Rezolúció elsőrendben

Gyakorlat

Logika

2020/2021 1. félév

Alapok

Literál: egy atomi formula, vagy annak a negáltja pl.:
$P(x), \neg P(x), \neg P(f(g(h(x,a),b)))$
Prenex formula: Kvantált formula, ahol a kvantorok a formula elejébe vannak tömörítve. pl.: $\forall x \exists y \forall z (P(x) \wedge Q(x,y) \vee R(z))$
Skolem formula: Olyan Prenex formula, amiben csak univerzális kvantor van. pl.: $\forall x \forall y \forall z (P(x) \wedge Q(x,y) \vee R(z))$
Elsőrendű klóz: Olyan zárt Skolem formula, aminek a magja literálok diszjunkciós lánca. pl.: $\forall x \forall y \forall z (P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee \neg R(z))$

Vizsgálat rezolúcióval:

1. Kérdés *kielégíthetetlenség* vizsgálatává alakítása:
   - $\{F_1, ..., F_n\} \models G \Rightarrow \{F_1, ..., F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen?
   - F logikai törvény $\Rightarrow \neg F$ kielégíthetetlen?
2. Klózhalmaz készítése
   - Implikáció átírása: $A \supset B = \neg A \vee B$
   - Negálás bevitele atomi formuláig:
     - ★ $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
     - ★ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
     - ★ $\neg\neg A = A$
     - ★ $\neg\forall x A = \exists x \neg A$
     - ★ $\neg\exists x A = \forall x \neg A$
   - Prenex formula előállítása - kvantorkiemelési szabályok
   - Skolem formula előállítása - skolemizálás, egzisztenciális kvantor elhagyása.
   - Elsőrendű klózok előállítása - plusz átalakítások, $A \wedge B \rightarrow \{A, B\}$

Vizsgálat rezolúcióval:

1. Kérdés *kielégíthetetlenség* vizsgálatává alakítása:
   - $\{F_1, ..., F_n\} \models G \Rightarrow \{F_1, ..., F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen?
   - F tautológia $\Rightarrow \neg F$ kielégíthetetlen?

2. Klózhalmaz készítése
   - Implikáció átírása: $A \supset B = \neg A \vee B$
   - Negálás bevitele atomi formuláig
   - Prenex formula előállítása $(Q \in \{\forall, \exists\}, \circ \in \{\wedge, \vee\})$
     - ⋆ $QxA[x] \circ B = Qx(A[x] \circ B)$
       pl.: $\forall x P(x) \wedge Q(y, a) = \forall x(P(x) \wedge Q(y, a))$
     - ⋆ $\forall x A[x] \wedge \forall x B[x] = \forall x(A[x] \wedge B[x])$
       pl.: $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x, x) = \forall x(P(x) \wedge Q(x, x))$
     - ⋆ $\exists x A[x] \vee \exists x B[x] = \exists x(A[x] \vee B[x])$
       pl.: $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x, x) = \exists x(P(x) \vee Q(x, x))$
     - ⋆ $Q_1 x A[x] \circ Q_2 x B[x] = Q_1 x Q_2 y(A[x] \circ B[x||y]$
       pl.: $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x, x) = \forall x \exists y(P(x) \vee Q(y, y))$
   - Skolem formula előállítása - skolemizálás, egzisztenciális kvantor elhagyása.
   - Elsőrendű klózok előállítása - plusz átalakítások, $A \wedge B \rightarrow \{A, B\}$

Vizsgálat rezolúcióval:

1. Kérdés *kielégíthetetlenség* vizsgálatává alakítása:
   - $\{F_1, ..., F_n\} \models G \Rightarrow \{F_1, ..., F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen?
   - F tautológia $\Rightarrow \neg F$ kielégíthetetlen?
2. Klózhalmaz készítése
   - Implikáció átírása: $A \supset B = \neg A \vee B$
   - Negálás bevitele atomi formuláig
   - Prenex formula előállítása - kvantorkiemelési szabályok
   - Skolem formula előállítása példákkal: (új konstans/függvény bevezetése!)
     - $\exists x P(x) = P(\bar{a})$
     - $\exists x \forall y Q(x, y) = \forall y Q(\bar{a}, y)$
     - $\forall x \exists y Q(x, y) = \forall x Q(x, f(x))$
     - $\forall x \exists y \forall z R(x, y, z) = \forall x \forall z R(x, f(x), z)$
     - $\exists x \exists y \forall z R(x, y, z) = \forall z R(\bar{a}, \bar{b}, z)$
     - $\forall x \forall y \exists z R(x, y, z) = \forall x \forall z R(x, y, g(x, y))$
   - Elsőrendű klózok előállítása - plusz átalakítások, $A \wedge B \rightarrow \{A, B\}$

