Logika (MSc)

Szekventkalkulusok

Tartalom

A szekvent módszer szintaxisa I.

- Γ, Δ: véges formulahalmazok (véges, nem rendezett formulasorozatok)
- A, B, $\ldots$: formulák
- (Γ, Δ) pár: szekvent; jelölése: $\Gamma \to \Delta$.
  A $\to$ jel szándék szerint implikációt reprezentál.

A szekvent módszer szintaxisa II.

Megengedjük, hogy a (Γ, Δ) szekventben akár Γ, akár Δ egyetlen formulát se tartalmazzon.

- Ha Γ üres, a $\emptyset \to \Delta$ helyett $\to \Delta$ -t írunk.
- Ha Δ üres, a $\Gamma \to \emptyset$ helyett $\Gamma \to$ -t írunk.
- Mindkét formulahalmaz lehet üres szekvent: $\to$.
- Ha $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ és $\Delta = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ véges nem rendezett formulasorozatok, és A, B ítéletlogikai formulák, akkor $A, \Gamma \to \Delta, B$ -t írunk, ami az $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \to B_1, B_2, \ldots, B_m, B$ szekventet jelenti.

Elsőrendben a szintaxis értelemszerűen ugyanez (Tk.215.o.).

A szekvent módszer szemantikája

Legyen $\mathcal{I}$ az ítéletlogika nyelvének egy interpretációja, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ pedig $\mathcal{I}$-beli Boole értékelés.
Legyen $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\Gamma \to \Delta)$ pontosan akkor i igazságértékű, ha van olyan A_k a Γ-ban, hogy $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A_k) = h$ vagy van olyan B_r a Δ-ban, hogy $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(B_r) = i$.
Egyébként $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ legyen h igazságértékű.

Szekventek jelentése a szemantika alapján

- $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\rightarrow) = h$,
- $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\rightarrow B) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(B)$,
- $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A \rightarrow) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\neg A)$,
- $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A \rightarrow B) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A \supset B)$,
- $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A_1, A_2 \rightarrow B_1, B_2) = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A_1 \wedge A_2 \supset B_1 \vee B_2)$,
- $\ldots$

Szekventek jelentése

A szekventek szemantikája szerint írhatjuk általánosan azt, hogy

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\Gamma \to \Delta) = \\
&= \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A_1, A_2, \ldots, A_n \to B_1, B_2, \ldots, B_m) = \\
&\qquad = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot) = \\
&\qquad = \mathcal{B}_{\mathcal{I}}(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m),
\end{aligned}
$$

ahol a baloldal tautológia ($\top$), ha Γ üres,
a jobboldal pedig azonosan hamis ($\bot$), ha Δ üres.

A szemantika elsőrendben értelemszerűen ugyanígy működik.

A szekventkalkulus szabályrendszerei

Azt mondjuk, hogy **egy szekvent teljesül**, ha valahányszor a nyíl baloldalán lévő minden formula igaz a nyíl jobboldalán lévő formulák legalább egyike igaz.

A szekventkalkulus szabályrendszere:

- Gentzen féle (**G-kalkulus**)
- Curry-féle (**C-kalkulus**) – szabályai megfordíthatók

Axiómák: $X, \Gamma \to \Delta, X, \ldots$

A szabályokban az axióma egy kitüntetett szekvent, egy levezetési szabály két szekventből áll, egy logikai összekötőjelhez tartozik, ami a második szekventben szerepel egy formulában vagy a $\to$ jel bal vagy a jobb oldalán.

Így minden logikai összekötőjelhez két szabály tartozik. $\circ \to$ vagy $\to \circ$ jelöléssel aszerint, hogy a $\circ$ logikai művelet a második szekventben a $\to$ melyik oldalán szerepel.

A G-kalkulus szabályai I.

axiómaséma

$$X \to X$$

levezetési szabályok

$(\to sz)$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, X, X}{\Gamma \to \Delta, X}$$

$(sz \to)$

$$\frac{X, X, \Gamma \to \Delta}{X, \Gamma \to \Delta}$$

$(\to b)$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, X}$$

$(b \to)$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{X, \Gamma \to \Delta}$$

A G-kalkulus szabályai II.

$$(\rightarrow \supset)$$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \supset Y)}$$

$$(\supset \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \qquad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \supset Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \qquad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \wedge Y)}$$

$$(\wedge \rightarrow)$$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad \frac{Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \vee)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \vee Y)} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \vee Y)}$$

$$(\vee \rightarrow)$$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta \qquad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \vee Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$$(\rightarrow \neg)$$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

$$(\neg \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\neg X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

