Analízis 2.
Programtervező informatikus szak
A,B, C szakirány

Gyakorlatanyagok

$\boxed{\text{1. és 2. gyakorlat}}$

Függvények határértéke

■ Szükséges ismeretek

- Definiálja az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $r > 0$ *sugarú környezetét*.
- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen van határértéke?
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.
- Írja le a *hatványsor* definícióját.
- Definiálja az exp függvényt.
- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

■ Feladatok

1. Legyen f valós-valós függvény. Fogalmazza meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel is az alábbi állításokat:

(a) $\lim_{-2} f = 7$, (b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

2. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

M. **Kritikus határértékek vizsgálata.** Függvények határértékének a meghatározásánál „szerencsés esetekben" alkalmazhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó (igen általános!) tételünket. Ezek az eredmények akkor használhatók, ha a tételben szereplő $\overline{\mathbb{R}}$-beli $A+B$, AB, A/B műveletek értelmezve vannak. Ha valamelyik művelet nincs értelmezve, akkor a megfelelő függvények határértékéről általában semmit sem mondhatunk. Ezeket a **kritikus határértékeket** röviden a

$$(+\infty)+(-\infty), \qquad 0\cdot(\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

szimbólumokkal szoktuk jelölni. Ilyen esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert" követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon" (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékké átalakítani.

3. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$, (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}$.

4. A „gyöktelenítés technikájával” határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n=2,3,\ldots)$.

5. A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ felhasználásával számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

6. A hatványsorokra vonatkozó ismeretek alkalmazásával határozza meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

■ Házi feladatok

1. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+5}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$.

■ Gyakorló feladatok

1. A definíció alapján lássa be, hogy

(a) minden $a\in\mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, ahol $n=1,2,3,\ldots$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, ha $n=1,2,3,\ldots$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n=2,4,6,\ldots \\ -\infty & \text{ha } n=1,3,5,\ldots; \end{cases}$

(d) minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$, ha $n = 1, 2, 3, \dots$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} \nexists, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \dots \\ = +\infty & \text{ha } n = 2, 4, 6, \dots \ . \end{cases}$

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^3-1} \right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{n}{1-x^n} - \dfrac{m}{1-x^m} \right) \qquad (m, n = 1, 2, \dots)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x \left[\dfrac{1}{x} \right]$, ahol $[x]$ az $x \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{x^2+1} - x\big)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n = 2, 3, \dots)$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

3. **Polinom határértéke.** Legyen $p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ *polinom*, ahol $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \neq 0$. Mutassa meg, hogy

(a) minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$.

M. A (b) és (c) állítások tehát azt jelentik, hogy polinomok „viselkedését” a plusz/mínusz végtelen környezetében a polinom főtagja (az $\alpha_n x^n$ tag, illetve még pontosabban az α_n főegyüttható előjele és n paritása) határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik a főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével.

4. **Racionális törtfüggvények határértéke.** Legyen p és q polinom, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Vizsgáljuk a következő határértéket:

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

A lehetséges esetek: $a = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$; $q(a) \neq 0$, $q(a) = 0$; egyoldali határértékek.

5. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ mellett igaz az, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2-x+1} - (ax+b)\big) = 0$?

6. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek az értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke:

(a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \{x\}$, ahol $\{x\} := x - [x]$ az x valós szám tört része,

(b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - \{x\}$,

(c) $f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

(e) **Riemann-függvény:**

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, (p, q) = 1, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(itt (p, q) jelöli a p és q számok legnagyobb közös osztóját).

$\boxed{\text{3. és 4. gyakorlat}}$

Függvények folytonossága

■ Szükséges definíciók és tételek

- Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.
- Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?
- Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?
- Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?
- Fogalmazza meg a hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételt.
- Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?
- Mit jelent az, hogy egy függvény jobbról folytonos egy pontban?
- Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?
- Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?
- Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?
- Fogalmazza meg a *Bolzano–Darboux-tételt.*
- Mit jelent az, hogy egy függvény *Darboux-tulajdonságú*?
- Mi a kapcsolat a Darboux-tulajdonság és a folytonosság között?
- Mit tud mondani az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b, a, b \in \mathbb{R})$ inverz függvényének a folytonosságáról?
- Milyen állítást ismer *tetszőleges intervallumon* értelmezett függvény inverzének a folytonosságáról?
- Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.
- Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.
- Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

■ Feladatok

1. Mit jelent az, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *nem* folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban?

