6. gyakorlat

Reguláris mátrix QR felbontása

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok QR-**felbontását Gram-Schmidt-ortogonalizációval**:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. További feladatok a QR-felbontás gyakorlására Gram-Schmidt-ortogonalizációval: Bozsik József – Krebsz Anna: Numerikus módszerek példatár 30 – 31. oldal 52–60. feladatok.

Householder-transzformáció

$$\boxed{\text{Ha } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| \neq 0, \quad \text{akkor} \quad \mathbf{v} = \pm\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|} \quad \text{esetén} \quad H(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b},}$$

ahol $\boxed{H(\mathbf{v}) = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}$ a Householder-transzformáció mátrixa,

és

$$\boxed{H(\mathbf{v})\mathbf{c} = \mathbf{c} - 2\Big(\mathbf{v}^T\mathbf{c}\Big)\mathbf{v}, \qquad \text{ha} \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n}$$

3. Adjuk meg azt a $\mathbf{v}$ egységvektort, melyre $H(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$, ha

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Householder-transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = [-1, 1, -1, 1]^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül a $\mathbf{b} = [2, 1, 1, 0]^T$ vektoron!

5. Householder-transzformációval hozzuk felsőháromszög mátrix alakra az alábbi lineáris egyenletrendszert, majd visszahelyettesítéssel oldjuk meg! A transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül végezzük el!

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Householder-transzformációval, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

7. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Householder-transzformációval, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. További feladatok a Householder-transzformáció gyakorlására: Bozsik József – Krebsz Anna: Numerikus módszerek példatár 31-33. oldal 61-75. feladatok.

MEGOLDÁS

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok QR-felbontását Gram-Schmidt-ortogonalizációval:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A módszer: A reguláris $A_{n\times n}$ mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek. A Gram-Schmidt-ortogonalizácóval előállítunk egy ortonormált bázist, ezek a vektorok alkotják a Q mátrix oszlopvektorait. Az R felső háromszögmátrix főátlójában a Gram-Schmidt-eljárással konstruált ortogonális vektorok hossza ($\|\cdot\|_2$), míg a diagonális felett az előállítás során fellépő együtthatók szerepelnek.

A módszer lépései:

$\mathbf{v_1} := \mathbf{a_1}$, $\quad \boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{v_1}\|$, $\quad \boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{r_{1,1}}\mathbf{v_1}$;

$\mathbf{v_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1}$, ahol $\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2}\rangle$ $\quad$ ($\mathbf{v_2} \perp \mathbf{q_1}$ miatt),

$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{v_2}\|$, $\quad \boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{v_2}$;

$\vdots$

$\mathbf{v_k} = \mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{j,k}\,\mathbf{q_j}$, ahol $\boxed{r_{j,k}} = \langle \mathbf{q_j}, \mathbf{a_k}\rangle$ $\quad$ ($\mathbf{v_k} \perp \mathbf{q_j}$, $j = 1, \ldots, k-1$ miatt)

$\boxed{r_{k,k}} = \|\mathbf{v_k}\|$, $\quad \boxed{\mathbf{q_k}} = \frac{1}{r_{k,k}}\mathbf{v_k}$ $\qquad$ (k=3,. . . ,n).

Nézzük a példánkat:

$$A = [\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2}] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{r_{11}} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{r_{12}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2}\rangle = \frac{1}{5}\cdot\Big((-2)\cdot 4 + 1\cdot 3\Big) = -\frac{5}{5} = -1$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1)\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -10+4 \\ 5+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{r_{22}} = \|\mathbf{v_2}\| = \left\|\frac{2}{5}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\|_2 = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2} = \frac{2}{5}\cdot 5 = 2$$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{22}}\mathbf{v_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{a_1}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2-1) = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{v_2}\| = \frac{3}{5}\sqrt{1+4} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{v_2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,3}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_3} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(0+0+0) = 0,$$

$$\boxed{r_{2,3}} = \langle \mathbf{q_2}, \mathbf{a_3} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(0+0+0) = 0,$$

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{a_3} - r_{1,3}\,\mathbf{q_1} - r_{2,3}\,\mathbf{q_2} = \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{3,3}} = \|\mathbf{v_2}\| = 2,$$

$$\boxed{\mathbf{q_3}} = \frac{1}{r_{3,3}}\mathbf{v_3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Végül $A = QR$, ahol

$$Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{a_1}\| = \sqrt{16+9} = 5,$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{5}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2} \rangle = \frac{1}{5}(8-3) = 1,$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{v_2}\| = 2,$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{v_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,3}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_3} \rangle = \frac{1}{5}(0+0+0) = 0,$$

$$\boxed{r_{2,3}} = \langle \mathbf{q_2}, \mathbf{a_3} \rangle = \frac{1}{5}(0+0+0) = 0,$$

