Analízis 2

Tételbizonyítások vizsgára

A jegyzetet Bauer Bence készítette Dr. Weisz Ferenc előadása alapján.

1. Korlátos zárt intervallumon értelmezett függvény korlátos is.

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f korlátos.

Bizonyítás: f korlátos, ha $\exists K > 0, \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f(x)| \leq K$

Indirekt: Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz

$\Rightarrow \forall K > 0, \exists x \in [a, b] : |f(x)| > K$. Legyen a $K = n$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n$

$\Rightarrow x_n \in [a, b] \Rightarrow (x_n)$ korlátos $\Rightarrow$ Bolzano - Weierstrass tétel miatt

$\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat $\Rightarrow \lim(x_{n_k}) =: \alpha$. Ekkor $\alpha \in [a, b]$

hiszen, ha $\alpha \notin [a, b]$, akkor $\exists \varepsilon > 0 : [a, b] \cap K_\varepsilon(\alpha) = \emptyset$

$\Rightarrow \exists k_0, \forall k \geq k_0 : x_{n_k} \in K_\varepsilon(\alpha)$, viszont ez ellentmondás.

$x_{n_k} \in [a, b] \Rightarrow \alpha \in [a, b] \Rightarrow f \in C(\alpha)$

Alkalmazzuk az átviteli elvet, $\lim(x_{n_k}) = \alpha \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha) \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ konvergens.

$\Rightarrow (f(x_{n_k}))$ korlátos. És így ellentmondásra juttotunk, hiszen:

$|f(x_{n_k})| > n_k \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ nem korlátos. ■

2. Weierstrass-tétel

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f-nek létezik abszolút maximuma és minimuma is.

Bizonyítás: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor korlátos

$\Rightarrow M :=\sup\{f(x), \text{ha } x \in [a, b]\}$, $m :=\inf\{f(x), \text{ha } x \in [a, b]\}$, $M, m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall n \geq 1$-re, $\exists x \in [a, b] : M - \frac{1}{n} < f(x) \leq M$

$\Rightarrow \lim f(x_n) = M \Rightarrow (x_n)$ korlátos.

$\Rightarrow \exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat$\Rightarrow \lim x_{n_k} = \alpha, \alpha \in [a, b] \Rightarrow$ átviteli elv, $f \in C(\alpha)$

$\Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$.

De! $\lim f(x_n) = M \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = M \Rightarrow M = f(\alpha)$

m -re hasonló. ■

3. Bolzano-tétel

Tétel: Tfh. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha $f(a) \cdot f(b) < 0$ akkor $\exists x \in [a, b] : f(x) = 0$

Bizonyítás: Legyen $[x_0, y_0] = [a, b]$ és tfh. $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$

Legyen $z_0 := \frac{x_0+y_0}{2}$, ekkor 3 eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$ ✓
2. $f(z_0) < 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [z_0, y_0]$
3. $f(z_0) > 0$, ekkor legyen $[x_1, y_1] := [x_0, z_0]$

Ezt az eljárást folytatva véges sok lépésben kapunk ξ-t amelyre $f(\xi) = 0$, ha nem akkor kapunk egy $([x_n, y_n])$ intervallum sorozatot, amelyre a következők igazak:

1. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$
2. $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0$
3. $y_n - x_n = \frac{y_0-x_0}{2^n}$

A Cantor-tétel miatt

$$\exists \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [x_n, y_n] \text{ Mivel } y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ ,ezért } \exists! \, \xi \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} [x_n, y_n]$$

Továbbá $0 \leq \xi - x_n \leq y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(x_n) = \xi}$,és $\quad y_n - \xi \leq y_n - x_n \to 0 \Rightarrow \underline{\lim(y_n) = \xi}$

Tudjuk, hogy $f(x_n) < 0$ és $\lim(x_n) = \xi$ és $f \in C(\xi)$,ezért az átviteli elv miatt
$\lim f(x_n) = f(\xi) \Rightarrow f(\xi) \leq 0$

Hasonlóan $f(y_n) > 0, \quad \lim(y_n) = \xi \Rightarrow \lim f(y_n) = f(\xi)$
itt: $f(y_n) > 0$ ezért $f(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) = 0 \quad \blacksquare$

4. Heine-tétel

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f egyenletesen folytonos.
Bizonyítás: (Indirekt) Tfh. f nem egyenletesen folytonos.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$
Legyen $\delta = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
Tekintsük az $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ sorozatot $\Rightarrow (x_n)$ korlátos.
Bolzano-Weierstrass kiv. tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, azaz:
$\lim(x_{n_k}) =: \alpha, \quad \alpha \in [a, b]$
De! $|y_{n_k} - \alpha| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - \alpha| \to 0 \quad$ azaz $\lim(y_{n_k}) = \alpha$
$f \in C(\alpha)$ átviteli elv miatt
$\lim(f(x_{n_k})) = f(\alpha)$ és $\lim(f(y_{n_k})) = f(\alpha) \Rightarrow \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$
viszont ez ellentmondás, azzal, hogy $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon \quad \blacksquare$

