Bizonyítással kért tételek az 1. zh-n

1. A szuprémum elv

Tétel: Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, felülről korlátos. Ekkor A-nak van legkisebb felső korlátja, azaz $\exists \min B$

Bizonyítás: Világos, hogy $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq K \Rightarrow$ (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq K$ $(a \in A, K \in B)$ Vagyis, $\forall a \in A : a \leq \xi \to \xi$ felső korlátja A -nak $\Rightarrow \xi \in B$ Ugyanakkor: $\forall K \in B : \xi \leq K \Rightarrow \xi$ a legkisebb felső korlát $\Rightarrow \xi = \min B$

2. Az Archimedes-tétel

Tétel: $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in N : a \cdot n > b$

Bizonyítás:

1. Ha $b \leq 0$, akkor világos, hogy $b \leq 0 < a = a \cdot 1$, ha $n := 1 \Rightarrow n = 1$ jó választás
2. Feltehető, hogy $b > 0$ Áll: $\forall b > 0, \forall a > 0, \exists n \in N : a \cdot n > b$
   Indirekt: $\exists b > 0, \exists a > 0, \forall n \in N : a \cdot n \leq b$

   $A := \{a \cdot n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow b$ egy felső korlátja A-nak $\Rightarrow \xi = supA$
   $\Rightarrow \xi - a$ már nem felső korlát, azaz $\exists n_0 \in N : a \cdot n_0 > \xi$
   $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot n_0 + a > \xi \Leftrightarrow a(n_0 + 1) > \xi$

   Mivel $n_0 \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{N}$ induktív $\Rightarrow n_0 + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow a(n_0 + 1) \in A \Rightarrow \xi$ nem felső korlát

   Ellentmondás $\Rightarrow\Leftarrow$

3. A Cantor-féle közösrész-tétel

Tétel: Legyen $[a_n, b_n]$ korlátos és zárt intervallum, melyre: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$

Ekkor: $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [q_n, b_n] \neq \emptyset$

Bizonyítás: $A := \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ $B := \{b_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

Ekkor: $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ Ha $n \leq m : q_n \leq a_m \leq b_m$ Ha $m < n : a_n \leq b_n \leq b_m$

$\Rightarrow$ (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_m$ Spec: $n = m$, ekkor:
$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_n \Rightarrow \xi \in [a_n, b_n]\ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

4. Minden sorozatnak van monoton részsorozata

Tétel: Minden sorozatnak van monoton részsorozata

Bizonyítás:

1. A sorozatnak végtelen sok csúcsa van

   $\exists a_{n_0}$ csúcs $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : a_{n_0} \geq a_n \Rightarrow \exists n_1 > n_0$ és a_{n_1} csúcs
   $\Rightarrow a_{n_0} \geq q_{n_1} \Rightarrow \forall n \geq n_1 : a_{n_1} \geq a_n \Rightarrow \exists n_2 > n_1$ és a_{n_2} csúcs
   $\Rightarrow a_{n_1} \geq q_{n_2}$

   $\Rightarrow \exists a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \dots$
2. A sorozatnak véges sok csúcsa van

   $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n$ nem csúcs Legyen $n_0 = N \Rightarrow a_{n_0}$ nem csúcs
   $\Rightarrow \Rightarrow \exists n_1 \geq n_0 : a_{n_0} < a_{n_1} \Rightarrow a_{n_1}$ nem csúcs $\Rightarrow$

   $\Rightarrow n_2 \geq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2} \dots$

   $\exists a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$

5. Konvergens sorozat határértéke egyértelmű

Tétel: Az (a_n) konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás: Indirekt, Tfh: $\exists A_1, A_2, A_1 \neq A_2$ határértékek
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \epsilon$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \epsilon$

Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2) : \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - A_1| < \epsilon$
$|a_n - A_2| < \epsilon$

Legyen $\epsilon < \dfrac{|A_1 - A_2|}{2} \Rightarrow$
$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_n + a_n - A_2| \leq |A_1 - a_n| + |A_n - A_2| < 2\epsilon < |A_1 - A_2|$

Ellentmondás, $|A_1 - A_2| \not< |A_1 - A_2|$

6. A konvergencia és a korlátosság kapcsolata

Tétel: Ha a_n konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás: Legyen $\lim a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \epsilon = 1$-re is
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < 1$
$\Rightarrow |a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow |a_n| \leq max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0 - 1}|, |a_{n_0}|, a + |A|), \quad (n \in \mathbb{N})$

7. Műveletek nullsorozatokkal

Tétel: Legyen $(a_n), (b_n)$ nullsorozat. Ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ is nullsorozat.
2. Ha (c_n) korlátos, akkor $(a_n \cdot c_n)$ is nullsorozat.
3. $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.

