Számításelmélet

1. előadás

előadó: Kolonits Gábor
kolomax@inf.elte.hu

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betűk**nek nevezzük.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betű**knek nevezzük.

Egy V ábécé elemeiből képzett véges sorozatokat **V feletti szavaknak** vagy sztringeknek nevezzük. Egy $u = t_1 \cdots t_n$ szóban lévő betűk számát (n) a szó **hosszának** nevezzük. Jelölés: $|u| = n$.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betű**knek nevezzük.

Egy V ábécé elemeiből képzett véges sorozatokat **V feletti szavaknak** vagy sztringeknek nevezzük. Egy $u = t_1 \cdots t_n$ szóban lévő betűk számát (n) a szó **hosszának** nevezzük. Jelölés: $|u| = n$. A 0 hosszú sorozat jelölése ε, ezt **üres szónak** nevezzük ($|\varepsilon| = 0$).

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betűk**nek nevezzük.

Egy V ábécé elemeiből képzett véges sorozatokat **V feletti szavaknak** vagy sztringeknek nevezzük. Egy $u = t_1 \cdots t_n$ szóban lévő betűk számát (n) a szó **hosszának** nevezzük. Jelölés: $|u| = n$.
A 0 hosszú sorozat jelölése ε, ezt **üres szónak** nevezzük ($|\varepsilon| = 0$).
V^* jelöli a **V ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betűk**nek nevezzük.

Egy V ábécé elemeiből képzett véges sorozatokat **V feletti szavaknak** vagy sztringeknek nevezzük. Egy $u = t_1 \cdots t_n$ szóban lévő betűk számát (n) a szó **hosszának** nevezzük. Jelölés: $|u| = n$.
A 0 hosszú sorozat jelölése ε, ezt **üres szónak** nevezzük ($|\varepsilon| = 0$).
V^* jelöli a **V ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ a **V ábécé feletti, nemüres szavak halmazát** jelöli.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Ábécé: Egy véges, nemüres halmaz.
Az ábécé elemeit **betűk**nek nevezzük.

Egy V ábécé elemeiből képzett véges sorozatokat **V feletti szavaknak** vagy sztringeknek nevezzük. Egy $u = t_1 \cdots t_n$ szóban lévő betűk számát (n) a szó **hosszának** nevezzük. Jelölés: $|u| = n$.
A 0 hosszú sorozat jelölése ε, ezt **üres szónak** nevezzük ($|\varepsilon| = 0$).
V^* jelöli a **V ábécé feletti szavak halmazát**, beleértve az üres szót is.

$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ a **V ábécé feletti, nemüres szavak halmazát** jelöli.

Példa: $V = \{a, b\}$, ekkor
$V^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$. Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$. Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$. Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$. Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$. Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$. Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó
- $L \subseteq V^*$ vagy $L \in \mathcal{P}(V^*)$: nyelv

Alapfogalmak, jelölések – Ismétlés

Legyen V egy ábécé, V^* egy L részhalmazát V feletti **nyelvnek** nevezzük.

Az üres nyelv (nyelv, amely egyetlen szót sem tartalmaz) jelölése $\emptyset$. Egy V ábécé feletti nyelv véges nyelv, ha véges számú szót tartalmaz, ellenkező esetben végtelen.

Ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz hatványhalmazát, azaz $\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$.

Nyelvcsalád (vagy nyelvosztály) alatt nyelveknek egy halmazát értjük.

Tehát ha V egy ábécé:

- $a \in V$: betű
- $u \in V^*$: szó
- $L \subseteq V^*$ vagy $L \in \mathcal{P}(V^*)$: nyelv
- $\mathcal{L} \subseteq P(V^*)$ vagy $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(V^*))$: nyelvcsalád

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ rendezett négyest **grammatikának** nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ rendezett négyest **grammatikának** nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.
- $S \in N$ a grammatika **kezdőszimbóluma**.

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ rendezett négyest **grammatikának** nevezünk ha

- N és T diszjunkt véges ábécék (azaz $N \cap T = \emptyset$). N elemeit **nemterminális**, T elemeit pedig **terminális** szimbólumoknak nevezzük.
- $S \in N$ a grammatika **kezdőszimbóluma**.
- A P **szabályrendszer** $x \to y$ alakú szabályok véges halmaza, ahol $x \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*, y \in (N \cup T)^*$.

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. A v szó közvetlenül vagy **egy lépésben levezethető** az u szóból G -ben, jelölése $u \Rightarrow_G v$, ha $u = u_1xu_2$ és $v = u_1yu_2$,ahol $u_1, u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \rightarrow y \in P$.

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. A v szó közvetlenül vagy **egy lépésben levezethető** az u szóból G -ben, jelölése $u \Rightarrow_G v$, ha $u = u_1 x u_2$ és $v = u_1 y u_2$,ahol $u_1, u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \rightarrow y \in P$.

u-ból (több lépésben vagy közvetetten) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geqslant 1$ és $w_0, \ldots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. A v szó közvetlenül vagy **egy lépésben levezethető** az u szóból G -ben, jelölése $u \Rightarrow_G v$, ha $u = u_1 x u_2$ és $v = u_1 y u_2$,ahol $u_1, u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \to y \in P$.

u-ból (több lépésben vagy közvetetten) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geqslant 1$ és $w_0, \ldots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

Mondatforma: A kezdőszimbólumból levezethető szó.

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. A v szó közvetlenül vagy **egy lépésben levezethető** az u szóból G -ben, jelölése $u \Rightarrow_G v$, ha $u = u_1 x u_2$ és $v = u_1 y u_2$,ahol $u_1, u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \to y \in P$.

u-ból (több lépésben vagy közvetetten) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geqslant 1$ és $w_0, \dots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

Mondatforma: A kezdőszimbólumból levezethető szó.

$\Rightarrow_G$ illetve $\Rightarrow_G^*$ helyett gyakran röviden $\Rightarrow$-t illetve $\Rightarrow^*$-t írunk.

Grammatikák – Ismétlés

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika és legyen $u, v \in (N \cup T)^*$. A v szó közvetlenül vagy **egy lépésben levezethető** az u szóból G -ben, jelölése $u \Rightarrow_G v$, ha $u = u_1 x u_2$ és $v = u_1 y u_2$,ahol $u_1, u_2 \in (N \cup T)^*$ és $x \rightarrow y \in P$.

u-ból (több lépésben vagy közvetetten) **levezethető** v, ha $u = v$ vagy van olyan $n \geqslant 1$ és $w_0, \dots w_n \in (N \cup T)^*$, hogy $w_{i-1} \Rightarrow_G w_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ és $w_0 = u$ és $w_n = v$. Jelölés: $u \Rightarrow_G^* v$.

Mondatforma: A kezdőszimbólumból levezethető szó.

$\Rightarrow_G$ illetve $\Rightarrow_G^*$ helyett gyakran röviden $\Rightarrow$-t illetve $\Rightarrow^*$-t írunk.

Definíció

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy tetszőleges grammatika. A G által **generált nyelv** alatt az $L(G) := \{w \mid S \Rightarrow_G^* w, w \in T^*\}$ szavakból álló halmazt értjük.

Grammatikák osztályozása – Ismétlés

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika. A G **grammatika i-típusú** ($i = 0, 1, 2, 3$), ha P szabályhalmazára teljesülnek a következők:

- $i = 0$ eset: nincs korlátozás,

Grammatikák osztályozása – Ismétlés

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika. A G **grammatika** ***i*-típusú** ($i = 0, 1, 2, 3$), ha P szabályhalmazára teljesülnek a következők:

- $i = 0$ eset: nincs korlátozás,
- $i = 1$ eset:
  (1) P minden szabálya $u_1Au_2 \to u_1vu_2$ alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*$, $A \in N$, és $v \neq \varepsilon$,

Grammatikák osztályozása – Ismétlés

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika. A G **grammatika i-típusú** ($i = 0, 1, 2, 3$), ha P szabályhalmazára teljesülnek a következők:

- $i = 0$ eset: nincs korlátozás,
- $i = 1$ eset:
  (1) P minden szabálya $u_1 A u_2 \to u_1 v u_2$ alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*, A \in N$, és $v \neq \varepsilon$,
  (2) Egyetlen kivétel megengedünk: P tartalmaz**hat**ja az $S \to \varepsilon$ szabályt, de csak abban az esetben, ha S nem fordul elő P egyetlen szabályának jobb oldalán sem.
  ("Korlátozott ε szabály" vagy röviden "KES")

Grammatikák osztályozása – Ismétlés

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy grammatika. A G **grammatika *i*-típusú** ($i = 0, 1, 2, 3$), ha P szabályhalmazára teljesülnek a következők:

- $i = 0$ eset: nincs korlátozás,
- $i = 1$ eset:
  (1) P minden szabálya $u_1 A u_2 \rightarrow u_1 v u_2$ alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*, A \in N$, és $v \neq \varepsilon$,
  (2) Egyetlen kivétel megengedünk: P tartalmaz**hat**ja az $S \rightarrow \varepsilon$ szabályt, de csak abban az esetben, ha S nem fordul elő P egyetlen szabályának jobb oldalán sem.
  ("Korlátozott ε szabály" vagy röviden "KES")
- $i = 2$ eset: P minden szabálya $A \rightarrow v$ alakú, ahol $A \in N$ és $v \in (N \cup T)^*$,

Grammatikák osztályozása – Ismétlés

Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy grammatika. A G **grammatika i-típusú** ($i = 0, 1, 2, 3$), ha P szabályhalmazára teljesülnek a következők:

- $i = 0$ eset: nincs korlátozás,
- $i = 1$ eset:
  (1) P minden szabálya $u_1 A u_2 \rightarrow u_1 v u_2$ alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*, A \in N$, és $v \neq \varepsilon$,
  (2) Egyetlen kivétel megengedünk: P tartalmaz**hat**ja az $S \rightarrow \varepsilon$ szabályt, de csak abban az esetben, ha S nem fordul elő P egyetlen szabályának jobb oldalán sem.
  ("Korlátozott ε szabály" vagy röviden "KES")
- $i = 2$ eset: P minden szabálya $A \rightarrow v$ alakú, ahol $A \in N$ és $v \in (N \cup T)^*$,
- $i = 3$ eset: P minden szabálya vagy $A \rightarrow uB$ vagy $A \rightarrow u$, alakú, ahol $A, B \in N$ és $u \in T^*$.

