Logika - Bizonyításelmélet

Alapvető axiómasémák

$(C1) \quad A \supset (B \supset A)$

$(C2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

$(C3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

Alapvető axiómasémák

(C1) $A \supset (B \supset A)$

(C2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(C3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

Egy egyszerű levezetés

$\{X\} \vdash_0 Y \supset X$

1.	$X \supset (Y \supset X)$	[C1; $A\|\|X$; $B\|\|Y$]
2.	X	[hip]
3.	$Y \supset X$	[mp(1,2)]

Alapvető axiómasémák

(C1) $A \supset (B \supset A)$

(C2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(C3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

1. Feladat

$\vdash_0 A \supset A$

1. $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$
2. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$
3. $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$
4. $A \supset (A \supset A)$
5. $A \supset A$

Ez után használható axiómaséma: Biz1 - $A \supset A$

Alapvető axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

1. Feladat

$\vdash_0 A \supset A$

1.	$(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)))$	[C2; $A \| \| A$; $B \| \| A \supset A$; $C \| \| A$]
2.	$A \supset ((A \supset A) \supset A)$	[C1; $A \| \| A$; $B \| \| A \supset A$]
3.	$(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$	[mp(1,2)]
4.	$A \supset (A \supset A)$	[C1; $A \| \| A$; $B \| \| A$]
5.	$A \supset A$	[mp(3,4)]

Ez után használható axiómaséma: Biz1 - $A \supset A$

Dedukciós tétel
$\{F_1, F_2, ...F_n\} \vdash_0 G \Leftrightarrow \{F_1, F_2, ...F_{n-1}\} \vdash_0 F_n \supset G$

Dedukciós tétel

$\{F_1, F_2, ...F_n\} \vdash_0 G \Leftrightarrow \{F_1, F_2, ...F_{n-1}\} \vdash_0 F_n \supset G$

2. Feladat

Készítsük el az előző levezetést úgy, hogy használjuk a dedukciós tételt is:

$\vdash_0 A \supset A \Leftrightarrow \{A\} \vdash_0 A$

Bizonyítani kell: $\{A\} \vdash_0 A$

Dedukciós tétel

$\{F_1, F_2, ...F_n\} \vdash_0 G \Leftrightarrow \{F_1, F_2, ...F_{n-1}\} \vdash_0 F_n \supset G$

2. Feladat

Készítsük el az előző levezetést úgy, hogy használjuk a dedukciós tételt is:

$\vdash_0 A \supset A \Leftrightarrow \{A\} \vdash_0 A$

Bizonyítani kell: $\{A\} \vdash_0 A$

1. A [hip]

3. Feladat
Bizonyítsuk be, hogy az A és $\neg\neg A$ formulák ekvivalensek, azaz
$\{\neg\neg A\} \vdash_0 A$,
illetve
$\{A\} \vdash_0 \neg\neg A$

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(Biz1)$	$A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg\neg A\} \vdash_0 A$

1. $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$
2. $\neg A \supset \neg A$
3. $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$
4. $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$
5. $\neg\neg A$
6. $\neg A \supset \neg\neg A$
7. A

Ez után használható axiómaséma: C4 - $\neg\neg A \supset A$

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(Biz1)$	$A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg\neg A\} \vdash_0 A$

1.	$(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$	[C3; $A \| A$; $B \| \neg A$]
2.	$\neg A \supset \neg A$	[Biz1; $A \| \neg A$]
3.	$(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$	[mp(1,2)]
4.	$\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$	[C1; $A \| \neg\neg A$; $B \| \neg A$]
5.	$\neg\neg A$	[hip]
6.	$\neg A \supset \neg\neg A$	[mp(4,5)]
7.	A	[mp(3,6)]

Ez után használható axiómaséma: C4 - $\neg\neg A \supset A$

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(Biz1)$	$A \supset A$
$(C4)$	$\neg\neg A \supset A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{A\} \vdash_0 \neg\neg A$

1.	$(\neg\neg\neg A \supset A) \supset ((\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A)$	[C3; $A \| \| \neg\neg A$; $B \| \| A$]
2.	$A \supset (\neg\neg\neg A \supset A)$	[C1; $A \| \| A$; $B \| \| \neg\neg\neg A$]
3.	A	[hip]
4.	$\neg\neg\neg A \supset A$	[mp(2,3)]
5.	$(\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A$	[mp(1,4)]
6.	$\neg\neg\neg A \supset \neg A$	[C4; $A \| \| \neg A$]
7.	$\neg\neg A$	[mp(5,6)]

Ez után használható axiómaséma: Biz3 - $A \supset \neg\neg A$

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(Biz1)$	$A \supset A$
$(C4)$	$\neg\neg A \supset A$
$(Biz3)$	$A \supset \neg\neg A$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell: $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

