézzük először a $\lim(a_n) = +\infty$ esetet. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ebből

$$\frac{1}{a_n} = \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon,\ (n \geq N) \implies \lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0.$$

Ha $\lim(a_n) = -\infty$, akkor $\lim(-a_n) = +\infty$ (hisz a definícióból „idézve”: $a_n < P \implies -a_n > -P$, ahol $-P \in \mathbb{R}$), amiből

$$\lim\left(-\frac{1}{a_n}\right) = 0 \implies \lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0.$$

8. Az előzőhöz hasonlóan igazolható. $\square$

Célszerű lehet eredményeinket táblázat formájában összefoglalni az átláthatóság végett. Nézzük először az összeadást. Legyen $\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, és $\lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az $(a_n + b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:

	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B \in \mathbb{R}$	$A + B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$B = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

A táblázatban a ? helyén többfajta eshetőség van, később nézünk rá példát. Most írjuk fel az $(a_n b_n)$ határértékére vonatkozó táblázatot:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	0	0	0	?	?
$B < 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$B = -\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Végül pedig az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ határértékét vizsgáljuk.

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	A/B	0	A/B	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	?	?	?	?	?
$B < 0$	A/B	0	A/B	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	0	0	0	?	?
$B = -\infty$	0	0	0	?	?

Most kicsit ugorjunk vissza a tételhez, és vizsgáljuk meg benne az első állítást. A feltétel az volt többek közt, hogy (b_n) alulról korlátos legyen. Ez olyan esetben is előfordulhat, ha (b_n)-nek nem is létezik határértéke. Ilyen a klasszikus $(-1)^n$ sorozat. Legyen a másik sorozatunk az (n) sorozat, vagyis $(a_n) := n$, ami $+\infty$-hez tart. Könnyen ellenőrizhető a tétel igazsága erre az esetre is, tehát $\lim(n+(-1)^n) = +\infty$. Az állítás a közrefogási elv segítségével könnyen igazolható. Próbáljuk a sorozatot közrefogni végtelenbe tartó sorozatokkal. Tekintsük a $(\sqrt{n})$ sorozatot. Belátható, hogy $\lim(\sqrt{n}) = +\infty$, hisz szigorúan monoton nő és felülről nem korlátos. Azt sejtjük, hogy valamely természetes számtól kezdve teljesül, hogy $\sqrt{n} \leq n+(-1)^n$. Ez egyszerű behelyettesítgetésekkel megsejthető, ám mi itt precíz munkát végzünk, úgyhogy pontosan meghatározzuk melyik számtól teljesül ez az állítás. Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$n \leq n^2 + 2n \cdot (-1)^n + (-1)^{2n} = n^2 + 2n(-1)^n + 1,$$

ahol ha n páros, akkor

$$n \leq n^2 + 2n + 1,$$

ami nyilván minden természetes számra teljesül. Ha n páratlan, akkor

$$n \leq n^2 - 2n + 1 \implies 0 \leq n^2 - 3n + 1.$$

Most alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \implies n_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ n_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ismerve a másodfokú alakok függvényképét (parabola), onnan, hogy a kifejezés főegyütthatója pozitív tudjuk, hogy ez egy normál állású parabola. Meghatároztuk a parabola zérushelyeit, vagyis azokat a pontokat, ahol a függvény 0-t vesz fel. Nekünk arra van szükségünk, hol nagyobb, vagy egyenlő mint nulla. Mivel normál állású parabolánk van, ez pontosan akkor teljesül, ha $n \leq n_2$ vagy $n \geq n_1$. n_1 értéke 2 és 3 közé esik, és mivel n természetes szám, továbbá n_1-nél nagyobbnak kell lennie, így azt kapjuk, hogy $n \geq 3$, ha n páratlan. A páros eset minden természetes számra igaz volt, de mivel 3-nál nem kaphatunk kisebb páratlan számot, így a végső küszöb: $n \geq 2$.

Ott tartunk tehát, hogy $\forall n \geq 2$ esetén

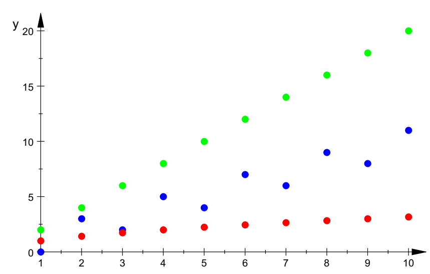
$$\sqrt{n} \leq n + (-1)^n.$$

Mivel a keresett sorozat n-edik tagja $n+1$ vagy $n-1$, így sejtésünk, hogy a $(2n)$ sorozat jó lesz felülről becsülni a sorozatot. Ám ezt ismét be kell látnunk.

$$n + (-1)^n \leq 2n \implies 0 \leq n - (-1)^n.$$

Páros esetben $n-1$ szerepel a jobb oldalon, ami $n \geq 1$ esetén minden természetes számra teljesül. Páratlan esetben $0 \leq n+1$ minden természetes számra teljesül. Összefoglalva tehát $n \geq 1$ esetén teljesül a becslés. Sikerült tehát a sorozatunkat közrefogni két végtelenbe tartó sorozattal, ahol $n \geq \max\{1, 2\} = 2$ indextől kezdve teljesül az állítás minden n-re, így a sorozatunk valóban $+\infty$-be tart még úgy is, hogy az összegben szereplő egyik sorozatnak határértéke sem volt.

A közrefogást szemléltetjük az alábbi ábrán:



3.8. ábra. A közrefogási elv alkalmazása. Az ábrán kékkel jelöltük az $n + (-1)^n$ sorozatot, pirossal a $\sqrt{n}$ sorozatot, zölddel pedig a $2n$ sorozatot.

Ígértük, hogy nézünk példát a kérdőjeles esetekre, miért nem egyértelmű azokban az esetekben a határérték. Vegyük példának a szorzásnál található

$A = +\infty$, $B = 0$ esetet. Legyen $(a_n) := n$, $(b_n) := \frac{1}{n}$. Ekkor a szorzatuk határértéke:

$$\lim\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim(1) = 1,$$

ám ha most $(b_n) = \frac{1}{n^2}$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim\left(n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

ha pedig ugyanezen (b_n) mellé $(a_n) = n^3$, akkor

$$\lim\left(n^3 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim(n) = +\infty,$$

így nem egyértelmű a határérték előállítása. A többi esetre hasonlóan lehet többértelműséget felfedezni.

Megismerkedtünk tehát a határérték és műveletek kapcsolatával kibővített értelemben. Most sorozatokból fogunk bizonyos módon újból sorozatokat képezni, és ezekre tekintjük meg a megfogalmazott tulajdonságokat. Emlékezzünk vissza a számtani-mértani-harmonikus-négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség bizonyítására. Jobban meggondolva ott az elemek sorozatok voltak éppúgy, mint a belőlük képzett közepek. Ezeket fogjuk most megvizsgálni elsősorban határérték szempontjából.

3.5.6. Sorozatok közép-sorozatai

3.15. Definíció. *Legyen (a_n) egy pozitív tagú sorozat, tehát bármely $n \in \mathbb{N}$-re $a_n > 0$. Képezzük ekkor (a_n)*

(a) számtaniközép-sorozatát mint

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+);$$

(b) mértaniközép-sorozatát mint

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+);$$

(c) harmonikusközép-sorozatát mint

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Világos, hogy a kapott közepek is sorozatok lesznek. Ha veszünk egy (a_n) sorozatot és abból szeretnénk képezni pl. A mértaniközép-sorozatot, akkor a kapott sorozat tagjai a következők lesznek:

$$G_1 = a_1,\ G_2 = \sqrt{a_1 a_2},\ G_3 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3},\ \ldots,\ G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},\ \ldots$$

Fogalmazzuk meg a közepek kapcsolatát az eredeti sorozat határértékével.

3.20. Tétel. *Ha* $\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$*, akkor a középsorozatok is* A*-hoz tartanak, vagyis*

$$\lim(A_n) = A,\ \lim(G_n) = A,\ \lim(H_n) = A.$$

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezzük attól függően, milyen értéket vesz fel A.

1. Legyen $A = 0$. Be kell látni, hogy a közép-sorozatok is nullsorozatok. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor $\varepsilon/2$-höz létezik olyan N_1 küszöbindex, hogy minden $n \geq N_1$ esetén
$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Rögzítsük le N_1-et is. Ebben az esetben $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N_1}|$ konstansként értelmezhető, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén
$$\frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2},$$
hisz itt a számláló és a jobb oldal is konkrét változatlan pozitív számok. Legyen most $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ha $n \geq N$, akkor az előzőek alapján
$$|A_n| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n} =$$
$$= \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \overset{(*)}{<}$$
$$\overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1)}{n} \overset{(**)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\frac{\varepsilon}{2} \cdot n}{n} = \varepsilon.$$
A $(*)$ lépést indokolja, hogy $(n - N_1)$ darab tagból áll a lépés előtti alakban a második tört számlálója, és minden egyes tag kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}$. A $(**)$ lépés magyarázata pedig, hogy mivel $(n - N_1)$-ből n lett, így értékét növeltük, tehát az egész kifejezés értéke nőtt. Innen már leolvasható, hogy (A_n) nullsorozat. Mivel tudjuk, hogy
$$0 \leq H_n \leq G_n \leq A_n, \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
így a közrefogási elv értelmében (H_n) és (G_n) is nullsorozatok lesznek, amit akartunk belátni.

2. Legyen most $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mivel pozitív tagú a sorozat, így $A > 0$ is teljesül. Ekkor

$$|A_n - A| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nA}{n}\right| =$$
$$= \left|\frac{a_1 - A + a_2 - A + \cdots + a_n - A}{n}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_n - A|}{n}.$$

Mivel $\lim(a_n) = A$, így $\lim(|a_n - A|) = 0$, és a kapott sorozat épp ennek a számtaniközép sorozata, így előzőek alapján ez is nullához tart. A rendőr elv alapján tehát $\lim(|A_n - A|) = 0$, vagyis $\lim(A_n) = A$.
Másrészt $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{A}$, és így az előbbieket $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim\left(\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right) = \frac{1}{A} \implies \lim(H_n) = \lim\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}\right) = A.$$

A rendőr-elv és a közepek közti egyenlőtlenség miatt $\lim(G_n) = A$ is teljesül.

3. Hátravan még az eset, miszerint $A = +\infty$ (világos, hogy $-\infty$ nem lehet hisz feltettük, hogy pozitív tagú sorozatról van szó). Tudjuk, hogy ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$. Használjuk fel a bizonyítás első részét.

$$\lim\left(\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right) = 0 \implies \lim(H_n) = \lim\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}\right) = +\infty.$$

Kihasználva a közepek közti egyenlőtlenséget ezt látjuk:

$$0 < H_n \leq G_n \leq A_n, \text{ ahol } \lim(H_n) = +\infty.$$

A rendezés és a határérték kapcsolatából tudjuk, hogy ekkor

$$\lim(G_n) \geq +\infty \text{ és } \lim(A_n) \geq +\infty,$$

ám ez csak úgy lehetséges, ha

$$\lim(G_n) = +\infty \text{ és } \lim(A_n) = +\infty,$$

így állításunkat igazoltuk. □

Most próbáljuk meg a kapott eredményeket alkalmazni a gyakorlatban. Legyen

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Határozzuk meg (a_n) határértékét. Nyilván a fenti alak átírható úgy, hogy

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}},$$

tehát (a_n) éppen az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat mértaniközép-sorozata, így a tanultak alapján $\lim(a_n) = 0$. Nézzünk most egy összetettebb példát. Legyen a sorozat a következő:

$$a_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mi lehet ennek a sorozatnak a határértéke? Emlékezzünk vissza arra a sorozatra, melynek határértékeként definiáltuk az e számot. Képezzük ennek a sorozatnak a mértaniközép-sorozatát:

$$\sqrt[n]{e_1 e_2 \cdot \ldots \cdot e_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}} \stackrel{(*)}{=} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

A $(*)$ lépést az igazolja, hogy ha elkezdjük sorban elölről összeszorozni a tagokat vegyük észre, hogy egyszerűsítés után a számláló mindíg meg fog egyezni az utóbbi tag számlálójával, a nevezőben pedig kiesik a kitevő. Így a számláló $(n+1)^n$ lesz végül, tehát n-edik gyököt vonva kapjuk az alakot. Mivel a nevezőben kiesnek a kitevők, így végül összeszorzás után $n!$ marad. Mivel a mértaniközép-sorozat is ugyanahhoz az értékhez konvergál mint az eredeti sorozat, így a kapott tört is e-hez fog konvergálni. Innen pedig:

$$\lim(a_n) = \lim\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \lim\left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right) =$$

$$= \lim\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right] = (1-0) \cdot e = e.$$

Megjegyzés. Az e szám értéke megközelítőleg $2,72$. Később belátjuk, hogy ez a szám irracionális.

3.5.7. Nevezetes sorozathatárértékek

Most foglaljuk össze pontokba szedve a nevezetesebb határértékeket, melyeket a gyakorlatban komplexebb határértékek megállapítására használhatunk fel. Megemlítünk olyanokat is, melyekről eddig nem volt szó, azokat természetesen be is bizonyítjuk.

1.
$$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Ezt az állítást korábban már beláttuk.

2.
$$\lim(\sqrt[n]{n}) = 1.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során felhasználjuk a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget. Ha $n \geq 2$, akkor

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{n-2}} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+n-2}{n} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Innen pedig tudjuk, hogy

$$\lim\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Így közrefogás segítségével igazoltuk állításunkat. □

3.
$$\lim(\sqrt[n]{a}) = 1 \qquad (a \in \mathbb{R}^+).$$

Bizonyítás. Az arkhimédeszi-tulajdonságból következik, hogy $\exists N \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{N} < a < N$. Legyen $n \geq N$. Ekkor

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < a < N \leq n \implies \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Tudjuk, hogy $\lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \left(\frac{1}{1}\right) = 1$, így a közrefogás alapján bizonyítottuk állításunkat. □

4. Most mértani sorozat határértékét vizsgáljuk.

$$\lim(q^n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ +\infty, & \text{ha } q > 1, \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. $q = 1$ esetben az állítás triviális. Ha $0 < q < 1$, akkor könnyen láthatóan (q^n) szigorúan monoton csökkenő sorozat, és mivel alulról korlátos (nulla egy alsó korlát), ezért tudjuk, hogy az infímumához tart. Belátjuk, hogy az infímum a nulla. Indirekt úton tegyük fel, hogy az infímum egy $a > 0$ érték. A csökkenés miatt kapjuk, hogy $q^n \geq a$, vagyis $q \geq \sqrt[n]{a}$, ez utóbbi egyhez tart, tehát azt kapjuk, hogy $q \geq 1$, ez pedig ellentmondás, hisz feltettük, hogy $q < 1$. Innen tehát $\lim(q^n) = 0$.

Ha $-1 < q \leq 0$, akkor az előbbiek szerint a sorozat abszolút értéke nullához tart, így az eredeti sorozat is.

$q > 1$ esetben $\lim \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$, ebből pedig $\lim(q^n) = +\infty$, hisz a sorozat pozitív tagú.

$q \leq -1$ esetben a sorozatnak létezik $+\infty$-hez és $-\infty$-hez tartó részsorozata, pl. csak a páros tagok sorozata $+\infty$-hez, a csak páratlanoké pedig $-\infty$-hez tart. Így állításunkat igazoltuk. □

5.
$$\lim(n^k \cdot q^n) = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z},\ |q| < 1).$$

Bizonyítás. Elég belátnunk a $0 < q < 1$ esetet, ebből következik a másik is. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k \cdot q^{n+1}}{n^k \cdot q^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot q \to (1+0)^k \cdot q = q < 1,$$

ezért elég nagy n-re $a_{n+1} < a_n$, tehát a sorozat szigorúan monoton csökken, így az infímumhoz tart (korlátos, hisz 0 egy alsó korlát, hisz n^k és q^n is pozitívak). Belátjuk, hogy az infímum a nulla. Indirekt úton tegyük fel, hogy az infímum egy $a > 0$ érték. Ekkor

$$a \leq n^k \cdot q^n \iff \sqrt[n]{a} \leq (\sqrt[n]{n})^k \cdot q.$$

Ebből pedig az következik, hogy

$$\lim(\sqrt[n]{a}) = 1 \leq q = \lim\left[(\sqrt[n]{n})^k \cdot q\right],$$

ez pedig ellentmondás. A negatív eset abszolút értéke ez az eset, amiből meg következik az állítás, így mindent igazoltunk. □

6.

$$\lim\left(\frac{n^k}{a^n}\right) = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z},\ a > 1).$$

Bizonyítás. Az előző állítást $q = \frac{1}{a}$-ként alkalmazva azonnal adódik az állítás. □

7.

$$\lim\left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Elég a sorozat abszolút értékéről megmutatni, hogy nullsorozat. Legyen N tetszőleges $|a|$-nál nagyobb egész, és $n > N$. A felső becslést a nevező csökkentésével végezzük, az $n!$ tényezői közül az N-nél nagyobbak mindegyikét N-re cseréljük.

$$0 \le \frac{|a^n|}{n!} \le \frac{|a|^n}{N! \cdot N^{n-N}} = \frac{|a|^n}{N! \cdot \frac{N^n}{N^N}} = \frac{1}{\frac{N^n}{N^N}} \cdot \frac{|a|^n}{N!} =$$

$$= \frac{N^N}{N^n} \cdot \frac{|a|^n}{N!} = \frac{N^N}{N!} \cdot \left(\frac{|a|}{N}\right)^n.$$

Az eredményül kapott sorozat nullsorozat, hisz $\frac{N^N}{N!}$ egy konstans érték, $\left(\frac{|a|}{N}\right)^n$ pedig nullsorozat, hisz $\frac{|a|}{N} < 1$ (mert $N > |a|$). Így állításunkat igazoltuk. □

8.

$$-1 < \lim(a_n) < 1 \implies \lim(a_n^n) = 0.$$

Bizonyítás. Ez egy igen érdekes és hasznos állítás a határérték vizsgálatában. Legyen $A := \lim(a_n)$, és q az $(|A|, 1)$ intervallum tetszőleges eleme. Ekkor valamely küszöbindextől kezdve minden n-re

$$|a_n| = |(a_n - A) + A| \le |a_n - A| + |A| \overset{(*)}{<} q - |A| + |A| = q,$$

A $(*)$ lépést indokolja, hogy $|a_n| < q$, hisz $|A| < q$ és minél nagyobb n-re az $|a_n|$-ek tetszőlegesen megközelítik $|A|$-t, míg q konstans marad. Innen leolvasható, hogy

$$|a_n^n| = |a_n|^n \le q^n.$$

Mivel $q \in (|A|, 1)$, ezért $q \in (-1, 1)$ is teljesül, így tudjuk, hogy a jobb oldal határértéke nulla. A sorozat alulról közrefogható a konstans nulla sorozattal, így azt kaptuk, hogy $\lim(|a_n^n|) = 0$, ebből meg már következik a bizonyítandó állítás. □

9.
$$\lim\left(\frac{n!}{n^n}\right)=0.$$

Bizonyítás. A bizonyításban felhasználjuk az előző állítást. Olyan (a_n^n) alakú sorozattal fogjuk közre felülről a sorozatot, melyre $\lim(a_n)=\frac{1}{2}$. Felhasználjuk továbbá a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget.

