Elsőrendű logika (predikátumkalkulus)

A nulladrendű logika korlátozottan alkalmas a világ leírására, az egyszerű állítások belső szerkezetét nem vizsgálja. Például a „Minden ember halandó.”, „Szókrátész ember.”, „Szókrátész halandó.” állítások nulladrendű formalizálása esetén nincs más lehetőségünk, mint x, y és z-ként formalizálni a fenti állítás-hármast. Ugyanakkor mivel az emberek halmaza részhalmaz a halandók halmazának és Szókrátész az ember-halmaz egy eleme, ezért jó lenne egy olyan modell, ahol a 3. állítás az első 2 következménye.

Egy elsőrendű logikában (nem véletlen a határozatlan névelő!) az állítások belső szerkezetét is figyelembe tudjuk venni. Tudunk egy halmaz összes elemére illetve legalább egy elemére vonatkozó állításokat formalizálni.

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,
- Cnst, a **konstansszimbólumok** véges halmaza,
- $\mathrm{Ind} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, az **individuumváltozók** megszámlálhatóan végtelen halmaza
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists\}$ műveleti jelek és kvantorok. $\forall$ neve **univerzális kvantor**, míg $\exists$ neve **egzisztenciális kvantor**
- **(**, **)** és **,** (vessző).

Minden $s \in \mathrm{Pred} \cup \mathrm{Func} \cup \mathrm{Cnst}$-hez hozzá van rendelve egy $\mathrm{ar}(s) \in \mathbb{N}$ szám, a szimbólum **aritása** (a konstansokhoz mindig 0).

Definíció A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$
- minden $f \in \mathrm{Func}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathrm{Term}$ esetén $f(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)}) \in \mathrm{Term}$.

Definíció Az **elsőrendű formulák** Form nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $p \in \mathrm{Pred}$ és $t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(p)} \in \mathrm{Term}$ esetén $p(t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(p)}) \in \mathrm{Form}$. Ezek az **atomi formulák**.
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$.
- Ha $\varphi,\ \psi \in$ Form, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi) \in$ Form.
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\forall x\varphi \in \mathrm{Form}$ és $\exists x\varphi \in \mathrm{Form}$.

Példa
$\mathrm{Pred} = \{p, q\}, \quad \mathrm{Func} = \{f\}, \quad \mathrm{Cnst} = \{a\}.$

$\mathrm{ar}(p) = \mathrm{ar}(q) = \mathrm{ar}(f) = 2.$

$x,\ a,\ f(x, y),\ f(x, f(a, x)) \in \mathrm{Term}.$

$p(x, y),\ q(x, f(a, a)),\ \neg p(x, f(y, z)),\ (\exists x p(x, y) \to q(x, z)) \in \mathrm{Form}.$

$\varphi_1 = \forall x p(x, a) \in \mathrm{Form},$

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x, y), a) \in \mathrm{Form},$

$\varphi_3 = \forall x(\forall y q(f(y, x), y) \to p(x, a)) \in \mathrm{Form}.$

Precedenciasorrend zárójelelhagyáshoz: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \to$.

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Definíció
Egy elsőrendű logikai szimbólumainak **interpretációja** alatt egy
$I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ rendezett négyest értünk, ahol

- U egy tetszőleges, nemüres halmaz (univerzum),
- I_{Pred} minden $p \in$ Pred-hez hozzárendel egy $p^I \subseteq U^{\mathrm{ar}(p)}$ $\mathrm{ar}(p)$-változós relációt U felett,

- I_{Func} minden $f \in \text{Func}$-hez hozzárendel egy $f^I : U^{\text{ar}(p)} \to U$ $\text{ar}(p)$-változós műveletet U-n,
- I_{Cnst} minden $c \in \text{Cnst}$-hez hozzárendel egy $c^I \in U$-t.

Definíció **Változókiértékelés** alatt egy $\kappa : \text{Ind} \to U$ leképezést értünk.

Vegyük észre, hogy κ függ az U univerzumtól.

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol
$I_{\text{Pred}}(p) = p^I, \ \ (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geq n$
$I_{\text{Pred}}(q) = q^I, \ \ \ (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$
$I_{\text{Func}}(f) = f^I, \ \ \ f^I(m, n) := m + n$
$I_{\text{Cnst}}(a) := 0,$
legyen továbbá κ egy változókiértékelés, amelyre $\kappa(x) = 5, \kappa(y) = 3$.

