Numerikus módszerek 2B.

5–6. előadás: Spline-interpoláció

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. október 8–15.

Definíció: Interpolációs spline

Tekintsük az $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ felosztást, ahol
$I_k := [x_{k-1}; x_k]$ részintervallum $(k = 1, \ldots, n)$.
Az $S_\ell : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvényt *ℓ-edfokú spline*-nak nevezzük, ha

1. $S_\ell\big|_{I_k} \in P_\ell \;\; (k = 1, \ldots, n)$
2. $S_\ell \in C^{(\ell-1)}[a; b]$.
3. Az S_ℓ spline-t *interpolációs spline*-nak nevezzük, ha $S_\ell(x_i) = f(x_i) \;\; (i = 0, \ldots, n)$.

Meghatározás: Részintervallumonkénti polinomok együtthatóinak megkeresése:

$$p_k(x) := \sum_{j=0}^{\ell} a_j^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^j, \;\; (x \in I_k)$$

Tartalomjegyzék

$\ell = 1$: **elsőfokú spline megadása (szakaszonkénti lineáris interpoláció)**

$$p_k(x) := a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \;\; (x \in I_k)$$

A megoldáshoz írjuk fel az interpolációs feltételeket az I_k részintervallum két szélére.

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= a_0^{(k)} = f(x_{k-1}) \\ p_k(x_k) &= a_1^{(k)}(x_k - x_{k-1}) + a_0^{(k)} = f(x_k) \\ &\Rightarrow a_1^{(k)} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f[x_{k-1}, x_k] \end{aligned}$$

(Az interpolációs feltételből a folytonosság azonnal következik.)

Spline megadása intervallumonként

$\ell = 2$: **másodfokú spline megadása** A polinom alakja:

$p_k(x) := a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \ (x \in I_k)$.

- Látjuk, hogy az ismeretlenek száma: $3n$,
- a feltételek száma: interpolációs feltétel minden részintervallum két szélére: $2n$ feltétel,
- minden belső osztópontra a folytonos diff-hatóság: $n - 1$ feltétel.

Összesen: $3n - 1$ feltétel, vagyis az egyértelműséghez hiányzik egy feltétel. Ezt peremfeltételként szokás megadni:

$$S_2'(a) = f'(a) \text{ vagy } S_2'(b) = f'(b).$$

A feladat szétbontható n db Hermite-interpolációs feladattá.

Megjegyzés: A LER-rel történő megadáskor elölről meghatározott spline esetén alsóháromszögű LER-t kell megoldani.

Másodfokú spline megadása intervallumonként

Az algoritmus: Balról meghatározott spline esetén

A polinom alakja az $I_k := [x_{k-1}; x_k]$ intervallumon:

$$p_k(x) := a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \ \ (x \in I_k)$$

Az együtthatók a következő algoritmussal állíthatók elő:

$$\begin{aligned} m_1 &:= f'(x_0) \\ k = 1, \ldots, n: \quad a_0^{(k)} &:= f(x_{k-1}) \\ a_1^{(k)} &:= m_k \\ a_2^{(1)} &:= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - m_k}{x_k - x_{k-1}} \\ m_{k+1} &:= 2f[x_{k-1}, x_k] - m_k \end{aligned}$$

$\ell = 3$: **köbös spline megadása:** A polinom alakja I_k-n:

$$p_k(x) := a_3^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^3 + a_2^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)} \cdot (x - x_{k-1}) + a_0^{(k)}.$$

- Látjuk, hogy az ismeretlenek száma: $4n$.
- A feltételek száma:
    1. interpolációs feltétel minden részintervallum két szélére: $2n$ feltétel,
    2. belső osztópontokban $S_3' \in C$: $n-1$ feltétel,
    3. belső osztópontokban $S_3'' \in C$: $n-1$ feltétel,

Összesen: $4n-2$ feltétel, vagyis az egyértelműséghez hiányzik két feltétel. Ezeket peremfeltételként szokás megadni.

1. **Hermite-féle peremfeltétel**:

$$S_3'(a) = f'(a) \text{ és } S_3'(b) = f'(b).$$

Fizikailag azt jelenti, hogy az $S(x)$ alakú vékony rugalmas fémszál a végpontokban be van fogva.

2. **Természetes peremfeltétel:**

$$S_3''(a) = 0 \text{ és } S_3''(b) = 0.$$

Fizikailag azt jelenti, hogy az $S(x)$ alakú vékony rugalmas fémszál a végpontokban csuklóval rögzített.

3. **Periodikus peremfeltétel:** csak periodikus függvények közelítése esetén, ha $[a; b]$ a periódus többszöröse. Ekkor $f(a) = f(b)$. A hiányzó két feltétel:

$$S_3'(a) = S_3'(b) \text{ és } S_3''(a) = S_3''(b).$$

4. **A "not a knot" peremfeltétel:**

$$S_3''' \in C\{x_1\} \text{ és } S_3''' \in C\{x_{n-1}\}.$$

Ez azt jelenti, hogy az első két részintervallumon illetve az utolsó kettőn is ugyanaz a képlet. Grafikában szokás használni, mert nem kell új adatot megadni.

Megjegyzés: Az együtthatók meghatározása LER megoldásával lehetséges, lásd gyakorlaton.

Tartalomjegyzék

Globális spline bázis $[a; b]$-n

Jelölés:

$\Omega_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ alappontrendszer
$S_\ell(\Omega_n)$: az Ω_n alappontrendszeren értelmezett ℓ-edfokú spline-ok halmaza.

Definíció: Jobb oldali hatványfüggvény

$$(x - x_k)_+^\ell := \begin{cases} (x - x_k)^\ell & \text{ha } x \geq x_k \\ 0 & \text{ha } x < x_k \end{cases}$$

Tétel:

$\ell \geq 2$ esetén $(x - x_k)_+^\ell$ folytonosan differenciálható, és

$$\left[(x - x_k)_+^\ell\right]' = \ell \cdot (x - x_k)_+^{\ell-1}.$$

Tétel:

1. Az $1, x, \ldots, x^\ell, (x - x_1)_+^\ell, \ldots, (x - x_{n-1})_+^\ell$ függvényrendszer lineárisan független $S_\ell(\Omega_n)$-en.
2. Bármely $S \in S_\ell(\Omega_n)$ egyértelműen előállítható a fenti rendszerrel.
3. $\dim S_\ell(\Omega_n) = n + \ell$

Tehát bármely spline-interpolációs feladat megoldását kereshetjük a megfelelő

$$1, x, \ldots, x^\ell, (x - x_1)_+^\ell, \ldots, (x - x_{n-1})_+^\ell$$

bázisban felírva.
Ekkor az ismeretlenek (azaz a bázisfüggvények együtthatóinak) száma csak $n + \ell$. Ennek oka, hogy a folytonos deriválhatóságra vonatkozó feltételek automatikusan teljesülnek.