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{n^n}\le\frac{\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^n}{n^n}=\frac{\left(\frac{n(n+1)/2}{n}\right)^n}{n^n}=$$
$$=\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2n}\right)^n}{n^n}=\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n.$$

Jól látható a következő:
$$\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2},$$
így a tanult tétel alapján ennek n-edik hatványa nullsorozat, ezzel állításunkat igazoltuk. □

10.
$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Ez a már jól ismert Euler-sorozat egyféle általánosítása. Legyen (a_n) tetszőleges sorozat, melyre $\lim(a_n)=+\infty$. Jelölje a_n egészrészét $[a_n]$. Ekkor

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]}\le\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\le\left(\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

Most a bal illetve jobb oldalon az $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$, illetve $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ egy-egy részsorozata áll, melyek mindegyike e-hez konvergál, így

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

Ha $x>0$, akkor legyen a választott sorozat $a_n:=\frac{n}{x}$. Jól láthatóan ez végtelenbe konvergál. Így az előzőek alapján

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^x.$$

Az $x=0$ eset triviális. Ha x negatív, akkor $a_n:=\frac{-n}{x}$ választással teljesen hasonlóan igazolható az állítás. □

11.
$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)=0.$$

Bizonyítás. Korábban beláttuk. □

12.
$$\lim\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e.$$

Bizonyítás. Korábban beláttuk. □

3.5.8. Valós számok valós kitevőjű hatványai

Korábban ígértük, hogy definiáljuk egy tetszőleges valós szám irracionális kitevőjű hatványait is. Természetesen a hatványozástól elvárt tulajdonságok érvényben maradnak. Mindenek előtt mondjunk ki néhány állítást.

3.3. Állítás. *Legyen $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Ha $a > 1$, akkor*

$$a^r < a^s,$$

ha pedig $0 < a < 1$, akkor
$$a^r > a^s.$$

Legyen $0 < a < b$ és $r \in \mathbb{Q}$. Ha $r > 0$, akkor

$$a^r < b^r,$$

ha pedig $r < 0$, akkor
$$a^r > b^r.$$

Bizonyítás. Legyen először $a > 1$. A hatványozás azonosságaiból és a valós számok rendezési tulajdonságaiból következik, hogy

$$a^r < a^s \iff 1 < \frac{a^s}{a^r} = a^{s-r},$$

ezért elég belátni, hogy ha $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, akkor $a^p > 1$. Legyen $p = \frac{n}{m}$, $m \neq 0$. Ekkor
$$a^p = a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Mivel $a > 1$, így a hatványozás tulajdonságai és a rendezés alapján $a^n > 1$ is teljesül. Tegyük most fel indirekt úton, hogy $\sqrt[m]{a^n} \leq 1$. Ekkor

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n \leq 1,$$

ami ellentmondás, hisz feltettük, hogy $a > 1$. A $0 < a < 1$ eset teljesen hasonlóan látható be.
Ha $0 < a < b$, akkor

$$a^r < b^r \iff 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^r,$$

ahol $\frac{b}{a} > 1$ és $r > 0$. Ez a bizonyítás első része alapján adódik. Hasonlóan gondolható meg az $r < 0$ eset is. □

Most kanyarodjunk vissza a központi témánkhoz, a sorozatokhoz és a konvergenciához. Meg fogjuk mutatni, hogy bármely valós számhoz fogunk találni olyan racionális számokból álló sorozatot, mely az adott számhoz konvergál.

3.4. Állítás. *Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor található olyan $(r_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ szigorúan monoton növekedő sorozat, melyre* $\lim(r_n) = x$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy bármely nyílt intervallumban található racionális szám, így az $(x-1, x)$ intervallumban is, tehát

$$\exists r_1 \in (x-1, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Világos, hogy $(r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x)$ egy nyílt intervallum. Ezért igaz, hogy

$$\exists r_2 \in (r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Hasonlóan,

$$\exists r_3 \in (r_2, x) \cap (x - \frac{1}{3}, x) \cap \mathbb{Q},$$

így tovább folytatva az eljárást, a racionális számoknak egy olyan $r_1, r_2, r_3, \ldots$ szigorúan monoton növő sorozatát kapjuk, melyre

$$0 < x - r_n < \frac{1}{n} \implies \lim(r_n) = x.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk. □

Most megvizsgáljuk mi történik ha a sorozat tagjai egy tetszőleges konstans érték kitevőjeként szerepelnek.

3.5. Állítás. *Legyen (r_n) egy racionális számokból álló nullsorozat, és $a > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$\lim(a^{r_n}) = 1.$$

Bizonyítás. Jól láthatóan olyan viselkedést igyekszünk bebizonyítani, mint sima számok között, tehát mintha az r_n kitevő (nullsorozat lévén) a konstans nulla érték lenne, ekkor bármely pozitív szám kitevőjeként egyet kapunk. Belátjuk hogy ez határértékekre is teljesül, később pedig mindezt tovább általánosítjuk.
Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Tudjuk, hogy $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = \lim\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = 1$, ezért pedig $\lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right) = \lim\left(a^{-\frac{1}{n}}\right) = 1$ is teljesül. Így ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöb, hogy $\forall n \geq N$ esetén

$$a^{\frac{1}{n}},\, a^{-\frac{1}{n}} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon),$$

speciálisan

$$a^{\frac{1}{N}},\, a^{-\frac{1}{N}} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon).$$

Mivel $\lim(r_n) = 0$, így $\frac{1}{N} > 0$-hoz létezik olyan $K \in \mathbb{N}$ küszöb, hogy $\forall k \geq K$ esetén

$$-\frac{1}{N} < r_k < \frac{1}{N}.$$

Innen pedig a következők olvashatók le ($a > 1$, $k \geq K$):

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{r_k} < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon.$$

Innen pedig látszik, hogy $\lim(a^{r_n}) = 1$. A $0 < a < 1$ eset könnyen meggondolható abból, hogy ilyenkor $\frac{1}{a} > 1$. □

Mit veszünk észre ebben a bizonyításban? Azt, hogy a racionális számokból álló sorozat megválasztása tetszőleges, vagyis:

3.6. Állítás. *Tetszőleges* (r_n), (q_n) *szigorúan monoton növekvő racionális sorozatokra, melyekre* $\lim(r_n) = \lim(q_n) = x$*:*

$$\lim(a^{r_n}) = \lim(a^{q_n}).$$

Bizonyítás. Legyen $s_n := r_n - q_n$, ekkor tudjuk, hogy (s_n) racionális számokból álló nullsorozat. Ekkor az előző állítás alapján

$$\frac{a^{r_n}}{a^{q_n}} = a^{r_n - q_n} = a^{s_n} \to 1.$$

Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $\lim(a^{r_n}) = \lim(a^{q_n})$. □

Most pedig megmutatjuk, hogy a valós kitevőjű hatványozás visszavezethető sorozathatárértékekre.

3.7. Állítás. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a hatványozás azonosságai érvényben maradnak valós kitevős hatványokra is, tehát bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$;

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

Továbbá érvényben maradnak a rendezési tulajdonságok is $r, s \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Az első állítást bizonyítjuk, a többi teljesen analóg módon adódik. Mint mondtuk, határérték segítségével bizonyítunk. Legyenek $(r_n), (q_n)$ szigorúan monoton növekedő racionális sorozatok, melyre $\lim(r_n) = x$ és $\lim(q_n) = y$. Nyilván ekkor $\lim(r_n + q_n) = x + y$ és $(r_n + q_n)$ is szigorúan monoton növekedő. A definíció alapján, és kihasználva a határérték és műveletek kapcsolatát:

$$a^x \cdot a^y = (\lim(a^{r_n})) \cdot (\lim(a^{q_n})) = \lim(a^{r_n} \cdot a^{q_n}) = \lim(a^{r_n + q_n}) = a^{x+y},$$

ahol alkalmaztuk a racionális kitevős hatványozás azonosságát. □

Ennek az állításnak egy következménye, hogy a továbbiakban, ha a^x-et akarjuk közelíteni, vehetünk tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim(x_n) = x$ sorozatot.

3.8. Állítás. *Ha $a > 0$ és $\lim(x_n) = x$ tetszőleges valós sorozat, akkor*

$$\lim(a^{x_n}) = a^x.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságai alapján

$$\lim(a^{x_n}) = a^x \iff \lim\left(\frac{a^{x_n}}{a^x}\right) = \lim(a^{x_n - x}) = 1.$$

Tudjuk, hogy $\lim(x_n - x) = 0$, és ezek alapján azt is, hogy $\lim(a^{x_n - x}) = 1$ (ebben a bizonyításban sehol sincs kihasználva, hogy a kitevők racionálisak). □

Végül pedig kimondunk egy fontos állítást a határérték és hatványozás kapcsolatáról valós kitevőre.

3.9. Állítás. *Legyen (a_n) valós sorozat, $a_n, A > 0$ és $\lim(a_n) = A$. Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim(a_n^x) = A^x.$$

Bizonyítás. Legyen először $x > 0$. Ekkor mint tudjuk, elég a következőt belátni:

$$\lim\left(\frac{a_n^x}{A^x}\right) = \lim\left(\frac{a_n}{A}\right)^x = 1,$$

ahol

$$b_n := \frac{a_n}{A} \to 1.$$

Belátjuk, hogy $\lim(b_n^x) = 1$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$. Ekkor felhasználva hogy $\frac{1}{x} > 0$, és alkalmazva az eddigieket kapjuk, hogy

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x}} < 1 < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}}.$$

Mivel $\lim(b_n) = 1$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöb, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x}} < b_n < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}} \implies 1-\varepsilon < b_n^x < 1+\varepsilon,$$

hisz $x > 0$. Így tehát $\lim(b_n^x) = 1$. Az $x < 0$ eset következik abból, hogy egy 1-hez tartó sorozat reciproka is 1-hez tart. □

3.5.9. Gyökvonás rekurzív sorozattal

A sorozatokat befejező alfejezetünkben rátérünk egy szám valamely gyökének meghatározására, mégpedig rekurzióval megadott sorozat segítségével.

3.21. Tétel. *Legyen $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor*

1. $\forall A > 0 : \exists! \alpha > 0 : \alpha^m = A$, ahol az α szám az A m-edik gyöke;

$$\alpha = \sqrt[m]{A} = A^{\frac{1}{m}};$$

2. Definiáljuk a következő (x_n) rekurzív sorozatot. Legyen $x_0 > 0$ tetszőleges valós szám, továbbá

$$x_{n+1} := \frac{1}{m}\left(\frac{A}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n\right).$$

Ekkor ez a sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = \alpha$.

Bizonyítás. Jól láthatóan a sorozat minden tagja pozitív. Belátjuk hogy a sorozat monoton és korlátos, innen következik a konvergencia. Elsőnek nézzük a korlátosságot, felhasználva a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget.

$$x_{n+1}^m = \left(\frac{\frac{A}{x_n^{m-1}} + x_n + \cdots + x_n}{m}\right)^m \geq \frac{A}{x_n^{m-1}} \cdot x_n \cdot \ldots \cdot x_n = A > 0.$$

Innen látjuk, hogy a sorozat alulról korlátos, így azt kell még belátnunk, hogy monoton csökken, tehát

$$x_{n+1} \le x_n \iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \le 1.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{m}\left(\frac{\frac{A}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n}{x_n}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{x_n^m} + \frac{(m-1)x_n}{x_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{A}{x_n^m} + m - 1\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{A - x_n^m}{x_n^m} + m\right) = \underbrace{\frac{A - x_n^m}{m x_n^m}}_{\le 0} + 1 \implies \frac{x_{n+1}}{x_n} \le 1.$$

A jelzésnél a tört azért kisebb vagy egyenlő nullával, mert $x_n^m \ge A$. Így a sorozat monoton csökken, tehát konvergens, $\alpha := \lim(x_n) \ge 0$, hisz minden tagra $x_n > 0$ de $\alpha = 0$ nem lehet (hisz $A > 0$), így $\alpha > 0$ teljesül.

Még hátravan annak igazolása, hogy valóban $\alpha^m = A$. Tudjuk azt, hogy $\lim(x_n) = \alpha$, ekkor a sorozat tetszőlegesen nagy tagjai már azonosíthatók α-val, a tanult azonosságok alapján felírható a következő:

$$\alpha = \lim(x_n) = \lim\left[\frac{1}{m}\left(\frac{A}{x_{n-1}^{m-1}} + (m-1)x_{n-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right) = \frac{A}{m\alpha^{m-1}} + \frac{(m-1)\alpha}{m} =$$

$$= \frac{A + (m-1)\alpha^m}{m\alpha^{m-1}}.$$

Nézzük a kapott egyenlőséget, alakítsuk át:

$$\alpha = \frac{A + (m-1)\alpha^m}{m\alpha^{m-1}} \implies m\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \implies$$

$$\implies m\alpha^m = A + m\alpha^m - \alpha^m \implies \underline{\alpha^m = A} \implies \underline{\alpha = \sqrt[m]{A}},$$

így állításunkat igazoltuk. □

Megjegyzés. A fenti módszert alkalmazzák numerikus algoritmusként gyökvonás elvégzésére számítógépeken. A fenti algoritmus egy általános numerikus eljárásnak, az ún. Newton-féle módszernek egy speciális esete. A módszer sebességét (tehát hogy hány lépésben közelíti meg a pontos gyököt) szemléltetjük a $\sqrt{2}$ közelítő kiszámításával, $x_0 := 2$ értékből kiindulva:

$x_0 = 2,00000000000000\ldots$ $x_1 = 1.50000000000000\ldots$ $x_2 = 1.41666666666666\ldots$

$x_3 = 1.41421568627451\ldots$ $x_4 = 1.41421356237469\ldots$ $x_5 = 1.414213562373095\ldots$

4. fejezet

Sorok

„Végy egy egyméteres botot, vágd szét két feleakkora hosszúságú darabra, majd az így kapott botok egyikét megint felezd meg! Ugye tudod még követni: ekkor egy félméteres és két 25 centis darabod van. Folytasd ezt a műveletsort értelemszerűen, vagyis a felezéssel kapott darabok egyikét mindig felezd tovább! Talán mások is próbálták már végiggondoltatni veled, hogy így kaphatsz egy végtelenül kicsi fadarabot."
(Ittzés András)

Az elkövetkezendő fejezetben sokat fogunk végtelen dolgokon elmélkedni. Elképzelhető, hogy végtelen sok számot szeretnénk összeadni, általában olyanokat, melyek bizonyos dolgokban hasonlítanak egymáshoz. Meglepő lehet, de sokszor végtelen sok szám összege nem lesz végtelen, hanem egy konkrét, jól meghatározható érték. A sorok tulajdonképpen összegekből álló sorozatok.

4.1. Végtelen sorok

Térjünk vissza a korábbi rudas példánkhoz. Emlékezzünk rá, hogy azzal, hogy az 1 méteres rudat megfeleztük, majd az egyik felet ismét megfeleztük és így tovább, a rúdhosszak egy

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{2^n}, \dots$$

sorozatához jutottunk. Most tegyük fel, hogy ezeket a darabokat össze szeretnénk illeszteni, azaz az

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

összeget szeretnénk értelmezni. Tekintsük a már összeillesztett rúd hosszát lépésenként:
1. lépés:

$$\frac{1}{2}$$

2. lépés:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$$

3. lépés:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$$

$\vdots$

n. lépés:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$\vdots$

Tekintsük most ezeket a lépéseket egy sorozat tagjainak. Ezeket fogjuk végtelen sornak nevezni.

