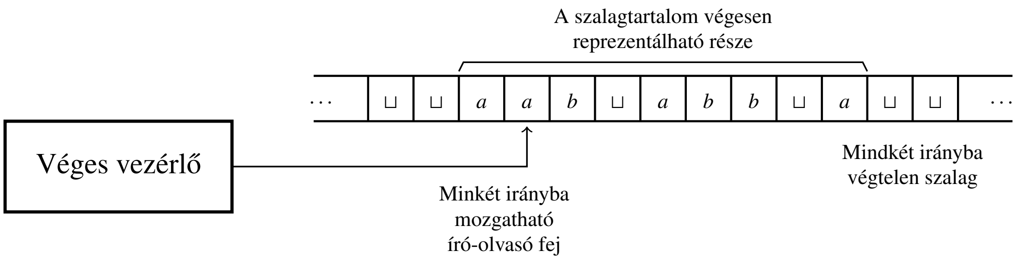
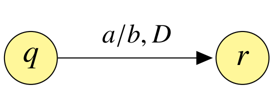
(Determinisztikus) Turing-gépek



- A **Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol
  - Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
  - $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
  - Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$.
  - $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény.
- A Turing-gép működésének fázisait a gép konfigurációival írjuk le. A Turing-gép **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

  A konfiguráció a gép azon állapotát tükrözi amikor a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak $\sqcup$ van), a gép a q állapotban van, és a gép író-olvasó feje a v szó első betűjén áll.
- A gép **kezdőkonfigurációja** egy olyan q_0u szó, ahol u csak Σ-beli betűket tartalmaz ($q_0\sqcup$ ha $u = \varepsilon$). Egy M TG lehetséges konfigurációinak halmazát jelölje C_M.
- Egy Turing-gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ (egylépéses) **konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk. Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.
  - Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
  - ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
  - ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.
- A $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ **többlépéses konfigurációátmenet** relációját a következőképpen definiáljuk: $C \vdash^* C' \Leftrightarrow$
  - ha $C = C'$ vagy
  - ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \ldots C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.
- Ha $q \in \{q_i, q_n\}$, akkor azt mondjuk, hogy az uqv konfiguráció egy **megállási konfiguráció**. $q = q_i$ esetében **elfogadó**, míg $q = q_n$ esetében **elutasító konfigurációról** beszélünk.
- Az M által **felismert nyelv** (amit $L(M)$-mel jelölünk) azoknak az $u \in \Sigma^*$ szavaknak a halmaza, melyekre igaz, hogy $q_0u\sqcup \vdash^* xq_iy$ valamely $x, y \in \Gamma^*$, $y \neq \varepsilon$ szavakra.
- Az egyszalagos TG-ek **átmenetdiagramja**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
($q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\}$)

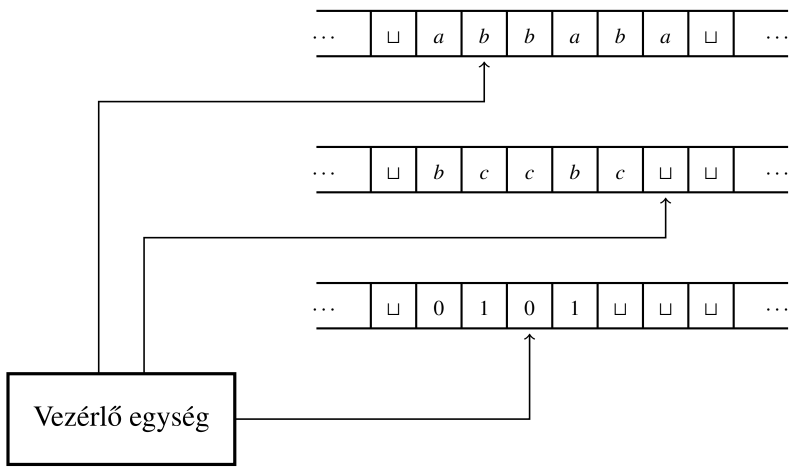
- Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M

  Turing-gépre. Továbbá, egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M

  Turing-gép, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és felismeri az L-et. A Turing-felismerhető nyelveket szokás **rekurzívan felsorolhatónak**, az eldönthető nyelveket pedig **rekurzívnak** is nevezni. A rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát RE -vel, a rekurzív nyelvek osztályát pedig R-rel jelöljük.

- Tekintsünk egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ Turing-gépet és annak egy $u \in \Sigma^*$ bemenõ szavát. Azt mondjuk, hogy M **futási ideje** (időigénye) az u szón n ($n \geq 0$), ha M a $q_0 u$ kezdőkonfigurációból n lépésben (konfigurációátmenettel) jut el megállási konfigurációba. Ha nincs ilyen szám, akkor M futási ideje az u-n végtelen.

- Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy M egy $f(n)$ **időkorlátos gép** ($f(n)$ az időigénye), ha minden $u \in \Sigma^*$ input szóra, M futási ideje az u szón legfeljebb $f(|u|)$.



- A k**-szalagos Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol
  - Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
  - $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
  - Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$,
  - $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$ az átmenet függvény.

- A k szalagos Turing-gép **konfigurációja** : $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ $(2k+1)$-es, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$. Az u szóhoz tartozó **kezdõkonfiguráció:** $u_i = \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, $v_1 = u$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leq i \leq k)$. Idõigény: mint az egyszalagosnál (konfigurációátmenetek száma alapján).

- k**-szalagos Turing gép által felismert nyelv:**

  $L(M) = \{u \in \Sigma^* \,|\, (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),$

  valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon$ -ra$\}$

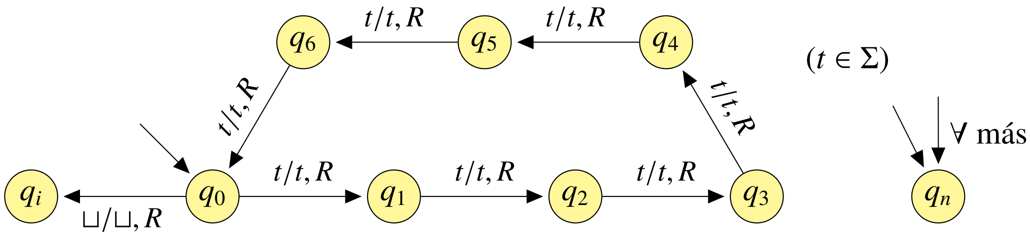
- A k-szalagos TG-ek **átmenetdiagramja** egy csúcs- és élcímkézett irányított gráf, melyre

$$q \xrightarrow{a_1, \ldots, a_k / b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k} r$$

$$\iff \delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$$
$$(q, r \in Q, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \Gamma, D_1, \ldots, D_k \in \{L, S, R\})$$

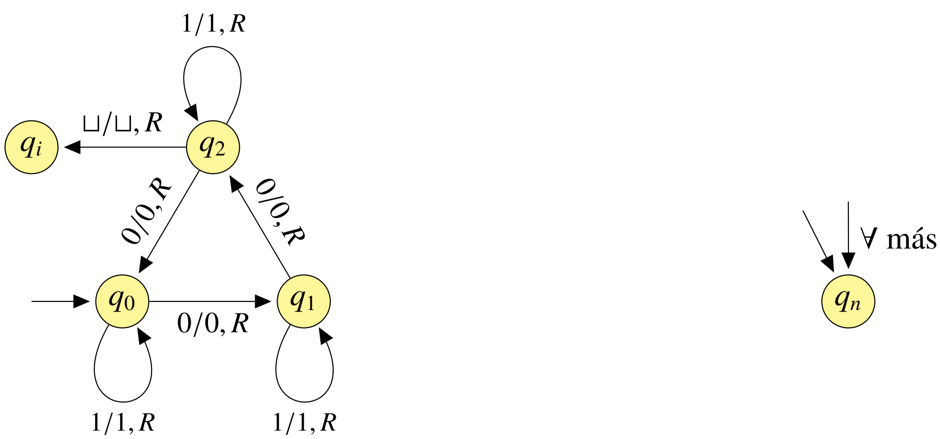
Feladatok

1. Feladat: Készítsünk TG-et, mely a 7-tel osztható hosszúságú szavak nyelvét ismeri fel!
Megoldás:



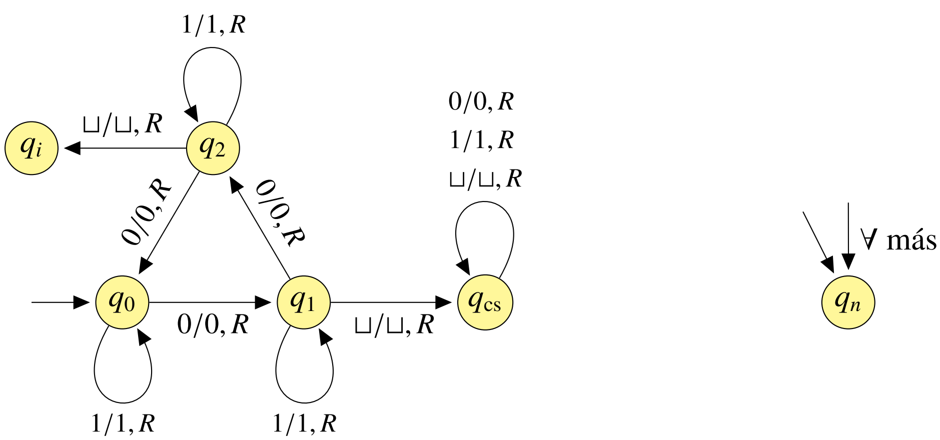
$\Sigma = \{a, b\}$.
$q_0abb \vdash aq_1bb \vdash abq_2b \vdash abbq_3\sqcup \vdash abbq_n\sqcup$
Legyen $f(n) = n + 1$. Ekkor a gép $f(n)$ időkorlátos.

