Bonyolultságelmélet

I. Időbonyolultság

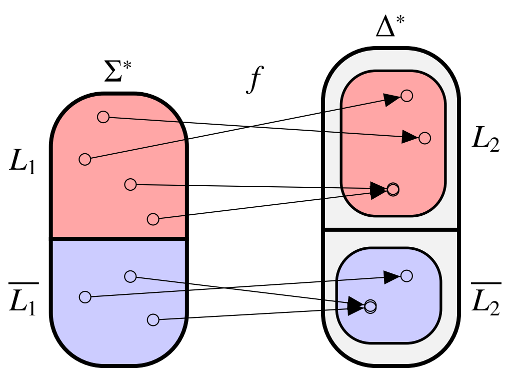
A. Determinisztikus és nemdeterminisztikus időbonyolultsági osztályok

- $\mathrm{TIME}\,(f(n)) = \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ időigényű determinisztikus Turing-géppel$\}$
- $\mathrm{NTIME}\,(f(n)) = \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ időigényű nemdeterminisztikus Turing-géppel$\}$
- $\mathrm{P}=\bigcup_{k\geq 1}\mathrm{TIME}\,(n^k)$.
- $\mathrm{NP}=\bigcup_{k\geq 1}\mathrm{NTIME}\,(n^k)$.
- Észrevétel: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.
- Sejtés: $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ (sejtjük, hogy igaz, de bizonyítani nem tudjuk).

B. Visszavezetés polinom időben

B1. Definíció

- $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ **polinom időben kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami polinom időben kiszámítja. (lásd szófüggvényt kiszámító TG-ek)
- $L_1 \subseteq \Sigma^*$ **polinom időben visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ polinom időben kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leq_p L_2$.



B2. Tételek

- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in \mathrm{P}$, akkor $L_1 \in \mathrm{P}$.
- Ha $L_1 \leq_p L_2$ és $L_2 \in \mathrm{NP}$, akkor $L_1 \in \mathrm{NP}$.

C. NP-teljesség

C1. Definíció

Egy L probléma **NP-teljes**, ha NP-beli és minden NP-beli probléma polinom időben visszavezethető rá.

C2. Az NP-teljesség jelentősége

Tétel: Ha L NP-teljes és $L \in$ P akkor P=NP.

C3. További NP-teljes problémák

Tétel: Ha L_1 NP-teljes, $L_2 \in$ NP és $L_1 \leq_p L_2$ akkor L_2 NP-teljes.

Bizonyítás: Mivel L_1 **NP-teljes:** $\forall L \in$ NP: $L \leq_p L_1$

$L_1 \leq_p L_2 \Rightarrow L \leq_p L_2$, azaz L_2 NP-nehéz.

$L_2 \in$ **NP** $\Rightarrow L_2$ **NP-teljes**.

C4. Logika gyorstalpaló

- A legfontosabb logikai műveletek (1 vagy i: igaz, 0 vagy h: hamis)

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

- A logika **ítéletlogika** (nulladrendű logika) nevű modelljében egy logikai formula **ítéletváltozók**ból és **logikai műveletek**ből (pl. tagadás ($\neg$, negáció), logikai és ($\wedge$, konjunkció), megengedő vagy ($\vee$, diszjunkció)) épül fel.

  Példa: $A = \neg((X \vee Y) \wedge Y) \to \neg X$

- Az ítéletváltozókat **igaz**ra vagy **hamis**ra értékelhetjük ki. Egy A formula I kiértékelés melleti $\mathcal{B}_I(A)$**igazságérték**ét (vagy Boole-értékét) az ítéletváltozók adott kiértékelése mellett a formula felépítésére vonatkozó rekurzió alapján kapjuk meg.

  Példa:

  $I(X) = i, I(Y) = h$, ekkor $\mathcal{B}_I(A) = \neg((i \vee h) \wedge h) \to \neg i = \neg(i \wedge h) \to h = i \to h = h$.

- Egy formula **kielégíthető**, ha van olyan kiértékelés, ami igazra értékeli ki.

- Tétel: Minden formulához van vele ekvivalens KNF.

- **Literál**: egy ítéletváltozó vagy egy negált ítéletváltozó.

  Tag (vagy elemi diszjunkció vagy klóz): literálok (lehet 1 darab is) diszjukciója.