4.1. Definíció. *Legyen (a_n) tetszőleges sorozat. Készítsük el az*

$$S_1 := a_1;\ S_2 := a_1+a_2;\ S_3 := a_1+a_2+a_3;\ \ldots;\ S_n := a_1+a_2+\cdots+a_n;\ldots$$

összegek sorozatát. A kapott (S_n) sorozatot (végtelen) sornak nevezzük, és $\sum a_n$-nel jelöljük, tehát

$$\sum a_n := (S_n).$$

Ennek a sornak egy adott n-edik elemét, tehát S_n-et az (a_n) sorozat n-edik részletösszegének nevezzük.

Ezek alapján tehát a sor is egy sorozat, így értelmezzük rajta a konvergenciát.

4.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, ha az (S_n) sorozat konvergens. $\sum a_n$ divergens, ha az (S_n) divergens.*

4.3. Definíció. *Ha az (S_n) sorozatnak létezik határértéke (véges vagy végtelen), akkor a $\sum a_n$ végtelen sor végtelenben vett összegén a részletösszeg-sorozat határértékét értjük, jelölésben:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim(S_n).$$

Nagyon fontos, hogy ne keverjük a fogalmakat! A $\sum a_n$ jelölés egy sort takar, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pedig egy értéket! Sokan összetévesztik azt is, hogy melyik sorozat határértékét kell számolni a sor összegének meghatározásakor. Erre nézünk most egy példát.

Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Tekintsük a (q^n) sorozatot, és készítsük el az ehhez a sorozathoz tartozó sort. Írjuk fel ennek a sornak az n-edik tagját, tehát az n-edik részletösszeget ($n \geq 0$):

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

A sorozatoknál az S_n meghatározásánál q^n szerepelt a képletben itt pedig q^{n+1}, ennek az az oka, hogy most 0-tól indexelünk. Meg szeretnénk határozni ennek a sornak az összegét, és mint mondtuk, ez éppen a részletösszeg-sorozat határértéke, tehát a

$$\lim\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)\text{-t keressük, nem pedig a } \lim(q^n)\text{-t!}$$

Ez utóbbiról tudjuk, hogy nullsorozat, hisz most $|q| < 1$. Innen tehát

$$\lim\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Mértani sornak nevezzük a fenti példát, összegét gyakran alkalmazzuk. Vegyük észre, hogy amennyiben $q \geq 1$, úgy a részletösszeg-sorozat határértéke $+\infty$, így az összeg is, tehát ebben az esetben

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty.$$

Amennyiben $q \leq -1$, úgy (q^n)-nek nincs határértéke, és mivel még csak nem is korlátos, így a részletösszeg-sorozatnak sem lesz, tehát az összeg értelmezhetetlen, nem létezik. Ebbe bele is gondolhatunk: az 1-ből indulunk, elveszünk belőle egy nála nagyobb vagy egyenlő számot, majd a kapott értékhez hozzáadunk egy még annál is nagyobb vagy egyenlőt, és így tovább váltakozva, az összeg a végtelenben értelmezhetetlen, nem egyértelmű. Itt érezhető leginkább a különbség a sorösszeg és a részletösszeg között, hisz részletösszege természetesen létezik ennek a sorozatnak, általános összeg mégsem adható.

4.2. Nevezetes sorok

Nézzük meg a nevezetes sorokat, és a hozzájuk tartozó összegeket részletes bizonyítással. A mértani sor esetét már láttuk, nézzük a többit.

1. A $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (*teleszkopikus*) sor konvergens, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   Bizonyítás. Írjuk fel az n-edik részletösszeget:

   $$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

   Vegyük észre a következő összefüggést:

   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

   Ennek értelmében írjuk át a fenti összeget:

   $$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

   Így már könnyedén leolvasható a határérték, állításunkat beláttuk. □

2. A $\sum \frac{1}{n}$ (*harmonikus*) sor divergens.

   Bizonyítás. Látjuk, hogy a sor tagjai szigorúan monoton nőnek, így azt kell belátnunk, hogy (S_n) felülről nem korlátos, tehát $\lim(S_n) = +\infty$. Zárójelezzük az összeget úgy, hogy az $\frac{1}{2^k+1}$ alakú tagtól $\frac{1}{2^k+2^k}$ alakú tagig tartson egy zárójel, tehát:

   $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
   $$\cdots + \left(\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k}\right) + \cdots + \frac{1}{n}.$$

   Vizsgáljunk meg a zárójeleket. Minden zárójelben a legutolsó tag a legkisebb, és 2^k darab elemből állnak a zárójelek a k aktuális értékétől függően (a k értéke annyi, ahanyadik zárójelben vagyunk). Ezek alapján a zárójelek értéke alulról becsülhető:

$$\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k} \geq 2^k \cdot \frac{1}{2^k+2^k} = \frac{1}{2}.$$

Így azt állapíthatjuk meg, hogy minden zárójelben az összeg értéke legalább $\frac{1}{2}$, a végtelen összegben pedig végtelen sok zárójel van, így a sorösszeg $+\infty$, tehát a sor divergens. $\square$

3. A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.

Bizonyítás. Meglepő lehet az előző sor után, hogy ez lehet konvergens, pedig az. Az összeg mellesleg $\frac{\pi^2}{6}$, ennek belátása komolyabb feladat, egyelőre csak azt látjuk be, hogy semmiképp sem nagyobb kettőnél. Már ránézésre látszik, hogy a részletösszeg-sorozat szigorúan monoton nő, ám írjunk fel mindent részletesen:

$$S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}.$$

Ez a becslés teljesül, hisz tetszőleges $n \geq 2$ szám esetén

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n}, \text{ hisz innen } 1 \leq \frac{n}{n-1}$$

következik, ami teljesül, hisz minden legalább 2 számot osztva a nála 1-gyel kisebbel az legalább egyszer biztosan megvan benne. Látható az is, hogy 1-re nem teljesül a becslés hisz nullával való osztást eredményezne, negatív számokkal most nem foglalkozunk, hisz az most nincs. Írjuk át az összeget a teleszkopikus sornál látott módszer segítségével:

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} = 1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n} < 2,$$

így a monoton növekedés mellé találtunk felső korlátot, tehát a sor konvergens, a felső korlát pedig éppen az, amit vártunk. $\square$

4. A $\sum \frac{1}{n!}$ sor konvergens, és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Bizonyítás. Ez az e szám előállítása sorösszeg segítségével. Azt, hogy a sor konvergens, hasonlóan bizonyítjuk mint az előbbi sornál.

$$S_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}=3-\frac{1}{n}<3.$$

Mivel a részletösszeg-sorozat még monoton nő is, így beláttuk, hogy konvergens. Most azt kell belátni, hogy a sor összege éppen az e szám, tehát hogy a

$$x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \text{ és az } y_n := 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

sorozatok határértéke megegyezik. Az alapvető észrevétel, hogy fennállnak az

$$x_n \leq y_n \leq e \qquad (*)$$

egyenlőtlenségek. Ha sikerül belátni, akkor a rendőr-elv alapján állításunkat igazoltuk. Elsőnek nézzük a bal oldali egyenlőtlenséget. A binomiális tétel alapján a tételben szereplő $(a+b)$-t $(b+a)$-ként alkalmazva

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}.$$

Az összeg tagjait $k=1,2,\dots,n$ esetén így alakítjuk át:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{n^k(n-k)!}\cdot\frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{n^k}}\cdot\frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Ezt felhasználva kapjuk ha $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = y_n.$$

Írjuk fel az oldalakat tagonként:

$$x_n = 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{6}+\dots$$

$$y_n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots$$

Látható az egyenlőtlenség, hisz egy tagig egyenlőek, onnan pedig y_n tagjait a bal oldalon 1-nél kisebb számokkal szorozzuk, így értéke csökken. Ezzel tehát $(*)$ bal oldali egyenlőtlenségét beláttuk. Most nézzük a másikat. Rögzítsük az $n \in \mathbb{N}$ számot, és legyen m egy n-nél nagyobb tetszőleges természetes szám. Az előzőek alapján

$$x_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \frac{1}{k!}.$$

Ez egy $m+1$ tagú összeg, melynek minden tagja pozitív, ezért értéke csökken, ha csak az első $n+1$ tagot tartjuk meg, azaz

$$x_m > 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \frac{1}{k!} \qquad (m > n).$$

Ne feledjük, hogy az n egy rögzített érték volt, így a jobb oldalon pontosan $n+1$ tag szerepel. Az m érték végtelenbe tart (hisz nem rögzítettük), ekkor az összegben minden tag $\frac{1}{k!}$-hoz fog tartani (hisz a szorzatban a többi egyhez), így a jobb oldal y_n-hez tart. Tudjuk továbbá, hogy a bal oldal e-hez tart, így a rendezés és a határérték kapcsolata értelmében $e \geq y_n$ $(n \in \mathbb{N})$, így a jobb oldali egyenlőtlenség is teljesül, így a közrefogási-elv értelmében állításunkat beláttuk. □

4.3. Sorok és műveletek kapcsolata

Sejthető, hogy sorok összegei között definiálhatóak a műveletek a várt módon. Ezeket fogjuk most kimondani és belátni.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}},\ c \in \mathbb{R}.\ \text{Ekkor}$$

(a)

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot A;$$

(b)

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B,\ \text{ha az összeg értelmezett.}$$

Bizonyítás. A részletösszegeket jelölje S_n és T_n, tehát

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \;\; T_n := b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

A feltételek szerint ekkor $\lim(S_n) = A$ és $\lim(T_n) = B$. Nézzük most az állításokat sorban.

(a) Írjuk fel $\sum(c \cdot a_n)$ sor n-edik részletösszegét:

$$U_n = (c \cdot a_1) + \cdots + (c \cdot a_n) = c \cdot (a_1 + \cdots + a_n) = c \cdot S_n.$$

Ebből az következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = \lim(U_n) = c \cdot \lim(S_n) = c \cdot A = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Írjuk most fel $\sum(a_n + b_n)$ n-edik részletösszegét:

$$V_n = (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + \cdots a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = S_n + T_n.$$

Ebből pedig következtethető, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim(V_n) = \lim(S_n) + \lim(T_n) = A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

így állításunkat beláttuk. $\square$

4.4. Cauchy-kritérium sorokra

Hasonlóan a sorozatokról tanultaknál, soroknál is kimondható a Cauchy-kritérium, vegyük észre, hogy lényegében ugyanaz a kritérium, mint sorozatok esetében, csak sorokra megfogalmazva.

4.2. Tétel. *A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 \, (m, n \in \mathbb{N}) : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha (S_n) konvergens, ami egy sima sorozat, így felírható rá a Cauchy-kritérium:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 \, (m, n \in \mathbb{N}) : |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Fejtsük ki az abszolút-értékes kifejezést:

$$|S_m - S_n| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m|,$$

így kapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

A Cauchy-kritérium tehát itt is szükséges és egyben elégséges feltételt is ad a konvergenciára. Következményként kapunk egy szükséges, ám nem elégséges feltételt is.

4.3. Tétel. *Ha* $\sum a_n$ *konvergens, akkor* $\lim(a_n) = 0$.

Bizonyítás. Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 \, (m, n \in \mathbb{N}) : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Legyen $m = n + 1$. Ekkor

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| = |a_m| < \varepsilon \implies \lim(a_n) = 0,$$

így állításunkat igazoltuk. □

Fontos, hogy ez csak szükséges, ám nem elégséges feltétel, hisz pl $\sum \frac{1}{n}$ divergens, mégis $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Erről a sorról már bizonyítottuk a divergenciát, ám most ezt tegyük meg ismét, a Cauchy-kritérium felhasználásával. Legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Ekkor bármely $N \in \mathbb{N}$ esetén $n = N$ és $m = 2N$ választással

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| = \left| \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \right| \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

így a Cauchy-kritérium nem teljesül, tehát a sor divergens. A gyakorlatban előfordulnak ún. abszolút konvergens sorok. A most következő definíciót és tételt hasonlóságuk ellenére azért ne keverjük össze.

4.4. Definíció. *A* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens, ha* $\sum |a_n|$ *konvergens.*

4.4. Tétel. *Ha* $\sum a_n$ *abszolút konvergens, akkor* $\sum a_n$ *konvergens.*

Bizonyítás. Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, így a Cauchy-kritérium alapján

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 \, (m, n \in \mathbb{N}) : ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|| =$$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon.$$

Itt $\sum a_n$ sorra is teljesül a kritérium, ugyanis a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon.$$

Így tehát állításunkat igazoltuk. □

4.5. Konvergencia-kritériumok

A gyakorlatban igen nehézkes eldönteni egy sor konvergenciáját a definíció, vagy a Cauchy-kritérium alapján, sőt általában a sor összegére nincs is szükségünk csupán arra, hogy a sor konvergens-e vagy sem. Neves matematikusok, mint Cauchy ill. D'Alembert kidolgoztak néhány nevezetes módszert, melynek segítségével nagyságrendekkel könnyebb egy sorról megítélni a konvergenciát. Elsőnek azt gondoljuk meg, hogy egy pozitív tagú sornak mindíg létezik összege.

4.1. Állítás. Ha $a_n \geq 0\,(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

mindíg létezik, mégpedig $A \in \mathbb{R}$ (tehát a sor konvergens), ha a részletösszegeiből álló (S_n) sorozat felülről korlátos, és $A = +\infty$, ha (S_n) felülről nem korlátos.

Bizonyítás. Mivel pozitív számokból képezzük a sort, így a részletösszeg-sorozat biztosan monoton nőni fog, így ha felülről korlátos is, akkor konvergens, ha pedig felülről nem korlátos, úgy a végtelenbe tart. □

Nézzük most az első kritériumot, az összehasonlító kritériumot.

4.5. Tétel. *(Összehasonlító kritérium). Tegyük fel, hogy (a_n), (b_n) olyan sorozatok, melyekre*

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\,(n \in \mathbb{N}) : 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

1. Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens (Majoráns kritérium);

2. Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens (Minoráns kritérium).

Bizonyítás. Legyen (S_n) az (a_n) részletösszeg-sorozata, (T_n) pedig a (b_n) részletösszeg-sorozata. Mivel a sorozatok pozitív tagúak, így (S_n) és (T_n) monoton növő sorozatok. Továbbá, a feltétel szerint ha $n \geq N$, úgy

$$S_n \leq T_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Ha $\sum b_n$ konvergens, úgy (T_n) konvergens, tehát felülről korlátos, így a fentiek miatt (S_n)-nek is korlátosnak kell lennie felülről, így a monoton növés miatt konvergens, tehát $\sum a_n$ konvergens.

2. Ha $\sum a_n$ divergens, úgy (S_n) nem korlátos felülről, így tehát a fentiek miatt (T_n) sem lesz korlátos felülről, tehát $\sum b_n$ divergens.

Így állításunkat igazoltuk. □

Példaként vehetjük az ún. hiperharmonikus sorok konvergenciájának eldöntését. Azt már láttuk, hogy $\sum \frac{1}{n}$ nem konvergens, viszont $\sum \frac{1}{n^2}$ már konvergens. Most azt állítjuk, hogy amennyiben $\alpha \geq 2$, úgy a

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

hiperharmonikus sor mindíg konvergens.

A bizonyításhoz az összehasonlító kritérium alapján felülről kell becsülnünk (majorálnunk) a $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ sorozatot. Kihasználva, hogy $\alpha \geq 2$ és $n \in \mathbb{N}^+$ kapjuk, hogy

$$n^\alpha \geq n^2 \implies \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2},$$

így sikerült felülről becsülni a sorozatunkat, és mivel $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, így a majoráns kritérium alapján $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ is konvergens.

4.6. Tétel. *(Cauchy-féle gyökkritérium): Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ sorra*

$$\exists \lim \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) =: A. \textit{ Ekkor}$$

a. Ha $0 \leq A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;

b. Ha $A > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens;

c. Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens is, divergens is.

Bizonyítás. Az állításokat sorban bizonyítjuk.

a. Tegyük fel, hogy $0 \leq A < 1$. Ekkor vegyünk egy tetszőleges q elemet az $(A, 1)$ intervallumból. Mivel $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ A-hoz konvergál, így van olyan n_0 küszöbindex, melytől kezdve $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ teljesül, hisz $A < q$. Így

$$\forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : |a_n| \leq q^n.$$

Mivel $|q| < 1$, így a $\sum q^n$ geometriai sor konvergens, amiből a majoráns kritérium alapján következik, hogy $\sum |a_n|$ konvergens, tehát $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b. Tegyük fel, hogy $A > 1$. Most a q értéket az $(1, A)$ intervallumból vegyük, így
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : \sqrt[n]{|a_n|} \geq q \implies |a_n| \geq q^n.$$
Mivel $q > 1$, így $\lim(q^n) = +\infty$, tehát (a_n) határértéke nem lehet nulla, így $\sum a_n$ divergens.

c. $A = 1$ esetében nem tudjuk eldönteni a konvergenciát. Tekintsük a $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Ekkor
$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}\right) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{1}{1} = 1,$$
és tudjuk, hogy a sor divergens. Most tekintsük a $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sorozatot. Erre alkalmazva a gyökkritériumot:
$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}\right) = \lim\left(\frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\right) = \frac{1}{1^2} = 1,$$
és a belőle képzett sor konvergens, így tehát $A = 1$ esete nem egyértelmű.