Nyelvek Chomsky féle osztályozása – Ismétlés

$\mathcal{L}_i := \{L \mid \exists G \in \mathcal{G}_i,\ \text{hogy } L = L(G)\}$ jelöli az i-típusú nyelvek nyelvosztályát, elemei az ***i*-típusú nyelvek**. $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Nyelvek Chomsky féle osztályozása – Ismétlés

$\mathcal{L}_i := \{L \mid \exists G \in \mathcal{G}_i,\ \text{hogy } L = L(G)\}$ jelöli az i-típusú nyelvek nyelvosztályát, elemei az ***i*-típusú nyelvek**. $(i = 0, 1, 2, 3)$.

A 0,1,2,3-típusú grammatikákat rendre **mondatszerkezetű**, **környezetfüggő**, **környezetfüggetlen**, valamint **reguláris** grammatikának is mondjuk.

Nyelvek Chomsky féle osztályozása – Ismétlés

$\mathcal{L}_i := \{L \mid \exists G \in \mathcal{G}_i,\ \text{hogy}\ L = L(G)\}$ jelöli az i-típusú nyelvek nyelvosztályát, elemei az **i-típusú nyelvek**. $(i = 0, 1, 2, 3)$.

A 0,1,2,3-típusú grammatikákat rendre **mondatszerkezetű**, **környezetfüggő**, **környezetfüggetlen**, valamint **reguláris** grammatikának is mondjuk.

A 0,1,2,3-típusú nyelvek osztályait rendre **rekurzíven felsorolható**, **környezetfüggő**, **környezetfüggetlen**, valamint **reguláris** nyelvosztálynak is mondjuk.

Nyelvek Chomsky féle osztályozása – Ismétlés

$\mathcal{L}_i := \{L \mid \exists G \in \mathcal{G}_i,\ \text{hogy } L = L(G)\}$ jelöli az i-típusú nyelvek nyelvosztályát, elemei az ***i*-típusú nyelvek**. $(i = 0, 1, 2, 3)$.

A 0,1,2,3-típusú grammatikákat rendre **mondatszerkezetű**, **környezetfüggő**, **környezetfüggetlen**, valamint **reguláris** grammatikának is mondjuk.

A 0,1,2,3-típusú nyelvek osztályait rendre **rekurzíven felsorolható**, **környezetfüggő**, **környezetfüggetlen**, valamint **reguláris** nyelvosztálynak is mondjuk.

Chomsky nyelvhierarchia tétele

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0.$$

Nyelvek Chomsky féle osztályozása – Ismétlés

$\mathcal{L}_i := \{L \mid \exists G \in \mathcal{G}_i,\ \text{hogy}\ L = L(G)\}$ jelöli az i-típusú nyelvek nyelvosztályát, elemei az ***i*-típusú nyelvek**. $(i = 0, 1, 2, 3)$.

A 0,1,2,3-típusú grammatikákat rendre **mondatszerkezetű**, **környezetfüggő**, **környezetfüggetlen**, valamint **reguláris** grammatikának is mondjuk.

A 0,1,2,3-típusú nyelvek osztályait rendre **rekurzíven felsorolható**, **környezetfüggő**, **környezetfüggetlen**, valamint **reguláris** nyelvosztálynak is mondjuk.

Chomsky nyelvhierarchia tétele

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0.$$

Emlékeztető: Az $\mathcal{L}_2$ és az $\mathcal{L}_1$ nyelvosztályok közötti tartalmazási reláció nem adódik azonnal a grammatikaosztályok definíciójából. Tartalmazás valódisága: pumpálási (Bar Hillel) lemmákkal.

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

- Matematikai gépek, automaták segítségével

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

- Matematikai gépek, automaták segítségével

Az automaták elemző, **analitikus** eszközök. Az automaták bemenete egy szó, kimenete egy bináris érték („igen"/„nem"). Az automata működési szabályai szerint feldolgozza a szavakat. Csak bizonyos szavak esetén ad „igen" választ, ezen szavak egy nyelvet alkotnak, melyet az automata működési szabályai határoz meg.

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

- Matematikai gépek, automaták segítségével

Az automaták elemző, **analitikus** eszközök. Az automaták bemenete egy szó, kimenete egy bináris érték („igen"/„nem"). Az automata működési szabályai szerint feldolgozza a szavakat. Csak bizonyos szavak esetén ad „igen" választ, ezen szavak egy nyelvet alkotnak, melyet az automata működési szabályai határoz meg.

- egyéb módon: felsorolás, reguláris kifejezés, ...

Formális nyelvek megadása

- (Generatív) grammatikákkal

A grammatikák **szintetizáló** eszközök, egyetlen szimbólumból egy szabályrendszer segítségével szavakat lehet felépíteni. Azon szavak halmaza, melyeket fel lehet építeni egy nyelvet határoz meg, tehát a grammatika szabályrendszere meghatároz egy nyelvet.

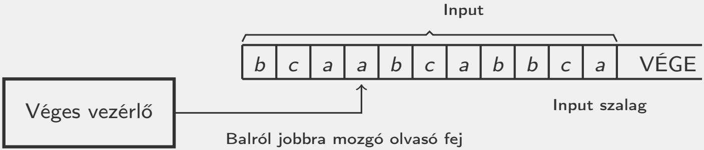
- Matematikai gépek, automaták segítségével

Az automaták elemző, **analitikus** eszközök. Az automaták bemenete egy szó, kimenete egy bináris érték („igen"/„nem"). Az automata működési szabályai szerint feldolgozza a szavakat. Csak bizonyos szavak esetén ad „igen" választ, ezen szavak egy nyelvet alkotnak, melyet az automata működési szabályai határoz meg.

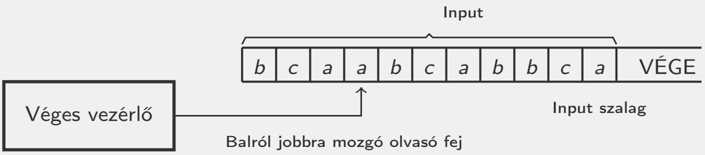
- egyéb módon: felsorolás, reguláris kifejezés, ...

Figyelem! Nem feltétlen lehet minden eszközzel minden nyelvet megadni. Például reguláris kifejezéssel kevesebb nyelvet lehet leírni mint egy általános grammatikával, de az se elég az összes $\{0, 1\}$ ábécé feletti nyelv leírásához.

Véges automata, intuitív kép – Ismétlés

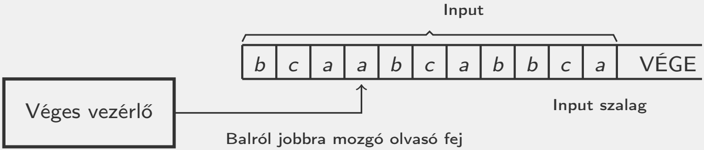


Véges automata, intuitív kép – Ismétlés



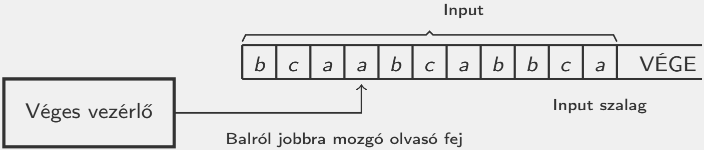
- A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.

Véges automata, intuitív kép – Ismétlés



- A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.
- Az automata, miután elolvasott egy szimbólumot, az olvasófejet egy pozícióval jobbra mozgatja, majd állapotot vált az állapot-átmenet függvénye szerint.

Véges automata, intuitív kép – Ismétlés



- A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.
- Az automata, miután elolvasott egy szimbólumot, az olvasófejet egy pozícióval jobbra mozgatja, majd állapotot vált az állapot-átmenet függvénye szerint.
- Amennyiben az automata még nem olvasta végig a teljes inputot és elfogadó állapotba ér akkor nem dönt még az elfogadásról/elutasításról, tovább működik. Ha végigolvasta az inputot, akkor megáll és aktuális állapota alapján válaszol, hogy elfogadja vagy elutasítja-e a bemenetet.

