Programozás
11. előadás

Tartalom

- Rendezési feladat
    - Specifikáció
    - Egyszerű cserés rendezés
    - Minimum-kiválasztásos rendezés
    - Buborékos rendezés
    - Javított buborékos rendezés
    - Beillesztéses rendezés
    - Javított beillesztéses rendezés
    - Szétosztó rendezés
    - Számlálva szétosztó rendezés
    - Számláló rendezés
- Rendezések hatékonysága – idő

- Algoritmusok rendezett sorozatokban
    - Keresés rendezett sorozatban
    - Rendezettek uniója, összefésülése
    - Összefésüléses rendezés
- Oszd meg és uralkodj!

Rendezési feladat

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$
  $\leq : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Y_{1..N} \in \mathbb{H}^N$
- Előfeltétel: Rendezés($\leq$) és $\text{RendezettE}_{\leq}(\mathbb{H})$
- Utófeltétel: $\text{RendezettE}_{\leq}(Y)$ és $Y \in$ Permutáció(X)
- Jelölések:
  - $\text{RendezettE}_{\leq}(X/\mathbb{H})$: $X/\mathbb{H}$ rendezett-e a $\leq$-ra?
  - $Y \in$ Permutáció(X): Y az X elemeinek egy permutációja-e?

Rendezési feladat

A rendezések egy részében olyan megvalósítást választunk, amiben a bemenetnek és a kimenetnek ugyanaz a tömb felel meg, azaz helyben rendezünk.

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $\le : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $X_{1..N}' \in \mathbb{H}^N$
- Előfeltétel: Rendezés($\le$) és $\mathrm{RendezettE}_{\le}(\mathbb{H})$
- Utófeltétel: $\mathrm{RendezettE}_{\le}(X')$ és $X' \in$ Permutáció(X)
- Jelölések:
    - X': az X kimeneti (megálláskori) értéke
    - $\mathrm{RendezettE}_{\le}(X/\mathbb{H})$: $X/\mathbb{H}$ rendezett-e a $\le$-ra?
    - $X' \in$ Permutáció(X): X' az X elemeinek egy permutációja-e?

Rendezések

(fontos új fogalmak, jelölések)

- **Aposztróf** a specifikációban:
  Ha egy adat előfordul a bemeneten és kimeneten is, akkor az UF-ben együtt kell előfordulnia az adat bemenetkori és kimenetkori értéke. Megkülönböztetésül a kimeneti értéket „megaposztrofáljuk”.
  Pl.: Z’:=a Z kimeneti (megálláskori) értéke.
- A ≤ reláció **rendezés**, ha
  1. *reflexív*: $\forall h \in \mathbb{H}: h \le h$
  2. *antiszimmetrikus*: $\forall h,i \in \mathbb{H}: h \le i$ és $i \le h \rightarrow h = i$
  3. *tranzitív*: $\forall h,i,j \in \mathbb{H}: h \le i$ és $i \le j \rightarrow h \le j$

Rendezések
(fontos új fogalmak, jelölések)

- $\mathbb{H}$ (teljesen) **rendezett halmaz**:

  RendezettE($\mathbb{H}$):=$\forall h,i \in \mathbb{H}$: $h \leq i$ vagy $i \leq h$
- **Rendezett sorozat**:

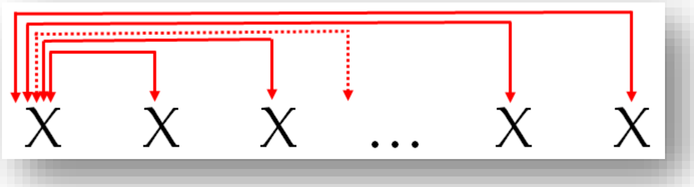
  RendezettE(Z):=$\forall i(1 \leq i \leq N-1)$: $Z_i \leq Z_{i+1}$
- **Permutáció**halmaz:

  Permutáció(Z):=a $Z \in \mathbb{H}^N$ sorozat elemeinek *összes permutáció*ját tartalmazó *halmaz*, amelynek tehát egyik eleme a kívánt rendezettségű sorozat…

Egyszerű cserés rendezés

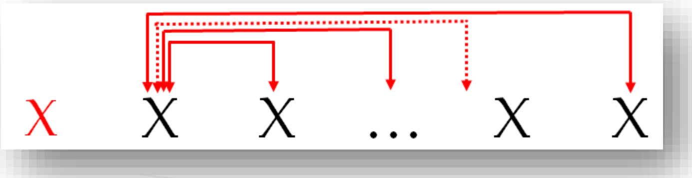
A lényeg:

- Hasonlítsuk az első elemet az összes mögötte levővel, s ha kell, cseréljük meg!



A minimum az „alsó” végére kerül.

- Ezután ugyanezt csináljuk a második elemre!



- …

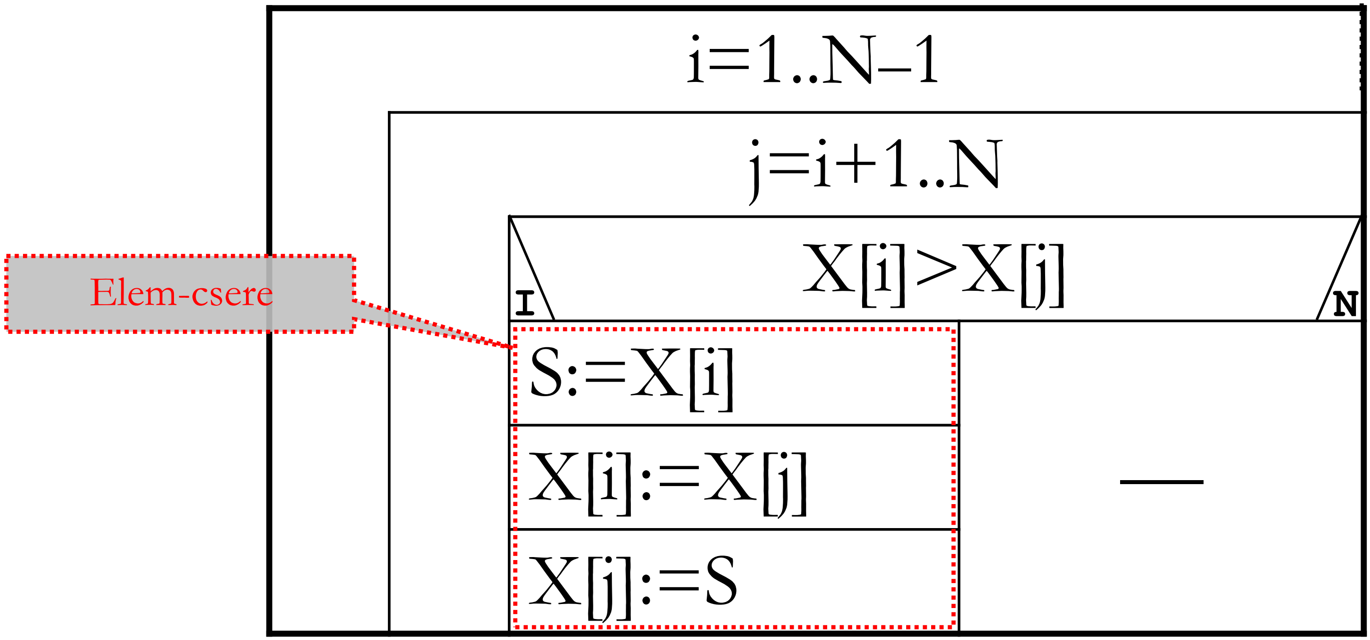
- Végül az utolsó két elemre!

A pirossal jelöltek már a helyükön vannak

Egyszerű cserés rendezés

Algoritmus:

Változó
i,j:**Egész**
S:TH



```
i=1..N–1
    j=i+1..N
        X[i]>X[j]
        I:
            S:=X[i]
            X[i]:=X[j]
            X[j]:=S
        N:
            —
```

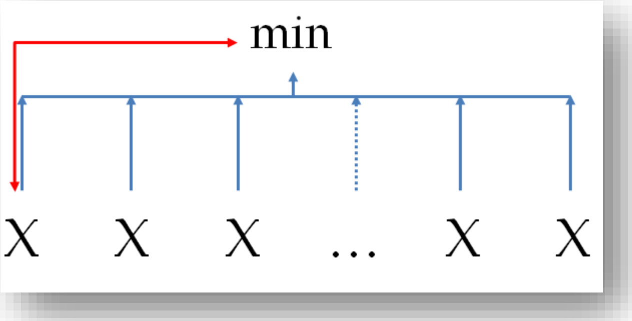
Elem-csere

- Hasonlítások száma: 1+2+...+N–1= $N\cdot\frac{N-1}{2}$
- Mozgatások száma: 0 .. $3\cdot N\cdot\frac{N-1}{2}$

Minimum-kiválasztásos rendezés

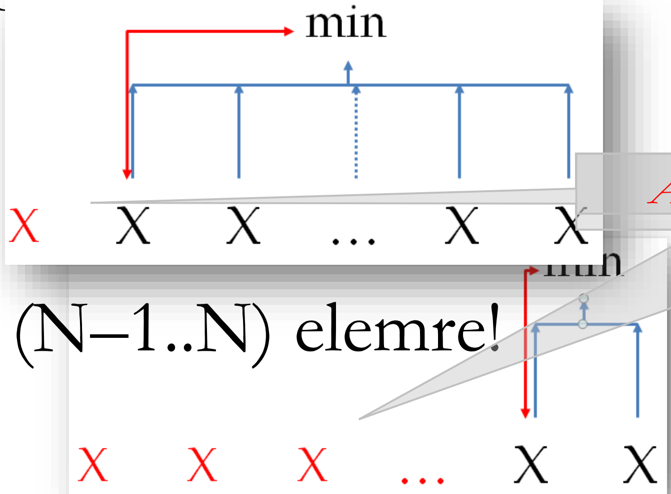
A lényeg:

- Határozzuk meg az 1..N elemek minimumát, s cseréljük meg az 1.-vel!



A minimum az „alsó” végére kerül.

- Ezután ugyanezt tegyük a 2..N elemre!
- …
- Végül az utolsó két (N–1..N) elemre!