A kritériumot így igazoltuk. □

Nézzünk egy példát erre a kritériumra is. Állapítsuk meg, konvergens-e az alábbi sor:
$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n.$$
Jegyezzük meg, hogy a sorok jelölésében szokás kiírni a szumma alá a kezdőindexet, továbbra se keverjük össze a sorösszeggel. Jól láthatóan ebben a sorban nullától nem kezdhetünk indexelni a tört nevezője miatt. Alkalmazzuk tehát a gyökkritériumot.
$$\lim \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$
így tehát a sor konvergens. Nézzük meg végül a harmadik nagy kritériumot, a hányadoskritériumot.

4.7. Tétel. *(D'Alembert-féle hányadoskritérium): Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ sorra*
$$\exists \lim\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) =: A \text{ és } a_n \neq 0 \, (\forall n \in \mathbb{N}). \text{ Ekkor}$$

a. *Ha* $0 \leq A < 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;*

b. *Ha* $A > 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens;*

c. *Ha* $A = 1$, *akkor* $\sum a_n$ *lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Az állításokat sorban bizonyítjuk.

a. Tegyük fel, hogy $0 \leq A < 1$. Legyen ekkor $q \in (A, 1)$ tetszőleges. Ekkor az előző bizonyítás alapján

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q.$$

Legyen $n \geq n_0$. Ekkor

$$\begin{gathered} \tfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \implies |a_{n+1}| < q \cdot |a_n|; \\ \tfrac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|} < q \implies |a_{n+2}| < q \cdot |a_{n+1}| < q^2 \cdot |a_n|; \\ \vdots \\ \text{ezek alapján:} \\ |a_{n+1}| < q|a_n| < q^2|a_{n-1}| < \ldots < q^{n+1-n_0}|a_{n_0}| = \underbrace{q^{1-n_0}|a_{n_0}|}_{K \text{ konstans}} \cdot q^n \end{gathered}$$

Mivel $|q| < 1$, így $\sum q^n$ konvergens, így a konstansszoros, $\sum K \cdot q^n$ is konvergens. A majoráns kritérium alapján ekkor $\sum |a_n|$ is konvergens, tehát $\sum a_n$ abszolút konvergens.

b. Tegyük fel, hogy $A > 1$, és legyen $q \in (1, A)$ tetszőleges. A fentiek alapján

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \, (n \in \mathbb{N}) : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q.$$

Szintén az előző alapján felírható ha $n \geq n_0$, hogy

$$|a_{n+1}| > q^{n+1-n_0}|a_{n_0}| = \underbrace{q^{1-n_0}|a_{n_0}|}_{K \text{ konstans}} q^n.$$

Így azt kapjuk, hogy $|a_{n+1}| > Kq^n > K > 0$. Mivel Kq^n a végtelenbe tart (hisz most $q > 1$), így $|a_n|$ nem lehet nullsorozat, így tehát $\sum a_n$ divergens.

c. $A = 1$ esetén a konvergencia itt sem egyértelmű. Tekintsük ismét a $\sum \frac{1}{n}$ sort ami divergens és $A = 1$, hisz

$$\lim \left(\frac{\left|\frac{1}{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n}\right|} \right) = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor pedig konvergens, és itt is $A = 1$, hiszen

$$\lim \left(\frac{\left| \frac{1}{(n+1)^2} \right|}{\left| \frac{1}{n^2} \right|} \right) = \lim \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \lim \left(\frac{n^2}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right) = 1.$$

A kritériumot így igazoltuk. □

Vizsgáljuk meg egy sor konvergenciáját a hányadoskritérium segítségével. Döntsük el a következő sorról, hogy konvergens-e:

$$\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Írjuk fel a hányadost, és alakítsuk át:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)! \cdot (n+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot (n+1) \cdot (2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+2)} = \frac{(n+1)}{(2n+1) \cdot 2} = \frac{n+1}{4n+2}.$$

A kapott alak a domináns tagok miatt $\frac{1}{4}$-hez tart, így tehát a sor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

4.6. Leibniz-típusú sorok

A következőkben ún. alternáló sorokkal foglalkozunk, magyarán megvizsgáljuk azokat a sorokat konvergencia szepontjából, melyeknél az előjelek váltakozva szerepelnek. Ezekre vonatkozó tételt fogalmazott meg Leibniz.

4.8. Tétel. *(Leibniz-tétel). Legyen* (a_n) *egy szigorúan monoton csökkenő sorozat, melyre* $\lim(a_n) = 0$. *Ekkor a*

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$$

végtelen sor konvergens.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a részletösszegeket, külön a páros és páratlan indexűeket. Legyen $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll}
S_1 = a_1 & S_2 = a_1 - a_2 \\
S_3 = a_1 - a_2 + a_3 & S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\
\vdots & \vdots \\
S_{2k-1} = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2k-1} & S_{2k} = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k}.
\end{array}$$

Tudjuk, hogy (a_n) szigorúan monoton fogy, és nullsorozat, így $a_n > 0$ minden szóbajövő $n \in \mathbb{N}$-re. Így tehát

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & > & S_2 \\
S_3 & > & S_4 \\
& \vdots & \\
S_{2k-1} & > & S_{2k}.
\end{array}$$

Felhasználva az (a_n) sorozat monoton fogyását kapjuk, hogy

$$S_1 > S_3 > \ldots > S_{2k-1} > \ldots \quad \text{és} \quad S_2 < S_4 < \ldots < S_{2k} < \ldots$$

Így tehát azt látjuk, hogy (S_{2k-1}) és (S_{2k}) is korlátosak és monotonok, így konvergensek. A monotonitás a fenti összefüggésekből látszik, a korlátosság pedig az afeletti összefüggésekből, hisz pl. az $S_{2\ell-1}$ tagja a páratlanok sorozatának minden szóbajövő ℓ-re nagyobb, mint az $S_{2\ell}$ érték, és ez a párosok tagjaira is igaz fordított relációval. Az is látszik, hogy (S_{2k-1}) szigorúan monoton csökken és alulról korlátos, (S_{2k}) pedig szigorúan monoton nő és felülről korlátos.

Vegyük észre, hogy $S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k}$, így

$$\lim(S_{2k-1} - S_{2k}) = \lim(a_{2k}) = 0,$$

hiszen $\lim(a_n) = 0$ és minden részsorozata is ekkor nullsorozat. Innen mit látunk? Két sorozat különbsége nullsorozat, így mindkét sorozat határértékének meg kell egyezzen:

$$\lim(S_{2k-1}) = \lim(S_{2k}) = A \in \mathbb{R},$$

így az (S_n) két részsorozata is ugyanoda konvergál, így $\lim(S_n) = A$, tehát $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ konvergens. $\square$

A fenti bizonyításból hasznos következtetés vonható le. Vegyük észre, hogy minden szóbajövő $k \in \mathbb{N}$-re $A \in [S_{2k}, S_{2k-1}]$, hisz (S_{2k}) alulról közelíti A-t, (S_{2k-1}) pedig felülről. Innen pedig

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{2k} \leq a_{2k-1} \quad \text{és} \quad |S_{2k} - A| \leq a_{2k},$$

hisz S_{2k} és S_{2k-1} értékek közti különbség a_{2k}, így az A értékkel vett különbségnek kisebbnek kell legyen hogy benne legyen az intervallumban. Innen pedig az látszik, hogy

$$|S_n - A| \leq a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A fenti összefüggést a Leibniz-sorok hibabecslésének nevezzük. Hasznos lehet a sorösszeg becslésekor. Pontosítsuk gyorsan, mit is értünk végeredményben Leibniz-soron:

4.5. Definíció. *Ha egy sor kielégíti a Leibniz-tétel feltételeit, vagyis*

$$\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$$

alakú, ahol (a_n) *szigorúan monoton csökkenő és nullsorozat, akkor Leibniz-sornak nevezzük.*

Jó példa Leibniz-sorra a következő sor:

$$\sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Vegyük észre, hogy a fenti sor (a Leibniz-tétel miatt) konvergens, de nem abszolút konvergens, hisz $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

4.6. Definíció. *Egy sort feltételesen konvergensnek nevezünk, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

4.7. Sorok átrendezése, zárójelezése

A sorok tulajdonképpen véges összegek általánosítása. Véges összegekről tudjuk, hogy tetszőlegesen zárójelezhetők (asszociatívak) és átrendezhetők (kommutatívak). Kérdés, hogy ezek a tulajdonságok milyen feltételek mellett lesznek érvényesek végtelen összegekre, a sorokra? Mindezek előtt definiáljuk mit értünk permutáció alatt.

4.7. Definíció. *Egy* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekciót (emlékeztető:* p *kölcsönösen egyértelmű és* $\mathcal{R}_p = \mathbb{N}$*) a természetes számok egy permutációjának nevezünk.*

Vegyük észre, hogy egy permutáció is egy a természetes számok halmazán értelmezett függvény, így sorozatként értelmezhető. Nézzük, mit értünk átrendezésen.

4.8. Definíció. *Legyenek adva az* (a_n), (b_n) *sorozatok. Azt mondjuk, hogy* (b_n) *az* (a_n) *sorozat egy átrendezése, ha létezik* p *permutációja a természetes számoknak, hogy* $(b_n) = (a_{p_n})$.

A következő tételeket bizonyítás nélkül mondjuk ki.

4.9. Tétel. *Legyen* $\sum a_n$ *abszolút konvergens sor. Ekkor minden* p *permutáció esetén* $\sum a_{p_n}$ *is abszolút konvergens, sőt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ezek szerint abszolút konvergens sorok hasonlóan átrendezhetők mint a véges összegek, és az átrendezés az összegen nem változtat. Ezzel szemben nehezebb a helyzet feltételesen konvergens sorok esetében.

4.10. Tétel. *Legyen* $\sum a_n$ *feltételesen konvergens sor. Ekkor*

1. Minden $A \in \mathbb{R}$ *számhoz létezik* p *permutáció, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A;$$

2. Létezik olyan p *permutáció, hogy* $\sum a_{p_n}$ *divergens.*

Tekintsük most egy végtelen sor valamilyen zárójelezését. Először definiájuk, mit értünk precízen zárójelezés alatt (most nullától indexelünk).

4.9. Definíció. *Legyen* (a_n) *tetszőleges sorozat,* (v_n) *pedig tetszőleges indexsorozat. Képezzük az alábbi sorozatot:*

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= a_0 + \cdots + a_{v_0}; \\ \alpha_1 &:= a_{v_0+1} + \cdots + a_{v_1}; \\ &\vdots \\ \alpha_n &:= \sum_{k=v_{n-1}+1}^{v_n} x_k. \end{aligned}$$

Ekkor a $\sum \alpha_n$ *sort a* $\sum a_n$ *sor egy zárójelezett sorának nevezzük.*

Értsük meg a definíciót. Az elnevezés látható az alábbi felírásból. A $\sum \alpha_n$ sor a $\sum a_n$ sorból zárójelezéssel adódik:

$$(a_0 + \cdots + a_{v_0}) + (a_{v_0+1} + \cdots + a_{v_1}) + \cdots$$

Így $\sum \alpha_n$ sor n-edik részletösszege a következőképp írható fel:

$$S_n := \alpha_0 + \cdots + \alpha_n = (a_0 + \cdots + a_{v_0}) + \cdots + (a_{v_{n-1}+1} + \cdots + a_{v_n}) =$$

$$= a_0 + \cdots + a_{v_n} = A_{v_n},$$

ahol A_{v_n}-nel jelöltük a (a_n) sorozat v_n-edik részletösszegét, így tehát ezek megegyeznek, innen adódik, hogy ha $\sum a_n$ konvergens, akkor a részletösszegeinek A_{v_n} részsorozata, következésképpen a $\sum \alpha_n$ is konvergens, és a két sor összege megegyezik. Ezzel az alábbi állítást igazoltuk:

4.11. Tétel. *Konvergens sor minden zárójelezése is konvergens, és az összeg a zárójelezéssel nem változik.*

Fontos megjegyezni, hogy ennek a tételnek a megfordítása csak bizonyos feltételek teljesülése mellett érvényes, tehát egy zárójelezett sorból a zárójelek elhagyásával kapott sor nem lesz mindíg konvergens, hiába a zárójelezett sor konvergens volt.

4.12. Tétel. *Ha a $\sum \alpha_n$ zárójelezett sor konvergens, és*

1. $(v_{n+1} - v_n)$ *sorozat korlátos;*

2. $\lim(a_n) = 0$,

akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.

4.8. Sorok szorzása

Definiáltuk már a sorokon végzett alapműveleteket, ám a szorzást még nem. Sorok szorzására többféle módszer is ismeretes. Először az ún. Cauchy-szorzattal fogunk megismerkedni. A sorokat itt is technikai okokból nullától indexeljük.

4.10. Definíció. *Legyenek $\sum a_n$, $\sum b_n$ végtelen sorok. Ekkor a két sor Cauchy-szorzatán azt a $\sum c_n$ sort értjük, ahol*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Cauchy-szorzatok konvergenciájára vonatkozik az ún. Mertens-tétel.

4.13. Tétel. *(Mertens-tétel). Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens, $\sum b_n$ konvergens végtelen sor. Ekkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens, továbbá*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

A tétel belátásához még előbb egy segédtételt kell kimondanunk és bebizonyítanunk.

4.1. Lemma. *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens sor és (x_n) nullsorozat, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_n x_0) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszunk egy K pozitív korlátot, melyre

$$|x_n| \le K,\ n \in \mathbb{N} \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \le K.$$

Mivel $\lim(x_n) = 0$, továbbá a $\sum |a_n|$ sorra teljesül a Cauchy-kritérium, így létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden nála nagyobb $n \in \mathbb{N}$-re

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } |a_{N+1}| + \dots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Ha $n > 2N$, akkor $n-k > N$ minden $0 \le k \le N$ esetén. Így a fentiek alapján

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} a_k x_{n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} a_k x_{n-k}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot |x_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \cdot |x_{n-k}| < \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \cdot K =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \sum_{k=0}^{N} |a_k| + K \cdot \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,$$

így állításunkat beláttuk. □

Bizonyítás. (Mertens-tétel). Jelölje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: A \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n =: B \in \mathbb{R}.$$

Be kell látni, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = A \cdot B.$$

Legyen $S_n := a_1 + \cdots + a_n$, továbbá $T_n := b_1 + \cdots + b_n$. Ekkor $\lim(S_n) = A$ és $\lim(T_n) = B$. Felírva a Cauchy-szorzat részletösszegét az alábbit kapjuk:

$$V_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

$$\cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) = a_0T_n + a_1T_{n-1} + \cdots + a_nT_0 =$$

$$= a_0(T_n - B) + a_1(T_{n-1} - B) + \cdots + a_n(T_0 - B) + (a_0 + \cdots + a_n) \cdot B =$$

$$= [a_0(T_n - B) + a_1(T_{n-1} - B) + \cdots + a_n(T_0 - B)] + S_n \cdot B.$$

Tudjuk, hogy az $(x_n := T_n - B)$ sorozat nullsorozat, így a fenti lemma alapján a kapott összeg első (szögletes zárójelben lévő tagja) nullához tart. A második tag pedig definíció szerint $A \cdot B$-hez tart, ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Nézzünk most a fentiekre egy konkrét példát. Tekintsük az alábbi sort:

$$\sum \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mindenek előtt döntsük el, konvergens-e a fenti sor. Alkalmazzuk például a gyökkritériumot (de a hányadoskritérium is ugyanúgy megfelel):

$$\frac{\sqrt[n]{|x^n|}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = |x| \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to |x| \cdot 0 = 0 < 1,$$

így tehát a sor abszolút konvergens tetszőleges x paraméter esetén. Most számítsuk ki a

$$\sum \frac{x^n}{n!} \qquad \text{és} \qquad \sum \frac{y^n}{n!}$$

sorok Cauchy-szorzatát tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ számokra. A definíció alapján a $\sum c_n$ szorzatsor n-edik tagja:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

A jobb oldal a binomiális tételnek megfelelően

$$c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

A két sor Cauchy-szorzatára tehát a következő teljesül:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Létezik még egy fajta sorszorzás, nevezetesen a Téglány-szorzat.

4.11. Definíció. *Legyenek $\sum a_n$, $\sum b_n$ végtelen sorok. Ekkor a két sor Téglány-szorzata a $\sum t_n$ sor, ahol*

$$t_n = \sum_{max\{i,j\}=n} a_i b_j.$$

A definíció alapján tehát egy téglányszorzatban felírva pl. t_3-at, a következőt kapjuk:

$$t_3 = a_0b_3 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + a_3b_0.$$

A téglány elnevezés a téglalap régies szava, arra utal, hogy amennyiben felírjuk táblázat formájában, a sorokba a_n tagjait, oszlopokba b_n tagjait, felírjuk a megfelelő szorzatokat, majd például t_3-nál kiemeljük a téglányszorzatban szereplő szorzatokat téglalap elrendezést kapunk:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & \boxed{a_3b_0} & \cdots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & \boxed{a_3b_1} & \cdots \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & \boxed{a_3b_2} & \cdots \\
b_3 & \boxed{a_0b_3} & \boxed{a_1b_3} & \boxed{a_2b_3} & \boxed{a_3b_3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

A következő tétel érvényes a Téglány-szorzatra.

