Bizonyításelmélet

October 14, 2020

Tartalomjegyzék

1 Elmélet

Az alap axiómasémák:

$$\begin{array}{ll}
(C1) & A \supset (B \supset A) \\
(C2) & (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) \\
(C3) & (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(C11) & \forall x A \supset [A(x||t)] \\
(C15) & A \supset \forall x A, \text{ ahol } x \notin Par(A) \\
(C17) & \forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)
\end{array}$$

A kalkulust kiegészítő axiómasémák:

$$\begin{array}{ll}
(C4) & \neg\neg A \supset A \\
(C5) & A \supset (B \supset A \wedge B) \\
(C6) & A \wedge B \supset A \\
(C7) & A \wedge B \supset B \\
(C8) & (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)) \\
(C9) & A \supset A \vee B \\
(C10) & B \supset A \vee B
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(C12) & \forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A), \text{ ahol } x \notin Par(B) \\
(C13) & [A(x||t)] \supset \exists x A \\
(C14) & \forall x(A \supset B) \supset (\exists x A \supset B), \text{ ahol } x \notin Par(B) \\
(C16) & \text{(C1)-(C15) axiómák általánosításai}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(Biz1) & A \supset A \\
(Biz3) & A \supset \neg\neg A \\
(Biz4) & (A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)
\end{array}$$

2 Feladatok

2.1 Ítéletkalkulus

A feladatokban sorban haladva bármikor használhatjuk a már egyszer elkészített bizonyításokat!

1. Bizonyítsuk a következőt: $\vdash_0 A \supset A$
   - Próbáljuk meg dedukciós nélkül megoldani a feladatot úgy, hogy csak az axiómasémák segítségével levezetjük a $A \supset A$ formulát.
   - Használjuk a dedukciós tételt, hogy egyszerűbb levezetést kapjunk!
2. Lássuk be, hogy a $\neg\neg A$ és A formulák tautologikusan ekvivalensek! (Ehhez 2 levezetés is tartozik.)
3. Készítsük el a következő levezetése: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$
4. Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

   Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!
5. Bizonyítsuk a "Nyomozós példát": $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

2.2 Predikátumkalkulus

1. Adjuk meg a következő levezetést: $\{\forall x \forall y Q(x,y)\} \vdash Q(x,y)$
2. Bizonyítsuk a következő formulát: $\forall x P(x) \supset \forall y P(y)$
3. Bizonyíthatóan ekvivalensek a következő formulák: $\forall x(R \supset P(x))$ és $R \supset \forall x P(x)$?
4. Bizonyítsuk a "Fifis példát":
   $\{P(a), \forall x(P(x) \supset K(x)), \forall x(K(x) \wedge U(x) \supset \neg H(x)), U(a)\} \vdash \exists x(K(x) \wedge \neg H(x))$

3 Megoldások

3.1 Ítéletkalkulus

1. $\vdash_0 A \supset A$

   Dedukciós tétel nélkül:

1.	$(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)))$	[C2; $A\|\|A$; $B\|\|A \supset A$; $C\|\|A$]
2.	$A \supset ((A \supset A) \supset A)$	[C1; $A\|\|A$; $B\|\|A \supset A$]
3.	$(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$	[mp(1,2)]
4.	$A \supset (A \supset A)$	[C1; $A\|\|A$; $B\|\|A$]
5.	$A \supset A$	[mp(3,4)]

   Ez után használható axiómaséma: Biz1 - $A \supset A$

   Dedukciós tételt használva:

   $\vdash_0 A \supset A \Rightarrow A \vdash_0 A$
   Bizonyítani kell: $A \vdash_0 A$

1.	A	[hip]

2. Bizonyítsuk be, hogy az A és $\neg\neg A$ formulák tautológikusan ekvivalensek.

   Ehhez be kell látni, hogy egyikből levezethető a másik ($\neg\neg A \vdash_0 A$)
   és a másikból is levezethető az egyik ($A \vdash_0 \neg\neg A$).

   - $\neg\neg A \vdash_0 A$

1.	$(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$	[C3; $A\|\|A$; $B\|\|\neg A$]
2.	$\neg A \supset \neg A$	[Biz1; $A\|\|\neg A$]
3.	$(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$	[mp(1,2)]
4.	$\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$	[C1; $A\|\|\neg\neg A$; $B\|\|\neg A$]
5.	$\neg\neg A$	[hip]
6.	$\neg A \supset \neg\neg A$	[mp(4,5)]
7.	A	[mp(3,6)]

     Ez után használható axiómaséma: C4 - $\neg\neg A \supset A$

   - $A \vdash_0 \neg\neg A$

1.	$(\neg\neg\neg A \supset A) \supset ((\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A)$	[C3; $A\|\|\neg\neg A$; $B\|\|A$]
2.	$A \supset (\neg\neg\neg A \supset A)$	[C1; $A\|\|A$; $B\|\|\neg\neg\neg A$]
3.	A	[hip]
4.	$\neg\neg\neg A \supset A$	[mp(2,3)]
5.	$(\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A$	[mp(1,4)]
6.	$\neg\neg\neg A \supset \neg A$	[C4; $A\|\|\neg A$]
7.	$\neg\neg A$	[mp(5,6)]

