# Számításelmélet

## 6. előadás

előadó: Kolonits Gábor
kolomax@inf.elte.hu

# Nemdeterminisztikus Turing gép

Jelölés: $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ az $X$ halmaz hatványhalmaza.

## Nemdeterminisztikus Turing gép (NTG)

Az egyszalagos **nemdeterminisztikus Turing gép** (továbbiakban röviden NTG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- $Q$ az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, $q_0$ a kezdő- $q_i$ az elfogadó- és $q_n$ az elutasító állapot,
- $\Sigma$ és $\Gamma$ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$,
- $\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})$.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

Jelölés: $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ az $X$ halmaz hatványhalmaza.

## Nemdeterminisztikus Turing gép (NTG)

Az egyszalagos **nemdeterminisztikus Turing gép** (továbbiakban röviden NTG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- $Q$ az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, $q_0$ a kezdő- $q_i$ az elfogadó- és $q_n$ az elutasító állapot,
- $\Sigma$ és $\Gamma$ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$,
- $\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})$.

Azaz míg a **determinisztikus** esetben a $\delta$ átmenetfüggvény minden egyes $(Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma$-beli párhoz **pontosan egy**, addig egy **nemdeterminisztikus** TG **akárhány** (pl. 0,1,5,100) darab $Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$-beli rendezett hármast rendelhet hozzá.

# NTG egylépéses konfigurácóátmenete

A **konfiguráció** fogalma azonos, jelölje most is $C_M$ az $M$ NTG lehetséges konfigurációinak halmazát.

# NTG egylépéses konfigurácóátmenete

A **konfiguráció** fogalma azonos, jelölje most is $C_M$ az $M$ NTG lehetséges konfigurációinak halmazát.

### Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egyszalagos nemdeterminisztikus Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

# NTG egylépéses konfigurácóátmenete

A **konfiguráció** fogalma azonos, jelölje most is $C_M$ az $M$ NTG lehetséges konfigurációinak halmazát.

## Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egyszalagos nemdeterminisztikus Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$ .

# NTG egylépéses konfigurácóátmenete

A **konfiguráció** fogalma azonos, jelölje most is $C_M$ az $M$ NTG lehetséges konfigurációinak halmazát.

### Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egyszalagos nemdeterminisztikus Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$ .

- Ha $(r, b, R) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$ , ahol $v' = v$ , ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $(r, b, S) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $(r, b, L) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

# NTG egylépéses konfigurácóátmenete

A **konfiguráció** fogalma azonos, jelölje most is $C_M$ az $M$ NTG lehetséges konfigurációinak halmazát.

## Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egyszalagos nemdeterminisztikus Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma,\ u, v \in \Gamma^*$ .

- Ha $(r, b, R) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$ , ahol $v' = v$ , ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $(r, b, S) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $(r, b, L) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

**Példa:** Tegyük fel, hogy $\delta(q_2, a) = \{(q_5, b, L), (q_1, d, R)\}$ Legyen továbbá $C_1 = bcq_2a\sqcup b$, $C_2 = bq_5cb\sqcup b$, $C_3 = bcdq_1\sqcup b$.

# NTG egylépéses konfigurácóátmenete

A **konfiguráció** fogalma azonos, jelölje most is $C_M$ az $M$ NTG lehetséges konfigurációinak halmazát.

## Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egyszalagos nemdeterminisztikus Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$ .

- Ha $(r, b, R) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$ , ahol $v' = v$ , ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $(r, b, S) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $(r, b, L) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

**Példa:** Tegyük fel, hogy $\delta(q_2, a) = \{(q_5, b, L), (q_1, d, R)\}$ Legyen továbbá $C_1 = bcq_2a\sqcup b$, $C_2 = bq_5cb\sqcup b$, $C_3 = bcdq_1\sqcup b$. Ekkor $C_1 \vdash C_2$ és $C_1 \vdash C_3$.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

Vegyük észre, hogy míg a **determinisztikus** esetben minden nem-megállási $C$ konfigurációhoz **pontosan egy** $C'$ konfiguráció létezett, melyre $C \vdash C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet. Pl. 0,1,5,100 darab. Persze csak véges sok, hiszen $|Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}|$ véges!

# Nemdeterminisztikus Turing gép

Vegyük észre, hogy míg a **determinisztikus** esetben minden nem-megállási $C$ konfigurációhoz **pontosan egy** $C'$ konfiguráció létezett, melyre $C \vdash C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet. Pl. 0,1,5,100 darab. Persze csak véges sok, hiszen $|Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}|$ véges!