4.14. Tétel. *Ha a $\sum a_n$, $\sum b_n$ sorok konvergensek, akkor a $\sum t_n$ Téglány-szorzat is konvergens, sőt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Bizonyítás. Írjuk fel a Téglányszorzat n. részletösszegét, jelöljük T_n-nel. Legyen továbbá

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \; B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n.$$

Ekkor

$$T_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_n + a_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_n b_{n-k-1}\right) =$$

$$= a_0(b_0 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + \cdots + b_n) + \cdots + a_n(b_0 + \cdots + b_n) =$$

$$= a_0 \cdot B_n + a_1 \cdot B_n + \cdots + a_n \cdot B_n = (a_0 + \cdots + a_n) \cdot B_n = A_n \cdot B_n,$$

itt pedig a kapott érték pont

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

értékhez konvergál, így állításunkat beláttuk. □

A fenti tétel alapján könnyen bizonyítható már az is, hogy abszolút konvergens sorok esetében is abszolút konvergens lesz a Téglányszorzat, és a sorösszegek szorzatára vonatkozó állítás is hasonlóan érvényes marad.

4.9. Tizedestörtek

Éles témaváltásnak tűnhet a fenti cím, ám hamarosan megmutatjuk, hogy egyáltalán nem az. Mindannyian ismerjük a tizedestörteket, egészen kicsi korunk óta számolunk velük, ám ha megkérnének minket hogy definiáljuk őket precízen, sokunk gondban lenne. Nem sokan kaptak kielégítő választ arra a kérdésre, hogy miért igaz a következő nevezetes egyenlőség:

$$0,\dot{9} = 0,999999\ldots = 1.$$

Van aki számára a fenti egyenlőség természetes, vannak olyanok akik úgy érzik nem lehet igaz, pedig az. Gondoljunk csak bele, mit is jelent a fenti végtelen tizedestört:

$$0,\dot{9} = 0,999999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$$

Itt már azonnal vérszemet kaphatunk, hisz jobb oldalon egy végtelen összeg található, a soroknál tanultak alapján ennek pedig meghatározható az összege. Írjuk fel a fenti összeget végtelen sor alakban:

$$\sum_{n=1} \frac{9}{10^n}.$$

Tudjuk jól, hogy az összeg úgy határozható meg, ha vesszük az n-edik részletösszeget, majd annak a határértékét:

$$\left(\frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^n}\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) =$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1 \to 1,$$

így precízen beláttuk, hogy $0,\dot{9} = 1$. Mostmár látjuk azt is, hogy a tizedestörtek lényegében végtelen sorok. Nézzük a definíciót.

4.12. Definíció. *Legyen adott a következő tizedestört:*

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

ahol $a_0 \in \mathbb{Z}$*,* $n \geq 1$ *esetében pedig* $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$*. Ekkor*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Egyből felmerül számos kérdés, melyekre megpróbáljuk megtalálni a kielégítő választ:

1. Ha adva van egy ilyen sor, miért konvergens?

2. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, hogyan kapjuk meg az előállítását?

3. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, egyértelmű-e az előállítás?

Nézzük a kérdéseket sorban:

1. Segítségünkre lesz a fentebb belátott példa. Vegyük észre az alábbi egyenlőtlenséget:
$$0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n},$$
ahol a jobb oldali sorozat által generált sor konvergens (ezt láttuk be), így az összehasonlító kritérium értelmében a középen álló sorozatból képzett sor is konvergens lesz.

2. Az $a_0 \in \mathbb{Z}$ számot úgy válasszuk meg, hogy
$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$
A továbbiakban tegyük fel, hogy $a_0 \geq 0$, a másik eset teljesen hasonlóan meggondolható. Most az $a_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ számot válasszuk meg úgy, hogy
$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10^1}.$$
Hasonlóan, most az $a_2 \in \{0, \ldots, 9\}$ számot válasszuk úgy, hogy
$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Tovább folytatva az eljárást, az n-edik tagot úgy választjuk meg, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$s_n := a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Most vonjuk ki s_n-t minden oldalból:

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}.$$

Mivel $\lim\left(\frac{1}{10^n}\right) = 0$, így a közrefogási elv értelmében

$$\lim(x - s_n) = 0 \implies \lim(s_n) = x,$$

tehát

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

3. Indirekt úton tegyük fel, hogy létezik két különböző előállítás, tehát hogy

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$ az első olyan index, melyre $a_n \neq b_n$. Feltehetjük, hogy $a_n < b_n$, és mivel egész számokról van szó, így $a_n + 1 \leq b_n$, tehát

$$a_0 = b_0, \quad \ldots \quad a_{n-1} = b_{n-1}, \;\; a_n + 1 \leq b_n.$$

Ekkor a fenti összefüggés alapján

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} \leq b_0 + \frac{b_1}{10^1} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

ami egyértelmű ellentmondás.

4.10. Az e szám irracionalitása

Az e számról már sokat volt szó, kétségtelen hogy ez a szám a matematikai analízis (egyik) legfontosabb konstans értéke, a későbbiekben még többet fogjuk vizsgálni miért is különleges ez a szám, most viszont azt a sejtést szeretnénk igazolni, miszerint az e szám irracionális.

4.2. Állítás. Az e szám irracionális.

Bizonyítás. Nem meglepő módon indirekt úton próbáljuk bizonyítani a sejtést, így hát tegyük fel indirekt úton, hogy

$$e = \frac{p}{q} \qquad (p, q \in \mathbb{Z}).$$

Az e számról beláttuk, hogy sorösszeg segítségével előállítható, azaz

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \implies 0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Most ezt alkalmazzuk az $n = q$ számra:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q \cdot q!} \implies$$

$$\implies 0 < \underbrace{\left(\frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)\right) \cdot q \cdot q!}_{\mathbb{Z}} < 1,$$

így ellentmondás adódott. A közös nevezőket végiggondolva egyszerűsítésekkel könnyen látható miért egész a középen álló érték. □

4.11. Hatványsorok

Most egy speciális fajta sorral, a hatványsorral fogunk foglalkozni. Nézzük meg, mit is értünk pontosan hatványsoron.

4.13. Definíció. *Legyen (a_n) egy sorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített valós szám, $x \in \mathbb{R}$ pedig tetszőleges valós szám. Ekkor a*

$$\sum a_n (x - x_0)^n$$

típusú sort x_0 középpontú hatványsornak nevezzük, az a_n-eket pedig a hatványsor együtthatóinak.

Legyen például $a_n = \frac{1}{n}$, és $x_0 = 2$. Ekkor a

$$\sum \frac{(x-2)^n}{n}$$

sor 2 középpontú hatványsor. Azonnal szembetűnhet a kérdés, hogy milyen $x \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz egy hatványsor konvergens. Ennek vizsgálatához először bevezetjük a konvergenciahalmaz fogalmát.

4.14. Definíció. *Legyen* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *egy hatványsor. Ekkor a hatványsor konvergenciahalmazán a következő halmazt értjük:*

$$KH := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum a_n(x-x_0)^n \textit{ konvergens.} \right\}$$

Ennek értelmében tehát a konvergenciahalmaz azokat az $x \in \mathbb{R}$ paramétereket tartalmazza, melyekre a hatványsor konvergens. Megmutatjuk, hogy egy hatványsor konvergenciahalmaza minden esetben intervallum.

4.3. Állítás. A hatványsorok konvergenciahalmaza intervallum.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges elemet a konvergenciahalmazból, mely a középponttól különbözik, tehát legyen $x_1 \in KH$ úgy, hogy $x_1 \neq x_0$. Most azt kell belátnunk, hogy minden olyan elem, mely különbözik x_1-től és x_0-tól, és közelebb van x_0-hoz mint x_1, szintén eleme a konvergenciahalmaznak. Legyen tehát $x_2 \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$. Mivel x_1 benne van KH-ban, tehát

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n \in \mathbb{R}.$$

Vizsgáljuk meg a hatványsort az x_2 pontban, alakítsuk át:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_2-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n \underbrace{\left(\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0}\right)}_{q}{}^n.$$

Mivel $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$, ezért teljesül, hogy $-1 < q < 1$, továbbá mivel az x_1 pontban a hatványsor konvergens, így tudjuk, hogy

$$\lim \left(a_n(x_1-x_0)^n\right) = 0.$$

Ebből pedig következik, hogy korlátos, tehát

$$\exists K \in \mathbb{R} : |a_n(x_1-x_0)^n| < K.$$

Innen pedig felírható, hogy

$$\left| a_n(x_1-x_0)^n \left(\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0}\right)^n \right| \leq K|q|^n, \text{ ahol } \sum K|q|^n \text{ konvergens.}$$

Innen pedig a majoráns-kritérium alapján igazolódik, hogy a hatványsor az x_2 pontban is konvergens, így állításunkat igazoltuk. □

Hatványsorok kapcsán fontos fogalom még az ún. konvergenciasugár, tehát az a mennyiség, melytől indulva a középponttól minden köztes valós számra a hatványsor konvergens. Ezt a fogalmat egy tételben megfogalmazva vezetjük be, nevezetesen a Cauchy-Hadamard tételben.

4.15. Tétel. *(Cauchy-Hadamard tétel). Legyen (a_n) egy sorozat, továbbá tegyük fel, hogy*

$$\exists \lim \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) =: A \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az (a_n) együtthatójú hatványsor konvergenciasugara

$$R = \begin{cases} 0, & ha\ A = \infty \\ \infty & ha\ A = 0 \\ \dfrac{1}{A}, & ha\ 0 < A < \infty \end{cases}$$

tehát a $\sum a_n(x - x_0)^n$ hatványsorban minden olyan $x \in \mathbb{R}$ paraméterre, melyre $|x - x_0| < R$ a hatványsor abszolút konvergens, azokra meg melyekre $|x - x_0| > R$ a hatványsor divergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$, és alkalmazzuk a $\sum a_n(x - x_0)^n$ hatványsorra a gyökkritériumot:

$$\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0| \to A \cdot |x - x_0|.$$

Ha $A = \infty$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}\,(x \neq x_0)$:

$$\lim \left(\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} \right) = \infty > 0,$$

tehát a hatványsor divergens, így a sugár 0. Ha $A = 0$, akkor a határérték $0 < 1$, így a hatványsor minden pontban konvergens, tehát a sugár ∞. Ha $A \in \mathbb{R}^+$, akkor az egyik lehetőség:

$$A \cdot |x - x_0| < 1 \implies |x - x_0| < \frac{1}{A},$$

ekkor a hatványsor abszolút konvergens, a másik reláció esetén pedig divergens, így állításunkat igazoltuk. □

Nézzünk néhány példát hatványsorokra és konvergenciahalmazukra. Legyen $a_n := 1$ konstans sorozat, továbbá $x_0 := 0$. Így kapjuk a következő hatványsort: $\sum x^n$. Ez éppen a geometriai sor, amiről tudjuk, hogy

$$KH \left(\sum x^n \right) = (-1, 1).$$

Mivel $\lim\left(\sqrt[n]{|1|}\right)=1$, így a konvergenciasugár 1, ami látszik is jelen esetben. Legyen továbbra is $x_0 := 0$, és legyen most $a_n := \frac{1}{n}$. Így kapjuk a következő hatványsort:

$$\sum_{n=1} \frac{x^n}{n}.$$

Mivel $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)=1$, így a konvergenciasugár 1, tehát a sor $x \in (-1,1)$ pontokban abszolút konvergens. Vegyük észre, hogy a sor $x=-1$ pontban is konvergens, viszont nem abszolút konvergens, tehát feltételesen konvergens. Néhány további példa:

$$KH\left(\sum n^n x^n\right)=\{0\},$$

hiszen $\lim\left(\sqrt[n]{|n^n x^n|}\right)=+\infty$, mert $x \neq x_0 = 0$, így a konvergenciasugár 0.

$$KH\left(\sum \frac{x^n}{n^n}\right)=\mathbb{R},$$

hiszen $\lim\left(\sqrt[n]{\frac{|x^n|}{|n^n|}}\right)=\lim\left(\frac{|x|}{n}\right)=0$, így a konvergenciasugár ∞, tehát a konvergenciahalmaz maga a valós számok halmaza.

4.15. Definíció. *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R>0$. Ekkor az*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

függvényt analitikus függvénynek nevezzük.

Emlékezzünk, hogy a $\sum x^n$ hatványsor konvergenciasugara 1 volt a nulla körül, így

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

egy analitikus függvény. Értelmezzük hatványsorokra is az alapműveleteket a következő módon:

4.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\sum a_n(x-x_0)^n$ és $\sum b_n(x-x_0)^n$ két hatványsor, konvergenciasugaruk R_a és R_b. Legyen továbbá*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0|<R_a,$$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n, \qquad |x-x_0| < R_b.$$

Ekkor:

1. $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-x_0)^n$;

2. $f(x)\cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) (x-x_0)^n$.

Bizonyítás. A feltételekből felírható, hogy

$$|x-x_0| < R := \min\{R_a, R_b\}.$$

1.

$$f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n (x-x_0)^n + b_n (x-x_0)^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-x_0)^n.$$

2. Mivel $|x-x_0| < R$, így $\sum a_n (x-x_0)^n$ és $\sum b_n (x-x_0)^n$ sorok abszolút konvergensek, ebből pedig következik, hogy Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i \cdot b_{n-i} (x-x_0)^{n-i} = f(x)\cdot g(x) \implies$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) (x-x_0)^n = f(x)\cdot g(x).$$

□

Megjegyzésként közöljük, hogy bár két hatványsor Cauchy-szorzata is hatványsor, belátható, hogy ez Téglányszorzatra nem igaz. A következő fejezetben hatványsorok segítségével fogunk definiálni néhány elemi függvényt.

5. fejezet

Függvények határértéke és folytonossága

„*A világunk minden vetületének feltérképezéséhez szükséges a matematika. Az egyenletek és az összefüggések csodásak, olyanok, mint egy zenei kompozíció. Általuk ismerhetjük meg az élet ismeretlen részeit.*" (idézet a Dr. Csont c. filmsorozatból.)

Az elmúlt fejezetekben a sorozatokra helyeztünk nagy hangsúlyt. Ne felejtsük el, hogy a sorozatok is függvények, mégpedig olyanok, melyek értelmezési tartománya pont a természetes számok halmaza. Teljesen természetes a gondolat, hogy a sorozatoknál megismert határérték definícióját általánosítani szeretnénk tetszőleges függvényre. A fejezet második részében függvények folytonosságát vizsgáljuk.

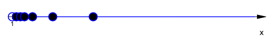
5.1. A határérték

Konvergens sorozatoknál a határérték mindig egy konkrét valós számot jelentett, divergens sorozatoknál $\pm\infty$ is lehetett ez az érték. Észrevehető továbbá, hogy mindig a végtelenben vizsgáltuk egy sorozat határértékét (máshol nem is tudtuk volna), függvényeknél azonban ez nem így lesz, a határértéket az értelmezési tartomány különböző pontjain vizsgálni fogjuk, ám az nem mindegy, hogy milyen pontok is ezek.

5.1.1. Torlódási pontok

Egy halmaz torlódási pontja alatt a következőt értjük:

5.1. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Az $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ számot az A halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0 : k_\varepsilon(\alpha) \cap A$ végtelen halmaz. Az A halmaz összes torlódási pontjának halmazát A' jelöli.*



5.1. ábra. Az $(1, +\infty)$ intervallumon az elemek torlódása az 1-hez

Torlódási pontok tehát pontosan azok a pontok, amelynek tetszőlegesen kicsi környezete is végtelen sok A-beli elemet tartalmaz, innen a torlódás elnevezés, az elemek az adott pontban „torlódnak”. Vegyük észre, hogy ez a fogalom a következőképp átfogalmazható:

5.1. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

$$\alpha \text{ az } A \text{ torlódási pontja} \iff \forall \varepsilon > 0 : (k_\varepsilon(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az $\Rightarrow$ irány triviális, hisz α-nak minden környezete végtelen sok A-beli elemet tartalmaz, így ha α-t kivesszük sem lehet a halmaz üres. A $\Leftarrow$ bizonyításához indirekt úton tegyük fel, hogy valamely környezetben véges sok A-beli elem van, ekkor viszont kell létezzen az α-nak egy olyan, önmagán kívüli környezete, melyben nincs A-beli elem (végességből adódóan, ε-t csökkentve előbb utóbb elfogynak α körül az elemek), ez pedig ellentmond a feltevésnek, hogy minden α körüli és α-t nem tartalmazó környezet tartalmaz A-beli elemet. $\square$

Vegyük észre, hogy a definícióban nem kötöttük ki azt, hogy a torlódási pontnak benne kell lennie a halmazban, hisz ez nem is feltétel. Tekintsük az alábbi példákat:

1. $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$. Ekkor $A' = \{0\}$, hisz most A-beli elem nem lehet torlódási pont, hisz tetszőleges két szomszédos elem által generált intervallumban találunk valós számot, mely nem A-beli, a 0-nak viszont minden környezete tartalmazza valamely természetes szám reciprokát, ez a $\lim \frac{1}{n} = 0$ határértékből is látszik.

2. $A = (0,1) \implies A' = [0,1]$. A végtelen halmaz, így minden pontja torlódási pont, ám a 0 és az 1 is torlódási pontok, minden környezetük végtelen sok A-beli elemet tartalmaz.

