Számításelmélet

7. előadás

előadó: Kolonits Gábor
kolomax@inf.elte.hu

Az univerzális TG

Felismerhetőség

Univerzális nyelv: $L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$.

Az univerzális TG

Felismerhetőség

Univerzális nyelv: $L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$.

Tétel

$L_u \in RE$

Az univerzális TG

Felismerhetőség

Univerzális nyelv: $L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$.

Tétel

$L_u \in RE$

Bizonyítás: Konstruálunk egy 4 szalagos U „univerzális" TG-et, ami minden M TG minden bementére szimulálja annak működését.

Az univerzális TG

Felismerhetőség

Univerzális nyelv: $L_u = \{\langle M, w\rangle \,|\, w \in L(M)\}$.

Tétel

$L_u \in RE$

Bizonyítás: Konstruálunk egy 4 szalagos U „univerzális" TG-et, ami minden M TG minden bementére szimulálja annak működését.

Feltehető, hogy M egyszalagos.

1. szalag: U ezt csak olvassa, itt olvasható végig $\langle M, w\rangle$.

2. szalag: M aktuális szalagtartalma és a fej helyzete (elkódolva a fentiek szerint)

3. szalag: M aktuális állapota (elkódolva a fentiek szerint)

4. szalag: segédszalag

Az univerzális TG

Felismerhetőség

U működése vázlatosan:

Az univerzális TG

Felismerhetőség

U működése vázlatosan:

1. Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó első része kódol-e TG-t; ha nem $\Rightarrow$ elutasítja a bemenetet

Az univerzális TG

Felismerhetőség

U működése vázlatosan:

1. Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó első része kódol-e TG-t; ha nem $\Rightarrow$ elutasítja a bemenetet
2. ha igen $\Rightarrow$ felmásolja w-t a 2., q_0 kódját a 3. szalagra
3. Szimulálja M egy lépését:

Az univerzális TG

Felismerhetőség

U működése vázlatosan:

1. Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó első része kódol-e TG-t; ha nem $\Rightarrow$ elutasítja a bemenetet
2. ha igen $\Rightarrow$ felmásolja w-t a 2., q_0 kódját a 3. szalagra
3. Szimulálja M egy lépését:
   – Leolvassa a második szalagról M aktuálisan olvasott szalagszimbólumát.

Az univerzális TG

Felismerhetőség

U működése vázlatosan:

1. Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó első része kódol-e TG-t; ha nem $\Rightarrow$ elutasítja a bemenetet
2. ha igen $\Rightarrow$ felmásolja w-t a 2., q_0 kódját a 3. szalagra
3. Szimulálja M egy lépését:
   – Leolvassa a második szalagról M aktuálisan olvasott szalagszimbólumát.
   – Leolvassa a harmadik szalagról M aktuális állapotát.

Az univerzális TG

Felismerhetőség

U működése vázlatosan:

1. Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó első része kódol-e TG-t; ha nem $\Rightarrow$ elutasítja a bemenetet
2. ha igen $\Rightarrow$ felmásolja w-t a 2., q_0 kódját a 3. szalagra
3. Szimulálja M egy lépését:
   – Leolvassa a második szalagról M aktuálisan olvasott szalagszimbólumát.
   – Leolvassa a harmadik szalagról M aktuális állapotát.
   – Szimulálja M egy lépését M első szalagon található leírása alapján. Ehhez U számára ehhez minden információ rendelkezésre áll. A 2. szalagon elő kell állítania az új szalagtartalmat a fej helyzetével és a 3. szalagon az új állapotot. Ehhez, ha szükséges használja a 4. szalagot. A megvalósítás átmenetszintű részletezésétől eltekintünk.

Az univerzális TG

Felismerhetőség

U működése vázlatosan:

1. Megnézi, hogy a bemenetén szereplő szó első része kódol-e TG-t; ha nem $\Rightarrow$ elutasítja a bemenetet
2. ha igen $\Rightarrow$ felmásolja w-t a 2., q_0 kódját a 3. szalagra
3. Szimulálja M egy lépését:
   – Leolvassa a második szalagról M aktuálisan olvasott szalagszimbólumát.
   – Leolvassa a harmadik szalagról M aktuális állapotát.
   – Szimulálja M egy lépését M első szalagon található leírása alapján. Ehhez U számára ehhez minden információ rendelkezésre áll. A 2. szalagon elő kell állítania az új szalagtartalmat a fej helyzetével és a 3. szalagon az új állapotot. Ehhez, ha szükséges használja a 4. szalagot. A megvalósítás átmenetszintű részletezésétől eltekintünk.
4. Ha M aktuális állapota elfogadó/elutasító, akkor U is belép a saját elfogadó/elutasító állapotába. Különben goto **3.**

Az univerzális TG

Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w\rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Az univerzális TG

Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w \rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Az univerzális TG

Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w \rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.

Az univerzális TG

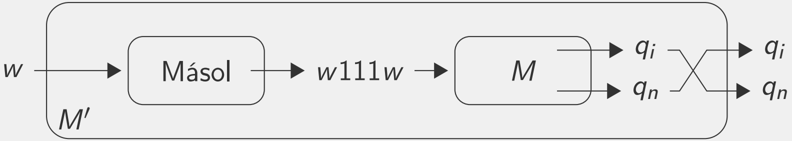
Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w\rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.



Az univerzális TG

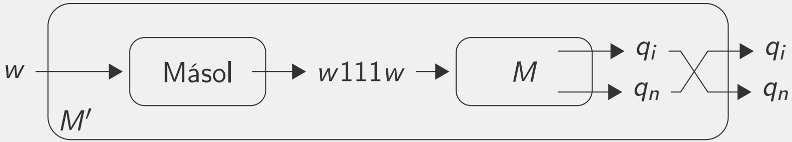
Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w \rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.



$w \in L(M')$

Az univerzális TG

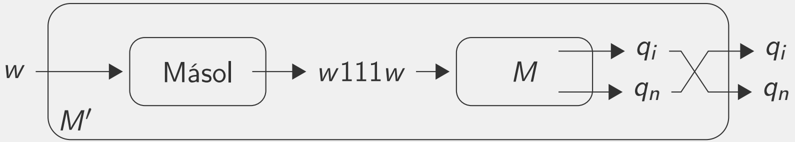
Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w \rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.



$$w \in L(M') \iff w111w \notin L(M)$$

Az univerzális TG

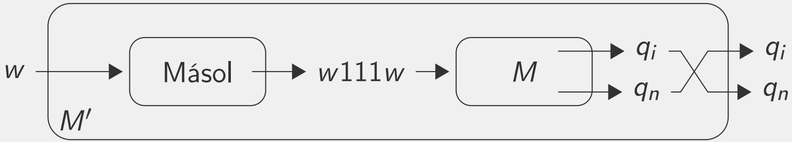
Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w\rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.



$w \in L(M') \Leftrightarrow w111w \notin L(M) \Leftrightarrow$ a w által kódolt TG nem fogadja el w-t

Az univerzális TG

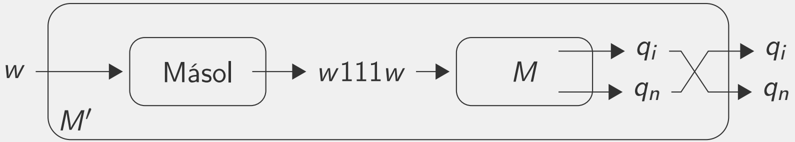
Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w\rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.



$w \in L(M') \Leftrightarrow w111w \notin L(M) \Leftrightarrow$ a w által kódolt TG nem fogadja el w-t $\Leftrightarrow$ $w \in L_{\text{átló}}$.

Az univerzális TG

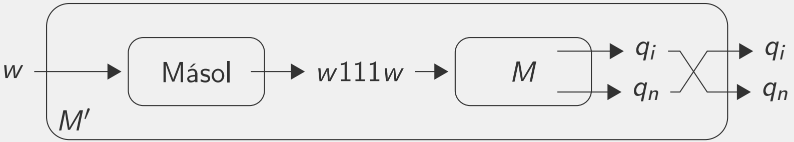
Eldönthetetlenség

Megjegyzés: Ha M nem áll meg w-n, akkor U se áll meg $\langle M, w\rangle$-n, így U nem dönti el L_u-t, csak felismeri.

Tétel

$L_u \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik L_u-t eldöntő M TG. M-et felhasználva készítünk egy $L_{\text{átló}}$-t felismerő M' TG-et.



$w \in L(M') \Leftrightarrow w111w \notin L(M) \Leftrightarrow$ a w által kódolt TG nem fogadja el w-t $\Leftrightarrow$ $w \in L_{\text{átló}}$.
Tehát $L(M') = L_{\text{átló}}$, ami lehetetlen egy előző tétel miatt.

RE és R tulajdonságai

Jelölés: Ha $L \subseteq \Sigma^*$, akkor jelölje $\overline{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$.

Tétel

Ha L és $\overline{L} \in RE$, akkor $L \in R$.

Bizonyítás: Legyen M_1 és M_2 rendre az L-t és $\overline{L}$-t felismerő TG.

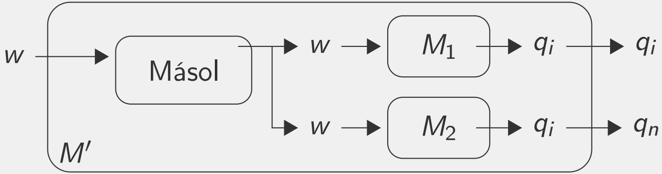
RE és R tulajdonságai

Jelölés: Ha $L \subseteq \Sigma^*$, akkor jelölje $\overline{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$.

Tétel

Ha L és $\overline{L} \in RE$, akkor $L \in R$.

Bizonyítás: Legyen M_1 és M_2 rendre az L-t és $\overline{L}$-t felismerő TG. Konstruáljuk meg az M' kétszalagos TG-t:



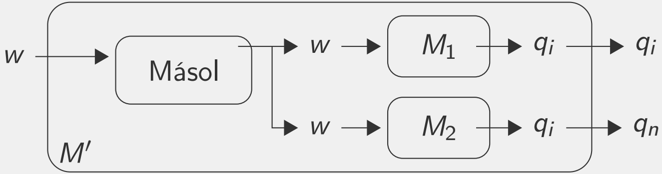
RE és R tulajdonságai

Jelölés: Ha $L \subseteq \Sigma^*$, akkor jelölje $\overline{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$.

Tétel

Ha L és $\overline{L} \in RE$, akkor $L \in R$.

Bizonyítás: Legyen M_1 és M_2 rendre az L-t és $\overline{L}$-t felismerő TG. Konstruáljuk meg az M' kétszalagos TG-t:



M' lemásolja w-t a második szalagjára, majd felváltva szimulálja M_1 és M_2 egy-egy lépését addig, amíg valamelyik elfogadó állapotba lép.

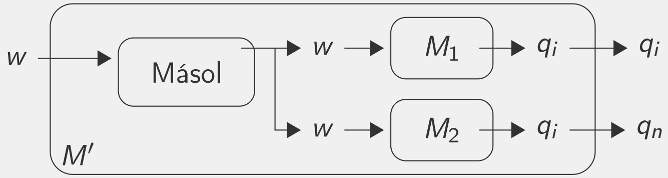
RE és R tulajdonságai

Jelölés: Ha $L \subseteq \Sigma^*$, akkor jelölje $\overline{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$.

Tétel

Ha L és $\overline{L} \in RE$, akkor $L \in R$.

Bizonyítás: Legyen M_1 és M_2 rendre az L-t és $\overline{L}$-t felismerő TG. Konstruáljuk meg az M' kétszalagos TG-t:



M' lemásolja w-t a második szalagjára, majd felváltva szimulálja M_1 és M_2 egy-egy lépését addig, amíg valamelyik elfogadó állapotba lép.
Így M' az L-et ismeri fel, és minden bemeneten meg is áll, azaz $L \in R$.

RE és R tulajdonságai

Következmény

RE nem zárt a komplementer-képzésre.

RE és R tulajdonságai

Következmény

RE nem zárt a komplementer-képzésre.

Bizonyítás:

Legyen $L \in RE \backslash R$ (L_u pl. egy ilyen nyelv) Ekkor $\bar{L} \notin RE$, hiszen ha $\bar{L} \in RE$ lenne, akkor ebből az előző tétel miatt $L \in R$ következne, ami ellentmondás.

RE és R tulajdonságai

Következmény

RE nem zárt a komplementer-képzésre.