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív, tranzitív lezártja, azaz:

# Nemdeterminisztikus Turing gép

Vegyük észre, hogy míg a **determinisztikus** esetben minden nem-megállási $C$ konfigurációhoz **pontosan egy** $C'$ konfiguráció létezett, melyre $C \vdash C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet. Pl. 0,1,5,100 darab. Persze csak véges sok, hiszen $|Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}|$ véges!

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív, tranzitív lezártja, azaz:

### Definíció

A $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ **többlépéses konfigurációátmenet** relációját a következőképpen definiáljuk: $C \vdash^* C' \Leftrightarrow$

- ha $C = C'$ vagy
- ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \dots C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

Vegyük észre, hogy míg a **determinisztikus** esetben minden nem-megállási $C$ konfigurációhoz **pontosan egy** $C'$ konfiguráció létezett, melyre $C \vdash C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet. Pl. 0,1,5,100 darab. Persze csak véges sok, hiszen $|Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}|$ véges!

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív, tranzitív lezártja, azaz:

**Definíció**

A $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ **többlépéses konfigurációátmenet** relációját a következőképpen definiáljuk: $C \vdash^* C' \Leftrightarrow$

- ha $C = C'$ vagy
- ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \ldots C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.

**Példa:** Tegyük fel, hogy $C_1 \vdash C_2$, $C_1 \vdash C_3$, $C_2 \vdash C_4$. Ekkor $C_1 \vdash^* C_1$, $C_1 \vdash^* C_2$, $C_1 \vdash^* C_3$ és $C_1 \vdash^* C_4$ is teljesül.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Definíció

Az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ nemdeterminisztikus Turing gép által **felismert nyelv**
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Definíció

Az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ nemdeterminisztikus Turing gép által **felismert nyelv**
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

Bár a definíció formálisan megegyezik a determinisztikus TG által felismert nyelv definíciójával az egylépéses átmenet fogalmának módosulása miatt újra érdemes átgondolni mit jelent ez.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

**Definíció**

Az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ nemdeterminisztikus Turing gép által **felismert nyelv**
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

Bár a definíció formálisan megegyezik a determinisztikus TG által felismert nyelv definíciójával az egylépéses átmenet fogalmának módosulása miatt újra érdemes átgondolni mit jelent ez.

Determinisztikus esetben csupán egyetlen számítása létezik a gépnek adott kezdőkonfigurációból, így ha elfogadó konfigurációba jut, akkor nincs elutasító konfigurációba jutó számítása és viszont.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Definíció

Az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ nemdeterminisztikus Turing gép által **felismert nyelv**
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

Bár a definíció formálisan megegyezik a determinisztikus TG által felismert nyelv definíciójával az egylépéses átmenet fogalmának módosulása miatt újra érdemes átgondolni mit jelent ez.

Determinisztikus esetben csupán egyetlen számítása létezik a gépnek adott kezdőkonfigurációból, így ha elfogadó konfigurációba jut, akkor nincs elutasító konfigurációba jutó számítása és viszont.

Egy NTG-nek azonban **több számítása is lehet ugyanarra a szóra**. Ezek között lehetnek elfogadó és elutasító (sőt nem termináló!) számítások is. Egy NTG akkor fogad el egy szót, ha az adott szóra **legalább egy számítása $q_i$-ben ér véget** (hiszen ekkor a kezdőkonfiguráció és ez az elfogadó konfiguráció $\vdash^*$ relációban áll).

# Nemdeterminisztikus számítási fa

## Definíció

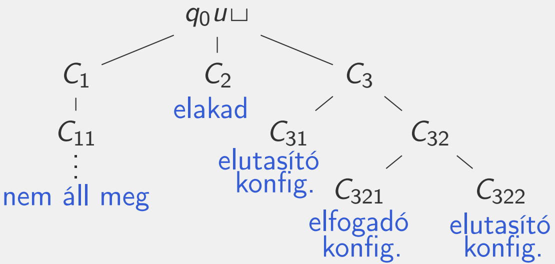
Egy $M$ TG egy $u \in \Sigma^*$ inputjához tartozó **nemdeterminisztikus számítási fa** egy gyökeres fa, melynek csúcsai $M$ konfigurációival címkézettek. $q_0 u \sqcup$ a gyökér címkéje. Ha $C$ egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.

# Nemdeterminisztikus számítási fa

## Definíció

Egy $M$ TG egy $u \in \Sigma^*$ inputjához tartozó **nemdeterminisztikus számítási fa** egy gyökeres fa, melynek csúcsai $M$ konfigurációival címkézettek. $q_0 u \sqcup$ a gyökér címkéje. Ha $C$ egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.