3-as típusú nyelvek – Ismétlés

Tétel

Az alábbi formális eszközök mindegyikével pontosan a 3-as típusú nyelvek írhatók le

3-as típusú nyelvek – Ismétlés

Tétel

Az alábbi formális eszközök mindegyikével pontosan a 3-as típusú nyelvek írhatók le

- 3-as típusú grammatikák

3-as típusú nyelvek – Ismétlés

Tétel

Az alábbi formális eszközök mindegyikével pontosan a 3-as típusú nyelvek írhatók le

- 3-as típusú grammatikák
- 3-as normálformájú grammatikák

3-as típusú nyelvek – Ismétlés

Tétel

Az alábbi formális eszközök mindegyikével pontosan a 3-as típusú nyelvek írhatók le

- 3-as típusú grammatikák
- 3-as normálformájú grammatikák
- reguláris kifejezések

3-as típusú nyelvek – Ismétlés

Tétel

Az alábbi formális eszközök mindegyikével pontosan a 3-as típusú nyelvek írhatók le

- 3-as típusú grammatikák
- 3-as normálformájú grammatikák
- reguláris kifejezések
- determinisztikus véges automaták (az automata átmenetfüggvénye minden állatot-betű párhoz egyértelműen rendel új állapotot)

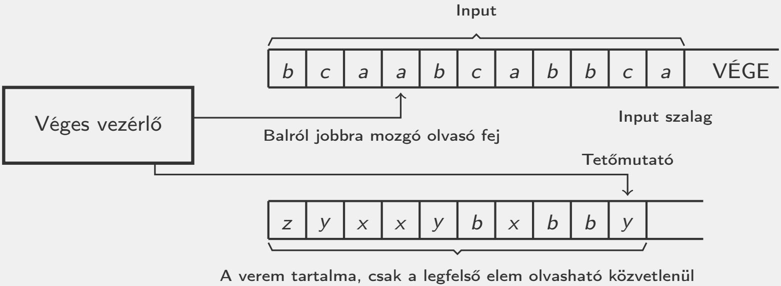
3-as típusú nyelvek – Ismétlés

Tétel

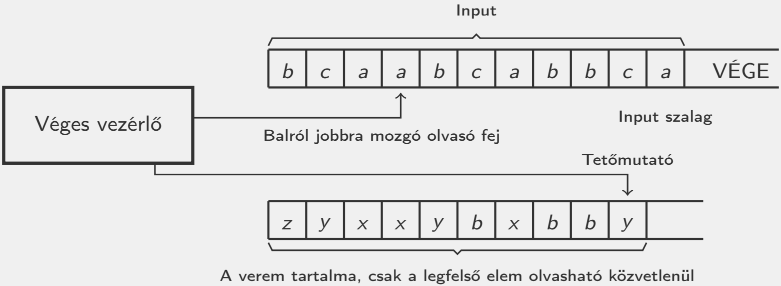
Az alábbi formális eszközök mindegyikével pontosan a 3-as típusú nyelvek írhatók le

- 3-as típusú grammatikák
- 3-as normálformájú grammatikák
- reguláris kifejezések
- determinisztikus véges automaták (az automata átmenetfüggvénye minden állatot-betű párhoz egyértelműen rendel új állapotot)
- nemdeterminisztikus véges automaták (az automata átmenetfüggvénye nem feltétlenül egyértelműen rendel az egyes állatot-betű párokhoz új állapotot, több kezdőállapot is megengedett)

Veremautomata – Ismétlés

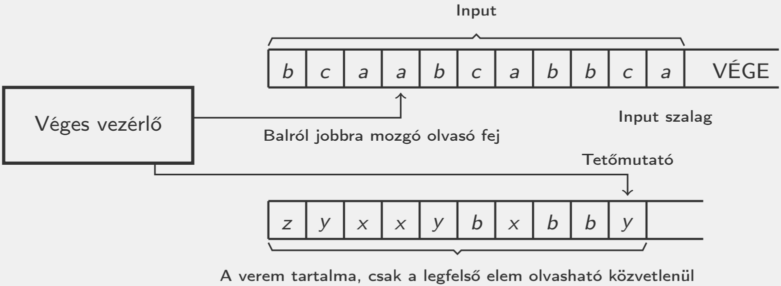


Veremautomata – Ismétlés



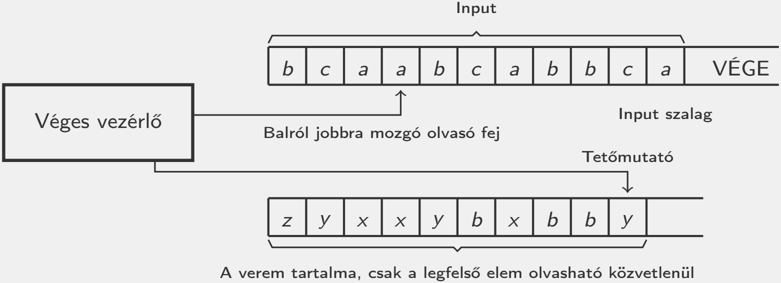
- A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.

Veremautomata – Ismétlés



- A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.
- A verem esetében az új adat mindig a már meglévő veremtartalom tetejéhez adódik, kivétele fordított sorrendben történik.

Veremautomata – Ismétlés



- A veremautomata a véges automata általánosítása potenciálisan végtelen veremmel és véges kontrollal.
- A verem esetében az új adat mindig a már meglévő veremtartalom tetejéhez adódik, kivétele fordított sorrendben történik.
- alapértelmezetten nemdeterminisztikus

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F\rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),

Veremautomata – Ismétlés

Jelölés: ha X egy halmaz, jelölje $\mathcal{P}_{\text{véges}}(X)$ az X véges részhalmazainak halmazát.

Definíció

A **veremautomata** egy $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$, rendezett hetes, ahol

- Z a veremszimbólumok véges halmaza (veremábécé),
- Q az állapotok véges halmaza,
- T az inputszimbólumok véges halmaza (inputábécé),
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_{\text{véges}}(Z^* \times Q)$, az ún. átmeneti függvény,
- $z_0 \in Z$ a kezdeti (kezdő) veremszimbólum,
- $q_0 \in Q$ a kezdeti állapot (kezdőállapot),
- $F \subseteq Q$ az elfogadó állapotok vagy végállapotok halmaza.

Veremautomata – Ismétlés

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

Veremautomata – Ismétlés

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. ($0, 1, 2, \ldots$ darabot)

Veremautomata – Ismétlés

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. ($0, 1, 2, \dots$ darabot)

- Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε-átmenet** (ε-lépés, ε-mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát, hogy valamilyen szimbólumot olvasson az inputszalagról.

Veremautomata – Ismétlés

- A verem tetején lévő szimbólum, az aktuális állapot és az inputszimbólum együttesen határozzák meg a következő átmenetet.

- Minden lépésben mindenképpen kiveszünk egyetlen egy elemet a verem tetejéről és beteszünk helyette néhányat. $(0, 1, 2, \ldots$ darabot)

- Ha $\delta(z, q, \varepsilon)$ nem üres, akkor ún. **ε-átmenet** (ε-lépés, ε-mozgás) hajtható végre, ami lehetővé teszi, hogy a veremautomata anélkül változtassa meg az állapotát, hogy valamilyen szimbólumot olvasson az inputszalagról.

- ε-mozgásra lehetőség van már az első inputszimbólum elolvasása előtt is illetve még az utolsó inputszimbólum elolvasása után is.

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Így a q baloldalán lévő szimbólum van a verem tetején, míg a jobboldalán lévő szimbólum az input következő feldolgozandó betűje.

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomata konfigurációi

Definíció

A veremautomata **konfigurációja** alatt egy zqw alakú szót értünk, ahol $z \in Z^*$ a verem aktuális tartalma és $q \in Q$ az aktuális állapot és $w \in T^*$ az input még feldolgozatlan része.

z első betűje van a verem alján, míg utolsó betűje a verem tetején.

Az input olvasófeje w első betűjén áll.

Így a q baloldalán lévő szimbólum van a verem tetején, míg a jobboldalán lévő szimbólum az input következő feldolgozandó betűje.

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomata $w \in T^*$ bemenethez tartozó **kezdőkonfigurációja** $z_0 q_0 w$.

Veremautomata – Ismétlés

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

Veremautomata – Ismétlés

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)

Veremautomata – Ismétlés

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat

Veremautomata – Ismétlés

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején ($z' \in Z$)

Veremautomata – Ismétlés

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején ($z' \in Z$)
- $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z'-t a verem tetejére (z-re rá) tehetjük ($z' \in Z$) (PUSH művelet)

Veremautomata – Ismétlés

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején ($z' \in Z$)
- $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z'-t a verem tetejére (z-re rá) tehetjük ($z' \in Z$) (PUSH művelet)
- Egyéb lehetőségek, például $(zz'z'', r) \in \delta(z, q, t)$: $z'z''$-t a verem tetejére tehetjük, z'' lesz a tetején ($z', z'' \in Z$) .