  Konjunktív normálforma (KNF): Tagok (lehet 1 darab is) konjunkciója.

- Példa: $\varphi = (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge \neg Z$ kielégíthető KNF, például ha mindhárom ítéletváltozó hamis, akkor φ igaz. $X \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge Y$ kielégíthetetlen KNF.

C5. Egy NP-teljes nyelv

- Legyen $\textsc{Sat}=\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető KNF$\}$, ahol $\langle\phi\rangle$ a ϕ formula valamilyen dekódolható kódja $\{0, 1\}$ felett.

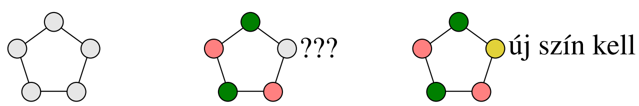
- Tétel (Cook-Levin): $\textsc{Sat}$ NP-teljes.

D. Néhány NP-teljes nyelv

($\langle\ \rangle$ mindig valamilyen kellően tömör dekódolható kódolást jelent $\{0,1\}$ felett. Az, hogy pontosan hogy néz ki a kódolás, nem érdekes (valójában egy lényeges dolog van, hogy ne unáris ábécé felett kódoljuk el).)

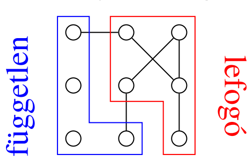
- SAT=$\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető KNF$\}$ (Cook tétel)
- 3SAT=$\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető KNF és minden tagban pontosan 3 literál van$\}$
- 3SZÍNEZÉS=$\{\langle G\rangle \mid G$ 3-színezhető$\}$

  (egy gráf 3-színezhető, ha csúcsai 3 színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos csúcsok színei különbözőek)



- KLIKK=$\{\langle G,k\rangle \mid G$-nek van k méretű teljes részgráfja$\}$
- FÜGGETLEN PONTHALMAZ=$\{\langle G,k\rangle \mid G$-nek van k méretű üres részgráfja$\}$
- LEFOGÓ PONTHALMAZ=$\{\langle G,k\rangle \mid$ van k méretű részhalmaza $V(G)$-nek, ami az összes élt lefogja$\}$

  (G irányítatlan gráf; egy $S \subseteq V(G)$ lefog egy E élt, ha $S \cap E \neq \emptyset$)

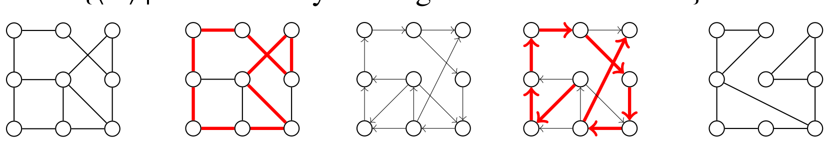


- HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTHALMAZ=$\{\langle \mathcal{S},k\rangle \mid$ az $\mathcal{S}$ hipergráfnak van k méretű lefogó ponthalmaza$\}$

  ($\mathcal{S} = (U, \{A_1, \ldots, A_m\})$ hipergráf, ha $A_i \subseteq U$ ($1 \leq i \leq m$); egy X halmaz lefog egy A_i hiperélt, ha $X \cap A_i \neq \emptyset$)
- HALMAZFEDÉS=$\{\langle \mathcal{S},k\rangle \mid \mathcal{S}$-nek van k darab hiperéle, aminek uniója $U\}$

  ($\mathcal{S} = (U, \{A_1, \ldots, A_m\})$ hipergráf)
- HÚ=$\{\langle G,s,t\rangle \mid$ van a G irányított gráfban s-ből t-be Hamilton út$\}$

  (A Hamilton út olyan út, ami minden csúcsot bejár)
- IHÚ=$\{\langle G,s,t\rangle \mid$ van a G irányítatlan gráfban s-ből t-be Hamilton út$\}$
- IHK=$\{\langle G\rangle \mid$ van a G irányítatlan gráfban Hamilton kör$\}$



G — H-kör G-ben — G' — H-út G'-ben — nincs H-kör

- TSP=$\{\langle G,k\rangle \mid$ van-e a nemnegatív élekkel súlyozott G-ben legfeljebb k súlyú Hamilton kör$\}$

II. Tárbonyolultság

E. A tárbonyolultság mértékegysége

A tárbonyultság vizsgálatához ún. **off-line Turing-gép**eket használunk. Az első szalag a bemeneti szalag, ezt csak olvashatja. Függvények kiszámítása esetén az utolsó szalag kimeneti szalag, erre csak írhat. A Turing-gép **extra tárigénye** a többi szalagon (ún. munkaszalagokon) a működés során érintett cellák száma. Egy Turing-gép $f(n)$ **extra tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ tárat használ.