Bizonyítás:

Legyen $L \in RE \backslash R$ (L_u pl. egy ilyen nyelv) Ekkor $\bar{L} \notin RE$, hiszen ha $\bar{L} \in RE$ lenne, akkor ebből az előző tétel miatt $L \in R$ következne, ami ellentmondás.

Tétel

Ha $L \in R$, akkor $\bar{L} \in R$. (Azaz R zárt a komplementer-képzésre.)

RE és R tulajdonságai

Következmény

RE nem zárt a komplementer-képzésre.

Bizonyítás:

Legyen $L \in RE \backslash R$ (L_u pl. egy ilyen nyelv) Ekkor $\overline{L} \notin RE$, hiszen ha $\overline{L} \in RE$ lenne, akkor ebből az előző tétel miatt $L \in R$ következne, ami ellentmondás.

Tétel

Ha $L \in R$, akkor $\overline{L} \in R$. (Azaz R zárt a komplementer-képzésre.)

Bizonyítás: Legyen $L \in R$ és M egy TG, ami az L-t dönti el.

RE és R tulajdonságai

Következmény

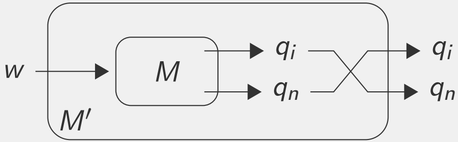
RE nem zárt a komplementer-képzésre.

Bizonyítás:
Legyen $L \in RE \setminus R$ (L_u pl. egy ilyen nyelv) Ekkor $\overline{L} \notin RE$, hiszen ha $\overline{L} \in RE$ lenne, akkor ebből az előző tétel miatt $L \in R$ következne, ami ellentmondás.

Tétel

Ha $L \in R$, akkor $\overline{L} \in R$. (Azaz R zárt a komplementer-képzésre.)

Bizonyítás: Legyen $L \in R$ és M egy TG, ami az L-t dönti el. Akkor az alábbi M' $\overline{L}$-t dönti el:



Számítási feladatok megoldása TG-pel

Az eldöntési (igen/nem kimenetű) problémák általánosításai a (ki)számítási problémák. Ilyenkor a kimenet bármi lehet. A kiszámítási problémákra is algoritmikus megoldást keresünk.

Számítási feladatok megoldása TG-pel

Az eldöntési (igen/nem kimenetű) problémák általánosításai a (ki)számítási problémák. Ilyenkor a kimenet bármi lehet. A kiszámítási problémákra is algoritmikus megoldást keresünk.

Feltehetjük (megfelelő kódolás alkalmazásával), hogy f értelmezési tartománya Σ^*, értékkészlete Δ^* valamely Σ, Δ ábécékre.

Számítási feladatok megoldása TG-pel

Az eldöntési (igen/nem kimenetű) problémák általánosításai a (ki)számítási problémák. Ilyenkor a kimenet bármi lehet. A kiszámítási problémákra is algoritmikus megoldást keresünk.

Feltehetjük (megfelelő kódolás alkalmazásával), hogy f értelmezési tartománya Σ^*, értékkészlete Δ^* valamely Σ, Δ ábécékre.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, q_i, (q_n) \rangle$ TG **kiszámítja** az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt, ha minden $u \in \Sigma^*$-beli szóra megáll, és ekkor $f(u) \in \Delta^*$ olvasható az utolsó szalagján.

Számítási feladatok megoldása TG-pel

Az eldöntési (igen/nem kimenetű) problémák általánosításai a (ki)számítási problémák. Ilyenkor a kimenet bármi lehet. A kiszámítási problémákra is algoritmikus megoldást keresünk.

Feltehetjük (megfelelő kódolás alkalmazásával), hogy f értelmezési tartománya Σ^*, értékkészlete Δ^* valamely Σ, Δ ábécékre.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, q_i, (q_n) \rangle$ TG **kiszámítja** az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt, ha minden $u \in \Sigma^*$-beli szóra megáll, és ekkor $f(u) \in \Delta^*$ olvasható az utolsó szalagján.

Megjegyzés: A definíció értelmében nincs szükség q_i és q_n megkülönböztetésére, elég lenne egyetlen megállási állapot. [Ezért van q_n ()-ben.]

Számítási feladatok megoldása TG-pel

Az eldöntési (igen/nem kimenetű) problémák általánosításai a (ki)számítási problémák. Ilyenkor a kimenet bármi lehet. A kiszámítási problémákra is algoritmikus megoldást keresünk.

Feltehetjük (megfelelő kódolás alkalmazásával), hogy f értelmezési tartománya Σ^*, értékkészlete Δ^* valamely Σ, Δ ábécékre.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, q_i, (q_n)\rangle$ TG **kiszámítja** az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt, ha minden $u \in \Sigma^*$-beli szóra megáll, és ekkor $f(u) \in \Delta^*$ olvasható az utolsó szalagján.

Megjegyzés: A definíció értelmében nincs szükség q_i és q_n megkülönböztetésére, elég lenne egyetlen megállási állapot. [Ezért van q_n ()-ben.]

Példa:

$f(u) = uc$ $(u \in \{a, b\}^*)$.
$(\Sigma = \{a, b\},\ \Delta = \{a, b, c\}.)$

Számítási feladatok megoldása TG-pel

Az eldöntési (igen/nem kimenetű) problémák általánosításai a (ki)számítási problémák. Ilyenkor a kimenet bármi lehet. A kiszámítási problémákra is algoritmikus megoldást keresünk.

Feltehetjük (megfelelő kódolás alkalmazásával), hogy f értelmezési tartománya Σ^*, értékkészlete Δ^* valamely Σ, Δ ábécékre.

Definíció

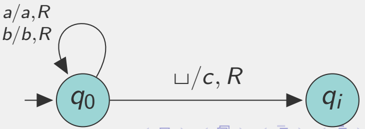
Azt mondjuk, hogy az $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, q_i, (q_n) \rangle$ TG **kiszámítja** az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt, ha minden $u \in \Sigma^*$-beli szóra megáll, és ekkor $f(u) \in \Delta^*$ olvasható az utolsó szalagján.

Megjegyzés: A definíció értelmében nincs szükség q_i és q_n megkülönböztetésére, elég lenne egyetlen megállási állapot. [Ezért van q_n ()-ben.]

Példa:

$f(u) = uc$ $(u \in \{a, b\}^*)$.

$(\Sigma = \{a, b\},\ \Delta = \{a, b, c\}.)$



Visszavezetés

Definíció

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami kiszámítja. [lásd szófüggvényt kiszámító TG]

Visszavezetés

Definíció

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami kiszámítja. [lásd szófüggvényt kiszámító TG]

Definíció

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ **visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leqslant L_2$

Visszavezetés

Definíció

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami kiszámítja. [lásd szófüggvényt kiszámító TG]

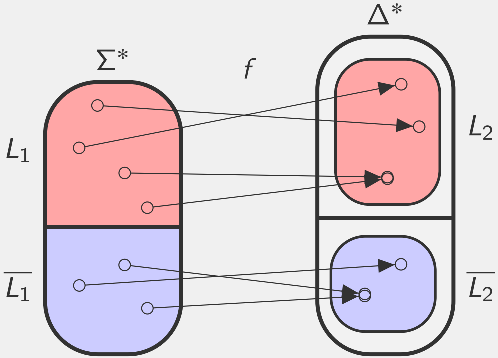
Definíció

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ **visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leqslant L_2$

Megjegyzés: A fogalom Emil Posttól származik, angol nyelvű szakirodalomban: many-one reducibility

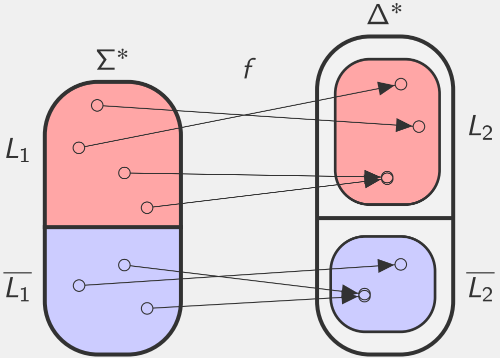
Visszavezetés

$L_1 \leqslant L_2$



Visszavezetés

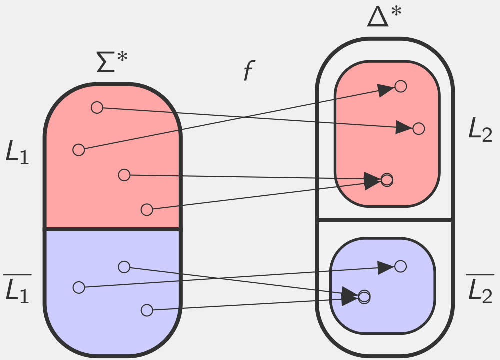
$L_1 \leqslant L_2$



f kiszámítható, az egész Σ^*-on értelmezett, $f(L_1) \subseteq L_2$ valamint $f(\overline{L_1}) \subseteq \overline{L_2}$.

Visszavezetés

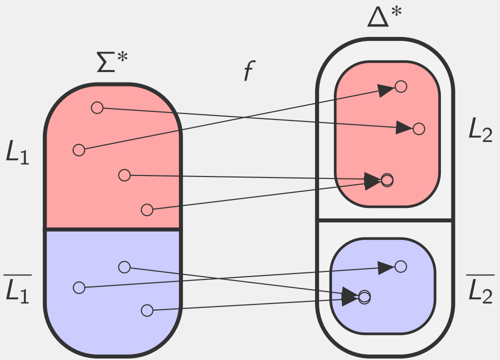
$L_1 \leqslant L_2$



f kiszámítható, az egész Σ^*-on értelmezett, $f(L_1) \subseteq L_2$ valamint $f(\overline{L_1}) \subseteq \overline{L_2}$. f nem kell hogy injektív legyen és az se kell, hogy szürjektív.

Visszavezetés

$L_1 \leqslant L_2$



f kiszámítható, az egész Σ^*-on értelmezett, $f(L_1) \subseteq L_2$ valamint $f(\overline{L_1}) \subseteq \overline{L_2}$. f nem kell hogy injektív legyen és az se kell, hogy szürjektív.

Tétel

- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \in RE$, akkor $L_1 \in RE$.
- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \in R$, akkor $L_1 \in R$.

Visszavezetés

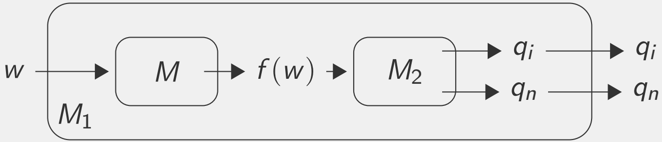
Bizonyítás:
Legyen $L_2 \in RE$ ($\in R$) és tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant L_2$. Legyen M_2 az L_2-t felismerő (eldöntő), M pedig a visszavezetést kiszámító TG.

Visszavezetés

Bizonyítás:
Legyen $L_2 \in RE$ ($\in R$) és tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant L_2$. Legyen M_2 az L_2-t felismerő (eldöntő), M pedig a visszavezetést kiszámító TG. Konstruáljuk meg M_1 -et:

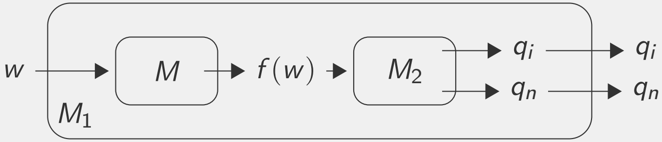
Visszavezetés

Bizonyítás:
Legyen $L_2 \in RE$ ($\in R$) és tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant L_2$. Legyen M_2 az L_2-t felismerő (eldöntő), M pedig a visszavezetést kiszámító TG. Konstruáljuk meg M_1 -et:



Visszavezetés

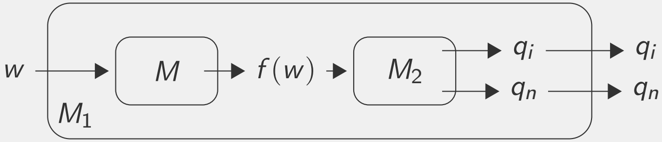
Bizonyítás:
Legyen $L_2 \in RE$ ($\in R$) és tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant L_2$. Legyen M_2 az L_2-t felismerő (eldöntő), M pedig a visszavezetést kiszámító TG. Konstruáljuk meg M_1 -et:



Ha M_2 felismeri L_2-t M_1 is fel fogja ismerni L_1-t, ha el is dönti, akkor M_1 is el fogja dönteni.