Veremautomata – Ismétlés

Alapvető veremműveletek megvalósítása

Legyen $t \in T \cup \{\varepsilon\}$, $q, r \in Q$ és $z \in Z$

- $(\varepsilon, r) \in \delta(z, q, t)$: a z elemet kivehetjük a veremből (POP művelet)
- $(z, r) \in \delta(z, q, t)$: a verem tartalma változatlan maradhat
- $(z', r) \in \delta(z, q, t)$: z-t lecserélhetjük z'-re a verem tetején $(z' \in Z)$
- $(zz', r) \in \delta(z, q, t)$: z'-t a verem tetejére (z-re rá) tehetjük $(z' \in Z)$ (PUSH művelet)
- Egyéb lehetőségek, például $(zz'z'', r) \in \delta(z, q, t)$: $z'z''$-t a verem tetejére tehetjük, z'' lesz a tetején $(z', z'' \in Z)$.
- Általánosan $(w, r) \in \delta(z, q, t)$, ahol $w \in Z^*$ tetszőleges Z feletti szó. A w szó kerül z helyére és w utolsó betűje lesz a verem tetején.

Veremautomata – Ismétlés

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Veremautomata – Ismétlés

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ha A-ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2babba$ és $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,

Veremautomata – Ismétlés

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ha A-ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2babba$ és $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,
- ha A-ban $\delta(c, q_3, \varepsilon) = \{(dd, q_2)\}$ és $z_0cddcq_3ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_3ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2ababba$

Veremautomata – Ismétlés

Egylépéses redukció

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja egy lépésben**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A \beta$-val jelölünk, ha létezik olyan $z \in Z, q, p \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}$, $r, u \in Z^*$ és $w \in T^*$, hogy $(u, p) \in \delta(z, q, a)$ és $\alpha = rzqaw$ és $\beta = rupw$ teljesül.

Példák:

- ha A-ban $\delta(c, q_1, a) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ és $z_0cddcq_1ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2babba$ és $z_0cddcq_1ababba \Rightarrow_A z_0cddq_4babba$ is teljesül,
- ha A-ban $\delta(c, q_3, \varepsilon) = \{(dd, q_2)\}$ és $z_0cddcq_3ababba$ egy konfiguráció, akkor $z_0cddcq_3ababba \Rightarrow_A z_0cddddq_2ababba$
- ha A-ban $\delta(c, q_5, \varepsilon) = \emptyset$ és $\delta(c, q_5, a) = \emptyset$, akkor nem létezik olyan C konfiguráció, melyre $z_0ccq_5aab \Rightarrow_A C$

Veremautomata – Ismétlés

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Veremautomata – Ismétlés

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}, \; 1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Tehát a $\Rightarrow_A^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Veremautomata – Ismétlés

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Tehát a $\Rightarrow_A^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa: Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$

Veremautomata – Ismétlés

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Tehát a $\Rightarrow_A^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa: Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$ és
$\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cq_4ab$.
Tehát $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cq_4ab$.

Veremautomata – Ismétlés

Többlépéses redukció és a felismert nyelv

Definíció

Az A veremautomata az $\alpha \in Z^*QT^*$ konfigurációt a $\beta \in Z^*QT^*$ konfigurációra **redukálja**, amelyet $\alpha \Rightarrow_A^* \beta$-val jelölünk, ha vagy $\alpha = \beta$, vagy létezik olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szavakból álló véges sorozat, ahol $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n$ és $\alpha_i \Rightarrow_A \alpha_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Tehát a $\Rightarrow_A^*$ reláció a $\Rightarrow_A$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa: Ha $\delta(d, q_6, b) = \{(\varepsilon, q_5)\}$ és $\delta(d, q_5, \varepsilon) = \{(dd, q_2), (\varepsilon, q_4)\}$ akkor $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow_A \#cdq_5ab \Rightarrow_A \#cq_4ab$.
Tehát $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cddq_2ab$ és $\#cddq_6bab \Rightarrow_A^* \#cq_4ab$.

Definíció

Az A veremautomata által **elfogadó állapottal (végállapottal) elfogadott nyelv**
$L(A) = \{w \in T^* \mid z_0q_0w \Rightarrow_A^* up$, ahol $u \in Z^*, p \in F\}$.

Veremautomata – Ismétlés

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Veremautomata – Ismétlés

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,

Veremautomata – Ismétlés

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Veremautomata – Ismétlés

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Veremautomata – Ismétlés

Determinisztikus veremautomata

Definíció

Az $A = \langle Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F \rangle$ veremautomatát **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| = 1$.

Tehát minden $q \in Q$ és $z \in Z$ esetén

- vagy $\delta(z, q, a)$ pontosan egy elemet tartalmaz minden $a \in T$ inputszimbólumra és $\delta(z, q, \varepsilon) = \emptyset$,
- vagy $\delta(z, q, \varepsilon)$ pontosan egy elemet tartalmaz és $\delta(z, q, a) = \emptyset$ minden $a \in T$ inputszimbólumra.

Észrevétel: Ha minden $(z, q, a) \in Z \times Q \times T$ esetén $|\delta(z, q, a)| + |\delta(z, q, \varepsilon)| \leqslant 1$ akkor a veremautomata a felismert nyelv módosulása nélkül kiegészíthető determinisztikus veremautomatává. Így tágabb értelemben az ezt a feltételt teljesítő veremautomatákat is tekinthetjük determinisztikus veremautomatának.

Veremautomata – Ismétlés

Alternatív reprezentációk

- **Átírási szabályokkal:**
  A δ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt M_δ -val jelöljük. Tehát ezzel az alternatív jelöléssel:

  $$zqa \to up :\in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, a),$$

  $$zq \to up :\in M_\delta \iff (u, p) \in \delta(z, q, \varepsilon).$$

  $(p, q \in Q, a \in T, z \in Z, u \in Z^*)$

Veremautomata – Ismétlés

Alternatív reprezentációk

- **Átírási szabályokkal:**
  A δ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt M_δ -val jelöljük. Tehát ezzel az alternatív jelöléssel:

  $$zqa \to up :\in M_\delta \iff (u,p) \in \delta(z,q,a),$$
  $$zq \to up :\in M_\delta \iff (u,p) \in \delta(z,q,\varepsilon).$$
  $$(p, q \in Q, a \in T, z \in Z, u \in Z^*)$$

- **Átmenetdiagrammal:**

  $p, q \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, z \in Z, u \in Z^*$ esetén:

  $$\textcircled{q} \xrightarrow{\;a;\, z \to u\;} \textcircled{p} \qquad \iff \quad (u,p) \in \delta(z,q,a)$$

  A végállapotokat duplán karikázzuk. A kezdőállapotot $\to$ jelöli.

Veremautomata – Ismétlés

1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Veremautomata – Ismétlés

1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a,b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

$$
\begin{array}{rl}
(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) & \forall z, t \in \{a, b\} \\
(z, q_2) \in \delta(z, q_1, c) & \forall z \in \{a, b\} \\
(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &
\end{array}
$$

Veremautomata – Ismétlés

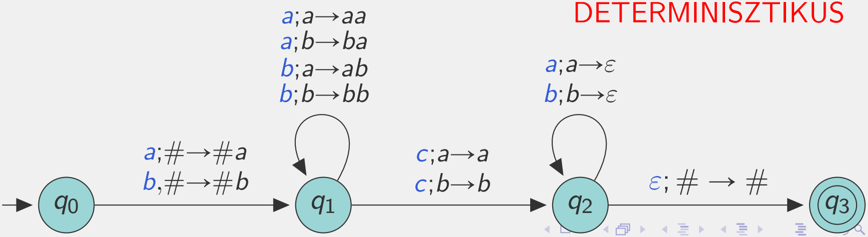
1. Példa: Legyen $L_1 = \{wcw^{-1} \mid w \in \{a,b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_1$.

Megoldás:

$A = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\}\rangle$, ahol:

$$\begin{array}{rl}
(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) & \forall t \in \{a,b\} \\
(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) & \forall z, t \in \{a,b\} \\
(z, q_2) \in \delta(z, q_1, c) & \forall z \in \{a,b\} \\
(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) & \forall t \in \{a,b\} \\
(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &
\end{array}$$

DETERMINISZTIKUS



Veremautomata – Ismétlés

2. Példa: Legyen $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_2$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\}\rangle$, ahol:

$$
\begin{array}{rl}
(\#t, q_1) \in \delta(\#, q_0, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(zt, q_1) \in \delta(z, q_1, t) & \forall z, t \in \{a, b\} \\
(z, q_2) \in \delta(z, q_1, \varepsilon) & \forall z \in \{a, b\} \\
(\varepsilon, q_2) \in \delta(t, q_2, t) & \forall t \in \{a, b\} \\
(\#, q_3) \in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &
\end{array}
$$

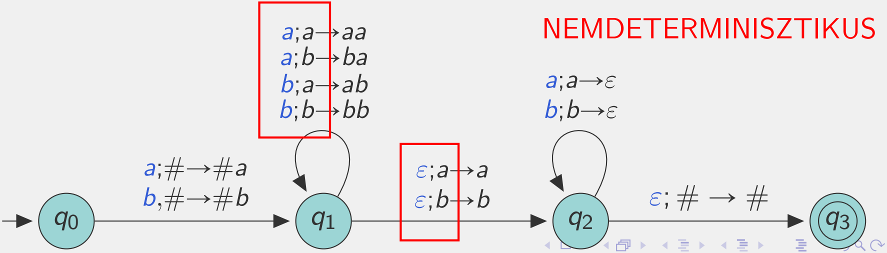
Veremautomata – Ismétlés

2. Példa: Legyen $L_2 = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^+\}$. Készítsünk egy A veremautomatát, melyre $L(A) = L_2$.

