

# Logika - Bizonyításelmélet

### Alapvető axiomasémák

$$(C1) \quad A \supset (B \supset A)$$

$$(C2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(C3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

### Alapvető axiomasémák

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$
- (C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

### Egy egyszerű levezetés

$\{X\} \vdash_0 Y \supset X$

1.  $X \supset (Y \supset X)$  [C1; A||X; B||Y]
2.  $X$  [hip]
3.  $Y \supset X$  [mp(1,2)]

### Alapvető axiomasémák

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$
- (C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 1. Feladat

$\vdash_0 A \supset A$

1.  $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$
2.  $A \supset ((A \supset A) \supset A)$
3.  $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$
4.  $A \supset (A \supset A)$
5.  $A \supset A$

Ez után használható axiómaséma: Biz1 -  $A \supset A$

### Alapvető axiomasémák

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$
- (C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 1. Feladat

$\vdash_0 A \supset A$

- |    |   |                                    |
|----|---|------------------------------------|
| 1. | $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$ | $[C2; A  A; B  A \supset A; C  A]$ |
| 2. | $A \supset ((A \supset A) \supset A)$   | $[C1; A  A; B  A \supset A]$       |
| 3. | $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$   | $[mp(1,2)]$                        |
| 4. | $A \supset (A \supset A)$   | $[C1; A  A; B  A]$                 |
| 5. | $A \supset A$   | $[mp(3,4)]$                        |

Ez után használható axiómaséma: Biz1 -  $A \supset A$

## Dedukciós tétel

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G \Leftrightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\} \vdash_0 F_n \supset G$$

## Dedukciós tétel

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G \Leftrightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\} \vdash_0 F_n \supset G$$

### 2. Feladat

Készítsük el az előző levezetést úgy, hogy használjuk a dedukciós tételt is:

$$\vdash_0 A \supset A \Leftrightarrow \{A\} \vdash_0 A$$

Bizonyítani kell:  $\{A\} \vdash_0 A$

## Dedukciós tétel

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G \Leftrightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\} \vdash_0 F_n \supset G$$

## 2. Feladat

Készítsük el az előző levezetést úgy, hogy használjuk a dedukciós tételt is:

$$\vdash_0 A \supset A \Leftrightarrow \{A\} \vdash_0 A$$

Bizonyítani kell:  $\{A\} \vdash_0 A$

1.  $A$  [hip]



### 3. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az  $A$  és  $\neg\neg A$  formulák ekvivalensek, azaz

$\{\neg\neg A\} \vdash_0 A$ ,

illetve

$\{A\} \vdash_0 \neg\neg A$

### Használható axiomasémák

$$(C1) \quad A \supset (B \supset A)$$

$$(C2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(C3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

$$(Biz1) \quad A \supset A$$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

$$\{\neg\neg A\} \vdash_0 A$$

$$1. \quad (\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$$

$$2. \quad \neg A \supset \neg A$$

$$3. \quad (\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$$

$$4. \quad \neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$$

$$5. \quad \neg\neg A$$

$$6. \quad \neg A \supset \neg\neg A$$

$$7. \quad A$$

Ez után használható axiómaséma: C4 -  $\neg\neg A \supset A$

### Használható axiomasémák

$$(C1) \quad A \supset (B \supset A)$$

$$(C2) \quad (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

$$(C3) \quad (\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$$

$$(Biz1) \quad A \supset A$$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$

$$\{\neg\neg A\} \vdash_0 A$$

- |    |   |                                  |
|----|---|----------------------------------|
| 1. | $(\neg A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg\neg A) \supset A)$ | $[C3; A  A; B  \neg A]$          |
| 2. | $\neg A \supset \neg A$   | $[Biz1; A  \neg A]$              |
| 3. | $(\neg A \supset \neg\neg A) \supset A$                                   | $[mp(1,2)]$                      |
| 4. | $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg A)$                          | $[C1; A  \neg\neg A; B  \neg A]$ |
| 5. | $\neg\neg A$  | $[hip]$                          |
| 6. | $\neg A \supset \neg\neg A$   | $[mp(4,5)]$                      |
| 7. | $A$   | $[mp(3,6)]$                      |