2. Feladat: Készítsünk egy M TG-et, amelyre $L(M) = \{\, u \in \{0, 1\}^* \mid |u|_0 \equiv 2 \pmod 3\}$, ahol $|u|_t$ az u-ban szereplő t betűk száma.
Megoldás:



Ez a TG nem csak felismeri, hanem el is dönti $L(M)$-et.

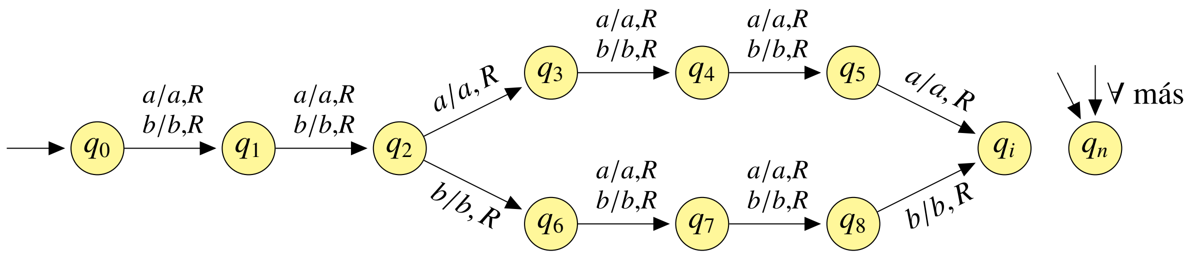
3. Feladat: Készítsünk egy olyan M' TG-et, amely felismeri ugyan a 2. feladatban megadott nyelvet, de nem dönti el.
Megoldás:



$L(M') = \{\, u \in \{0, 1\}^* \mid |u|_0 \equiv 2 \pmod 3\}$.
q_n-ben ér véget a működés azon szavakra, amelyekre $|u|_0 \equiv 0 \pmod 3$.
M' nem áll meg azon szavakra, amelyekre $|u|_0 \equiv 1 \pmod 3$.

4. Feladat: Készítsünk TG-et, mely azon szavakat ismeri fel, melyeknek 3. és 6. betűje azonos! ($\Sigma = \{a, b\}$)

Megoldás:

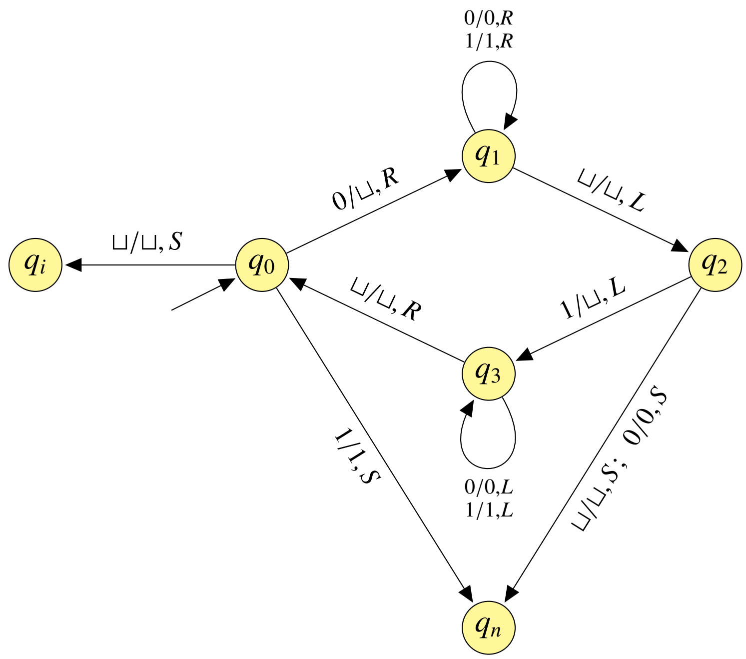


$q_0abbabaa \vdash aq_1bbabaa \vdash abq_2babaa \vdash abbq_6abaa \vdash abbaq_7baa \vdash abbabq_8aa \vdash abbabq_naa.$

Legyen $f(n) = 6$. Ekkor a gép $f(n)$ időkorlátos.

6. Feladat: Készítsünk egy M Turing gépet, melyre $L(M) = \{ 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$!

Megoldás:



Ez egy $O(n^2)$ időkorlátos TG, van végtelen szó (például épp az L-beliek), melyre kell $\Omega(n^2)$ lépés.