3. (5-6 hét) Abszlút folytonos eloszlások, függetlenség, egyenlőtlenségek, aszimptotikus tulajdonságok)

Elmélet

Abszolút folytonos eloszlások:

Definíció (Abszolút folytonos valószínűségi változó). Ha létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
Ilyenkor $f(x)$-et sűrűségfüggvénynek hívjuk. (Megjegyzés: Az f sűrűségfüggvény létezéséhez szükséges (de nem elégséges), hogy F folytonos legyen (azaz $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re).)

Tétel. *Legyen X abszolút folytonos eloszlású. Ekkor $f(x) = F'(x)$; $f(x) \geq 0$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; $P(X = x) = 0 \quad \forall x$-re; $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.*

Definíció (Várható érték). Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, ekkor

$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$, ha az integrál létezik.

Definíció (X szórásnégyzete). $D^2X = E[(X - EX)]^2 = EX^2 - E^2X$

Definíció (X szórása). $DX = \sqrt{D^2X}$

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

Név (paraméterek)	Értékek	Eloszlásfüggvény (F)	Sűrűségfüggvény (f)	EX	D^2X
Standard normális $N(0,1)$	$(-\infty, \infty)$	$\Phi(x) =$ táblázatban	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$	0	1
Normális N(m, σ^2)	$(-\infty, \infty)$	visszavezethető $\Phi(x)$-re	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
Egyenletes E$[a, b]$	$[a, b]$	$\begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális Exp(λ)	$(0, \infty)$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$	$(0, \infty)$	nincs zárt elemi képlet	$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Normális eloszlás standardizálása: Legyen $X \sim N(m, \sigma^2)$, ekkor $\frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Függetlenség:

Definíció (Valószínűségi változók függetlesége). Az $X_1, X_2, \ldots X_n$ valószínűségi változók függetlenek, ha bármely $I_1, I_2, \ldots, I_n$ intervallumra $P(X_1 \in I_1, \ldots, X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in I_i)$
Megjegyzés: Független valószínűségi változók függvényei is függetlenek lesznek.

Tétel (Valószínűségi változók függetlensége). *(i) Az $X_1, X_2, \ldots X_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha együttes eloszlásfüggvényük megegyezik eloszlásfüggvényeik szorzatával, azaz $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$ $\forall x$-re.*
(ii) Az $X_1, X_2, \ldots X_n$ diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha
$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$ $\forall x_i$*-re.*
(iii) Az $X_1, X_2, \ldots X_n$ abszolút folytonos valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek ha
$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ $\forall x_i$*-re.*

Definíció (X és Y kovarianciája). $cov(X, Y) = E(XY) - EXEY$

Definíció (X és Y korrelációja). $R(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{DXDY}$

Ha X és Y függetlenek $\Rightarrow cov(X, Y) = 0$, de fordítva nem igaz.
$D^2(aX + b) = a^2D^2X, \quad D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2cov(X, Y)$

Egyenlőtlenségek:

Tétel (Markov-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő pozitív függvény, $X \geq 0$ valószínűségi változó, melyre $EX < \infty$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E\left(g(X)\right)}{g(\varepsilon)}$$

Spec., ha $g(x) = x$, akkor

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{EX}{\varepsilon}$$

Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség)**.** *Legyen X tetszőleges valószínűségi változó, melyre $D^2X < \infty$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2X}{\varepsilon^2}$$

Aszimptotikus tulajdonságok:

Tétel (Nagy számok törvénye (NSZT))**.** *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. valószínűségi változók, $EX_1 = m < \infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m \qquad \text{1 valószínűséggel.}$$

Tétel (Centrális határeloszlás tétel (CHT))**.** *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. valószínűségi változók, $EX_1 = m$, $D^2X_1 = \sigma^2 < \infty$. Ekkor*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1) \qquad \text{gyengén,}$$

azaz

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$$

Feladatok

3.1. Feladat. Tegyük fel, hogy egy számítógép meghibásodási időpontja 0 és 10 év között van és itt geometriai modellel írható le. Határozzuk meg a jelenség eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Legyen a ξ valószínűségi változó a meghibásodás időpontja, azaz ξ a [0,10] intervallumból veheti fel értékeit. Ekkor $P(\xi < 0) = 0$, mivel a meghibásodás időpontja nem lehet negatív. Hasonlóan $P(\xi < 10) = 1$, mivel a számítógép 10 éven túl nem üzemelhet. Ha viszont $0 < x < 10$, akkor $P(\xi < x) = \frac{x}{10}$, mivel a meghibásodás valószínűsége arányos a szakasz hosszával.