Megoldás:

$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\} \rangle$, ahol:

$$
\begin{aligned}
(\#t, q_1) &\in \delta(\#, q_0, t) && \forall t \in \{a,b\}\\
(zt, q_1) &\in \delta(z, q_1, t) && \forall z, t \in \{a,b\}\\
(z, q_2) &\in \delta(z, q_1, \varepsilon) && \forall z \in \{a,b\}\\
(\varepsilon, q_2) &\in \delta(t, q_2, t) && \forall t \in \{a,b\}\\
(\#, q_3) &\in \delta(\#, q_2, \varepsilon) &&
\end{aligned}
$$



Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Szintén a blokkolás elkerülése végett definiáltuk úgy a kezdőkonfigurációt, hogy a veremábécé egy eleme (z_0) már eleve a veremben van.

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Definíció

Az A veremautomata által **üres veremmel elfogadott nyelv** $N(A) = \{w \in T^* \mid z_0 q_0 w \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in Q\}$.

Megjegyzés:
Vegyük észre, hogy ha a verem üres, akkor az automata működése blokkolódik, mivel nincs átmenet definiálva üres verem esetére. (lásd δ definíciója).

Így a verem az input teljes feldolgozása után, az utolsó átmenettel kell üressé váljon.

Szintén a blokkolás elkerülése végett definiáltuk úgy a kezdőkonfigurációt, hogy a veremábécé egy eleme (z_0) már eleve a veremben van.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az elfogadó állapotok halmaza irreleváns $N(A)$ szempontjából.

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\ \}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\ \}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$$
\begin{aligned}
\$q_0 a &\rightarrow \$aq_0 \\
aq_0 a &\rightarrow aaq_0 \\
aq_0 b &\rightarrow q_1 \\
aq_1 b &\rightarrow q_1 \\
\$q_1 \ \ &\rightarrow q_1 .
\end{aligned}
$$

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$$
\begin{aligned}
\$q_0 a &\to \$aq_0\\
aq_0 a &\to aaq_0\\
aq_0 b &\to q_1\\
aq_1 b &\to q_1\\
\$q_1 \ \ &\to q_1.
\end{aligned}
$$

A determinisztikus, a^2b^3-re:

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle \{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$$
\begin{aligned}
\$q_0 a &\to \$a q_0\\
a q_0 a &\to a a q_0\\
a q_0 b &\to q_1\\
a q_1 b &\to q_1\\
\$q_1 \quad &\to q_1.
\end{aligned}
$$

A determinisztikus, $a^2 b^3$-re:

$$\$q_0 aabbb \Rightarrow \$a q_0 abbb \Rightarrow \$aa q_0 bbb \Rightarrow \$a q_1 bb \Rightarrow \$q_1 b \Rightarrow q_1 b.$$

Veremautomata – Ismétlés

Üres veremmel elfogadott nyelv

Példa: Az alábbi $A = \langle\{\$, a\}\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, \$, q_0, \{\,\}\rangle$ veremautomata esetén $N(A) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$, azaz ezt nyelvet ismeri fel üres veremmel.

M_δ :

$$
\begin{aligned}
\$q_0 a &\to \$aq_0\\
aq_0 a &\to aaq_0\\
aq_0 b &\to q_1\\
aq_1 b &\to q_1\\
\$q_1 \;\; &\to q_1.
\end{aligned}
$$

A determinisztikus, $a^2 b^3$-re:

$\$q_0aabbb \Rightarrow \$aq_0abbb \Rightarrow \$aaq_0bbb \Rightarrow \$aq_1bb \Rightarrow \$q_1b \Rightarrow q_1b.$

A elutasítja *aabbb*-t, mivel hiába lett üres a verem, még volt hátra az inputból.

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomaták és a 2-es típusú nyelvek

Tétel

Bármely L nyelvre ekvivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomaták és a 2-es típusú nyelvek

Tétel

Bármely L nyelvre ekivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomaták és a 2-es típusú nyelvek

Tétel

Bármely L nyelvre ekivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával üres veremmel felismerhető

Veremautomata – Ismétlés

Veremautomaták és a 2-es típusú nyelvek

Tétel

Bármely L nyelvre ekvivalensek a következő állítások

- L környezetfüggetlen, azaz környezetfüggetlen (2-es típusú) grammatikával generálható
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával végállapottal felismerhető
- L (nemdeterminisztikus) veremautomatával üres veremmel felismerhető

Tétel

Minden reguláris (3-as típusú) nyelv felismerhető determinisztikus veremautomatával, de létezik olyan (2-es típusú) környezetfüggetlen nyelv, ami nem ismerhető fel determinisztikus veremautomatával.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P-beli szabály alakja a következők valamelyike:

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P-beli szabály alakja a következők valamelyike:

- $S \rightarrow \varepsilon$

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P-beli szabály alakja a következők valamelyike:

- $S \to \varepsilon$
- $A \to BC$, $A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \to \varepsilon \in P$.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P-beli szabály alakja a következők valamelyike:

- $S \to \varepsilon$
- $A \to BC$, $A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \to \varepsilon \in P$.
- $A \to a$, $A \in N, a \in T$.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P-beli szabály alakja a következők valamelyike:

- $S \rightarrow \varepsilon$
- $A \rightarrow BC$, $A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \rightarrow \varepsilon \in P$.
- $A \rightarrow a$, $A \in N, a \in T$.

Tétel

Minden G környezetfüggetlen grammatikához létezik vele ekvivalens Chomsky normálformájú grammatika.

Chomsky normálforma

Definíció

Egy $G = \langle N, T, P, S \rangle$ grammatika **Chomsky normálformájú**, ha minden P-beli szabály alakja a következők valamelyike:

- $S \to \varepsilon$
- $A \to BC$, $A, B, C \in N$; továbbá $B, C \neq S$, ha $S \to \varepsilon \in P$.
- $A \to a$, $A \in N, a \in T$.

Tétel

Minden G környezetfüggetlen grammatikához létezik vele ekvivalens Chomsky normálformájú grammatika.

Bizonyítás: Több lépésben átalakítjuk G-t a megfelelő alakra ügyelve arra, hogy az egyes átalakítási lépések után kapott grammatika G-vel ekvivalens legyen.

Chomsky normálforma

1. lépés Új kezdőszimbólum bevezetése

Vezessünk be egy új S_0 kezdőszimbólumot és adjuk hozzá az $S_0 \to S$ szabályt P-hez. A generált nyelv nyilván nem változik, de a kezdőszimbólum már nem fordul elő szabály jobboldalán.

Chomsky normálforma

1. lépés Új kezdőszimbólum bevezetése

Vezessünk be egy új S_0 kezdőszimbólumot és adjuk hozzá az $S_0 \to S$ szabályt P-hez. A generált nyelv nyilván nem változik, de a kezdőszimbólum már nem fordul elő szabály jobboldalán.

Kivétel: Amennyiben S nem fordul elő szabály jobboldalán, ez a lépés kihagyható.

Chomsky normálforma

1. lépés Új kezdőszimbólum bevezetése

Vezessünk be egy új S_0 kezdőszimbólumot és adjuk hozzá az $S_0 \to S$ szabályt P-hez. A generált nyelv nyilván nem változik, de a kezdőszimbólum már nem fordul elő szabály jobboldalán.

Kivétel: Amennyiben S nem fordul elő szabály jobboldalán, ez a lépés kihagyható.

Megjegyzés: A bizonyítás további része feltételezi, hogy S-sel van jelölve a kezdőszimbólum, ez a nemterminálisok átnevezésével biztosítható.

Chomsky normálforma

2. lépés **Álterminálisok bevezetése**

Minden $a \in T$ terminálisra végezzük el a következőt. Legyen $\bar{a}$ egy új nemterminális szimbólum és helyettesítsük minden P-beli szabály jobboldalán a előfordulásait $\bar{a}$-val. Adjuk hozzá ezen kívül P-hez a $\bar{a} \rightarrow a$ új szabályt.

Chomsky normálforma

2. lépés Álterminálisok bevezetése

Minden $a \in T$ terminálisra végezzük el a következőt. Legyen $\bar{a}$ egy új nemterminális szimbólum és helyettesítsük minden P-beli szabály jobboldalán a előfordulásait $\bar{a}$-val. Adjuk hozzá ezen kívül P-hez a $\bar{a} \to a$ új szabályt.