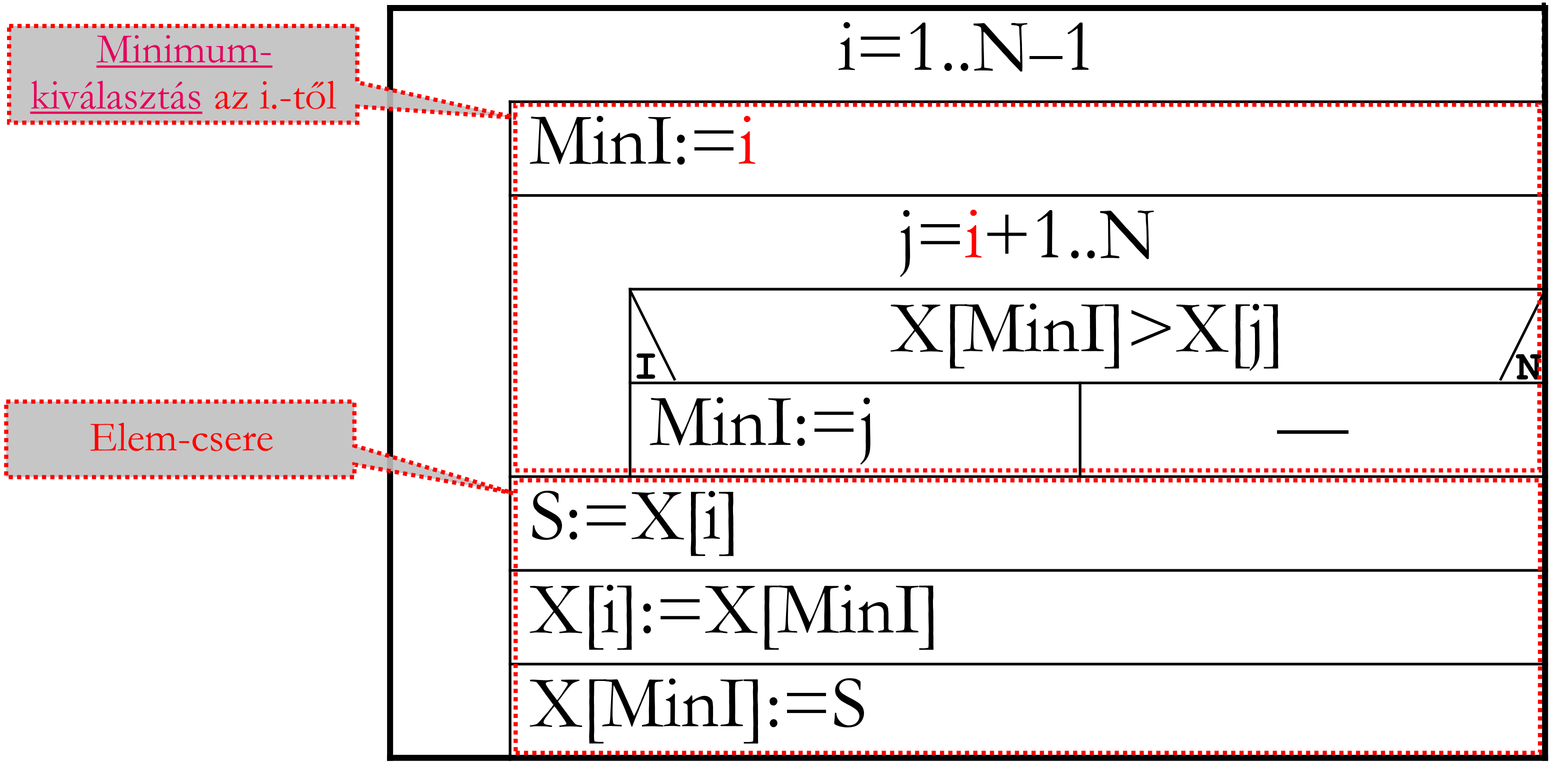


A pirossal jelöltek már a helyükön vannak

Minimum-kiválasztásos rendezés

Algoritmus:

Változó
MinI,
i,j:**Egész**
S:TH



Minimum-kiválasztás az i.-től

Elem-csere

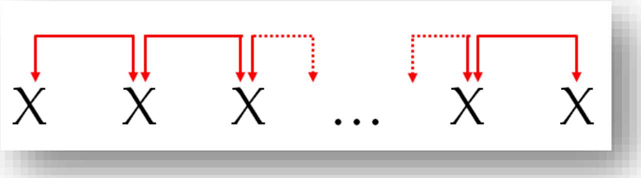
```
i=1..N–1
    MinI:=i
    j=i+1..N
        X[MinI]>X[j]
        I: MinI:=j
        N: —
    S:=X[i]
    X[i]:=X[MinI]
    X[MinI]:=S
```

- Hasonlítások száma: 1+2+...+N–1=$N\cdot\frac{N-1}{2}$
- Mozgatások száma: 3·(N–1)

Buborékos rendezés

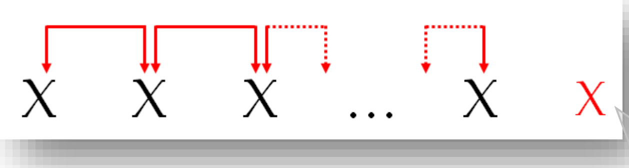
A lényeg:

- Hasonlítsunk minden elemet a mögötte levővel, s ha kell, cseréljük meg!



A maximum a „felső” végére kerül.

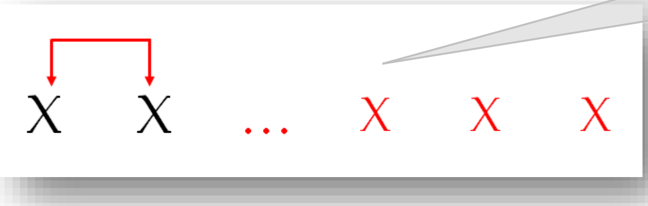
- Ezután ugyanezt csináljuk az utolsó elem nélkül!



A többiek is tartanak a helyük felé.

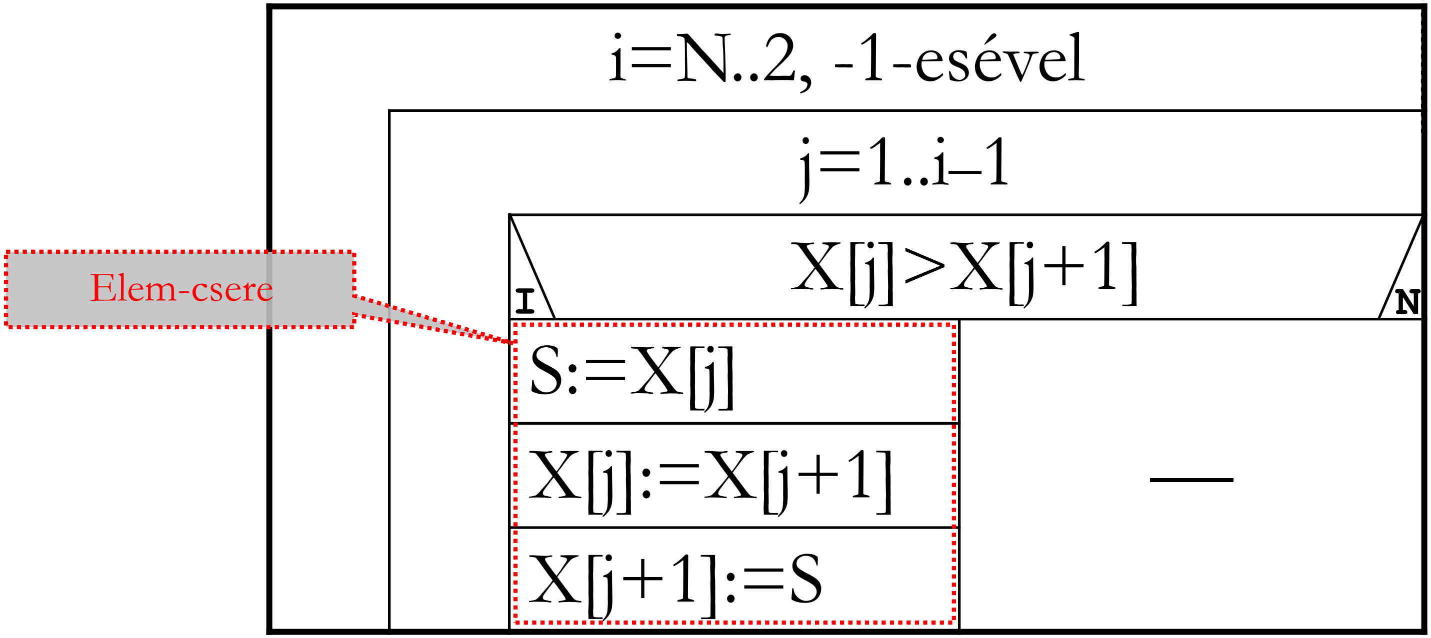
- …
- Végül az első két elemre!

A pirossal jelöltek már a helyükön vannak



Buborékos rendezés

Algoritmus:



```
i=N..2, -1-esével
  j=1..i–1
    X[j]>X[j+1]
    I
      S:=X[j]
      X[j]:=X[j+1]
      X[j+1]:=S
    N
      —
```

Elem-csere

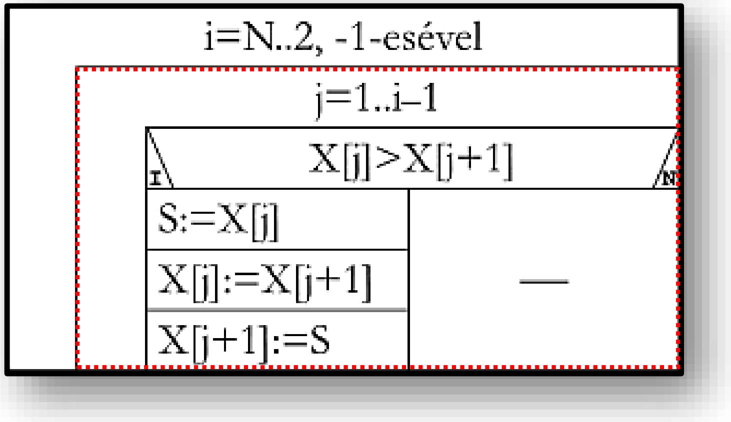
Változó
i,j:**Egész**
S:TH

- Hasonlítások száma: 1+2+...+N–1= $N\cdot\frac{N-1}{2}$
- Mozgatások száma: $0 \;..\; 3\cdot N\cdot\frac{N-1}{2}$

Javított buborékos rendezés

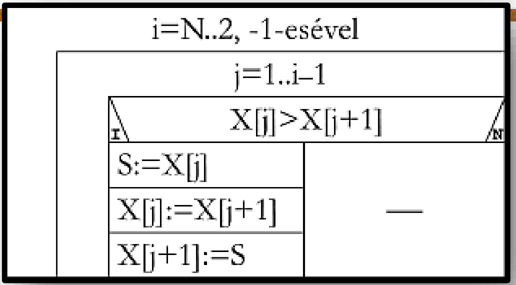
Megfigyelések:

- Ha a belső ciklusban egyáltalán nincs csere, akkor be lehetne fejezni a rendezést.
- Ha a belső ciklusban a K. helyen van az utolsó csere, akkor a K+1. helytől már biztosan jó elemek vannak, a külső ciklusváltozóval többet is léphetünk.