Vizsgálat rezolúcióval:

1. Kérdés *kielégíthetetlenség* vizsgálatává alakítása:
   - $\{F_1, ..., F_n\} \models G \Rightarrow \{F_1, ..., F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen?
   - F tautológia $\Rightarrow \neg F$ kielégíthetetlen?
2. Klózhalmaz készítése
   - Implikáció átírása: $A \supset B = \neg A \vee B$
   - Negálás bevitele atomi formuláig
   - Prenex formula előállítása - kvantorkiemelési szabályok
   - Skolem formula előállítása - skolemizálás, egzisztenciális kvantor elhagyása.
   - Elsőrendű klózok előállítása
     - $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
     - $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
     - KNF alak után: $A \wedge B \rightarrow \{A, B\}$

Rezolúció elsőrendben

Adott a következő két elsőrendű klóz:

$P(x) \vee Q(x,y)$ és $\neg P(g(h(z)))$

Hogyan rezolváljunk?

1.	$P(x) \vee Q(x,y)$	
2.	$\neg P(g(h(z)))$	
3.	?	[res(1,2)]

A komplemens literálpár alapjait egymáshoz kell illeszteni, hogy rezolválni tudjuk őket.

Két féle közelítés:

1. Elsőrendű alaprezolúció - Herbrand-univerzum alapú helyettesítéssel
2. Elsőrendű rezolúció - legáltalánosabb illesztési algoritmussal

Elsőrendű alaprezolúció - Herbrand univerzum használata

Általánosan:
$H_0 = \{$konstansok, ha nincs, akkor bevezetünk egyet$\}$
$H_n = H_{n-1} \cup \{$függvények használata H_{n-1} elemeire minden módon$\}$
$H_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$

1. Tfh, konstansok: $\bar{a}$, és függvények: $f - 1$
$H_0 = \{\bar{a}\}$
$H_1 = \{\bar{a}, f(\bar{a})\}$
$H_2 = \{\bar{a}, f(\bar{a}), f(f(\bar{a}))\}$
....
$H_\infty = \{\bar{a}, f(\bar{a}), ...f(...f(\bar{a}))\}$

2. Tfh, konstansok: $\bar{a}, \bar{b}$ és függvények: $f - 2$. Mi lenne H_0 és H_1?
$H_0 = \{\bar{a}, \bar{b}\}$
$H_1 = \{\bar{a}, \bar{b}, f(\bar{a}, \bar{a}), f(\bar{b}, \bar{a}), f(\bar{a}, \bar{b}), f(\bar{b}, \bar{b})\}$

Elsőrendű alaprezolúció 1. példa

Bizonyítsuk elsőrendű alaprezolúcióval, hogy a következő szemantikus következmény teljesül:
$\{\exists x \forall z \forall v((\neg Q(v) \supset \neg P(z,x)) \wedge P(x,v))\} \models \exists x \exists y(Q(x) \wedge P(y,y))$

Alakítsuk kielégíthetetlenség vizsgálattá visszakövetkeztetéssel:
$\{\exists x \forall z \forall v((\neg Q(v) \supset \neg P(z,x)) \wedge P(x,v)), \neg(\exists x \exists y(Q(x) \wedge P(y,y)))\}$

Készítsünk változóiban tiszta klózhalmazt:

$\exists x \forall z \forall v((\neg Q(v) \supset \neg P(z,x)) \wedge P(x,v)) =$ (implikációk átírása)
$\exists x \forall z \forall v((\neg\neg Q(v) \vee \neg P(z,x)) \wedge P(x,v)) =$ (negálás)
$\exists x \forall z \forall v((Q(v) \vee \neg P(z,x)) \wedge P(x,v)) =>$ ($\exists$ eliminálása)
$\forall z \forall v((Q(v) \vee \neg P(z,\bar{a})) \wedge P(\bar{a},v)) =$ (KNF alakra hozás)
$\forall z \forall v(Q(v) \vee \neg P(z,\bar{a})) \wedge \forall v P(\bar{a},v) =$ (változóiban tiszta KNF)
$\forall z \forall v(Q(v) \vee \neg P(z,\bar{a})) \wedge \forall w P(\bar{a},w)$

