Természetes levezetés

Gyakorlat

Logika

2020/2021 1. félév

Természetes levezetés alapjai

az azonosság törvénye

$$\Gamma, A \vdash_0 A$$

a bővítés szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma, B \vdash_0 A}$$

a szűkítés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a felcserélés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a vágás szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Delta, A \vdash_0 B}{\Gamma, \Delta \vdash_0 B}$$

bevezető szabályok		*alkalmazó szabályok*	
$(\supset b)$	$\frac{\Gamma, A \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \supset B}$	$(\supset a)$	$\frac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Gamma \vdash_0 A \supset B}{\Gamma \vdash_0 B}$
$(\wedge b)$	$\frac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \wedge B}$	$(\wedge a)$	$\frac{\Gamma, A, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \wedge B \vdash_0 C}$
$(\vee b)$	$\frac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma \vdash_0 A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \vee B}$	$(\vee a)$	$\frac{\Gamma, A \vdash_0 C \qquad \Gamma, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \vee B \vdash_0 C}$
$(\neg b)$	$\frac{\Gamma, A \vdash_0 B \qquad \Gamma, A \vdash_0 \neg B}{\Gamma \vdash_0 \neg A}$	$(\neg a)$	$\frac{\Gamma \vdash_0 \neg\neg A}{\Gamma \vdash_0 A}$

bevezető szabályok		*alkalmazó szabályok*	
$(\forall b)$	$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \quad (x \notin Par(\Gamma))$	$(\forall a)$	$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}$
$(\exists b)$	$\frac{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}{\Gamma \vdash \exists x A}$	$(\exists a)$	$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B} \quad (x \notin Par(\Gamma, B))$

- Levezetési szabály két része: felső - premisszák, alsó - konklúzió (Ha a felső levezetés megkonstruálható, akkor az alsó is.)
- Levezetési szabályokat lentről felfele fogjuk alkalmazni
- Három szabály, amelynek a használata nem egyértelmű: $(\supset a)$, $(\neg b)$ és vágás szabálya

Egyszerű levezetések

- **Biz 1:** $\vdash_0 A \supset A$

$$(\supset b)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{A \vdash_0 A}}{\vdash_0 A \supset A}$$

- **Biz 2:** $\neg\neg A \vdash_0 A$

$$(\neg a)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{\neg\neg A \vdash_0 \neg\neg A}}{\neg\neg A \vdash_0 A}$$

- **Biz 3:** $A \vdash_0 \neg\neg A$

$$(\neg b)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{A, \neg A \vdash_0 A} \qquad \dfrac{\checkmark}{A, \neg A \vdash_0 \neg A}}{A \vdash_0 \neg\neg A}$$

Összetettebb levezetés

Biz4: $\{A \supset B\} \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\checkmark}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 \neg\neg A}
    }{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 A}\,(\neg a)
    \qquad
    \dfrac{\checkmark}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 A \supset B}
  }{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 B}\,(\supset a)
  \qquad
  \dfrac{\checkmark}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 \neg B}
}{
  \dfrac{A \supset B, \neg\neg A \vdash_0 \neg\neg B}{A \supset B \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B}\,(\supset b)
}\,(\neg b)
$$

1. Feladat

Bizonyítsuk, hogy a következő levezetés helyes:

$\{(A \vee B) \supset C\} \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

$$
(\wedge b)\ \dfrac{(\supset b)\ \dfrac{(\supset a)\ \dfrac{(\vee b)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 A}}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 A \vee B} \qquad \dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 (A \vee B) \supset C}}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 A \supset C} \qquad \dfrac{\dots}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 B \supset C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)}
$$

1. Feladat

Bizonyítsuk, hogy a következő levezetés helyes:
$\{(A \vee B) \supset C\} \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

$$
(\wedge b)\;\dfrac{\dfrac{\cdots}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 A \supset C} \qquad (\supset b)\;\dfrac{(\supset a)\;\dfrac{(\vee b)\;\dfrac{\dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 B}}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 A \vee B} \qquad \dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 (A \vee B) \supset C}}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 B \supset C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)}
$$

2. Feladat

Bizonyítsuk, hogy a következő formula bizonyítható: $A \supset (\neg A \supset B)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\checkmark}{A, \neg A, \neg B \vdash_0 A} \qquad \dfrac{\checkmark}{A, \neg A, \neg B \vdash_0 \neg A}}{A, \neg A \vdash_0 \neg\neg B}(\neg b)}{A, \neg A \vdash_0 B}(\neg a)}{A \vdash_0 \neg A \supset B}(\supset b)}{\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B)}(\supset b)
$$

3. Feladat

Vizsgáljuk meg a szokásos "nyomozós" feladatot:
$\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \models_0 \neg F$

$$(\neg b)\ \dfrac{\dfrac{\dots}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 A} \qquad \dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 \neg A}}{F \supset K, K \supset A, \neg A \vdash_0 \neg F}$$

3. Feladat

Vizsgáljuk meg a szokásos "nyomozós" feladatot:
$\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \models_0 \neg F$

$$
(\neg b)\ \dfrac{(\supset a)\ \dfrac{(\supset a)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 F} \qquad \dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 F \supset K}}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 K} \qquad \dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 K \supset A}}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 A}}{F \supset K, K \supset A, \neg A \vdash_0 \neg F}
$$

4. Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy a következő levezetés helyes-e:
$\{\exists x(P(x) \wedge R(x))\} \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$

$$
\dfrac{
  (\wedge b)\;
  \dfrac{(\exists b)\;\dfrac{(\exists a)\;\dfrac{\text{Nem valid lépés, mert } x \in Par(P(x))!}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 P(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x)}
  \qquad
  \dfrac{\dots}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x R(x)}
}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)}
$$

4. Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy a következő levezetés helyes-e:
$\{\exists x(P(x) \wedge R(x))\} \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Nem jó!}}{P(x), R(x) \vdash_0 P(y)}\ (\wedge a)}{P(x) \wedge R(x) \vdash_0 P(y)}\ (\exists a)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 P(y)}\ (\exists b)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x)} \qquad \dfrac{\dots}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x R(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)}\ (\wedge b)
$$

4. Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy a következő levezetés helyes-e:
$\{\exists x(P(x) \land R(x))\} \vdash_0 \exists x P(x) \land \exists x R(x)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\checkmark}{P(x), R(x) \vdash_0 P(x)}}{P(x), R(x) \vdash_0 \exists x P(x)}\,(\exists b) \qquad \dfrac{\dfrac{\checkmark}{P(x), R(x) \vdash_0 R(x)}}{P(x), R(x) \vdash_0 \exists x R(x)}\,(\exists b)}{P(x), R(x) \vdash_0 \exists x P(x) \land \exists x R(x)}\,(\land b)}{P(x) \land R(x) \vdash_0 \exists x P(x) \land \exists x R(x)}\,(\land a)}{\exists x(P(x) \land R(x)) \vdash_0 \exists x P(x) \land \exists x R(x)}\,(\exists a)
$$

5. Feladat

Vizsgáljuk meg, hogy a következő levezetés helyes-e:
$\{\neg\forall x(P(x) \vee R(x))\} \vdash_0 \exists x(P(x) \supset R(x))$