     Ez után használható axiómaséma: Biz3 - $A \supset \neg\neg A$

3. Készítsük el a következő levezetést: $A \supset B \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

   Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell: $A \supset B, \neg\neg A \vdash_0 \neg\neg B$

1.	$B \supset \neg\neg B$	[Biz3; $A\|\|B$]
2.	$A \supset B$	[hip]
3.	$\neg\neg A \supset A$	[C4; $A\|\|A$]
4.	$\neg\neg A$	[hip]
5.	A	[mp(3,4)]
6.	B	[mp(2,5)]
7.	$\neg\neg B$	[mp(1,6)]

   Ez után használható axiómaséma: Biz4 - $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

4. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Formalizálás:

X - Ha Ön időben érkezett.
Y - az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja.

1. $X \supset Y$
2. $\neg Y \supset \neg X$

Kérdés: $X \supset Y \equiv \neg Y \supset \neg X$? Ehhez be kell látni két levezetéssel, hogy első állításból levezethető a második ($\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$), illetve fordítva ($\{\neg Y \supset \neg X\} \equiv X \supset Y$).

Levezetések:

- $\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$
  Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

1.	$(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$	[C3; $A\|\|\neg\neg X$; $B\|\|\neg Y$]
2.	$\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$	[C1; $A\|\|\neg Y$; $B\|\|\neg\neg X$]
3.	$\neg Y$	[hip]
4.	$(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$	[mp(1,2)]
5.	$(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$	[Biz4; $A\|\|X$; $B\|\|Y$]
6.	$X \supset Y$	[hip]
7.	$\neg\neg X \supset \neg\neg Y$	[mp(5,6)]
8.	$\neg X$	[mp(3,6)]

- $\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$
  Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

1.	$(\neg Y \supset \neg X) \supset ((\neg Y \supset \neg\neg X) \supset Y)$	[C3; $A\|\|Y$; $B\|\|\neg X$]
2.	$\neg Y \supset \neg X$	[hip]
3.	$(\neg Y \supset \neg\neg X) \supset Y$	[mp(1,2)]
4.	$\neg\neg X \supset (\neg Y \supset \neg\neg X)$	[C1; $A\|\|\neg\neg X$; $B\|\|\neg Y$]
5.	$X \supset \neg\neg X$	[Biz3; $A\|\|X$]
6.	X	[hip]
7.	$\neg\neg X$	[mp(5,6)]
8.	$\neg Y \supset \neg\neg X$	[mp(4,7)]
9.	Y	[mp(3,8)]

5. Nyomozós példa: $F \supset K, K \supset A, \neg A \vdash_0 \neg F$

1.	$(\neg\neg F \supset \neg K) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg K) \supset \neg F)$	[C3; $A\|\|\neg F$; $B\|\|\neg K$]
2.	$\neg K \supset (\neg\neg F \supset \neg K)$	[C1; $A\|\|\neg K$; $B\|\|\neg\neg F$]
3.	$(\neg\neg K \supset \neg A) \supset ((\neg\neg K \supset \neg\neg A) \supset \neg K)$	[C3; $A\|\|\neg K$; $B\|\|\neg A$]
4.	$\neg A \supset (\neg\neg K \supset \neg A)$	[C1; $A\|\|\neg A$; $B\|\|\neg\neg K$]
5.	$\neg A$	[hip]
6.	$\neg\neg K \supset \neg A$	[mp(4,5)]
7.	$(\neg\neg K \supset \neg\neg A) \supset \neg K$	[mp(3,6)]
8.	$(K \supset A) \supset (\neg\neg K \supset \neg\neg A)$	[Biz4; $A\|\|K$; $B\|\|A$]
9.	$K \supset A$	[hip]
10.	$\neg\neg K \supset \neg\neg A$	[mp(8,9)]
11.	$\neg K$	[mp(7,10)]
12.	$\neg\neg F \supset \neg K$	[mp(2,11)]
13.	$(\neg\neg F \supset \neg\neg K) \supset \neg F$	[mp(1,12)]
14.	$(F \supset K) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg K)$	[Biz4; $A\|\|F$; $B\|\|K$]
15.	$F \supset K$	[hip]
16.	$\neg\neg F \supset \neg\neg K$	[mp(14,15)]
17.	$\neg F$	[mp813,16)]

3.2 Predikátumkalkulus

1. $\{\forall x \forall y Q(x,y)\} \vdash Q(x,y)$

1.	$\forall x \forall y Q(x,y)$	[hip]
2.	$\forall x \forall y Q(x,y) \supset \forall y Q(x,y)$	[C11; $A\|\|\forall y Q(x,y)$]
3.	$\forall y Q(x,y)$	[mp(2,1)]
4.	$\forall y Q(x,y) \supset Q(x,y)$	[C11; $A\|\|Q(x,y)$]
5.	$Q(x,y)$	[mp(4,3)]

