Definíciók és tételek
Analízis 1.
Programtervező informatikus szak
2017-2018. tanév tavaszi félév

• Egyenlőtlenségek

1. Mondja ki a háromszög-egyenlőtlenségeket.

Válasz. Minden a és b valós számra

(a) $|\,a+b\,| \le |\,a\,| + |\,b\,|$,

(b) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |\,a-b\,|$.

2. Hogyan szól a Bernoulli-egyenlőtlenség?

Válasz. Minden $h \ge -1$ valós számra és minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$(1+h)^n \ge 1 + nh.$$

Ezekre a h és n értékekre egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h = 0$, vagy $n = 0$, vagy $n = 1$.

3. Fogalmazza meg a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Válasz. Legyen $n \ge 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti *nemnegatív* valós szám. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

• Valós számok

4. Mit mond ki a *teljességi axióma*?

Válasz. Ha $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset, B \ne \emptyset$ és $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$ esetén $a \le b$, akkor

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R},\ \text{hogy}\ \ \forall\, a \in A \text{ és } \forall\, b \in B\ \ \text{esetén}\ \ a \le \xi \le b.$$

5. Mit jelent az, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz induktív?

Válasz. $H \subset \mathbb{R}$ induktív halmaz, ha $0 \in H$, továbbá, ha $x \in H$, akkor $x + 1 \in H$.

6. Hogyan értelmezi a természetes számok halmazát?

Válasz. $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív részhalmaza $\mathbb{R}$-nek.

7. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét.

Válasz. Legyen $A(n)$ egy állítás minden $n \in \mathbb{N}$-re. Tegyük fel, hogy

(i) $A(0)$ igaz és

(ii) ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz $(n \in \mathbb{N})$.

Ekkor $A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$-re.

8. Mikor van egy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak *maximuma*?

Válasz. Ha $\exists\, \alpha \in H$, amelyre $\forall\, x \in H$ esetén $x \leq \alpha$.

9. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak *nincs maximuma*.

Válasz. $\forall\, \alpha \in H$-hoz $\exists\, x \in H$, hogy $x > \alpha$.

10. Mikor van egy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak *minimuma*?

Válasz. Ha $\exists\, \beta \in H$, amelyre $\forall\, x \in H$ esetén $\beta \leq x$.

11. Mikor felülről korlátos egy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz?

Válasz. Ha $\exists\, K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, a \in H$ esetén $a \leq K$.

12. Fogalmazza meg a szuprémum elvet.

Válasz. Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz, akkor H felső korlátai között van legkisebb.

13. Mi a szuprémum definíciója?

Válasz. A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz szuprémuma H legkisebb felső korlátja, azaz

$$\sup H := \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

14. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$.

Válasz. A $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$ egyenlőség a következőkkel ekvivalens:

(i) $\forall\, x \in H$ esetén $x \leq \xi$ és

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, x \in H$, amelyre $\xi - \varepsilon < x$.

15. Mi az infimum definíciója?

Válasz. A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz infimuma H legnagyobb alsó korlátja, azaz

$$\inf H := \max\{k \in \mathbb{R} \mid k \text{ alsó korlátja } H\text{-nak}\}.$$

16. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$.

Válasz. A $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$ egyenlőség a következőkkel ekvivalens:

(i) $\forall\, x \in H$ esetén $\xi \leq x$ és

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, x \in H$, amelyre $x < \xi + \varepsilon$.

17. Írja le az Arkhimédész-tételt.

Válasz. $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$ valós számokhoz $\exists\, n \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $b < na$.

18. Mit állít a Cantor-féle közösrész-tétel?

Válasz. Tegyük fel, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N}$ természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

- **Függvények**

19. Mit jelent az $f \in A \to B$ szimbólum?

Válasz. Az $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$ halmaz esetén az $f \in A \to B$ szimbólum egy olyan függvényt jelent, amelyre $\mathcal{D}_f \subset A$ és $\mathcal{R}_f \subset B$.