$K = \{Q(v) \vee \neg P(z,\bar{a}), P(\bar{a},w), ...\}$

Elsőrendű alaprezolúció 1. példa

$\{\exists x \forall z \forall v(\neg Q(v) \supset \neg P(z,x) \wedge P(x,v)), \neg(\exists x \exists y(Q(x) \wedge P(y,y)))\}$
kielégíthetetlen?

$\neg\exists x \exists y(Q(x) \wedge P(y,y)) =$ (negálás bevitele)
$\forall x \neg\exists y(Q(x) \wedge P(y,y))) =$
$\forall x \forall y \neg(Q(x) \wedge P(y,y))) =$
$\forall x \forall y(\neg Q(x) \vee \neg P(y,y)))$

$K = \{Q(v) \vee \neg P(z,\bar{a}), P(\bar{a},w), \neg Q(x) \vee \neg P(y,y)\ \}$

Elsőrendű alaprezolúciós 1. példa

$K = \{Q(v) \vee \neg P(z, \bar{a}), P(\bar{a}, w), \neg Q(x) \vee \neg P(y, y)\}$

Herbrand-univerzum:

konstansok - $\bar{a}$
függvények: -

$H_0 = \{\bar{a}\}$
$H_1 = \{\bar{a}\}$
...
$H_\infty = \{\bar{a}\}$

Klózok alappéldányai: $\{Q(\bar{a}) \vee \neg P(\bar{a}, \bar{a}), P(\bar{a}, \bar{a}), \neg Q(\bar{a}) \vee \neg P(\bar{a}, \bar{a})\}$

Alaprezolúciós levezetés:

1.	$Q(\bar{a}) \vee \neg P(\bar{a}, \bar{a})$	$[\in K]$	$Q(v) \vee \neg P(z, \bar{a})$ $[v \parallel \bar{a}, z \parallel \bar{a}]$
2.	$\neg Q(\bar{a}) \vee \neg P(\bar{a}, \bar{a})$	$[\in K]$	$\neg Q(x) \vee \neg P(y, y)$ $[x \parallel \bar{a}, y \parallel \bar{a}]$
3.	$\neg P(\bar{a}, \bar{a})$	$[res(1, 2)]$	
4.	$P(\bar{a}, \bar{a})$	$[\in K]$	$P(\bar{a}, w)$ $[w \| \bar{a}]$
5.	$\square$	$[res(3, 4)]$	

- A klózok alappéldányait úgy kapjuk, hogy a Herbrand-univerzum elemeit helyettesítjük a kötött változók helyére.
- Akár ugyanazt a formulát több, különböző helyettesítéssel is felvehetjük.
- Sikerült levezetni az üres klózt $\rightarrow$
  a klózhalmaz kielégíthetetlen $\rightarrow$
  a szemantikus következmény teljesül.

Elsőrendű alaprezolúció 2. példa

Bizonyítsuk elsőrendű alaprezolúcióval, hogy a következő szemantikus következmény teljesül:
$\{\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x))\} \models \exists x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x))$

Alakítsuk kielégíthetetlenség vizsgálattá visszakövetkeztetéssel:
$\{\ \underline{\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x)),}\ \neg\exists x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x))\}$

Készítsünk változóiban tiszta klózhalmazt:

$\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x)) =$ ($\exists$ eliminálása)
$\forall x(P(x,f(x)) \wedge Q(f(x),x)) =$ (KNF alakra hozás)
$\forall x P(x,f(x)) \wedge \forall x Q(f(x),x) =$ (változóiban tiszta alak)
$\forall x P(x,f(x)) \wedge \forall y Q(f(y),y)$

$K = \{P(x,f(x)), Q(f(y),y), ...\}$

Elsőrendű alaprezolúció 2. példa

Bizonyítsuk elsőrendű alaprezolúcióval, hogy a következő szemantikus következmény teljesül:
$\{\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x))\} \models \exists x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x))$