2. Jelölje r egy egységnyi tömegű testnek a Föld középpontjától vett távolságát. A Föld gravitációs tere által a testre gyakorolt erő

$$F : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3}, & r < R, \\ \dfrac{GM}{r^2}, & r \geq R, \end{cases}$$

ahol M a Föld tömege, R a Föld sugara, G pedig a gravitációs állandó. Folytonosan függ-e a gravitációs erő az r távolságtól?

3. Határozza meg, hogy mely pontokban *nem* folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} 2x + 1, & x \leq -1 \\ 3x, & -1 < x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

függvény. Döntse el, hogy ezekben a pontokban vajon folytonos-e jobbról, illetve balról.

4. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor az a pontnak létezik olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel.

5. Értelmezhető-e az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ függvény úgy, hogy *mindenütt* folytonos legyen?

6. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha^2, & \text{ha } x \in (-\infty, 4) \\ \alpha x + 20, & \text{ha } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

függvény?

7. Határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \\ 0, & \text{ha } x = 2 \text{ vagy } x = 5 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

8. Igazolja, hogy az

$$\ln x = e^x - 3$$

egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1, 2)$ intervallumban.

9. Mutassa meg, hogy az

$$e^x = 2 - x$$

egyenletnek van legalább egy megoldása.

■ Házi feladatok

1. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1, & \text{ha } x \le 1 \\ -x + 3, & \text{ha } 1 < x; \end{cases}$$

függvény?

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \\ 0, & \text{ha } x = -1 \\ \alpha, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

3. Igazolja, hogy az

$$x^2 = \sqrt{x+1}$$

egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1,2)$ intervallumban.

4. Mutassa meg, hogy az

$$x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$$

egyenletnek van legalább egy megoldása.

■ Gyakorló feladatok

1. Az f valós-valós függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli folytonossága ekvivalens-e a következővel

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+,\ \text{hogy } \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ és } \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon?$$

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az alábbi függvények folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát:

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x-7}{|x-7|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{7\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 7; \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+64}{x+4}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \\ \alpha, & \text{ha } x = -4; \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{9\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 9; \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

3. Értelmezze az alábbi függvényeket a 0 pontban úgy, hogy ott folytonosak legyenek:

(a) $f(x) := \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}),$

(b) $f(x) := \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$

4. Igazolja, hogy a következő egyenleteknek van legalább egy megoldása az I intervallumban, ha

(a) $x^2 - 3x + 1 = 0, \quad I = (0,1);$ (b) $\cos x = x, \quad I = (0,2).$

5. Legyen f és g valós-valós függvény.

(a) Lehet-e az $f+g, fg, f/g$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, ha az f és a g függvénynek az a pont szakadási helye?

(b) Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos, a g függvénynek pedig szakadása van az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban. Lehet-e az $f+g, fg, f/g$ függvény folytonos a-ban?

6. Egy tibeti szerzetes egy nap reggel 7-kor elindul a kolostorból a szokott ösvényen a hegy tetején lévő szentélybe, ahova este 7-kor meg is érkezik. Másnap reggel 7-kor visszaindul ugyanazon az ösvényen a kolostorba, és este 7-kor visszaérkezik. Bizonyítsa be, hogy van olyan pont az ösvényen, amelyiken mindkét nap ugyanabban az időben haladt át.

7. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény határértéke mind $+\infty$-ben, mind pedig $-\infty$-ben $+\infty$. Igazolja, hogy ekkor f-nek létezik abszolút minimuma.

8. Igazolja, hogy az $f(x) := (1 + x^2)\operatorname{sign} x$ $(x \in \mathbb{R})$ szakadásos függvénynek az inverze folytonos.

9. Mutassa meg, hogy a *Riemann-függvény* (l. az 5. oldalt) az irracionális pontokban folytonos, de a racionális helyeken szakadása van.