**Példa:**

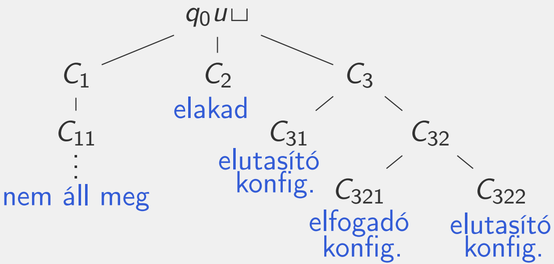


# Nemdeterminisztikus számítási fa

## Definíció

Egy $M$ TG egy $u \in \Sigma^*$ inputjához tartozó **nemdeterminisztikus számítási fa** egy gyökeres fa, melynek csúcsai $M$ konfigurációival címkézettek. $q_0 u \sqcup$ a gyökér címkéje. Ha $C$ egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.

**Példa:**




$M$ elfogadja $u$-t, hiszen $q_0 u \sqcup \vdash C_3 \vdash C_{32} \vdash C_{321}$ elfogadó számítás. Az elfogadáshoz **egyetlen** elfogadó számítás is elég!

# Nemdeterminisztikus számítási fa

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, **elakadóak** (ha olyan $C$-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \emptyset$), illetve végtelenek.

# Nemdeterminisztikus számítási fa

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, **elakadóak** (ha olyan $C$-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \emptyset$), illetve végtelenek.

*Észrevétel:* $u \in L(M) \Leftrightarrow$ az $u$-hoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fának van olyan levele, ami elfogadó konfiguráció.

# Nemdeterminisztikus számítási fa

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, **elakadóak** (ha olyan $C$-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \emptyset$), illetve végtelenek.

*Észrevétel:* $u \in L(M) \Leftrightarrow$ az $u$-hoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fának van olyan levele, ami elfogadó konfiguráció.

*Megjegyzés:* a nemdeterminisztikus Turing gép definíciója értelemszerűen kiterjeszthető $k$-szalagos gépekre is, így beszélhetünk $k$-szalagos nemdeterminisztikus Turing gépekről is.

# NTG-vel való eldönthetőség, időigény

## Definíció

Az $M$ NTG **felismeri** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha $L(M) = L$.

# NTG-vel való eldönthetőség, időigény

**Definíció**

Az $M$ NTG **felismeri** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha $L(M) = L$.

Az $M$ NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri továbbá minden $u \in \Sigma^*$ input szóhoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fa véges és a fa minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

# NTG-vel való eldönthetőség, időigény

**Definíció**

Az $M$ NTG **felismeri** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha $L(M) = L$.

Az $M$ NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri továbbá minden $u \in \Sigma^*$ input szóhoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fa véges és a fa minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

**Definíció**

Az $M$ NTG $\boldsymbol{f(n)}$ **időkorlátos** (időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ $n$ hosszú szóra $u$ számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

# NTG-vel való eldönthetőség, időigény

**Definíció**

Az $M$ NTG **felismeri** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha $L(M) = L$.

Az $M$ NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri továbbá minden $u \in \Sigma^*$ input szóhoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fa véges és a fa minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

**Definíció**

Az $M$ NTG $\boldsymbol{f(n)}$ **időkorlátos** (időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ $n$ hosszú szóra $u$ számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

Tehát, ha $M$ $f(n)$ időkorlátos, akkor nincs végtelen számítása és minden $n$-re a legfeljebb $n$ méretű bemeneteken a számításai (nemcsak az elfogadó, hanem az elutasító és elakadó számításai is) legfeljebb $f(n)$ lépésben véget érnek.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