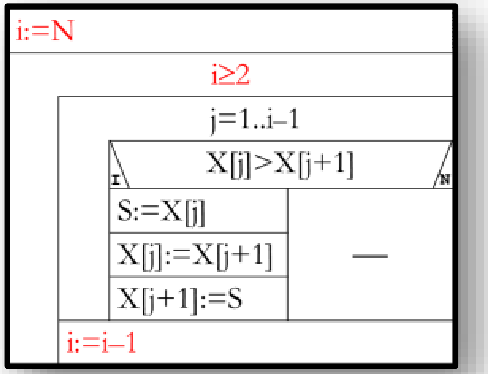
```
i=N..2, -1-esével
  j=1..i–1
    X[j]>X[j+1]
      I: S:=X[j]
         X[j]:=X[j+1]
         X[j+1]:=S
      N: —
```

Javított buborékos rendezés



```
i=N..2, -1-esével
    j=1..i–1
        X[j]>X[j+1]
            I:
                S:=X[j]
                X[j]:=X[j+1]
                X[j+1]:=S
            N:
                —
```

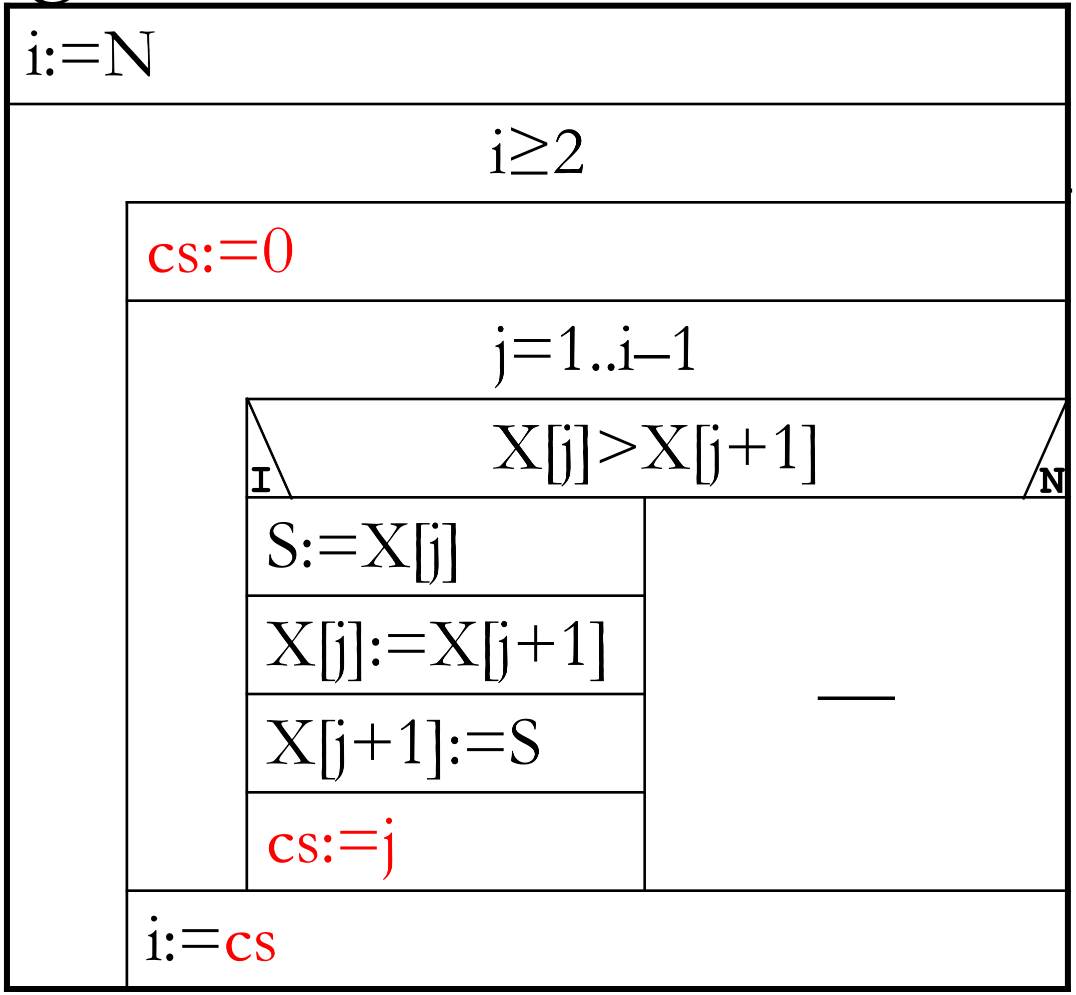
Átírás 'amíg'-os ciklussá



```
i:=N
i≥2
    j=1..i–1
        X[j]>X[j+1]
            I:
                S:=X[j]
                X[j]:=X[j+1]
                X[j+1]:=S
            N:
                —
    i:=i–1
```

Az utolsó cserehely feljegyzése

Algoritmus:



```
i:=N
i≥2
    cs:=0
    j=1..i–1
        X[j]>X[j+1]
            I:
                S:=X[j]
                X[j]:=X[j+1]
                X[j+1]:=S
                cs:=j
            N:
                —
    i:=cs
```

Változó
cs,
i,j:**Egész**
S:TH

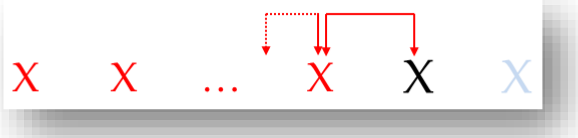
Beillesztéses rendezés

A lényeg:

- *Egy* elem *rendezett.*

- A másodikat vagy mögé, vagy elé tesszük, így már *ketten* is *rendezettek*.

- …
- Az i-ediket a kezdő, i–1 *rendezett*ben addig hozzuk előre **cserékkel**, amíg a helyére nem kerül; így már *i darab rendezett* lesz.

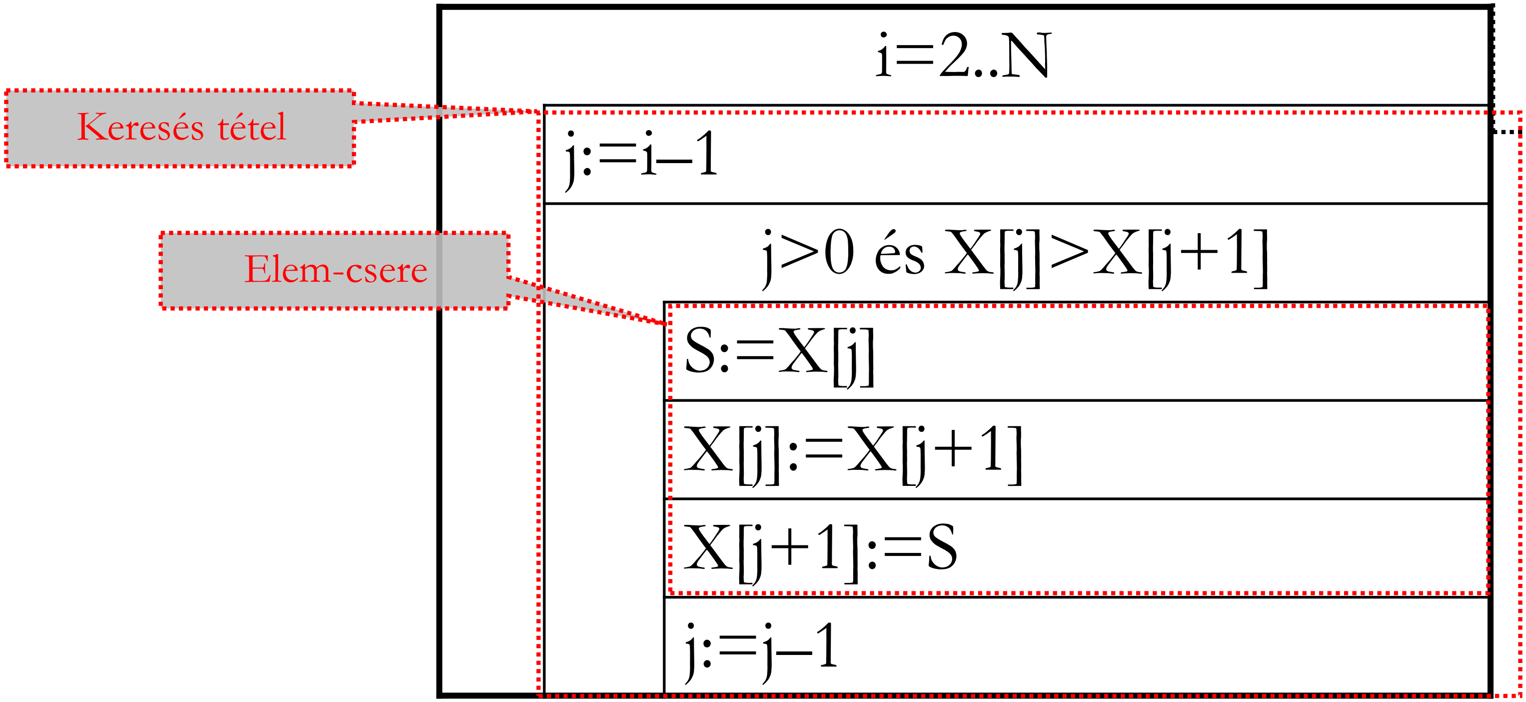


- …
- Az utolsóval ugyanígy!

Beillesztéses rendezés

Algoritmus:

Változó
i,j:**Egész**
S:TH



```
i=2..N
    j:=i–1
    j>0 és X[j]>X[j+1]
        S:=X[j]
        X[j]:=X[j+1]
        X[j+1]:=S
        j:=j–1
```

- Hasonlítások száma: N–1 . . $N\cdot\frac{N-1}{2}$
- Mozgatások száma: 0 . . $3\cdot N\cdot\frac{N-1}{2}$

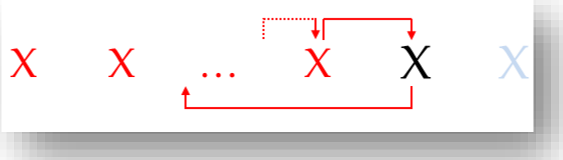
Javított beillesztéses rendezés

A lényeg:

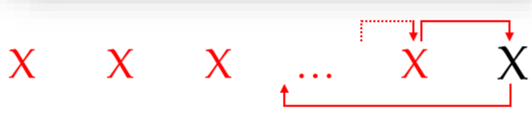
- *Egy* elem *rendezett.*

- A másodikat vagy mögé, vagy elé tesszük, így már *ketten* is *rendezettek.*

- …
- Az i-ediknél a nála nagyobbakat **tologassuk** hátra, majd illesszük be eléjük az i-ediket; így már *i darab rendezett* lesz.



- …
- Az utolsóval ugyanígy!



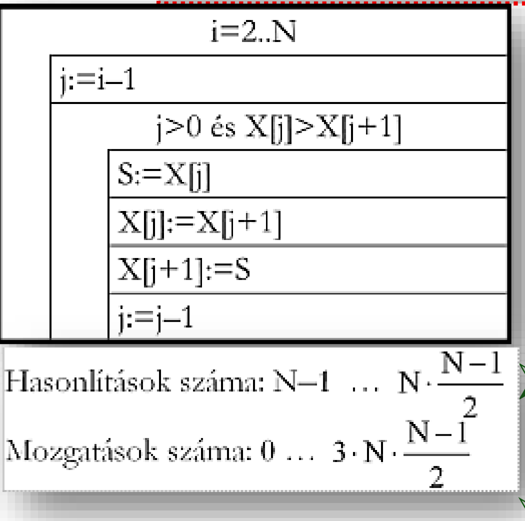
Javított beillesztéses rendezés

Algoritmus:

Változó
i,j:**Egész**
S:TH

```
i=2..N
    S:=X[i]
    j:=i–1
    j>0 és X[j]>S
        X[j+1]:=X[j]
        j:=j–1
    X[j+1]:=S
```

Elem-mozgatás, nem csere!



```
i=2..N
    j:=i–1
    j>0 és X[j]>X[j+1]
        S:=X[j]
        X[j]:=X[j+1]
        X[j+1]:=S
        j:=j–1
```

Hasonlítások száma: N–1 … $N\cdot\frac{N-1}{2}$

Mozgatások száma: 0 … $3\cdot N\cdot\frac{N-1}{2}$

- Hasonlítások száma: N–1 . . $N\cdot\frac{N-1}{2}$
- Mozgatások száma: 2·(N–1) . . $(N+4)\cdot\frac{N-1}{2}$

Szétosztó rendezés

A lényeg:

Ha a rendezendő sorozatról speciális tudásunk van, akkor megpróbálkozhatunk más módszerekkel is.

Specifikáció – rendezés N lépésben:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in \mathbb{Z}^N$
- Kimenet: $Y_{1..N} \in \mathbb{Z}^N$
- Előfeltétel: $X \in$ Permutáció(1,…,N)
- Utófeltétel: RendezettE(Y) és $Y \in$ Permutáció(X)

Szétosztó rendezés

Algoritmus (másolás tétel):

```
i=1..N
    Y[X[i]]:=X[i]
```

Változó
i:**Egész**

- Persze ezt írhattuk volna így is: Y[i]:=i! ☺
  Azaz a feladat akkor érdekes, ha X[i] egy **rekord**ként ábrázolható, amelynek csak **egyik mezője** (kulcsa) az 1 és N közötti egész szám:
  X,Y:Tömb[1..N:Rekord(kulcs:**1..N**,…)]

Algoritmus:

```
i=1..N
    Y[X[i].kulcs]:=X[i]
```

Változó
i:**Egész**

Számlálva szétosztó rendezés

Előfeltétel:

A rendezendő értékek 1 és M közötti egész számok, ismétlődhetnek.