5. és 6. gyakorlat

Differenciálszámítás

■ Szükséges ismeretek

- Mi a belső pont definíciója?
- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?
- Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?
- Mi a jobb oldali derivált definíciója?
- Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?
- Mi az érintő definíciója?
- Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Írja fel az $\exp_a$ $(a \in \mathbb{R},\ a > 0)$ függvény deriváltját valamely helyen.
- Írja fel a $\log_a$ $(a \in \mathbb{R},\ 0 < a \neq 1)$ függvény deriváltját valamely helyen.

■ Feladatok

1. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

(a) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\ (x > -1),\ a := 3;$

(b) $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9}$ $\ (\pm 3 \neq x \in \mathbb{R}),\ a := -1.$

2. Gyakorolja a mechanikus deriválást:

(a) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5},$

(b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}},$

(c) $f(x) := x^2 \sin x,$

(d) $f(x) := \dfrac{x^2+3}{x^2-x-2}.$

3. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva határozza meg $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \operatorname{tg}(5x^2+3x),$

(b) $f(x) := \sin\dfrac{x^2+1}{x+3},$

(c) $f(x) := \sqrt{x^3+2x+1},$

(d) $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}}.$

4. Határozza meg $f'(x)$-et, ha

$$f(x) := (\ln x)^x \quad (x > 1).$$

5. Legyen α valós paraméter. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat.

6. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét, ha

$$f(x) := \sqrt{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a := \frac{1}{2}.$$

7. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$$

határértéket.

■ Házi feladatok

1. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

$$f(x) := \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \; a := -1.$$

2. Legyenek a és b valós paraméterek. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ a \sin x + x + b, & x > 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat.

3. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét, ha

$$f(x) := \sin \frac{x - 1}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = \frac{1}{2}.$$

■ Gyakorló feladatok

1. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 + x - 2}$$

határértéket.

2. Gyakorolja a mechanikus deriválást:

(a) $f(x) := \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$, (b) $f(x) := \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$,

(c) $f(x) := \sin(\operatorname{tg}\sqrt{1+x^3})$, (d) $f(x) := \ln(\sin x) - \frac{1}{2}\sin^2 x$,

(e) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$, (f) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,

(g) $f(x) := 3^{x^2}$, (h) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$,

(i) $f(x) := \ln\big(e^{-x}\sin x\big)$, (j) $f(x) := \sqrt{1+\sin^2 x}\cdot\cos x$,

(k) $f(x) := e^x \sin x$, (l) $f(x) := x^2\sqrt[3]{x}$,

(m) $f(x) := (x+2)^8(x+3)^6$, (n) $f(x) := \big(\sin^3 x\big)\cdot\cos x$,

(o) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$, (p) $f(x) := \dfrac{\sin 2x^2}{3-\cos 2x}$,

(q) $f(x) := \ln(x^2 e^x)$, (r) $f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x)$,

(s) $f(x) := \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}}$, (t) $f(x) := \ln\big(\cos x\big)$,

(u) $f(x) := \sqrt[5]{x\operatorname{tg} x}$,

(v) $f(x) := \sin^2\big(\ln(\sqrt{1+\cos^2 x}+1)\big)$,

(w) $f(x) := (\sin x)^{\cos x}$, (x) $f(x) := (1+e^{3x+1})^{x^2+1}$.

3. Hol deriválhatók az alábbi függvények? (a, b és c valós paraméterek.) Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := \dfrac{1}{|x|+1}$ $(x\in\mathbb{R})$, (b) $f(x) := e^{|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$,

(c) $f(x) := |\ln(1+x)|$ $(x > -1)$, (d) $f(x) := \ln|x|$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$,

(e) $f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign}|x-1|)$ $(x\in\mathbb{R})$,

(f) $f(x) := \begin{cases} 1-ax, & x<0 \\ e^{-x^2}, & x\geq 0, \end{cases}$ (g) $f(x) := \begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ -x^2, & x\in\mathbb{Q}^*, \end{cases}$

(h) $f(x) := \begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0 \\ e^x, & x\geq 0. \end{cases}$

4. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét:

(a) $f(x) := \dfrac{x}{x^2-4}$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\})$, $a=1$;

(b) $f(x) := \dfrac{1}{\ln^2(x-\frac{1}{x})}$ $(x>1)$, $a=2$;

(c) $f(x) := x^{\ln x}$ $(x>0)$, $a=e^2$.