20. Mit jelent az $f : A \to B$ szimbólum?

Válasz. Az $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$ halmaz esetén az $f : A \to B$ szimbólum egy olyan függvényt jelent, amelyre $\mathcal{D}_f = A$ és $\mathcal{R}_f \subset B$.

21. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *képét*?

Válasz. Legyen $f : A \to B$ függvény. A $C \subset A$ halmaz f által létesített képe az

$$f[C] := \{f(x) \in B \mid x \in C\} \subset B$$

halmaz (speciálisan $f[\emptyset] := \emptyset$).

22. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *ősképét*?

Válasz. Legyen $f : A \to B$ függvény. A $D \subset B$ halmaz f által létesített ősképe az

$$f^{-1}[D] := \{x \in A \mid f(x) \in D\} \subset A$$

halmaz (speciálisan $f^{-1}[\emptyset] := \emptyset$).

23. Mikor nevezünk egy függvényt *invertálhatónak*?

Válasz. Az $f : A \to B$ függvény invertálható, ha f különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékeket rendel, azaz

$$\forall\, x, y \in \mathcal{D}_f, \quad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y).$$

24. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer az invertálhatóságra?

Válasz. Az $f : A \to B$ függvény akkor és csak akkor invertálható, ha

$$\forall\, x, y \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

25. Definiálja az inverz függvényt.

Válasz. Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. f inverz függvénye az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y$$

függvény.

26. Írja le az *összetett függvény* fogalmát.

Válasz. Legyen $f : A \to B$, $g : C \to D$ és tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$, azaz

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ekkor f és g összetett függvénye az

$$f \circ g : \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \quad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

függvény.

• Valós sorozatok, elemi tulajdonságok

27. Definiálja a következő fogalmakat: *valós sorozat*, sorozat n-edik *tagja*, *index.*

Válasz. Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt *valós sorozatnak* (röviden *sorozatnak*) nevezünk. Ennek a függvénynek az $n \in \mathbb{N}$ helyen felvett $a(n)$ helyettesítési értékét az a sorozat *n-edik tagjának* mondjuk és az a_n szimbólummal jelöljük. Az n szám az a_n tag *indexe.*

28. Mit jelent az, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *felülről korlátos*?

Válasz. $\exists\ K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \leq K$.

29. Mit jelent az, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *alulról korlátos*?

Válasz. $\exists\ k \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ n \in \mathbb{N}$ indexre $k \leq a_n$.

30. Mit jelent az, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *korlátos*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos, azaz $\exists\ K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ n \in \mathbb{N}$ indexre $|a_n| \leq K$.

31. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *monoton növő*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *monoton növő*, ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \leq a_{n+1}$.

32. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *szigorúan monoton növő*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *szigorúan monoton növő*, ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n < a_{n+1}$.

33. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *monoton csökkenő*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *monoton csökkenő*, ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \geq a_{n+1}$.

34. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *szigorúan monoton csökkenő*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *szigorúan monoton csökkenő*, ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n > a_{n+1}$.

35. Hogyan definiálja egy sorozat *részsorozatát*?

Válasz. Legyen $a = (a_n)$ sorozat és $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növő sorozat (azaz ν egy *indexsorozat*). Ekkor az $a \circ \nu$ függvény is sorozat, amelyet az a sorozat *ν indexsorozat által meghatározott részsorozatának* nevezünk.
Így az $a \circ \nu$ sorozat n-edik tagja:

$$\big(a \circ \nu\big)_n = \big(a \circ \nu\big)(n) = a(\nu_n) = a_{\nu_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz $a \circ \nu = \big(a_{\nu_n}\big)$.

36. Milyen tételt tud mondani valós sorozatok és monoton sorozatok viszonyáról?

Válasz. Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós sorozatnak van monoton részsorozata, azaz létezik olyan ν indexsorozat, amellyel az $a \circ \nu$ sorozat monoton növő, vagy monoton csökkenő.

37. Mit értettünk egy valós sorozat *csúcsán*?

Válasz. a_{n_0} az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *csúcsa*, ha $\forall\, n \geq n_0$ esetén $a_{n_0} \geq a_n$.