A G-kalkulus kvantoros levezetési szabályai

$$(\forall \to) \qquad \frac{[A(x \parallel t)], \Gamma \to \Delta}{\forall x A, \Gamma \to \Delta} \qquad (\to \forall) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, \forall x A} \quad (x \notin Par(\Gamma, \Delta))$$

$$(\exists \to) \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta} \quad (x \notin Par(\Gamma, \Delta)) \qquad (\to \exists) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, [A(x \parallel t)]}{\Gamma \to \Delta, \exists x A}$$

A C-kalkulus szabályai

axiómaséma

$$X, \Gamma \rightarrow \Delta, X$$

levezetési szabályok

$(\rightarrow \supset)$ $$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \supset Y)}$$

$(\supset \rightarrow)$ $$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \qquad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \supset Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\rightarrow \wedge)$ $$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \qquad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \wedge Y)}$$

$(\wedge \rightarrow)$ $$\frac{X, Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\rightarrow \vee)$ $$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \vee Y)}$$

$(\vee \rightarrow)$ $$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta \qquad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \vee Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\rightarrow \neg)$ $$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

$(\neg \rightarrow)$ $$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\neg X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

A C-kalkulus kvantoros levezetési szabályai

$$(\forall \to) \quad \frac{[A(x \parallel t)], \forall x A, \Gamma \to \Delta}{\forall x A, \Gamma \to \Delta} \qquad (\to \forall) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, \forall x A} \quad (x \notin Par(\Gamma, \Delta))$$

$$(\exists \to) \quad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta} \quad (x \notin Par(\Gamma, \Delta)) \qquad (\to \exists) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, [A(x \parallel t)], \exists x A}{\Gamma \to \Delta, \exists x A}$$

Levezetésfa

A $\mathbf{K}$-kalkulusbeli levezetésfa és a levezetésfa magassága

1. A $\mathbf{K}$-kalkulus minden axiómaszekventje egy levezetésfa, ez a szekvent lesz a levezetésfa gyökere. A levezetésfa magassága 1.
2. Ha $\mathcal{D}$ m magasságú olyan $\mathbf{K}$-kalkulusbeli levezetésfa, amelynek gyökere valamely $\mathbf{K}$-kalkulusbeli levezetési szabályban épp vonal feletti szekvent, akkor a levezetési szabállyal a vonal alatti S szekventet előállítva
$$\frac{\mathcal{D}}{S}$$
is $\mathbf{K}$-kalkulusbeli levezetésfa, ahol az S szekvent a kapott levezetésfa gyökere, és a levezetésfa magassága $m+1$.
3. Ha $\mathcal{D}_1$ és $\mathcal{D}_2$ rendre m_1 és m_2 magasságú olyan $\mathbf{K}$-kalkulusbeli levezetésfák, melyek gyökerei valamely $\mathbf{K}$-kalkulusbeli levezetési szabályban épp vonal feletti szekventek, akkor előállítva a levezetési szabállyal a vonal alatti S szekventet,
$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{S}$$
is levezetésfa a $\mathbf{K}$-kalkulusban, amelyben az S szekvent lesz a levezetésfa gyökere, és a levezetésfa magassága $\max(m_1, m_2) + 1$.
4. Minden levezetésfa az 1–3. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Levezetésfa példa

Példa

A $\mathbf{C}$-kalkulusban az alábbi fa 3 magasságú levezetésfa, melynek gyökere a $\rightarrow A \supset (B \supset A)$ szekvent:

$$\cfrac{\cfrac{A, B \rightarrow A}{A \rightarrow B \supset A}\ [\,(\rightarrow \supset)\,]}{\rightarrow A \supset (B \supset A)}\ [\,(\rightarrow \supset)\,]$$

A szekventek mellett zárójelek között megadtuk azt a levezetési szabályt, melyet alkalmazva a szekvent előállt.

A $\mathbf{G}$-kalkulusban a fa nem levezetésfa, hisz a $\mathbf{G}$-kalkulusban $A, B \rightarrow A$ nem axiómaszekvent.

Szekvent bizonyíthatósága

Definíció

Egy S szekvent a $\mathbf{K}$-kalkulusban **bizonyítható**, ha van olyan $\mathbf{K}$-kalkulusbeli levezetésfa, melynek S a gyökere. Jelölése: $\vdash_{\mathbf{K}} S$.