Az így kapott grammatika az eredetivel ekvialens (ezt az előző félévben már meggondoltuk a zártsági tétel bizonyításánál).

Chomsky normálforma

2. lépés Álterminálisok bevezetése

Minden $a \in T$ terminálisra végezzük el a következőt. Legyen $\bar{a}$ egy új nemterminális szimbólum és helyettesítsük minden P-beli szabály jobboldalán a előfordulásait $\bar{a}$-val. Adjuk hozzá ezen kívül P-hez a $\bar{a} \to a$ új szabályt.

Az így kapott grammatika az eredetivel ekvialens (ezt az előző félévben már meggondoltuk a zártsági tétel bizonyításánál).

Kivétel: Amennyiben $A \to a \in P$, akkor a-nak ezt az előfordulását nem szükséges átírni, hiszen ez a szabály már kellő alakú.

Chomsky normálforma

3. lépés **Hosszredukció**

Ekkor minden $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$, $k \geqslant 3$ alakú szabályt helyettesítünk egy

$$\{X \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \ldots, Z_{k-2} \to Y_{k-1} Y_k\}$$

szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \ldots, Z_{k-2}$ új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok.

Chomsky normálforma

3. lépés Hosszredukció

Ekkor minden $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$, $k \geqslant 3$ alakú szabályt helyettesítünk egy

$$\{X \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \ldots, Z_{k-2} \to Y_{k-1} Y_k\}$$

szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \ldots, Z_{k-2}$ új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok.

Nyilván minden $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ szabályalkalmazás helyettesíthető a fenti szabályokkal.

Chomsky normálforma

3. lépés Hosszredukció

Ekkor minden $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$, $k \geqslant 3$ alakú szabályt helyettesítünk egy

$$\{X \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \ldots, Z_{k-2} \to Y_{k-1} Y_k\}$$

szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \ldots, Z_{k-2}$ új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok.

Nyilván minden $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ szabályalkalmazás helyettesíthető a fenti szabályokkal. Másrészt minden, valamelyik Z_i-t tartalmazó levezetés az átalakított grammatikában $Z_1, \ldots, Z_{k-2}$ sorrendben minden Z_i-t be kell hozzon majd át kell írjon.

Chomsky normálforma

3. lépés Hosszredukció

Ekkor minden $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$, $k \geqslant 3$ alakú szabályt helyettesítünk egy

$$\{X \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \ldots, Z_{k-2} \to Y_{k-1} Y_k\}$$

szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \ldots, Z_{k-2}$ új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok.

Nyilván minden $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ szabályalkalmazás helyettesíthető a fenti szabályokkal. Másrészt minden, valamelyik Z_i-t tartalmazó levezetés az átalakított grammatikában $Z_1, \ldots, Z_{k-2}$ sorrendben minden Z_i-t be kell hozzon majd át kell írjon. Mivel G környezetfüggetlen, így amennyiben a Z_i-t behozó lépést nem közvetlenül követi a Z_i-t átíró lépés, akkor az átíró lépés a levezetésben előrehozható. Tehát feltehető, hogy a Z_i-k a fenti sorrendben, közvetlenül egymást követő lépésekben jönnek be majd íródnak át vagyis az $X \to Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ szabály alkalmazását szimulálják.

Chomsky normálforma

4. lépés ε-mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \to \varepsilon \in P\},$$

Chomsky normálforma

4. lépés ε-**mentesítés**

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \to \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geqslant 1$$

Chomsky normálforma

4. lépés ε-mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \to \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geqslant 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \ldots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geqslant k$-ra.

Chomsky normálforma

4. lépés ε**-mentesítés**

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \to \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geqslant 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \ldots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geqslant k$-ra.

$U := U_k$.

Chomsky normálforma

4. lépés ε-mentesítés

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \,|\, X \to \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \,|\, X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geqslant 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \ldots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geqslant k$-ra.

$U := U_k$.

Állítás: $X \Rightarrow_G^* \varepsilon \iff X \in U$.

Chomsky normálforma

4. lépés **ε-mentesítés**

Definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen:

$$U_1 := \{X \mid X \to \varepsilon \in P\},$$

$$U_{i+1} := U_i \cup \{X \mid X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}. \quad i \geqslant 1$$

Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \ldots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_\ell = U_k$ minden $\ell \geqslant k$-ra.

$U := U_k$.

Állítás: $X \Rightarrow_G^* \varepsilon \iff X \in U$.

Az állítás következménye: $\varepsilon \in L(G) \iff S \in U$.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Leftarrow$) Minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra (ahol k az első index, melyre $U_k = U_{k+1}$) és minden $X \in U_i$-ra $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Leftarrow$) Minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra (ahol k az első index, melyre $U_k = U_{k+1}$) és minden $X \in U_i$-ra $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Ez i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható. $i = 1$-re az állítás U_1 definíciójából azonnal következik.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Leftarrow$) Minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra (ahol k az első index, melyre $U_k = U_{k+1}$) és minden $X \in U_i$-ra $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Ez i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható. $i = 1$-re az állítás U_1 definíciójából azonnal következik.

Tegyük fel, hogy i-re teljesül. Ha $X \in U_{i+1}$, akkor van olyan $u \in U_i^*$, melyre $X \to u \in P$. Legyen $u = Z_1 \cdots Z_n$, ahol $Z_r \in U_i$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Leftarrow$) Minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra (ahol k az első index, melyre $U_k = U_{k+1}$) és minden $X \in U_i$-ra $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Ez i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható. $i = 1$-re az állítás U_1 definíciójából azonnal következik.

Tegyük fel, hogy i-re teljesül. Ha $X \in U_{i+1}$, akkor van olyan $u \in U_i^*$, melyre $X \to u \in P$. Legyen $u = Z_1 \cdots Z_n$, ahol $Z_r \in U_i$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$.

Ekkor az indukciós feltevés miatt $Z_i \Rightarrow_G^* \varepsilon$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Tehát $X \Rightarrow_G Z_1 \cdots Z_n \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Leftarrow$) Minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra (ahol k az első index, melyre $U_k = U_{k+1}$) és minden $X \in U_i$-ra $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Ez i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható. $i = 1$-re az állítás U_1 definíciójából azonnal következik.

Tegyük fel, hogy i-re teljesül. Ha $X \in U_{i+1}$, akkor van olyan $u \in U_i^*$, melyre $X \to u \in P$. Legyen $u = Z_1 \cdots Z_n$, ahol $Z_r \in U_i$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$.

Ekkor az indukciós feltevés miatt $Z_i \Rightarrow_G^* \varepsilon$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. Tehát $X \Rightarrow_G Z_1 \cdots Z_n \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

Mivel $U = U_k$, ezért az állításnak ezt az irányát bizonyítottuk.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Rightarrow$) Ha $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$ akkor létezik G-beli $X \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 \Rightarrow \varepsilon$ levezetés ($n \geqslant 1$).

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Rightarrow$) Ha $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$ akkor létezik G-beli $X \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 \Rightarrow \varepsilon$ levezetés ($n \geqslant 1$).

i-re vonatkozó teljes indukcióval ($1 \leqslant i \leqslant n$) könnyen látható, hogy $w_i \in U_i^*$.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Rightarrow$) Ha $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$ akkor létezik G-beli $X \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 \Rightarrow \varepsilon$ levezetés ($n \geqslant 1$).

i-re vonatkozó teljes indukcióval ($1 \leqslant i \leqslant n$) könnyen látható, hogy $w_i \in U_i^*$.

Valóban, $w_1 \in U_1$ következik U_1 definíciójából, hiszen w_1 egyetlen olyan nemterminálisból kell álljon, amire van ε-szabály P-ben.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Rightarrow$) Ha $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$ akkor létezik G-beli $X \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 \Rightarrow \varepsilon$ levezetés ($n \geqslant 1$).

i-re vonatkozó teljes indukcióval ($1 \leqslant i \leqslant n$) könnyen látható, hogy $w_i \in U_i^*$.

Valóban, $w_1 \in U_1$ következik U_1 definíciójából, hiszen w_1 egyetlen olyan nemterminálisból kell álljon, amire van ε-szabály P-ben.

Tegyük fel, hogy i-re teljesül az állítás. Ekkor a $w_{i+1} \Rightarrow w_i$ levezetési lépésben egy olyan $X \rightarrow u \in P$ szabály került alkalmazásra, ahol $u \in U_i^*$, így $X \in U_{i+1}$. Mivel $U_i \subseteq U_{i+1}$, így $w_{i+1} \in U_{i+1}^*$.

Chomsky normálforma

Az állítás bizonyítása:

($\Rightarrow$) Ha $X \Rightarrow_G^* \varepsilon$ akkor létezik G-beli $X \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_1 \Rightarrow \varepsilon$ levezetés ($n \geqslant 1$).

i-re vonatkozó teljes indukcióval ($1 \leqslant i \leqslant n$) könnyen látható, hogy $w_i \in U_i^*$.