5. Az inverzfüggvény folytonossága

Tétel: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor f^{-1} is folytonos.
Bizonyítás: 1. lépés: f^{-1} $\exists$ Indirekt.
Tfh. f^{-1} nem folytonos. $\Rightarrow \exists y_0 \in R_f, f^{-1} \notin C(y_0) \Rightarrow$ átviteli elv.
$\exists y_n \in R_f, \lim(y_n) = y_0$: $\lim(f^{-1}(y_n)) \neq f^{-1}(y_0)$
Legyen $x_n = f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim(x_n) \neq x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0$: $\{n : |x_n - x_0| \geq \delta\}$ végtelen.
Legyen n_k indexsorozat, hogy: $|x_{n_k} - x_0| \geq \delta$
$(x_{n_k}) : \mathbb{N} \to [a, b] \Rightarrow (x_{n_k})$ korlátos. $\Rightarrow \exists$ konvergens részsorozat.
$(x_{n_k})'$: $\quad \lim(x_{n_k})' := \alpha \quad$ **De!** $\quad |(x_{n_k})' - x_0| \geq \delta \Rightarrow |\alpha - x_0| \geq \delta \Rightarrow \alpha \neq x_0$
2. lépés: $f \in C(\alpha) \quad \alpha \in [a, b]$
átviteli elv $\Rightarrow \lim \underbrace{f(x_{n_k})'}_{(y_{n_k})'} = f(\alpha) \Rightarrow \lim(y_{n_k})' = f(\alpha)$

De! $\lim(y_{n_k})' = y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(\alpha) = f(x_0) \quad f$ injektív. $\Rightarrow \alpha = x_0 \quad$ Ez ellentmondás. $\quad \blacksquare$

6. Folytonos invertálható függvény jellemzése a monotonitással.

Tétel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f$ szig. mon.

Bizonyítás: Ha $f(a) < f(b)$, ekkor f szig. mon. nő

1. Igazoljuk, hogy $f(a) = min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ és $f(b) = max\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Csak az elsőt. Indirekten, Tfh:

$f(a) > minf$ ($<$ nem lehet) Weierstrass-tétel $\Rightarrow \exists\alpha \in [a, b] : f(\alpha) = minf \quad \alpha \neq a, b$

Tekintsük az $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ függvényt. A Bolzano-tétel miatt $c = f(a) \in (f(\alpha), f(b))$-hoz is

$\exists\xi \in [\alpha, b] : f(a) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow a = \xi$ Ellentmondás.

2. Igazoljuk, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in [a, b])$

Indirekt, Tfh: $f(x_1) > f(x_2)$

Ekkor $f(x_1) \in (f(x_2), f(b))$ Tekintsük az $f : [x_2, b] \to \mathbb{R}$ függvényt.

$c = f(x_1)$-hez is $\exists\xi \in (x_2, b) : f(x_1) = f(\xi) \quad f$ injektív $\Rightarrow x_1 = \xi$ Ellentmondás. ■

7. Differenciálható függvények összege, szorzata, hányadosa.

Tétel: Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g), \quad f, g \in \mathcal{D}(a)$ Ekkor:

- **i,** $f + g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- **ii,** $f \cdot g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- **iii,** Ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(a)$ és $(\dfrac{f}{g})'(a) = \dfrac{(f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a))}{g^2(a)}$

Bizonyítás:

i, $a \in int(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) = int\mathcal{D}_{f+g}$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

$\Rightarrow (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii, $$\lim_{x\to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot f(a) + g(x) \cdot f(a) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} + \lim_{x\to a} f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \longrightarrow f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \quad (x \to a)$$

$\Rightarrow (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

iii, Először igazoljuk, hogy $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \underbrace{(-\frac{1}{g(x) \cdot g(a)})}_{\to \frac{-1}{g^2(a)}} \cdot \underbrace{(\frac{g(x) - g(a)}{x-a})}_{\to g'(a)} \longrightarrow -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \quad (x \to a)$$

$$\Rightarrow (\frac{f}{g})'(a) = (f \cdot \frac{1}{g})'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot (\frac{1}{g})'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

■

8. Differenciálható függvények kompozíciója.

Tétel: $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R_g \subset D_f, g \in \mathcal{D}(a), f \in \mathcal{D}(g(a))$, ekkor
$f \circ g \in \mathcal{D}(a)$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Bizonyítás: $g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow a \in int\mathcal{D}_g \Rightarrow int\mathcal{D}_{f\circ g}$

$g \in \mathcal{D}(a) \Rightarrow \exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim\limits_{a} \varepsilon_1 = 0$ és $g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a) \quad (x \in D_f)$

$f \in \mathcal{D}(g(a)) \Rightarrow \exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim\limits_{g(a)} \varepsilon_2 = 0$ és $f(y) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot (y - g(a)) + \varepsilon_2(y) \cdot (y - g(a))$