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{Z}^N$
- Kimenet: $Y_{1..N} \in \mathbb{Z}^N$
- Előfeltétel: $M \geq 1$ és $\forall i(1 \leq i \leq N)$: $1 \leq X_i \leq M$
- Utófeltétel: RendezettE(Y) és Y∈Permutáció(X)

Számlálva szétosztó rendezés

A lényeg:

- Első lépésben számláljuk meg, hogy melyik értékből hány van a rendezendő sorozatban! (*megszámolás*)
- Ezután adjuk meg, hogy az első „i” értéket hova kell tenni: ez pontosan az i-nél kisebb számok száma a sorozatban +1! (*rekurzív kiszámítás*)
- Végül nézzük végig újra a sorozatot, s az „i” értékű elemet tegyük a helyére, majd módosítsunk: az első i értékű elemet ettől kezdve eggyel nagyobb helyre kell tenni. (*másolás*)

Számlálva szétosztó rendezés

Algoritmus:

Változó
  i:**Egész**
  Db,
  Első:Tömb[…]

```
Db[1..M]:=0
i=1..N
    Db[X[i]]:=Db[X[i]]+1
Első[1]:=1
i=1..M-1
    Első[i+1]:=Első[i]+Db[i]
i=1..N
    Y[Első[X[i]]]:=X[i]
    Első[X[i]]:=Első[X[i]]+1
```

Db[i]: hány darab van i-ből?

Első[i]: hol az i. elsője?

- Mozgatások száma: N
- Additív műveletek száma: $2\cdot M-2+2\cdot N$

Számlálva szétosztó rendezés

Algoritmus:

```
Db[1..M]:=0
i=1..N
    Db[X[i]]:=Db[X[i]]+1
Első[1]:=1
i=1..M-1
    Első[i+1]:=Első[i]+Db[i]
i=1..N
    Y[Első[X[i]]]:=X[i]
    Első[X[i]]:=Első[X[i]]+1
```

Változó
i:**Egész**
Db,
Első:Tömb[…]

Az alaphalmaz a Z, így a többi értékadást – mint mozgatást – is beleszámíthatjuk!

- Mozgatások száma: $N+1+M+2\cdot N=M+3\cdot N$
- Additív műveletek száma: $2\cdot M–2+2\cdot N$

Számláló rendezés

A lényeg:

- Ha nem megy a számlálva szétosztó rendezés (ismeretlen az M, vagy M»N^2), akkor először számláljunk (*=határozzuk meg a sorrendet*), csak azután osszunk szét (*=tegyünk helyre…*)!
- Ehhez használhatjuk a legegyszerűbb cserés rendezés elvét.
- Jelentse Db[i] az i. elemnél kisebb, vagy az i.-kel egyenlő, de tőle balra levő elemek számát!

↓

A Db[i]+1 használható az i. elemnek a rendezett sorozatbeli indexeként.

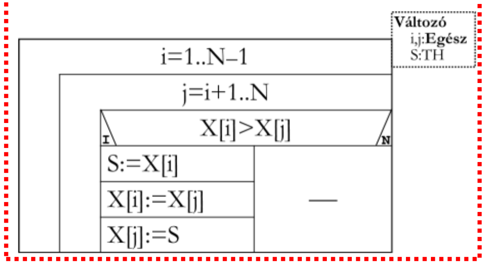
- Ehhez használhatjuk a legegyszerűbb, cserés rendezés elvét.
- Jelentse Db[i] az i. elemnél kisebb, vagy az i.-kel egyenlő, de tőle balra levő elemek számát!

Számláló rendezés

Algoritmus:

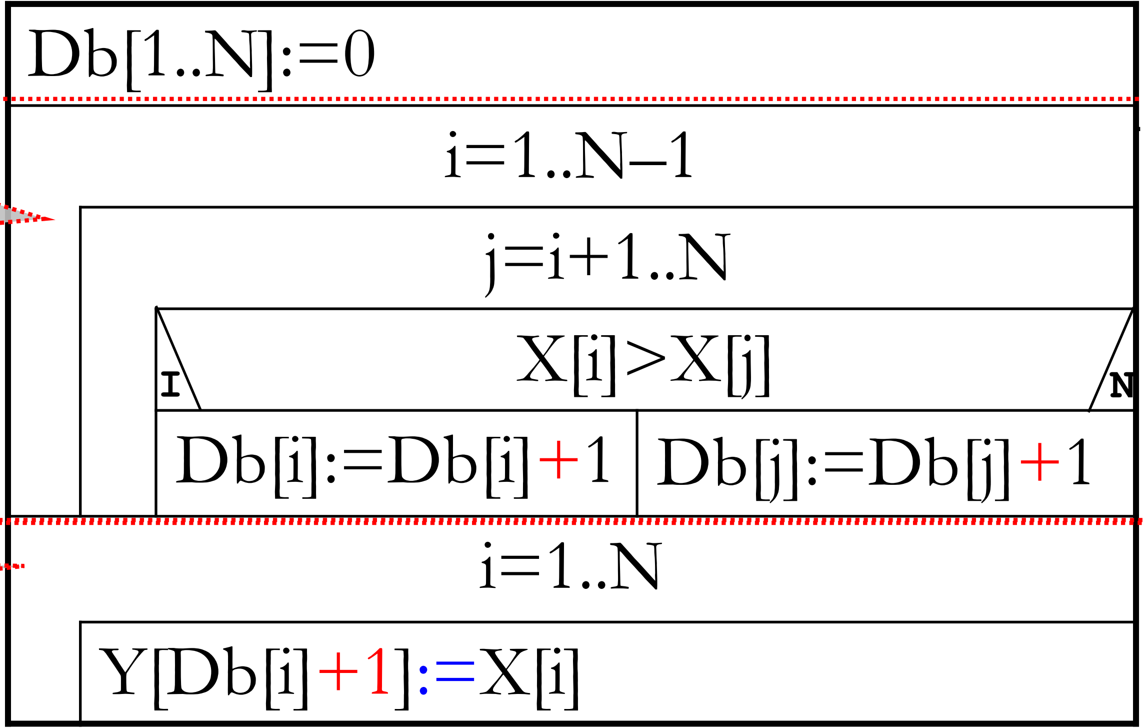
Változó
i,j:**Egész**
Db:Tömb[.

Az egyszerű cserés rendezés elvén működő számlálás.



Változó
i,j:**Egész**
S:TH

```
i=1..N–1
  j=i+1..N
    X[i]>X[j]
    I: S:=X[i]
       X[i]:=X[j]
       X[j]:=S
    N: —
```



```
Db[1..N]:=0
i=1..N–1
  j=i+1..N
    X[i]>X[j]
    I: Db[i]:=Db[i]+1
    N: Db[j]:=Db[j]+1
i=1..N
  Y[Db[i]+1]:=X[i]
```

Másolás tétel

- Hasonlítások száma: 1+2+..+N–1= $N \cdot \frac{N-1}{2}$
- Mozgatások száma: N
- Additív műveletek száma: ~hasonlítások száma

Rendezések hatékonysága

N^2 idejű rendezések:

- Egyszerű cserés rendezés ↩
- Minimum-kiválasztásos rendezés ↩
- Buborékos rendezés ↩
- Javított buborékos rendezés ↩
- Beillesztéses rendezés ↩
- Javított beillesztéses rendezés ↩
- Számláló rendezés ↩

Rendezések hatékonysága

N (N+M) idejű rendezések:

(de speciális feltétellel)

- Szétosztó rendezés ↩
- Számlálva szétosztó rendezés ↩

Kitekintés: (Algoritmusok tantárgy)

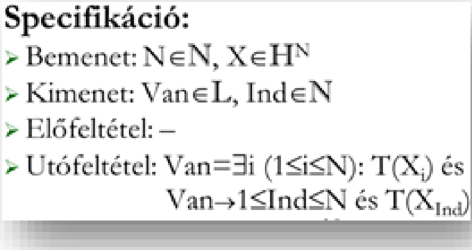
- Lesznek N·log(N) idejű rendezések.
- Nem lehet N·log(N)-nél jobb általános rendezés!
- https://www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc
- http://www.sorting-algorithms.com/

Keresés rendezett sorozatban

Feladat:

Egy Y értéket keresünk egy rendezett X sorozatban.

Specifikáció:



Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X \in H^N$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i\ (1 \leq i \leq N): T(X_i)$ és
  $Van \rightarrow 1 \leq Ind \leq N$ és $T(X_{Ind})$

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in H^N$
  $Y \in H$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: RendezettE(X)
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \leq i \leq N): X_i = Y$ és
  $Van \rightarrow 1 \leq Ind \leq N$ és $X_{Ind} = Y$
- Definíció (emlékeztető):
  $RendezettE(X_{1..N}) := \forall i(1 \leq i < N): X_i \leq X_{i+1}$

T-tulajdonság:
$T(x) := (x = Y)$

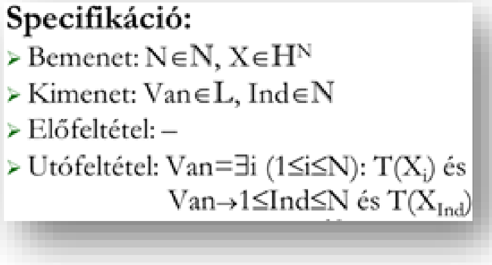
Konkretizáljuk:
legyen növekvő!

Keresés rendezett sorozatban

Feladat:

Egy Y értéket keresünk egy rendezett X sorozatban.

Specifikáció:



Specifikáció:
- Bemenet: N∈N, X∈H^N
- Kimenet: Van∈L, Ind∈N
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: Van=∃i (1≤i≤N): T(X$_i$) és Van→1≤Ind≤N és T(X$_{Ind}$)

- Bemenet: $N \in \mathrm{N}, X_{1..N} \in \mathrm{H}^N$
  $Y \in \mathrm{H}$
- Kimenet: $Van \in \mathrm{L}, Ind \in \mathrm{N}$
- Előfeltétel: RendezettE(X)
- Utófeltétel: $(Van,Ind)= \underset{\substack{i=1\\X_i=Y}}{\overset{N}{\mathrm{Keres}}}\ i$
- Definíció (emlékeztető):
  $RendezettE(X_{1..N}) := \forall i(1 \leq i < N): X_i \leq X_{i+1}$

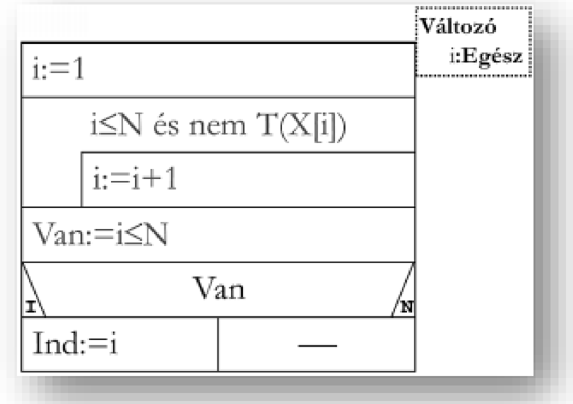
T-tulajdonság:
T(x):=(x=Y)

Konkretizáljuk:
legyen növekvő!

