Numerikus módszerek 2B.

3. előadás: Csebisev polinomok

Dr. Bozsik József

ELTE IK

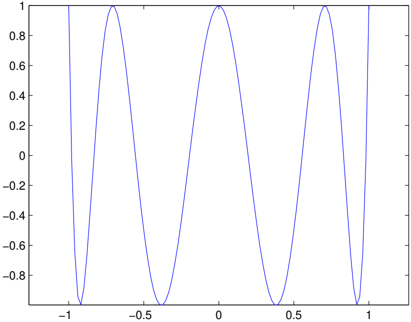
2020. szeptember 24.

Tartalomjegyzék

Definíció: Csebisev-polinom

A $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$, $x \in [-1; 1]$ függvényt n-edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

A 8-adfokú Csebisev-polinom:



1. Tétel: Rekurzió

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x,$$
$$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Biz.: Vezessük be az $\alpha = \arccos(x)$ jelölést ($x = \cos(\alpha)$):

$$2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) =$$
$$= 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - [\cos(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(n\alpha)\sin(\alpha)] =$$
$$= \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha) = \cos((n+1)\alpha) = T_{n+1}(x).$$

Következmény:

$T_n \in P_n$ és főegyütthatója: 2^{n-1} ($n \geq 1$)-re.

Definíció:

$$\widetilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom. $\widetilde{T}_n \in P_n^{(1)}$, ahol
$P_n^{(1)}$: az 1 főegyütthatós n-edfokú polinomok halmaza.

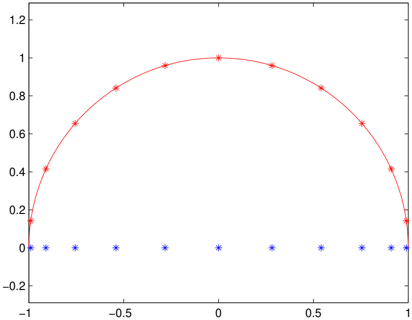
2. Tétel:

- T_n-nek n db különböző valós gyöke van $[-1; 1]$-en.
- A gyökök a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.
- Ha n páros, akkor T_n páros függvény,
  ha n páratlan, akkor T_n páratlan függvény.

Biz.: $\cos(n \arccos(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; (k \in Z)$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \;\; (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom gyökei (kékkel):



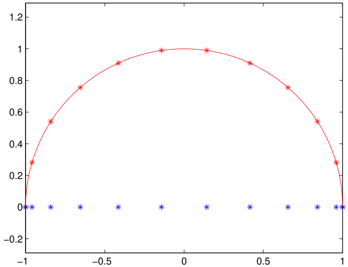
3. Tétel:

T_n-nek $n+1$ db szélsőérték helye van $[-1;1]$-en.

Biz.: $\cos(n \arccos(x)) = (-1)^k \quad \Leftrightarrow \quad n \arccos(\xi_k) = k\pi, \quad (k \in Z)$

$$\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom szélsőértékhelyei (kékkel):



4. Tétel: Csebisev-tétel

A $(T_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer extremális tulajdonsága:

$$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{Q}\|_\infty = \|\widetilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\widetilde{Q}\|_\infty := \max_{x \in [-1;1]} |\widetilde{Q}(x)|$.

Alkalmazás: Az interpolációs hibaformulában az $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ függvény 1 főegyütthatós $n+1$-edfokú polinom, alkalmazhatjuk rá a Csebisev-tételt. Ha a $[-1;1]$-en vett interpoláció során az alappontok az $n+1$-edfokú Csebisev-polinom gyökei, vagyis $\omega_n(x) \equiv \widetilde{T}_{n+1}(x)$, akkor a hiba a $[-1;1]$ intervallumon minimális lesz.

5. Tétel: Az interpoláció hibája $[-1;1]$-en

A $[-1;1]$-en vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[-1;1]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Biz.: Lásd a Csebisev-tételt és a következményét.

Megj.: Ha az interpolációs alappontokat választhatjuk, akkor azok a Csebisev-polinom gyökei legyenek.

6. Tétel: Az interpoláció hibája $[a;b]$-n

Az $[a;b]$-n vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[a;b]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az $[a;b]$-be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \\ = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$

Biz.: Lásd a Csebisev-tételt és a $\varphi : [-1;1] \to [a;b]$ lineáris transzformációt:

$$\varphi(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad x \in [-1;1].$$

Tartalomjegyzék

Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az $(x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontsorozat esetén jelöljük (L_n)-nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$\begin{array}{ll}
\left(x_0^{(0)}\right) & \to L_0 \\
\left(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\right) & \to L_1 \\
\left(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) & \to L_2 \\
\vdots & \vdots \\
\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\right) & \to L_n
\end{array}$$

Kérdések:

1. (L_n) egyenletesen konvergál-e f-hez, azaz
$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0 \ ?$$
2. Milyen f-re?
3. Milyen alappontrendszer esetén?

Az interpolációs polinomok konvergenciája

Tétel:

1. Tegyük fel, hogy $f \in C^\infty[a;b]$ és
2. $\exists\ M > 0: \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n \ \ (\forall\ n \in \mathbb{N})$.

Ekkor $\forall\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Biz.: A hibaformulából levezethető.

Az interpolációs polinomok konvergenciája

Tétel: Marcinkiewicz

$\forall\ f \in C[a;b]$ esetén $\exists\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Tétel: Faber

$\forall\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén $\exists\ f \in C[a;b]$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty \neq 0.$$

Az interpoláció alkalmazása $f(x) = 0$ típusú egyenletek megoldására, az x^* gyök közelítésére.

1. Az $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ alappontokra és $f(x_0), \dots, f(x_n)$ függvényértékekre felírjuk az $L_n(x)$ interpolációs polinomot.

$$L_n(x^*) = 0 \text{ megoldjuk} \quad \to \quad x_{k+1} := x^*$$

   Ezt alkalmaztuk a szelő-módszer és a Newton-módszer esetén is. $n > 2$-re problémás a gyökkeresés, nem általánosítható.

2. Tegyük fel, hogy f invertálható $[a; b]$-n, ekkor az f függvény helyett az inverzét közelítjük.

$$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = f^{-1}(0) \text{ helyettesítés}$$

   Az $f(x_0), \dots, f(x_n)$ alappontokra és $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ függvényértékekre felírjuk az $Q_n(y)$ interpolációs polinomot.

$$Q_n(y) \approx f^{-1}(y), \quad \to \quad x_{k+1} := Q_n(0)$$