6. gyakorlat

Differenciálszámítás 1.

• Parciális deriváltak

1. feladat. *Számítsa ki az*

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \qquad (x, y > 0)$$

függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait.

Megoldás.
$\underline{\partial_x f(x,y) = ?}$
Most y rögzített és x-et tekintjük változónak:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2x \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot y}{(xy)^2} = \frac{2x^2y - x^2y + y^4}{x^2y^2} = \\ = \frac{x^2y + y^4}{x^2y^2} = \frac{x^2 + y^3}{x^2y}.$$

$\underline{\partial_y f(x,y) = ?}$
Most x rögzített és y-t tekintjük változónak:

$$\partial_y f(x,y) = \frac{-3y^2 \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot x}{(xy)^2} = \frac{-3xy^3 - x^3 + xy^3}{x^2y^2} = \\ = \frac{-2xy^3 - x^3}{x^2y^2} = -\frac{x^2 + 2y^3}{xy^2}. \quad \blacksquare$$

2. feladat. *Melyik $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek:*

$$\partial_x f(x,y) = x^2y, \quad \partial_y f(x,y) = 1 + x^3/3 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)?$$

Megoldás. Legyen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ egy rögzített pont. A $\partial_x f(x,y) = x^2y$ feltételből következik, hogy

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} \cdot y + g(y),$$

ahol $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges, az $\mathbb{R}$ halmazon deriválható függvény. Az f függvényt az y változó szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x^3}{3} \cdot 1 + g'(y) = \text{ (a feltétel miatt) } = 1 + \frac{x^3}{3},$$

ezért $g'(y) = 1$ $(y \in \mathbb{R})$ $\implies g(y) = y + c$ $(y \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$. Így

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{3} + y + c \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ c \in \mathbb{R}\big).$$

Ellenőrizze, hogy ez a függvény valóban kielégíti a feladat feltételeit. $\blacksquare$

3. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^3y + x^2y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a következő másodrendű parciális deriváltakat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

az $(x,y) = (1,0)$ *pontban.*

Megoldás. Az f függvény minden első- és másodrendű parciális deriváltja létezik minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. Vegyünk egy tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontot.

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = ?}$

Először az f függvény x változó szerinti parciális deriváltját számítjuk ki:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + 1.$$

Most a fenti függvényt deriváljuk az y változó szerint:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(3x^2y + 2xy^2 + 1\big) = 3x^2 + 4xy.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 3.}$$

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = ?}$

Először az f függvény y változó szerinti parciális deriváltját számítjuk ki:

$$\partial_y f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y.$$

Most a fenti függvényt deriváljuk az x változó szerint:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^3 + 2x^2y + 2y\big) = 3x^2 + 4xy.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 4xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 3.}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a kétféle sorrendben vett parciális deriváltak megegyeznek. Ez következik a *Young-tételből* is, ti. ebben az esetben $f \in D^2\{(x,y)\}$. (Gondolja meg, hogy ez az állítás miért igaz.)

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = ?}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(3x^2y + 2xy^2 + 1\big) = 6xy + 2y^2.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy + 2y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0.}$$

$\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = ?}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^3 + 2x^2y + 2y\big) = 2x^2 + 2.$$

Így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2 + 2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 4.} \ \blacksquare$$

• Totális derivált

4. feladat. *A definíció alapján lássa be, hogy az*

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ derivált-mátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

Megoldás. A deriválhatóság igazolása:

Legyen $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontbeli totális deriválhatóságának a definícióját az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényünkre alkalmazva azt kell tehát belátnunk, hogy $\exists\, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sorvektor, amellyel a

$$\lim_{h \to \mathbf{0}} \frac{\big|f(a+h) - f(a) - A \cdot h\big|}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h) - f(a) - \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

egyenlőség teljesül.