Keresés rendezett sorozatban

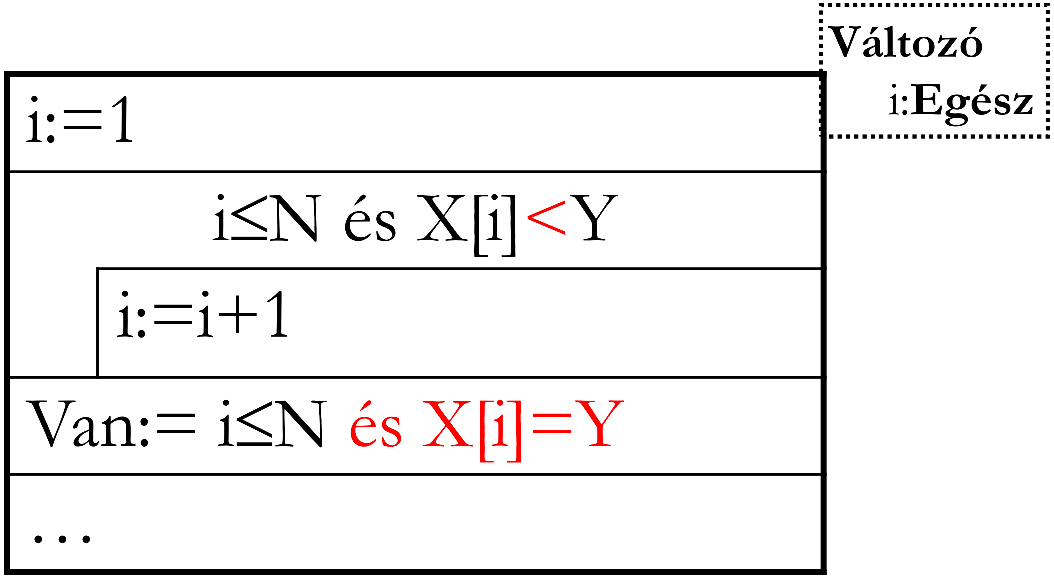
Ötlet:

Ha már a keresett elem értékénél nagyobbnál tartunk, akkor biztos nem lesz a sorozatban, megállhatunk.



Változó
i:**Egész**

```
i:=1
iN és nem T(X[i])
    i:=i+1
Van:=i≤N
Van
  I: Ind:=i
  N: —
```



Változó
i:**Egész**

```
i:=1
i≤N és X[i]<Y
    i:=i+1
Van:= i≤N és X[i]=Y
…
```

Észrevétel:

Van megoldás ↔ azért álltunk meg keresés közben, mert megtaláltuk a keresett értéket.

Keresés rendezett sorozatban

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathrm{N}, X_{1..N} \in H^N$
  $Y \in H$
- Kimenet: $Van \in \mathrm{L}, Ind \in \mathrm{N}$
- Előfeltétel: $N>0$ és $RendezettE(X)$
- Utófeltétel: $Van = \exists i (1 \leq i \leq N): X_i = Y$ és
  $Van \rightarrow 1 \leq Ind \leq N$ és $X_{Ind} = Y$

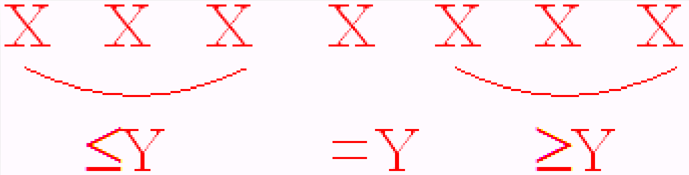
Programparaméterek:

Konstans
MaxN:**Egész**(???)
Típus
THk=**Tömb**[1..MaxN:TH]
Változó
N:**Egész**, X:THk
Y:TH
Van:**Logikai**, Ind:**Egész**

Ötlet és – tömb esetén – lehetőség:

Először a **középső** elemmel hasonlítsunk! Ha nem a keresett, akkor vagy **előtte**, vagy **mögötte** kell tovább keresni!

Keresés rendezett sorozatban

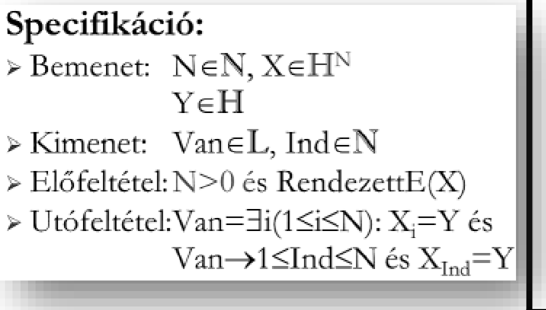


Algoritmus:

Itt akkor van megoldás, ha megtaláltuk a keresett érték valamelyikét.

```
e:=1
u:=N
    k:=(e+u) div 2
    X[k]>Y     | X[k]<Y
    u:=k–1     | e:=k+1
e≤u és X[k]≠Y
Van:=X[k]=Y
…
```

Változó
e,k,u:**Egész**



Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X \in H^N$
  $Y \in H$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: $N>0$ és RendezettE(X)
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \leq i \leq N): X_i = Y$ és
  $Van \rightarrow 1 \leq Ind \leq N$ és $X_{Ind} = Y$

Keresés rendezett sorozatban

További kérdések – tételvariánsok:

- Hány lépés alatt találjuk meg a keresett elemet? (→Logaritmikus v. bináris keresés.)
- Ha több egyforma elem is van a sorozatban, akkor ez a módszer melyiket találja meg?
- Hogyan lehetne az összes Y-értékű elemet megtalálni?

Rendezettek uniója

Összefuttatás.

Feladat:

Adott két rendezett **halmaz**, adjuk meg az uniójukat!

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M\in N$, $X_{1..N}\in H^{N}$, $Y_{1..M}\in H^{M}$
- Kimenet: $Db\in N$, $Z_{1..N+M}\in H^{N+M}$

Db-ig kitöltve

- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)

Rendezettek uniója

- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \notin X}}^{M} 1$ és

  $\forall i(1 \leq i \leq Db): Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$ és
  HalmazE(Z) és RendezettE(Z)
- Utófeltétel$_2$: (Db,Z)=Unió(N,X,M,Y) és RendezettE(Z)

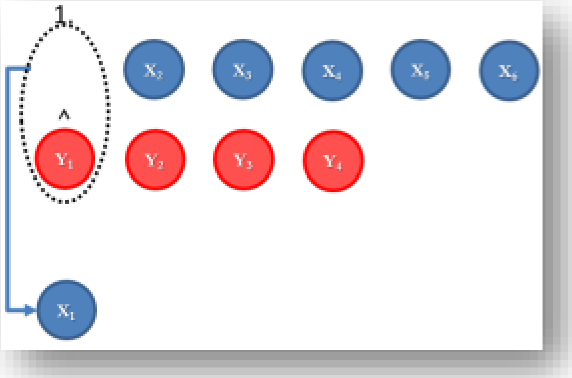
Ötlet:

Az eredmény **első** eleme vagy az X, vagy az Y első eleme lehet. A kettő közül a **rendezettség szerintit** tegyük az eredménybe, majd a maradékra ugyanezt az elvet alkalmazhatjuk.

Rendezettek uniója

Algoritmus elé:

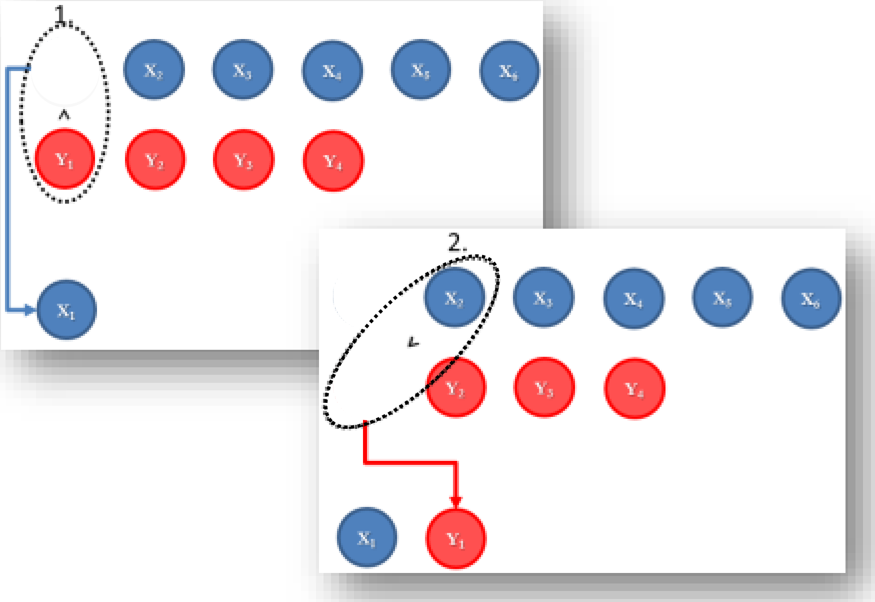
- Amíg van mit hasonlítani:



Rendezettek uniója

Algoritmus elé:

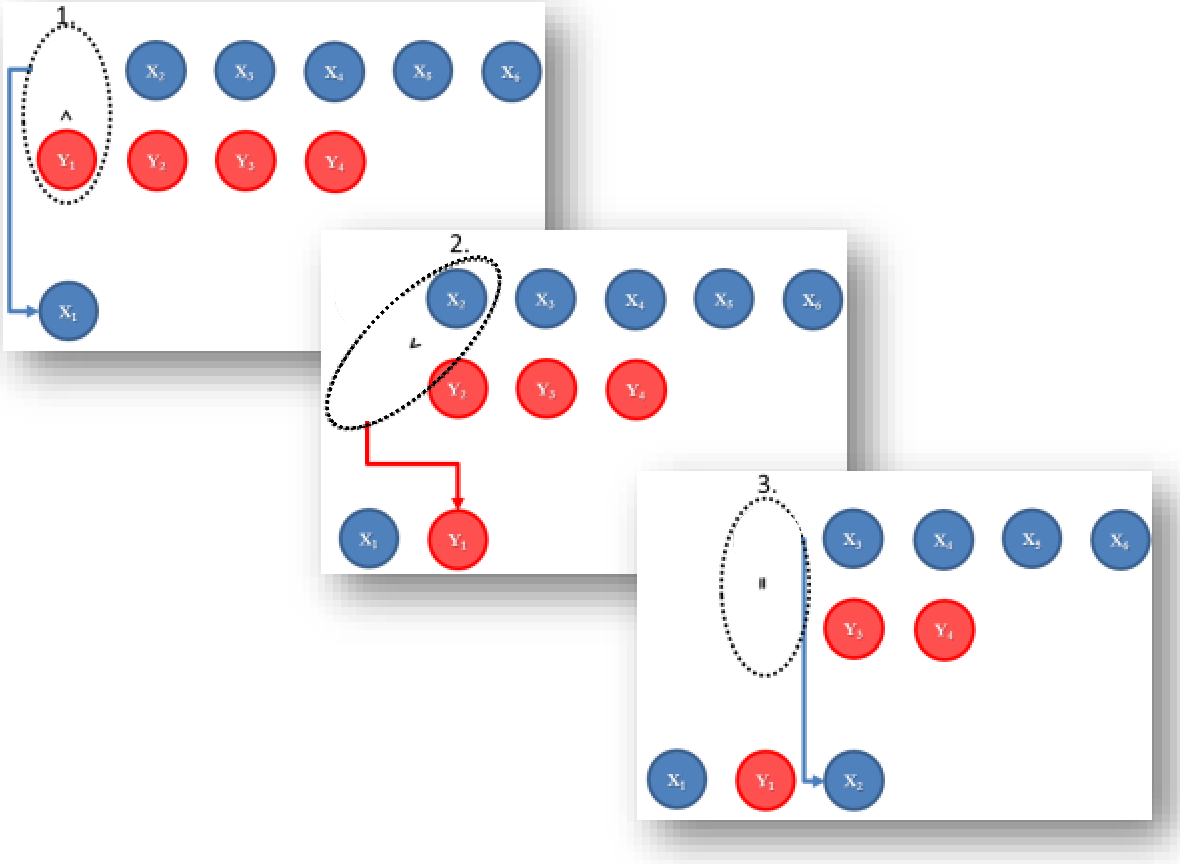
- Amíg van mit hasonlítani:



Rendezettek uniója

Algoritmus elé:

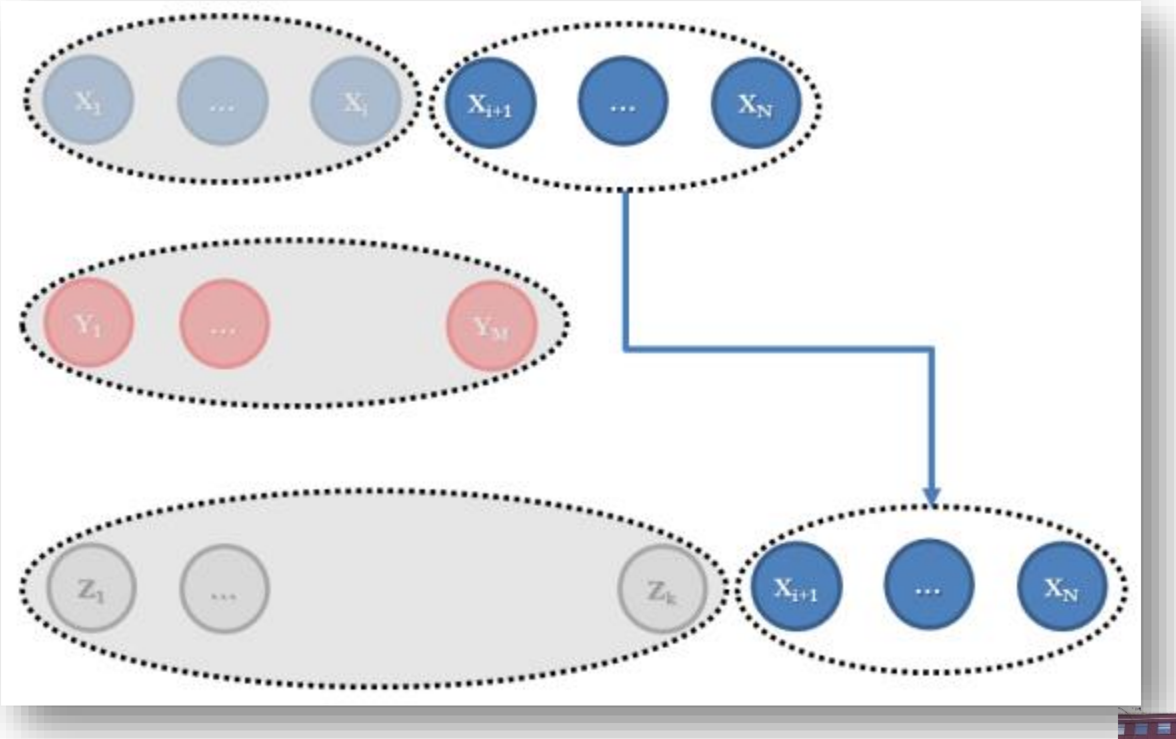
- Amíg van mit hasonlítani:



Rendezettek uniója

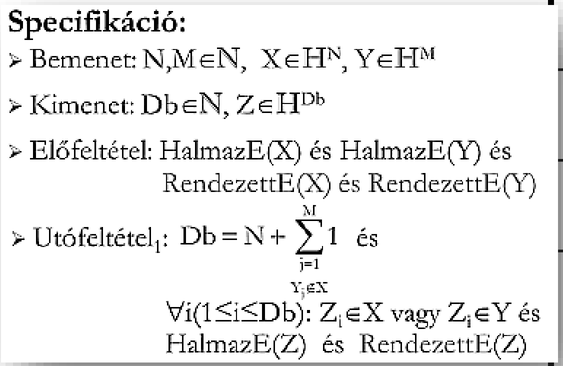
Algoritmus elé:

- Ha már nincs mit hasonlítani:



Rendezettek uniója

Algoritmus$_1$:



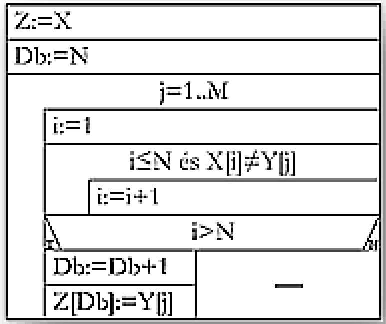
Specifikáció:

- Bemenet: N,M∈N, X∈H^N, Y∈H^M
- Kimenet: Db∈N, Z∈H^{Db}
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \in X}}^{M} 1$ és ∀i(1≤i≤Db): Z_i∈X vagy Z_i∈Y és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)

```
i:=1
j:=1
Db:=0
i≤N és j≤M
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    X[i]>Y[j]
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
…
```

Van miket hasonlítani

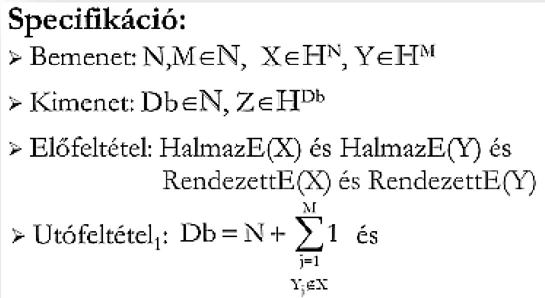
Változó
i,j:**Eg**



```
Z:=X
Db:=N
j=1..M
    i:=1
    i≤N és X[i]≠Y[j]
        i:=i+1
    i>N
        Db:=Db+1
        Z[Db]:=Y[j]
    —
```

Rendezettek uniója

Algoritmus$_1$:



Specifikáció:

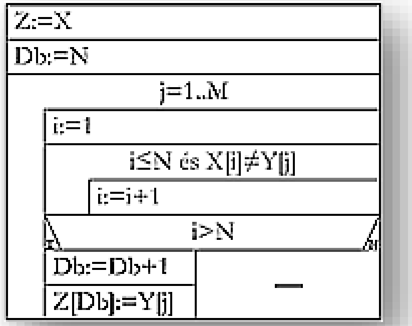
- Bemenet: N,M∈N, X∈H^N, Y∈H^M
- Kimenet: Db∈N, Z∈H^{Db}
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \in X}}^{M} 1$ és
  ∀i(1≤i≤Db): Z_i∈X vagy Z_i∈Y és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)

Változó
i,j:**Eg**

```
i:=1
j:=1
Db:=0
i≤N és j≤M
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1

        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
…
```

Van miket hasonlítani



```
Z:=X
Db:=N
j=1..M
    i:=1
    i≤N és X[i]≠Y[j]
        i:=i+1
    i>N
        Db:=Db+1
        Z[Db]:=Y[j]

        —
```

Rendezettek uniója

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $Z \in H^{Db}$
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \notin X}}^{M} 1$ és
  $\forall i(1 \le i \le Db)$: $Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$ és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)

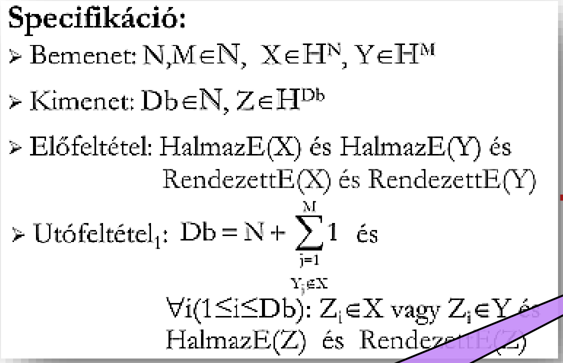
```
...
i≤N
    Db:=Db+1
    Z[Db]:=X[i]
    i:=i+1
j≤M
    Db:=Db+1
    Z[Db]:=Y[j]
    j:=j+1
```

Nincs Y-beli.

Nincs X-beli.

```
Z:=X
Db:=N
j=1..M
    i:=1
    i≤N és X[i]≠Y[j]
        i:=i+1
    i>N
      I: Db:=Db+1
         Z[Db]:=Y[j]
      N: —
```

Rendezettek uniója



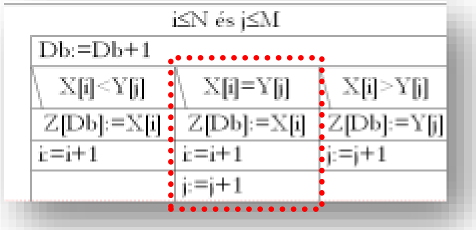
Specifikáció:

- Bemenet: $N,M\in\mathbb{N}$, $X\in H^N$, $Y\in H^M$
- Kimenet: $Db\in\mathbb{N}$, $Z\in H^{Db}$
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \notin X}}^{M} 1$ és
  $\forall i(1\leq i\leq Db)$: $Z_i\in X$ vagy $Z_i\in Y$ és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)

```
…
i≤N
    Db:=Db+1
    Z[Db]:=X[i]
    i:=i+1
j≤M
    Db:=Db+1
    Z[Db]:=Y[j]
    j:=j+1
```

Nincs Y-beli.

Nincs X-beli.

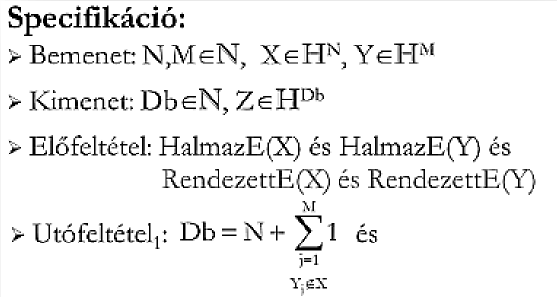


```
i≤N és j≤M
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]     | X[i]=Y[j]     | X[i]>Y[j]
    Z[Db]:=X[i]   | Z[Db]:=X[i]   | Z[Db]:=Y[j]
    i:=i+1        | i:=i+1        | j:=j+1
                  | j:=j+1        |
```

Vegyük észre: ha az X és Y utolsó elemei egyenlők, akkor ez a két ciklus nem kell!