• Konvergens sorozatok

38. Mikor nevezünk egy (a_n) valós sorozatot *konvergensnek*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat ***konvergens***, ha

$\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ekkor az A valós számot a sorozat ***egy határértékének*** nevezzük.

39. Definiálja egy konvergens sorozat *határértékét*.

Válasz. Ha az $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor egyértelműen létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, amellyel $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon$. Ezt az A számot az (a_n) sorozat ***határértékének*** nevezzük.

40. Mit jelent az, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *divergens*?

Válasz. Az (a_n) sorozat ***divergens***, ha ***nem konvergens***, azaz

$$\forall\ A \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\ \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ indexhez } \exists\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

41. Milyen állítást ismer sorozatok esetén a konvergencia és a korlátosság kapcsolatáról?

Válasz. Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor korlátos is.

42. Mit tud mondani konvergens sorozatok részsorozatainak a konvergenciájáról?

Válasz. Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor tetszőleges ν indexsorozat esetén az $a \circ \nu$ részsorozat is konvergens és $\lim (a \circ \nu) = \lim a$.

43. Mi a *nullasorozat* definíciója?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ***nullasorozat***, ha a határértéke 0, azaz ha

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \text{ indexre } |a_n| < \varepsilon.$$

44. Milyen műveleti tételeket ismer a nullasorozatokra?

Válasz. 1^o Ha (a_n) és (b_n) nullasorozat, akkor $(a_n + b_n)$ is nullasorozat.
2^o Ha (a_n) nullasorozat és (c_n) korlátos sorozat, akkor $(a_n\, c_n)$ nullasorozat.
3^o Ha (a_n) és (b_n) nullasorozat, akkor $(a_n\, b_n)$ is nullasorozat.

45. Milyen műveleti tételeket ismer konvergens sorozatokra?

Válasz. Ha az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens és $\lim (a_n) =: A \in \mathbb{R}$, $\lim (b_n) =: B \in \mathbb{R}$, akkor

1^o az $(a_n + b_n)$ összegsorozat is konvergens és $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

2^o az $(a_n b_n)$ szorzatsorozat is konvergens és $\lim (a_n b_n) = A \cdot B$,

3^o ha még $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $B \neq 0$ is teljesül, akkor
az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ hányadossorozat is konvergens és $\lim \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{A}{B}$.

46. Milyen állítást ismer a (q^n) mértani sorozat *konvergenciájával* és határértékével kapcsolatosan?

Válasz. A (q^n) mértani sorozat *konvergens*, akkor és csak akkor, ha $|q| < 1$ vagy $q = 1$. Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$

47. Milyen nevezetes sorozatokat tekintettünk a nagyságrendi kérdésekkel kapcsolatosan?

Válasz. 1^o Ha $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0.$

2^o Ha $k \in \mathbb{N}$ és $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0.$

3^o Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

4^o $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

48. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat határértéke $(+\infty)$?

Válasz. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff$

$\forall\ P \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ indexre $a_n > P$.

49. Mi a definíciója annak, hogy az (a_n) sorozatnak $(-\infty)$ a határértéke?

Válasz. $\lim(a_n) = -\infty \iff \forall\ P \in \mathbb{R} \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad a_n < P.$

50. Definiálja az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $r > 0$ *sugarú környezetét.*

Válasz. Az $A \in \mathbb{R}$ valós szám $r > 0$ sugarú környezetén a

$$K_r(A) := (A - r,\ A + r)$$

intervallumot értjük. Az $A = +\infty$ elem $r > 0$ sugarú környezete a

$$K_r(+\infty) := \left(\tfrac{1}{r}, +\infty\right),$$

az $A = -\infty$ elemé pedig a

$$K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\tfrac{1}{r}\right)$$

intervallum.

51. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*?

Válasz. Azt, hogy a sorozat *konvergens*, vagy *plusz végtelenhez*, vagy pedig *mínusz végtelenhez* tart. Ez azzal egyenértékű, hogy

$\exists\ A \in \overline{\mathbb{R}}$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :$ indexre $a_n \in K_\varepsilon(A)$.

52. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet.

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n), a (b_n) és a (c_n) valós sorozatokra teljesülnek a következők:

(a) $\exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N$ indexre $a_n \leq b_n \leq c_n$;

(b) $\exists \lim(a_n)$, $\exists \lim(c_n)$ és $\lim(a_n) = \lim(c_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor a közrefogott (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

53. Milyen állításokat ismer a határérték és a rendezés között?

Válasz. Tegyük fel, hogy az $(a_n), (b_n)$ sorozatoknak van határértékük és

$$\lim (a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim (b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1^o ha $A > B$, akkor $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \ge N,\ n \in \mathbb{N}:\ a_n > b_n$.

2^o ha $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \ge N,\ n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \ge b_n$, akkor $A \ge B$.

54. Mondja ki a monoton sorozatok konvergenciájára és határértékére vonatkozó állításokat.

Válasz. Minden monoton sorozatnak van határértéke.

1^o Ha az (a_n) sorozat *monoton növekedő* és *felülről korlátos* [monoton csökkenő és alulról korlátos], akkor konvergens, és

$$\lim (a_n) = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R} \quad [\lim (a_n) = \inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R}].$$

2^o Ha az (a_n) sorozat *monoton növekedő* és *felülről nem korlátos* [monoton csökkenő és alulról nem korlátos], akkor

$$\lim (a_n) = +\infty \qquad [\lim (a_n) = -\infty].$$

55. Hogyan értelmeztük az e számot?

Válasz. Az $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. e-vel jelöljük ennek a sorozatnak a határértékét:

$$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

56. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak *van határértéke*, és

$$\lim (a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim (b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az $(a_n b_n)$ szorzatsorozatnak is van határértéke, és $\lim (a_n b_n) = AB$, feltéve hogy AB értelmezve van.

57. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sorozatoknak *van határértéke*, és

$$\lim (a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim (b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az (a_n/b_n) hányadossorozatnak is van határértéke, és $\lim (a_n/b_n) = A/B$, feltéve hogy A/B értelmezve van.

58. Fogalmazza meg a *Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt.*

Válasz. Minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.

59. Definiálja a *Cauchy-sorozatot.*

Válasz. Az (a_n) sorozat Cauchy-sorozat, ha
$\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$ indexre $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

60. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

Válasz. Egy valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

61. Milyen állítást ismer a (q^n) mértani sorozat határértékével kapcsolatosan?

Válasz.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ = 1, & \text{ha } q = 1 \\ = +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

62. Milyen konvergenciatételt tanult az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ $(a > 0)$ sorozatról?

Válasz. Bármely $0 < a \in \mathbb{R}$ esetén az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat konvergens és $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.

63. Milyen konvergenciatételt tanult az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozatról?

Válasz. Az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat konvergens és $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$.

64. Fogalmazza meg egy valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, akkor $\forall\, A \geq 0 \;\; \exists!\;\, \alpha \geq 0 : \;\; \alpha^m = A$.

65. Legyen $A > 0, 1 < m \in \mathbb{N}$. Melyik az a sorozat, amelynek határértéke $\sqrt[m]{A}$?

Válasz.

$$\begin{cases} x_0 > 0, \\ x_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

• Végtelen sorok

66. Mi a végtelen sor definíciója?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot nevezzük az (a_n) sorozat által generált ***végtelen sornak***, aminek a jelölésére a $\sum a_n$ szimbólumot használjuk.

67. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?

Válasz. A $\sum a_n$ sor ***konvergens***, ha a részletösszegeinek az $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata konvergens. A $\lim(s_n)$ számot nevezzük a ***sor összegének***, amit így jelölünk:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

68. Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0} q^n$ *geometriai sor* konvergenciájáról?

Válasz. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor $\frac{1}{1-q}$ az összege.

69. Mi a *teleszkópikus sor* és mi az összege?

Válasz. A $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ sor és az összege $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

70. Mi a *harmonikus sor*, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?

Válasz. A $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ sor, ami divergens.