Legyen $y = g(x)$

$$f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot (g(x) - g(a)) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot (g(x) - g(a)) =$$

$$= f'(g(a)) \cdot (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot (g'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) =$$

$$= f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot (x-a) + (x-a) \cdot \underbrace{(f'(g(a)) \cdot \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(g(x)) \cdot g'(a) + \varepsilon_1(x) \cdot \varepsilon_2(g(x)))}_{\varepsilon(x)}$$

$\varepsilon_1 \to 0, \quad (x \to a)$

$g(x) \to g(a)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(g(x)) = \lim\limits_{g(a)} \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{a} \varepsilon = 0$

$\Rightarrow (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad \blacksquare$

9. Az inverz függvény deriváltja.

Tétel: Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, szig. mon. növő és folytonos függvény.
Ha $\xi \in (a, b), f \in \mathcal{D}(\xi)$ és $f'(\xi) \neq 0$, akkor
$(f^{-1}) \in \mathcal{D}(\eta)$ és $(f^{-1})'(\eta) = \dfrac{1}{f'(\xi)}$, ahol $\eta = f(\xi)$

Bizonyítás: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow R_f$ intervallum.

f szig. mon. növő $\Rightarrow R_f$ nyílt intervallum $\Rightarrow \eta \in intR_f \qquad f^{-1} : R_f \to D_f$

$$\lim_{y \to \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x \to \xi} \frac{x - \xi}{f(x) - f(\xi)} = \lim_{x \to \xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} \longrightarrow \frac{1}{f'(\xi)} \quad (x \to \xi)$$

Legyen $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \qquad \xi = f^{-1}(\eta)$

Ui. $x \to \xi$, mert $y \to \eta$: $\quad f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos $\Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(\eta)$
$\Rightarrow x \to \xi$

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y \to \eta} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)}{y - \eta} = \lim_{x \to \xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} = \frac{1}{f'(\xi)} \quad \blacksquare$$

10. Hatványsor összegfüggvényének deriváltja

Tétel: Legyen $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$ és legyen
$f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad x \in K_R(a)$. Ekkor $f \in \mathcal{D}(x_0) \quad \forall x_0 \in K_R(a)$ és
$f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n \cdot (x_0 - a)^{n-1}$, ahol $x_0 \in K_R(a)$

Bizonyítás: 1. lépés: Igazoljuk, hogy $\sum\limits_{n=0} n \cdot \alpha_n \cdot r^n$ abszolút konvergens $\forall 0 < r < R$

Legyen $0 < r < r' < R$ és $x = a + r'$

x-ben konvergens a hatványsor $\Rightarrow \sum\limits_{n=0} \alpha_n (r')^n$ konvergens $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n (r')^n = 0 \Rightarrow (\alpha_n (r')^n)$ korlátos

$\Rightarrow \exists M > 0 : |\alpha_n (r')^n| \leq M \Rightarrow |\alpha_n| \leq \frac{M}{(r')^n} \Rightarrow \sum\limits_{n=0} |n \cdot \alpha_n \cdot r^n| \leq M \cdot \sum\limits_{n=0} n \cdot (\frac{r}{r'})^n$

ez konvergens, hiszen a gyökkritérium miatt

$\sqrt[n]{n \cdot (\frac{r}{r'})^n} = \sqrt[n]{n} \cdot (\frac{r}{r'}) \to (\frac{r}{r'}) < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0} n \cdot \alpha_n \cdot r^n$ abszolút konvergens

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1} n \cdot \alpha_n \cdot r^{n-1}$ is abszolút konvergens $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |n \cdot \alpha_n \cdot r^{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$

2. lépés:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0 - a)^{n-1} \right| = \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x_0 - a)^n}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n (x-a)^n - \alpha_n (x_0-a)^n}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{N} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right|}_{(I)} + \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{(x-a)^n - (x_0-a)^n}{x-x_0} \right|}_{(II)} +$$

$$+ \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right|}_{(III)} = (I) + (II) + (III)$$

Tfh. $|x_0 - a| < r < R$

Mivel $x \to x_0$ ezért feltehető, hogy $|x-a| < r \Rightarrow (III) \leq \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} n \cdot |\alpha_n| \cdot r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(II) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \left| \frac{((x-a)-(x_0-a))((x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x_0-a) + \ldots + (x_0-a)^{n-1})}{x-x_0} \right| =$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \left| (x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x_0-a) + \ldots + (x_0-a)^{n-1} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot n \cdot r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(I) \leq \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| \left| \underbrace{\frac{(x-a)^n - (x_0-a)^n}{x-x_0} - n \cdot (x_0-a)^{n-1}}_{\to 0, \text{ ha } x \to x_0} \right|$$

$g(x) = (x-a)^n \Rightarrow$ a tört határértéke $\quad g'(x_0) = n \cdot (x_0-a)^{n-1} \quad (x \to x_0)$

$\Rightarrow \exists \delta > 0, (I) < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (\text{ ha } |x - x_0| < \delta)$$

$$\Rightarrow \lim \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n (x_0-a)^{n-1} \right| = 0$$

$f \in \mathcal{D}(x_0)$ és $f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha_n \cdot (x_0-a)^{n-1}$ ■