Ekkor az eloszlásfüggvény a következő alakú: $F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{10} & \text{ha } 0 < x \leq 10 \\ 1 & \text{ha } 10 < x \end{cases}$

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük a $[0,10]$ intervallumon.

3.2. Feladat. Legyen $0 < Y < 3$ valószínűségi változó. Eloszlásfüggvénye ezen az intervallumon $F(x) = cx^3$. Mennyi c és $P(-1 < Y < 1)$?

Megoldás

Az eloszlásfüggvénynek monoton növekedőnek kell lennie és legfeljebb 1 lehet, vagyis c pozitív lehet csak és $x = 3$-ban már 1, vagyis

$\boxed{Y < 3 \Rightarrow P(Y = 3) = 0 \Rightarrow F(x) \text{ folytonos } x = 3\text{-ban}}$

$$1 = \max_{x\in(0,3]} cx^3 = c \cdot 3^3 = 27c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{27}.$$

Tudjuk, hogy -1-ben az eloszlásfüggvény 0-át vesz fel, emiatt $P(-1 < Y < 1) = F(1) - F(-1) = \dfrac{1}{27} - 0.$

3.3. Feladat. Legyen X egy folytonos valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon, sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{ha } 0 \leq x < c \\ 0, & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x \geq c. \end{cases}$$

Határozza meg c-t és X eloszlásfüggvényét!

Megoldás

Mivel a sűrűségfüggvény integrálja $= 1$ *a* $[0,c]$ *intervallumon, így* $1 = \int\limits_0^c \frac{1}{9}t^2\,dt = \frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^c = \frac{1}{9}\frac{c^3}{3}$, *amiből* $c = 3$.

Felhasználva, hogy az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja:

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{9}t^2\,dt = \left[\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27} \quad 0 < x \le 3,\ \text{így } F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ \frac{x^3}{27}, & \text{ha } 0 < x \le 3 \\ 1, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

3.4. Feladat. Az X valószínűségi változó a $[0,c]$ intervallumon veszi fel értékeit és ott sűrűségfüggvénye $4e^{-2x}$. Határozzuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}$!

Megoldás

Mivel az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja, így

$$\begin{aligned} -2e^{-2c} + 2 &= 1 \\ -2e^{-2c} &= -1 \\ e^{-2c} &= \frac{1}{2} \\ -2c &= \ln\frac{1}{2} \\ -2c &= -\ln 2 \\ c &= \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

$$F(x) = \int\limits_0^x 4e^{-2t}\,dt = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}4\right]_0^x = -2e^{-2x} + 2 \qquad 0 < x \le c,$$

és $F(c) = 1$*-ből következik, hogy* $-2e^{-2c} + 2 = 1$, *azaz* $c = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,35$.

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - (-2e^{-2\frac{1}{4}} + 2) = \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 \approx 0,21.$$

3.5. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy pontot az $x^2 + y^2 < 1$ kör belsejében. Jelölje Z a távolságát a középponttól. Adjuk meg Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét valamint várható értékét!