Valóban, $w_1 \in U_1$ következik U_1 definíciójából, hiszen w_1 egyetlen olyan nemterminálisból kell álljon, amire van ε-szabály P-ben.

Tegyük fel, hogy i-re teljesül az állítás. Ekkor a $w_{i+1} \Rightarrow w_i$ levezetési lépésben egy olyan $X \rightarrow u \in P$ szabály került alkalmazásra, ahol $u \in U_i^*$, így $X \in U_{i+1}$. Mivel $U_i \subseteq U_{i+1}$, így $w_{i+1} \in U_{i+1}^*$.

Tehát $X \in U_{n+1} \subseteq U$, ezzel az állítást bizonyítottuk.

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P-ből az összes $X \to \varepsilon$ alakú ún. **ε-szabályt** és adjuk hozzá a következőket

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P-ből az összes $X \to \varepsilon$ alakú ún. **ε-szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- $A \to BC \in P$, $B, C \in U$ esetén az $A \to B$ és $A \to C$ szabályokat

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P-ből az összes $X \to \varepsilon$ alakú ún. **ε-szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- $A \to BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \to B$ és $A \to C$ szabályokat
- $A \to BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \to C$ szabályt

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P-ből az összes $X \to \varepsilon$ alakú ún. **ε-szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- $A \to BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \to B$ és $A \to C$ szabályokat
- $A \to BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \to C$ szabályt
- $A \to BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \to B$ szabályt

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P-ből az összes $X \to \varepsilon$ alakú ún. **ε-szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- $A \to BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \to B$ és $A \to C$ szabályokat
- $A \to BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \to C$ szabályt
- $A \to BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \to B$ szabályt

Legyen G' az így kapott grammatika. Ekkor $L(G_1) \subseteq L(G) \backslash \{\varepsilon\}$, hiszen minden új szabály alkalmazása megfelel egy régi szabály alkalmazásának amelyet egy $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ vagy $C \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk.

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P-ből az összes $X \to \varepsilon$ alakú ún. **ε-szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- $A \to BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \to B$ és $A \to C$ szabályokat
- $A \to BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \to C$ szabályt
- $A \to BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \to B$ szabályt

Legyen G' az így kapott grammatika. Ekkor $L(G_1) \subseteq L(G) \backslash \{\varepsilon\}$, hiszen minden új szabály alkalmazása megfelel egy régi szabály alkalmazásának amelyet egy $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ vagy $C \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk.

Másrészt $L(G) \backslash \{\varepsilon\} \subseteq L(G_1)$. Ugyanis, ha $S \Rightarrow_G^* u$ és $u \neq \varepsilon$, akkor $S \Rightarrow_{G'}^* u$, hiszen az $X \to \varepsilon$ típusú szabályok alkalmazása elkerülhető egy megfelelő új szabály alkalmazásával.

Chomsky normálforma

Hagyjuk el P-ből az összes $X \to \varepsilon$ alakú ún. **ε-szabályt** és adjuk hozzá a következőket

- $A \to BC \in P, B, C \in U$ esetén az $A \to B$ és $A \to C$ szabályokat
- $A \to BC \in P, B \in U, C \notin U$ esetén az $A \to C$ szabályt
- $A \to BC \in P, B \notin U, C \in U$ esetén az $A \to B$ szabályt

Legyen G' az így kapott grammatika. Ekkor $L(G_1) \subseteq L(G) \setminus \{\varepsilon\}$, hiszen minden új szabály alkalmazása megfelel egy régi szabály alkalmazásának amelyet egy $B \Rightarrow_G^* \varepsilon$ vagy $C \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk.

Másrészt $L(G) \setminus \{\varepsilon\} \subseteq L(G_1)$. Ugyanis, ha $S \Rightarrow_G^* u$ és $u \neq \varepsilon$, akkor $S \Rightarrow_{G'}^* u$, hiszen az $X \to \varepsilon$ típusú szabályok alkalmazása elkerülhető egy megfelelő új szabály alkalmazásával.

Tehát **$S \notin U$ esetén** G_1 ekvivalens G-vel.

$S \in U$ esetén adjuk hozzá G szabályaihoz az $S \to \varepsilon$ szabályt.

Chomsky normálforma

5. lépés **Láncmentesítés**

Chomsky normálforma

5. lépés Láncmentesítés

Már csak az $X \to Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **láncszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P-beli láncszabályok halmazát.

Chomsky normálforma

5. lépés **Láncmentesítés**

Már csak az $X \to Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **láncszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P-beli láncszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Chomsky normálforma

5. lépés Láncmentesítés

Már csak az $X \to Y$ alakú $(X, Y \in N)$, ú.n. **láncszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P-beli láncszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G-vel ekvivalens, láncmentes G' grammatika szabályai:

Chomsky normálforma

5. lépés Láncmentesítés

Már csak az $X \to Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **láncszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P-beli láncszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G-vel ekvivalens, láncmentes G' grammatika szabályai:

$P' := \{A \to w \mid \exists B \in H(A),\ \text{amelyre } B \to w \in P\} \setminus P_0$.

Chomsky normálforma

5. lépés Láncmentesítés

Már csak az $X \to Y$ alakú ($X, Y \in N$), ú.n. **láncszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P-beli láncszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G-vel ekvivalens, láncmentes G' grammatika szabályai:

$P' := \{A \to w \mid \exists B \in H(A),\ \text{amelyre } B \to w \in P\} \setminus P_0$.

$L(G') \subseteq L(G)$, hiszen egy $A \to w$ új szabály alkalmazása megfelel az $A \Rightarrow^* B$ láncszabályok és a $B \to w$ eredeti szabály alkalmazásának ($B \in H(A)$).

Chomsky normálforma

5. lépés Láncmentesítés

Már csak az $X \rightarrow Y$ alakú $(X, Y \in N)$, ú.n. **láncszabályokat** kell eliminálni. Jelölje P_0 a P-beli láncszabályok halmazát.

Minden $A \in N$ esetén legyen $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

A G-vel ekvivalens, láncmentes G' grammatika szabályai:

$P' := \{A \rightarrow w \mid \exists B \in H(A),\ \text{amelyre } B \rightarrow w \in P\} \setminus P_0$.

$L(G') \subseteq L(G)$, hiszen egy $A \rightarrow w$ új szabály alkalmazása megfelel az $A \Rightarrow^* B$ láncszabályok és a $B \rightarrow w$ eredeti szabály alkalmazásának $(B \in H(A))$.

Másrészt $L(G) \subseteq L(G')$, hiszen az új szabályokkal a láncszabályok alkalmazása elkerülhető.

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geqslant 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geqslant 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geqslant 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}$.

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geqslant 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}$.

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) \subseteq \cdots \subseteq N$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ ($i \geqslant 0$) halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}.$

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) \subseteq \cdots \subseteq N$

$k := \min\{\, 0 \leqslant i \leqslant n-1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}.$

Chomsky normálforma

$H(A)$ algoritmikus előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geqslant 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}.$

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) \subseteq \cdots \subseteq N$

$k := \min\{\, 0 \leqslant i \leqslant n-1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}.$

$H(A) := H_k(A).$

Chomsky normálforma

Állítás: $H_k(A) = \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Az állítás bizonyítása:

(⊆) i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $H_i(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Chomsky normálforma

Állítás: $H_k(A) = \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Az állítás bizonyítása:

($\subseteq$) i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $H_i(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

$i = 0$-ra nyilvánvaló.

Chomsky normálforma

Állítás: $H_k(A) = \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Az állítás bizonyítása:

($\subseteq$) i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $H_i(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

$i = 0$-ra nyilvánvaló. Ha $B \in H_{i+1}(A)$, akkor van olyan $C \in H_i(A)$, hogy $C \rightarrow B \in P$.

Chomsky normálforma

Állítás: $H_k(A) = \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Az állítás bizonyítása:

($\subseteq$) i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $H_i(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

$i = 0$-ra nyilvánvaló. Ha $B \in H_{i+1}(A)$, akkor van olyan $C \in H_i(A)$, hogy $C \to B \in P$. Mivel $C \in H_i(A)$, ezért az indukciós feltevés miatt $A \Rightarrow^* C$, és így $A \Rightarrow^* C \Rightarrow B$, tehát $H_{i+1}(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Chomsky normálforma

Állítás: $H_k(A) = \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Az állítás bizonyítása:

($\subseteq$) i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $H_i(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

$i = 0$-ra nyilvánvaló. Ha $B \in H_{i+1}(A)$, akkor van olyan $C \in H_i(A)$, hogy $C \to B \in P$. Mivel $C \in H_i(A)$, ezért az indukciós feltevés miatt $A \Rightarrow^* C$, és így $A \Rightarrow^* C \Rightarrow B$, tehát $H_{i+1}(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

($\supseteq$) Tegyük fel, hogy $A \Rightarrow^* B$, ekkor vagy $B = A$ és így $B \in H_0(A)$ vagy $\exists k \geqslant 1$, hogy $A \Rightarrow Z_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow Z_k = B$ valamely $Z_1 \ldots, Z_k \in N$-re.