Bizonyítás:

1. $(a_n) nullsor \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$
   $(b_n) nullsor \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n| < \frac{\epsilon}{2}$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = max(n_1, n_2), \forall n \geq n_0 : \Rightarrow (a_n + b_n)$ nullsor
   $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$
2. (c_n) korlátos $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n : |c_n| \leq K$ (a_n) nullsor
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| < \frac{\epsilon}{K}$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :$
   $|a_n \cdot c_n| < \frac{\epsilon}{K} \cdot K = \epsilon$
3. (b_n) nullsor $\Rightarrow$ (b_n) konvergens $\Rightarrow$ (b_n) korlátos (a_n) nullsor
   $\overset{2.miatt}{\Rightarrow}$ $(a_n \cdot c_n)$ nullsor

8. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

Tétel: Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$. Ekkor: $(a_n \cdot b_n)$ konvergens és $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

Bizonyítás:
$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |a_n b_n - A \cdot b_n + A \cdot b_n - AB| \leq$

$$\leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| = \underbrace{\underbrace{\underset{korlátos}{\underbrace{|b_n|}_{konvergens}} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{nullsor}}_{nullsor} + \underbrace{\underbrace{|A|}_{korlátos} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{nullsor}}_{nullsor}}_{nullsor}$$

9. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel

Tétel: Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens, $b_n \neq 0$ és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$ és $B \neq 0$. Ekkor: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergens és $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$

Bizonyítás: $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - Ab_n}{b_n B}\right| = \frac{|a_n B - AB + AB - Ab_n|}{|b_n B|} \leq$

$$\leq \underbrace{\underbrace{\frac{|B|}{|b_n||B|}}_{korlátos} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{nullsor} + \underbrace{\frac{|A|}{|b_n||B|}}_{korlátos} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{nullsor}}_{nullsor}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) nullsor \Rightarrow \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$

10. A közrefogási elv

Tétel: Tfh: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$ Ha $\lim a_n = \lim c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n$

Bizonyítás: $\lim a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$

1. $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2, \forall n \geq n_2 : A - \epsilon < c_n < A + \epsilon$

   Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2, N) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : A - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \epsilon$
   $\Rightarrow \lim b_n = A$

2. $A = \infty : lima_n = \infty \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : a_n > P$ De
   $b_n \geq a_n, \forall n \geq N \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim b_n = \infty$
   $\forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 = \max(n_1, N), \forall n \geq n_0 : b_n \geq a_n \geq P$

11. Monoton növő sorozatok határértéke (véges és végtelen eset)

Tétel:

1. Ha (a_n) monoton nő és korlátos, akkor konvergens és $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
2. Ha (a_n) mon nő és nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$

Bizonyítás:

1. (a_n) korlátos $\Rightarrow \exists \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty \Rightarrow a_n \leq \xi, \forall n$ és
   $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq \xi \Rightarrow$ $= |a - \xi| < \epsilon$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi$
   $\Rightarrow \lim a_n = \xi$

   (a_n) nem korlátos $\Rightarrow$ (a_n) felülről nem korlátos
   $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n > P \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n_0} > P \Rightarrow$
   $\Rightarrow \lim a_n = \infty$

12. A Cauchy-féle konvergencia kritérium sorozatokra

Tétel: (a_n) konvergens $\Leftrightarrow$ (a_n) Cauchy

Bizonyítás: $(\Rightarrow)$ bizonyítása: Tfh: (a_n) konvergens. Megmutatjuk, hogy (a_n) Cauchy $A := \lim(a_n),\ \ \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \mathbb{N} : |a_n - A| < \epsilon$ Legyen $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N$ Ekkor:
$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |\underset{\to\epsilon}{a_n - A}| + |\underset{\to\epsilon}{a_m - A}| < 2\epsilon$ Tehát
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq \mathbb{N} : |a_n - a_m| < 2\epsilon \Rightarrow (a_n)$ Cauchy