Ez után használható axiómaséma: C4 -  $\neg\neg A \supset A$

### Használható axiomasémák

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$   
(C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$   
(Biz1)  $A \supset A$   
(C4)  $\neg\neg A \supset A$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{A\} \vdash_0 \neg\neg A$

- |    |   |                                   |
|----|---|-----------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg\neg A \supset A) \supset ((\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A)$ | [C3; A   $\neg\neg A$ ; B  A]     |
| 2. | $A \supset (\neg\neg\neg A \supset A)$  | [C1; A  A; B   $\neg\neg\neg A$ ] |
| 3. | $A$   | [hip]                             |
| 4. | $\neg\neg\neg A \supset A$  | [mp(2,3)]                         |
| 5. | $(\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A$                                      | [mp(1,4)]                         |
| 6. | $\neg\neg\neg A \supset \neg A$   | [C4; A   $\neg A$ ]               |
| 7. | $\neg\neg A$  | [mp(5,6)]                         |

Ez után használható axiómaséma: Biz3 -  $A \supset \neg\neg A$

#### Használható axiomasémák

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$
- (C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (Biz1)  $A \supset A$
- (C4)  $\neg\neg A \supset A$
- (Biz3)  $A \supset \neg\neg A$

#### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

## 4. Feladat

Készítsük el a következő levezetést:  $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

Dedukciós tétel használata után a következő levezetés kell:  $\{A \supset B, \neg\neg A\} \vdash_0 \neg\neg B$

1.  $B \supset \neg\neg B$  [Biz3; A||B]
2.  $A \supset B$  [hip]
3.  $\neg\neg A \supset A$  [C4; A||A]
4.  $\neg\neg A$  [hip]
5.  $A$  [mp(3,4)]
6.  $B$  [mp(2,5)]
7.  $\neg\neg B$  [mp(1,6)]

Ez után használható axiómaséma: Biz4 -  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

## 5. Feladat

Egy bál szervezése a feladatod. Mikor a bejáratot ellenőrzöd, két feliratot látsz kiírva. 1. Ha Ön időben érkezett, akkor az üdvözlő italokat a bejárat melletti asztalon találja. 2. Ha az üdvözlő italokat nem találja a bejárat melletti asztalon, akkor Ön nem érkezett időben.

Bár az információ, amit hordoznak nem túl egyértelmű, téged mégis a redundancia zavar, amit felismersz bennük. Hirtelen eszedbe jut, hogy az ítéletkalkulus segítségével egyszerűen el tudnád dönteni, hogy a két állítás ugyanaz-e. Neki is állsz az állítások formalizálásának, és kiszámolod a két levezetést, amely az ekvivalencia megállapításához szükséges. Kérlek írd le a folyamatot!

Bizonyítani kell:

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$ , illetve

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

### Használható axiomasémák

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (Biz1)  $A \supset A$   
 (C4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (Biz3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (Biz4)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{X \supset Y\} \vdash_0 \neg Y \supset \neg X$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{X \supset Y, \neg Y\} \vdash_0 \neg X$

- |    |  |                                      |
|----|--|--------------------------------------|
| 1. | $(\neg\neg X \supset \neg Y) \supset ((\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X)$ | [C3; $A  \neg\neg X$ ; $B  \neg Y$ ] |
| 2. | $\neg Y \supset (\neg\neg X \supset \neg Y)$   | [C1; $A  \neg Y$ ; $B  \neg\neg X$ ] |
| 3. | $\neg Y$   | [hip]                                |
| 4. | $\neg\neg X \supset \neg Y$  | [mp(2,3)]                            |
| 5. | $(\neg\neg X \supset \neg\neg Y) \supset \neg X$                                       | [mp(1,4)]                            |
| 6. | $(X \supset Y) \supset (\neg\neg X \supset \neg\neg Y)$                                | [Biz4; $A  X$ ; $B  Y$ ]             |
| 7. | $X \supset Y$  | [hip]                                |
| 8. | $\neg\neg X \supset \neg\neg Y$  | [mp(5,6)]                            |
| 9. | $\neg X$   | [mp(3,6)]                            |