1.	$B \supset \neg\neg B$	[Biz3; $A\|\|B$]
2.	$A \supset B$	[hip]
3.	$\neg\neg A \supset A$	[C4; $A\|\|A$]
4.	$\neg\neg A$	[hip]
5.	A	[mp(3,4)]
6.	B	[mp(2,5)]
7.	$\neg\neg B$	[mp(1,6)]

Ez után használható axiómaséma: Biz4 - $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.
Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!
Bizonyítani kell:
$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$, illetve
$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(Biz1)$	$A \supset A$
$(C4)$	$\neg\neg A \supset A$
$(Biz3)$	$A \supset \neg\neg A$
$(Biz4)$	$(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

1.	$(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$	[C3; $A\|\|\neg\neg X$; $B\|\|\neg Y$]
2.	$\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$	[C1; $A\|\|\neg Y$; $B\|\|\neg\neg X$]
3.	$\neg Y$	[hip]
4.	$\neg\neg X \supset \neg Y$	[mp(2,3)]
5.	$(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$	[mp(1,4)]
6.	$(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$	[Biz4; $A\|\|X$; $B\|\|Y$]
7.	$X \supset Y$	[hip]
8.	$\neg\neg X \supset \neg\neg Y$	[mp(5,6)]
9.	$\neg X$	[mp(3,6)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(Biz1)$	$A \supset A$
$(C4)$	$\neg\neg A \supset A$
$(Biz3)$	$A \supset \neg\neg A$
$(Biz4)$	$(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

1.	$(\neg Y \supset \neg X) \supset ((\neg Y \supset \neg\neg X) \supset Y)$	[C3; $A \| Y$; $B \| \neg X$]
2.	$\neg Y \supset \neg X$	[hip]
3.	$(\neg Y \supset \neg\neg X) \supset Y$	[mp(1,2)]
4.	$\neg\neg X \supset (\neg Y \supset \neg\neg X)$	[C1; $A \| \neg\neg X$; $B \| \neg Y$]
5.	$X \supset \neg\neg X$	[Biz3; $A \| X$]
6.	X	[hip]
7.	$\neg\neg X$	[mp(5,6)]
8.	$\neg Y \supset \neg\neg X$	[mp(4,7)]
9.	Y	[mp(3,8)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(Biz1)$	$A \supset A$
$(C4)$	$\neg\neg A \supset A$
$(Biz3)$	$A \supset \neg\neg A$
$(Biz4)$	$(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió): $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

1.	$(\neg\neg F \supset \neg K) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg K) \supset \neg F)$	[C3; $A \| \neg F$; $B \| \neg K$]
2.	$\neg K \supset (\neg\neg F \supset \neg K)$	[C1; $A \| \neg K$; $B \| \neg\neg F$]
3.	$(\neg\neg K \supset \neg A) \supset ((\neg\neg K \supset \neg\neg A) \supset \neg K)$	[C3; $A \| \neg K$; $B \| \neg A$]
4.	$\neg A \supset (\neg\neg K \supset \neg A)$	[C1; $A \| \neg A$; $B \| \neg\neg K$]
5.	$\neg A$	[hip]
6.	$\neg\neg K \supset \neg A$	[mp(4,5)]
7.	$(\neg\neg K \supset \neg\neg A) \supset \neg K$	[mp(3,6)]
8.	$(K \supset A) \supset (\neg\neg K \supset \neg\neg A)$	[Biz4; $A \| K$; $B \| A$]
9.	$K \supset A$	[hip]
10.	$\neg\neg K \supset \neg\neg A$	[mp(8,9)]
11.	$\neg K$	[mp(7,10)]
12.	$\neg\neg F \supset \neg K$	[mp(2,11)]
13.	$(\neg\neg F \supset \neg\neg K) \supset \neg F$	[mp(1,12)]
14.	$(F \supset K) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg K)$	[Biz4; $A \| F$; $B \| K$]
15.	$F \supset K$	[hip]
16.	$\neg\neg F \supset \neg\neg K$	[mp(14,15)]
17.	$\neg F$	[mp(13,16)]

6. Feladat

Nyomozós példa (rövidített verzió): $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

Másik megoldás:

1.	$(\neg\neg F \supset \neg A) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F)$	[C3; $A\|\|\neg F$; $B\|\|\neg A$]
2.	$\neg A \supset (\neg\neg F \supset \neg A)$	[C1; $A\|\|\neg A$; $B\|\|\neg\neg F$]
3.	$\neg A$	[hip]
4.	$\neg\neg F \supset \neg A$	[mp(2,3)]
5.	$(\neg\neg F \supset \neg\neg A) \supset \neg F$	[mp(1,4)]
6.	$(F \supset A) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg A)$	[Biz4; $A\|\|F$; $B\|\|A$]
7.	$(F \supset (K \supset A)) \supset ((F \supset K) \supset (F \supset A))$	[C2; $A\|\|F$; $B\|\|K$; $C\|\|A$]
8.	$(K \supset A) \supset (F \supset (K \supset A))$	[C1; $A\|\|K \supset A$; $B\|\|F$]
9.	$K \supset A$	[hip]
10.	$F \supset (K \supset A)$	[mp(8,9)]
11.	$(F \supset K) \supset (F \supset A)$	[mp(7,10)]
12.	$F \supset K$	[hip]
13.	$F \supset A$	[mp(11,12)]
14.	$\neg\neg F \supset \neg\neg A$	[mp(6,13)]
15.	$\neg F$	[mp(5,14)]

Predikátumkalkulus

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x\|\|t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x\|\|t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya

$\{A_1, A_2 ...\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 ...\} \vdash \forall x B$

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x\|\|t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x\|\|t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya

$\{A_1, A_2 \ldots\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 \ldots\} \vdash \forall x B$

1. Feladat

Adjuk meg a következő levezetést: $\{\forall x \forall y Q(x, y)\} \vdash Q(x, y)$

1.	$\forall x \forall y Q(x, y)$	[hip]
2.	$\forall x \forall y Q(x, y) \supset \forall y Q(x, y)$	[C11; $A\|\|\forall y Q(x, y)$, $t\|\|x$]
3.	$\forall y Q(x, y)$	[mp(1,2)]
4.	$\forall y Q(x, y) \supset Q(x, y)$	[C11; $A\|\|Q(x, y)$, $t\|\|y$]
5.	$Q(x, y)$	[mp(3,4)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x\|\|t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x\|\|t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)
$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya
$\{A_1, A_2 \dots\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 \dots\} \vdash \forall x B$

2. Feladat

Bizonyítható a következő kifejezés? $\vdash \forall x P(x) \supset \forall y P(y)$

Dedukciós tétel használata után: $\{\forall x P(x)\} \vdash \forall y P(y)$

1.	$\forall y(\forall x P(x) \supset P(y)) \supset (\forall y \forall x P(x) \supset \forall y P(y))$	[C17; $A\|\|\forall x P(x)$; $B\|\|P(y)$]
2.	$\forall y(\forall x P(x) \supset P(y))$	[C11 általánosítás; $A\|\|P(x)$]
3.	$\forall y \forall x P(x) \supset \forall y P(y)$	[mp(1,2)]
4.	$\forall x P(x) \supset \forall y \forall x P(x)$	[C15; $A\|\|\forall x P(x)$]
5.	$\forall x P(x)$	[hip]
6.	$\forall y \forall x P(x)$	[mp(4,5)]
7.	$\forall y P(y)$	[mp(3,6)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x \| t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x \| t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)
$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya
$\{A_1, A_2 \ldots\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 \ldots\} \vdash \forall x B$

2. Feladat

Bizonyítható a következő kifejezés? $\vdash \forall x P(x) \supset \forall y P(y)$

Dedukciós tétel használata után: $\{\forall x P(x)\} \vdash \forall y P(y)$
Általánosítás szabály alapján elegendő: $\{\forall x P(x)\} \vdash P(y)$

1.	$\forall x P(x) \supset P(y)$	[C11; $A \| P(x)$]
2.	$\forall x P(x)$	[hip]
3.	$P(y)$	[mp(1,2)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x \| \| t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x \| \| t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)
$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya
$\{A_1, A_2 \dots\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 \dots\} \vdash \forall x B$

3. Feladat

Bizonyítható ekvivalens-e a következő két formula? $\forall x(R(y) \supset P(x)) = R(y) \supset \forall x P(x)$

Első levezetés: $\forall x(R(y) \supset P(x)) \vdash R(y) \supset \forall x P(x)$

Dedukciós tétel használata után: $\{\forall x(R(y) \supset P(x)), R(y)\} \vdash \forall x P(x)$
Általánosítás szabály alapján elegendő: $\{\forall x(R(y) \supset P(x)), R(y)\} \vdash P(x)$

1.	$\forall x(R(y) \supset P(x))$	[hip]
2.	$\forall x(R(y) \supset P(x)) \supset (R(y) \supset P(x))$	[C11]
3.	$R(y) \supset P(x)$	[mp(1,2)]
4.	$R(y)$	[hip]
5.	$P(x)$	[mp(3,4)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x \| t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x \| t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)
$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya
$\{A_1, A_2 \dots\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 \dots\} \vdash \forall x B$