Visszavezetés

Bizonyítás:
Legyen $L_2 \in RE$ ($\in R$) és tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant L_2$. Legyen M_2 az L_2-t felismerő (eldöntő), M pedig a visszavezetést kiszámító TG. Konstruáljuk meg M_1 -et:



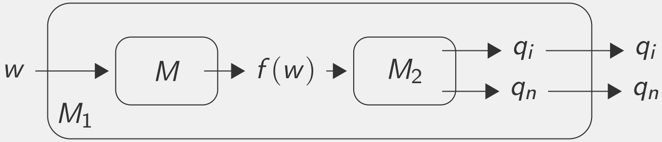
Ha M_2 felismeri L_2-t M_1 is fel fogja ismerni L_1-t, ha el is dönti, akkor M_1 is el fogja dönteni.

Következmény

- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_1 \notin RE$, akkor $L_2 \notin RE$.
- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_1 \notin R$, akkor $L_2 \notin R$.

Visszavezetés

Bizonyítás:
Legyen $L_2 \in RE$ ($\in R$) és tegyük fel, hogy $L_1 \leqslant L_2$. Legyen M_2 az L_2-t felismerő (eldöntő), M pedig a visszavezetést kiszámító TG. Konstruáljuk meg M_1 -et:



Ha M_2 felismeri L_2-t M_1 is fel fogja ismerni L_1-t, ha el is dönti, akkor M_1 is el fogja dönteni.

Következmény

- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_1 \notin RE$, akkor $L_2 \notin RE$.
- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_1 \notin R$, akkor $L_2 \notin R$.

Bizonyítás: Indirekt bizonyítással azonnal adódik a fenti tételből.

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \,|\, M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Kérdés: Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az?

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \,|\, M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Kérdés: Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az? Nem.

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Kérdés: Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az? Nem.

Tétel

$L_h \notin R$.

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Kérdés: Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az? Nem.

Tétel

$L_h \notin R$.

Bizonyítás: Az előző tétel alapján elég megmutatni, hogy $L_u \leqslant L_h$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \notin R$.

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Kérdés: Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az? Nem.

Tétel

$L_h \notin R$.

Bizonyítás: Az előző tétel alapján elég megmutatni, hogy $L_u \leqslant L_h$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \notin R$.
Tetszőleges M TG-re, legyen M' az alábbi TG:

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \,|\, M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Kérdés: Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az? Nem.

Tétel

$L_h \notin R$.

Bizonyítás: Az előző tétel alapján elég megmutatni, hogy $L_u \leqslant L_h$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \notin R$.
Tetszőleges M TG-re, legyen M' az alábbi TG:
M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

A Turing gépek megállási problémája

Megállási probléma: megáll-e M w-n?

$$L_h = \{\langle M, w\rangle \,|\, M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}.$$

Megjegyzés: más jegyzetekben L_{halt} néven is előfordulhat.

Észrevétel: $L_u \subseteq L_h$

Kérdés: Igaz-e ha $A \subseteq B$, és A eldönthetetlen akkor B is az? Nem.

Tétel

$L_h \notin R$.

Bizonyítás: Az előző tétel alapján elég megmutatni, hogy $L_u \leqslant L_h$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \notin R$.
Tetszőleges M TG-re, legyen M' az alábbi TG:
M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' végtelen ciklusba kerül

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \to \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \to \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \rightarrow \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow$

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \rightarrow \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow$

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \to \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow M'$ megáll w-n $\Leftrightarrow$

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \rightarrow \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow M'$ megáll w-n $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in L_h$

Tehát f által L_u visszavezethető L_h-ra.

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \to \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow M'$ megáll w-n $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in L_h$

Tehát f által L_u visszavezethető L_h-ra. Így $L_h \notin R$.

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \to \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow M'$ megáll w-n $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in L_h$

Tehát f által L_u visszavezethető L_h-ra. Így $L_h \notin R$.

Megjegyzés: Visszavezetések megadásakor jellemzően csak azon szavakra térünk ki, amelyek ténylegesen kódolnak valamilyen nyelvbeli objektumot (TG-t, (TG,szó) párt, stb.)

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \to \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow M'$ megáll w-n $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in L_h$

Tehát f által L_u visszavezethető L_h-ra. Így $L_h \notin R$.

Megjegyzés: Visszavezetések megadásakor jellemzően csak azon szavakra térünk ki, amelyek ténylegesen kódolnak valamilyen nyelvbeli objektumot (TG-t, (TG,szó) párt, stb.)

Pl. a fenti esetben nem foglalkoztunk azzal, hogy f mit rendeljen olyan szavakhoz, melyek nem kódolnak (TG, szó) párt. Ez általában egy könnyen kezelhető eset,

A Turing gépek megállási problémája

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \to \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow M$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow M'$ megáll w-n $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in L_h$

Tehát f által L_u visszavezethető L_h-ra. Így $L_h \notin R$.

Megjegyzés: Visszavezetések megadásakor jellemzően csak azon szavakra térünk ki, amelyek ténylegesen kódolnak valamilyen nyelvbeli objektumot (TG-t, (TG,szó) párt, stb.)

Pl. a fenti esetben nem foglalkoztunk azzal, hogy f mit rendeljen olyan szavakhoz, melyek nem kódolnak (TG, szó) párt. Ez általában egy könnyen kezelhető eset, most:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M', w\rangle & \text{ha } \exists M \text{ TG, hogy } x = \langle M, w\rangle \\ \varepsilon & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad (x \in \{0,1\}^*)$$

hiszen ε nem kódol (TG,szó) párt (L_h elemei (TG,szó) párok).

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$.

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG:

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \rightarrow \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w \rangle \in L_h \Leftrightarrow$

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w\rangle \rightarrow \langle M', w\rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w\rangle \in L_h \Leftrightarrow M$ megáll w-n $\Leftrightarrow$

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \to \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w \rangle \in L_h \Leftrightarrow M$ megáll w-n $\Leftrightarrow M'$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow$

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \to \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w \rangle \in L_h \Leftrightarrow M$ megáll w-n $\Leftrightarrow M'$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in L_u$

A Turing gépek megállási problémája

Tétel

$L_h \in RE$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye alapján elég megmutatni, hogy $L_h \leqslant L_u$, hiszen tudjuk, hogy $L_u \in RE$. Tetszőleges M Turing-gépre, legyen M' az alábbi TG: M' tetszőleges u bemeneten a következőket teszi:

1. Futtatja M-et u-n
2. Ha M q_i-be lép, akkor M' is q_i -be lép
3. Ha M q_n-be lép, akkor M' q_i -be lép

Belátható, hogy

- $f : \langle M, w \rangle \to \langle M', w \rangle$ kiszámítható függvény
- Tetszőleges (M, w) (TG,input)-párra $\langle M, w \rangle \in L_h \Leftrightarrow M$ megáll w-n $\Leftrightarrow M'$ elfogadja w-t $\Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in L_u$

Tehát f által L_h visszavezethető L_u-ra.

Rice tétel

Definíció

Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt a rekurzívan felsorolható nyelvek egy **tulajdonságának** nevezzük.

Rice tétel

Definíció

Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt a rekurzívan felsorolható nyelvek egy **tulajdonságának** nevezzük. $\mathcal{P}$ **triviális**, ha $\mathcal{P} = \emptyset$ vagy $\mathcal{P} = RE$.

Rice tétel

Definíció

Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt a rekurzívan felsorolható nyelvek egy **tulajdonságának** nevezzük. $\mathcal{P}$ **triviális**, ha $\mathcal{P} = \emptyset$ vagy $\mathcal{P} = RE$.

$L_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}$.

Rice tétel

Definíció

Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt a rekurzívan felsorolható nyelvek egy **tulajdonságának** nevezzük. $\mathcal{P}$ **triviális**, ha $\mathcal{P} = \emptyset$ vagy $\mathcal{P} = RE$.

$L_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}$.

Rice tétele

Ha $\mathcal{P} \subseteq RE$ egy nem triviális tulajdonság, akkor $L_{\mathcal{P}} \notin R$.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w \rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w \rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-re a második szalagján.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w \rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-re a második szalagján.
2. Így, ha M nem áll meg w-n, akkor M' nem áll meg egyetlen inputjára sem

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w \rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-re a második szalagján.
2. Így, ha M nem áll meg w-n, akkor M' nem áll meg egyetlen inputjára sem Ez esetben $L(M') = \emptyset$.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w \rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-re a második szalagján.
2. Így, ha M nem áll meg w-n, akkor M' nem áll meg egyetlen inputjára sem Ez esetben $L(M') = \emptyset$.
3. Ha M elutasítja w-t, akkor M' q_n-be lép és leáll (azaz nem fogadja el x-et).

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w \rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-re a második szalagján.
2. Így, ha M nem áll meg w-n, akkor M' nem áll meg egyetlen inputjára sem Ez esetben $L(M') = \emptyset$.
3. Ha M elutasítja w-t, akkor M' q_n-be lép és leáll (azaz nem fogadja el x-et). Ez esetben is $L(M') = \emptyset$.

Rice tétel

Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

Egy tetszőleges $\langle M, w\rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-re a második szalagján.
2. Így, ha M nem áll meg w-n, akkor M' nem áll meg egyetlen inputjára sem Ez esetben $L(M') = \emptyset$.
3. Ha M elutasítja w-t, akkor M' q_n-be lép és leáll (azaz nem fogadja el x-et). Ez esetben is $L(M') = \emptyset$.
4. Ha M elfogadja w-t, akkor M' szimulálja M_L -et x-en.

Rice tétel

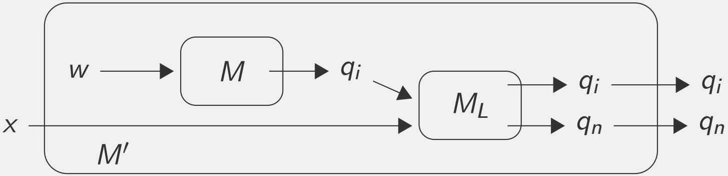
Bizonyítás:

1. eset $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
Mivel tudjuk, hogy $L_u \notin R$, elég belátni, hogy $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$.
Mivel $\mathcal{P}$ nem triviális, ezért létezik $L \in \mathcal{P}$. $(L \neq \emptyset)$.
$L \in RE$, ezért van olyan M_L TG, melyre $L(M_L) = L$.

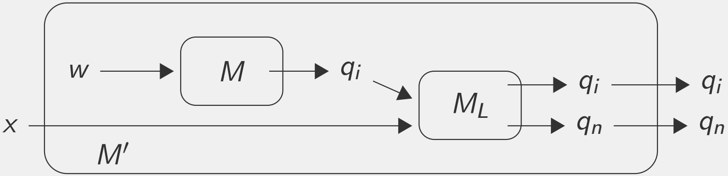
Egy tetszőleges $\langle M, w \rangle$ TG – bemenet pároshoz elkészítünk egy M' kétszalagos TG-t, mely egy x bemenetén a következőképpen működik:

1. Bemenetétől függetlenül először szimulálja M-et w-re a második szalagján.
2. Így, ha M nem áll meg w-n, akkor M' nem áll meg egyetlen inputjára sem Ez esetben $L(M') = \emptyset$.
3. Ha M elutasítja w-t, akkor M' q_n-be lép és leáll (azaz nem fogadja el x-et). Ez esetben is $L(M') = \emptyset$.
4. Ha M elfogadja w-t, akkor M' szimulálja M_L -et x-en. Ekkor M_L definíciója miatt $L(M') = L$.

Rice tétel



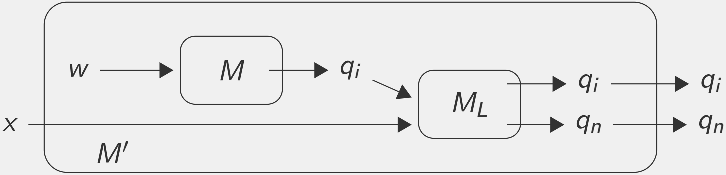
Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w \rangle \in L_u$

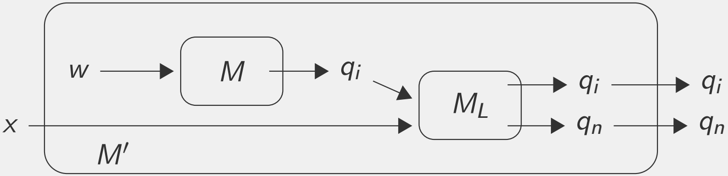
Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w \rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L$

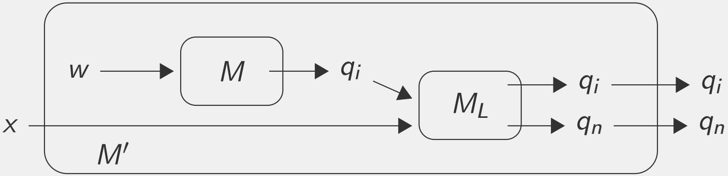
Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w \rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P}$

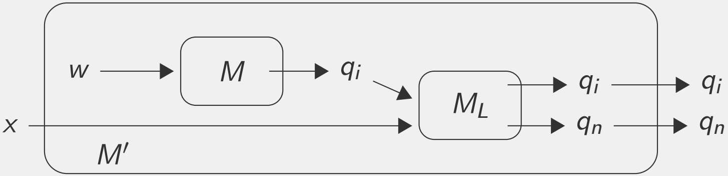
Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w\rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$.