Megoldás

Legyen Z *a középponttól való távolság. Ekkor* $0 \le Z \le 1$, *így a továbbiakban csak erre az intervallumra szorítkozunk.*

$$F(r) = P(Z < r) = \frac{r^2\pi}{1^2\pi} = r^2$$

$$F(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < 0 \\ r^2, & \text{ha } 0 \le r \le 1 \\ 1, & \text{ha } r > 1 \end{cases}$$

ebből deriválással adódik, hogy

$$f(r) = F'(r) = 2r,$$

$$f(r) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r < 0 \\ 2r, & \text{ha } 0 \le r \le 1 \\ 0, & \text{ha } r > 1 \end{cases}$$

$$EZ = \int\limits_0^1 r \cdot 2r\,dr = \left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3.6. Feladat. Legyen X sűrűségfüggvénye $\frac{c}{x^4}$ ha $x > 1$, és 0 különben.

a) $c =?$

b) $EX =?$

Megoldás

a) *Mivel* $1 = \int\limits_1^\infty \frac{c}{x^4}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_1^t \frac{c}{x^4}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{c}{-3\cdot x^3}\right]_1^t = \lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{c}{-3\cdot t^3} - \frac{c}{-3\cdot 1^3}\right] = 0 + \frac{c}{3} = \frac{c}{3}$

$\left(\text{egyszerűbb jelöléssel: } 1 = \int\limits_1^\infty \frac{c}{x^4}dx = \left[\frac{c}{-3\cdot x^3}\right]_1^\infty = \frac{c}{3}\right)$, *így következik, hogy* $c = 3$.

b) $EX = \int\limits_1^\infty x\frac{3}{x^4}\,dx = \left[\frac{-3}{2\cdot x^2}\right]_1^\infty = 1,5$

3.7. Feladat. Tapasztalatok szerint az út hossza, amit egy bizonyos típusú robogó megtesz az első meghibásodásáig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ez a távolság átlagosan 6000 km. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott robogó

a) kevesebb, mint 4000 km megtétele után meghibásodik?

b) több, mint 6500 km megtétele után hibásodik meg?

c) 4000 km-nél több, de 6000 km-nél kevesebb út megtétele után hibásodik meg?

d) Legfeljebb mekkora utat tesz meg az első meghibásodásig a robogók leghamarabb meghibásodó 20%-a?

Megoldás

Legyen X az első meghibásodásig megtett út. Ekkor $X \sim Exp(\lambda)$, ahol $\lambda = \dfrac{1}{6000}$.

a) $P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}4000} \approx 0,4866$

b) $P(X > 6500) = 1 - P(X < 6500) = e^{-\frac{1}{6000}6500} \approx 0,3385$

c) $P(4000 < X < 6000) = P(X < 6000) - P(X < 4000) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}6000} - (1 - e^{-\frac{1}{6000}4000}) \approx 0,1455$

d) $0,2 = P(X < c) = 1 - e^{-\frac{1}{6000}c}$, *azaz* $0,8 = e^{-\frac{1}{6000}c}$, *amiből* $c = -6000\ln(0,8) \approx 1338,86$.

3.8. Feladat. Egy tehén napi tejhozamát normális eloszású valószínűségi változóval, $m = 22,1$ liter várható értekkel és $\sigma = 1,5$ liter szórással, modellezzük.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon a tejhozam 23 és 25 liter közé esik?

b) Mekkora valószínűséggel esik a napi tejhozam $m - \sigma$ es $m + \sigma$ közé?

$(\Phi(0,6) = 0,7257, \Phi(1,93) = 0,9732, \Phi(1) = 0,8413)$

Megoldás

Legyen X a napi tejhozam. Ekkor $X \sim N(22,1; 1,5^2)$.

$$\begin{aligned} P(X<25) &= P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{25-m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{X-22{,}1}{1{,}5} < \frac{25-22{,}1}{1{,}5}\right) \\ &= P\left(Y < \frac{25-22{,}1}{1{,}5}\right) \quad / \; Y := \frac{X-22{,}1}{1{,}5} \sim N(0,1) \\ &= P(Y < 1{,}93) \\ &= \Phi(1{,}93) \end{aligned}$$

a) $P(23 < X < 25) = P(X < 25) - P(X < 23) = \Phi\left(\frac{25-22,1}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{23-22,1}{1,5}\right) = \Phi(1,93) - \Phi(0,6) = 0,9732 - 0,7257 = 0,2475.$

b) $P(m-\sigma < X < m+\sigma) = P(X < m+\sigma) - P(X < m-\sigma) = \Phi\left(\frac{(m+\sigma)-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(m-\sigma)-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826.$

3.9. Feladat. Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy termékeink legfeljebb 10%-át kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető.