2. $\vdash \forall x P(x) \supset \forall y P(y)$

Dedukciós tétel használata után: $\{\forall x P(x)\} \vdash \forall y P(y)$

1.	$\forall y(\forall x P(x) \supset P(y)) \supset (\forall y \forall x P(x) \supset \forall y P(y))$	[C17; $A\|\|\forall x P(x)$; $B\|\|P(y)$]
2.	$\forall y(\forall x P(x) \supset P(y))$	[C11 általánosítás; $A\|\|P(x)$]
3.	$\forall y \forall x P(x) \supset \forall y P(y)$	[mp(1,2)]
4.	$\forall x P(x) \supset \forall y \forall x P(x)$	[C15; $A\|\|\forall x P(x)$]
5.	$\forall x P(x)$	[hip]
6.	$\forall y \forall x P(x)$	[mp(4,5)]
7.	$\forall y P(y)$	[mp(3,6)]

3. $\forall x(R \supset P(x)) \equiv R \supset \forall x P(x)$

- $\{\forall x(R \supset P(x))\} \vdash R \supset \forall x P(x)$

  Dedukciós tétel alkalmazása után: $\{\forall x(R \supset P(x)), R\} \vdash \forall x P(x)$

  Általánosítás szabály alkalmazása után: $\{\forall x(R \supset P(x)), R\} \vdash P(x)$

1.	$\forall x(R \supset P(x)) \supset (R \supset P(x))$	[C11; $A\|\|R \supset P(x)$]
2.	$\forall x(R \supset P(x))$	[hip]
3.	$R \supset P(x)$	[mp(1,2)]
4.	R	[hip]
5.	$P(x)$	[mp(3,4)]

- $\{R \supset \forall x P(x)\} \vdash \forall x(R \supset P(x))$

  Általánosítás szabály alkalmazása után: $\{R \supset \forall x P(x)\} \vdash R \supset P(x)$

1.	$(R \supset (\forall x P(x) \supset P(x))) \supset ((R \supset \forall x P(x)) \supset (R \supset P(x)))$	[C2; $A\|\|R$; $B\|\|\forall x P(x)$; $P(x)$]
2.	$(\forall x P(x) \supset P(x)) \supset (R \supset (\forall x P(x) \supset P(x)))$	[C1; $A\|\|\forall x P(x) \supset P(x)$; $B\|\|R$]
3.	$\forall x P(x) \supset P(x)$	[C11; $P(x)$]
4.	$R \supset (\forall x P(x) \supset P(x))$	[mp(2,3)]
5.	$(R \supset \forall x P(x)) \supset (R \supset P(x))$	[mp(1,4)]
6.	$R \supset \forall x P(x)$	[hip]
7.	$R \supset P(x)$	[mp(5,6)]

Ha használtuk volna a dedukciós tételt is, akkor ugyanez a bizonyítás így nézne ki:
$\{R \supset \forall x P(x), R\} \vdash P(x)$

1.	$\forall x P(x) \supset P(x)$	[C11; $A\|\|P(x)$]
2.	$R \supset \forall x P(x)$	[hip]
3.	R	[hip]
4.	$\forall x P(x)$	[mp(2,3)]
5.	$P(x)$	[mp(1,4)]

4. Fifis példa: $\{P(a), \forall x(P(x) \supset K(x)), \forall x(K(x) \wedge U(x) \supset \neg H(x)), U(a)\} \vdash \exists x(K(x) \wedge \neg H(x))$

sorszám	formula	használt szabály
1.	$P(a)$	[hipotézis]
2.	$U(a)$	[hipotézis]
3.	$\forall x(P(x) \supset K(x))$	[hipotézis]
4.	$\forall x(K(x) \wedge U(x) \supset \neg H(x))$	[hipotézis]
5.	$\forall x(P(x) \supset K(x)) \supset (P(a) \supset K(a))$	[C11]
6.	$P(a) \supset K(a)$	[mp(3,5)]
7.	$K(a)$	[mp(1,6)]
8.	$\forall x(K(x) \wedge U(x) \supset \neg H(x)) \supset (K(a) \wedge U(a) \supset \neg H(a))$	[C11]
9.	$K(a) \wedge U(a) \supset \neg H(a)$	[mp(4,8)]
10.	$K(a) \supset (U(a) \supset K(a) \wedge U(a))$	[C5]
11.	$U(a) \supset K(a) \wedge U(a)$	[mp(7,10)]
12.	$K(a) \wedge U(a)$	[mp(2,11)]
13.	$\neg H(a)$	[mp(12,9)]
14.	$K(a) \supset (\neg H(a) \supset K(a) \wedge \neg H(a))$	[C5]
15.	$\neg H(a) \supset K(a) \wedge \neg H(a)$	[mp(7,14)]
16.	$K(a) \wedge \neg H(a)$	[mp(13,15)]
17.	$K(a) \wedge \neg H(a) \supset \exists x(K(x) \wedge \neg H(x))$	[C13]
18.	$\exists x(K(x) \wedge \neg H(x))$	[mp(16,17)]