5. Írja fel az alábbi egyenletek által meghatározott síkgörbéknek a megadott pontokhoz tartozó érintőjük egyenletét:

(a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$, $(2, 1)$;

(b) $y = (e^x + e^{2x})$, $(0, 2)$.

6. Keressen az $y = e^x$ egyenletű görbéhez olyan érintőt, amely

(a) párhuzamos az $x - 4y = 1$ egyenessel,

(b) átmegy az origón.

7. Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az f függvény deriváltját g segítségével, ha:

(a) $f(x) := x^2 g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := g(x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := g^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := g(g(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(e) $f(x) := g(e^x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := e^{g(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(g) $f(x) := g(\ln x) \quad (x > 0)$,

(h) $f(x) := \ln |g(x)| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid g(y) = 0\})$.

8. Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h'-t f és g segítségével, ha

(a) $h(x) := \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $h(x) := f(g(\sin x)) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $h(x) := \log_{f(x)}\big(g(x)\big) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\})$.

9. Tegyük fel, hogy az f és a g valós-valós függvények, továbbá $a \in \operatorname{int}\big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)$. Mit lehet mondani az $f + g$, illetve az $f \cdot g$ függvény a-beli deriválhatóságáról, ha

(a) f differenciálható a-ban és g nem differenciálható a-ban;

(b) f és g egyike sem differenciálható az a pontban?

10. Adjon meg olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket és olyan $a \in \mathbb{R}$ pontot, amelyekre

(a) $g \in D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

(b) $g \notin D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$

(c) $g \notin D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

teljesül, azonban $f \circ g \in D\{a\}$.

7. gyakorlat

Differenciálszámítás (folytatás)

Feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D(\mathbb{R})$ és $f' = f$. Bizonyítsa be, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$f(x) = ce^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Mutassa meg, hogy az

(a) $f(x) := x^3 + x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény invertálható, $f^{-1} \in D$, és számítsa ki $\left(f^{-1}\right)'(2)$-t.

(b) $f(x) := x + e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2$, és számítsa ki $\left(f^{-1}\right)''(1)$-et.

3. Bizonyítsa be, hogy

(a) az $x^5 + 10x + 3 = 0$ egyenletnek egyetlen valós gyöke van;

(b) pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$ szám létezik, amelyre $e^x = 1 + x$.

4. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $1 + x < e^x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(b) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$;

(c) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$;

(d) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$;

(e) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

$\boxed{\text{8. gyakorlat}}$

Monotonitás. Szélsőértékek

■ Szükséges ismeretek

- Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?
- Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?
- Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális minimuma* van?
- Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?
- Hogyan szól a *lokális maximumra* vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?
- Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.
- Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

■ Feladatok

1. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) := x^2(x-3)$ $(x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2-6x-16}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\})$,

(c) $f(x) := x \ln x$ $(x \in (0, +\infty))$,

(d) $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{1+x}$ $(x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq -1)$.

2. Mutassa meg, hogy ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor az inverze is szigorúan monoton csökkenő.

3. Határozza meg az f függvény

(a) a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékeit az $A \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha

(ii) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10$ $(x \in \mathbb{R})$, és $A = [-1, 4]$;

(iii) $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$, és $A = \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$;

(iv) $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x}$ $(0 < x < +\infty)$, és $A = \mathcal{D}_f$.

4. Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

■ Házi feladatok

1. Mutassa meg, hogy ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekedő, akkor az inverze is szigorúan monoton növekedő.

2. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az

$$f(x) := \frac{e^x}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvényt.

3. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + x + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek

(a) a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékeit a $[-2, 0]$ halmazon.

■ Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy ha $f \in D$ és f páros (páratlan, periodikus), akkor f' páratlan (páros, periodikus).

2. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

3. Az $\ln' 1 = 1$ egyenlőség alapján bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

4. Adjon meg olyan $H \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt halmazt és olyan $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre $f'(x) > 0$ minden $x \in H$ esetén, de f nem szigorúan monoton növekedő H-n.

5. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) := 2e^{x^2 - 4x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := xe^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := xe^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ $(x > -1,\ x \neq 0)$,

(e) $f(x) := (x-3)\sqrt{x}$ $(x \in [0, +\infty))$.

6. Határozza meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit, ha

(a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \;\; (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := x^2 e^{-x} \;\; (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := x - \ln(1 + x) \;\; (x \in (-1, +\infty))$.

7. Számítsa ki az f függvény abszolút szélsőértékeit, ha

(a) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \;\; (x \in [-3, 3])$,

(b) $f(x) := x^2 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

8. A $6x + y = 9$ egyenletű egyenesen keressük meg a $(-3, 1)$-hez legközelebbi pontot.

9. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ pothoz?

10. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le.

11. Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

9. és 10. gyakorlat

Elemi függvények. Konvexitás és konkávitás. Teljes függvényvizsgálat

■ Szükséges ismeretek

- Definiálja a π számot.
- Értelmezze az $\operatorname{arc\,sin}$ függvényt, és ábrázolja egy koordinátarendszerben a $\sin$ és az $\operatorname{arc\,sin}$ függvényeket.
- Értelmezze az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt, és ábrázolja egy koordinátarendszerben a tg és az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényeket.
- Mi a kétszer deriválható függvény fogalma?
- Mi a konvex függvény definíciója?
- Jellemezze egy függvény *konvexitását* az első derivált segítségével.
- Jellemezze egy függvény *konkávitását* a második derivált segítségével.
- Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?
- Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?
- Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton csökkenésével* kapcsolatban?
- Hogyan szól a lokális minimumra vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?
- Mi a *konkáv* függvény definíciója?
- Jellemezze egy függvény *konvexitását* a második derivált segítségével.
- Milyen állítást ismer a $(-\infty)$-beli aszimptota meghatározására?

■ Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket:

$$\operatorname{arc\,sin}\tfrac{1}{2},\quad \operatorname{arc\,cos}\Big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big),\quad \operatorname{arc\,tg}1,\quad \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}.$$

2. A $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ $(y\in\mathbb{R})$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,sin}x + \operatorname{arc\,cos}x = \tfrac{\pi}{2}\qquad \big(x\in[-1,1]\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\operatorname{arc\,sin}$ és az $\operatorname{arc\,cos}$ függvények garfikonjai között?

3. A $\operatorname{ctg}y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ $\big(y\in(0,\pi)\big)$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,ctg}x = \tfrac{\pi}{2}\qquad \big(x\in\mathbb{R}\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\operatorname{arc\,tg}$ és az $\operatorname{arc\,ctg}$ függvények garfikonjai között?

4. A $\sin y = \sin(\pi - y)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával mutassa meg, hogy

$$\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & \text{ha } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases},$$

$$\operatorname{arc\,sin}(\sin(x + 2k\pi)) = \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Ennek felhasználásával ábrázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arc\,sin}(\sin x)$$

függvény grafikonját.

5. Vizsgálja meg konvexitás és konkávitás szempontjából a következő függvényeket:

(a) exp,

(b) ln,

(c) $f(x) := x^\alpha \ \big(x \in (0, +\infty)\big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n < \dfrac{x^n + y^n}{2} \qquad (1 < n \in \mathbb{N};\ x, y > 0 \text{ és } x \neq y);$

(b) $e^{\frac{x+y}{2}} < \dfrac{e^x + e^y}{2} \qquad (x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \neq y);$

7. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $f(x) := x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$

8. Van-e az f függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg.

(a) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $f(x) := \dfrac{x^2 + 9}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$

(c) $f(x) := x - 2 \operatorname{arc\,tg} x \quad (x \in \mathbb{R}).$

9. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

10. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. *Gauss-görbe*).

11. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

függvény grafikonját.

12. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x^x \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvény grafikonját.

■ Házi feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in [-1, 1]),$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

2. Bizonyítsa be, hogy

$$(x + y) \ln \frac{x + y}{2} < x \ln x + y \ln y \qquad (x, y > 0).$$

3. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \left(\frac{x + 2}{x - 3}\right)^2 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

függvény grafikonját.