3. Feladat

Bizonyítható ekvivalens-e a következő két formula? $\forall x(R(y) \supset P(x)) = R(y) \supset \forall x P(x)$

Második levezetés: $\{R(y) \supset \forall x P(x)\} \vdash \forall x(R(y) \supset P(x))$

Általánosítás szabály alapján elegendő: $\{R(y) \supset \forall x P(x)\} \vdash R(y) \supset P(x)$

1.	$(R(y) \supset (\forall x P(x) \supset P(x))) \supset ((R(y) \supset \forall x P(x)) \supset (R(y) \supset P(x))$	[C2]
2.	$(\forall x P(x) \supset P(x)) \supset (R(y) \supset (\forall x P(x) \supset P(x)))$	[C1]
3.	$\forall x P(x) \supset P(x)$	[C11]
4.	$R(y) \supset (\forall x P(x) \supset P(x))$	[mp(2,3)]
5.	$(R(y) \supset \forall x P(x)) \supset (R(y) \supset P(x))$	[mp(1,4)]
6.	$R(y) \supset \forall x P(x)$	[hip]
7.	$R(y) \supset P(x)$	[mp(5,6)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x\|\|t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x\|\|t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)
$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya
$\{A_1, A_2 \dots\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 \dots\} \vdash \forall x B$

3. Feladat

Bizonyítható ekvivalens-e a következő két formula? $\forall x(R(y) \supset P(x)) = R(y) \supset \forall x P(x)$

Második levezetés: $\{R(y) \supset \forall x P(x)\} \vdash \forall x(R(y) \supset P(x))$

Hogy lett volna szebb?

Általánosítás szabály alapján elegendő: $\{R(y) \supset \forall x P(x)\} \vdash R(y) \supset P(x)$
Dedukciós tétel használata után: $\{R(y) \supset \forall x P(x), R(y)\} \vdash P(x)$

1.	$R(y) \supset \forall x P(x)$	[hip]
2.	$R(y)$	[hip]
3.	$\forall x P(x)$	[mp(1,2)]
4.	$\forall x P(x) \supset P(x)$	[C11]
5.	$P(x)$	[mp(3,4)]

Használható axiómasémák

$(C1)$	$A \supset (B \supset A)$
$(C2)$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
$(C3)$	$(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

$(C11)$	$\forall x A \supset [A(x\|\|t)]$
$(C12)$	$\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$
$(C13)$	$[A(x\|\|t)] \supset \exists x A$
$(C15)$	$A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
$(C17)$	$\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

Levezetési szabály (modus ponens)
$\{A \supset B, A\} \vdash B$

Általánosítás szabálya
$\{A_1, A_2 \ldots\} \vdash B$ és $x \notin par(A_i) \Rightarrow \{A_1, A_2 \ldots\} \vdash \forall x B$

4. Feladat

Bizonyítható-e a következő formula: $\forall x(\neg Q(x,y) \supset R(z)) \supset (\neg R(z) \supset \forall x Q(x,y))$?

$\{\} \vdash \forall x(\neg Q(x,y) \supset R(z)) \supset (\neg R(z) \supset \forall x Q(x,y)) \iff$ (dedukciós tétel)
$\{\forall x(\neg Q(x,y) \supset R(z))\} \vdash (\neg R(z) \supset \forall x Q(x,y)) \iff$ (dedukciós tétel)
$\{\forall x(\neg Q(x,y) \supset R(z)), \neg R(z)\} \vdash \forall x Q(x,y) \Rightarrow$ (általánosítás)
$\{\forall x(\neg Q(x,y) \supset R(z)), \neg R(z)\} \vdash Q(x,y)$

1.	$(\neg Q(x,y) \supset R(z)) \supset ((\neg Q(x,y) \supset \neg R(z)) \supset Q(x,y))$	[C3; $A\|\|Q(x,y)$; $B\|\|R(z)$]
2.	$\forall x(\neg Q(x,y) \supset R(z)) \supset (\neg Q(x,y) \supset R(z))$	[C11; $A\|\|\neg Q(x,y) \supset R(z)$]
3.	$\forall x(\neg Q(x,y) \supset R(z))$	[hip]
4.	$\neg Q(x,y) \supset R(z)$	[mp(2,3)]
5.	$((\neg Q(x,y) \supset \neg R(z)) \supset Q(x,y))$	[mp(1,4)]
6.	$\neg R(z) \supset (\neg Q(x,y) \supset \neg R(z))$	[C1; $A\|\|\neg R(z)$; $B\|\|\neg Q(x,y)$]
7.	$\neg R(z)$	[hip]
8.	$\neg Q(x,y) \supset \neg R(z)$	[mp(6,7)]
9.	$Q(x,y)$	[mp(5,8)]