11. A differenciálszámítás középértéktételei (Rolle-, Cauchy-, Lagrange-tétel).

1. Rolle-tétel

Tétel: Tfh. $f \in C[a,b]$ és $f \in \mathcal{D}(a,b)$

Ha $f(a) = f(b)$, ekkor $\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

Bizonyítás: $f \in C[a,b] \Rightarrow$ Weierstrass-tétel miatt

$\Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} f =: m$ és $\exists \beta \in [a,b] : f(\beta) = \max\limits_{[a,b]} f =: M$

1. lépés: Tfh. $m = M \Rightarrow f = m \quad ([a,b]$-n), a függvény konstans $\Rightarrow f' = 0 \quad [a,b]$-n

2. lépés: $m \neq M$ és $m \neq f(a) = f(b) \Rightarrow m = f(\alpha) \Rightarrow \alpha \neq a, b \Rightarrow \alpha \in (a,b)$

$\Rightarrow \alpha$-ban lokális minimum van. $\Rightarrow f'(\alpha) = 0$

3. lépés: Tfh. $m \neq M$ és $m = f(a) = f(b)$

$\Rightarrow M \neq f(a) = f(b) \Rightarrow \beta \neq a, b \Rightarrow \beta \in (a,b) \Rightarrow \beta$-ban lokális maximum van $\Rightarrow f'(\beta) = 0$ ■

2. Cauchy-tétel

Tétel: Tfh. $f, g \in C[a,b]$, $f, g \in \mathcal{D}(a,b)$ és $g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a,b))$

Ekkor: $\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Bizonyítás: $g(b) \neq g(a)$, hiszen különben $\exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$

Válasszuk meg λ-t úgy, hogy az $F := f - \lambda g$ függvényre alkalmazhassuk a Rolle-tételt

$$F \in C[a,b], F \in \mathcal{D}(a,b), F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$\Rightarrow$ Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a,b) : F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ ■

3. Lagrange-tétel

Tétel: Tfh. $f \in C[a,b], f \in \mathcal{D}(a,b)$

Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Bizonyítás: Legyen $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \neq 0$ Így alkalmazható rá a Cauchy-tétel ■

12. A monotonitásra vonatkozó szükséges, és szükséges és elégséges feltételek.

12.1. Szükséges Feltétel

Tétel: Tfh. $f \in \mathcal{D}(a,b)$ Ekkor:

i, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton nő (a,b)-n

ii, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ monoton fogy (a,b)-n

iii, $f' > 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton nő (a,b)-n

iv, $f' < 0 \quad (a,b)$-n $\Rightarrow f$ szigorú monoton fogy (a,b)-n

Bizonyítás:

i, Legyen $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ A Lagrange tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton nő.

ii, Ugyanígy

iii, A Lagrange tétel után $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

iv, Ugyanígy. $\blacksquare$

12.2. Szükséges és elégséges feltétel

Tétel: Tfh. $f \in \mathcal{D}(a,b)$ Ekkor:

i, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton nő (a,b)-n

ii, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n $\Leftrightarrow f$ monoton fogy (a,b)-n

iii, $f' \geq 0 \quad (a,b)$-n, de $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton nő (a,b)-n

iv, $f' \leq 0 \quad (a,b)$-n, de $\nexists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n $\Leftrightarrow f$ szigorú monoton fogy (a,b)-n

Bizonyítás: **i,** "$\Rightarrow$"$\checkmark$ "$\Leftarrow$" Tfh. f monoton nő és legyen $\xi \in (a,b)$ tetszőleges

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} \geq 0 & \text{, ha } x \geq \xi \\ \geq 0 & \text{, ha } x < \xi \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists f'(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$

ii, Hasonló

iii, "$\Rightarrow$" $f' \geq 0 \Rightarrow f$ szigorú monoton nő

Indirekten Tfh. f nem szigorú monoton

$\Rightarrow \exists c,d : f(c) = f(d) \Rightarrow f = f(c) \quad (c,d)$-n $\Rightarrow f' = 0 \quad (c,d)$-n, ez ellentmondás

$\Rightarrow f$ szigorú monoton nő.

"$\Leftarrow$" f szigorú monoton nő $\Rightarrow f$ monoton nő. $\Rightarrow f' \geq 0$ Indirekten:

Tfh. $\exists (c,d) \subset (a,b) : f' = 0 \quad (c,d)$-n$\Rightarrow f$ konstans (c,d)-n $\Rightarrow f$ nem szigorú monoton nő

És így ellentmondásra jutottunk $\Rightarrow \nexists (c,d) : f' = 0 \quad (c,d)$-n

iv, Hasonló $\blacksquare$

13. L'Hospital-szabályok

13.1. L'Hospital szabály $\frac{0}{0}$ alakra

Tétel: Tfh. **i,** $f, g \in \mathcal{D}(a,b)$, $\quad (-\infty \le a < b < \infty)$

ii, $g'(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$

iii, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$

iv, $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor: $\exists \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'}$