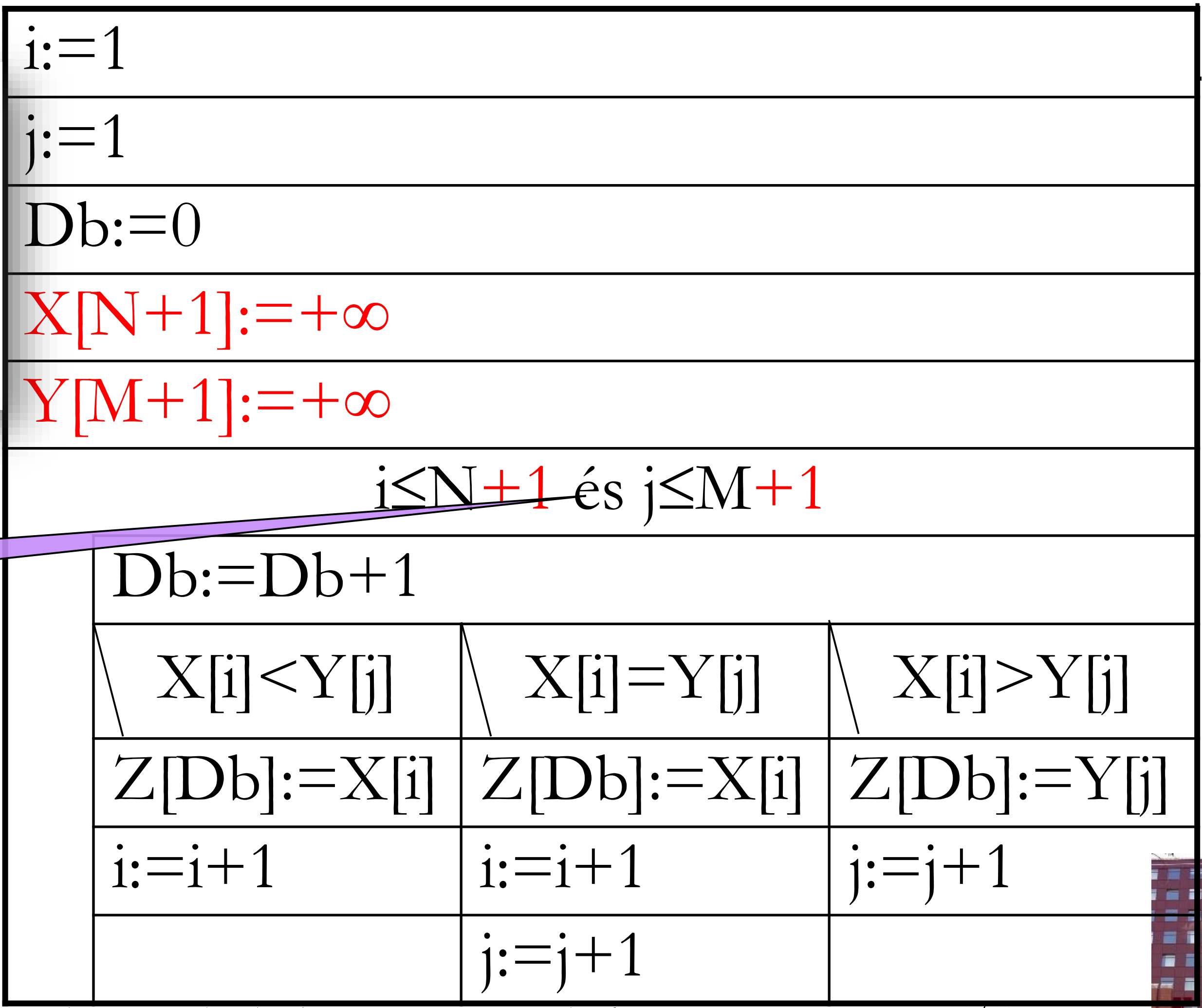
Rendezettek uniója

Algoritmus$_2$:



Specifikáció:

- Bemenet: N,M∈N, $X \in H^N$, $Y \in H^M$
- Kimenet: Db∈N, $Z \in H^{Db}$
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \in X}}^{M} 1$ és $\forall i(1 \le i \le Db)$: $Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$ és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)



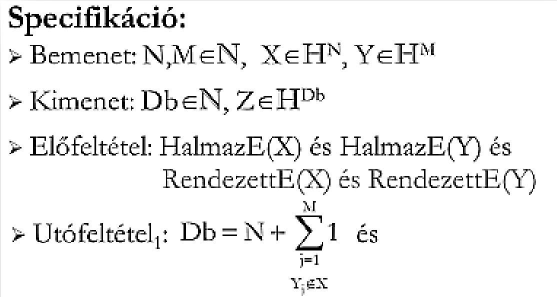
```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i≤N+1 és j≤M+1
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    X[i]>Y[j]
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

… és utoljára?
Z[Db]:=+ ∞

Változ
i,j:E

Rendezettek uniója

Algoritmus$_2$:



Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $Z \in H^{Db}$
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \in X}}^{M} 1$ és $\forall i(1 \le i \le Db)$: $Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$ és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)

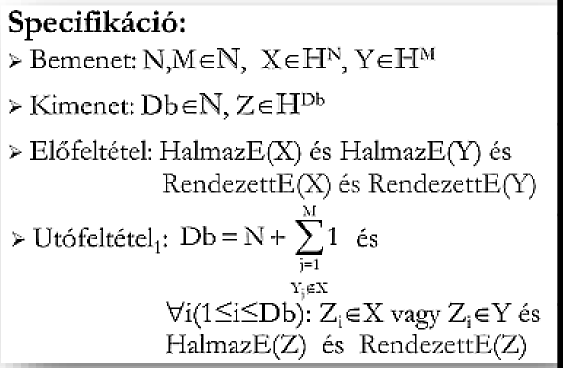
```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i≤N+1 és j≤M+1
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

… és utoljára?
Z[Db]:=+ ∞

Változ
i,j:E

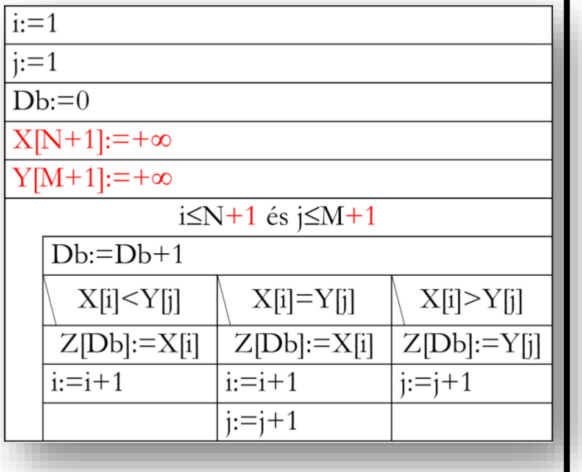
Rendezettek uniója

Algoritmus$_2$ javítása:



Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $Z \in H^{Db}$
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \in X}}^{M} 1$ és $\forall i(1 \le i \le Db)$: $Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$ és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)



```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i≤N+1 és j≤M+1
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    X[i]>Y[j]:
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

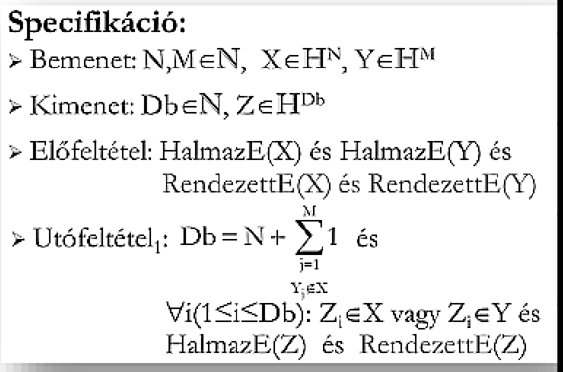
```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i<N+1 vagy j<M+1
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    :
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

Változ

i,j:**E**

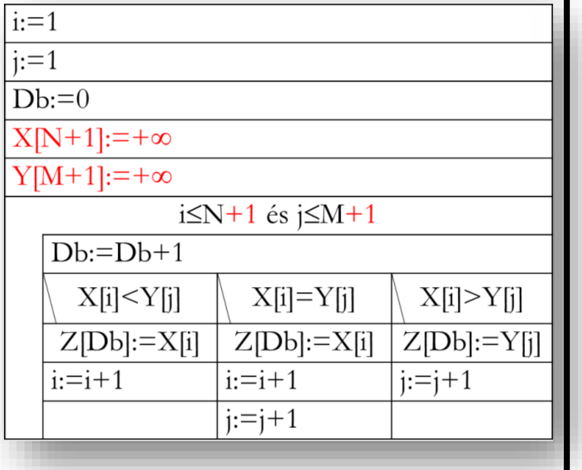
Rendezettek uniója

Algoritmus$_2$ javítása:



Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $Z \in H^{Db}$
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y) és RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel$_1$: $Db = N + \sum_{\substack{j=1 \\ Y_j \in X}}^{M} 1$ és
  $\forall i(1 \le i \le Db)$: $Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$ és HalmazE(Z) és RendezettE(Z)

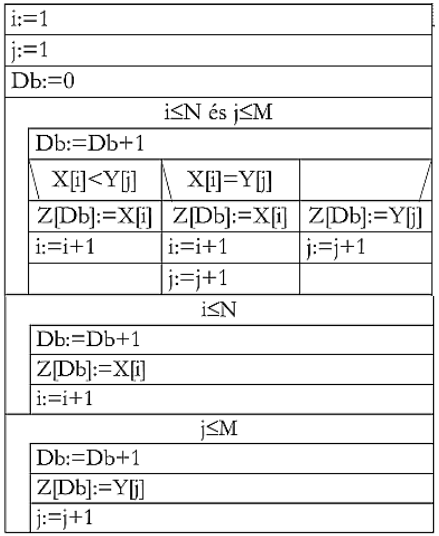


```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i≤N+1 és j≤M+1
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    X[i]>Y[j]:
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

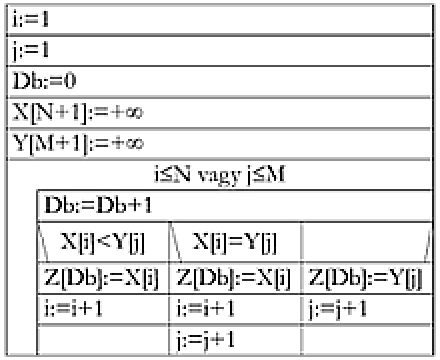
```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i≤N vagy j≤M
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]:
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    :
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