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \ln\big(x^2 + 2x + 2\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

■ Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big),$

(b) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \qquad \big(x \in (-1, 1),\ x \neq 0\big).$

2. Az $\arccos(\cos x)$ alkalmas átalakításával vázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \arccos(\cos x)$$

függvény képét.

3. Bizonyítsa be, hogy

$$x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} < \lambda_1 x + \lambda_2 y \qquad (x, y > 0;\ \lambda_1, \lambda_2 > 0;\ \text{és } \lambda_1 + \lambda_2 = 1).$$

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x + 2 - \frac{4x}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

5. Teljes függvényvizsgálat elvégzése után vázolja az

$$f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$$

függvény grafikonját.

6. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

7. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x - 2\operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

8. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken, és vázolja a grafikonjukat:

(a) $f(x) := 2 - 2x^2 - x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{x(x-3)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\})$,

(d) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\})$,

(e) $f(x) := \dfrac{x^2+9}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(f) $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$,

(g) $f(x) := x + \sqrt{1-x} \qquad (x \leq 1)$,

(h) $f(x) := \sqrt{x^2 - x + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(i) $f(x) := x\sqrt{2+x} \qquad (x \geq -2)$,

(j) $f(x) := x\sqrt{8-x^2} \qquad (|x| \leq 2\sqrt{2})$,

(k) $f(x) := \sin^2 x - 2\cos x \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(l) $f(x) := e^{2x-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(m) $f(x) := \dfrac{1+x^2}{e^{x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(n) $f(x) := \ln(x^2-1) \qquad (|x| > 1)$,

(o) $f(x) := \dfrac{\ln x}{x} \qquad (x > 0)$,

(p) $f(x) := x \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(q) $f(x) := \begin{cases} x^4\bigl(2 + \sin \frac{1}{x}\bigr), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

11., 12. és 13. gyakorlat

L'Hospital-szabályok. Taylor-polinomok és Taylor-sorok. Vegyes feladatok

Szükséges ismeretek

- Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*
- Írja le a $\frac{+\infty}{-\infty}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*
- Fogalmazza meg a hatványsor összegfüggvényének a deriválására vonatkozó tételt. (L. az 5. előadást.)
- Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

Válasz: Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét: $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n$ $\big(x \in K_R(a)\big)$. Ekkor $f \in D^\infty\big(K_R(a)\big)$ és $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $\big(n = 0, 1, 2, \ldots\big)$.

- Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?
- Mi a *Taylor-polinom* definíciója?
- Fogalmazza meg a *Taylor-formula Lagrange maradéktaggal* néven tanult tételt.
- Milyen *elégséges feltételt* ismer arra, hogy egy függvény Taylor-sora előállítja a függvényt?

Feladatok

1. Mutassa meg, hogy

(a) ha $a \in (1, +\infty)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$

(azaz: $x \to +\infty$ esetén az a^x függvény gyorsabban tart végtelenhez, mint x bármely pozitív egész kitevőjű hatványa);

(b) ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$

(azaz: $x \to +\infty$ esetén x bármely pozitív egész kitevőjű hatványa gyorsabban tart végtelenhez, mint $\ln x$ bármely pozitív egész kitevőjű hatványa).

2. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket. (Minden egyes esetben állapítsa meg, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó.)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket. (Minden egyes esetben állapítsa meg, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó.)

(a) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$, (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$.

4. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, és számítsa ki a keresett határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(x+3)}{\operatorname{ch}(x-3)}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$.

A (b) feladatban figyeljük meg, hogy a L'Hospital-szabály azért nem alkalmazható, mert a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték nem létezik, pedig $\lim\limits_{0} = f \lim\limits_{0} g = 0$, ugyanakkor a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték létezik.

5. Írja fel a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot az $x+1$ hatványai szerint. A feladat általánosításaként mutassa meg, hogy ha p egy legfeljebb n-edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

6. Írja fel az f függvény $a = 0$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját, $T_{n,a}(f, x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{n,a}(f, x)|$$

hibára az I intervallumon, ha

(a) $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad I = [0, 1]$;

(b) $f(x) := \sqrt{1+x} \quad (x \in (-1, +\infty)), \quad n = 2, \quad I = [0, 1]$;

(c) $f(x) := \operatorname{tg} x \quad (|x| < \frac{\pi}{2}), \quad n = 3, \quad I = \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$.

7. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, és $f^{(n)}(0) = 0 \ (n \in \mathbb{N})$.

8. Legyen

$$f(x) := \ln(1+x) \qquad (x \in (-1, +\infty)).$$

(a) Mutassa meg, hogy az f függvény $a = 0$ ponthoz tarozó Taylor-sora:

$$T_a(f,x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) Bizonyítsa be, hogy a Taylor-sor a $(-1,1]$ intervallumon előállítja a függvényt, vagyis fennáll az

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \big(x \in (-1,1]\big)$$

egyenlőség. Speciálisan:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

9. Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Speciálisan:

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin x \cdot \ln x$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-x^2} \cdot \ln(x^2 - x + 1)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} - \frac{1}{x}\right)$, (d) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Írja fel az

$$f(x) := \sqrt[3]{1+x} \qquad \big(x \in (-1,+\infty)\big)$$

függvény 0 pont körüli második Taylor-polinomját, $T_{2,0}(f,x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{2,0}(f,x)|$$

hibára a $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ intervallumon.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}\quad (a>0)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\Big)$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} xe^{1/x} - x$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^{-x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^x$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(-\ln x)^x$.

2. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, és számítsa ki a keresett határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$.

3. Rendezze át a $p(x) := (1+2x)^3\ (x\in\mathbb{R})$ polinomot $x-\frac{1}{2}$ hatványai szerint.

4. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli n-edik Taylor-polinomját:

(a) $f(x) := \sqrt{x}\quad (x\geq 0)\qquad (n=3,\ a=1)$,

(b) $f(x) := \sin(\sin x)\quad (x\in\mathbb{R})\qquad (n=3,\ a=0)$.

5. Írja fel az alábbi f függvények $a=0$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a megadott I intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt:

(a) $f := \sin,\quad n=4,\quad I := [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$,

(b) $f(x) := \ln(1+x)\quad (x>-1),\quad n\in\mathbb{N},\quad I := [-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]$.

6. Számítsa ki ε-nál kisebb hibával az alábbi számokat a Taylor-formula felhasználásával:

(a) $e\quad (\varepsilon = 10^{-3})$, (b) $\sin 1^o\quad (\varepsilon = 10^{-5})$,

(c) $\cos 9^o\quad (\varepsilon = 10^{-5})$, (d) $\ln 1,2\quad (\varepsilon = 10^{-3})$.

7. Adja meg a következő függvények 0 pont körüli Taylor-sorát:

(a) $\displaystyle f(x) := \frac{1}{x^2-5x+6}\quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{2,3\})$,

(b) $f(x) := \sin^2 x\quad (x\in\mathbb{R})$,

(c) $\displaystyle f(x) := \frac{1}{(1-x)^2}\quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\big)$.

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

■ Vegyes feladatok

1. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített természetes szám. Igazolja, hogy

(a) $\ln^{(n)}(1+x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (x \in (-1,+\infty); \quad n \geq 1),$

(b) $\sin^{(n)} x = \sin\big(x + \dfrac{n\pi}{2}\big) \qquad (x \in \mathbb{R}),$

(c) $\cos^{(n)} x = \cos\big(x + \dfrac{n\pi}{2}\big) \qquad (x \in \mathbb{R}).$

2. Mutassa meg, hogy az f függvény invertálható, és határozza meg az inverzét:

(a) $f(x) := \pi - \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \qquad \big(x \in \big[\tfrac{1}{2}, 1\big]\big),$

(b) $f(x) := \operatorname{tg}\Big(\dfrac{\operatorname{arc\,sin}\,(2x-5)}{3}\Big) \qquad (x \in [2,3]).$

3. Az $\operatorname{arc\,cos}(\cos x)$ alkalmas átalakításával vázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arc\,cos}(\cos x)$$

függvény képét.

4. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } x > 1 \\ 2\operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ -\pi - 2\operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

5. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1),$

(b) $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1),$

(c) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).$