Logikai törvény és tautológia

Elsőrendű logika

March 2020

Quine-féle táblázat

Legyenek A formula prímkomponensei $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Ha a különböző prímkomponenseket gondolatban különböző ítéletváltozóknak tekintenénk az így kapott ítéletlogikai formulához megadhatnánk az igazságtáblát.

Quine-féle táblázat

Az elsőrendű formulához így megkonstruált táblázatot Quine-féle táblázatnak hívjuk.

Quine-féle táblázat

Ebben a táblázatban a sorokban szereplő igazságértékekről azonban nem tudhatjuk, hogy van-e egyáltalán olyan interpretáció és az interpretációban olyan változókiértékelés, ami mellett a prímkomponensek igazságértékei rendre ezek lennének.

Az viszont nyílvánvaló, hogy minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén a prímkomponensek igazságértékei a Quine-táblázat valamelyik sorában a prímkomponensekhez tartozó oszlopban rendre megtalálhatók.

Quine-féle táblázat

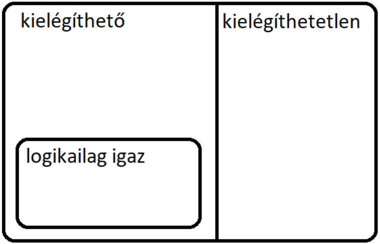
A $\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x)$ formula prímkomponensei $\exists x\neg P(x)$ és $\forall x P(x)$. A formula Quine-táblázata a következő:

$\exists x\neg P(x)$	$\forall x P(x)$	$\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Logikailag igaz

Azt mondjuk, hogy egy A formula logikailag igaz (másképp logikai törvény), ha A minden lehetséges $\mathcal{I}$ interpretációra és $\mathcal{I}$ minden κ változókiértékelése melett $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = \text{i}$. Jelölése: $\models$ A.

Ha A zárt akkor egyszerűbben is fogalmazhatunk: A pontosan akkor logikai törvény, ha minden interpretációja kielégíti, azaz minden interpretáció modellje.



Elsőrendű logikai törvény

Tétel

Legyenek A és B az $\mathcal{L}[V_v]$ nyelv tetszőleges formulái. Ekkor
$$\models \forall x A \vee \forall x B \supset \forall x(A \vee B)$$

Bizonyítás:

Legyen $\mathcal{L}[V_v]$-nek $\mathcal{I}$ tetszőleges interpretációja és κ az interpretációban tetszőleges változókiértékelés.

A $\models \forall x A \vee \forall x B \supset \forall x(A \vee B)$ formula igazságértékét kell megvizsgálnunk $\mathcal{I}$-ben κ mellett.

Elsőrendű logikai törvény

Két eset lehetséges:

1. Ha $|\forall x(A \vee B)|^{\mathcal{I},\kappa} =$ i, akkor a formulánk i igazságértékű.

2. Ha $|\forall x(A \vee B)|^{\mathcal{I},\kappa} =$ h, akkor van κ-nak olyan κ^* x-variánsa, hogy $|A \vee B|^{\mathcal{I},\kappa^*} =$ h, azaz $|A|^{\mathcal{I},\kappa^*} =$ h és $|B|^{\mathcal{I},\kappa^*} =$ h. Ez viszont azt jelenti, hogy $|\forall xA|^{\mathcal{I},\kappa} =$ h és $|\forall xB|^{\mathcal{I},\kappa} =$ h, vagyis

$$|\forall xA \vee \forall xB|^{\mathcal{I},\kappa} = \text{h}.$$

Tehát a formulánk ebben az esetben is i igazságértékű.

Ezzel beláttuk, hogy a $\forall xA \vee \forall xB \supset \forall x(A \vee B)$ formula logikai törvény.

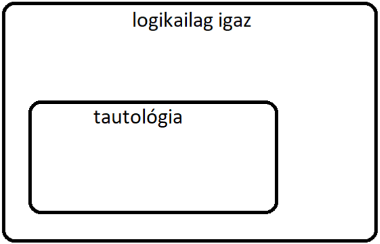
Elsőrendű tautologikusan igaz

Definíció

Az $\mathcal{L}[V_v]$ nyelv egy A formulája tautologikusan igaz, ha a formula Quine-táblázatában A oszlopában csupa i igazságérték található. Jelölése: $\models_0$ A.

Lemma

Legyen A az $\mathcal{L}[V_v]$ nyelv egy tetszőleges formulája. Ha A tautologikusan igaz, akkor logikailag is igaz, azaz ha $\models_0$ A ,akkor $\models$ A.



(a) A $(\exists x P(x) \supset \forall x P(x)) \supset \neg \exists x P(x) \vee \forall x P(x)$ formula prímkomponensei $\exists x P(x)$ és $\forall x P(x)$. A formula Quine-féle táblázata a következő:

$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$	$(\exists x P(x) \supset \forall x P(x)) \supset \neg \exists x P(x) \vee \forall x P(x)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A formula oszlopában csupa i igazságérték található, tehát a formula tautologikusan igaz, azaz logikailag is igaz.

(b) Előzőleg beláttuk,hogy $\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x))$ nem tautologikusan igaz formula, pedig logikailag igaz.

Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{I}$ interpretációban ugyanis

1. vagy $|\neg\exists x\neg P(x)|^{\mathcal{I}} = \text{h}$, így $|\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x))|^{\mathcal{I}} = \text{i}$,
2. vagy $|\neg\exists x\neg P(x)|^{\mathcal{I}} = \text{i}$, ekkor viszont $|\exists x\neg P(x)|^{\mathcal{I}} = \text{i}$. Ez pedig azt jelenti, hogy minden κ változókiértékelés mellett $|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = \text{h}$, azaz $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = \text{i}$, tehát $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = \text{i}$.

Így viszont ebben az esetben is $|\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x))|^{\mathcal{I}} = \text{i}$,

tehát a $\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x))$ formula logikai törvény.