71. Milyen állítást ismer a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *hiperharmonikus sor* konvergenciájával kapcsolatban?

Válasz. A sor $1 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, ha $\alpha \leq 1$ valós szám, akkor pedig divergens.

72. Hogyan szól a *Cauchy-kritérium végtelen sorokra*?

Válasz. A $\sum a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0 : \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

73. Mondjon szükséges feltételt arra nézve, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen.

Válasz. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor $\lim (a_n) = 0$.

74. Igaz-e az, hogy ha $\lim (a_n) = 0$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens? (A válaszát indokolja meg!)

Válasz. Nem igaz, ui. a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens és $\lim(\frac{1}{n}) = 0$.

75. Mikor nevez egy végtelen számsort abszolút konvergensnek?

Válasz. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, ha a $\sum |a_n|$ végtelen sor konvergens.

76. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyik konvergens, de nem abszolút konvergens.

Válasz. $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

77. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat.*

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n), $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq N : \quad 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor:

1^o ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens (*majoráns kritérium*);

2^o ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens (*minoráns kritérium*).

78. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *Cauchy-féle gyökkritériumot.*

Válasz. Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és tegyük fel, hogy létezik az $A := \lim\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big) \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor:

1^o ha $0 \le A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;

2^o ha $A > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens;

3^o ha $A = 1$, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is.

79. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *D'Alembert-féle hányadoskritériumot.*

Válasz. Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és tegyük fel, hogy $a_n \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, továbbá létezik az $A := \lim\big(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\big) \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor:

1^o ha $0 \le A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;

2^o ha $A > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens;

3^o ha $A = 1$, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is.

80. Mik a *Leibniz-típusú sorok* és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?

Válasz. Ha $0 \le a_{n+1} \le a_n \ (n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ sort nevezzük Leibniz-típusú sornak. Ezek akkor és csak akkor konvergensek, ha $\lim(a_n) = 0$. Ha $A := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, akkor

$$\Big|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\Big| \le a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

81. Milyen állítást tanult valós számok tizedestört-alakjával kapcsolatban?

Válasz. Tetszőleges $\alpha \in [0, 1]$ számhoz van olyan $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}$ sorozat, amellyel $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$

82. Hogyan értelmezi egy végtelen sor *zárójelelezését*?

Válasz. Tekintsük az (a_n) sorozat által generált $\sum_{n=1} a_n$ végtelen sort. Legyen adott az (m_n) indexsorozat és tegyük fel, hogy $m_0 = 0$. Ekkor a $\sum_{n=1} a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott *zárójelezésén* a $\sum_{n=1} \alpha_n$ végtelen sort értjük, ahol

$$\alpha_n := \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

83. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1} a_n$ végtelen sor konvergens. Mit tud mondani a szóban forgó sor $\sum_{n=1} \alpha_n$ zárójelezéseinek a konvergenciájáról?

Válasz. Ha a $\sum_{n=1} a_n$ végtelen sor konvergens, akkor bármely $\sum_{n=1} \alpha_n$ zárójelezett sora is konvergens és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n.$$

84. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor valamely $\sum \alpha_n$ zárójelezett sora konvergens. Milyen feltételek mellett konvergens a $\sum a_n$ végtelen sor?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sorra és az (m_n) indexsorozatra teljesülnek a következő feltételek:

1^o $m_0 = 0$ és $(m_{n+1} - m_n)$ korlátos sorozat;

2^o $\lim(a_n) = 0$,

3^o a $\sum a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott $\sum \alpha_n$ zárójelezése konvergens.

Ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor is konvergens.

85. Hogyan értelmezi egy végtelen sor *átrendezését*?

Válasz. Legyen $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijekció, $\sum\limits_{n=0} a_n$ pedig egy végtelen sor. Ekkor a $\sum\limits_{n=0} a_n$ sor (p_n) által meghatározott *átrendezésén* a

$$\sum_{n=0} a_{p_n} = a_{p_0} + a_{p_1} + a_{p_2} + \cdots$$

végtelen sort értjük.