Bizonyítás: **i,** Tfh. $a \neq -\infty$

Tudjuk: $\lim\limits_{a+0} \frac{f'}{g'} = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall \xi \in (a, x_0) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $f(a) = g(a) = 0$ és legyen $x \in (a, x_0)$ tetszőleges, ekkor $f, g \in C[a,x]$ és $f, g \in \mathcal{D}(a,x)$

$\Rightarrow$ a Cauchy-középértéktétel miatt: $\exists \xi \in (a,x) : \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall x \in (a, x_0) : \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim\limits_{a+0} \frac{f}{g} = A$

ii, Tfh. $a = -\infty$ Visszavezetjük **i,**-re

Legyen $F(y) := f(b+1-\frac{1}{y}), \quad y \in (0,1)$ és

$G(y) := g(b+1-\frac{1}{y}), \quad y \in (0,1)$

$y < 1 \Rightarrow b+1-\frac{1}{y} < b \Rightarrow f$ és g értelmezve van a $(b+1-\frac{1}{y})$ pontban.

$\lim\limits_{0+0} F = \lim\limits_{y \to 0+0} f(b+1-\frac{1}{y}) = \lim\limits_{-\infty} f = 0$

$\lim\limits_{0+0} G = \lim\limits_{-\infty} g = 0$ Ha $\exists \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G}$, ekkor

$\lim\limits_{0+0} \frac{F}{G} = \lim\limits_{y \to 0+0} \frac{f}{g}(b+1-\frac{1}{y}) = \lim\limits_{-\infty} \frac{f}{g}$

$F'(y) = f'(b+1-\frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{y^2}$

$G'(y) = g'(b+1-\frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{y^2} \neq 0 \qquad y \in (0,1)$

$\lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'} = \lim\limits_{-\infty} \frac{f'}{g'}$ Alkalmazható **i,** F és G-re

$\Rightarrow \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G} = \lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{-\infty} \frac{f}{g} = \lim\limits_{0+0} \frac{F}{G}$ és $\lim\limits_{-\infty} \frac{f'}{g'} = \lim\limits_{0+0} \frac{F'}{G'}$ ■

13.2. L'Hospital szabály $\frac{\infty}{\infty}$ alakra

Tétel: Tfh. **i,** $f, g \in \mathcal{D}(a,b), \quad (-\infty \le a < b < \infty)$

ii, $g'(x) \neq 0, \quad x \in (a,b)$

iii, $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = \infty$

iv, $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$ és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor: $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$

Bizonyítás: **i,** Tfh. $a \neq -\infty, A \in \mathbb{R}$

Tudjuk: $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (a,b), \forall \xi \in (a, x_0): \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $x \in (a, x_0)$ és alkalmazzuk a Cauchy középérték-tételt az $[x, x_0]$ intervallumra

$\Rightarrow \exists \xi \in (x, x_0): \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ Felthető, hogy $f > 0 \quad (a, x_0)$-n, hiszen $\lim\limits_{a} f = \infty$

Hasonlóan $g > 0 \quad (a, x_0)$-n.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}}_{T(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot T(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\lim\limits_{a+0} T = 1 \Rightarrow \lim\limits_{a+0} (T-1) = 0$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in K_\varepsilon(A) \quad \Rightarrow \quad A - \varepsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ korlátos.}$$

$$\Rightarrow \lim_{a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1): \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) \right| < \varepsilon$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - A = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \le \underbrace{\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (T(x)-1) \right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1): \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$$

ii, $a \neq -\infty, A = \infty$ Láttuk:

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot T(x)$

$\lim\limits_{a+0} T = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1): T(x) > \dfrac{1}{2}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in K_\varepsilon(\infty) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in (a, x_0), \forall x \in (a, x_1): \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \infty = A$$

iii, $a \neq -\infty, A = -\infty$ Hasonló **ii,**-hez

iv, $a = -\infty$ Visszavezetjük az előzőre mint az előző tétel **ii,** részében. ■

14. Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Tétel: Ha $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(K(a))$, akkor

$\forall x \in K(a), \exists \xi \in (a,x) \cup (x,a) : f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Bizonyítás: Legyen $F(x) := f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$F(a) = f(a) - f(a) = 0$

$F'(x) = f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}$

$\Rightarrow F'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$

$F''(x) = f''(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k \cdot (k-1)(x-a)^{k-2}$

$F''(a) = f''(a) - f''(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad F^{(n)}(a) = 0, \quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$

Legyen $G(x) = (x-a)^{(n+1)} \Rightarrow G(a) = 0$

$G'(x) = (n+1)(x-a)^n \Rightarrow G'(a) = 0, ..., G''(a) = 0$

$\Rightarrow G^{(n)}(a) = 0, \quad G^{(n+1)}(a) = (n+1)!$

Alkalmazzuk a Cauchy középértéktételt: $\exists$ ilyen $\xi_1, \xi_2 ... \xi_{n+1}$

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{(n+1)}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = ... =$$

$$= \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Legyen $\xi = \xi_{n+1}$ ■

14.1. Egy elégséges feltétel arra, hogy egy függvény Taylor-sora előállítsa a függvényt.

Tétel: Tfh. $f \in \mathcal{D}^{\infty}(K(a))$ és $sup\{\left|f^{(n)}(x)\right| \quad n \in \mathbb{N}, x \in K(a)\} = M$ és $M < \infty$

Ekkor: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in K(a))$

Bizonyítás: $\exists \xi \in (a,x) : \left| f - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right| \leq$

$\leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ ■

15. A konvexitásra és az inflexiós pontra vonatkozó szükséges és elégséges feltételek többször differenciálható függvények esetében.