Megoldás

Legyen X egy termék meghibásodásának ideje. Ekkor $X \sim N(10, 2^2)$

$$0,1 = P(X < c) = P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{c-10}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c-10}{2}\right)$$

$$c = 2 \cdot \Phi^{-1}(0,1) + 10 = 2 \cdot (-\Phi^{-1}(0,9)) + 10 = -2 \cdot 1,28 + 10 = 7,44.$$

Standard normáslis eloszás eloszlásfüggvényének értékei: `http://www.cs.elte.hu/~kovacsa/stdnormelo.pdf`

3.10. Feladat. Tegyük fel, hogy egy populációban az intelligenciahányados (IQ) normális eloszlású 110 várható értékkel és 10 szórással. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember IQ-ja 120 feletti?
/ $\Phi(1) = 0,8413$ /

Megoldás

Legyen X egy véletlenszerűen kiválasztott ember IQ-ja. Ekkor $X \sim N(110, 10^2)$.

$$P(X > 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - P\left(\frac{X-110}{10} < 1\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 \approx 16\%$$

3.11. Feladat. Legyen X sűrűségfüggvénye $\dfrac{c}{x^4}$ ha $1 < x$, és 0 különben. Mi a c konstans értéke és mennyi D^2X?

Megoldás

$$1 = \int_1^\infty \frac{c}{x^4} dx = \left[\frac{cx^{-3}}{-3}\right]_1^\infty = 0 - \left(-\frac{c}{3}\right) = \frac{c}{3}, \text{ így } c = 3$$

$$EX = \int_1^\infty x \frac{3}{x^4} dx = \int_1^\infty 3x^{-3} dx = \left[-\frac{3}{2}x^{-2}\right]_1^\infty = 0 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx}$$

$$EX^2 = \int_1^\infty x^2 \frac{3}{x^4} dx = \int_1^\infty 3x^{-2} dx = \left[-3x^{-1}\right]_1^\infty = 0 - (-3) = 3$$

$$D^2X = EX^2 - E^2X = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

3.12. Feladat. Legyen X egyenletes eloszlású az $[1, 4]$ intervallumon Számítsuk ki $(X - 1)^2$ várható értékét!

Megoldás

Ha $X \sim Egyenletes[1, 4]$, *akkor* $Y = X - 1 \sim Egyenletes[0, 3]$. *Ekkor*

$$E(X-1)^2 = EY^2 = \int_0^3 y^2 \frac{1}{3}\, dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 3$$

Más megoldás:

$$E(X-1)^2 = D^2(X-1) + E^2(X-1) = \frac{(3-0)^2}{12} + \left(\frac{0+3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$$

3.13. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók mindkettő 0 várható értékkel és 1 szórással. Legyen $W = X - Y$. Számítsa ki W várható értékét és szórását!

Megoldás

$EW = EX - EY = 0$ *és* $DW = \sqrt{D^2X + D^2Y} = \sqrt{2}$

3.14. Feladat. Adjon meg véges sok értéket felvehető (X) ill. végtelen sok értéket felvehető (Y) diszkrét valószínűségi változókat melyeknek szórása 1!

Megoldás

Például: Legyen $P(X = -1) = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \frac{1}{2}$ *ill.* $Y \sim Poisson(1)$.

3.15. Feladat. Legyen $X \sim N(2, \sqrt{5}^2)$ és $Y \sim N(5, 3^2)$ függetlenek és legyen $W = 3X - 2Y + 1$. Számítsa ki
a) EW-t és D^2W-t, ill.
b) $P(W \leq 6)$-ot!
$(\Phi(1) = 0,8413)$

$$\boxed{\begin{aligned} D^2(W) &= D^2(3X - 2Y) = D^2(3X) + D^2(-2Y) = \\ &= 3^2 D^2X + (-2)^2 D^2Y = 9D^2X + 4D^2Y \end{aligned}}$$