86. Milyen állítást ismer *abszolút konvergens* sorok *átrendezéseit* illetően?

Válasz. Ha a $\sum\limits_{n=0} a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor minden $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció esetén a $\sum\limits_{n=0} a_{p_n}$ átrendezése is abszolút konvergens és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{p_n}$.

87. Fogalmazza meg a *feltételesen konvergens* sorok átrendezésére vonatkozó *Riemann-tételt.*

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} a_n$ végtelen sor feltételesen konvergens (vagyis konvergens, de nem abszolút konvergens). Ekkor

1^o $\forall\ A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén $\exists\ \sum\limits_{n=0} a_{p_n}$ átrendezés, hogy $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = A$;

2^o $\exists\ \sum\limits_{n=0} a_{p_n}$ átrendezés, ami divergens.

88. Definiálja a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ végtelen sorok *téglányszorzatát.*

Válasz. A $\sum\limits_{n=0} t_n$ végtelen sor, ahol $t_n := \sum\limits_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j$ $(n \in \mathbb{N})$.

89. Definiálja a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ végtelen sorok *Cauchy-szorzatát.*

Válasz. A $\sum\limits_{n=0} c_n$ végtelen sor, ahol $c_n := \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$ $(n \in \mathbb{N})$.

90. Milyen tételt ismer végtelen sorok *téglányszorzatának* a konvergenciáját illetően?

Válasz. Ha a $\sum\limits_{n=0} a_n$ és a $\sum\limits_{n=0} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=0} t_n$ *téglányszorzatuk* is konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

91. Adjon meg olyan végtelen sorokat, amelyek Cauchy-szorzata divergens.

Válasz. A $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergens sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens.

92. Fogalmazza meg az *abszolút konvergens* sorok szorzatára vonatkozó *Cauchy-tételt.*

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} a_n$ és a $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok mindegyike *abszolút konvergens.* Ekkor

(a) a $\sum\limits_{n=0} t_n$ téglányszorzatuk is abszolút konvergens,

(b) a $\sum\limits_{n=0} c_n$ Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens,

(c) az összes $a_i b_j$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ szorzatból *tetszés szerinti* sorrendben képzett $\sum\limits_{n=0} d_n$ végtelen sor is abszolút konvergens, és az összeg mindegyik esetben a tényezők összegeinek a szorzata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

93. Fogalmazza meg a *Mertens-tételt.*

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok konvergensek és legalább az egyikük abszolút konvergens. Ekkor a $\sum\limits_{n=0} c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

• Hatványsorok

94. Írja le a *hatványsor* definícióját.

Válasz. Az $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

végtelen sort a középpontú, (α_n) együtthatós *hatványsornak* nevezzük.

95. Hogyan szól a hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel?

Válasz. Tetszőlegesen megadott (α_n) sorozattal és $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmazára a következő három egymást kizáró esetek egyike érvényes:

(a) $\exists!\, R > 0$ valós szám, hogy a hatványsor $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, ha $|x-a| < R$ és divergens, ha $|x-a| > R$;

(b) a hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens (legyen ekkor $R := 0$);

(c) a hatványsor $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens (ekkor $R := +\infty$).

$0 \le R \le +\infty$ a hatványsor *konvergenciasugara.*

96. Fogalmazza meg a *Cauchy–Hadamard-tételt.*

Válasz. Tekintsük a $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort, és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

$$R := \begin{cases} \dfrac{1}{A}, & \text{ha } 0 < A < +\infty \\ 0, & \text{ha } A = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } A = 0 \end{cases}$$

a hatványsor konvergenciasugara. Ez azt jelenti, hogy

(a) ha $0 < R < +\infty$, akkor a hatványsor $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, ha $|x-a| < R$ és divergens, ha $|x-a| > R$;

(b) ha $R = 0$, akkor a hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens;

(c) ha $R = +\infty$, akkor a hatványsor $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens.

97. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1,1)$ intervallum.

Válasz. $\sum\limits_{n=0} x^n.$

98. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1,1]$ intervallum.

Válasz. $\sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n.$

99. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1,1)$ intervallum.