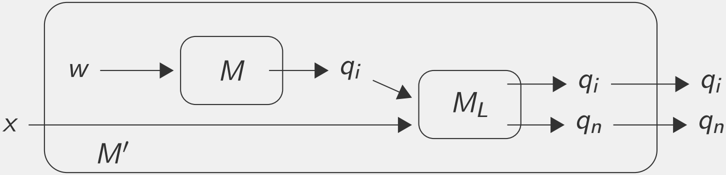
Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w\rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$.
- $\langle M, w\rangle \notin L_u$

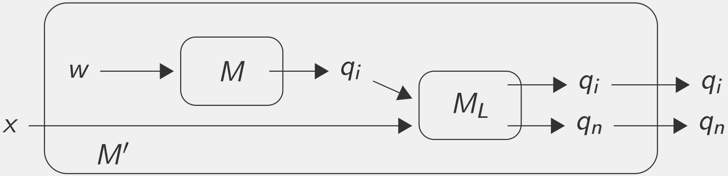
Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w\rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$.
- $\langle M, w\rangle \notin L_u \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \notin \mathcal{P}$

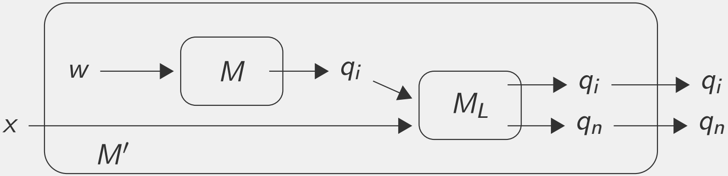
Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w \rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{P}}$.
- $\langle M, w \rangle \notin L_u \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \notin \mathcal{P} \Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{P}}$.

Rice tétel



Összefoglalva

- $\langle M, w\rangle \in L_u \Rightarrow L(M') = L \Rightarrow L(M') \in \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$.
- $\langle M, w\rangle \notin L_u \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow L(M') \notin \mathcal{P} \Rightarrow \langle M'\rangle \notin L_{\mathcal{P}}$.

Azaz:
$\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M'\rangle \in L_{\mathcal{P}}$, tehát $L_u \leqslant L_{\mathcal{P}}$ és így $L_{\mathcal{P}} \notin R$.

Rice tétel

2. eset $\emptyset \in \mathcal{P}$.

Rice tétel

2. **eset** $\emptyset \in \mathcal{P}$.
   - Alkalmazhatjuk az 1. eset eredményét $\overline{\mathcal{P}} = RE \backslash \mathcal{P}$-re, hiszen ekkor $\overline{\mathcal{P}}$ szintén nem triviális és $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$.

Rice tétel

2. **eset** $\emptyset \in \mathcal{P}$.

   - Alkalmazhatjuk az 1. eset eredményét $\overline{\mathcal{P}} = RE \backslash \mathcal{P}$-re, hiszen ekkor $\overline{\mathcal{P}}$ szintén nem triviális és $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$.
   - Azt kapjuk, hogy $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin R$.

Rice tétel

2. eset $\emptyset \in \mathcal{P}$.

- Alkalmazhatjuk az 1. eset eredményét $\overline{\mathcal{P}} = RE \setminus \mathcal{P}$-re, hiszen ekkor $\overline{\mathcal{P}}$ szintén nem triviális és $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$.
- Azt kapjuk, hogy $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin R$.
- $\overline{L_{\mathcal{P}}}$: azon $\{0,1\}$ feletti szavak, amelyek nem kódjai egy olyan M TG-nek, amelyre $L(M)$ $\mathcal{P}$ tulajdonságú.
  $L_{\overline{\mathcal{P}}}$: olyan M TG-ek kódjai, melyre $L(M)$ nem $\mathcal{P}$ tulajdonságú.

Rice tétel

2. eset $\emptyset \in \mathcal{P}$.

- Alkalmazhatjuk az 1. eset eredményét $\overline{\mathcal{P}} = RE \setminus \mathcal{P}$-re, hiszen ekkor $\overline{\mathcal{P}}$ szintén nem triviális és $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$.
- Azt kapjuk, hogy $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin R$.
- $\overline{L_{\mathcal{P}}}$: azon $\{0, 1\}$ feletti szavak, amelyek nem kódjai egy olyan M TG-nek, amelyre $L(M)$ $\mathcal{P}$ tulajdonságú.
  $L_{\overline{\mathcal{P}}}$: olyan M TG-ek kódjai, melyre $L(M)$ nem $\mathcal{P}$ tulajdonságú.

Rice tétel

2. eset $\emptyset \in \mathcal{P}$.

- Alkalmazhatjuk az 1. eset eredményét $\overline{\mathcal{P}} = RE \backslash \mathcal{P}$-re, hiszen ekkor $\overline{\mathcal{P}}$ szintén nem triviális és $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$.
- Azt kapjuk, hogy $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin R$.
- $\overline{L_{\mathcal{P}}}$: azon $\{0,1\}$ feletti szavak, amelyek nem kódjai egy olyan M TG-nek, amelyre $L(M)$ $\mathcal{P}$ tulajdonságú.
  $L_{\overline{\mathcal{P}}}$: olyan M TG-ek kódjai, melyre $L(M)$ nem $\mathcal{P}$ tulajdonságú.
  Megállapodásunk szerint azonban minden $\{0,1\}$ feletti szó TG kód, a nem kellő alakú szavak egy rögzített, egyetlen szót sem elfogadó TG-et kódolnak, így $\overline{L_{\mathcal{P}}} = L_{\overline{\mathcal{P}}}$.

Rice tétel

2. eset $\emptyset \in \mathcal{P}$.

- Alkalmazhatjuk az 1. eset eredményét $\overline{\mathcal{P}} = RE \backslash \mathcal{P}$-re, hiszen ekkor $\overline{\mathcal{P}}$ szintén nem triviális és $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$.
- Azt kapjuk, hogy $L_{\overline{\mathcal{P}}} \notin R$.
- $\overline{L_{\mathcal{P}}}$: azon $\{0,1\}$ feletti szavak, amelyek nem kódjai egy olyan M TG-nek, amelyre $L(M)$ $\mathcal{P}$ tulajdonságú.
  $L_{\overline{\mathcal{P}}}$: olyan M TG-ek kódjai, melyre $L(M)$ nem $\mathcal{P}$ tulajdonságú.
  Megállapodásunk szerint azonban minden $\{0,1\}$ feletti szó TG kód, a nem kellő alakú szavak egy rögzített, egyetlen szót sem elfogadó TG-et kódolnak, így $\overline{L_{\mathcal{P}}} = L_{\overline{\mathcal{P}}}$.
- $\overline{L_{\mathcal{P}}} \notin R \Rightarrow L_{\mathcal{P}} \notin R$ (tétel volt). $\square$

Rice tétel

Alkalmazások

Következmények:

Eldönthetetlen, hogy egy M TG

Rice tétel

Alkalmazások

Következmények:

Eldönthetetlen, hogy egy M TG

- az üres nyelvet ismeri-e fel. ($\mathcal{P} = \{\varnothing\}$)

Rice tétel

Alkalmazások

Következmények:

Eldönthetetlen, hogy egy M TG

- az üres nyelvet ismeri-e fel. $(\mathcal{P} = \{\emptyset\})$
- véges nyelvet ismer-e fel $(\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ véges }\})$

Rice tétel

Alkalmazások

Következmények:

Eldönthetetlen, hogy egy M TG

- az üres nyelvet ismeri-e fel. ($\mathcal{P} = \{\emptyset\}$)
- véges nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ véges }\}$)
- környezetfüggetlen nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ környezetfüggetlen }\}$)

Rice tétel

Alkalmazások

Következmények:

Eldönthetetlen, hogy egy M TG

- az üres nyelvet ismeri-e fel. ($\mathcal{P} = \{\emptyset\}$)
- véges nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ véges }\}$)
- környezetfüggetlen nyelvet ismer-e fel ($\mathcal{P} = \{L \mid L \text{ környezetfüggetlen }\}$)
- elfogadja-e az üres szót ($\mathcal{P} = \{L \in RE \mid \varepsilon \in L\}$)

Post Megfelelkezési Probléma

Definíció

Legyen Σ egy ábécé és legyenek $u_1, \ldots, u_n, v_1 \ldots, v_n \in \Sigma^+$ $(n \geqslant 1)$.

Post Megfelelkezési Probléma

Definíció

Legyen Σ egy ábécé és legyenek $u_1, \ldots, u_n, v_1 \ldots, v_n \in \Sigma^+$ $(n \geqslant 1)$. A $D = \left\{ \frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n} \right\}$ halmazt **dominókészletnek** nevezzük.

Post Megfelelkezési Probléma

Definíció

Legyen Σ egy ábécé és legyenek $u_1, \ldots, u_n, v_1 \ldots, v_n \in \Sigma^+$ $(n \geqslant 1)$. A $D = \left\{ \frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n} \right\}$ halmazt **dominókészletnek** nevezzük.

(Valójában az i. dominó egy az u_i és v_i szavakból álló rendezett pár. u_i-t a dominó felső, míg v_i-t a dominó alsó szavának nevezzük.)

Post Megfelelkezési Probléma

Definíció

Legyen Σ egy ábécé és legyenek $u_1, \ldots, u_n, v_1 \ldots, v_n \in \Sigma^+$ $(n \geqslant 1)$. A $D = \left\{ \frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n} \right\}$ halmazt **dominókészletnek** nevezzük.

(Valójában az i. dominó egy az u_i és v_i szavakból álló rendezett pár. u_i-t a dominó felső, míg v_i-t a dominó alsó szavának nevezzük.)

Definíció

Az $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ dominósorozat $(m \geqslant 1, 1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n)$ a $D = \{\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n}\}$ dominókészlet egy **megoldása**, ha $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: A $\left\{\frac{b}{ca}, \frac{dd}{e}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$ készlet egy lehetséges megoldása

$\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: A $\left\{\frac{b}{ca}, \frac{dd}{e}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$ készlet egy lehetséges megoldása

$\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}$.

Egy másik megoldás: $\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}\,\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: A $\left\{\frac{b}{ca}, \frac{dd}{e}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$ készlet egy lehetséges megoldása

$\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}$.

Egy másik megoldás: $\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}\,\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}$.

Megjegyzés: Tehát egy megoldáshoz a dominók többször felhasználhatók és nem kell minden dominót felhasználni. Egy dominókészletnek több megoldása is lehet.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: A $\left\{\frac{b}{ca}, \frac{dd}{e}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$ készlet egy lehetséges megoldása

$\frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}$.

Egy másik megoldás: $\frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}\ \frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}$.

Megjegyzés: Tehát egy megoldáshoz a dominók többször felhasználhatók és nem kell minden dominót felhasználni. Egy dominókészletnek több megoldása is lehet.

Megoldás alatt véges (de akármekkora) hosszúságú kirakást értünk.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: A $\left\{\frac{b}{ca}, \frac{dd}{e}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$ készlet egy lehetséges megoldása

$\frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}$.

Egy másik megoldás: $\frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}\ \frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}$.

Megjegyzés: Tehát egy megoldáshoz a dominók többször felhasználhatók és nem kell minden dominót felhasználni. Egy dominókészletnek több megoldása is lehet.

Megoldás alatt véges (de akármekkora) hosszúságú kirakást értünk.

Vegyük észre, hogy hiába véges maga a készlet, végtelen sok féleképpen lehet a készlet dominóit véges sorozatba egymás után rakni, így megoldás keresésekor egy végtelen keresési térrel van dolgunk.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: A $\left\{\frac{b}{ca}, \frac{dd}{e}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$ készlet egy lehetséges megoldása $\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}$.

Egy másik megoldás: $\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}\,\frac{a}{ab}\,\frac{b}{ca}\,\frac{ca}{a}\,\frac{a}{ab}\,\frac{abc}{c}$.

Megjegyzés: Tehát egy megoldáshoz a dominók többször felhasználhatók és nem kell minden dominót felhasználni. Egy dominókészletnek több megoldása is lehet.

Megoldás alatt véges (de akármekkora) hosszúságú kirakást értünk.

Vegyük észre, hogy hiába véges maga a készlet, végtelen sok féleképpen lehet a készlet dominóit véges sorozatba egymás után rakni, így megoldás keresésekor egy végtelen keresési térrel van dolgunk.

Post Megfelelkezési Probléma (PMP):

$L_{\text{PMP}} = \{\langle D\rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Tétel

$L_{\mathrm{PMP}} \in RE$.

Post Megfelelkezési Probléma

Tétel

$L_{\mathrm{PMP}} \in RE$.

Bizonyítás: Ha D-t egy ábécének tekintjük, akkor éppen a D feletti szavak a potenciális megoldások.

Post Megfelelkezési Probléma

Tétel

$L_{\text{PMP}} \in RE$.

Bizonyítás: Ha D-t egy ábécének tekintjük, akkor éppen a D feletti szavak a potenciális megoldások.

Egy olyan TG, mely a D feletti szavakat hosszlexikografikus sorrendben sorra kipróbálja és ha megoldást talál q_i-ben leáll éppen L_{PMP}-t ismeri fel.

Post Megfelelkezési Probléma

Tétel

$L_{\mathrm{PMP}} \in RE$.

Bizonyítás: Ha D-t egy ábécének tekintjük, akkor éppen a D feletti szavak a potenciális megoldások.

Egy olyan TG, mely a D feletti szavakat hosszlexikografikus sorrendben sorra kipróbálja és ha megoldást talál q_i-ben leáll éppen L_{PMP}-t ismeri fel.

Tétel

$L_{\mathrm{PMP}} \notin R$.

Post Megfelelkezési Probléma

Tétel

$L_{\text{PMP}} \in RE$.

Bizonyítás: Ha D-t egy ábécének tekintjük, akkor éppen a D feletti szavak a potenciális megoldások.

Egy olyan TG, mely a D feletti szavakat hosszlexikografikus sorrendben sorra kipróbálja és ha megoldást talál q_i-ben leáll éppen L_{PMP}-t ismeri fel.

Tétel

$L_{\text{PMP}} \notin R$.

Bizonyítás:
Definiáljuk a PMP egy módosított változatát, MPMP-t.

Post Megfelelkezési Probléma

Tétel

$L_{\text{PMP}} \in RE$.

Bizonyítás: Ha D-t egy ábécének tekintjük, akkor éppen a D feletti szavak a potenciális megoldások.

Egy olyan TG, mely a D feletti szavakat hosszlexikografikus sorrendben sorra kipróbálja és ha megoldást talál q_i-ben leáll éppen L_{PMP}-t ismeri fel.

Tétel

$L_{\text{PMP}} \notin R$.

Bizonyítás:
Definiáljuk a PMP egy módosított változatát, MPMP-t. Az MPMP probléma igen-példányai olyan (D, d) (dominókészlet,dominó) párok, melyre D-nek van d-vel kezdődő megoldása.

$L_{\text{MPMP}} = \{\langle D, d\rangle \mid d \in D \ \wedge \ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Post Megfelelkezési Probléma

$L_{\mathrm{PMP}} = \{\langle D \rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$,
$L_{\mathrm{MPMP}} = \{\langle D, d \rangle \mid d \in D \ \wedge \ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Post Megfelelkezési Probléma

$L_{\text{PMP}} = \{\langle D \rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$,
$L_{\text{MPMP}} = \{\langle D, d \rangle \mid d \in D \ \wedge \ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Először megmutatjuk, hogy $L_{\text{MPMP}} \leqslant L_{\text{PMP}}$.

Post Megfelelkezési Probléma

$L_{\text{PMP}} = \{\langle D\rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$,
$L_{\text{MPMP}} = \{\langle D, d\rangle \mid d \in D \ \wedge\ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Először megmutatjuk, hogy $L_{\text{MPMP}} \leqslant L_{\text{PMP}}$.

Jelölés: ha $u = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ és $* \notin \Sigma$ akkor legyen

balcsillag$(u) := * a_1 * a_2 \cdots * a_n$
jobbcsillag$(u) := a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.
baljobbcsillag$(u) := * a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.

Post Megfelelkezési Probléma

$L_{\mathrm{PMP}} = \{\langle D\rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$,
$L_{\mathrm{MPMP}} = \{\langle D, d\rangle \mid d \in D \ \wedge\ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Először megmutatjuk, hogy $L_{\mathrm{MPMP}} \leqslant L_{\mathrm{PMP}}$.

Jelölés: ha $u = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ és $* \notin \Sigma$ akkor legyen

balcsillag$(u) := * a_1 * a_2 \cdots * a_n$
jobbcsillag$(u) := a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.
baljobbcsillag$(u) := * a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.

Legyen $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ egy tetszőleges dominókészlet, ahol $d_i = \frac{u_i}{v_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Post Megfelelkezési Probléma

$L_{\mathrm{PMP}} = \{\langle D \rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$,
$L_{\mathrm{MPMP}} = \{\langle D, d \rangle \mid d \in D \ \wedge \ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Először megmutatjuk, hogy $L_{\mathrm{MPMP}} \leqslant L_{\mathrm{PMP}}$.

Jelölés: ha $u = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ és $* \notin \Sigma$ akkor legyen

balcsillag$(u) := * a_1 * a_2 \cdots * a_n$
jobbcsillag$(u) := a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.
baljobbcsillag$(u) := * a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.

Legyen $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ egy tetszőleges dominókészlet, ahol $d_i = \frac{u_i}{v_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
D' legyen a következő $|D| + 2$ méretű készlet ($\# \notin \Sigma$):

Post Megfelelkezési Probléma

$L_{\text{PMP}} = \{\langle D\rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$,
$L_{\text{MPMP}} = \{\langle D, d\rangle \mid d \in D \ \wedge\ D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

Először megmutatjuk, hogy $L_{\text{MPMP}} \leqslant L_{\text{PMP}}$.

Jelölés: ha $u = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ és $* \notin \Sigma$ akkor legyen

balcsillag$(u) := * a_1 * a_2 \cdots * a_n$
jobbcsillag$(u) := a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.
baljobbcsillag$(u) := * a_1 * a_2 * \cdots a_n *$.

Legyen $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ egy tetszőleges dominókészlet, ahol
$d_i = \frac{u_i}{v_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
D' legyen a következő $|D| + 2$ méretű készlet ($\# \notin \Sigma$):

$$d_i' = \frac{\text{balcsillag}(u_i)}{\text{jobbcsillag}(v_i)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$d_0' = \frac{\text{balcsillag}(u_1)}{\text{baljobbcsillag}(v_1)}, \qquad d_{n+1}' = \frac{*\#}{\#}$$

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: Ha

$$D = \left\{ \frac{ab}{a}, \quad \frac{c}{bc} \right\},$$

akkor

$$D' = \left\{ \frac{*\,a*b}{*\,a\,*}, \quad \frac{*\,a*b}{a\,*}, \quad \frac{*\,c}{b*c\,*}, \quad \frac{*\,\#}{\#} \right\}$$

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: Ha

$$D = \left\{ \frac{ab}{a}, \quad \frac{c}{bc} \right\},$$

akkor

$$D' = \left\{ \frac{*\,a*b}{*\,a\,*}, \quad \frac{*\,a*b}{a\,*}, \quad \frac{*\,c}{b*c\,*}, \quad \frac{*\,\#}{\#} \right\}$$

Állítás: $\langle D, d_1 \rangle \in L_{\text{MPMP}} \iff \langle D' \rangle \in L_{\text{PMP}}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: Ha

$$D = \left\{ \frac{ab}{a}, \quad \frac{c}{bc} \right\},$$

akkor

$$D' = \left\{ \frac{*\,a*b}{*\,a\,*}, \quad \frac{*\,a*b}{a\,*}, \quad \frac{*\,c}{b*c\,*}, \quad \frac{*\,\#}{\#} \right\}$$

Állítás: $\langle D, d_1 \rangle \in L_{\mathrm{MPMP}} \iff \langle D' \rangle \in L_{\mathrm{PMP}}$.

Az állítás bizonyítása:

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: Ha

$$D = \left\{ \frac{ab}{a}, \quad \frac{c}{bc} \right\},$$

akkor

$$D' = \left\{ \frac{*a*b}{*a*}, \quad \frac{*a*b}{a*}, \quad \frac{*c}{b*c*}, \quad \frac{*\#}{\#} \right\}$$

Állítás: $\langle D, d_1 \rangle \in L_{\mathrm{MPMP}} \iff \langle D' \rangle \in L_{\mathrm{PMP}}$.

Az állítás bizonyítása:

- ha $d_{i_1} \cdots d_{i_m}$ MPMP egy (D, d_1) bemenetének egy megoldása, akkor $d'_0 d'_{i_2} \cdots d'_{i_m} d'_{n+1}$ megoldása a D' PMP inputnak.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: Ha

$$D = \left\{ \frac{ab}{a}, \quad \frac{c}{bc} \right\},$$

akkor

$$D' = \left\{ \frac{*a*b}{*a*}, \quad \frac{*a*b}{a*}, \quad \frac{*c}{b*c*}, \quad \frac{*\#}{\#} \right\}$$

Állítás: $\langle D, d_1 \rangle \in L_{\mathrm{MPMP}} \iff \langle D' \rangle \in L_{\mathrm{PMP}}$.

Az állítás bizonyítása:

- ha $d_{i_1} \cdots d_{i_m}$ MPMP egy (D, d_1) bemenetének egy megoldása, akkor $d'_0 d'_{i_2} \cdots d'_{i_m} d'_{n+1}$ megoldása a D' PMP inputnak.
- ha $d'_{i_1} \cdots d'_{i_m}$ D'-nek, mint PMP inputnak egy megoldása, akkor az első illetve az utolsó betű egyezése miatt ez csak úgy lehetséges, hogy $d'_{i_1} = d'_0$ és $d'_{i_m} = d'_{n+1}$. Ekkor viszont $d_{i_1} \cdots d_{i_{m-1}}$ megoldása a (D, d_1) MPMP bemenetnek.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa: Ha

$$D = \left\{ \frac{ab}{a}, \quad \frac{c}{bc} \right\},$$

akkor

$$D' = \left\{ \frac{*a*b}{*a*}, \quad \frac{*a*b}{a*}, \quad \frac{*c}{b*c*}, \quad \frac{*\#}{\#} \right\}$$

Állítás: $\langle D, d_1 \rangle \in L_{\mathrm{MPMP}} \Longleftrightarrow \langle D' \rangle \in L_{\mathrm{PMP}}$.

Az állítás bizonyítása:

- ha $d_{i_1} \cdots d_{i_m}$ MPMP egy (D, d_1) bemenetének egy megoldása, akkor $d'_0 d'_{i_2} \cdots d'_{i_m} d'_{n+1}$ megoldása a D' PMP inputnak.
- ha $d'_{i_1} \cdots d'_{i_m}$ D'-nek, mint PMP inputnak egy megoldása, akkor az első illetve az utolsó betű egyezése miatt ez csak úgy lehetséges, hogy $d'_{i_1} = d'_0$ és $d'_{i_m} = d'_{n+1}$. Ekkor viszont $d_{i_1} \cdots d_{i_{m-1}}$ megoldása a (D, d_1) MPMP bemenetnek.