3. $A = \mathbb{N} \implies A' = \{+\infty\}$. Nyilván egy természetes szám sem lehet torlódási pont, hisz az 1-nél kisebb környezetekben nincs más természetes szám, egyedül a $+\infty$-ben torlódnak a természetes számok, azok végtelen voltából adódóan.

4. $A = \mathbb{Q} \implies A' = \overline{\mathbb{R}}$. Adódik onnan, hogy minden valós intervallum végtelen sok racionális számot tartalmaz.

Könnyen észrevehető, hogy amennyiben a halmaz felülről nem korlátos, úgy a $+\infty$ biztosan torlódási pontja a halmaznak, és fordítva.

5.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy A felülről nem korlátos halmaz. Ekkor $+\infty \in A'$. Hasonlóan, ha A alulról nem korlátos, akkor $-\infty \in A'$.*

Bizonyítás. Legyen (a_n) egy A-beli szigorúan monoton sorozat, mely minden szóbajövő n-re $a_n > n$, így tehát $\lim a_n = +\infty$. Mivel a halmaz felülről nem korlátos, ilyen sorozat létezik. Tudjuk továbbá, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Legyen $n > N$. A fentiek miatt

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \implies a_n \in k_\varepsilon(+\infty).$$

Tehát, a $+\infty$-nek minden környezete tartalmaz A-beli elemet, illetve

$$\{a_n : n > N\} \subset A \cap k_\varepsilon(+\infty).$$

A bal oldali halmaz nyilván végtelen, a tartalmazásból adódóan pedig a jobb oldali is, így állításunkat beláttuk. □

Fontos észrevétel továbbá, hogy végtelen számosságú korlátos halmaznak biztosan létezik torlódási pontja.

5.3. Állítás. *Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ korlátos és végtelen, akkor $A' \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Mivel a halmaz végtelen, így az elemeiből kiválasztható olyan sorozat, melynek tagjai páronként különbözőek. Legyen (a_n) egy ilyen sorozat.

Mivel a halmaz korlátos, így a sorozat is, így tehát létezik konvergens részsorozata, vagyis létezik olyan ν indexsorozat, hogy $(a \circ \nu)$ konvergens. Jelölje a határértéket $C := \lim(a \circ \nu)$. A sorozatok határértékének definíciója alapján

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ (n \in \mathbb{N}) : a_{\nu_n} \in k_\varepsilon(C) \implies \{a_{\nu_n} : n > N\} \subset k_\varepsilon(C).$$

Nyilván $\{a_{\nu_n} : n > N\} \subset A$ is teljesül. Mivel az $\{a_{\nu_n} : n > N\}$ végtelen halmaz, a fentiekből $A \cap k_\varepsilon(C)$ is végtelen, így C egy torlódási pont, és készen vagyunk. □

A tétel következményeként kapjuk, hogy amennyiben A végtelen halmaz, melynek nem létezik maximuma, akkor $\sup A \in A'$. Azokat a számokat, melyek nem torlódási pontok, izolált pontoknak nevezzük.

5.4. Állítás. *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}$. Ekkor*

1. $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

2. $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

Bizonyítás. Kiindulunk a definícióból:

$$\alpha \in (A \cup B)' \implies \forall \varepsilon > 0 : (k_\varepsilon(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \implies$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : ((k_\varepsilon(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A) \cup ((k_\varepsilon(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap B) \neq \emptyset.$$

Innen azt látjuk, hogy két halmaz uniója nem üres, tehát legalább az egyik nem üres, tehát α vagy A-nak, vagy B-nek torlódási pontja, így állításunk igazoltuk. A másik állításra nézzünk egy ellenpéldát. Legyen $A = (0, +\infty)$, $B = (-\infty, 0)$. Ekkor

$$A' = [0, +\infty], \quad B' = [-\infty, 0] \implies A' \cap B' = \{0\}, \text{ de } A \cap B = \emptyset,$$

így ellenpélda adódott. □

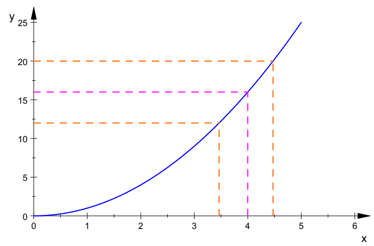
5.1.2. Az általános határérték fogalma

A határérték fogalmának precíz bevezetéséhez elengedhetetlen volt a torlódási pont bevezetése, ugyanis ezekben a pontokban fogjuk a határértéket definiálni. Nézzük a definíciót, majd vizsgáljuk meg részletesen mit is jelent.

5.2. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f{}'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Azt mondjuk, hogy f-nek az a pontban létezik határértéke, és ez az A érték, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in k_\varepsilon(A).$$

Jelölésben: $\lim\limits_a f = A$, *vagy* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.



5.2. ábra. Az $\varepsilon - \delta$ módszer

Figyeljünk rá arra, hogy amennyiben $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szerepel, az az jelenti, hogy $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, míg $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azt jelenti, hogy $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Nézzük mit ír le a definíció informálisan: Az A érték minden ε sugarú környezetéhez létezik az a értéknek olyan δ sugarú, önmagát nem tartalmazó környezete, hogy tetszőleges értelmezhető x-re ebből a környezetből adódik, hogy $f(x)$ beleesik az A szám ε sugarú környezetébe. A lényeg itt is a minél kisebb ε környezet, tetszőlegesen apróra is választjuk, a fenn említett δ környezet mindig létezni fog. Vegyük észre, hogy a határérték nem függ az adott pontbeli függvényértéktől, a lényeg az, hogy torlódási pontja legyen az értelmezési tartománynak, hogy értelmezni tudjuk a ponthoz való „közeledés” fogalmát. $f(a)$ értéke lényegtelen, minket csak az érdekel, hogy a ponthoz végtelenül közel kerülve miként viselkedik a függvény.

A fenti definíciónak sokféle átírása lehetséges attól függően, hogy milyen pontban milyen típusú a határérték. Nézzük végig sorban ezeket:

- **Végesben vett véges:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, A \in \mathbb{R}$, és $a \in \mathcal{D}_f{}'$. Ekkor
$$\exists \lim_a f = A \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta,\ x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- **Végesben vett plusz végtelen:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f{}'$. Ekkor
$$\exists \lim_a f = +\infty \iff$$
$$\iff \forall K > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta,\ x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) > K.$$

- **Végesben vett minusz végtelen:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f{}'$. Ekkor
$$\exists \lim_a f = -\infty \iff$$
$$\iff \forall K < 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta,\ x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) < K.$$

- **Plusz végtelenben vett véges:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, ahol $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos halmaz. Ekkor

$$\exists \lim_{+\infty} f = A \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists k > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > k : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- **Minusz végtelenben vett véges:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, ahol $\mathcal{D}_f$ alulról nem korlátos halmaz. Ekkor

$$\exists \lim_{-\infty} f = A \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists k < 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < k : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- **Plusz végtelenben vett plusz végtelen:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ahol $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos halmaz. Ekkor

$$\exists \lim_{+\infty} f = +\infty \iff$$

$$\iff \forall K > 0 : \exists L > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > L : f(x) > K.$$

- **Plusz végtelenben vett minusz végtelen:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ahol $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos halmaz. Ekkor

$$\exists \lim_{+\infty} f = -\infty \iff$$

$$\iff \forall K < 0 : \exists L > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > L : f(x) < K.$$

- **Minusz végtelenben vett plusz végtelen:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ahol $\mathcal{D}_f$ alulról nem korlátos halmaz. Ekkor

$$\exists \lim_{-\infty} f = +\infty \iff$$

$$\iff \forall K > 0 : \exists L < 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < L : f(x) > K.$$

- **Minusz végtelenben vett minusz végtelen:** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ahol $\mathcal{D}_f$ alulról nem korlátos halmaz. Ekkor

$$\exists \lim_{-\infty} f = -\infty \iff$$

$$\iff \forall K < 0 : \exists L < 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < L : f(x) < K.$$

Vegyük észre, hogy a plusz végtelenben vett véges határérték jelentette a konvergens sorozatok határértékének definícióját. Természetesen függvények esetében is egyértelmű a határérték:

5.1. Tétel. *Függvények határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in {\mathcal{D}_f}'$ és $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Indirekt úton tegyük fel, hogy $\lim\limits_a f = A_i$ $(i = 1, 2)$. Mivel $A_1 \neq A_2$, így létezik olyan környezete ezen értékeknek, melyek diszjunktak, vagyis $\exists \varepsilon > 0 : k_\varepsilon(A_1) \cap k_\varepsilon(A_2) = \emptyset$. Mivel f határértéke az a pontban A_1, így

$$\lim_a f = A_1 \implies \exists \delta_1 > 0 : x \in (k_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\} \text{ esetén } f(x) \in k_\varepsilon(A_1).$$

Továbbá mivel mindez A_2-re is teljesül, így

$$\lim_a f = A_2 \implies \exists \delta_2 > 0 : x \in (k_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\} \text{ esetén } f(x) \in k_\varepsilon(A_2).$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor $x \in (k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\}$, továbbá $f(x) \in k_\varepsilon(A_1) \cap k_\varepsilon(A_2)$, itt pedig ellentmondás adódott, hisz a jobb oldal üres halmaz, így állításunk igazoltuk. □

Egy függvény pontbeli határértékét definíció alapján eldönteni nem mindig könnyű feladat, ahogy sorozatoknál sem volt az. Könnyebbé vált, amint sikeresen belátunk olyan állításokat, tételeket, melyek (többnyire) a műveletek segítségével megkönnyítették ezt. Ennek ellenére nézzünk meg néhány példát. Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x}.$$

Mivel a nullához nagyon „közeli” pontokban a függvényérték „közel kerül” 1-hez, így egyből sejtjük, hogy ebben a pontban a határérték 1. Ez jelenleg egy végesben vett véges típusú határérték bizonyítását jelenti, írjuk fel erre a határértékre a definíciót:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}_{\mathcal{D}_f},\ x \neq 0,\ |x - 0| < \delta \text{ esetén } \left| \frac{1}{1+x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

A határérték definíciójában a vizsgált pontnak (jelen esetben a nullának) az értelmezési tartomány egy torlódási pontjának kell legyen. Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, így ${\mathcal{D}_f}' = \overline{\mathbb{R}}$, vagyis $0 \in {\mathcal{D}_f}'$, tehát ez rendben van.

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy az

$$\left|\frac{1}{1+x} - 1\right| = \frac{|x|}{|x+1|} = |x| \cdot \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $|x| < \delta$. Az $|f(x)-1|$ kifejezést olyan szorzatra kell hoznunk, melynek egyik tényezője $|x-a|$, vagyis jelen esetben $|x|$, ez már megtörtént. Most tegyük fel, hogy $|x| < \frac{1}{2}$. Ekkor

$$|x| < \frac{1}{2} \implies |x+1| > \frac{1}{2} \implies \frac{1}{|x+1|} < 2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $|f(x) - 1| < 2|x| < \varepsilon$. Ebből most $|x|$-et kifejezve: $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ adódik, és mivel $|x| < \frac{1}{2}$ volt a feltétel, így $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ egy jó választás.

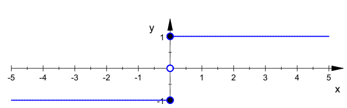
5.1.3. Kétoldali határértékek

Tekintsük az előjelfüggvényt:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ 1 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bizonyítható, hogy $\nexists \lim\limits_{0} \operatorname{sgn}$. Indirekt úton tegyük fel, hogy létezik egy $A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (-\delta, +\delta) \setminus \{0\} : \operatorname{sgn}(x) \in k_\varepsilon(A).$$



5.3. ábra. Az sgn függvény

Mivel a 0-t kivettük az értelmezésből, így az sgn definíciója miatt a függvényérték csak 1, illetve -1 lehet, ám $\varepsilon = 1$ választással vagy $-1 \notin k_1(A)$, vagy $1 \notin k_1(A)$, így ellentmondás adódott. Vizsgáljuk most meg azonban az $\operatorname{sgn}_{|(0,+\infty)}$ leszűkítést. Ez nyilván a konstans 1 függvény pozitív fele. Tudjuk, hogy a 0 egy torlódási pontja a $(0, +\infty)$ intervallumnak, így vizsgálható ebben a pontban a határérték:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \underbrace{((-\delta, +\delta) \cap (0, +\infty)) \setminus \{0\}}_{(0,+\delta)} : \operatorname{sgn}_{|(0,+\infty)}(x) \in k_\varepsilon(A) \implies$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (0, +\delta) : \operatorname{sgn}_{|(0,+\infty)}(x) = 1 \in k_\varepsilon(A),$$

ez pedig akkor és csak akkor teljesülhet, ha $A = 1$, tehát ennek a leszűkítésnek a határértéke 1. Hasonlóan bizonyítható, hogy a negatív leszűkítés határértéke a 0 pontban -1. Így tehát ennek a függvénynek létezett a nulla pontban „jobboldali" és „baloldali" határértéke, ám általános nem. Vezessük be a kétoldali határérték fogalmát.

5.3. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ olyan, hogy $a \in (\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))'$. Azt mondjuk, hogy f-nek létezik az a-ban jobb oldali határértéke, ha*

$$\exists \lim_a f_{|(a,+\infty)\cap\mathcal{D}_f}.$$

Ekkor $\lim\limits_a f_{|(a,+\infty)\cap\mathcal{D}_f}$-t az f a-beli jobb oldali határértékének nevezzük, jelölésben: $\lim\limits_{a+0} f$, vagy $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. A bal oldali határérték teljesen analóg módon definiálható.

Vizsgáljuk meg a négyzetgyök függvényt, tehát legyen $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor beláthatóak az alábbiak:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+0} \sqrt{x} = 0, \qquad \nexists \lim_{x\to 0-0} \sqrt{x}.$$

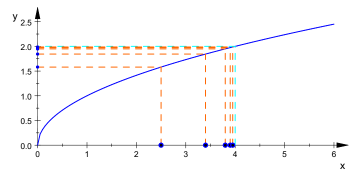
A definíció néhány következménye:

1. $\exists \lim\limits_a f$ és $\exists \lim\limits_{a\pm 0} f \implies \lim\limits_a f = \lim\limits_{a\pm 0} f$;
2. $\exists \lim\limits_{a+0} f$ és $\exists \lim\limits_{a-0} f$ és $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a-0} f \implies \exists \lim\limits_a f = \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a-0} f$;
3. $\exists \lim\limits_{a+0} f$ és $\exists \lim\limits_{a-0} f$ és $\lim\limits_{a+0} f \neq \lim\limits_{a-0} f \implies \nexists \lim\limits_a f$.

Később, mikor függvénydiszkussziót végzünk (teljes függvényvizsgálatot) fontos szerepe lesz a kétoldali határértékeknek. Olyan esetekben, amikor egy adott pont nem eleme az értelmezési tartománynak, de minden más valós pont igen, a kétoldali határérték segítségével könnyen látható lesz, hogy viselkedik a függvény a kritikus pont közelében.

5.1.4. A határértékre vonatkozó átviteli elv

Most egy nagyon fontos eredményt közlünk, mégpedig azt, hogy miképp tudjuk a függvények pontbeli határértékét visszavezetni sorozatok határértékére. Innen ered az átviteli elv kifejezés. A tétel elve a következő: $\lim\limits_a f = A$, keressük ennek a sorozatokkal történő megfogalmazását.



5.4. ábra. Az átviteli elv szemléltetése

Mivel a torlódási pont, így végtelen sok szám „torlódik” hozzá az értelmezési tartományból, kiválasztható így ezen elemek közül egy konvergens sorozat, mely tagonként különböző és az a értékhez konvergál. Azt sejtjük, hogy ezen sorozat tagjainak az f-beli helyettesítési értékei így A-hoz konvergálnak, vagyis $x_1, x_2, \ldots$ sorozat tagjai végtelenül közel kerülnek a-hoz, így az $f(x_1), f(x_2), \ldots$ sorozat végtelenül közel kerül A-hoz. Ezt fogjuk belátni.

5.2. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in {\mathcal{D}_f}'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. $\lim\limits_{a} f = A$,

2. $\forall (x_n) \subset \mathcal{D}_f$, $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lim(x_n) = a$ *sorozat esetén*

$$\lim\Big(f(x_n)\Big) = A.$$

Bizonyítás. Nézzük először a $\Rightarrow$ irányt. Tegyük fel tehát, hogy $\lim\limits_{a} f = A$. Ekkor, a függvényhatárérték definíciója alapján az a szám az értelmezési tartomány egy torlódási pontja. Ekkor létezik az értelmezési tartomány elemeiből álló (x_n) sorozat, mely az a értékhez konvergál (és egyik tagja sem egyenlő a-val). A függvényhatárérték definícióját felírva

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\} \implies f(x) \in k_\varepsilon(A).$$

Rögzítsük a δ értéket. Mivel $\lim(x_n) = a$, így

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \, (n \in \mathbb{N}) : x_n \in k_\delta(a).$$

Mivel az (x_n) sorozat egyik tagja sem egyenlő a-val, valamint a függvény értelmezési tartományának elemeiből áll, így $n > N$ esetén

$$x_n \in (k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\}$$

teljesül, valamint a függvény határértékének definíciója miatt $f(x_n) \in k_\varepsilon(A)$ $(n \geq N)$. Így tehát adott ε-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy

$n > N$ esetén $f(x_n) \in k_\varepsilon(A)$, így tehát $\lim \Big(f(x_n)\Big) = A$.
Nézzük most a $\Leftarrow$ irányt. Indirekt úton tegyük fel, hogy a második állítás teljesülése mellett $\lim\limits_a f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in (k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\} : f(x) \notin k_\varepsilon(A).$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\delta := \frac{1}{n}$. Így átírva:

$$\exists x_n \in (k_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}_f) \setminus \{a\} : f(x_n) \notin k_\varepsilon(A).$$

Ha a különböző x_n-eket egy sorozat tagjainak tekintjük, vegyük észre, hogy az f értelmezési tartományából való, és nagy n-ekre már nagyon közel kerül a-hoz, így hozzá konvergál, de azt kaptuk, hogy ekkor $f(x_n) \notin k_\varepsilon(A)$, ez pedig ellentmond a feltevésnek, miszerint $\lim \Big(f(x_n)\Big) = A$. □

5.1.5. A Cauchy-kritérium függvényhatárértékekre

Sorozatoknál szerepelt, hogy a sorozat konvergenciája eldönthető az által, hogy beláttuk a sorozatról hogy Cauchy-sorozat. A Cauchy-kritériumot sorok esetére is be tudtuk vezetni. Az átviteli elv következményeként véges határértékek esetére megfogalmazható itt is a Cauchy-kritérium.