Alakítsuk kielégíthetetlenség vizsgálattá visszakövetkeztetéssel:
$\{\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x)), \underline{\neg \exists x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x))}\ \}$

Készítsünk változóiban tiszta klózhalmazt:

$\neg \exists x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x)) =$ (negálás bevitele)
$\forall x \neg \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,x)) =$
$\forall x \forall y \neg(P(x,y) \wedge Q(y,x)) =$
$\forall x \forall y(\neg P(x,y) \vee \neg Q(y,x)) =$ (változóban tisztán illesszük a klózhalmazba)
$\forall v \forall w(\neg P(v,w) \vee \neg Q(w,v))$

$K = \{P(x, f(x)), Q(f(y), y), \neg P(v,w) \vee \neg Q(w,v)\ \}$

Elsőrendű alaprezolúciós 2. példa

$$K = \{P(x, f(x)), Q(f(y), y), \neg P(v, w) \vee \neg Q(w, v)\}$$

Herbrand-univerzum:

konstansok: -
függvények: $f - 1$

$H_0 = \{\bar{a}\}$
$H_1 = \{\bar{a}, f(\bar{a})\}$
...
$H_\infty = \{\bar{a}, f(\bar{a}), ..., f(...f(\bar{a})...)\}$

Klózok alappéldányai:

$\{P(\bar{a}, f(\bar{a})), P(f(f(\bar{a})), f(f(f(\bar{a})))), \ldots, Q(f(\bar{a}), \bar{a}), \ldots, \neg P(\bar{a}, f(\bar{a})) \vee \neg Q(f(\bar{a}), \bar{a}), \ldots\}$

Alaprezolúciós levezetés pl:

1.	$P(\bar{a}, f(\bar{a}))$	$[\in K]$	$P(x, f(x))\ [x \parallel \bar{a}]$
2.	$Q(f(\bar{a}), \bar{a})$	$[\in K]$	$Q(f(y), y)\ [y \parallel \bar{a}]$
3.	$\neg P(\bar{a}, f(\bar{a})) \vee \neg Q(f(\bar{a}), \bar{a})$	$[\in K]$	$\neg P(v, w) \vee \neg Q(w, v)\ [v \parallel \bar{a}, w \parallel f(\bar{a})]$
4.	$\neg Q(f(\bar{a}), \bar{a})$	$[res(3, 1)]$	
5.	$\Box$	$[res(4, 2)]$	

Elsőrendű rezolúció

Legáltalánosabb illesztési algoritmus

$K = \{\neg P(g(x,y)), Q(g(z,z),\bar{a}) \vee P(z), \neg Q(g(v,g(\bar{a},\bar{b})),z)\}$

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg P(g(x,y)) & [\in K] \\ 2. & Q(g(z,z),\bar{a}) \vee P(z) & [\in K] \\ 3. & Q(g(g(x,y),g(x,y)),\bar{a}) & [res(1,2)] \quad (z \| g(x,y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} k = 0 & \omega_0 = \{P(g(x,y)), P(z)\} \\ D_0 = \{g(x,y), z\} & \sigma_0 = (z \| g(x,y)) \\ \hline k = 1 & \omega_1 = \{P(g(x,y)), P(g(x,y))\} \\ \text{kész:} & \sigma = (z \| g(x,y)) \end{array}$$

Elsőrendű rezolúció

Legáltalánosabb illesztési algoritmus

$K = \{\neg P(g(x,y)), Q(g(z,z),\bar{a}) \vee P(z), \neg Q(g(v,g(\bar{a},\bar{b})),z)\}$

1.	$\neg P(g(x,y))$	$[\in K]$	
2.	$Q(g(z,z),\bar{a}) \vee P(z)$	$[\in K]$	
3.	$Q(g(g(x,y),g(x,y)),\bar{a})$	$[res(1,2)]$	$(z\|\|g(x,y))$
4.	$\neg Q(g(v,g(\bar{a},\bar{b})),z)$	$[\in K]$	
5.	$\square$	$[res(3,4)]$	$(v\|\|g(x,y))\ (x\|\|\bar{a})\ ((y\|\|\bar{b})\ (z\|\|\bar{a}))$