Ezzel az állítást bizonyítottuk. Mivel ez a megfeleltetés nyilván TG-pel kiszámítható, ezért $L_{\mathrm{MPMP}} \leqslant L_{\mathrm{PMP}}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\mathrm{MPMP}}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\mathrm{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w \rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d \rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\mathsf{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w \rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d \rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\mathrm{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w\rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d\rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n\rangle$ és $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$.
(D, d) konstrukciója:

- $d := \frac{\#}{\# q_0 a_1 \cdots a_n \#}$ (ahol $\# \notin \Sigma$) $\quad d :\in D$

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\text{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w\rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d\rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n\rangle$ és $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$.
(D, d) konstrukciója:

- $d := \frac{\#}{\# q_0 a_1 \cdots a_n \#}$ (ahol $\# \notin \Sigma$) $\quad d :\in D$
- – ha $\delta(p, a) = (q, b, R)$, akkor $\frac{pa}{bq} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, L)$, akkor $(\forall c \in \Gamma :)$ $\frac{cpa}{qcb} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, S)$, akkor $\frac{pa}{qb} :\in D$

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\text{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w\rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d\rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n\rangle$ és $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$.
(D, d) konstrukciója:

- $d := \frac{\#}{\#q_0 a_1 \cdots a_n \#}$ (ahol $\# \notin \Sigma$) $\quad d :\in D$
- – ha $\delta(p, a) = (q, b, R)$, akkor $\frac{pa}{bq} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, L)$, akkor $(\forall c \in \Gamma :)$ $\frac{cpa}{qcb} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, S)$, akkor $\frac{pa}{qb} :\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)$ $\frac{a}{a} :\in D$

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\text{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w\rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d\rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n\rangle$ és $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$.
(D, d) konstrukciója:

- $d := \frac{\#}{\#q_0 a_1 \cdots a_n \#}$ (ahol $\# \notin \Sigma$) $\quad d :\in D$
- – ha $\delta(p, a) = (q, b, R)$, akkor $\frac{pa}{bq} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, L)$, akkor $(\forall c \in \Gamma :)$ $\frac{cpa}{qcb} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, S)$, akkor $\frac{pa}{qb} :\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)$ $\frac{a}{a} :\in D$
- $\frac{\#}{\#}$, $\frac{\#}{\sqcup\#}$, $\frac{\#}{\#\sqcup}$ $:\in D$

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\mathrm{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w\rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d\rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n\rangle$ és $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$.
(D, d) konstrukciója:

- $d := \frac{\#}{\# q_0 a_1 \cdots a_n \#}$ (ahol $\# \notin \Sigma$) $\quad d :\in D$
- – ha $\delta(p, a) = (q, b, R)$, akkor $\frac{pa}{bq} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, L)$, akkor $(\forall c \in \Gamma :)$ $\frac{cpa}{qcb} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, S)$, akkor $\frac{pa}{qb} :\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)$ $\frac{a}{a} :\in D$
- $\frac{\#}{\#}$, $\frac{\#}{\sqcup\#}$, $\frac{\#}{\#\sqcup}$ $:\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)$ $\frac{aq_i}{q_i}$, $\frac{q_i a}{q_i}$ $:\in D$

Post Megfelelkezési Probléma

Most megmutatjuk, hogy $L_u \leqslant L_{\mathrm{MPMP}}$.

Minden $\langle M, w\rangle$ (TG, szó) párhoz megadunk egy $\langle D, d\rangle$ (dominókészlet, kezdődominó) párt, úgy hogy

$w \in L(M) \iff D$-nek van d-vel kezdődő megoldása.

Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n\rangle$ és $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$. (D, d) konstrukciója:

- $d := \frac{\#}{\# q_0 a_1 \cdots a_n \#}$ (ahol $\# \notin \Sigma$) $\quad d :\in D$
- – ha $\delta(p, a) = (q, b, R)$, akkor $\frac{pa}{bq} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, L)$, akkor $(\forall c \in \Gamma :)$ $\frac{cpa}{qcb} :\in D$
  – ha $\delta(p, a) = (q, b, S)$, akkor $\frac{pa}{qb} :\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)$ $\frac{a}{a} :\in D$
- $\frac{\#}{\#}, \frac{\#}{\sqcup \#}, \frac{\#}{\# \sqcup} :\in D$
- $(\forall a \in \Gamma :)$ $\frac{a q_i}{q_i}, \frac{q_i a}{q_i} :\in D$
- $\frac{q_i \# \#}{\#} :\in D$.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0bab \vdash aq_2ab \vdash aq_ibb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0bab \vdash aq_2ab \vdash aq_ibb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Az $\langle M, bab \rangle$-hoz tartozó dominókészlet tartalmazza többek között a

$\frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdő-,

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0 bab \vdash aq_2 ab \vdash aq_i bb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Az $\langle M, bab\rangle$-hoz tartozó dominókészlet tartalmazza többek között a

$\frac{\#}{\#q_0 bab\#}$ kezdő-, $\frac{q_0 b}{aq_2}$ és $\frac{q_2 a}{q_i b}$ átmenet- ,

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0 bab \vdash aq_2 ab \vdash aq_i bb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Az $\langle M, bab\rangle$-hoz tartozó dominókészlet tartalmazza többek között a

$\frac{\#}{\#q_0 bab\#}$ kezdő-, $\frac{q_0 b}{aq_2}$ és $\frac{q_2 a}{q_i b}$ átmenet- , $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{\sqcup}{\sqcup}$ és $\frac{\#}{\#}$ identikus dominókat

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0 bab \vdash aq_2 ab \vdash aq_i bb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Az $\langle M, bab \rangle$-hoz tartozó dominókészlet tartalmazza többek között a

$\frac{\#}{\#q_0 bab\#}$ kezdő-, $\frac{q_0 b}{aq_2}$ és $\frac{q_2 a}{q_i b}$ átmenet- , $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{\sqcup}{\sqcup}$ és $\frac{\#}{\#}$ identikus dominókat valamint a befejezéshez szükséges $\frac{aq_i}{q_i}$, $\frac{q_i b}{q_i}$ és $\frac{q_i\#\#}{\#}$ dominókat.

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0bab \vdash aq_2ab \vdash aq_ibb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Az $\langle M, bab\rangle$-hoz tartozó dominókészlet tartalmazza többek között a

$\frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdő-, $\frac{q_0b}{aq_2}$ és $\frac{q_2a}{q_ib}$ átmenet- , $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{\sqcup}{\sqcup}$ és $\frac{\#}{\#}$ identikus dominókat valamint a befejezéshez szükséges $\frac{aq_i}{q_i}$, $\frac{q_ib}{q_i}$ és $\frac{q_i\#\#}{\#}$ dominókat.

Ekkor egy kirakás ($|$-al blokkokra osztva):

Post Megfelelkezési Probléma

Példa:

Ha M-nek $\delta(q_0, b) = (q_2, a, R)$ és $\delta(q_2, a) = (q_i, b, S)$ átmenetei, akkor $q_0 bab \vdash aq_2 ab \vdash aq_i bb$ egy bab-ot elfogadó konfigurációátmenet.

Az $\langle M, bab\rangle$-hoz tartozó dominókészlet tartalmazza többek között a

$\frac{\#}{\#q_0 bab\#}$ kezdő-, $\frac{q_0 b}{aq_2}$ és $\frac{q_2 a}{q_i b}$ átmenet- , $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{\sqcup}{\sqcup}$ és $\frac{\#}{\#}$ identikus dominókat valamint a befejezéshez szükséges $\frac{aq_i}{q_i}$, $\frac{q_i b}{q_i}$ és $\frac{q_i\#\#}{\#}$ dominókat.

Ekkor egy kirakás ($|$-al blokkokra osztva):

$$\frac{\#}{\#q_0 bab\#} \left| \frac{q_0 b}{aq_2}\frac{a}{a}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \right| \frac{a}{a}\frac{q_2 a}{q_i b}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \left| \frac{aq_i}{q_i}\frac{b}{b}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \right| \frac{q_i b}{q_i}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \left| \frac{q_i b}{q_i}\frac{\#}{\#} \right| \frac{q_i\#\#}{\#}$$

Post Megfelelkezési Probléma

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#}\;\Bigg|\;\frac{q_0b}{aq_2}\frac{a}{a}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{a}{a}\frac{q_2a}{q_ib}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{aq_i}{q_i}\frac{b}{b}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{q_ib}{q_i}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{q_ib}{q_i}\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{q_i\#\#}{\#}$$

A példán szemléltetjük, hogy $w \in L(M) \Rightarrow \exists \langle D, d \rangle$-nek megoldása.

Post Megfelelkezési Probléma

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#} \;\Bigg|\; \frac{q_0b}{aq_2}\,\frac{a}{a}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{a}{a}\,\frac{q_2a}{q_ib}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{aq_i}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{q_ib}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{q_ib}{q_i}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{q_i\#\#}{\#}$$

A példán szemléltetjük, hogy $w \in L(M) \Rightarrow \exists \langle D, d \rangle$-nek megoldása.
Az első blokk csak a $d = \frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdődominóból áll.

Post Megfelelkezési Probléma

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#} \;\Big|\; \frac{q_0b}{aq_2}\frac{a}{a}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{a}{a}\frac{q_2a}{q_ib}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{aq_i}{q_i}\frac{b}{b}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{q_ib}{q_i}\frac{b}{b}\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{q_ib}{q_i}\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{q_i\#\#}{\#}$$

A példán szemléltetjük, hogy $w \in L(M) \Rightarrow \exists \langle D, d \rangle$-nek megoldása.
Az első blokk csak a $d = \frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdődominóból áll.
A következő két blokkban alul és felül is konfigurációk következnek, felül mindig eggyel "lemaradva".

Post Megfelelkezési Probléma

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#}\;\Bigg|\;\frac{q_0b}{aq_2}\,\frac{a}{a}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{a}{a}\,\frac{q_2a}{q_ib}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{aq_i}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{q_ib}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{q_ib}{q_i}\,\frac{\#}{\#}\;\Bigg|\;\frac{q_i\#\#}{\#}$$

A példán szemléltetjük, hogy $w \in L(M) \Rightarrow \exists \langle D, d \rangle$-nek megoldása.

Az első blokk csak a $d = \frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdődominóból áll.

A következő két blokkban alul és felül is konfigurációk következnek, felül mindig eggyel "lemaradva".

A 4.-6. blokkokban a $\frac{aq_i}{q_i}$ (és $\frac{q_ia}{q_i}$) típusú dominókkal egyesével „behozható" a felső szó lemaradása, egészen addig, amíg az alsó rész már csak $q_i\#$-al hosszabb.

Post Megfelelkezési Probléma

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#} \;\Bigg|\; \frac{q_0b}{aq_2}\,\frac{a}{a}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{a}{a}\,\frac{q_2a}{q_ib}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{aq_i}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{q_ib}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{q_ib}{q_i}\,\frac{\#}{\#} \;\Bigg|\; \frac{q_i\#\#}{\#}$$

A példán szemléltetjük, hogy $w \in L(M) \Rightarrow \exists \langle D, d \rangle$-nek megoldása.

Az első blokk csak a $d = \frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdődominóból áll.

A következő két blokkban alul és felül is konfigurációk következnek, felül mindig eggyel "lemaradva".

A 4.-6. blokkokban a $\frac{aq_i}{q_i}$ (és $\frac{q_ia}{q_i}$) típusú dominókkal egyesével „behozható" a felső szó lemaradása, egészen addig, amíg az alsó rész már csak $q_i\#$-al hosszabb.

Végül a 7. blokkban csak egy (záró)dominó szerepel, melynek az a szerepe, hogy „behozza" a még megmaradt lemaradást.

Post Megfelelkezési Probléma

$$\frac{\#}{\#q_0bab\#} \;\Big|\; \frac{q_0b}{aq_2}\,\frac{a}{a}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{a}{a}\,\frac{q_2a}{q_ib}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{aq_i}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{q_ib}{q_i}\,\frac{b}{b}\,\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{q_ib}{q_i}\,\frac{\#}{\#} \;\Big|\; \frac{q_i\#\#}{\#}$$

A példán szemléltetjük, hogy $w \in L(M) \Rightarrow \exists\langle D, d\rangle$-nek megoldása.

Az első blokk csak a $d = \frac{\#}{\#q_0bab\#}$ kezdődominóból áll.

A következő két blokkban alul és felül is konfigurációk következnek, felül mindig eggyel "lemaradva".

A 4.-6. blokkokban a $\frac{aq_i}{q_i}$ (és $\frac{q_ia}{q_i}$) típusú dominókkal egyesével „behozható” a felső szó lemaradása, egészen addig, amíg az alsó rész már csak $q_i\#$-al hosszabb.

Végül a 7. blokkban csak egy (záró)dominó szerepel, melynek az a szerepe, hogy „behozza” a még megmaradt lemaradást.

Ugyanilyen módon megkonstruálható egy megoldás minden olyan esetben, ha $w \in L(M)$. Azaz, $w \in L(M) \Rightarrow \exists\langle D, d\rangle$-nek megoldása.

Post Megfelelkezési Probléma

Másrészt, ha van $\langle D, d \rangle$-nek megoldása, akkor ebben a megoldás alsó és a felső szava egyenlő hosszú (sőt ugyanaz a szó!), így tartalmaznia kell q_i-t tartalmazó dominót, hiszen csak ezekben hosszabb a felső szó, d-ben viszont az alsó az.

Post Megfelelkezési Probléma

Másrészt, ha van $\langle D, d \rangle$-nek megoldása, akkor ebben a megoldás alsó és a felső szava egyenlő hosszú (sőt ugyanaz a szó!), így tartalmaznia kell q_i-t tartalmazó dominót, hiszen csak ezekben hosszabb a felső szó, d-ben viszont az alsó az.