$(\Leftarrow)bizonyítása$: Tfh: (a_n) Cauchy. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos. Mivel (a_n) Cauchy, ezért $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |a_n - a_m| < 1$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq \underbrace{|a_n - a_N|}_{=a_n - a_m} + |a_N| < 1 + |a_N|$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| \leq K := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\} \Rightarrow (a_n)$ korlátos $\Rightarrow$ (ld.: Bolzano - Weierstrass): $\exists(a_{n_k})$ konvergens részsorozat és $A := \lim(a_{n_k})$ Megmutatjuk, hogy (a_n) is konvergens és $\lim(a_n) = A$
$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$ Mivel (a_n) Cauchy : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n_k \in \mathbb{N}, n, n_k \geq N_0 : |a_n - a_{n_k}| < \epsilon$ Mivel $\lim(a_{n_k}) = A$ ezért $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 : |a_{n_k} - A| < \epsilon$

Tehát: $\forall \epsilon > 0, \exists N := \max\{N_0, N_1\} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - A| < 2 \cdot \epsilon$
$\Rightarrow (a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = A$

13. A geometriai sorozat határértékére vonatkozó tétel

Tétel: Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ekkor: $lim(q^n) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty, & ha\ q > 1 \\ 1, & ha\ q = 1 \\ 0, & ha\ |q| < 1 \\ \nexists, & ha\ q \leq -1 \end{array} \right\}$

Bizonyítás: Ha $q = 1,\ q = 0,\ q = -1$ akkor triviális. Tfh: $q > 1$. Ekkor $\exists h \in \mathbb{R}, h > 0 : q = 1 + h \Rightarrow q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \geq n \cdot h \to +\infty$ Tfh: $q \in (-1, 1) \backslash \{0\}$, azaz $0 < |q| < 1$
$\Rightarrow \dfrac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|q|} = 1 + h \Rightarrow \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n \geq$
$\geq 1 + nh \geq n \cdot h \Rightarrow 0 \leq |q|^n \leq \dfrac{1}{nh} \to 1 \Rightarrow \lim(|q|^n) = 0$ és $\lim(q^n) = 0$

Tfh: $q < -1$, akkor $q^2 > 1$. Ekkor:

- $q^{2n} = (q^2)^n \to +\infty$
- $q^{2n+1} = q(q^2)^n \to -\infty$

$\Rightarrow \nexists \lim(q^n)$

14. Az $(\sqrt[n]{a})$ és az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat határértéke

Tétel: $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, : \lim(\sqrt[n]{a}) = 1$

Bizonyítás: Ha $a = 1 \checkmark$ Tfh: $a > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{a} > 1$
$\Rightarrow \exists h_n > 0 : \sqrt[n]{a} = 1 + h_n$
$\Rightarrow a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n \leq \dfrac{a-1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim(h_n) = 0$
$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(1 + h_n) = \lim(1) + \underbrace{\lim(h_n)}_{nullsor} = 1 \checkmark$ Tfh: $0 < a < 1$, akkor
$\dfrac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}) \to \dfrac{1}{1} = 1 \checkmark$

15. Pozitív szám m-edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével

Tétel: Legyen $2 \leq m \in \mathbb{N}$, Ekkor:

1. $\forall A > 0, \exists! \alpha > 0 : \alpha^n = A$
2. $\forall a_0 > 0, a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N})$

Az így definiált sorozat konvergens és $\lim(a_n) = \alpha$

Bizonyítás: $a_n > 0 \;\; (n \in \mathbb{N})$, (ld:: Teljes indukció) $\Rightarrow$ (a_n) alulról korlátos, ill.:

$$\frac{m}{a_{n+1}} = \left(\frac{\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n}{m}\right) \overset{\text{számtani-mértani}}{\geq} \frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot a_n \cdot \underbrace{a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{(m-1)db} = A \;\; (n \in \mathbb{N})$$

Azaz: $a_1 \geq A, a_2 \geq A, a_3 \geq A, \ldots$ Mutassuk meg, hogy az (a_{n+1}) elshiftelt sorozat monoton fogyó, azaz $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 1$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_{n+1}^{m-1}} + (m-1)a_{n+1}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_{n+1}^{m}} + (m-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{A - a_{n+1}^m}{a_{n+1}^m} + m\right) = \frac{\overset{\leq 0}{A - a_{n+1}^m}}{\underset{\leq 0}{m \cdot a_{n+1}^m}} + 1 \Rightarrow \leq 1, \text{ monoton fogyó} \Rightarrow (a_{n+1})$$

korlátos és monoton fogyó $\Rightarrow$ konvergens $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim(a_{n+1}) = \alpha$