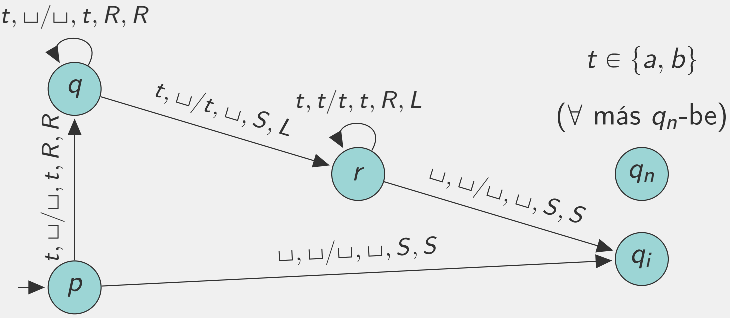
## Példa

**Feladat**: Készítsünk egy $M$ nemdeterminisztikus Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$!

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Példa

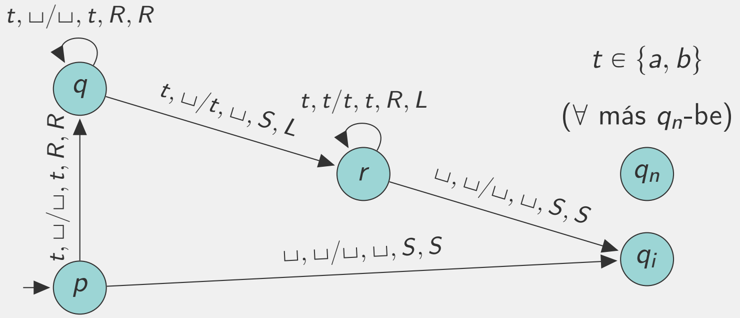
**Feladat**: Készítsünk egy $M$ nemdeterminisztikus Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$!



# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Példa

**Feladat**: Készítsünk egy $M$ nemdeterminisztikus Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!

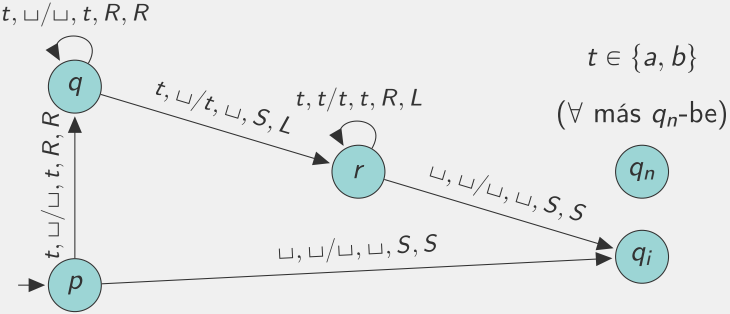



$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, bba, \varepsilon, a) \vdash$
$(q_n, \varepsilon, bba, \varepsilon, a)$

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Példa

**Feladat**: Készítsünk egy $M$ nemdeterminisztikus Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$!




$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, bba, \varepsilon, a) \vdash (q_n, \varepsilon, bba, \varepsilon, a)$

$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, ba, ab, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, ba, a, b) \vdash (r, b, a, \varepsilon, ab) \vdash (r, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab) \vdash (q_i, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab)$

# Hosszlexikografikus rendezés

## Definíció

Legyen $X = \{x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_s\}$ egy rendezett ábécé. Ekkor $X^*$ szavainak **hossz-lexikografikus** (shortlex) rendezése alatt azt a $\prec_{\text{shortlex}}$ rendezést értjük, melyre a következők teljesülnek. Minden $u_1 \cdots u_n, v_1 \cdots v_m \in X^*$-ra
$u_1 \cdots u_n \prec_{\text{shortlex}} v_1 \cdots v_m \Leftrightarrow (n < m) \vee$
$((n = m) \wedge (u_k < v_k)$, ahol $k$ a legkisebb olyan $i$, melyre $u_i \neq v_i)$.

# Hosszlexikografikus rendezés

## Definíció

Legyen $X = \{x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_s\}$ egy rendezett ábécé. Ekkor $X^*$ szavainak **hossz-lexikografikus** (shortlex) rendezése alatt azt a $\prec_{\text{shortlex}}$ rendezést értjük, melyre a következők teljesülnek. Minden $u_1 \cdots u_n, v_1 \cdots v_m \in X^*$-ra
$u_1 \cdots u_n \prec_{\text{shortlex}} v_1 \cdots v_m \Leftrightarrow (n < m) \vee$
$((n = m) \wedge (u_k < v_k)$, ahol $k$ a legkisebb olyan $i$, melyre $u_i \neq v_i)$.

**1. Példa:** Ha $X = \{a, b\}$ és $a \prec b$, akkor $X^*$ szavainak hossz-lexikografikus sorrendje:

# Hosszlexikografikus rendezés

**Definíció**

Legyen $X = \{x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_s\}$ egy rendezett ábécé. Ekkor $X^*$ szavainak **hossz-lexikografikus** (shortlex) rendezése alatt azt a $\prec_{\text{shortlex}}$ rendezést értjük, melyre a következők teljesülnek. Minden $u_1 \cdots u_n, v_1 \cdots v_m \in X^*$-ra
$u_1 \cdots u_n \prec_{\text{shortlex}} v_1 \cdots v_m \Leftrightarrow (n < m) \vee$
$((n = m) \wedge (u_k < v_k)$, ahol $k$ a legkisebb olyan $i$, melyre $u_i \neq v_i)$.