15.1. Konvexitásra

Tétel: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$

i, Ha $f \in \mathcal{D}(a, b)$, akkor

a, f konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow \quad (a, b)$-n

b, f szigorúan konvex $\Leftrightarrow f' \uparrow \quad (a, b)$-n

ii, Ha $f \in \mathcal{D}^2(a, b)$, akkor

a, f konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0 \quad (a, b)$-n

b, f szigorúan konvex $\Leftarrow f'' > 0 \quad (a, b)$-n

Bizonyítás: Elég **i,**-t bizonyítani

a, "$\Rightarrow$" Tfh. f konvex

Legyen $x_1 < x_2$ tetszőleges és $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$

$$\frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(y_2)-f(x_2)}{y_2-x_2}$$

$$\lim_{y_1 \to x_1+0} \frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1} = f'(x_1) \quad \text{és} \quad \lim_{y_2 \to x_2-0} \frac{f(y_2)-f(x_2)}{y_2-x_2} = f'(x_2) \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2) \Rightarrow f' \nearrow$$

"$\Leftarrow$" Tfh. $f' \nearrow$ Elég:

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, x \in (x_1, x_2) : f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$

Azaz $r(x) := f(x) - (\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad r(x_1) = 0, \quad r(x_2) = 0$

$\Rightarrow$ Rolle középértéktétel miatt: $\exists \xi \in (x_1, x_2) : r'(\xi) = 0$

$r'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \nearrow$

$\Rightarrow r' \leq 0 \quad (x_1, \xi)$-n $\quad \Rightarrow r \searrow \quad (x_1, \xi)$-n és

$r' \geq 0 \quad (\xi, x_2)$-n $\quad \Rightarrow r \nearrow \quad (\xi, x_2)$-n

$\Rightarrow r \leq 0 \quad (x_1, x_2)$-n

b, Hasonló ■

15.2. Inflexiós pontra

Tétel: $f : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

i, Ha f kétszer folytonosan deriválható és x_0 inflexiós pont, ekkor $f''(x_0) = 0$

ii, Ha f háromszor folytonosan deriválható és $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, ekkor x_0 inflexiós pont.

Bizonyítás: **i,** Indirekten Tfh. $f''(x_0) \neq 0$, pl: $f''(x_0) > 0$

f'' folytonos $\Rightarrow \exists K(x_0) : f'' > 0 \quad K(x_0)$-n

Taylor formula

$$n = 1 : \exists \xi : \underbrace{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}_{l(x)} = \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow l$ nem vált előjelet $\Rightarrow x_0$ nem inflexiós pont.

ii, Tfh. $f'''(x_0) > 0 \Rightarrow \exists K(x_0) : f''' > 0 \quad K(x_0)$-n

Taylor formula $n = 2$:

$$\exists \xi : l(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2) = \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}}_{>0} \cdot (x - x_0)^3 \quad x \in K(x_0)$$

A jobb oldal szigorúan előjelet vált $\quad \Rightarrow \quad x_0$ inflexiós pont. ■

16. A primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel.

Tétel: Ha I intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek $\exists$ primitív függvénye, akkor f Darboux tulajdonságú, azaz $\forall a, b \in I, a < b, \forall c \in (f(a), f(b)), \exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = c$

Bizonyítás: Tfh. $f(a) < f(b)$, legyen $f_1 = f - c$, f_1-nek is $\exists$ primitív függvénye, mégpedig

$F_1(x) = F(x) - cx$, ahol F az f primitív függvénye, hiszen $F_1'(x) = F'(x) - c = f(x) - c = f_1(x)$

Ekkor: $F_1'(a) = f_1(a) = f(a) - c < 0$

$F_1'(b) = f_1(b) = f(b) - c > 0$

$\Rightarrow F_1'(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{F_1(x) - F_1(a)}{x - a} = f_1(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0, \forall x \in (a, a + \delta) : \frac{F_1(x) - F_1(a)}{x - a} < 0$

itt $x - a > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in (a, a + \delta) : F_1(x) < F_1(a)$

$F_1'(b) = \lim\limits_{x \to b-0} \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} = f_1(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0, \forall x \in (b - \delta, b) : \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} > 0$

$x - b < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in (b - \delta, b) : F_1(x) < F_1(b) \quad \Rightarrow F_1 \in \mathcal{D}(I) \Rightarrow F_1 \in C[a, b]$

A Weierstrass-tétel miatt F_1-nek $\exists$ abszolút minimuma, azaz $\exists \xi \in [a, b] : F_1(\xi) = \min\limits_{[a,b]} F_1$

$\xi \neq a, \xi \neq b \Rightarrow \xi \in (a, b) \Rightarrow \xi$-ben lokális minimum $\Rightarrow F_1'(\xi) = 0 \Rightarrow f_1(\xi) = f(\xi) - c = 0$ ■

17. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegekkel.