Megoldás

a) $EW = 3EX - 2EY + 1 = 6 - 10 + 1 = -3$ *és* $D^2W = 9D^2X + 4D^2Y = 45 + 36 = 81$

b) Mivel független normális eloszlású valószínűségű változók összege is normális eloszlású, és $3X \sim N(6,\ 3^2 \cdot \sqrt{5}^2)$ *továbbá* $-2Y \sim N(-10,\ (-2)^2 \cdot 3^2)$, *így* $W \sim N(-3, 9^2)$.

$$P(W \leq 6) = P\left(\frac{W - (-3)}{9} < \frac{6 - (-3)}{9}\right) = \Phi(1) = 0,8413$$

3.16. Feladat. Legyen X egy véges szórású valószínűségi változó és legyen $a, b \in \mathbb{R}$.
a) Mutassa meg, hogy $aX + b$ és X kovarianciája egyenlő a-szor X szórásnégyzetével!
b) Számolja ki $aX + b$ és X korrelációját $(a \neq 0)$!

Megoldás

a)

$$cov(aX + b, X) = cov(aX, X) + cov(b, X) = a\,cov(X, X) = aD^2(X)$$

b)

$$corr(aX + b, X) = \frac{cov(aX + b, X)}{D(aX + b)DX} = \frac{aD^2X}{\sqrt{a^2}DXDX} = \begin{cases} 1, & ha\ \ a > 0 \\ -1, & ha\ \ a < 0 \end{cases}$$

3.17. Feladat. Legyen X és Y független valószínűségi változók, melyre $D^2X < \infty$ és $D^2Y < \infty$.
a) Mutassa meg, hogy $X+Y$ és X kovarianciája egyenlő X szórásnégyzetével!
b) Számolja ki $X+Y$ és X korrelációját!

Megoldás

a)

$$cov(X+Y,X) = E(X+Y)X - E(X+Y)EX = EX^2 + E(YX) - E^2X - EYEX =$$
$$= EX^2 - E^2X + E(YX) - EYEX = cov(X,X) + cov(Y,X) = D^2(X)$$

b)

$$corr(X+Y,X) = \frac{cov(X+Y,X)}{D(X+Y)DX} = \frac{D^2X}{\sqrt{D^2X + D^2Y}DX} = \frac{DX}{\sqrt{D^2X+D^2Y}}$$

3.18. Feladat. Tegyük fel, hogy egy tábla csokoládé tömege normális eloszlású 100g várható értékkel és 3g szórással. Legalább hány csokoládét csomagoljunk egy dobozba, hogy a dobozban levő táblák átlagos tömege legalább 0.9 valószínűséggel nagyobb legyen 99.5 g-nál, ha feltételezzük, hogy az egyes táblák tömege egymástól független? ($\Phi(1,28) = 0,8997$)

Megoldás

Legyen X egy tábla csokoládé tömege, $X \sim N(100, 3^2)$. Ekkor n tábla csokoládé átlagos tömege $\overline{X} \sim N(100, \frac{9}{n})$, mivel $D^2(\overline{X}) = D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{n\cdot 9}{n^2} = \frac{9}{n}$.

$$0,9 = P(\overline{X} > 99,5) = 1 - P(\overline{X} < 99,5) = 1 - P\left(\frac{\overline{X}-100}{\frac{3}{\sqrt{n}}} < \frac{-0,5\cdot\sqrt{n}}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}}{6}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1.28) = 0.8997 \approx 0,9$, így $1,28 = \frac{\sqrt{n}}{6}$. Ebből következik, hogy $n = (6\cdot 1,28)^2 = 58,9$, azaz legalább 59 csokit kell egy dobozba csomagolni.