**1. Példa:** Ha $X = \{a, b\}$ és $a \prec b$, akkor $X^*$ szavainak hossz-lexikografikus sorrendje:

$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, \ldots$

# Hosszlexikografikus rendezés

## Definíció

Legyen $X = \{x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_s\}$ egy rendezett ábécé. Ekkor $X^*$ szavainak **hossz-lexikografikus** (shortlex) rendezése alatt azt a $\prec_{\text{shortlex}}$ rendezést értjük, melyre a következők teljesülnek. Minden $u_1 \cdots u_n, v_1 \cdots v_m \in X^*$-ra
$u_1 \cdots u_n \prec_{\text{shortlex}} v_1 \cdots v_m \Leftrightarrow (n < m) \vee$
$((n = m) \wedge (u_k < v_k)$, ahol $k$ a legkisebb olyan $i$, melyre $u_i \neq v_i$).

**1. Példa:** Ha $X = \{a, b\}$ és $a \prec b$, akkor $X^*$ szavainak hossz-lexikografikus sorrendje:

$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, \ldots$

**2. Példa:** Tekintsük a természetes számokat (azaz 0 számjeggyel nem kezdődhetnek, a 0 kivételével), mint számjegysorozatokat.

# Hosszlexikografikus rendezés

## Definíció

Legyen $X = \{x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_s\}$ egy rendezett ábécé. Ekkor $X^*$ szavainak **hossz-lexikografikus** (shortlex) rendezése alatt azt a $\prec_{\text{shortlex}}$ rendezést értjük, melyre a következők teljesülnek. Minden $u_1 \cdots u_n, v_1 \cdots v_m \in X^*$-ra
$u_1 \cdots u_n \prec_{\text{shortlex}} v_1 \cdots v_m \Leftrightarrow (n < m) \vee$
$((n = m) \wedge (u_k < v_k)$, ahol $k$ a legkisebb olyan $i$, melyre $u_i \neq v_i)$.

**1. Példa:** Ha $X = \{a, b\}$ és $a \prec b$, akkor $X^*$ szavainak hossz-lexikografikus sorrendje:

$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, \ldots$

**2. Példa:** Tekintsük a természetes számokat (azaz 0 számjeggyel nem kezdődhetnek, a 0 kivételével), mint számjegysorozatokat.

Ekkor $n < m$ pontosan akkor igaz, ha az $X = \{0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$ rendezett ábécé feletti szavaknak tekintve őket $n \prec_{\text{shortlex}} m$ teljesül.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Szimulálás determinisztikus TG-pel

### Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ időkorlátos NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ időkorlátos $M'$ determinisztikus TG.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Szimulálás determinisztikus TG-pel

### Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ időkorlátos NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ időkorlátos $M'$ determinisztikus TG.

**Bizonyítás** (vázlat): Ötlet: Vegyük észre, hogy minden $u \in \Sigma^*$-ra $u$ számítási fájának csúcsai éppen $u$ parciális (nem feltétlen befejezett) számításainak felelnek meg.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Szimulálás determinisztikus TG-pel

### Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ időkorlátos NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ időkorlátos $M'$ determinisztikus TG.

**Bizonyítás** (vázlat): Ötlet: Vegyük észre, hogy minden $u \in \Sigma^*$-ra $u$ számítási fájának csúcsai éppen $u$ parciális (nem feltétlen befejezett) számításainak felelnek meg. $M'$ egy adott $u \in \Sigma^*$ bemeneten tehát szimulálni tudja $u$ $M$-beli összes parciális számítását a számítási fájának szélességi bejárása által.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Szimulálás determinisztikus TG-pel

### Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ időkorlátos NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ időkorlátos $M'$ determinisztikus TG.

**Bizonyítás** (vázlat): Ötlet: Vegyük észre, hogy minden $u \in \Sigma^*$-ra $u$ számítási fájának csúcsai éppen $u$ parciális (nem feltétlen befejezett) számításainak felelnek meg. $M'$ egy adott $u \in \Sigma^*$ bemeneten tehát szimulálni tudja $u$ $M$-beli összes parciális számítását a számítási fájának szélességi bejárása által.

- Legyen $d$ az $M$ átmenetfüggvényének jobb oldalán szereplő halmazok számosságának a maximuma, azaz $d = \max_{(q,a) \in Q \times T} |\delta(q, a)|$.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Szimulálás determinisztikus TG-pel

**Tétel**

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ időkorlátos NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ időkorlátos $M'$ determinisztikus TG.

**Bizonyítás** (vázlat): Ötlet: Vegyük észre, hogy minden $u \in \Sigma^*$-ra $u$ számítási fájának csúcsai éppen $u$ parciális (nem feltétlen befejezett) számításainak felelnek meg. $M'$ egy adott $u \in \Sigma^*$ bemeneten tehát szimulálni tudja $u$ $M$-beli összes parciális számítását a számítási fájának szélességi bejárása által.

