Lineáris egyenletrendszer (LER) megoldása Gauss-eliminációval, mátrix determinánsának és inverzének kiszámítása

1. Oldjuk meg Gauss-eliminációval mindkét LER-t!

$$
\begin{array}{lcc|c}
x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 3 & 3 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & = & 5 & 5 \\
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 8 & 8 \\
x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 & = & 2 & 0
\end{array}
$$

2. Számítsuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét!

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

3. Adott a lineáris egyenletrendszer

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

ahol $0 < \varepsilon << 1$.

(a) Oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül.

(b) Legyen $\varepsilon = 10^{-17}$, oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül úgy, hogy 16 értékes jeggyel számolunk.

(c) Oldjuk meg a LER-t részleges főelemkiválasztású Gauss eliminációval.

4. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét Gauss-eliminációval!

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

5. Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t Gauss-eliminációval, ahol az A olyan $n \times n$-es szalagmátrix, melyben a főátlóban 1-ek, a főátló alatti második átlóban (-1)-ek vannak.

6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t

(a) GE-vel (sor- és oszlopcsere nélkül)

(b) részleges főelemkiválasztással GE-vel.

(c) Mennyi az A determinánsa?

MEGOLDÁS

1. Oldjuk meg Gauss-eliminációval mindkét LER-t!

$$\begin{array}{rcl|l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 3 & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & = & 5 & 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 8 & 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 & = & 2 & 0 \end{array}$$

Megoldás:

A feladatban két lineáris egyenletrendszerünk van, azonos alapmátrixszal, ezért a Gauss-eliminációt együttesen végezzük.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

A negyedik sorból látszik, hogy a második lineáris egyenletrendszernek nincs megoldśa, ui. a bal oldalon csupa 0 áll, míg a jobb oldalon -2.

Az első egyenletrendszer megoldásához folytatjuk az eliminációt.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/5 & -3/5 & -1/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/5 & 2/5 & 14/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -3/5 & -1/5 \end{array}\right],$$

végül a megoldás

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 - 7/5r - 2/5s \\ -1/5 + 3/5r + 3/5s \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} -7/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Számítsuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

<u>*Ismétlés lineáris algebrából:*</u>

Háromszögalakú mátrix determinánsa a főátlójában levő elemeinek szorzata.

Az elemi sor(oszlop)műveletek hatása a determinánsra:

(a) sor(oszlop)csere esetén a determináns (-1)-gyel szorzódik;

(b) ha egy sort(oszlopot) nemnulla számmal szorzunk, a determináns értéke ennek a számnak a reciprokával szorzódik.

Mátrix inverzének kiszámítása: az $[\,A\,|\,I\,]$ szimultán LER-t $[\,I\,|\,A^{-1}\,]$ alakra hozzuk GE-vel.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

innen az A mátrix inverze

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és determinánsa $|A| = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$ (az előjel negatív, mert egy sorcserét hajtottunk végre.).

3. Adott a lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $0 < \varepsilon << 1$.

(a) Oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül.

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{cc|c}\varepsilon & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}\varepsilon & 1 & 2\\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 1-\frac{2}{\varepsilon}\end{array}\right],$$

innen visszahelyettesítéssel

$$x_2 = \frac{1-\frac{2}{\varepsilon}}{1-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon-1} \approx 2, \qquad x_1 = \frac{2-\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon-1}}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon-2-\varepsilon+2}{\varepsilon(\varepsilon-1)} = \frac{1}{\varepsilon-1} \approx -1.$$

(b) Legyen $\varepsilon = 10^{-17}$, oldjuk meg a LER-t GE-vel sorcsere nélkül úgy, hogy 16 értékes jeggyel számolunk.

Megoldás:

Most $\frac{1}{\varepsilon} = 10^{17}$ és $1-\frac{1}{\varepsilon} \approx -\frac{1}{\varepsilon}$, $1-\frac{2}{\varepsilon} \approx -\frac{2}{\varepsilon}$, és ekkor

$$\left[\begin{array}{cc|c}\varepsilon & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}\varepsilon & 1 & 2\\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{2}{\varepsilon}\end{array}\right],$$

melynek megoldása $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.

(c) Oldjuk meg a LER-t részleges főelemkiválasztású Gauss eliminációval.

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{cc|c}\varepsilon & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ \varepsilon & 1 & 2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 0 & 1-\varepsilon & 2-\varepsilon\end{array}\right] \underset{\text{kerekítés után}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

és a megoldás $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

4. Határozzuk meg a következő mátrix inverzét Gauss-eliminációval!

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Megoldás: Az inverz mátrix

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

5. Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t Gauss-eliminációval, ahol az A olyan $n \times n$-es szalagmátrix, melyben a főátlóban 1-ek, a főátló alatti második átlóban (-1)-ek vannak és $\underline{b} = \underline{e}_1$.

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{S_3+S_1 \to S_3, S_4+S_2 \to S_4}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\vdots$

6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg az $A\underline{x} = \underline{b}$ LER-t

(a) GE-vel (sor- és oszlopcsere nélkül)

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A megoldás: $x_1 = -1/2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

(b) részleges főelemkiválasztással GE-vel.

Megoldás: Az első oszlop legnagyobb abszolútértékű eleme 4, ezért felcseréljük az első és második sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \end{array}\right]$$

A második oszlopban $\max 3, |-1| = 3$, ezért felcseréljük a 2. és 3. sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 11/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8/6 & 8/6 \end{array}\right]$$

és visszahelyettesítéssel megkapjuk a megoldást.

(c) Mennyi az A determinánsa?

Megoldás:

Az (a) részben, amikor elértük a felsőháromszög alakot, a diagonális elemek szorzata adja a mátrix determinánsát:

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16.$$