### Használható axiomasémák

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$   
(C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
(C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (Biz1)  $A \supset A$   
(C4)  $\neg\neg A \supset A$   
(Biz3)  $A \supset \neg\neg A$   
(Biz4)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

### Levezetési szabály (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$

$\{\neg Y \supset \neg X\} \vdash_0 X \supset Y$

Dedukciós tétel alkalmazása után:  $\{\neg Y \supset \neg X, X\} \vdash_0 Y$

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1. | $(\neg Y \supset \neg X) \supset ((\neg Y \supset \neg\neg X) \supset Y)$ | [C3; A  Y; B   $\neg X$ ]              |
| 2. | $\neg Y \supset \neg X$   | [hip]                                  |
| 3. | $(\neg Y \supset \neg\neg X) \supset Y$                                   | [mp(1,2)]                              |
| 4. | $\neg\neg X \supset (\neg Y \supset \neg\neg X)$                          | [C1; A   $\neg\neg X$ ; B   $\neg Y$ ] |
| 5. | $X \supset \neg\neg X$  | [Biz3; A  X]                           |
| 6. | $X$   | [hip]                                  |
| 7. | $\neg\neg X$  | [mp(5,6)]                              |
| 8. | $\neg Y \supset \neg\neg X$   | [mp(4,7)]                              |
| 9. | $Y$   | [mp(3,8)]                              |



**Használható axiómasémák**

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$   
 (C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

- (Biz1)  $A \supset A$   
 (C4)  $\neg\neg A \supset A$   
 (Biz3)  $A \supset \neg\neg A$   
 (Biz4)  $(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$

**Levezetési szabály (modus ponens)**

$$\{A \supset B, A\} \vdash_0 B$$
**6. Feladat**

Nyomozós példa (rövidített verzió):  $\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \vdash_0 \neg F$

- |     |  |  |
|-----|--|--|
| 1.  | $(\neg\neg F \supset \neg K) \supset ((\neg\neg F \supset \neg\neg K) \supset \neg F)$ | [C3; A   $\neg F$ ; B   $\neg K$ ]     |
| 2.  | $\neg K \supset (\neg\neg F \supset \neg K)$   | [C1; A   $\neg K$ ; B   $\neg\neg F$ ] |
| 3.  | $(\neg\neg K \supset \neg A) \supset ((\neg\neg K \supset \neg\neg A) \supset \neg K)$ | [C3; A   $\neg K$ ; B   $\neg A$ ]     |
| 4.  | $\neg A \supset (\neg\neg K \supset \neg A)$   | [C1; A   $\neg A$ ; B   $\neg\neg K$ ] |
| 5.  | $\neg A$   | [hip]                                  |
| 6.  | $\neg\neg K \supset \neg A$  | [mp(4,5)]                              |
| 7.  | $(\neg\neg K \supset \neg\neg A) \supset \neg K$                                       | [mp(3,6)]                              |
| 8.  | $(K \supset A) \supset (\neg\neg K \supset \neg\neg A)$                                | [Biz4; A   $K$ ; B   $A$ ]             |
| 9.  | $K \supset A$  | [hip]                                  |
| 10. | $\neg\neg K \supset \neg\neg A$  | [mp(8,9)]                              |
| 11. | $\neg K$   | [mp(7,10)]                             |
| 12. | $\neg\neg F \supset \neg K$  | [mp(2,11)]                             |
| 13. | $(\neg\neg F \supset \neg\neg K) \supset \neg F$                                       | [mp(1,12)]                             |
| 14. | $(F \supset K) \supset (\neg\neg F \supset \neg\neg K)$                                | [Biz4; A   $F$ ; B   $K$ ]             |
| 15. | $F \supset K$  | [hip]                                  |
| 16. | $\neg\neg F \supset \neg\neg K$  | [mp(14,15)]                            |
| 17. | $\neg F$   | [mp(13,16)]                            |