Definíció Egy $t \in \text{Term}$ **értékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|t|^{I,\kappa}$ jelöli és a következőképpen definiáljuk

- Ha $x \in \text{Ind}$, akkor $|x|^{I,\kappa} := \kappa(x)$,
- Ha $c \in \text{Cnst}$, akkor $|c|^{I,\kappa} := c^I$,
- $|f(t_1, t_2, \ldots, t_{\text{ar}(f)})|^{I,\kappa} := f^I(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\text{ar}(f)}|^{I,\kappa})$.

Példa Az előző példát folytatva $|f(f(x, y), y)|^{I,\kappa} = 11$.

Definíció A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \text{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció Egy $\varphi \in \text{Form}$ formula **igazságértékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

- $|p(t_1, t_2, \ldots, t_{\text{ar}(p)})|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow (|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\text{ar}(p)}|^{I,\kappa}) \in p^I$,
- $|\neg\varphi|^{I,\kappa} := \neg|\varphi|^{I,\kappa}$
- $|\varphi \circ \psi|^{I,\kappa} := |\varphi|^{I,\kappa} \circ |\psi|^{I,\kappa} \qquad \circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$

- $|\forall x\varphi|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ ha $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$ κ-nak minden κ^* x-variánsára,
- $|\exists x\varphi|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ ha $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$ κ-nak legalább egy κ^* x-variánsára.

A $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ műveletek ugyanazok, mint az ítéletlogikánál.

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$
$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$
$|p(x,y) \rightarrow q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a)$,
Minden természetes szám ≥ 0. $|\varphi_1|^{I,\kappa} = i$,

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a)$,
Minden természetes számhoz hozzá tudjuk adni egy természetes számot úgy, hogy 0-t kapjunk. $|\varphi_2|^{I,\kappa} = h$,

$\varphi_3 = \forall x(\forall y q(f(y,x),y) \rightarrow p(x,a))$,
Ha a természetes számoknak van nulleleme, akkor az egyenlő 0-val, $|\varphi_3|^{I,\kappa} = i$.

Ha $U = \mathbb{Z}$ lenne, akkor φ_2 is igaz lenne.

Definíció
Legyen φ egy formula, és tekintsük $x \in \text{Ind}$ egy előfordulását φ-ben. Azt mondjuk, hogy x ezen előfordulása **kötött**, ha x a φ egy $\exists x\psi$ vagy $\forall x\psi$ alakú részformulájába esik. Ellenkező esetben x ezen előfordulása **szabad**. Ha φ minden individuumváltozójának minden előfordulása kötött, akkor **zárt** formuláról beszélünk. Egyébként a kormula **nyitott**. Azon változókat, amelyeknek nem minden előfordulása kötött, a formula **paramétereinek** nevezzük és halmazukat $\text{Par}(\varphi)$ jelöli.

Észrevétel: Ha φ zárt, ekkor bármely I interpretáció esetén $|\varphi|^{I,\kappa}$ értéke nem függ κ-tól. Ilyenkor $|\varphi|^{I,\kappa}$ helyett $|\varphi|^{I}$ írható.

Példa Az előző példában φ_1, φ_2, φ_3 zárt formulák, míg $\forall x p(x,x) \rightarrow q(x,x)$ nyitott, mert x 3. és 4. előfordulását nem tartalmazza kvantált részformula. (A formula részformulái: $\forall x p(x,x) \rightarrow q(x,x)$, $\forall x p(x,x)$, $p(x,x)$, $q(x,x)$.)

Definíció Egy formula **prímformula**, ha atomi vagy kvantált (fő logikiai összekötője kvantor)formula.

Definíció Egy φ formula **prímkomponensei**, azok a ψ részformulái, amelyekre

- ψ prímformula ÉS
- φ-nek nincs olyan ψ-től különböző prím- részformulája, amelyiknek ψ részformulája.

Jelölje φ prímkomponenseinek halmazát $\mathrm{Prim}(\varphi)$.

Példa: $\varphi := \neg\forall x(P(x) \vee \exists y Q(x,y)) \rightarrow P(x) \wedge \neg\exists x \neg Q(x,y)$ prímkomponensei: $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(x,y)); P(x); \exists x \neg Q(x,y)$. $\psi := \exists y Q(x,y)$ azért nem prímkomponens, mert létezik φ-nek ψ és φ „közötti" prím- részformulája $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(x,y))$.

Definíció

- Egy φ elsőrendű logikai formula **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, egyébként **kielégíthetetlen**.
- φ **logikailag igaz** (vagy **érvényes**), ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, ennek jelölése $\models \varphi$.
- φ és ψ elsőrendű logikai formulák **logikailag ekvivalensek**, ha ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = |\psi|^{I,\kappa}$. Jelölése $\varphi \sim \psi$.
- Az $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$ teljesül minden $\varphi \in \mathcal{F}$-re, egyébként **kielégíthetetlen**.
- Az $\mathcal{F}$ formulahalmaznak φ **logikai következménye** (jelölés: $\mathcal{F} \models \varphi$) ha minden I, κ-ra ha minden $\psi \in \mathcal{F}$-re $|\psi|^{I,\kappa} = i$ teljesül, akkor $|\varphi|^{I,\kappa} = i$ is teljesül.
- **Quine-táblázat**: A prímkomponenseket ítéletváltozónak tekintő ítélettábla.

- Egy φ elsőrendű logikai formula **tautologikusan igaz**, ha Quine--táblázatában φ oszlopában csupa i áll. Jelölése $\models_0 \varphi$.

Definíció Adott egy elsőrendű logika φ formulája és egy I interpretáció. φ **értéktáblája** alatt a egy $|U|^{|\operatorname{Par}(\varphi)|} \times (|\operatorname{Par}(\varphi)| + |\operatorname{Prim}(\varphi) \cup \{\varphi\}|)$ méretű táblázatot értünk. A táblázat első $|\operatorname{Par}(\varphi)|$ darab oszlopát minden lehetséges módon kitöltjük U elemeivel ($|U|^{|\operatorname{Par}(\varphi)|}$ darab lehetőség). A többi oszlop megfelel $\operatorname{Prim}(\varphi) \cup \{\varphi\}$ elemeinek. Minden $\psi \in \operatorname{Prim}(\varphi) \cup \{\varphi\}$-nek megfelelő oszlopot a κ változókiértékelésnek megfelelő sorban $|\psi|^{I,\kappa}$-val töltjük ki.

Elsőrendű logikai törvények

- ha $x \notin \operatorname{Par}(\varphi)$:
  $\forall x\varphi \sim \varphi$ és $\exists x\varphi \sim \varphi$,
- $\forall x\forall y\varphi \sim \forall y\forall x\varphi$ és $\exists x\exists y\varphi \sim \exists y\exists x\varphi$,
- $\neg\exists x\varphi \sim \forall x\neg\varphi$ és $\neg\forall x\varphi \sim \exists x\neg\varphi$,
- ha $x \notin \operatorname{Par}(\varphi)$:
  $\varphi \wedge \forall x\psi \sim \forall x(\varphi \wedge \psi)$ és $\varphi \wedge \exists x\psi \sim \exists x(\varphi \wedge \psi)$,
  $\varphi \vee \forall x\psi \sim \forall x(\varphi \vee \psi)$ és $\varphi \vee \exists x\psi \sim \exists x(\varphi \vee \psi)$,
  $\varphi \to \forall x\psi \sim \forall x(\varphi \to \psi)$ és $\varphi \to \exists x\psi \sim \exists x(\varphi \to \psi)$,
  $\forall x\psi \to \varphi \sim \exists x(\psi \to \varphi)$ és $\exists x\psi \to \varphi \sim \forall x(\psi \to \varphi)$,
- $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \sim \forall x(\varphi \wedge \psi)$ és $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \sim \exists x(\varphi \vee \psi)$.

Feladat: Egy elsőrendű logikában Pred=$\{P, Q\}$, Func=$\{f\}$, Cnst=$\{a, b\}$
$\operatorname{ar}(P) = 2, \operatorname{ar}(Q) = 1, \operatorname{ar}(f) = 2$.
Tekinsük a következő $I = \langle U, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ interpretációt:
$U = \{0, 1, 2\}$,
$I_{\text{Pred}} : P \longrightarrow P^I, Q \longrightarrow Q^I$,
$I_{\text{Func}} : f \longrightarrow f^I$,
$I_{\text{Cnst}} : a \longrightarrow 0, b \longrightarrow 1$,
ahol $P^I = \{(0,1), (0,2), (2,1), (2,2)\}$,$Q^I = \{(0), (2)\}$, f^I a modulo 3 összeadás.
Készítsük el a következő formulák értéktábláját!