3.19. Feladat. Egy scannelt kép átlagos mérete 600KB, 100KB szórással. Mi a valószínűsége, hogy 80 ilyen kép együttesen 47 és 48MB közötti tárhelyet foglal el, ha feltételezzük, hogy a képek mérete egymástól független?
($\Phi(1,12) = 0,8686$)

Megoldás

Jelölje X egy kép eloszlását $\mu = 600KB$ várható értékkel és $\sigma = 100KB$ szórással. Legyen S_n n db ilyen valószínűségi változó összege ($n = 80$). A centrális határeloszlás tétel szerint

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \to Z \text{ ha } n \to \infty, \text{ ahol } Z \sim N(0,1).$$

Tehát

$$P(47000 \le S_n \le 48000) = P\left(\frac{47000 - 80\cdot 600}{\sqrt{80}\cdot 100} \le \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{48000 - 80\cdot 600}{\sqrt{80}\cdot 100}\right) \approx$$

$$\approx P(-1,12 \le Z \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,12) = 0,5 - (1 - \Phi(1,12)) = 0,5 - (1 - 0,8686) = 0,3686 = 36,9\%$$

3.20. Feladat. Egy szoftver frissítéséhez 68 file-t kell installálni, amik egymástól függetlenül 10mp várható értékű és 2mp szórású ideig töltődnek.
a) Mi a valószínűsége, hogy a teljes frissítés lezajlik 12 percen belül?
b) A cég a következő frissítésnél azt ígéri, hogy az már 95% valószínűséggel 10 percen belül betöltődik. Hány file-ból állhat ez a frissítés?
($\Phi(2,42) = 0,992$, $\Phi(1,645) = 0,95$)

Megoldás

Legyen X egy fájl telepítési ideje $\mu = 10$ mp várható értékkel és $\sigma = 2$ mp szórással. Jelölje S_n n db fájl telepítési idejének az összegét ($n = 68$).

a)

Centrális Határeloszlás Tétel!

$$P(\text{teljes frissítés lezajlik 12 percen belül}) = P(S_n < 720) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{720-680}{2\sqrt{68}}\right) \approx \Phi(2,42) = 99,2\%$$

b)

$$0,95 = P(S_n < 600) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{600-10n}{2\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{600-10n}{2\sqrt{n}}\right)$$

Mivel tudjuk, hogy $\Phi(1,645) = 0,95$, így $1,645 = \frac{600-10n}{2\sqrt{n}}$. Ezt megoldva következik, hogy $n = 57,5$, azaz legfeljebb 57 fájlból állhat a frissítés.

$$1,645 = \frac{600-10n}{2\sqrt{n}}$$
$$3,29\sqrt{n} = 600 - 10n \quad / \; y := \sqrt{n}$$
$$3,29y = 600 - 10y^2$$
$$10y^2 + 3,29y - 600 = 0$$
$$\to y_1 = 7,58, y_2 = -7,91$$
$$y = \sqrt{n} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{n} = 7,58 \Rightarrow n \approx 57,51$$

3.21. Feladat. Legyen egy X pozitív valószínűségi változó várható értéke $EX = 3$ és szórása $DX = 3$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel vesz fel a változó 13-at vagy annál nagyobb értéket! Mennyi a valószínűség pontos értéke, ha feltesszük, hogy az eloszlás exponenciális?

Megoldás

Markov egyenlőtlenséggel:

$P(X \geq 13) \leq \frac{EX}{13} = \frac{3}{13} \approx 0{,}23$

A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 10$ *értékre használva*

$$P(X \geq 13) = P(X - 3 \geq 13 - 3) = P(X - 3 \geq 10) \leq P(|X - 3| \geq 10) \leq \frac{D^2X}{10^2} = \frac{9}{100} = 0,09$$

Ha X *exponenciális eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye* $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$, *így*

$$P(X \geq 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - (1 - e^{-\frac{13}{3}}) = e^{-\frac{13}{3}} = 0,013$$

3.22. Feladat. Egy elektromos vezetékgyártó cég 40 m-es vezetékeket gyárt $0,2$ m szórással. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vezeték hossza legalább 1 m-rel eltér a várható 40 m-es értéktől?

Megoldás

A Csebisev-egyenlőtlenséget $\varepsilon = 1$ *értékre használva*

$$P(|X - 40| \geq 1) \leq \frac{D^2X}{1^2} = \frac{0,2^2}{1^2} = 0,04$$

Vagyis legfeljebb 0,04 annak a valószínűsége, hogy a vezeték rövidebb, mint 39 *m ill. hosszabb, mint* 41 *m.*