Tétel: $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in F[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$

Bizonyítás: "$\Leftarrow$" Tfh. ε-hoz $\exists \tau : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$

$I^* f - I_* f < \varepsilon, \quad \varepsilon$ tetszőleges

$\Rightarrow I^* f = I_* f$

"$\Rightarrow$" Tfh. $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_1 \in F[a, b] : If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq If$

Hasonlóan: $\exists \tau_2 \in F[a, b] : If \leq S(f, \tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2}$

Legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \Rightarrow$

$If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq \underline{s(f, \tau)} \leq If \leq \underline{S(f, \tau)} \leq S(f, \tau_2) < If + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow S(f, \tau) - s(f, \tau) < \varepsilon$ ■

18. Az integrálhatóság jellemzése alsó és felső közelítő összegek határértékével

Tétel:

$f \in R[a, b]$ és $\int\limits_a^b f = I \Leftrightarrow \exists \tau_n : \lim s(f, \tau_n) = \lim S(f, \tau_n) = I$

Bizonyítás: "$\Rightarrow$" Tfh. $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in F[a, b] : If - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau) \leq S(f, \tau) < If + \frac{\varepsilon}{2}$

Legyen $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}, \quad \tau = \tau_n$

$$\underbrace{I - \frac{1}{n}}_{\to I} \leq \underbrace{s(f, \tau_n)}_{\to I} \leq \underbrace{S(f, \tau_n)}_{\to I} < \underbrace{I + \frac{1}{n}}_{\to I}$$

"$\Leftarrow$" Tfh. $\lim s(f, \tau_n) = \lim S(f, \tau_n) = I \Rightarrow I_* f = I^* f = I$ ■

19. Műveletek integrálható függvényekkel

Tétel: Tfh. $f, g \in R[a,b]$ Ekkor:

i, $f+g \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b f+g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$

ii, $\lambda \cdot f \in R[a,b]$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f \quad \lambda \in \mathbb{R}$

iii, $f \cdot g \in R[a,b]$

iv, Ha $|g(x)| \geq m > 0 \quad \forall x \in [a,b]$, akkor $\frac{f}{g} \in R[a,b]$

<u>**Bizonyítás:**</u> Legyen $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in F[a,b]$,

$F_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f, \quad f_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \quad G_i := \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} g \quad g_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} g$

i, $f_i + g_i \leq f(x) + g(x) \leq F_i + G_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow f_i + g_i \leq \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \leq \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \leq F_i + G_i \qquad / \cdot (x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow s(f,\tau) + s(g,\tau) \leq s(f+g,\tau) \leq S(f+g,\tau) \leq S(f,\tau) + S(g,\tau)$

Legyen $\tau_1, \tau_2 \in F[a,b]$ tetszőleges és $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

$\Rightarrow s(f,\tau_1) + s(g,\tau_2) \leq s(f,\tau) + s(g,\tau) \leq s(f+g,\tau) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq S(f+g,\tau) \leq$

$\leq S(f,\tau) + S(g,\tau) \leq S(f,\tau_1) + S(g,\tau_2) \quad / \cdot \sup\limits_{\tau_1}, \inf\limits_{\tau_1}, \sup\limits_{\tau_2}, \inf\limits_{\tau_2}$

$\Rightarrow I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g)$, Mivel $I_*(f) = I^*(f)$ (ugyanez g-re)

$\Rightarrow I_*(f+g) = I^*(f+g)$ és $\int\limits_a^b f+g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$

ii, Tfh. $\lambda \geq 0 \Rightarrow s(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot s(f,\tau) \qquad (\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} \lambda f = \lambda \cdot \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = \lambda \cdot I_*(f)$ Hasonlóan: $S(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot S(f,\tau) \Rightarrow I^*(\lambda f) = \lambda \cdot I^*(f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = I^*(\lambda f)$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f$

Tfh. $\lambda < 0$

$s(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot S(f,\tau) \Rightarrow I_*(\lambda f) = \lambda \cdot I^*(f)$ és $S(\lambda f,\tau) = \lambda \cdot s(f,\tau) \Rightarrow I^*(\lambda f) = \lambda \cdot I_*(f)$

$\Rightarrow I_*(\lambda f) = I^*(\lambda f)$ és $\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \cdot \int\limits_a^b f$

iii, Oszcillációs összeggel: Tfh. $f, g \geq 0 \quad [a,b]$-n

$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow f_i \cdot g_i \leq \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) \leq \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) \leq F_i \cdot G_i$