- Legyen $d$ az $M$ átmenetfüggvényének jobb oldalán szereplő halmazok számosságának a maximuma, azaz $d = \max_{(q,a) \in Q \times T} |\delta(q, a)|$.
- Legyen $T = \{1, 2, \ldots, d\}$ egy (rendezett) ábécé.

# Nemdeterminisztikus Turing gép

## Szimulálás determinisztikus TG-pel

### Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ időkorlátos NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ időkorlátos $M'$ determinisztikus TG.

**Bizonyítás** (vázlat): Ötlet: Vegyük észre, hogy minden $u \in \Sigma^*$-ra $u$ számítási fájának csúcsai éppen $u$ parciális (nem feltétlen befejezett) számításainak felelnek meg. $M'$ egy adott $u \in \Sigma^*$ bemeneten tehát szimulálni tudja $u$ $M$-beli összes parciális számítását a számítási fájának szélességi bejárása által.

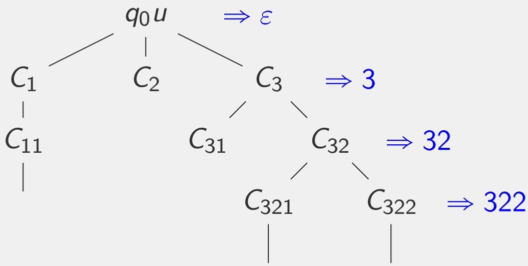
- Legyen $d$ az $M$ átmenetfüggvényének jobb oldalán szereplő halmazok számosságának a maximuma, azaz $d = \max_{(q,a)\in Q\times T} |\delta(q,a)|$.
- Legyen $T = \{1, 2, \ldots, d\}$ egy (rendezett) ábécé.
- minden $(q, a) \in Q \times \Gamma$ esetén rögzítsük le $\delta(q, a)$ elemeinek egy sorrendjét

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

A számítási fa minden csúcsához egyértelműen hozzárendelhető egy $T^*$-beli szó, az adott konfigurációhoz tartozó parciális számítás (konfigurációátmenet-sorozat) ún. *szelektora*.

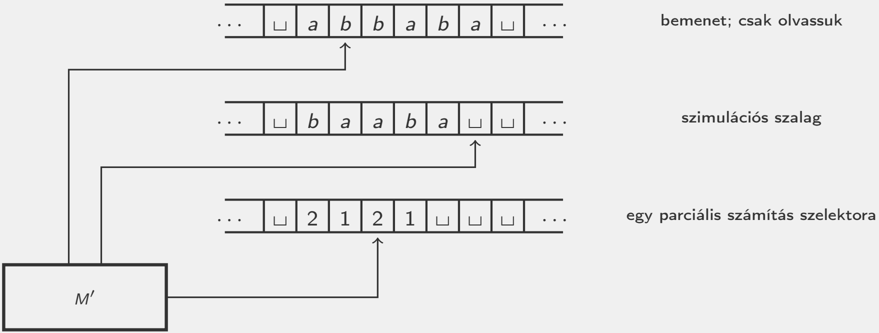
# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

A számítási fa minden csúcsához egyértelműen hozzárendelhető egy $T^*$-beli szó, az adott konfigurációhoz tartozó parciális számítás (konfigurációátmenet-sorozat) ún. *szelektora*.

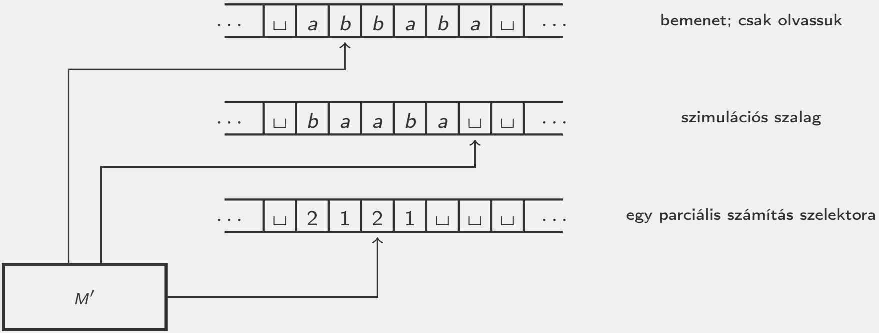



A gyökér szelektora $\varepsilon$. Tekintsük a gyökértől egy $x$ csúcsig vezető egyértelmű utat, ha a szülő konfigurációnak $x$ az $i$-edik gyereke és a szülő szelektora $w \in T^*$, akkor $x$ szelektora $wi \in T^*$.