F. Determinisztikus és nemdeterminisztikus tárbonyolultsági osztályok

- $\mathrm{SPACE}\,(f(n)) = \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ extra tárkorlátos determinisztikus Turing-géppel$\}$
- $\mathrm{NSPACE}\,(f(n)) = \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ extra tárkorlátos nemdeterminisztikus Turing-géppel$\}$
- $\mathrm{PSPACE}{=}\bigcup_{k\geq 1}\mathrm{SPACE}\,(n^k)$.
- $\mathrm{NPSPACE}{=}\bigcup_{k\geq 1}\mathrm{NSPACE}\,(n^k)$.
- $\mathrm{NL}{=}\mathrm{NSPACE}\,(\log n)$.

G. Savitch tétele és következményei

- (Savitch tétele) Ha $f(n) \geq \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}\,(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}\,(f^2(n))$
- PSPACE=NPSPACE
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{SPACE}\,(\log^2 n)$

III. Feladatok

1. Feladat: Igazoljuk, hogy $\textsc{Sat}3 = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető KNF és minden ítéletváltozó legfeljebb 3-szor fordul elő$\}$ NP-teljes

Megoldás:

- $\textsc{Sat}3$ NP-beli, mert egy NTG egy számítási ágán polinom időben elő tud állítani egy I változók-iértékelést, majd erről polinom időben ellenőrizni tudja, hogy $\mathcal{B}_I(\varphi) \stackrel{?}{=}$igaz.
- $\textsc{Sat} \leq_p \textsc{Sat}3$

  Kell: $f : \langle\varphi\rangle \to \langle\varphi'\rangle$ polinom idejű visszavezetés azaz olyan, hogy φ kielégíthető a.cs.a. φ' kielégíthető és φ'-ben már minden ítéletváltozó legfeljebb 3-szor fordul elő.

φ' konstrukciója:

Legyen összesen r tag. Ha van X_j a k. tagban akkor ezt az előfordulást helyettesítsük $X_{j,k}$-val.

Így minden változó nemhogy $\leq$ 3-szor, de 1-szer fordul csak elő.

Baj: $X_{j,k}$ és $X_{j,k'}$ nem kell már, hogy ugyanazt az értéket vegye fel.

Ezt kikényszeríthetjük a

$$(X_{j,1} \to X_{j,2}) \wedge (X_{j,2} \to X_{j,3}) \wedge \cdots \wedge (X_{j,r-1} \to X_{j,r}) \wedge (X_{j,r} \to X_{j,1})$$

kör-implikációval. Vagy mindegyikük igaz, vagy egyikük se.

$X \to Y$ és $\neg X \vee Y$ ekvivalensek, cseréljünk le minden implikációt e szerint.

φ' kielégíthető a.cs.a. φ kielégíthető és φ'-ben már minden ítéletváltozó legfeljebb 3-szor fordul elő.
φ' konstrukciója polinom idejű.

2. Feladat: Igazoljuk, hogy 4Színezés NP-teljes

- 4Színezés NP-beli, mert egy NTG egy számítási ágán polinom időben elő tud állítani egy színezést (nem biztos, hogy jó színezést), majd erről polinom időben ellenőrizni tudja, hogy jó-e.

- 3SZÍN $\leq_p$ 4SZÍN

  Kell: $f : \langle G \rangle \to \langle G' \rangle$ polinom idejű visszavezetés azaz olyan, hogy G 3-színezhető a.cs.a. G' 4-színezhető.

1. rossz megoldás:

$G' := G$, polinomidejű, és ha G 3-színezhető, akkor G' 3-színezhető, így 4-színezhető is.

Baj: Abból, hogy $G'(= G)$ 4-színezhető nem következik, hogy G 3-színezhető. Pl. 4 csúcsú teljes gráf.