Változ
i,j:E

Rendezettek uniója



```
i:=1
j:=1
Db:=0
i≤N és j≤M
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
i≤N
    Db:=Db+1
    Z[Db]:=X[i]
    i:=i+1
j≤M
    Db:=Db+1
    Z[Db]:=Y[j]
    j:=j+1
```



```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i≤N vagy j≤M
    Db:=Db+1
    X[i]<Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    X[i]=Y[j]
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
        j:=j+1
    
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

Kérdések:

- Jobb lett ez a módszer az előzőnél az idő szempontból?
  ⇐ Hány lépés alatt kapjuk meg a megoldást?
- Meg lehetne ugyanezt tenni a metszettel is?

Tapasztalat:

- Jobb lett ez a módszer bonyolultság szempontjából. (⇐ Ciklus-/elágazás-szám.)
- Ez a módszer a kimenet szerint halad egyesével és nem a bemenet szerint (mint a korábbiak).

Rendezettek összefésülése

Feladat:

Adott két rendezett sorozat, adjuk meg az összefésülésüket!

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in N$, $X_{1..N} \in H^N$, $Y_{1..M} \in H^M$
- Kimenet: $Z_{1..N+M} \in H^{N+M}$
- Előfeltétel: ~~HalmazE(X) és HalmazE(Y) és~~
  RendezettE(X) és RendezettE(Y)

Rendezettek összefésülése

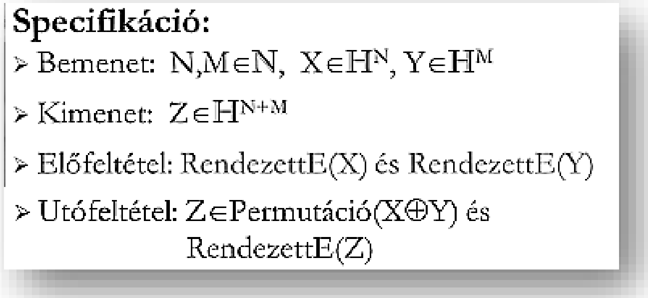
- Utófeltétel: Z∈Permutáció(X⊕Y) és
  RendezettE(Z)

Ötlet:

A megoldás olyan, mint az összefuttatás, csak az egyforma elemeket is berakjuk az eredménybe, tehát egy-egy érték **multiplicitása** lehet 1-nél nagyobb is (már kezdetben is!).

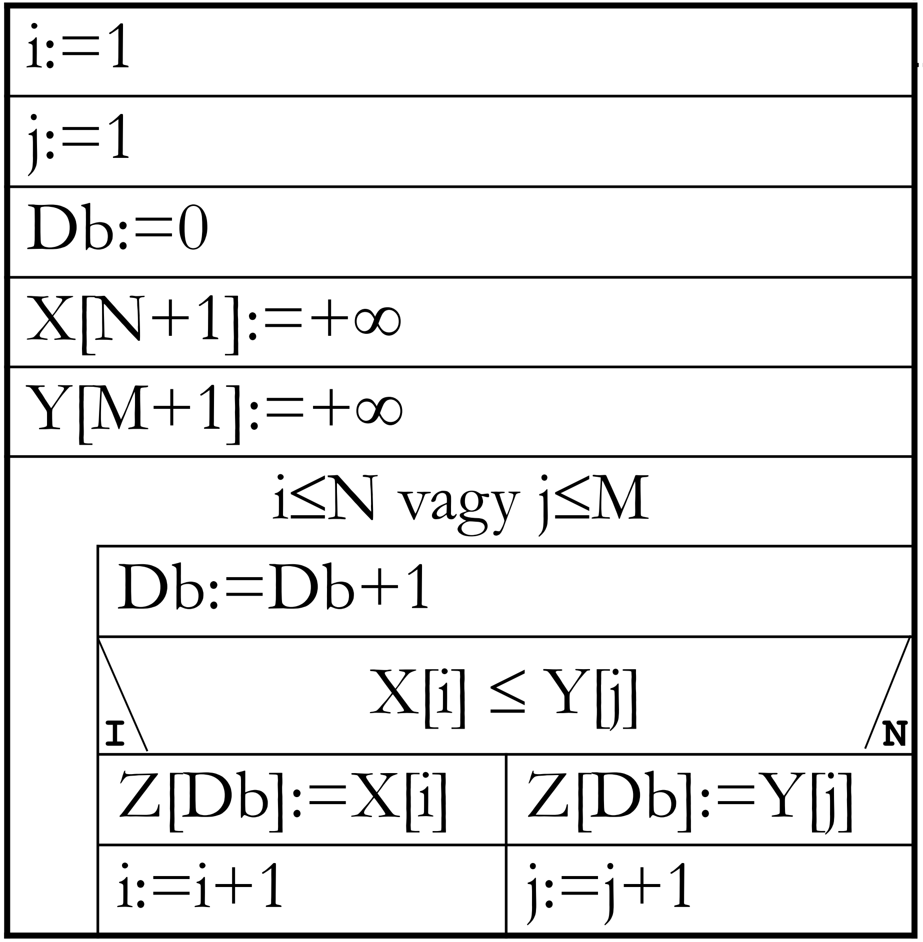
Rendezettek összefésülése

Algoritmus:



Specifikáció:

- Bemenet: N,M∈N, X∈H^N, Y∈H^M
- Kimenet: Z∈H^{N+M}
- Előfeltétel: RendezettE(X) és RendezettE(Y)
- Utófeltétel: Z∈Permutáció(X⊕Y) és RendezettE(Z)



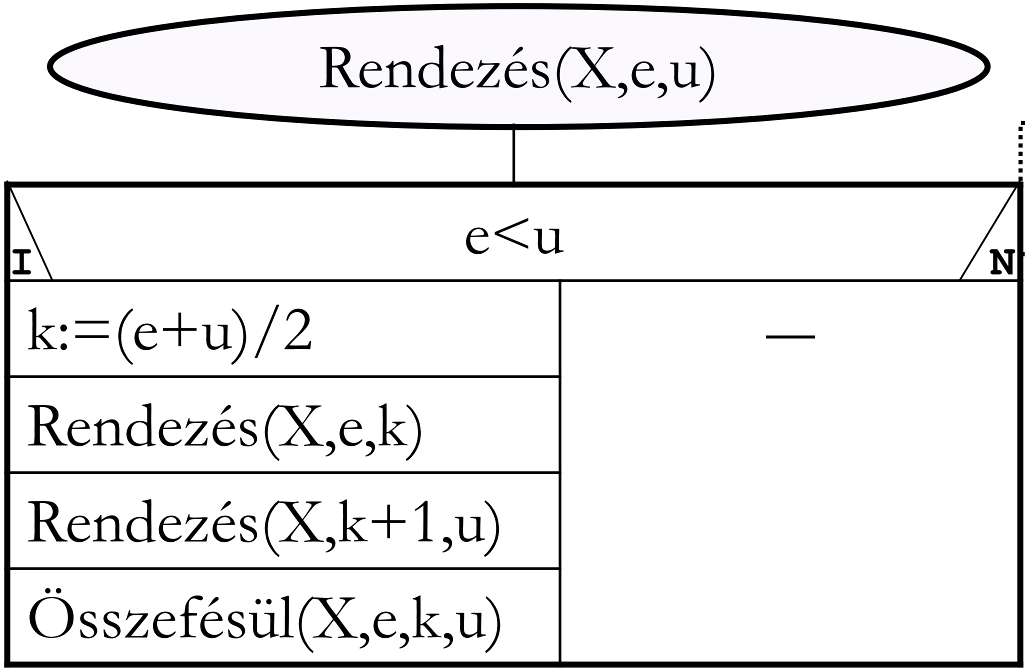
```
i:=1
j:=1
Db:=0
X[N+1]:=+∞
Y[M+1]:=+∞
i≤N vagy j≤M
    Db:=Db+1
    X[i] ≤ Y[j]
    I
        Z[Db]:=X[i]
        i:=i+1
    N
        Z[Db]:=Y[j]
        j:=j+1
```

Változó
i,j:**Egész**

Összefésüléses rendezés

Ötlet:

Az összefésülés elvére alapozhatjuk az **összefésüléses rendezést**: amennyiben egy sorozat nem egyelemű, akkor középen vágjuk ketté, mindkét felét rendezzük (rekurzívan), majd a két rendezett sorozatot fésüljük össze!



Változó
k:**Egés**

Oszd meg és uralkodj!

Az előző algoritmus (illetve a logaritmikus keresés) alapján megfogalmazhatunk egy általános tervezési elvet:

Több részfeladatra bontás, amelyek hasonlóan oldhatók meg, lépései:

- a triviális eset (amikor nincs rekurzív hívás)
- felosztás (megadjuk a részfeladatokat, amikre a feladat lebontható)
- uralkodás (rekurzívan megoldjuk az egyes részfeladatokat)
- összevonás (az egyes részfeladatok megoldásából előállítjuk az eredeti feladat megoldását)

Oszd meg és uralkodj!

Ezek alapján a következőképpen fogunk gondolkodni:

- Mi a leállás (triviális eset) feltétele? Hogyan oldható meg ilyenkor a feladat?
- Mi az általános feladat alakja? Mik a paraméterei? Ebből kapjuk meg a rekurzív eljárásunk specifikációját.
- Milyen paraméter értékekre kapjuk a konkrét feladatot? Ezekre fogjuk meghívni kezdetben az eljárást!
- Hogyan vezethető vissza a feladat hasonló, de egyszerűbb részfeladatokra? Hány részfeladatra vezethető vissza?
- Melyek ilyenkor az általános feladat részfeladatainak a paraméterei? Ezekkel kell majd meghívni a rekurzív eljárást!
- Hogyan építhető fel a részfeladatok megoldásaiból az általános feladat megoldása?

Oszd meg és uralkodj!

A korábban megismert helyben szétválogatás algoritmusra építhetjük ezen az elven a gyorsrendezés algoritmusát:

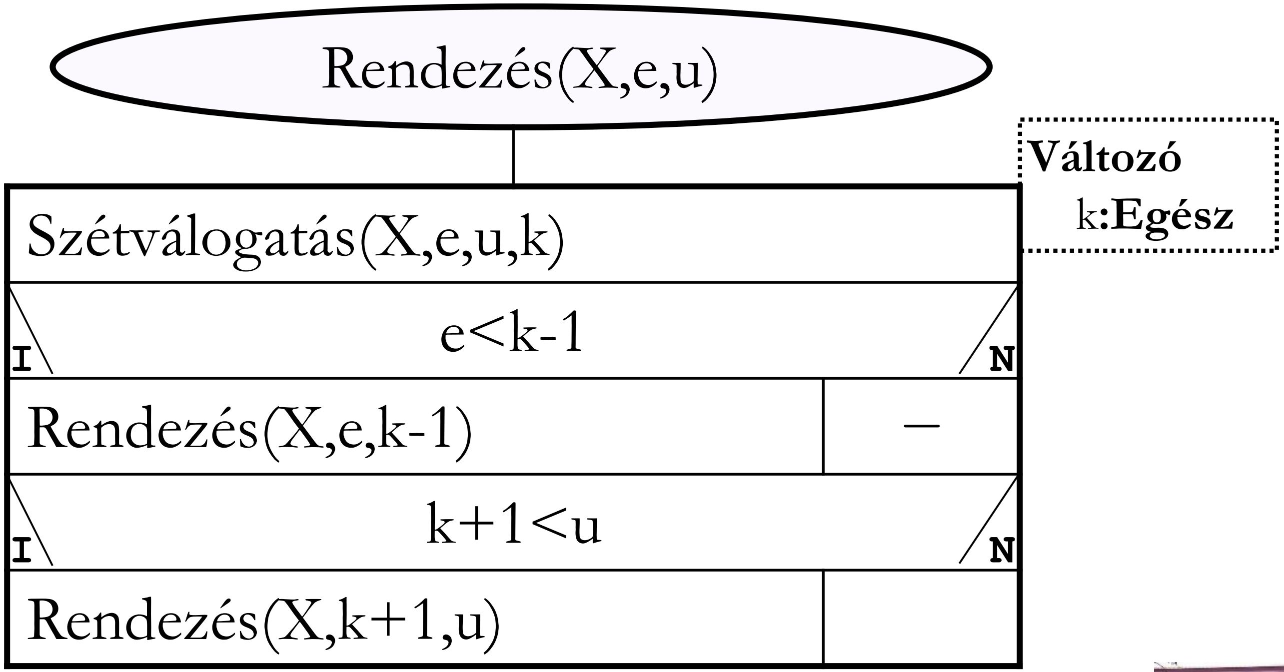
Gyorsrendezés (quicksort):

- felbontás: $\boxed{X_1,\ldots, X_{k-1}}\ X_k\ \boxed{X_{k+1},\ldots, X_n}$ szétválogatás

  ahol $\forall i,j\ (1\leq i<k;\ k<j\leq n)$: $X_i\leq X_k$ és $X_k\leq X_j$
- uralkodás: mindkét részt ugyanazzal a módszerrel felbontjuk két részre, rekurzívan
- összevonás: automatikusan történik a helyben szétválogatás miatt
- triviális eset: $n\leq 1$

Oszd meg és uralkodj!

Gyorsrendezés (quicksort):



```
Rendezés(X,e,u)
  Szétválogatás(X,e,u,k)
  e<k-1
    I: Rendezés(X,e,k-1)
    N: –
  k+1<u
    I: Rendezés(X,k+1,u)
    N:
```

Változó
k**:Egész**

Tartalom

- Rendezési feladat
    - Specifikáció
    - Egyszerű cserés rendezés
    - Minimum-kiválasztásos rendezés
    - Buborékos rendezés
    - Javított buborékos rendezés
    - Beillesztéses rendezés
    - Javított beillesztéses rendezés
    - Szétosztó rendezés
    - Számlálva szétosztó rendezés
    - Számláló rendezés
- Rendezések hatékonysága – idő
- Algoritmusok rendezett sorozatokban
    - Keresés rendezett sorozatban
    - Rendezettek uniója, összefésülése
    - Összefésüléses rendezés
- Oszd meg és uralkodj!