$k=0$	$\omega_0 = \{Q(g(g(x,y),g(x,y)),\bar{a}), Q(g(v,g(\bar{a},\bar{b})),z)\}$
$D_0 = \{g(x,y), v\}$	$\sigma_0 = (v\|\|g(x,y))$
$k=1$	$\omega_1 = \{Q(g(g(x,y),g(x,y)),\bar{a}), Q(g(g(x,y),g(\bar{a},\bar{b})),z)\}$
$D_1 = \{x, \bar{a}\}$	$\sigma_1 = (x\|\|\bar{a})$
$k=2$	$\omega_2 = \{Q(g(g(\bar{a},y),g(\bar{a},y)),\bar{a}), Q(g(g(\bar{a},y),g(\bar{a},\bar{b})),z)\}$
$D_2 = \{y, \bar{b}\}$	$\sigma_2 = (y\|\|\bar{b})$
$k=3$	$\omega_3 = \{Q(g(g(\bar{a},\bar{b}),g(\bar{a},\bar{b})),\bar{a}), Q(g(g(\bar{a},\bar{b}),g(\bar{a},\bar{b})),z)\}$
$D_3 = \{\bar{a}, z\}$	$\sigma_3 = (z\|\|\bar{a})$
$k=4$	$\omega_4 = \{Q(g(g(\bar{a},\bar{b}),g(\bar{a},\bar{b})),\bar{a}), Q(g(g(\bar{a},\bar{b}),g(\bar{a},\bar{b})),\bar{a})\}$
kész	$\sigma = (v\|\|g(x,y))(x\|\|\bar{a})(y\|\|\bar{b})(z\|\|\bar{a})$

Elsőrendű rezolúció 1. példa

Készítsünk egy rezolúciós levezetést a következő klózhalmazhoz:

$$K = \{Q(v) \vee P(z, f(\bar{a})), \neg Q(x), \neg P(f(\bar{a}), f(w)) \vee \neg P(y, y)\}$$

1.	$Q(v) \vee P(z, f(\bar{a}))$	$[\in K]$	
2.	$\neg Q(x)$	$[\in K]$	
3.	$P(z, f(\bar{a}))$	$[(res(1, 2)]$	$(x \parallel v)$
4.	$\neg P(f(\bar{a}), f(w)) \vee \neg P(y, y)$	$[\in K]$	
5.	$\square$	$[res(3, 4)]$	$4.faktora : (y \parallel f(\bar{a}))(w \parallel \bar{a})$ $(z \parallel f(\bar{a}))$

Klóz faktor:

$k = 0$	$\omega_0 = \{P(f(\bar{a}), f(w)), P(y, y)\}$
$D_0 = \{f(\bar{a}), y\}$	$\sigma_0 = (y \parallel f(\bar{a}))$
$k = 1$	$\omega_1 = \{P(f(\bar{a}), f(w)), P(f(\bar{a}), f(\bar{a}))\}$
$D_1 = \{w, \bar{a}\}$	$\sigma_1 = (w \parallel \bar{a})$
$k = 2$	$\omega_2 = \{P(f(\bar{a}), f(\bar{a})), P(f(\bar{a}), f(\bar{a}))\}$
kész	$\sigma = (y \parallel f(\bar{a}))\ (w \parallel \bar{a})$

Elsőrendű rezolúció 2. példa

$K = \{Q(f(\bar{b})) \vee \neg P(z, g(\bar{a}, z)), P(y, y), \neg Q(x)\}$

1.	$Q(f(\bar{b})) \vee \neg P(z, g(\bar{a}, z))$	$[\in K]$	
2.	$\neg Q(x)$	$[\in K]$	
3.	$\neg P(z, g(\bar{a}, z))$	$[res(1, 2)]$	$(x \parallel f(\bar{b}))$
4.	$P(y, y)$	$[\in K]$	
5.	nincs	$[res(3, 4)]$	$(y \parallel z)$ (nem lehet illeszteni)

Elsőrendű rezolúció 3. példa

$K = \{P(x, f(x)), Q(f(y), y), \neg P(v, w) \vee \neg Q(w, v)\}$

1.	$Q(f(y), y)$	$[\in K]$	
2.	$\neg P(v, w) \vee \neg Q(w, v)$	$[\in K]$	
3.	$P(x, f(x))$	$[\in K]$	
4.	$\neg P(y, f(y))$	$[res(1, 2)]$	$(w \parallel f(y))\ (v \parallel y)$
5.	$\square$	$[res(3, 4)]$	$(x \parallel y)$