Ezzel a tulajdonsággal rendelkező A vektort így lehet meghatározni:

$$f(a+h)-f(a)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=$$
$$=2(1+h_1)^2+3(1+h_1)(2+h_2)-(2+h_2)^2-\left[2\cdot 1^2+3\cdot 1\cdot 2-2^2\right]=$$
$$=10h_1-h_2+2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}+2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2.$$

Legyen $A:=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}$. Az előző egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Most megmutatjuk azt, hogy a jobb oldalon álló függvénynek a határértéke a $(0,0)$ pontban 0-val egyenlő. Mivel

$$0\le\frac{\left|2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\frac{2(h_1^2+h_2^2)+3|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le$$

(alkalmazzuk most a $|h_1h_2|\le\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2)$ egyenlőtlenséget)

$$\le\frac{2(h_1^2+h_2^2)+\frac{3}{2}(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le 4\sqrt{h_1^2+h_2^2},$$

és az utolsó tag határértéke az origóban 0, ezért a közrefogási elvből következik, hogy a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

egyenlőség valóban teljesül.

A fentieket összefoglalva tehát azt láttuk be, hogy

$f\in D\{(1,2)\}$ és a deriváltmátrix az $f'(1,2)=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix}$ sorvektor.

Ellenőrzés. Mivel

$$\partial_1 f(x,y)=4x+3y,\qquad \partial_1 f(1,2)=10,$$
$$\partial_2 f(x,y)=3x-2y,\qquad \partial_2 f(1,2)=-1,$$

ezért a Jacobi-mátrix:

$$\begin{bmatrix}\partial_1 f(1,2) & \partial_2 f(1,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -1\end{bmatrix},$$

és ez valóban megegyezik a definíció alapján kapott deriváltmátrixszal. ■

5. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az*

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ *pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de* f *nem differenciálható a* $(0,0)$ *pontban.*

Megoldás.
A folytonosság igazolása. (Az előző gyakorlaton a folytonosságot már beláttuk. Érdemes azért ismét meggondolni a bizonyítást.)

Az $a = (0,0)$ pontbeli folytonosság a definícó szerint azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \begin{gathered} \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\,(x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \text{ esetén} \\ \big|f(x,y) - f(0,0)\big| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot és legyen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor az

$$\big|f(x,y) - f(0,0)\big| = \big|f(x,y)\big| = \sqrt{|xy|} \leq$$

$$\text{(alkalmazzuk most a } \sqrt{|xy|} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}} \text{ egyenlőtlenséget)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \big\|(x,y)\big\| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $\delta \in (0, \sqrt{2}\varepsilon)$. Ez azt jelenti, hogy (*) rögzített $\varepsilon > 0$ valós szám esetén tetszőleges $\delta \in (0, \sqrt{2}\varepsilon)$ számmal teljesül, ezért $f \in C\{(0,0)\}$.

Az $f \notin D\{(0,0)\}$ állítás igazolása.

Az állítással ellentétben tegyük fel azt, hogy $f \in D\{(0,0)\}$. Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) = \big(\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0)\big).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az f függvény parciális deriváltjai az origóban léteznek és

$$\partial_1 f(0,0) = 0, \qquad \partial_2 f(0,0) = 0.$$

Az $f \in D\{(0,0)\}$ indirekt feltételünk most azt jelenti, hogy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h) - f(a) - \begin{bmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$(**) \qquad = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Könnyű észrevenni, hogy ez az állítás nem igaz, mert például az $y = x$ egyenletű egyenes pontjaiban a tört értéke $\frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát a $(0,0)$ pont minden környezetében van olyan pont, amelyben a tört $\frac{1}{\sqrt{2}}$-őt vesz fel. Beláttuk tehát azt, hogy az f nem differenciálható $(0,0)$-ban. ■

Megjegyzések. **(1)** Azt is egyszerű észrevenni, hogy a $(**)$-ban szereplő függvénynek a $(0,0)$ pontban *nincs határértéke*, mert például az $y=0$ egyenletű egyenes pontjaiban felvett függvényértékek 0-val egyenlők.

(2) A feladat elméleti szempontból is érdekes, mert egyrészt azt igazolja, hogy a pontbeli folytonosságból általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság; másrészt pedig a pontbeli parciális deriváltak létezéséből általában nem következik a pontbeli totális deriválhatóság.