2. rossz megoldás:

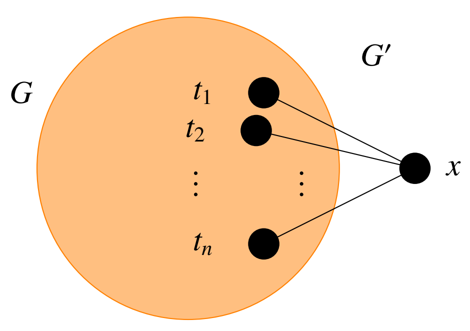
$$G' := \begin{cases} K_4 & \text{ha } G \text{ 3 színezhető} \\ K_5 & \text{ha } G \text{ nem 3-színezhető} \end{cases}$$

K_4: 4 csúcsú teljes gráf. K_5: 5 csúcsú teljes gráf.

Visszavezetés, hiszen G' a.cs.a 4-színezhető, ha G 3-színezhető

Baj: Ugyan visszavezetés, de nem polinomiális. Hiszen nem ismeretes polinomiális algoritmus arra, hogy G 3-színezhető-e. Így G'-t nem tudjuk polinom időben elkészíteni.

Megoldás: Vegyünk egy új x csúcsot és kössük össze G minden csúcsával.



- G' G-ből nyilván polinom időben előállítható

- ha G 3-színezhető, akkor ezt egészítsük ki úgy, hogy színezzük ki x-et a 4. színnel, így G' 4-színezését kapjuk

- ha G' 4-színezhető, akkor egy 4-színezésében x színét nem kaphatja más, hiszen minden csúccsal össze van kötve, tehát G csúcsain ez a 4-színezés valójában egy 3-színezés, tehát G 3-színezhető

A Hamilton út problémák NP-beliek, hiszen egy NTG egy számítási ágán polinom időben előállíthatja a csúcsok egy konkrét permutációját. Ez megfelelel egy potenciális H-útnak. A megfelelő élek meglétének ellenőrzésével polinom időben ellenőrizhető, hogy ez a H-út jelölt tényleg H-út-e.

3. Feladat: HÚ $\leq_p$ IHÚ

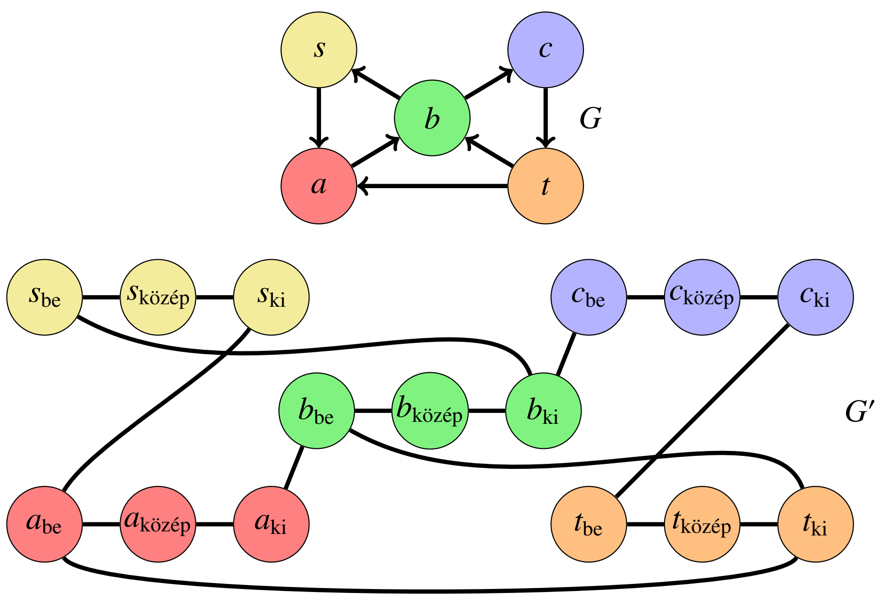
HÚ=$\{\langle G, s, t\rangle \mid$ van a G irányított gráfban s-ből t-be Hamilton út$\}$

IHÚ=$\{\langle G, s, t\rangle \mid$ van a G irányítatlan gráfban s-ből t-be Hamilton út$\}$

kell $f : \langle G, s, t\rangle \to \langle G', s', t'\rangle$ visszavezetés

úgy, hogy G-ben van s-ből t-be irányított út a.cs.a. G'-ben van s'-ből t'-be irányítatlan H-út

G minden v csúcsának feleljen meg G'-ben 3 csúcs v_{be}, $v_{\text{közép}}$ és v_{ki}. és G' élei közé vegyük be a $\{v_{\text{be}}, v_{\text{közép}}\}$ és $\{v_{\text{közép}}, v_{\text{ki}}\}$ éleket. Továbbá minden $E = (u, v)$ G-beli él estén adjuk hozzá $E(G')$-höz $\{u_{\text{ki}}, v_{\text{be}}\}$-t. $s' := s_{\text{be}}, t' := t_{\text{ki}}$.



