Programtervező informatikus BSc, A és B szakirány
Analízis II. Gy, 1. zárthelyi – 2019.10.22.

Megoldások

1. *(8 pont)* A definíció alapján határozza meg a következő határértéket:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}.$$

Megoldás:
Határérték (1 nyilván torlódási pont):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}\qquad \boxed{\textbf{2p}}$$

Definíció szerint kell:

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x,\ 0<|x-1|<\delta:\left|\frac{x-2}{x+1}+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\qquad \boxed{\textbf{1p}}$$

Legyen $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{x-2}{x+1}+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{3x-3}{2(x+1)}\right|=|x-1|\cdot\frac{3}{2|x+1|}\qquad \boxed{\textbf{1p}}$$

Feltehető, hogy $\delta\le 1$. Ekkor

$$|x-1|<1\implies -1<x-1<1\implies 1<x+1<3\implies 1<|x+1|,\qquad \boxed{\textbf{1p}}$$

így

$$|x-1|\cdot\frac{3}{2|x+1|}<\frac{3}{2}|x-1|\underset{\text{elég}}{<}\varepsilon\iff |x-1|<\frac{2\varepsilon}{3}\qquad \boxed{\textbf{2p}}$$

Tehát $\varepsilon>0$-hoz $\delta:=\min\left\{1,\dfrac{2\varepsilon}{3}\right\}$ megfelelő választás, és így $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=-\frac{1}{2}$. $\boxed{\textbf{1p}}$

---

2. *(4+4 pont)* Számítsa ki az alábbi határértékeket (a *L'Hospital-szabály* használata nélkül):

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3+3}-2}{\sqrt{x^2+3}-2},\qquad\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cdot\cos 2x+\sin 3x}.$$

Megoldás:

a) Gyöktelenítés és egyszerűsítés, majd kiértékelés a határérték és műveletek kapcsolata alapján:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3+3}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}=\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^3+3}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^3+3}+2}=\frac{3}{2}.\qquad \boxed{\textbf{4p}}$$

b) Hatványsorokkal:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cdot\cos 2x+\sin 3x}=\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+5x+\frac{(5x)^2}{2}+\dots\right)-\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\dots\right)}{x\cdot\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+\dots\right)+\left(3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\dots\right)}=\qquad \boxed{\textbf{2p}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\frac{21}{4}x^2+\dots}{4x-\frac{13}{2}x^3+\dots}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{21}{4}x+\dots}{4-\frac{13}{2}x^2+\dots}=\frac{3}{4}.\qquad \boxed{\textbf{2p}}$$

VAGY: a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1$ és a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ azonosságok felhasználásával ($a\neq 0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x\cdot\cos 2x+\sin 3x}=\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 3\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}}{\cos 2x+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{1+3\cdot 1}=\frac{3}{4}$$

---

3. *(8 pont)* Határozza meg a következő függvény szakadási helyeit és azok típusát:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-3\}, \\ 0, & \text{ha } x \in \{-1,-3\}. \end{cases}$$

Megoldás:

Ha $\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-3\}}$, akkor $f \in C\{x\}$, a racionális törtfüggvény folytonossága miatt. **1p**

Egyszerűsítés:

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-3\})$$ **1p**

Ha $\boxed{x=-1}$:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x-1}{x+3} = -1 \neq 0 = f(-1),$$ **2p**

tehát $f \notin C\{-1\}$, megszüntethető szakadási hely. **1p**

Ha $\boxed{x=-3}$:

$$\lim_{x\to-3\pm0} f(x) = \lim_{x\to-3\pm0} \frac{x-1}{x+3} = \mp\infty \notin \mathbb{R},$$ **2p**

tehát $f \notin C\{-3\}$, másodfajú szakadási hely. **1p**

---

4. *(4 pont)* Bizonyítsa be, hogy az $x^2 = e^{-x^2}$ egyenletnek van megoldása a $(0,1)$ intervallumon.

Megoldás:

Átrendezés: $f(x) := x^2 - e^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ zérushelyét keressük $(0,1)$-en.

Ekkor f folytonos $[0,1]$-en **1p**, $\quad f(0) = -1 < 0$ és $f(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$ **2p**,

tehát a Bolzano-tétel alapján $\exists x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$, amely az eredeti egyenlet megoldása is **1p**.

---

5. *(8+4 pont)* Tekintsük az alábbi függvényt (α és β valós paraméterek):

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \cos x + \alpha \cdot \sin x + 1, & \text{ha } x \le 0, \\ \beta \cdot e^x + x^2 + 3x, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

a) Milyen paraméterek esetén lesz az f függvény minden pontban differenciálható? Adja meg a deriváltfüggvényt is.

b) Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 = -\pi/2$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

Megoldás:

a) Ha $\boxed{x<0}$, akkor $f \in D\{x\}$, és $f'(x) = (\alpha+1)\cos x - x \cdot \sin x$. **1p**

Ha $\boxed{x>0}$, akkor $f \in D\{x\}$, és $f'(x) = \beta \cdot e^x + 2x + 3$. **1p**

Ha $\boxed{x=0}$, akkor a folytonosság vizsgálata (szükséges feltétel):

$$f(0) = \lim_{x\to0-0} f(x) = \lim_{x\to0-0} (x \cdot \cos x + \alpha \cdot \sin x + 1) = 1, \qquad \lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0+0} (\beta \cdot e^x + x^2 + 3x) = \beta,$$ **1p**

tehát $f \in C\{0\} \iff \beta = 1$. **1p**

Deriválhatóság vizsgálata, $\beta = 1$ feltevés mellett:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0-0} \frac{x \cdot \cos x + \alpha \cdot \sin x}{x} = \lim_{x\to0-0} \left(\cos x + \alpha \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + \alpha,$$ **1p**

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0+0} \frac{e^x + x^2 + 3x - 1}{x} = \lim_{x\to0+0} \left(x + 3 + \frac{e^x-1}{x}\right) = 4,$$ **1p**

VAGY:

$$f'_-(0) = (\alpha+1)\cos x - x\sin x\Big|_{x=0} = \alpha + 1, \qquad f'_+(0) = e^x + 2x + 3\Big|_{x=0} = 4,$$

tehát $f \in D\{0\} \iff \beta = 1$ és $\alpha + 1 = 4$, vagyis $\alpha = 3$. Ekkor $f'(0) = 4$. **1p**

Tehát $f \in D \iff \alpha = 3$ és $\beta = 1$. Ekkor

$$f'(x) = \begin{cases} 4\cos x - x\sin x, & \text{ha } x < 0, \\ 4, & \text{ha } x = 0, \\ e^x + 2x + 3, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$ **1p**

b) Az egyenes általános egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$ **1p**

Ha $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, akkor

$$f(x_0) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \alpha \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 - \alpha,$$ **1p**

$$f'(x_0) = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (\alpha + 1)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$ **1p**

tehát az egyenes:

$$y = -\frac{\pi}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 - \alpha.$$ **1p**