Chomsky normálforma

Állítás: $H_k(A) = \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

Az állítás bizonyítása:

($\subseteq$) i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $H_i(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

$i = 0$-ra nyilvánvaló. Ha $B \in H_{i+1}(A)$, akkor van olyan $C \in H_i(A)$, hogy $C \to B \in P$. Mivel $C \in H_i(A)$, ezért az indukciós feltevés miatt $A \Rightarrow^* C$, és így $A \Rightarrow^* C \Rightarrow B$, tehát $H_{i+1}(A) \subseteq \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$.

($\supseteq$) Tegyük fel, hogy $A \Rightarrow^* B$, ekkor vagy $B = A$ és így $B \in H_0(A)$ vagy $\exists k \geqslant 1$, hogy $A \Rightarrow Z_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow Z_k = B$ valamely $Z_1 \ldots, Z_k \in N$-re.

i-re vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy $Z_i \in H_i(A)$. ($i = 1$-re az indukció kezdőlépése illetve i-ről $i + 1$-re az indukciós lépés is $H_i(A)$ definíciójából azonnal adódik.)

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimólum)

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimólum)

$S \to AB$
$A \to aAa \mid C$
$B \to bBb \mid C$
$C \to Cabc \mid b \mid \varepsilon$

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimólum)

$S \to AB$
$A \to aAa \mid C$
$B \to bBb \mid C$
$C \to Cabc \mid b \mid \varepsilon$

Megoldás:

1. lépés: Nincs S a jobboldalon, maradhat S a kezdőszimbólum.

Chomsky normálforma – példa

Példa: Hozzuk az alábbi grammatikát Chomsky normálformára! (a nagybetűk a nemterminálisok, S a kezdőszimólum)

$S \to AB$
$A \to aAa \mid C$
$B \to bBb \mid C$
$C \to Cabc \mid b \mid \varepsilon$

Megoldás:

1. lépés: Nincs S a jobboldalon, maradhat S a kezdőszimbólum.

2. lépés (Álterminálisok bevezetése):

$S \to AB$
$A \to DAD \mid C$
$B \to EBE \mid C$
$C \to CDEF \mid b \mid \varepsilon$
$D \to a$
$E \to b$
$F \to c$

Chomsky normálforma – példa

3. lépés (Hosszredukció):

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \\
A &\to DAD \mid C \\
B &\to EBE \mid C \\
C &\to CDEF \mid b \mid \varepsilon \\
D &\to a \\
E &\to b \\
F &\to c
\end{aligned}
$$

Chomsky normálforma – példa

3. lépés (Hosszredukció):

$$
\begin{array}{l}
S \to AB \\
A \to DAD \mid C \\
B \to EBE \mid C \\
C \to CDEF \mid b \mid \varepsilon \\
D \to a \\
E \to b \\
F \to c
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{l}
S \to AB \\
A \to DZ_1 \mid C \\
B \to EZ_2 \mid C \\
C \to CZ_3 \mid b \mid \varepsilon \\
D \to a \\
E \to b \\
F \to c \\
Z_1 \to AD \\
Z_2 \to BE \\
Z_3 \to DZ_4 \\
Z_4 \to EF
\end{array}
$$

Chomsky normálforma – példa

4. lépés (ε-mentesítés):

$U_0 = \{C\},\ U_1 = \{C, A, B\}, U_2 = U_3 = \{S, A, B, C\} = U.$

$S \rightarrow AB$
$A \rightarrow DZ_1 \mid C$
$B \rightarrow EZ_2 \mid C$
$C \rightarrow CZ_3 \mid b \mid \varepsilon$
$D \rightarrow a$
$E \rightarrow b$
$F \rightarrow c$
$Z_1 \rightarrow AD$
$Z_2 \rightarrow BE$
$Z_3 \rightarrow DZ_4$
$Z_4 \rightarrow EF$

Chomsky normálforma – példa

4. lépés (ε-mentesítés):

$U_0 = \{C\},\ U_1 = \{C, A, B\}, U_2 = U_3 = \{S, A, B, C\} = U.$

$$
\begin{array}{lcl}
S \to AB & & S \to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \\
A \to DZ_1 \mid C & & A \to DZ_1 \mid C \\
B \to EZ_2 \mid C & & B \to EZ_2 \mid C \\
C \to CZ_3 \mid b \mid \varepsilon & & C \to CZ_3 \mid b \mid Z_3 \\
D \to a & & D \to a \\
E \to b & \Longrightarrow & E \to b \\
F \to c & & F \to c \\
Z_1 \to AD & & Z_1 \to AD \mid D \\
Z_2 \to BE & & Z_2 \to BE \mid E \\
Z_3 \to DZ_4 & & Z_3 \to DZ_4 \\
Z_4 \to EF & & Z_4 \to EF
\end{array}
$$

Chomsky normálforma – példa

5. lépés (Láncmentesítés):
$H_0(S) = \{S\}, H_1(S) = \{S, A, B\}, H_2(S) = \{S, A, B, C\}, H_3(S) = \{S, A, B, C, Z_3\} = H(S)$

Hasonlóan $H(A) = \{A, C, Z_3\}, H(B) = \{B, C, Z_3\}$,
$H(C) = \{C, Z_3\}$, $H(Z_1) = \{D, Z_1\}$, $H(Z_2) = \{E, Z_2\}$, a többi csak önmagát tartalmazza.

$S \to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon$
$A \to DZ_1 \mid C$
$B \to EZ_2 \mid C$
$C \to CZ_3 \mid b \mid Z_3$
$D \to a$
$E \to b$
$F \to c$
$Z_1 \to AD \mid D$
$Z_2 \to BE \mid E$
$Z_3 \to DZ_4$
$Z_4 \to EF$

Chomsky normálforma – példa

5. lépés (Láncmentesítés):
$H_0(S) = \{S\}, H_1(S) = \{S, A, B\}, H_2(S) = \{S, A, B, C\}, H_3(S) = \{S, A, B, C, Z_3\} = H(S)$

Hasonlóan $H(A) = \{A, C, Z_3\}, H(B) = \{B, C, Z_3\}$, $H(C) = \{C, Z_3\}$, $H(Z_1) = \{D, Z_1\}$, $H(Z_2) = \{E, Z_2\}$, a többi csak önmagát tartalmazza.

$$
\begin{array}{lcl}
S \to AB \mid A \mid B \mid \varepsilon & & S \to AB \mid DZ_1 \mid CZ_3 \mid b \mid DZ_4 \mid EZ_2 \mid \varepsilon \\
A \to DZ_1 \mid C & & A \to DZ_1 \mid CZ_3 \mid b \mid DZ_4 \\
B \to EZ_2 \mid C & & B \to EZ_2 \mid CZ_3 \mid b \mid DZ_4 \\
C \to CZ_3 \mid b \mid Z_3 & & C \to CZ_3 \mid b \mid DZ_4 \\
D \to a & & D \to a \\
E \to b & \Longrightarrow & E \to b \\
F \to c & & F \to c \\
Z_1 \to AD \mid D & & Z_1 \to AD \mid a \\
Z_2 \to BE \mid E & & Z_2 \to BE \mid b \\
Z_3 \to DZ_4 & & Z_3 \to DZ_4 \\
Z_4 \to EF & & Z_4 \to EF
\end{array}
$$

Chomsky normálforma – az algoritmus hatékonysága

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy környezetfüggetlen grammatika. Ha $p : X \to Y_1 \cdots Y_m \in P$, akkor legyen $|p| := m + 1$, a p szabály bal- és jobboldalának összhossza. Jelölje $|G| := \sum_{p \in P} |p|$ a G grammatika **méretét**.

Chomsky normálforma – az algoritmus hatékonysága

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy környezetfüggetlen grammatika. Ha $p : X \to Y_1 \cdots Y_m \in P$, akkor legyen $|p| := m + 1$, a p szabály bal- és jobboldalának összhossza. Jelölje $|G| := \sum_{p \in P} |p|$ a G grammatika **méretét**.

A Chomsky normálformára hozás hatékonysága:
A fenti algoritmus nagyságrendileg $|G|^2$ lépésben (precízebben: $O(|G|^2)$ lépésben, lásd később) előállít egy nagyságrendileg legfeljebb $|G|^2$ méretű (precízebben: $O(|G|^2)$ méretű) G-vel ekvivalens Chomsky normálformájú grammatikát.

Chomsky normálforma – az algoritmus hatékonysága

Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy környezetfüggetlen grammatika. Ha $p : X \to Y_1 \cdots Y_m \in P$, akkor legyen $|p| := m + 1$, a p szabály bal- és jobboldalának összhossza. Jelölje $|G| := \sum_{p \in P} |p|$ a G grammatika **méretét**.

A Chomsky normálformára hozás hatékonysága:
A fenti algoritmus nagyságrendileg $|G|^2$ lépésben (precízebben: $O(|G|^2)$ lépésben, lásd később) előállít egy nagyságrendileg legfeljebb $|G|^2$ méretű (precízebben: $O(|G|^2)$ méretű) G-vel ekvivalens Chomsky normálformájú grammatikát.

Megjegyzés: A méretnövekedés a láncmentesítés kivételével lineáris.