Könnyen meggondolható, hogy ez egy polinomiális visszavezetés:

- G' G-ből nyilván polinom időben előállítható
- ha G-ben van s és t között irányított H-út, akkor e szerint haladva v_{be}, $v_{\text{közép}}$, v_{ki} sorrendben egy tetszőleges v-nek megfelelő csúcsokon.
- ha G'-ben van H-út s'-ből t'-be, akkor ez minden v csúcson v_{be}, $v_{\text{közép}}$, v_{ki} sorrendben kell áthaladjon, mivel $v_{\text{közép}}$ 2-fokú csúcs és máskülönben nem lehetne rajta a H-úton. Mivel minden más él $\{u_{\text{ki}}, v_{\text{be}}\}$ típusú a v_{be}, $v_{\text{közép}}$, v_{ki} hármasok összehúzásával és ezen élek $u \to v$ irányításával G egy irányított H-útját kapjuk.

4. Feladat: IHÚ $\leq_p$ IHK

IHÚ=$\{\langle G, s, t\rangle \mid$ van a G irányítatlan gráfban s-ből t-be Hamilton út$\}$

IHK=$\{\langle G\rangle \mid$ van a G irányítatlan gráfban Hamilton kör$\}$

kell $f : \langle G, s, t\rangle \to \langle G'\rangle$ visszavezetés

úgy, hogy G-ben van s-ből t-be irányítatlan út a.cs.a. G'-ben van irányítatlan H-kör

1. Rossz megoldás: $V(G') := V(G)$, $E(G') := E(G) \cup \{\{s, t\}\}$.

A visszavezetés polinomiális és ha a G gráfban van s-ből t-be Hamilton út, akkor G'-ben van Hamilton kör.

Baj: Fordítva nem következik, mert nem biztos, hogy s és t szomszédosak a körön.

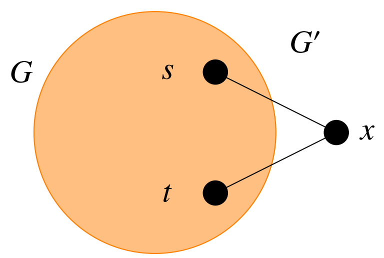
2. Rossz megoldás:

$$G' := \begin{cases} K_3 & \text{ha } G\text{-ben van } s\text{-ből } t\text{-be H-út} \\ \text{3 izolált pont} & \text{ha } G\text{-ben nincs } s\text{-ből } t\text{-be H-út} \end{cases}$$

Visszavezetés, hiszen G'-ben akkor és csak akkor van H-kör, ha G-ben van s-ből t-be H-út.

Baj: Ugyan visszavezetés, de nem polinomiális. Hiszen nem ismeretes polinomiális algoritmus arra, hogy van-e G-ben van s-ből t-be H-út. Így G'-t nem tudjuk polinom időben elkészíteni.

Megoldás: Legyen x egy új csúcs és $\{s, x\}$ és $\{t, x\}$ új élek. Ezeket adjuk hozzá G-hez, ez lesz G'.



Könnyen meggondolható, hogy ez egy polinomiális visszavezetés:

- G' G-ből nyilván polinom időben előállítható
- ha G-ben van s és t között H-út, akkor ezt egészítsük ki az $\{s, x\}$ és $\{t, x\}$ élekkel, így G' egy H-körjét kapjuk.
- ha G'-ben van H-kör, akkor az tartalmazza az $\{s, x\}$ és $\{t, x\}$ éleket, hiszen x 2-fokú, ezért csak így lehet őt a H-körre felfűzni. A H-körből $\{s, x\}$-et, $\{t, x\}$-et és x-et elhagyva egy G-beli s és t közötti H-út marad.