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{a_3} - r_{1,3}\,\mathbf{q_1} - r_{2,3}\,\mathbf{q_2} = \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$\boxed{r_{3,3}} = \|\mathbf{v_2}\| = 2,$

$$\boxed{\mathbf{q_3}} = \frac{1}{r_{3,3}}\mathbf{v_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Végül $A = QR$, ahol

$$Q = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$\boxed{r_{1,1}} = \|\mathbf{a_1}\| = \sqrt{4+36+9} = 7,$

$$\boxed{\mathbf{q_1}} = \frac{1}{7}\mathbf{a_1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{r_{1,2}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_2} \rangle = \frac{1}{7}(10+48-9) = 7,$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{a_2} - r_{1,2}\,\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{7}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$\boxed{r_{2,2}} = \|\mathbf{v_2}\| = 7,$

$$\boxed{\mathbf{q_2}} = \frac{1}{r_{2,2}}\mathbf{v_2} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$\boxed{r_{1,3}} = \langle \mathbf{q_1}, \mathbf{a_3} \rangle = 2,$

$\boxed{r_{2,3}} = \langle \mathbf{q_2}, \mathbf{a_3} \rangle = 0,$

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{a_3} - r_{1,3}\,\mathbf{q_1} - r_{2,3}\,\mathbf{q_2} = \frac{4}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$\boxed{r_{3,3}} = \|\mathbf{v_2}\| = 4,$

$$\boxed{\mathbf{q_3}} = \frac{1}{r_{3,3}}\mathbf{v_3} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Végül $A = QR$, ahol

$$Q = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Adjuk meg azt a $\mathbf{v}$ egységvektort, melyre $H(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$, ha

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Mivel $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, alkalmazhatjuk a Householder-transzformációra vonatkozó tételt:

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ugyanis

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

Ellenőrzés:

$$H(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = (I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\mathbf{v}\left(\mathbf{v}^T\mathbf{a}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Householder-transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = [-1, 1, -1, 1]^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül a $\mathbf{b} = [2, 1, 1, 0]^T$ vektoron!

Megoldás: A Householder-transzformációra vonatkozó tételt szeretnénk alkalmazni:

Most $\mathbf{b} = \pm\|\mathbf{a}\|\mathbf{e_1}$, úgy választjuk meg az előjelet, hogy a $\mathbf{v}$ formulájában szereplő osztásnál nagyobb nevezővel számoljunk (stabilitás!). Ezért legyen $\mathbf{b} = \sigma\|\mathbf{e_1}\|$, ahol

$$\sigma = -\text{sign}(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\| = -\text{sign}(-1)\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 2$$

Továbbá

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\| = 2\sqrt{3},$$

végül

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a transzformációt a $\mathbf{b} = [2, 1, 1, 0]^T$ vektorra:

$$H(\mathbf{v})\mathbf{b} = (I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{b} = \mathbf{b} - 2\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{b}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-6) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Householder-transzformációval hozzuk felsőháromszög mátrix alakra az alábbi lineáris egyenletrendszert, majd visszahelyettesítéssel oldjuk meg!
A transzformációt a Householder-mátrix elemeinek kiszámítása nélkül végezzük el!

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$$

Megoldás:

Első lépésben az A mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $k\cdot\mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A numerikusan stabil számolás érdekében jó előjelet választunk $k=\sigma$-nak (legyen a $\|\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e_1}\|$ a lehető legnagyobb)

$$\sigma=-sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2=-sgn(4)\cdot\sqrt{4^2+3^2}=-5$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e_1}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}+5\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\Rightarrow \qquad \|\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e_1}\|_2=\frac{\sqrt{10}}{3}, \tag{1}$$

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e_1}\|_2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

A mátrix első oszlopára nem kell alkalmaznunk a transzformációt, mert a konstrukció garantálja az eredményt, ugyanis

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a_1}=\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk a transzformációt a második oszlopra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a_2}=\left(\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}\right)\cdot\mathbf{a_2}=\mathbf{a_2}-2\cdot\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\cdot(-5)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk a transzformációt a LER jobb oldali vektorára:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{b}=\left(\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}\right)\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}-2\cdot\mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{b}\right)= \tag{2}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}= \tag{3}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\cdot5=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$$