Meggondolható, hogy minden kirakás alsó szava az első q_i-t követő $\#$-ig egy $\#$-ekkel elválasztott elfogadó konfigurációban végződő konfigurációsorozat kell legyen a w-hez tartozó kezdőkonfigurációból. Tehát a w szóhoz tartozó kezdőkonfigurációból M el tud jutni elfogadó konfigurációba, azaz $w \in L(M)$.

Post Megfelelkezési Probléma

Másrészt, ha van $\langle D, d\rangle$-nek megoldása, akkor ebben a megoldás alsó és a felső szava egyenlő hosszú (sőt ugyanaz a szó!), így tartalmaznia kell q_i-t tartalmazó dominót, hiszen csak ezekben hosszabb a felső szó, d-ben viszont az alsó az.

Meggondolható, hogy minden kirakás alsó szava az első q_i-t követő #-ig egy #-ekkel elválasztott elfogadó konfigurációban végződő konfigurációsorozat kell legyen a w-hez tartozó kezdőkonfigurációból. Tehát a w szóhoz tartozó kezdőkonfigurációból M el tud jutni elfogadó konfigurációba, azaz $w \in L(M)$.

Nyilván $\langle D, d\rangle$ $\langle M, w\rangle$-ből TG-pel kiszámítható, így a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható. Tehát beláttuk, hogy $L_u \leqslant L_{\mathrm{MPMP}}$.

Post Megfelelkezési Probléma

Állítás: A visszavezetés tranzitív.

Post Megfelelkezési Probléma

Állítás: A visszavezetés tranzitív.

Az állítás bizonyítása: Legyen $L_i \subseteq \Sigma_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$, $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \leqslant L_3$.

Post Megfelelkezési Probléma

Állítás: A visszavezetés tranzitív.

Az állítás bizonyítása: Legyen $L_i \subseteq \Sigma_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$, $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \leqslant L_3$. Legyen továbbá $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ és $g : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ a visszavezetés definíciója alapján létező két kiszámítható szófüggvény, amelyekre
$f(L_1) \subseteq L_2, f(\bar{L}_1) \subseteq \bar{L}_2, g(L_2) \subseteq L_3, g(\bar{L}_2) \subseteq \bar{L}_3,.$

Post Megfelelkezési Probléma

Állítás: A visszavezetés tranzitív.

Az állítás bizonyítása: Legyen $L_i \subseteq \Sigma_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$, $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \leqslant L_3$. Legyen továbbá $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ és $g : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ a visszavezetés definíciója alapján létező két kiszámítható szófüggvény, amelyekre $f(L_1) \subseteq L_2, f(\bar{L}_1) \subseteq \bar{L}_2, g(L_2) \subseteq L_3, g(\bar{L}_2) \subseteq \bar{L}_3,$.

Ekkor $g \circ f$ nyilván kiszámítható és visszavezeti L_1-et L_3-ra, hiszen $g \circ f(L_1) = g(f(L_1)) \subseteq g(L_2) \subseteq L_3$

Post Megfelelkezési Probléma

Állítás: A visszavezetés tranzitív.

Az állítás bizonyítása: Legyen $L_i \subseteq \Sigma_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$, $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \leqslant L_3$. Legyen továbbá $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ és $g : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ a visszavezetés definíciója alapján létező két kiszámítható szófüggvény, amelyekre
$f(L_1) \subseteq L_2, f(\bar{L}_1) \subseteq \bar{L}_2, g(L_2) \subseteq L_3, g(\bar{L}_2) \subseteq \bar{L}_3,$.

Ekkor $g \circ f$ nyilván kiszámítható és visszavezeti L_1-et L_3-ra, hiszen
$g \circ f(L_1) = g(f(L_1)) \subseteq g(L_2) \subseteq L_3$ és
$g \circ f(\bar{L}_1) = g(f(\bar{L}_1)) \subseteq g(\bar{L}_2) \subseteq \bar{L}_3$. □

Post Megfelelkezési Probléma

Állítás: A visszavezetés tranzitív.

Az állítás bizonyítása: Legyen $L_i \subseteq \Sigma_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$, $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \leqslant L_3$. Legyen továbbá $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ és $g : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ a visszavezetés definíciója alapján létező két kiszámítható szófüggvény, amelyekre
$f(L_1) \subseteq L_2, f(\bar{L}_1) \subseteq \bar{L}_2, g(L_2) \subseteq L_3, g(\bar{L}_2) \subseteq \bar{L}_3,$.

Ekkor $g \circ f$ nyilván kiszámítható és visszavezeti L_1-et L_3-ra, hiszen
$g \circ f(L_1) = g(f(L_1)) \subseteq g(L_2) \subseteq L_3$ és
$g \circ f(\bar{L}_1) = g(f(\bar{L}_1)) \subseteq g(\bar{L}_2) \subseteq \bar{L}_3$. $\square$

Innen a tétel bizonyítása: $L_u \leqslant L_{\text{MPMP}}$, $L_{\text{MPMP}} \leqslant L_{\text{PMP}}$ és tudjuk már, hogy $L_u \notin R$. Ebből a visszavezetés tranzitivitása és korábbi tételünk alapján $L_{\text{PMP}} \notin R$. $\square$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(Volt:) Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) grammatikát **egyértelműnek** neveztünk, ha minden $L(G)$-beli szónak pontosan egy baloldali levezetése van G-ben. (**Baloldali levezetés:** mindig a legbaloldalibb nemterminálist írjuk át a mondatformában.)

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(Volt:) Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) grammatikát **egyértelműnek** neveztünk, ha minden $L(G)$-beli szónak pontosan egy baloldali levezetése van G-ben. (**Baloldali levezetés:** mindig a legbaloldalibb nemterminálist írjuk át a mondatformában.)

$L_{\mathrm{ECF}} := \{\langle G\rangle \mid G$ egyértelmű CF grammatika$\}$.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(Volt:) Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) grammatikát **egyértelműnek** neveztünk, ha minden $L(G)$-beli szónak pontosan egy baloldali levezetése van G-ben. (**Baloldali levezetés:** mindig a legbaloldalibb nemterminálist írjuk át a mondatformában.)

$L_{\mathrm{ECF}} := \{\langle G\rangle \mid G \text{ egyértelmű CF grammatika}\}$.

Tétel

$L_{\mathrm{ECF}} \notin R$

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $L_{\mathrm{PMP}} \leqslant \overline{L_{\mathrm{ECF}}}$.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(Volt:) Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) grammatikát **egyértelműnek** neveztünk, ha minden $L(G)$-beli szónak pontosan egy baloldali levezetése van G-ben. (**Baloldali levezetés:** mindig a legbaloldalibb nemterminálist írjuk át a mondatformában.)

$L_{\mathrm{ECF}} := \{\langle G\rangle \mid G \text{ egyértelmű CF grammatika}\}$.

Tétel

$L_{\mathrm{ECF}} \notin R$

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $L_{\mathrm{PMP}} \leqslant \overline{L_{\mathrm{ECF}}}$.
Legyen $D = \left\{\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n}\right\}$ egy tetszőleges dominókészlet a Σ ábécé felett.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(Volt:) Egy G környezetfüggetlen (CF, 2-es típusú) grammatikát **egyértelműnek** neveztünk, ha minden $L(G)$-beli szónak pontosan egy baloldali levezetése van G-ben. (**Baloldali levezetés:** mindig a legbaloldalibb nemterminálist írjuk át a mondatformában.)

$L_{\text{ECF}} := \{\langle G\rangle \mid G \text{ egyértelmű CF grammatika}\}$.

Tétel

$L_{\text{ECF}} \notin R$

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $L_{\text{PMP}} \leqslant \overline{L_{\text{ECF}}}$.
Legyen $D = \left\{\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n}\right\}$ egy tetszőleges dominókészlet a Σ ábécé felett.

$\Delta := \{a_1, \ldots, a_n\}$ úgy, hogy $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$.

$P_A := \{A \to u_1 A a_1, \ldots, A \to u_n A a_n,\ A \to \varepsilon\}$.
$P_B := \{B \to v_1 B a_1, \ldots, B \to v_n B a_n,\ B \to \varepsilon\}$.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

$G_A = \langle A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Sigma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

$G_A = \langle A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Sigma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

$f : \langle D \rangle \to \langle G_D \rangle$ visszavezetés, mert:

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

$G_A = \langle A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Sigma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

$f : \langle D \rangle \to \langle G_D \rangle$ visszavezetés, mert:

- ha $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ megoldása D-nek, akkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

$G_A = \langle A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Sigma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

$f : \langle D \rangle \to \langle G_D \rangle$ visszavezetés, mert:

- ha $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ megoldása D-nek, akkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$. De ekkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = v_{i_1} \cdots v_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1}$ kétféleképpen is levezethető, így G_D nem egyértelmű.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

$G_A = \langle A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Sigma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

$f : \langle D \rangle \to \langle G_D \rangle$ visszavezetés, mert:

- ha $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ megoldása D-nek, akkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$. De ekkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = v_{i_1} \cdots v_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1}$ kétféleképpen is levezethető, így G_D nem egyértelmű.
- ha G_D nem egyértelmű, akkor van olyan szó, aminek két baloldali levezetése van. De ezek $S \to A$-val illetve $S \to B$-vel kell kezdődjenek, hiszen G_A és G_B egyértelmű.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

$G_A = \langle A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Sigma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

$f : \langle D \rangle \to \langle G_D \rangle$ visszavezetés, mert:

- ha $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ megoldása D-nek, akkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$. De ekkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = v_{i_1} \cdots v_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1}$ kétféleképpen is levezethető, így G_D nem egyértelmű.

- ha G_D nem egyértelmű, akkor van olyan szó, aminek két baloldali levezetése van. De ezek $S \to A$-val illetve $S \to B$-vel kell kezdődjenek, hiszen G_A és G_B egyértelmű. A generált szavak xy, $x \in \Sigma^*, y \in \Delta^*$ alakúak, így ugyanaz a generált Σ feletti prefix is. Így a két levezetés D egy megoldását adja.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

$G_A = \langle A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A \rangle$. $G_B = \langle B, \{B\}, \Sigma \cup \Delta, P_B \rangle$.
$G_D = \langle S, \{S, A, B\}, \Sigma \cup \Delta, \{S \to A, S \to B\} \cup P_A \cup P_B \rangle$.

$f : \langle D \rangle \to \langle G_D \rangle$ visszavezetés, mert:

- ha $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ megoldása D-nek, akkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$. De ekkor $u_{i_1} \cdots u_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1} = v_{i_1} \cdots v_{i_m} a_{i_m} \cdots a_{i_1}$ kétféleképpen is levezethető, így G_D nem egyértelmű.

- ha G_D nem egyértelmű, akkor van olyan szó, aminek két baloldali levezetése van. De ezek $S \to A$-val illetve $S \to B$-vel kell kezdődjenek, hiszen G_A és G_B egyértelmű. A generált szavak xy, $x \in \Sigma^*, y \in \Delta^*$ alakúak, így ugyanaz a generált Σ feletti prefix is. Így a két levezetés D egy megoldását adja.

f nyilván TG-pel kiszámítható. Mivel $L_{\mathrm{PMP}} \notin R$, következik, hogy $\overline{L_{\mathrm{ECF}}} \notin R$, amiből kapjuk, hogy $L_{\mathrm{ECF}} \notin R$. $\square$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Lemma

Az előző tétel bizonyításában definiált G_A és G_B grammatikák esetén $\overline{L(G_A)}$ és $\overline{L(G_B)}$ környezetfüggetlen.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Lemma

Az előző tétel bizonyításában definiált G_A és G_B grammatikák esetén $\overline{L(G_A)}$ és $\overline{L(G_B)}$ környezetfüggetlen.

Bizonyítás: Az állítás nem nyilvánvaló, mivel a környezetfüggetlen nyelvek nem zártak a komplementer képzésre.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Lemma

Az előző tétel bizonyításában definiált G_A és G_B grammatikák esetén $\overline{L(G_A)}$ és $\overline{L(G_B)}$ környezetfüggetlen.

Bizonyítás: Az állítás nem nyilvánvaló, mivel a környezetfüggetlen nyelvek nem zártak a komplementer képzésre. Elég G_A-ra belátni az állítást, G_B-re ugyanígy bizonyítható.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Lemma

Az előző tétel bizonyításában definiált G_A és G_B grammatikák esetén $\overline{L(G_A)}$ és $\overline{L(G_B)}$ környezetfüggetlen.

Bizonyítás: Az állítás nem nyilvánvaló, mivel a környezetfüggetlen nyelvek nem zártak a komplementer képzésre. Elég G_A-ra belátni az állítást, G_B-re ugyanígy bizonyítható.