5.3. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f{}'$ és $A \in \mathbb{R}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. $\lim\limits_a f = A$,

2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Bizonyítás. Nézzük először az *1* $\Rightarrow$ *2* irány bizonyítását. Tegyük fel tehát, hogy $\exists \lim\limits_a f = A$. Ez pontosan a következőt jelenti:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyenek $x, y \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ezzel ezt az irányt igazoltuk. Nézzük most a másikat. Legyen $x_n : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ olyan sorozat, melyre $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim(x_n) = a$. A sorozat határértékének definícióját felírva:

$$\forall \delta > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ (n \in \mathbb{N}) : x_n \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. A *2.* állításból tudjuk, hogy ehhez létezik megfelelő $\delta > 0$ szám, ebből és a fenti sorozathatárérték definíció alapján:

$$\forall n, m \geq N \ (n, m \in \mathbb{N}) : x_n, x_m \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f \implies |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Ebből azt látjuk, hogy az (x_n) sorozatból képzett $(f(x_n))$ sorozat Cauchy-sorozat, így konvergens. Legyen ez a határérték $A \in \mathbb{R}$. Legyen továbbá $(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$, $y_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ melyre $\lim(y_n) = a$. A fentiek miatt ekkor $(f(y_n))$ konvergens, legyen $\lim(f(y_n)) = B \in \mathbb{R}$. Fésüljük össze a fenti két sorozatot az alábbi módon: $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$. Mivel itt a páros és páratlan részsorozat is a-hoz tart, így az egész sorozat is. A fentiek miatt ekkor az

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots, f(x_n), f(y_n), \ldots$$

sorozat konvergens, ahol a páratlan részsorozat A-hoz, a páros B-hez tart, következésképp $A = B$, így az átviteli elvből következik az állítás. □

5.1.6. A függvényhatárérték és műveletek kapcsolata

Az a sejtésünk, hogy a műveletek ugyanúgy alkalmazhatóak, mint a sorozatoknál tanultaknál. Ezt be is fogjuk bizonyítani.

5.4. Tétel. *Legyenek $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f{}' \cap \mathcal{D}_g{}'$ továbbá tegyük fel, hogy $\exists \lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\exists \lim\limits_a g = B \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

1. Ha $A + B$ értelmes, akkor $\exists \lim\limits_a (f + g) = A + B$;

2. Ha AB értelmes, akkor $\exists \lim\limits_a (fg) = AB$;

3. Ha $B \neq 0$ és $0 \notin \mathcal{R}_g$ és $\frac{A}{B}$ értelmes, akkor $\exists \lim\limits_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}$;

Bizonyítás. Csak az első állítást bizonyítjuk, a többi már adódik. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$ sorozat, melyre $\lim x_n = a$. Ekkor

$$\lim_a f = A \overset{\text{Átviteli-elv}}{\Longrightarrow} \lim \Big(f(x_n)\Big) = A,$$

$$\lim_a g = B \overset{\text{Átviteli-elv}}{\Longrightarrow} \lim \Big(g(x_n)\Big) = B.$$

Itt pedig van két sorozatunk, melyre alkalmazzuk a műveletek tulajdonságait, majd ismét az átviteli elvet:

$$\exists \lim \Big(f(x_n) + g(x_n)\Big) = A + B \overset{\text{Átviteli-elv}}{\Longrightarrow} \exists \lim_a (f + g) = A + B.$$

Így sok tétel könnyedén bizonyítható. □

5.1.7. Analitikus függvények határértéke

Emlékezzünk rá, mit értettünk analitikus függvény alatt. Ezek pontosan azok a függvények, melyek előállíthatók hatványsor összegfüggvényeként, más szóval valamely hatványsorok összegfüggvényei. Meg fogjuk mutatni, hogy ezeknek a függvényeknek a konvergenciahalmaz minden pontjában létezik határértékük, ami éppen az adott pontbeli helyettesítési érték.

5.5. Tétel. *Legyen $\sum a_n(x-x_0)^n$ egy hatványsor $R > 0$ konvergencia sugárral, továbbá f legyen a hatványsor összegfüggvénye. Ekkor $\forall x \in k_R(x_0)$: $\exists \lim\limits_{x} f = f(x)$.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz feltesszük, hogy $x > x_0$, hisz a másik eset is teljesen hasonlóan bizonyítható. Legyen továbbá $x^* > x$ olyan, hogy $x^* \in k_R(x_0)$. Kettejük távolságának fele legyen $\delta^* := \frac{x^*-x}{2}$. Mi az amit tudunk? Tudjuk, hogy a hatványsor a konvergenciatartományban nem csak konvergens, de abszolút konvergens is, speciálisan

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x^* - x_0|^n = K \in \mathbb{R}.$$

Tekintsük az x-nek a δ^* sugarú környezetét, a feltételek szerint ez a környezet teljes egészében része a konvergencia tartománynak, továbbá x^* ennek a környezetnek már nem eleme. Legyen $y \in k_{\delta^*}(x)$. Ekkor

$$|f(y) - f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n\big((y-x_0)^n - (x-x_0)^n\big) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\big|(y-x_0)^n - (x-x_0)^n\big| \le$$

$$\le |y-x| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\Big(|y-x_0|^{n-1} + |y-x_0|^{n-2}|x-x_0| + \cdots$$

$$\cdots + |y-x_0||x-x_0|^{n-2} + |x-x_0|^{n-1}\Big). \quad (*)$$

Tudjuk a következőket: $x < x + \delta^*$, $y < x + \delta^*$ és $x + \delta^* < x^*$. Innen pedig állíthatjuk a következőt:

$$\max\left\{ \frac{|y-x_0|}{|x^*-x_0|}, \frac{|x-x_0|}{|x^*-x_0|} \right\} \le \frac{x - x_0 + \delta^*}{x^* - x_0} =: q < 1.$$

Ezek alapján folytatjuk a becslést $(*)$-tól:

$$(*) \quad \leq |y-x| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x^*-x_0|^{n-1} \underbrace{\left(\underbrace{\frac{|y-x_0|^{n-1}}{|x^*-x_0|^{n-1}}}_{\leq q^{n-1}} + \cdots + \underbrace{\frac{|x-x_0|^{n-1}}{|x^*-x_0|^{n-1}}}_{\leq q^{n-1}} \right)}_{n \text{ darab érték}} \leq$$

$$\leq |y-x| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x^*-x_0|^{n-1} n q^{n-1} =$$

$$= |y-x| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x^*-x_0|^{n} \underbrace{\frac{1}{|x^*-x_0|} \underbrace{nq^{n-1}}_{\text{nullához tart}}}_{\text{korlátos, } <K^*} \leq$$

$$\leq \underbrace{\left(K^* \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x^*-x_0|^{n} \right)}_{C>0} |y-x|$$

Ebből pedig következik, hogy $|f(x)-f(y)| \leq C|y-x|$, így

$$\forall y \in k_{\delta^*}(x),\ \varepsilon > 0 : |y-x| < \min\left\{ \frac{\varepsilon}{C}, \delta^* \right\}$$

így állításunkat igazoltuk. □

Az analitikus függvény fogalmának segítségével bevezetünk néhány nevezetes függvényt:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1};$$

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Fent látjuk a híres trigonometrikus függvényeket hatványsor összegfüggvényeként definiálva. Azt, hogy ezek éppen a középiskolából jól ismert szinusz és koszinuszfüggvények, a későbbiekben látni fogjuk.

5.1.8. Monoton függvények határértéke

Nézzük miként definiálható függvények esetében a monotonitás:

5.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény*

1. Monoton nő ($\nearrow$), ha $\forall x, y \in \mathcal{D}_f$, $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$;

2. Szigorúan monoton nő ($\uparrow$), ha $\forall x, y \in \mathcal{D}_f$, $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;

3. Monoton csökken ($\searrow$), ha $\forall x, y \in \mathcal{D}_f$, $x < y$ esetén $f(x) \geq f(y)$;

4. Szigorúan monoton csökken ($\downarrow$), ha $\forall x, y \in \mathcal{D}_f$, $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$.

A függvények monotonitásának eldöntése a gyakorlatban nem mindig olyan egyszerű feladat, mint sorozatok esetén volt. Ennek oka egyszerű: sorozatok esetében az értelmezési tartomány a természetes számhalmaz volt, ahol diszkréten helyezkednek el az elemek, függvények esetében viszont a valós számoknál tanultak miatt nem ennyire egyszerű a helyzet. A későbbiekben a derivált segítségével tanulunk a monotonitás eldöntésére könnyű eszközöket. Most vizsgáljuk meg, hogy amennyiben ismerjük a függvény monotonitását, mit tudunk mondani a határértékről.

5.6. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, továbbá $a \in (\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))'$. Ekkor*

1. Ha f monoton növekedő, akkor $\exists \lim\limits_{a+0} f = \inf\{f(x) : x > a,\, x \in \mathcal{D}_f\}$;

2. Ha f monoton csökkenő, akkor $\exists \lim\limits_{a+0} f = \sup\{f(x) : x > a,\, x \in \mathcal{D}_f\}$.

Továbbá $a \in (\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a))'$ esetben

1. Ha f monoton növekedő, akkor $\exists \lim\limits_{a-0} f = \sup\{f(x) : x < a,\, x \in \mathcal{D}_f\}$;

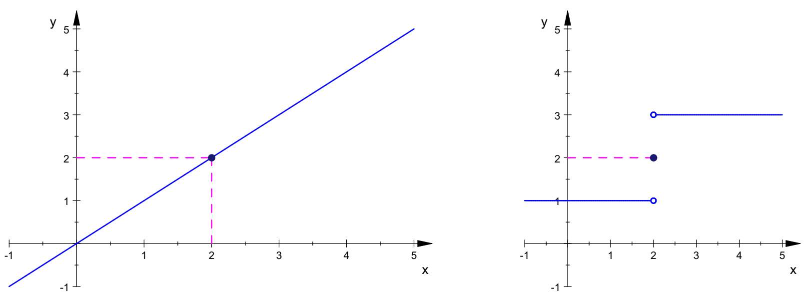
2. Ha f monoton csökkenő, akkor $\exists \lim\limits_{a-0} f = \inf\{f(x) : x < a,\, x \in \mathcal{D}_f\}$.

Bizonyítás. Csak a legelső állítást bizonyítjuk, a többi állítás a sup és inf tulajdonságaiból és az első állítás bizonyításából értelemszerűen adódik. Legyen $A := \inf\{f(x) : x > a,\, x \in \mathcal{D}_f\}$. Ekkor az alsó korlát tulajdonságai miatt $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x > a : f(x) \geq A$, továbbá mivel A legnagyobb alsó korlát, így $\forall M > A : \exists x_1 \in \mathcal{D}_f$, $x_1 > a : f(x_1) < M$. Kihasználva, hogy f monoton nő kapjuk, hogy tetszőleges $a < x < x_1$, $x \in \mathcal{D}_f$-re: $A \leq f(x) < M$. Így tehát A bármely $k_\varepsilon(A)$ környezetéhez van a-nak olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, hogy minden $x \in k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$, $x > a$ pontban $f(x) \in k_\varepsilon(A)$ teljesül. Jelen esetben az A jobb oldali környezetének határa $A + M$, a-nak pedig $a + x_1$. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

5.2. Folytonosság

A függvények folytonosságának fogalma meglepően hasonló lesz a határérték definíciójához, ám van egy fontos különbség. Tekintsük példaképp a következő két függvényt:

$$f(x) := x, \qquad\qquad g(x) := \begin{cases} 1, & x < 2, \\ 2, & x = 2, \\ 3, & x > 2. \end{cases}$$



(a) Az $f(x)$ függvény (b) A $g(x)$ függvény

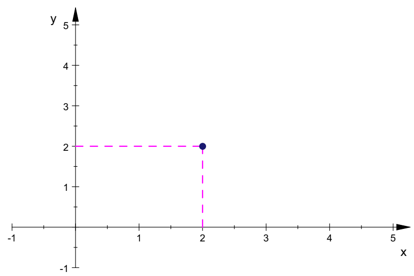
5.5. ábra. Különböző függvények viselkedése egy adott pont körül

Mindkét függvényt a 2 pont körül vizsgáljuk. Látjuk, hogy az $f(x)$ esetében amikor már nagyon közel kerülünk az $x = 2$-höz, a függvényértékek is közel kerülnek az $f(2) = 2$-höz. Ugyanez azonban a $g(x)$ függvényről nem mondható el, bármilyen közel is kerülünk az $x = 2$ ponthoz, a függvényértékek messze esnek a $g(2) = 2$ ponttól. Az itt tapasztaltak nyomán vezetjük be a folytonosság fogalmát.

5.5. Definíció. *Azt mondjuk, az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Jelölés: $f \in C\{a\}$. Ha $\forall a \in \mathcal{D}_f : f \in C\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos. Jelölése: $f \in C$. Ha $A \subset \mathcal{D}_f$ és $\forall a \in A : f \in C\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos az A halmazon. Jelölése: $f \in C(A)$.



5.6. ábra. A $h(x)$ függvény

Az itt bevezetett folytonosság-fogalom nem feltétlen esik egybe azzal, amit mi a folytonosságról, hétköznapi fejjel gondoltunk volna, ugyanis: Vegyük észre, hogy nem követeltük meg, hogy a vizsgált pont torlódási pont legyen. Mit mondhatunk a folytonosságról izolált pontok esetében? Legyen $h(x) = 2$, ahol $\mathcal{D}_h = \{2\}$, vagyis ez a függvény csak a kettő pontban értelmes, máshol nem. Vizsgáljuk meg erre a függvényre a definíciót. Világos, hogy a definícióban szereplő $\forall x \in k_\delta(2) \cap \mathcal{D}_f$ állításnak egyedül az $x = 2$ felel meg tetszőleges δ környezet mellett. Így $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ adódik, ez pedig teljesül. Így tehát a fenti függvény ebben a pontban folytonos. Következményként kapjuk, hogy tetszőleges függvény az értelmezési tartományának izolált pontjaiban mindig folytonos. A határértékkel vett kapcsolatot a következő tétel mondja ki:

5.7. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f{}'$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \iff \exists \lim_a f = f(a).$$

Bizonyítás. A definíciók szerint triviális. □

A határértékhez hasonlóan, folytonossághoz is kimondható az átviteli elv, ezt nevezzük folytonosságra vonatkozó átviteli elvnek:

5.8. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim(x_n) = a \text{ esetén } \exists \lim\left(f(x_n)\right) = f(a).$$

Bizonyítás. A másik átviteli elvhez teljesen hasonló módon. □

5.2.1. Műveletek folytonos függvényekkel

5.9. Tétel. *Legyenek $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Ekkor*

1. $f, g \in C\{a\} \implies f + g \in C\{a\}$;

2. $f, g \in C\{a\} \implies fg \in C\{a\}$;

3. Ha még $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$-ra, akkor $f, g \in C\{a\} \implies \frac{f}{g} \in C\{a\}$;

Bizonyítás. Az első állítást bizonyítjuk. Amennyiben a egy izolált pont, úgy az állítás teljesül. Ha a nem izolált pont, akkor

$$f \text{ folytonos } a\text{-ban} \implies \exists \lim_a f = f(a),$$

$$g \text{ folytonos } a\text{-ban} \implies \exists \lim_a g = g(a).$$

Ezekből pedig a határérték és műveletek kapcsolata alapján következik, hogy $\exists \lim_a (f+g) = f(a)+g(a)$, tehát $f+g \in C\{a\}$. A többi állítás teljesen hasonló módon belátható. □

Nézzük mit tudunk mondani az összetett függvény folytonosságáról:

5.10. Tétel. *Legyenek $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_g$ és $g(a) \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

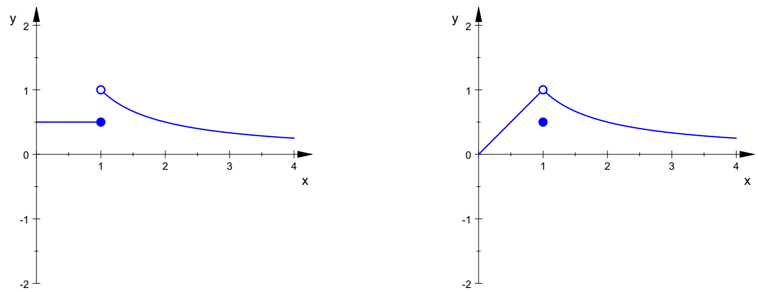
$$g \in C\{a\},\ f \in C\{g(a)\} \implies f \circ g \in C\{a\}.$$

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy $\mathcal{D}_{f\circ g}$ nem üres, hisz a egy eleme. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f\circ g}$ és $\lim(x_n) = a$. Mivel $g \in C\{a\}$, így az átviteli elv miatt $\exists \lim(g(x_n)) = g(a)$. Itt $(g(x_n)) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ és $\lim(g(x_n)) = g(a)$. Mivel $f \in C\{g(a)\}$, így az átviteli elvet ismét alkalmazva $\exists \lim(f(g(x_n))) = f(g(a))$, így az állítást beláttuk. □

5.2.2. Függvények szakadása

A kétoldali határérték és a folytonosság segítségével definiálhatjuk és osztályozhatjuk egy függvény szakadásait.