Válasz. $\sum\limits_{n=0} \dfrac{x^n}{n}.$

100. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1,1]$ intervallum.

Válasz. $\sum\limits_{n=0} \dfrac{x^n}{n^2}.$

101. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyik csak az $a = 2$ pontban konvergens.

Válasz. $\sum\limits_{n=0} n^n (x-2)^n.$

102. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek $\mathbb{R}$ a konvergenciahalmaza.

Válasz. $\sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{n^n} x^n.$

• Függvény határértéke

103. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Válasz. Az a bármely környezetében végtelen sok H-beli elem van.

104. Mivel egyenlő az $\mathbb{R}'$, a $\mathbb{Q}'$ és az $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N}\right\}\right)'$ halmaz?

Válasz. $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$ és $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N}\right\}\right)' = \{0\}$.

105. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \mathcal{D}_f'$ helyen van határértéke?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *van határértéke*, ha

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

106. Adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mit jelent a $\lim\limits_a f = A$ egyenlőség?

Válasz. $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in k_\varepsilon(A).$

107. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$, $\ A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

108. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) > P.$$

109. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ +\infty \in \mathcal{D}_f'$, $\ A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = A \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x_0 > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

110. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \ \exists\, x_0 > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad f(x) > P.$$

111. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \iff \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty} (f(x_n)) = A.$$

112. Fogalmazza meg függvények határértékére vonatkozó közrefogási elvet.

113. Milyen műveleti tételeket ismer függvények határértékére vonatkozóan?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)'$ és léteznek az

$$A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}, \quad B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$$

határértékek.

Ekkor

1^o az $f+g$ összegfüggvénynek is van határértéke az a pontban és

$$\lim_a (f+g) = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van;

2^o az fg szorzatfüggvénynek is van határértéke az a pontban és

$$\lim_a (f\,g) = A\,B,$$

feltéve, hogy az $A\,B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van;

3^o az f/g hányadosfüggvénynek is van határértéke az a pontban és

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $A/B \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

114. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in K_R(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_b f$ határérték és

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

115. Definiálja függvény jobb oldali határértékét.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az *a helyen létezik a jobb oldali határértéke*, ha a

$$g(x) := f(x) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)$$

függvénynek a-ban van határértéke. Ezt a határértéket az f függvény *a helyen vett jobb oldali határértékének* nevezzük és így jelöljük:

$$\lim_{a+0} f := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

• Függvények folytonossága

116. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.

Válasz. Egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\; |x-a| < \delta : \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

117. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Válasz. Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor $f \in C\{a\} \iff \exists \lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f = f(a)$.

118. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

Válasz. Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden pontjában folytonos.

119. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

Válasz. $f \in C\{a\} \iff \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\; \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

120. Fogalmazza meg a hányadosfüggvény pontbeli folytonosságára vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $f, g \in C\{a\}$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C\{a\}$.

121. Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?

Válasz. $g \in C\{a\},\; f \in C\{g(a)\} \Longrightarrow f \circ g \in C\{a\}$.

122. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

Válasz. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n, akkor f korlátos $[a, b]$-n.

123. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f-nek létezik abszolút maximum- és abszolút minimumhelye, azaz

$$\exists\, \alpha, \beta \in [a, b] : \quad f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha) \big(\forall\, x \in [a, b]\big).$$

124. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $(a < b, a, b \in \mathbb{R})$. Ha f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$ pont, amelyre $f(\xi) = 0$.

125. Mit mond ki a *Bolzano–Darboux-tétel*?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és $f(a) \neq f(b)$. Ekkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-n, azaz ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\quad \exists\, \xi \in (a, b) : \quad f(\xi) = c$.

126. Mit jelent az, hogy egy f függvény *Darboux-tulajdonságú*?

Válasz. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *Darboux-tulajdonságú I-n*, ha minden $a, b \in I$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$-ben.

127. Milyen állítást ismer az inverz függvény folytonosságáról?

Válasz. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és invertálható. Ekkor az f^{-1} inverz függvény folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon.