Valószínűségszámítás

4. és 5. előadás

Arató Miklós

2020.03.03. és 2020.03.10.

Tartalomjegyzék

Meghatározás és tulajdonságok

Definíció: $\xi \geq 0$ **diszkrét**, ekkor $E\xi = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k)$.

Definíció: ξ **diszkrét**, ekkor $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, ha $\min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty$.

Tulajdonságok:

1. $E(c \cdot \xi) = c \cdot E\xi$.
2. Ha $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$.
3. Ha létezik $E\xi$, akkor $|E\xi| \leq E|\xi|$.
4. Ha létezik $E\xi$, $E\eta$, és $E\xi + E\eta$ értelmes, akkor $E(\xi + \eta) = E\eta + E\xi$ is létezik.
5. Ha $P(\xi = 0) = 1 \Rightarrow E\xi = 0$.

Diszkrét példák

1. c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.
2. A indikátorárának várható értéke
   $E\chi_A = 0 \cdot P(\chi_A = 0) + 1 \cdot P(\chi_A = 1) = P(A)$.
3. $\xi \sim B(n,p)$ **binomiális** eloszlású valószínűségi változó. Ekkor
   $E\xi = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$
   $$np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np.$$

Diszkrét példák

1. c konstans valószínűségi változó $\Rightarrow Ec = c$.

2. A indikátorárának várható értéke
$E\chi_A = 0 \cdot P(\chi_A = 0) + 1 \cdot P(\chi_A = 1) = P(A)$.

3. $\xi \sim B(n,p)$ **binomiális** eloszlású valószínűségi változó. Ekkor
$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} =$$
$$np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)}}_{=(p+(1-p))^{n-1}=1} = np.$$
$\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ (független indikátorok összege)$\Rightarrow$
$E\xi = E\eta_1 + \ldots + E\eta_n = np$.

Diszkrét példák folytatás

4. $\xi \sim \lambda$-**Poisson**, ekkor
$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=1} = \lambda.$$

5. Visszatevés nélkül húzzunk a dobozból. Ekkor a ξ valószínűségi változó **hipergeometrikus** eloszlású, és várható értéke: $E\xi = \sum_{k=0}^{\min(n,M)} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Az egyszerűbb kiszámítás céljából legyen $\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_M$, ahol $\eta_i := 1$, ha az i-edik piros golyót kihúztuk, különben pedig 0. Ekkor $P(\eta_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$, így $E\xi = n \cdot \frac{M}{N}$.

Meghatározás és tulajdonságok

Definíció: $\xi \geq 0$ **abszolút folytonos eloszlású**, ekkor $E\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_\xi(x)\ dx$.

Definíció: ξ **abszolút folytonos eloszlású**, ekkor $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, ha $\min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty$.

$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_\xi(x)\ dx$

$\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi = \int_0^\infty (1 - F_\xi(y))\ dy$

ξ, η függetlenek, $E|\xi|$, $E|\eta|$ végesek. $\Rightarrow E|\xi \cdot \eta|$ is véges és $E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$.

Abszolút folytonos eloszlású példák

1. $\xi \sim E(a,b)$ esetén $E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}$.
2. λ-**exponenciális** eloszlás várható értéke $E\xi = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\, dy = \frac{1}{\lambda}$.
3. $\xi \sim N(0,1)$ esetén $E\xi = \int_{-\infty}^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0$, hiszen a sűrűségfüggvény szimmetrikus, így az integrálban egy páratlan függvény szerepel (továbbá az integrál konvergens, mert elég nagy x-re $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ felülről becsülhető az e^{-x} függvénnyel). Általánosan pedig $m + \sigma\xi \sim N(m, \sigma^2)$ esetén $E(m+\sigma\xi) = m + \sigma \cdot E\xi = m$.

Meghatározás és Teljes várható érték tétel

Definíció: $P(A) > 0$, ξ diszkrét, ekkor ξ **feltételes várható értéke** az A feltételre nézve:
$E(\xi|A) = \sum_k x_k \cdot P(\xi = x_k|A)$.

Teljes várható érték tétel: ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel és $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, ahol $0 < P(A_i)$. Ekkor $E\xi = \sum_n E(\xi|A_n) \cdot P(A_n)$.

Wald-azonosság

$X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyekre létezik EX_i, és N egy tőlük független pozitív, egészértékű valószínűségi változó.

Ekkor $E(X_1 + \ldots X_N) = EX_1 \cdot EN$.

$P(X_1 + \ldots + X_N = y | N = n) = \frac{P(X_1+\ldots+X_n=y, N=n)}{P(N=n)} =$

$P(X_1 + \ldots + X_n = y) \Rightarrow E(X_1 + \ldots + X_N = y | N = n) = n \cdot EX_1 \Rightarrow$

$E(X_1 + \ldots + X_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_1 + \ldots + X_N | N = n) \cdot P(N = n) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot EX_1 \cdot P(N = n) = EX_1 \cdot EN$

Geometriai eloszlás

$P(\eta = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, ahol $k \geq 1$.

$E\eta = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$.

A : az első kísérlet sikeres

$E\eta = E(\eta|A) \cdot P(A) + E(\eta|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \Rightarrow$

$E\eta = 1 \cdot p + (1 + E\eta) \cdot (1-p) \Rightarrow E\eta = \frac{1}{p}$

Várhatóan mikor lesz meg mind a 24 törpünk?

$\frac{24}{24} + \frac{24}{23} + \ldots + \frac{24}{2} + \frac{24}{1} = 90,623$

szimmetrikus bolyongás

ξ : lépések száma n-ből 0-ba ($n \geq 0$), $v(n) := E\xi$.
A : az első lépésben jobbra lépünk $\Rightarrow E\xi = E(\xi|A) \cdot \frac{1}{2} + E(\xi|\overline{A}) \cdot \frac{1}{2}$
$E(\xi|A) = 1 + v(n+1)$ és $E(\xi|\overline{A}) = 1 + v(n-1) \Rightarrow$
$2v(n) = 2 + v(n+1) + v(n-1)$
$v(0) = 0$
$v(n+1) - v(n) = v(n) - v(n-1) - 2 = \ldots = v(1) - v(0) - 2n.$
$\Rightarrow$
$v(n) = v(n) - v(n-1) + v(n-1) + v(n-2) + \ldots + v(1) - v(0) + v(0)$
$\Rightarrow n \cdot v(1) - n(n-1) = n(v(1) - (n-1)) \geq 0 \Rightarrow v(1) \geq n-1$
minden n-re $\Rightarrow v(1) = +\infty \Rightarrow$
szimmetrikus bolyongásnál várhatóan végtelen sok lépésben térünk vissza a kiindulási pontba.

Szórásnégyzet

Definíció: $D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2$ a ξ valószínűségi változó **szórásnégyzete**, ha az $E\xi$ létezik és véges.
Definíció:ξ **szórása** a szórásnégyzet négyzetgyöke, azaz $D\xi = \sqrt{D^2\xi}$.

1. A szórásnégyzet mindig nemnegatív.
2. $D^2\xi < \infty \Leftrightarrow E\xi^2 < \infty$
   Ugyanis: $(\Leftarrow)$ $|\xi| \leq 1 + |\xi|^2$ és $E\xi^2 < \infty$ miatt $E\xi < \infty$, így $(\xi - E\xi)^2 \leq 2(\xi^2 + E\xi^2)$, $(\Rightarrow)$ $\xi^2 \leq 2((\xi - E\xi)^2 + (E\xi)^2)$.
3. $D^2\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$:, $D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + (E\xi)^2$.
4. Minden A valós számra $E(\xi - A)^2 \geq D^2\xi$:, $E(\xi - A)^2 = E(\xi^2 - 2A\xi + A^2) = E\xi^2 - (E\xi)^2 + (E\xi)^2 - 2A \cdot E\xi + A^2 = D^2\xi + (E\xi - A)^2$.

Szórásnégyzet (folyt.)

5) $D^2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = c$:
Ha $\xi = c$, akkor $\xi - E\xi = c - c = 0 \Rightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0$.
Ha $E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Rightarrow (\xi - E\xi)^2 = 0 \Rightarrow \xi = E\xi$

6) $D^2(a\xi + b) = a^2D^2\xi$:
$E(a\xi + b - aE\xi - b)^2 = E(a^2(\xi - E\xi)^2) = a^2E(\xi - E\xi)^2$.

Szórásnégyzet (folyt.)

7. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként függetlenek és $D^2\xi_1, \ldots, D^2\xi_n < \infty \Rightarrow D^2(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D^2\xi_i$:.

$$D^2(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = E\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\Big)^2 =$$

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)^2 + \sum_{i\neq j}(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E(\xi_i - E\xi_i)^2}_{D^2\xi_i} + \sum_{i\neq j}\underbrace{E\left((\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\right)}_{=E(\xi_i - E\xi_i)\cdot E(\xi_j - E\xi_j)=0\cdot 0}.$$

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D^2\xi_i.$$

Szórásnégyzet példák

1. A **indikátorának** szórásnégyzete
$D^2\chi_A = E\chi_A^2 - (E\chi_A)^2 = E\chi_A - (E\chi_A)^2 = P(A)\cdot(1-P(A))$.

2. $\xi \sim B(n,p)$ (**binomiális valószínűségi változó**)
$X_1,\ldots,X_n$ független p-ind. $\Rightarrow X_1+\ldots+X_n \sim B(n,p)$ és
$D^2\xi = D^2(X_1+\ldots+X_n) = D^2X_1+\ldots+D^2X_n = n\cdot p\cdot(1-p)$.

3. η λ-**exponenciális** valószínűségi változó,
$E\eta = \frac{1}{\lambda}$.
$E\eta^2 = \int_0^\infty x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx = \left[x^2(-e^{-\lambda x})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\cdot e^{-\lambda x}\,dx$
az összeg első tagja 0, az integrál
$\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}E\eta \Rightarrow E\eta^2 = \frac{2}{\lambda^2}$.
$D^2\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Szórásnégyzet példák (folyt.)

4. $\xi \sim N(0,1)$ (**normális** eloszlású valószínűségi változó)
   $E\xi = 0 \Rightarrow D^2\xi = E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx =$
   $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[x \cdot (-e^{-\frac{x^2}{2}})\right]_{-\infty}^{\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1} = 1.$
   Általánosan $m + \sigma\xi \sim N(m, \sigma^2)$
   $D^2(m + \sigma\xi) = \sigma^2 \cdot D^2\xi = \sigma^2.$

Szórásnégyzet példák (folyt.)

5. $\eta \sim \lambda$-**Poisson**.
$E\eta = \lambda$.
$E\eta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$
$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!} = (\lambda^2 \cdot 1) + (\lambda) \Rightarrow$
$D^2\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Momentumok és centrális momentumok

Definíció: ξ **k-adik momentuma:** $E\xi^k$

Definíció: ξ **k-adik abszolút momentuma:** $E|\xi|^k$

Definíció: ξ **k-adik centrális momentuma:** $E(\xi - E\xi)^k$

Definíció: ξ **k-adik abszolút centrális momentuma:** $E|\xi - E\xi|^k$

.

Kovariancia és korreláció

Definíció: ξ és η valószínűségi változók **kovarianciája** $cov(\xi,\eta) = E\big\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\big\}$,
korrelációja $R(\xi,\eta) = corr(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{D\xi \cdot D\eta}$.

Tulajdonságok:

1. $cov(\xi,\eta) = E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta$.
2. $|R(\xi,\eta)| \leq 1$:
   $|cov(\xi,\eta)| = \big|E\big\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\big\}\big| \overset{CSB}{\leq} \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 \cdot E(\eta - E\eta)^2} = D\xi \cdot D\eta.$

Kovariancia és korreláció tulajdonságok

3. $|R(\xi,\eta)| = 1 \Leftrightarrow$ létezik $a \neq 0$ és b, hogy $\xi = a\eta + b$.
   Biz.: $\Leftarrow$
   létezik ilyen a és $b \Rightarrow \xi - E\xi = a(\eta - E\eta)$, $D^2\xi = a^2 D^2\eta \Rightarrow$
   $D\xi = |a| D\eta$, $cov(\xi,\eta) = aE(\eta - E\eta)^2 = aD^2\eta \Rightarrow$.
   $R = \frac{aD^2\eta}{|a|D\eta D\eta} = \frac{a}{|a|}$
   $\Rightarrow$
   $R(\xi,\eta) = 1$
   $\xi' = \frac{\xi - E\xi}{D\xi}, \eta' = \frac{\eta - E\eta}{D\eta} \Rightarrow$
   $E\xi' = E\eta' = 0$ és $D^2\xi' = D^2\eta' = 1 \Rightarrow$
   $E(\xi'\eta') = 1, E(\xi' - \eta')^2 = E\xi'^2 - 2E(\xi'\eta') + E\eta'^2 = 0 \Rightarrow$
   $\xi' = \eta' \Rightarrow$
   ξ az η-nak lineáris transzformáltja