Egy Householder-transzformációs lépés után a lineáris egyenletrendszer felsőháromszög alakú lett

$$\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk a megoldást:

$$2x_2=4\rightarrow x_2=2,$$
$$-5x_1+x_2=-3\rightarrow -5x_1=-5\rightarrow x_1=1.$$

5. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Householder-transzformációval, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Első lépésben az A mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $k_1 \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A numerikusan stabil számolás érdekében legyen $k_1 = -\|\mathbf{a_1}\| = -\sqrt{2}$. Ekkor

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{a_1}\| = \|\mathbf{b_1}\|.$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v_1}$ vektort:

$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}}{\|\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Most alkalmazzuk a $H(\mathbf{v_1})$ Householder-transzformációt az A mátrixra (azaz az A oszlopaira).

A mátrix első oszlopára a konstrukció automatikusan adja az eredményt: $H(\mathbf{v_1})\mathbf{a_1} = \mathbf{b_1}$.

Alkalmazzuk a transzformációt a második oszlopra:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right) \cdot \mathbf{a_2} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2 \cdot \left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_2}\right) \cdot \mathbf{v_1} = \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_2} = 0$.

Alkalmazzuk a transzformációt a harmadik oszlopra:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right) \cdot \mathbf{a_3} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{a_3} = \mathbf{a_3} - 2 \cdot \left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_3}\right) \cdot \mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - (3-\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} \\ 0 \\ 3-\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Végül alkalmazzuk a transzformációt a LER jobb oldali vektorára:

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{v_1}\right) \cdot \mathbf{b} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} - 2 \cdot \left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{6+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Láthatjuk, hogy a $H_1 = H(\mathbf{v_1})$ transzformáció egyszeri végrehajtásával az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER felső háromszögalakú lett

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right].$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk a LER megoldását: $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

Mivel a Householder-transzformáció mátrixa ortogonális mátrix, láthatjuk, hogy az A mátrixnak egy QR felbontását kaptuk az eljárás során, ahol

$$Q = H_1 \qquad \text{és} \qquad R = H_1 A.$$

6. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Householder-transzformációval, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Első lépésben az A mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $k_1 \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A numerikusan stabil számolás érdekében legyen $k_1 = -\|\mathbf{a_1}\| = -4$. Ekkor

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{a_1}\| = \|\mathbf{b_1}\|.$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v_1}$ vektort:

$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}}{\|\mathbf{a_1} - \mathbf{b_1}\|} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e_1}.$$

Most alkalmazzuk a $H(\mathbf{v_1})$ Householder-transzformációt az A mátrixra (azaz az A oszlopaira).

A mátrix első oszlopára a konstrukció automatikusan adja az eredményt: $H(\mathbf{v_1})\mathbf{a_1} = \mathbf{b_1}$.

Alkalmazzuk a transzformációt a második oszlopra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{a_2} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2 \cdot \left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_2}\right) \cdot \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a transzformációt a harmadik oszlopra:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{a_3} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{a_3} = \mathbf{a_3} - 2 \cdot \left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{a_3}\right) \cdot \mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Végül alkalmazzuk a transzformációt a LER jobb oldali vektorára:

$$\mathbf{H}(\mathbf{v_1}) \cdot \mathbf{b} = \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v_1}\mathbf{v_1^T}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} - 2 \cdot \left(\mathbf{v_1^T}\mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{v_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $H_1 = H(\mathbf{v_1})$ transzformáció egyszeri végrehajtásával az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER a következő alakú lett:

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} -4 & -1 & 2 & -2 \\ \cline{2-4} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Alkalmazzuk ismét a Householder-transzformációt a

$$[\tilde{A} \mid \tilde{\mathbf{b}}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

feladatra. Ekkor

$$\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \left(I - 2\,\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}^T\right)\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} - 2\left(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{2+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (1-2\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3-\sqrt{2} \\ -1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})\tilde{\mathbf{b}} = H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})\tilde{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

A $H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2})$ transzformáció hatása

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array}\right],$$

összefoglalva

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array}\right].$$

A LER megoldását visszahelyettesítéssel kapjuk meg: $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$.

A Householder-transzformáció kétszeri alkalmazásával az A mátrix QR felbontását kapjuk, ahol

$$Q = H_1 H_2 \qquad \text{és} \qquad R = H_2 H_1 A,$$

$$H_1 = H(\mathbf{v_1}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & H(\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

$$Q = H_1 H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \qquad R = H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$