1. $\forall x P(x, y) \vee Q(y)$,

2. $\exists y P(x,y) \to \forall y P(f(y,y),b)$,
3. $(\forall x(P(a,y) \vee Q(x)) \to \neg\forall x \exists y P(x,y)) \wedge P(f(y,y),b)$,

Megoldás:

y	$\forall x P(x,y)$	$Q(y)$	$\forall x P(x,y) \vee Q(y)$
0	h	i	i
1	h	h	h
2	h	i	i

<table>
<tr><th>x</th><th>$\exists y P(x,y)$</th><th>$\forall y P(f(y,y),b)$</th><th>$\exists y P(x,y) \to \forall y P(f(y,y),b)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>i</td><td rowspan="3">h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>1</td><td>h</td><td>i</td></tr>
<tr><td>2</td><td>i</td><td>h</td></tr>
</table>

y	$f(y,y)$	$P(f(y,y),b)$
0	0	i
1	2	i
2	1	h

<table>
<tr><th>y</th><th>$\forall x(P(a,y) \vee Q(x))$</th><th>$\forall x \exists y P(x,y)$</th><th>$P(f(y,y),b)$</th><th>$(\forall x(P(a,y) \vee Q(x)) \to \neg\forall x \exists y P(x,y)) \wedge P(f(y,y),b)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>h</td><td rowspan="3">h</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>1</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>2</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td></tr>
</table>

Feladat: Igazoljuk, hogy $\neg\exists x \neg P(x) \to \forall x P(x)$ nem tautologikusan igaz formula, de logikailag igaz.

Megoldás:

$\exists x \neg P(x)$	$\forall x P(x)$	$\neg\exists x \neg P(x) \to \forall x P(x)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Tehát a formula nem tautologikusan igaz.

$|\neg\exists x \neg P(x) \to \forall x P(x)|^{I,\kappa} = h \Leftrightarrow |\neg\exists x \neg P(x)|^{I,\kappa} = i$ és $|\forall x P(x)|^{I,\kappa} = h \Leftrightarrow |\exists x \neg P(x)|^{I,\kappa} = h$ és $|\forall x P(x)|^{I,\kappa} = h$.

$|\exists x \neg P(x)|^{I,\kappa} = h \Leftrightarrow$ nem létezik κ-nak olyan κ^* x-variánsa $|\neg P(x)|^{I,\kappa^*} = i \Leftrightarrow$ κ-nak minden κ^* x-variánsára $|\neg P(x)|^{I,\kappa^*} = h \Leftrightarrow$ κ-nak minden κ^* x-variánsára $|P(x)|^{I,\kappa^*} = i \Leftrightarrow |\forall x P(x)|^{I,\kappa} = i$.

Tehát minden I, κ esetén a formula i, azaz a formula logikailag igaz.

Feladat: Igazoljuk, hogy ha $x \notin \mathrm{Par}(\varphi)$:
$\forall x\varphi \sim \varphi$ viszont általában (azaz ha $x \in \mathrm{Par}(\varphi)$) $\forall x\varphi \sim \varphi$ nem áll fenn.

Megoldás:

- $|\forall x\varphi|^{I,\kappa} = i \;\Leftrightarrow\; \kappa$-nak minden κ^* x-variánsára $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$.
  Mivel $x \notin \mathrm{Par}(\varphi)$, ezért $|\varphi|^{I,\kappa^*} = |\varphi|^{I,\kappa}$.

- Nem igaz, hogy $\forall x\varphi \sim \varphi$ általában. Legyen az I interpretáció a következő $U := \{0,1\}, R := \{P\}, M := \{\}, K := \{\}$, $\nu(P) := 1$, $P^{\mathrm{ig}} := \{(0)\}$ $\varphi := P(x)$.

  Az értéktábla:

x	$P(x)$	$\forall x P(x)$
0	i	h
1	h	

  Legyen κ az az I-beli interpretáció, ami x-hez a 0-t rendeli, ekkor $|P(x)|^{I,\kappa} = i$, de $|\forall x P(x)|^{I,\kappa} = h$.

Feladat: Igazoljuk, hogy $\neg\exists x\varphi \sim \forall x\neg\varphi$.

Megoldás:
$|\neg\exists x\varphi|^{I,\kappa} = i \;\Leftrightarrow\; |\exists x\varphi|^{I,\kappa} = h \;\Leftrightarrow\;$ nem létezik κ-nak olyan κ^* x-variánsa $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i \;\Leftrightarrow\; \kappa$-nak minden κ^* x-variánsára $|\varphi|^{I,\kappa^*} = h \;\Leftrightarrow\; \kappa$-nak minden κ^* x-variánsára $|\neg\varphi|^{I,\kappa^*} = i \;\Leftrightarrow\; |\forall x\neg\varphi|^{I,\kappa} = i$.