Legyen $n_i := |u_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant |D|)$. $L(G_A)$-hoz adható determinisztikus veremautomata.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Lemma

Az előző tétel bizonyításában definiált G_A és G_B grammatikák esetén $\overline{L(G_A)}$ és $\overline{L(G_B)}$ környezetfüggetlen.

Bizonyítás: Az állítás nem nyilvánvaló, mivel a környezetfüggetlen nyelvek nem zártak a komplementer képzésre. Elég G_A-ra belátni az állítást, G_B-re ugyanígy bizonyítható.

Legyen $n_i := |u_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant |D|)$. $\overline{L(G_A)}$-hoz adható determinisztikus veremautomata.

Ötlet: Amíg Σ-beli betűk jönnek az inputon pakoljuk őket bele a verembe. Ha $a_i \in \Delta$-beli betű jön, akkor próbáljuk meg kivenni u_i^{-1}-et a veremből.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Lemma

Az előző tétel bizonyításában definiált G_A és G_B grammatikák esetén $\overline{L(G_A)}$ és $\overline{L(G_B)}$ környezetfüggetlen.

Bizonyítás: Az állítás nem nyilvánvaló, mivel a környezetfüggetlen nyelvek nem zártak a komplementer képzésre. Elég G_A-ra belátni az állítást, G_B-re ugyanígy bizonyítható.

Legyen $n_i := |u_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant |D|)$. $L(G_A)$-hoz adható determinisztikus veremautomata.

Ötlet: Amíg Σ-beli betűk jönnek az inputon pakoljuk őket bele a verembe. Ha $a_i \in \Delta$-beli betű jön, akkor próbáljuk meg kivenni u_i^{-1}-et a veremből. Megvalósítás:
$A = \langle \Sigma \cup \{\#\}, Q, \Sigma \cup \Delta, \delta, q_0, \#, \{s\} \rangle$, ahol

$$Q = \{q_0, r, s\} \cup \bigcup_{i=1}^{|D|} \{q_{i1}, \ldots, q_{i(n_i-1)}\}$$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0t \to \#tq_0 \quad (t \in \Sigma)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0t \to \#tq_0 \quad (t \in \Sigma)$

$t_1q_0t_2 \to t_1t_2q_0 \quad (t_1, t_2 \in \Sigma)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0 t \to \#t q_0 \quad (t \in \Sigma)$

$t_1 q_0 t_2 \to t_1 t_2 q_0 \quad (t_1, t_2 \in \Sigma)$

$t_{n_i} x a_i \to q_{i(n_i-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, x \in \{q_0, r\}, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0t \to \#tq_0 \quad (t \in \Sigma)$

$t_1q_0t_2 \to t_1t_2q_0 \quad (t_1, t_2 \in \Sigma)$

$t_{n_i}xa_i \to q_{i(n_i-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, x \in \{q_0, r\}, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_jq_{ij} \to q_{i(j-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, 2 \leqslant j \leqslant n_i-1, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0t \to \#tq_0 \quad (t \in \Sigma)$

$t_1q_0t_2 \to t_1t_2q_0 \quad (t_1, t_2 \in \Sigma)$

$t_{n_i}xa_i \to q_{i(n_i-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, x \in \{q_0, r\}, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_jq_{ij} \to q_{i(j-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, 2 \leqslant j \leqslant n_i-1, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_1q_{i1} \to r \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0t \rightarrow \#tq_0 \quad (t \in \Sigma)$

$t_1q_0t_2 \rightarrow t_1t_2q_0 \quad (t_1, t_2 \in \Sigma)$

$t_{n_i}xa_i \rightarrow q_{i(n_i-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, x \in \{q_0, r\}, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_jq_{ij} \rightarrow q_{i(j-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, 2 \leqslant j \leqslant n_i-1, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_1q_{i1} \rightarrow r \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$tra_i \rightarrow r \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, u_i = t, t \in \Sigma)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0 t \to \#tq_0 \quad (t \in \Sigma)$

$t_1 q_0 t_2 \to t_1 t_2 q_0 \quad (t_1, t_2 \in \Sigma)$

$t_{n_i} x a_i \to q_{i(n_i-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, x \in \{q_0, r\}, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_j q_{ij} \to q_{i(j-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, 2 \leqslant j \leqslant n_i - 1, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_1 q_{i1} \to r \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t r a_i \to r \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, u_i = t, t \in \Sigma)$

$\#r \to \#s$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

és M_δ:

$\#q_0t \to \#tq_0 \quad (t \in \Sigma)$

$t_1q_0t_2 \to t_1t_2q_0 \quad (t_1, t_2 \in \Sigma)$

$t_{n_i}xa_i \to q_{i(n_i-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, x \in \{q_0, r\}, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_jq_{ij} \to q_{i(j-1)} \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, 2 \leqslant j \leqslant n_i-1, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$t_1q_{i1} \to r \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, u_i = t_1 \cdots t_{n_i}, n_i \geqslant 2)$

$tra_i \to r \quad (1 \leqslant i \leqslant |D|, u_i = t, t \in \Sigma)$

$\#r \to \#s$

Az veremautomata $L(G_A)$-t ismeri fel és determinisztikus (teljessé is tehető egy zsákutcaállapot és a hiányzó átmenetek hozzávételével.)

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Állítás: A determisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek osztálya zárt a komplementerképzésre.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Állítás: A determisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek osztálya zárt a komplementerképzésre.

Az állítás bizonyítása: $Q \setminus F$-re változtatva az elfogadó állapothalmazt a determisztikus veremautomata épp a komplementer nyelvet ismeri fel.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Állítás: A determisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek osztálya zárt a komplementerképzésre.

Az állítás bizonyítása: $Q \backslash F$-re változtatva az elfogadó állapothalmazt a determisztikus veremautomata épp a komplementer nyelvet ismeri fel.

Megjegyzés: Hasonlóan, bármilyen determinisztikus géptípus által eldönthető nyelvek osztálya zárt a komplementerképzésre.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Állítás: A determisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek osztálya zárt a komplementerképzésre.

Az állítás bizonyítása: $Q \backslash F$-re változtatva az elfogadó állapothalmazt a determisztikus veremautomata épp a komplementer nyelvet ismeri fel.

Megjegyzés: Hasonlóan, bármilyen determinisztikus géptípus által eldönthető nyelvek osztálya zárt a komplementerképzésre.

Innen a tétel bizonyítása: Láttuk, hogy létezik $L(G_A)$-t felismerő determinisztikus veremautomata. Az állítás szerint olyan determinisztikus veremautomata is van, amelyik $\overline{L(G_A)}$-t ismeri fel. Minden veremautomata által felismert nyelv 2-típusú, így $\overline{L(G_A)}$ is.

$\square$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Tétel

Eldönthetetlenek az alábbi, G_1 és G_2 környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos kérdések.

(1) $L(G_1) \cap L(G_2) \stackrel{?}{=} \emptyset$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Tétel

Eldönthetetlenek az alábbi, G_1 és G_2 környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos kérdések.

(1) $L(G_1) \cap L(G_2) \stackrel{?}{=} \emptyset$

(2) $L(G_1) \stackrel{?}{=} L(G_2)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Tétel

Eldönthetetlenek az alábbi, G_1 és G_2 környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos kérdések.

(1) $L(G_1) \cap L(G_2) \stackrel{?}{=} \emptyset$

(2) $L(G_1) \stackrel{?}{=} L(G_2)$

(3) $L(G_1) \stackrel{?}{=} \Gamma^*$ valamely Γ ábécére

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Tétel

Eldönthetetlenek az alábbi, G_1 és G_2 környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos kérdések.

(1) $L(G_1) \cap L(G_2) \stackrel{?}{=} \varnothing$

(2) $L(G_1) \stackrel{?}{=} L(G_2)$

(3) $L(G_1) \stackrel{?}{=} \Gamma^*$ valamely Γ ábécére

(4) $L(G_1) \stackrel{?}{\subseteq} L(G_2)$

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

Tétel

Eldönthetetlenek az alábbi, G_1 és G_2 környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos kérdések.

(1) $L(G_1) \cap L(G_2) \stackrel{?}{=} \emptyset$

(2) $L(G_1) \stackrel{?}{=} L(G_2)$

(3) $L(G_1) \stackrel{?}{=} \Gamma^*$ valamely Γ ábécére

(4) $L(G_1) \stackrel{?}{\subseteq} L(G_2)$

Bizonyítás:

(1) L_{PMP}-t vezethetjük vissza rá. Legyen $D = \left\{ \frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_n}{v_n} \right\}$ a dominókészlet. Készítsük el a fenti G_A és G_B grammatikákat. Könnyen látható, hogy D-nek akkor és csak akkor van megoldása, ha $L(G_A)$-nak és $L(G_B)$-nek a metszete nemüres.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(2) L_{PMP}-t vezethetjük vissza rá, ehhez tekintsük ismét G_A-t és G_B-t.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(2) L_{PMP}-t vezethetjük vissza rá, ehhez tekintsük ismét G_A-t és G_B-t.

$L := \overline{L(G_A) \cap L(G_B)} = \overline{L(G_A)} \cup \overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$, mivel az előző Lemma szerint $\overline{L(G_A)} \in \mathcal{L}_2$ és $\overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$ az, és $\mathcal{L}_2$ zárt az unióra.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(2) L_{PMP}-t vezethetjük vissza rá, ehhez tekintsük ismét G_A-t és G_B-t.

$L := \overline{L(G_A) \cap L(G_B)} = \overline{L(G_A)} \cup \overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$, mivel az előző Lemma szerint $\overline{L(G_A)} \in \mathcal{L}_2$ és $\overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$ az, és $\mathcal{L}_2$ zárt az unióra.

Legyenek G_1 és G_2 olyan környezetfüggetlen grammatikák, amelyekre $L(G_1) = L$ és $L(G_2) = (\Sigma \cup \Delta)^*$.
$L(G_1) = L(G_2) \Leftrightarrow L(G_A) \cap L(G_B) = \emptyset$, így ha (2) eldönthető volna, akkor az (1)-beli érvelés alapján L_{PMP} is az lenne, de láttuk, hogy nem az.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(2) L_{PMP}-t vezethetjük vissza rá, ehhez tekintsük ismét G_A-t és G_B-t.

$L := \overline{L(G_A) \cap L(G_B)} = \overline{L(G_A)} \cup \overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$, mivel az előző Lemma szerint $\overline{L(G_A)} \in \mathcal{L}_2$ és $\overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$ az, és $\mathcal{L}_2$ zárt az unióra.

Legyenek G_1 és G_2 olyan környezetfüggetlen grammatikák, amelyekre $L(G_1) = L$ és $L(G_2) = (\Sigma \cup \Delta)^*$.
$L(G_1) = L(G_2) \Leftrightarrow L(G_A) \cap L(G_B) = \emptyset$, így ha (2) eldönthető volna, akkor az (1)-beli érvelés alapján L_{PMP} is az lenne, de láttuk, hogy nem az.

(3) Legyen G_1 ugyanaz,mint (2)-ben és $\Gamma = \Sigma \cup \Delta$. Pontosan az előbbi érveléssel (3) eldönthetősége L_{PMP} eldönthetőségét implikálná.

Környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos eldönthetetlen algoritmikus problémák

(2) L_{PMP}-t vezethetjük vissza rá, ehhez tekintsük ismét G_A-t és G_B-t.

$L := \overline{L(G_A) \cap L(G_B)} = \overline{L(G_A)} \cup \overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$, mivel az előző Lemma szerint $\overline{L(G_A)} \in \mathcal{L}_2$ és $\overline{L(G_B)} \in \mathcal{L}_2$ az, és $\mathcal{L}_2$ zárt az unióra.

Legyenek G_1 és G_2 olyan környezetfüggetlen grammatikák, amelyekre $L(G_1) = L$ és $L(G_2) = (\Sigma \cup \Delta)^*$.
$L(G_1) = L(G_2) \Leftrightarrow L(G_A) \cap L(G_B) = \emptyset$, így ha (2) eldönthető volna, akkor az (1)-beli érvelés alapján L_{PMP} is az lenne, de láttuk, hogy nem az.

(3) Legyen G_1 ugyanaz,mint (2)-ben és $\Gamma = \Sigma \cup \Delta$. Pontosan az előbbi érveléssel (3) eldönthetősége L_{PMP} eldönthetőségét implikálná.

(4) Mivel $L(G_1) = L(G_2) \Leftrightarrow L(G_1) \subseteq L(G_2) \wedge L(G_2) \subseteq L(G_1)$, ezért a tartalmazás eldönthetősége (2) eldönthetőségét implikálná.