Kovariancia és korreláció tulajdonságok

4. ξ és η függetlenek $\Rightarrow R(\xi,\eta)=0$
$cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta=E\xi\cdot E\eta-E\xi\cdot E\eta=0.$

5. $\min\limits_{a,b} E(\xi-a\eta-b)^2=E(\xi-m_1-r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot(\eta-m_2))^2=(1-r^2)\cdot\sigma_1^2,$
ahol $m_1=E\xi$, $m_2=E\eta$, $\sigma_1^2=D^2\xi$, $\sigma_2^2=D^2\eta$ és $r=R(\xi,\eta)$.
Biz.:
$E(\xi-a\eta-b)^2=E(\xi-m_1-a(\eta-m_2)+m_1-am_2-b)^2=$
$=\sigma_1^2+a^2\sigma_2^2+(m_1-am_2-\underbrace{b}_{=m_1-am_2})^2-2a\cdot\underbrace{cov(\xi,\eta)}_{=r\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2}=$
$=\sigma_1^2+\underbrace{a^2\sigma_2^2-2a\cdot r\sigma_1\sigma_2}_{(a\sigma_2-r\sigma_1)^2-r^2\sigma_1^2}=(1-r^2)\cdot\sigma_1^2+(a\sigma_2-r\sigma_1)^2\Rightarrow$
$a=r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Egyenlőtlenségek

Tétel [Markov-egyenlőtlenség]: Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az $E\xi$ várható értéke, továbbá legyen c pozitív szám. Ekkor $P(\xi \geq c) \leq \frac{E\xi}{c}$.

Tétel[Csebisev-egyenlőtlenség]: Ha ξ szórásnégyzete véges, azaz $D^2\xi < \infty$, valamint $0 \leq \lambda$, akkor teljesül a $P(|\xi - E\xi| \geq \lambda) \leq \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$ egyenlőtlenség.

Biz.: A Markov-egyenlőtlenségből könnyen adódik, hiszen az $\eta := (\xi - E\xi)^2$ választással $P(\eta \geq \lambda^2) \leq \frac{E\eta}{\lambda^2} = \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$.

Példa

Egy párt szavazótáborát szeretnénk megbecsülni úgy, hogy legalább $0,95$ valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk. Jelölje N az összes ember, M a kérdéses pártra szavazók, n pedig a megkérdezettek számát, ekkor $p := \frac{M}{N}$-et akarjuk jól közelíteni. Legyen továbbá x_i értéke 1, ha az i-edik megkérdezett az adott pártra szavaz és 0 különben. Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \frac{M}{N}\right| \le 0,01\right) \ge 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ami pontosan akkor igaz, ha $P\left(\left|\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \le 0,05$. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján $P\left(\left|\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} - p\right| > 0,01\right) \le \frac{D^2\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)}{0{,}01^2}$, ahol $\frac{\frac{1}{n^2}D^2(\sum x_i)}{0{,}01^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot p(1-p)}{0{,}01^2} = \frac{10000\cdot p(1-p)}{n} \le \frac{10000\cdot\frac{1}{4}}{n} \le \frac{5}{100}$, tehát $n \ge 50000$ ember választása biztosan elegendő.

Törvény

Tétel[A nagy számok gyenge törvénye]: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $D^2\xi_i < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $0 < \varepsilon$-ra

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Biz.: Tudjuk, hogy $E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = n \cdot m$. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot D^2\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} D^2\xi_i}{\varepsilon^2} =$$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{D^2\xi_1}{\varepsilon^2} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Példa

Tekintsünk független kísérleteket, minden kísérlet legyen p valószínűséggel sikeres.
Jelölje η_n a sikeres kísérletek számát az első n kísérletben.
Ekkor $P(|\frac{\eta_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$.
Legyen ugyanis $\eta_n = X_1 + \ldots + X_n$, ahol $X_i = 1$, ha az i-edik kísérlet sikeres, különben pedig 0.
Továbbá $EX_i = p$ és $D^2 X_i = p(1-p)$. Így X_i-kre teljesülnek az előbbi tétel feltételei, tehát a relatív gyakoriság tart p-hez.