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel



# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel




$M'$ működése:

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$
    - Ha $\delta(q, a)$-nak $\exists$ $k$-adik eleme, akkor

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$
    - Ha $\delta(q, a)$-nak $\exists$ $k$-adik eleme, akkor
      - $M'$ szimulálja $M$ egy lépését ezen elem szerint

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$
    - Ha $\delta(q, a)$-nak $\exists$ $k$-adik eleme, akkor
      - $M'$ szimulálja $M$ egy lépését ezen elem szerint
      - Ha ez $q_i$ -be vezet, akkor $M'$ is elfogad

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$
    - Ha $\delta(q, a)$-nak $\exists$ $k$-adik eleme, akkor
      - $M'$ szimulálja $M$ egy lépését ezen elem szerint
      - Ha ez $q_i$ -be vezet, akkor $M'$ is elfogad
      - Ha ez $q_n$-be vezet, akkor $M'$ kilép ebből a ciklusból

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$
    - Ha $\delta(q, a)$-nak $\exists$ $k$-adik eleme, akkor
      - $M'$ szimulálja $M$ egy lépését ezen elem szerint
      - Ha ez $q_i$ -be vezet, akkor $M'$ is elfogad
      - Ha ez $q_n$-be vezet, akkor $M'$ kilép ebből a ciklusból

      különben (ha $\delta(q, a)$-nak $\nexists$ $k$-adik eleme) kilép a ciklusból

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$
    - Ha $\delta(q, a)$-nak $\exists$ $k$-adik eleme, akkor
      - $M'$ szimulálja $M$ egy lépését ezen elem szerint
      - Ha ez $q_i$ -be vezet, akkor $M'$ is elfogad
      - Ha ez $q_n$-be vezet, akkor $M'$ kilép ebből a ciklusból

      különben (ha $\delta(q, a)$-nak $\nexists$ $k$-adik eleme) kilép a ciklusból
    - $M'$ a 3-ik szalagon eggyel jobbra lép

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ kezdőkonfigurációja: az 1-es szalag tartalmazza a bemenetet, a 2-es és 3-as szalagok üresek.
- Amíg nincs elfogadás
  - $M'$ rámásolja az 1-es szalag tartalmát a 2-esre
  - Amíg a 3-ik szalagon a fej nem $\sqcup$-re mutat
    - Legyen $k$ a 3-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű
    - Legyen a 2-ik szalagon a fej pozíciójában lévő betű $a$ és a szimulált $M$ aktuális állapota $q$
    - Ha $\delta(q, a)$-nak $\exists$ $k$-adik eleme, akkor
      - $M'$ szimulálja $M$ egy lépését ezen elem szerint
      - Ha ez $q_i$ -be vezet, akkor $M'$ is elfogad
      - Ha ez $q_n$-be vezet, akkor $M'$ kilép ebből a ciklusból

      különben (ha $\delta(q, a)$-nak $\nexists$ $k$-adik eleme) kilép a ciklusból
    - $M'$ a 3-ik szalagon eggyel jobbra lép
  - $M'$ törli a 2. szalagot és előállítja a 3. szalagon a hossz-lexikografikus (shortlex) rendezés szerinti következő szót $T$ felett (a fejet a szó elejére állítva)

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ akkor és csak akkor lép elfogadó állapotba, ha a szimulált $M$ elfogadó állapotba lép, azaz a két gép ekvivalens

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ akkor és csak akkor lép elfogadó állapotba, ha a szimulált $M$ elfogadó állapotba lép, azaz a két gép ekvivalens
- $M'$-nek $f(n)$-ben exponenciálisan sok számítást kell megvizsgálnia, legfeljebb annyit, mint amennyi egy $f(n)$ magasságú teljes $d$-áris fa csúcsainak száma. Ez

$$\sum_{i=0}^{f(n)} d^i = \frac{d^{f(n)+1} - 1}{d - 1} = O(d^{f(n)}).$$

- a parciális számítások szimulálása $O(n + f(n))$ időkorlátos,
- így $M'$ $O(n + f(n))O(d^{f(n)}) = 2^{O(f(n))}$ időkorlátos.

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ akkor és csak akkor lép elfogadó állapotba, ha a szimulált $M$ elfogadó állapotba lép, azaz a két gép ekvivalens
- $M'$-nek $f(n)$-ben exponenciálisan sok számítást kell megvizsgálnia, legfeljebb annyit, mint amennyi egy $f(n)$ magasságú teljes $d$-áris fa csúcsainak száma. Ez

$$\sum_{i=0}^{f(n)} d^i = \frac{d^{f(n)+1} - 1}{d - 1} = O(d^{f(n)}).$$

- a parciális számítások szimulálása $O(n + f(n))$ időkorlátos,
- így $M'$ $O(n + f(n))O(d^{f(n)}) = 2^{O(f(n))}$ időkorlátos.