5.6. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban a függvény nem folytonos, akkor a egy szakadási pontja f-nek.*
Az $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathcal{D}_f$ az f elsőfajú szakadási pontja, ha $\exists \lim_{a-0} f$, $\exists \lim_{a+0} f \in \mathbb{R}$. Ilyenkor az $u := |\lim_{a+0} f - \lim_{a-0} f|$ mennyiséget az f ugrásának nevezzük az a pontban.
Az elsőfajú szakadási pont speciális esete a megszüntethető szakadási pont, mikor is $u = 0$, tehát $\lim_{a+0} f = \lim_{a-0} f \neq f(a)$.
Az $a \in \mathcal{D}_f$ másodfajú szakadási pont, ha nem elsőfajú.



(a) Elsőfajú szakadás $0,5$ ugrással (b) Megszüntethető szakadás

5.7. ábra. Szakadási típusok

5.2.3. Intervallumon értelmezett folytonos függvények

Ebben az alfejezetben be fogunk látni néhány, hétköznapi fejjel elég egyértelműnek tűnő állítást. Intervallumon értelmezett folytonos függvények klasszikusan azok a függvények, melyek rajzolásánál „nem emeljük fel a ceruzát”. Ilyet mindenki látott már, el tud képzelni. Elsőnek azt bizonyítjuk, hogy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény biztosan korlátos. Látni fogunk rá egy példát, hogy miért nem feltétlen igaz az állítás a nyílt intervallumra.

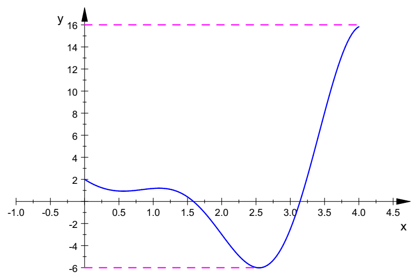
5.11. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \in C \implies f \text{ korlátos}$$

Bizonyítás. Tekintsük a felülről vett korlátosságot. Indirekt úton tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_f$ felülről nem korlátos halmaz, vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n.$$

Képezzük az ezekből az x_n értékekből nyerhető $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ sorozatot. Mivel $[a, b]$ korlátos halmaz, így az előbb képzett sorozat is korlátos, tehát létezik egy (x_{ν_n}) konvergens részsorozata. Legyen $\alpha := \lim(x_{\nu_n})$. Nyilván $\alpha \in [a, b]$. Mivel a függvény az intervallum minden pontjában folytonos, így α-ban is, amiből az átviteli elv alapján $\lim(f(x_{\nu_n})) = f(\alpha)$ következik. Másrészt $f(x_{\nu_n}) \geq \nu_n \geq n$ az indirekt feltétel, valamint az indexsorozat tulajdonságai miatt, ebből pedig az következik, hogy $\lim f(x_{\nu_n}) = +\infty$, ez pedig ellentmondás. Az alsó korlát esete teljesen hasonlóan bizonyítható. $\square$



5.8. ábra. Folytonos függvény a $[0, 4]$ intervallumon

A bal oldali ábrán szépen látszik a tétel állítása. Fontos azonban megjegyezni, hogy nyílt intervallumra nem tudunk korlátosságot biztosítani folytonos függvényekhez, ugyanis vegyük példának a tangens függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nyílt intervallumon. Könnyen észrevehető, hogy ilyenkor az értékkészlet a teljes valós számhalmaz, így nem korlátos függvényt kaptunk. Fontos észrevétel, hogy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényeknek létezik maximumuk, illetve minimumuk, pontosabban az értékkészletnek létezik minimuma és maximuma.

5.12. Tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és $f \in C$, akkor $\exists \max f$, $\min f$.*

Bizonyítás. Tekintsük a maximum létezését. Tudjuk, hogy a feltételeink miatt f korlátos, így az értékkészlet szuprémuma valós szám: $\sup \mathcal{R}_f =: \gamma \in \mathbb{R}$. A szuprémum tulajdonságai alapján ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > \gamma - \frac{1}{n} \implies$$

$$\implies \gamma - \frac{1}{n} < f(x_n) \le \gamma \implies -\frac{1}{n} < f(x_n) - \gamma \le 0 \implies |f(x_n) - \gamma| < \frac{1}{n}.$$

Képezzük az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ sorozatot, a korlátosság miatt létezik (x_{ν_n}) konvergens részsorozat. Legyen $\lim(x_{\nu_n}) =: c \in [a, b]$. Mivel $f \in C\{c\}$, így az átviteli elv értelmében $\exists \lim(f(x_{\nu_n})) = f(c)$. Másrészt $|f(x_n) - \gamma| < \frac{1}{n}$ miatt $\lim(f(x_{\nu_n})) = \gamma$, ezek alapján tehát $f(c) = \gamma = \sup \mathcal{R}_f$. Mivel $\gamma \in \mathcal{R}_f$, így $\gamma = \max \mathcal{R}_f$. A minimum létezése teljesen analóg módon bizonyítható. □

Fontos észrevétel az alábbi:

5.13. Tétel. *(Bolzano tétele). Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C$. Legyen továbbá $f(a) < \gamma < f(b)$ (vagy $f(b) < \gamma < f(a)$). Ekkor $\exists c \in (a, b) : f(c) = \gamma$.*

5.14. Tétel. *(Speciális eset). Legyen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ és $\varphi(a)\varphi(b) < 0$. Ekkor $\exists c \in (a, b) : \varphi(c) = 0$.*

Bizonyítás. A speciális esetet fogjuk bizonyítani, majd az eredeti tételt erre vezetjük vissza. Tegyük fel, hogy $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) > 0$. Konstruáljuk meg a következő két sorozatot: $x_0 := a$ és $y_0 := b$, és

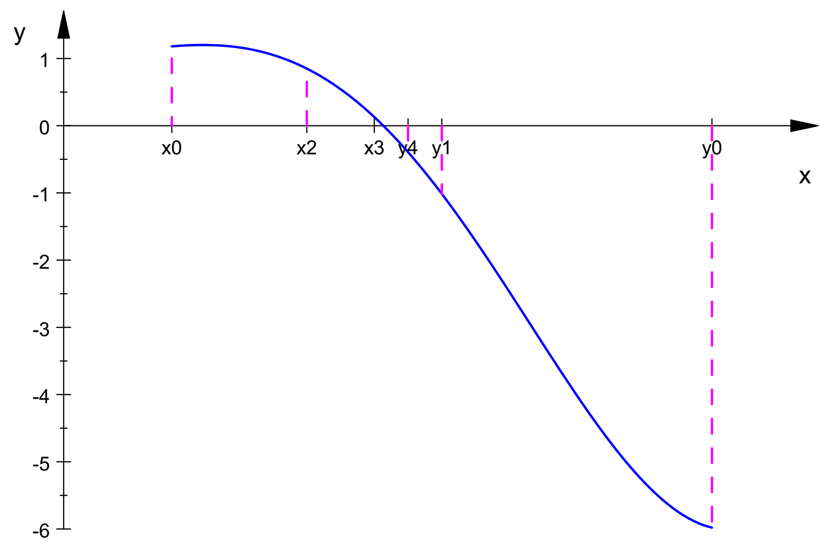
$$x_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{ha } \varphi\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) \leq 0 \\ x_n & \text{ha } \varphi\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

$$y_{n+1} := \begin{cases} y_n, & \text{ha } \varphi\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) \leq 0 \\ \frac{x_n+y_n}{2} & \text{ha } \varphi\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

Látjuk, hogy (x_n) monoton növő, (y_n) pedig monoton csökkenő sorozat, valamint mindkettő korlátos. A fenti módszer az intervallumfelezés módszere. A végpontokat „mozgatjuk” attól függően, hogy milyen a felezőpontban felvett érték előjele: negatív esetben a felezőpont a bal végpont lesz, és a jobb nem változik, pozitív esetben pedig fordítva. Mivel a fenti sorozatok korlátosak és monotonok, ezért $\exists \lim(x_n)$, $\exists \lim(y_n)$.

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n} \implies \lim(y_n - x_n) = 0 \implies \lim(x_n) = \lim(y_n) =: \ell \in [a, b].$$

Mivel $\lim(y_n) = \ell$, az átviteli elv értelmében $\varphi(\ell) = \lim(\varphi(y_n))$, de $\varphi(y_n) > 0 \implies \lim(\varphi(y_n)) \geq 0$, vagyis $\varphi(\ell) \geq 0$. Ugyanezt a gondolatmenetet (x_n)-re alkalmazva $\varphi(\ell) \leq 0$ adódik, tehát $\varphi(\ell) = 0$, és készen vagyunk. Az eredeti tétel belátásához alkalmazzuk a speciális esetet a $\varphi := f - \gamma$ függvényre. $\square$



5.9. ábra. Az intervallumfelezés módszere. Az ábrán a kezdőpontokon kívül mindig csak az új felezőpontot tüntettük fel, ha egy pont helyben maradt, azt külön nem jeleztük.

5.15. Tétel. *Intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete intervallum.*

Bizonyítás. Legyen I egy intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C$. Amennyiben f konstans függvény, úgy az értékkészlet egy egyelemű elfajuló intervallum és készen vagyunk. Amennyiben f nem konstans, akkor legyenek

$$A := \inf \mathcal{R}_f \in \overline{\mathbb{R}}, \ \ B := \sup \mathcal{R}_f \in \overline{\mathbb{R}},$$

ekkor elég azt megmutatni, hogy tetszőleges $\gamma \in (A, B)$ esetén $\gamma \in \mathcal{R}_f$. Az inf és sup miatt, és mert γ az (A, B) intervallum eleme, ezért létezik az értelmezési tartománynak olyan a és b pontja, hogy

$$A \leq f(a) < \gamma < f(b) \leq B.$$

Ekkor a Bolzano-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\exists \xi \in \mathcal{D}_f : f(\xi) = \gamma$, következésképpen $\gamma \in \mathcal{R}_f$. $\square$

5.2.4. Az inverz függvény folytonossága

Szintén egy könnyen meggondolható tétel következik, mely szerint egy invertálható folytonos függvény inverzfüggvénye is folytonos.

5.16. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ha $f \in C$ és $\exists f^{-1}$, akkor $f^{-1} \in C$.*

Bizonyítás. $\mathcal{R}_f$ intervallum, legyen ez $[\alpha, \beta]$, így $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$. Indirekt úton tegyük fel a következőt:

$$\exists\gamma \in \mathcal{D}_{f^{-1}}(= [\alpha, \beta]) : f^{-1} \notin C\{\gamma\}.$$

Az átviteli elv értelmében ekkor $\exists(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f^{-1}}$, hogy $\lim(y_n) = \gamma$, de $\lim(f^{-1}(y_n)) = f^{-1}(\gamma)$ nem teljesül. Ez két dolgot jelenthet: vagy egyáltalán nem is létezik ez a határérték, vagy létezik és csak az egyenlőség nem teljesül.

$$\exists! x_n \in \mathcal{D}_f : f(x_n) = y_n \iff f^{-1}(y_n) = x_n$$

$$\exists! c \in \mathcal{D}_f : f(c) = \gamma \iff f^{-1}(\gamma) = c$$

A feltétel szerint $\lim(x_n) = c$ nem teljesül, vagyis $\exists\delta > 0 : k_\delta(c)$ környezeten kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van. Vegyünk egy (x_{ν_n}) részsorozatot a környezeten kívülről. Ekkor

$$x \circ \nu : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f\ (= [a, b]) \text{ korlátos} \implies \exists\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \circ \nu \circ \mu \text{ konvergens}$$

Tudjuk, hogy (x_{ν_n}) konvergens, és $\lim(x_{\nu_n}) = d \neq c$ $(a \leq d \leq b)$. Továbbá $f \in C\{d\}$, tehát

$$\lim(f\left(x_{\nu_{\mu_n}}\right)) = f(d) \implies \lim\left(y_{\nu_{\mu_n}}\right) = f(d).$$

Mivel $c \neq d$ és f invertálható, így $\gamma = f(c) \neq f(d) \implies \lim\left(y_{\nu_{\mu_n}}\right) \neq \gamma$, ez pedig ellentmondás, hisz $\lim(y_n) = \gamma$. $\square$

Kimondható az általánosítás, miszerint intervallumon értelmezett folytonos invertálható függvény inverze folytonos.

5.2.5. Egyenletes folytonosság

5.7. Definíció. *Azt mondjuk, az f függvény egyenletesen folytonos, ha*

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x, y \in \mathcal{D}_f,\ |x - y| < \delta \textit{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Amennyiben f egyenletesen folytonos, akkor folytonos is. Ezt úgy láthatjuk, hogy a definícióban rögzítjük y-t, így ebben a pontban a függvény folytonos. Tekintsük példának az $f(x) = x^2$ függvényt. Ez a függvény minden valós pontban folytonos. Legyen

$$\varepsilon := 1, \quad x_n := n \ (n \in \mathbb{N}), \quad y_n := n + \frac{1}{n} \ (n \geq 1).$$

Ekkor

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \right| = \left| n^2 - \left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}\right) \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1.$$

$$|y_n - x_n| = \frac{1}{n}.$$

$$\forall \delta > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \delta, \text{ de } |f(x_n) - f(y_n)| > 1,$$

tehát f nem egyenletesen folytonos. Egy másik hasonló példa az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény, mely a nullát leszámítva minden valós pontban folytonos. $\varepsilon := \frac{1}{2}$ választással, és $x_n := \frac{1}{n}$ sorozattal az $|f(x_{n+1}) - f(x_n)|$ különbséget vizsgálva a fentihez hasonlóan kapjuk, hogy ez a függvény sem egyenletesen folytonos. Nézzünk egy elégséges feltételt az egyenletes folytonossághoz.

5.17. Tétel. *(Heine tétele). Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és $f \in C$, akkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt úton tegyük fel:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta, \text{ de } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Következményképp:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ de } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

$(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ korlátos sorozat, tehát $\exists \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: (x_{ν_n}) konvergens, legyen $\lim(x_{\nu_n}) =: \gamma$. Mivel $x_n \in [a, b]$, így $\gamma \in [a, b]$ is teljesül. Tudjuk, hogy $f \in C\{\gamma\}$, tehát az átviteli elv értelmében

$$\exists \lim \left(f(x_{\nu_n})\right) = f(\gamma). \qquad (*)$$

Továbbá:

$$|x_{\nu_n} - y_{\nu_n}| < \frac{1}{\nu_n} \leq \frac{1}{n} \implies (x_{\nu_n} - y_{\nu_n}) \text{ nullsorozat, és } \exists \lim(x_{\nu_n}) = \gamma, \text{ így}$$

$$(y_{\nu_n}) \text{ konvergens, és } \lim(y_{\nu_n}) = \gamma.$$

A fenti átviteli elvhez teljesen hasonlóan adódik, hogy

$$\exists \lim \left(f(y_{\nu_n})\right) = f(\gamma). \qquad (**)$$

A $(*)$ és $(**)$ állításokból következik, hogy $(f(x_{\nu_n}) - f(y_{\nu_n}))$ nullsorozat, ám itt ellentmondás adódik azzal, hogy $|f(x_{\nu_n}) - f(y_{\nu_n})| \geq \varepsilon$. $\square$

5.8. Definíció. *Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt Lipschitz-tulajdonságúnak mondjuk, ha*

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in \mathcal{D}_f : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Egy Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen folytonos $\mathcal{D}_f$-en, hisz adott $\varepsilon > 0$ mellett $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ választással $x, y \in \mathcal{D}_f$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon.$$

Irodalomjegyzék

[1] Járai Antal. *Bevezetés A Matematikába - Informatikai Alkalmazásokkal*. ELTE Eötvös Kiadó, 2009.

[2] Ábrahám Róbert. Analízis i. 2010.

[3] Sikolya Eszter. Bsc analizis i. előadásjegyzet 2009/2010. őszi félév. 2010.

[4] Sikolya Eszter. Bsc analizis ii. előadásjegyzet 2009/2010. tavaszi félév. 2010.

[5] Schipp Ferenc. Analízis i. sorozatok és sorok. 1994.

[6] Schipp Ferenc. Analízis ii. folytonosság és differenciálhatóság. 1996.