$\Omega(f \cdot g, \tau) = \sum\limits_{i=1}^n (\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g) - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f \cdot g)) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum\limits_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - F_i \cdot g_i + F_i \cdot g_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$= \sum\limits_{i=1}^n F_i (G_i - g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum\limits_{i=1}^n g_i (F_i - f_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

$f \in R[a,b] \Rightarrow f$ korlátos $\Rightarrow F_i \leq M$ és $g_i \leq M \quad \forall i = 1, ..., n$

$\Rightarrow \Omega(f \cdot g, \tau) \leq M \cdot \Omega(g, \tau) + M \cdot \Omega(f, \tau)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_1 : \Omega(g, \tau_1) < \varepsilon$ és $\forall \varepsilon > 0, \exists \tau_2 : \Omega(f, \tau_2) < \varepsilon$

Legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \Rightarrow \Omega(g, \tau) \leq \Omega(g, \tau_1) < \varepsilon$ Hasonlóan: $\Omega(f, \tau) \leq \Omega(f, \tau_2) < \varepsilon$

$\Rightarrow \Omega(f \cdot g, \tau) < 2\varepsilon M \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$

Ha f és g tetszőleges, akkor legyen $m_f := \inf\limits_{[a,b]} f, \quad m_g := \inf\limits_{[a,b]} g \Rightarrow \underbrace{f - m_f}_{\in R[a,b]} \geq 0, \quad \underbrace{g - m_g}_{\in R[a,b]} \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{(f - m_f)(g - m_g)}_{\in R[a,b]} = f \cdot g \underbrace{- g \cdot m_f - f \cdot m_g + m_f \cdot m_g}_{\in R[a,b]} \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$

iv, Elég: $\frac{1}{g} \in R[a, b]$

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x) \cdot g(y)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2} \Rightarrow \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

$\Rightarrow \Omega(\frac{1}{g}, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{1}{m^2} \Omega(g, \tau)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau, \Omega(g, \tau) < \varepsilon \Rightarrow \Omega(\frac{1}{g}, \tau) \leq \frac{\varepsilon}{m^2}$ ■

20. Folytonos függvény integrálható

Tétel: Ha $f \in C[a, b]$, ekkor $f \in R[a, b]$

Bizonyítás: Ha $f \in C[a, b] \Rightarrow$ Heine tétel miatt f egyenletesen folytonos, azaz

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Legyen $\tau \in F[a, b]$ olyan, hogy $|\tau| < \delta$

$\Omega(f, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f)(x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{\sup\limits_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)|}_{< \varepsilon} \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \cdot (b - a)$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$ ■

21. Monoton függvény integrálható

Tétel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, ekkor $f \in R[a, b]$

Bizonyítás: Tfh. $f \nearrow$

$\Omega(f, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Tfh. $|\tau| < \delta \Rightarrow \Omega(f, \tau) \leq \delta \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$

Ha a $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \Rightarrow f \in R[a, b]$ ■

22. Newton-Leibniz-tétel

Tétel: Ha $f \in R[a,b]$ és f-nek $\exists F$ primitív függvénye, akkor: $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

Bizonyítás: Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\} \in F[a,b]$

$\Rightarrow F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + ... + F(x_1) - F(x_0) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))$ Alkalmazzuk a Lagrange középértéktételt az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon

$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] : F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$\Rightarrow s(f,\tau) \leq F(b) - F(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})) \leq S(f,\tau)$ /sup a bal oldalon és inf a jobb oldalon

$\Rightarrow I_* f \leq F(b) - F(a) \leq I^* f$ Mivel $I_* f = I^* f = \int\limits_a^b f \Rightarrow F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f$ $\blacksquare$

23. A differenciál- és integrálszámítás alaptétele

Tétel: Legyen $f \in R[a,b], x_0 \in [a,b], F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f \quad (x \in [a,b])$, ekkor:

i, $F \in C[a,b]$

ii, Ha $f \in C(d)$, akkor $F \in D(d)$ és $F'(d) = f(d) \quad (d \in [a,b])$

Bizonyítás: **i,** $f \in R[a,b] \Rightarrow f$ korlátos $\Rightarrow \exists M : |f| \leq M$

$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_2} f - \int\limits_{x_0}^{x_1} f \right| = \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f \right| \leq \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} |f| \right| \leq M \cdot |x_2 - x_1| \Rightarrow x_2 \to x_1 \Rightarrow F(x_2) \to F(x_1)$

$\Rightarrow F \in C(x_1) \quad x_1$ tetszőleges

ii, Igazolni kell, hogy $f(d) = F'(d) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(d+h) - F(d)}{h}$, azaz $\lim\limits_{h \to 0} \left| \frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right| = 0$

$$\left| \frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} f(t)dt - f(d) \right| = \left| \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} f(t) - f(d)dt \right| \leq \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} |f(t) - f(d)|dt$$

$f \in C(d) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in [a,b], |t - d| < \delta : |f(t) - f(d)| < \varepsilon$

Legyen $|h| < \delta \Rightarrow |t - d| \leq |h| < \delta \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |h| < \delta : \left| \frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \left| \frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) \right| = 0$ $\blacksquare$