Példa

Az $A \wedge B \to B \wedge A$ szekvent a $\mathbf{G}$-kalkulusban az alábbi (3 magasságú) levezetésfával bizonyítható:

$$\dfrac{\dfrac{B \to B}{A \wedge B \to B}\,[(\wedge \to)] \qquad \dfrac{A \to A}{A \wedge B \to A}\,[(\wedge \to)]}{A \wedge B \to B \wedge A}\,[(\to \wedge)]$$

Elérhető szabály

Definíció

Jelölje $\mathbf{K}_1$ a $\mathbf{G}$- és $\mathbf{C}$-kalkulusok egyikét, és $\mathbf{K}_2$ a másikat. Azt mondjuk, hogy egy a $\mathbf{K}_1$-kalkulusbeli

$$\frac{S_1}{S_2}$$

levezetési szabály **elérhető** a $\mathbf{K}_2$-kalkulusból, ha minden olyan esetben, amikor $\vdash_{\mathbf{K}_2} S_1$, akkor $\vdash_{\mathbf{K}_2} S_2$ is. Hasonlóan, egy a $\mathbf{K}_1$-kalkulusbeli

$$\frac{S_1 \quad S_2}{S_3}$$

levezetési szabály **elérhető** a $\mathbf{K}_2$-kalkulusból, ha minden olyan esetben, amikor $\vdash_{\mathbf{K}_2} S_1$ és $\vdash_{\mathbf{K}_2} S_2$, akkor $\vdash_{\mathbf{K}_2} S_3$ is.

G és C kalkulusok ekvivalenciája

Tétel

Ha egy szekvent bizonyítható $\mathbf{C}$ kalkulusban, akkor bizonyítható $\mathbf{G}$ kalkulusban is (Tk.6.2.17.).

Ha egy szekvent bizonyítható $\mathbf{G}$ kalkulusban, akkor bizonyítható $\mathbf{C}$ kalkulusban is (Tk.6.2.20.).

Bizonyítás: levezetésfa magassága szerinti indukcióval

Szükséges segédlemmák:

- A $\mathbf{C}$-kalkulus axiómái bizonyíthatók a $\mathbf{G}$-kalkulusban, azaz tetszőleges A formula és Γ, Δ formulasorozat esetén $\vdash_{\mathbf{G}} A, \Gamma \to \Delta, A$.
- A $\mathbf{C}$-kalkulus minden levezetési szabálya elérhető a $\mathbf{G}$-kalkulusból.
- A $\mathbf{G}$-kalkulus axiómái bizonyíthatók a $\mathbf{C}$-kalkulusban, azaz tetszőleges A formula esetén $\vdash_{\mathbf{C}} A \to A$.
- A $\mathbf{G}$-kalkulus minden levezetési szabálya elérhető a $\mathbf{C}$-kalkulusból.

A szekventkalkulus helyessége

Minden levezetési szabály szekventre $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(\Gamma \to \Delta)$ igaz fennáll. Ez az alapja a szekvent kalkulus helyességének:

Tétel

Ha egy szekvent bizonyítható a $\mathbf{C}$ kalkulusban, akkor a megfelelő $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$ formulának van bizonyítása az ítéletkalkulusban.

Bizonyítás: tegyük fel, hogy $\vdash_{\mathbf{C}} \Gamma \to \Delta$. A $\mathbf{C}$-kalkulusbeli levezetésfa magassága szerinti indukcióval bizonyítjuk be, hogy $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$. Az egyes indukciós lépésekben $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$ ítéletkalkulusbeli bizonyíthatóságát természetes technikával igazoljuk.

A szekventkalkulus teljessége

Tétel

Ha $\vdash_0 B$, azaz B bizonyítható az ítéletkalkulusban, akkor $\to B$ bizonyítható a $\mathbf{C}$ kalkulusban, azaz ha $\vdash_0 B$, akkor $\vdash_{\mathbf{C}} \to B$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\vdash_0 B$, azaz adott a $D_1, D_2, \ldots, D_m = B$ levezetés. Meg kell mutatni, hogy minden D_k $(1 \leq k \leq m)$ formulára $\vdash_{\mathbf{C}} D_k$. Ha D_k-t modus ponenssel kaptuk, akkor a lenti lemma miatt tudjuk ezt igazolni.

Szükséges segédlemmák:

- Ha A az ítéletkalkulus axiómája, akkor $\to A$ bizonyítható a $\mathbf{C}$-kalkulusban.
- Az ítéletkalkulus levezetési szabálya, a modus ponens, elérhető a $\mathbf{C}$-kalkulusból, azaz ha $\vdash_{\mathbf{C}} \to A$ és $\vdash_{\mathbf{C}} \to A \supset B$, akkor $\vdash_{\mathbf{C}} \to B$.

Megfordíthatóság

Definíció

Azt mondjuk, hogy egy szekventkalkulusbeli

$$\frac{S_1}{S_2}$$

levezetési szabály **megfordítható**, ha minden olyan esetben, amikor S_2 szekvent bizonyítható, akkor S_1 is bizonyítható. Hasonlóan, egy

$$\frac{S_1 \quad S_2}{S_3}$$

levezetési szabály **megfordítható**, ha minden olyan esetben, amikor S_3 bizonyítható, akkor S_1 és S_2 is bizonyíthatók.

Lemma

A $\mathbf{C}$-kalkulus levezetési szabályai megfordíthatók.