Analízis1ABC, gyakorló feladatok az 1. zárthelyi dolgozat témaköreiből

1. Bizonyítsa be, hogy minden $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén :

$$\sqrt[n+m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^n} \leq 1 + \frac{n^2+m^2}{n \cdot m \cdot (n+m)}.$$

2. Bizonyítsa be, hogy minden $a, b, c > 0$ valós számok esetén :

$$3 \leq \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}\right).$$

3. Bizonyítsa be, hogy : $\quad 10! \leq \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \cdot \left(1+\frac{2}{10}\right)^{10} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{9}{10}\right)^{10} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{90}.$

4. Adott az $A := \left\{\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in (-\infty; 1]\right\}$ halmaz. Számítsuk ki $supA$, $infA$, $minA$, $maxA$–t ha léteznek.

5.Adott az $A := \left\{\frac{5^{n+1}+1}{2 \cdot 5^n + 3} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ halmaz. Korlátos–e ? Számítsuk ki $supA$, $infA$, $minA$, $maxA$–t ha léteznek.

6. Határozza meg az $f \circ g$ összetett függvényt, ha :

$$f(x) := \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } x \leq -1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, & \text{ha } x > -1, \end{cases} \qquad \text{illetve } g(x) := x^2 - 5x + 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. Invertálható–e az alábbi függvény ? Ha igen adja meg az f^{-1} függvényt $(D_{f^{-1}}; R_{f^{-1}}; f^{-1}(x) =? \;\; (x \in D_{f^{-1}}))$:

$$f(x) := \frac{|x|+5}{2|x|-2} \quad (x \in (-\infty; -1)).$$

8. Milyen $a \in \mathbf{R}$ esetén lesz az $f(x) := \begin{cases} (x+1)^3, & (-1 \leq x \leq 0); \\ a^2 - x, & (0 < x \leq 1) \end{cases}$ függvény invertálható ?

Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, ill. $f^{-1}(x) \quad (x \in \mathcal{D}_{f^{-1}})$?

9. Határozza meg az $f^{-1}[D]$ ősképhalmazt, ha $f(x) := \sqrt{|x^2-x|+3} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ és $D = (\sqrt{3}; \sqrt{5}\,]$.

10. A definíció alapján határozza meg a : $\quad \lim \left(\frac{5n^2 - \sqrt{n} + 2}{n^2 + \sqrt{n} + 1}\right) \quad$ határértéket.

11. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértéket :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2 \cdot (1-n) - 50}{n \cdot (n+1)^2 + 2}\right).$$

12. Adottak az $x_n := (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$ és $y_n := \left(\frac{2^n + n!}{3^{n+1} + (n+1)!}\right)$, $(n \in \mathbb{N})$ sorozatok.

i) Határozza meg a $\lim(x_n)$, $\lim(y_n)$ határértékeket.

ii) Mit tud mondani a $\lim(x_n + y_n)$ illetve $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ határértékekről ?

13. Számítsa ki a következő határértékeket :

$$a) \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{4^n + 2^n + n} - 2^n - 1); \qquad b) \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n} + (\sqrt{2}+1)^{2n+1}}{(3-2\sqrt{2})^n + (3+2\sqrt{2})^n}.$$

14. Számítsa ki a következő határértékeket :

$$\text{i)} \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(3^n-1)^2 - 9^n}{\sqrt{9^n + n^9}}\right), \qquad \text{ii)} \lim_{n \to +\infty} \left(n^2 \cdot \left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \left(1+\frac{3}{n}\right)^2\right]\right).$$