*Megjegyzés:*

- Abból, hogy a bizonyításban alkalmazott szimuláció exponenciális időigényű még nem következik, hogy nincs hatékonyabb szimuláció.

# NTG szimulálása determinisztikus TG-pel

- $M'$ akkor és csak akkor lép elfogadó állapotba, ha a szimulált $M$ elfogadó állapotba lép, azaz a két gép ekvivalens
- $M'$-nek $f(n)$-ben exponenciálisan sok számítást kell megvizsgálnia, legfeljebb annyit, mint amennyi egy $f(n)$ magasságú teljes $d$-áris fa csúcsainak száma. Ez

$$\sum_{i=0}^{f(n)} d^i = \frac{d^{f(n)+1}-1}{d-1} = O(d^{f(n)}).$$

- a parciális számítások szimulálása $O(n+f(n))$ időkorlátos,
- így $M'$ $O(n+f(n))O(d^{f(n)}) = 2^{O(f(n))}$ időkorlátos.

*Megjegyzés:*

- Abból, hogy a bizonyításban alkalmazott szimuláció exponenciális időigényű még nem következik, hogy nincs hatékonyabb szimuláció.
- Az a *sejtés*, hogy nem lehet NTG-t az időigény drasztikus romlása nélkül determinisztikus TG-pel szimulálni.

# Számosság

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük

# Számosság

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük ($\rightarrow$ **természetes számok** fogalma).

# Számosság

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük ($\rightarrow$ **természetes számok** fogalma). Cél: ennek kiterjesztése végtelen halmazokra. Ez vezetett a **számosság** fogalmához*(G. Cantor, 1845-1918)*.

# Számosság

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük ($\rightarrow$ **természetes számok** fogalma). Cél: ennek kiterjesztése végtelen halmazokra. Ez vezetett a **számosság** fogalmához*(G. Cantor, 1845-1918)*.

## Definíció

- $A$ és $B$ halmazoknak **megegyezik a számosságuk**, ha $\exists$ bijekció köztük. Jelölése: $|A| = |B|$.

# Számosság

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük ($\to$ **természetes számok** fogalma). Cél: ennek kiterjesztése végtelen halmazokra. Ez vezetett a **számosság** fogalmához*(G. Cantor, 1845-1918)*.

## Definíció

- $A$ és $B$ halmazoknak **megegyezik a számosságuk**, ha $\exists$ bijekció köztük. Jelölése: $|A| = |B|$.
- $A$-nak **legalább annyi a számossága**, mint $B$-nek, ha $\exists$ $B$-ből injekció $A$-ba. Jelölése: $|A| \geqslant |B|$.

# Számosság

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük ($\rightarrow$ **természetes számok** fogalma). Cél: ennek kiterjesztése végtelen halmazokra. Ez vezetett a **számosság** fogalmához*(G. Cantor, 1845-1918)*.

### Definíció

- $A$ és $B$ halmazoknak **megegyezik a számosságuk**, ha $\exists$ bijekció köztük. Jelölése: $|A| = |B|$.
- $A$-nak **legalább annyi a számossága**, mint $B$-nek, ha $\exists$ $B$-ből injekció $A$-ba. Jelölése: $|A| \geqslant |B|$.
- $A$-nak **nagyobb a számossága, mint $B$-nek**, ha $\exists$ $B$-ből $A$-ba injekció, de $\nexists$ bijeckió. Jelölése: $|A| > |B|$.

# Számosság

A véges halmazok fontos tulajdonsága a méretük ($\rightarrow$ **természetes számok** fogalma). Cél: ennek kiterjesztése végtelen halmazokra. Ez vezetett a **számosság** fogalmához*(G. Cantor, 1845-1918)*.

## Definíció

- $A$ és $B$ halmazoknak **megegyezik a számosságuk**, ha $\exists$ bijekció köztük. Jelölése: $|A| = |B|$.
- $A$-nak **legalább annyi a számossága**, mint $B$-nek, ha $\exists$ $B$-ből injekció $A$-ba. Jelölése: $|A| \geqslant |B|$.
- $A$-nak **nagyobb a számossága, mint $B$-nek**, ha $\exists$ $B$-ből $A$-ba injekció, de $\nexists$ bijeckió. Jelölése: $|A| > |B|$.

## Cantor-Bernstein-Schröder tétel

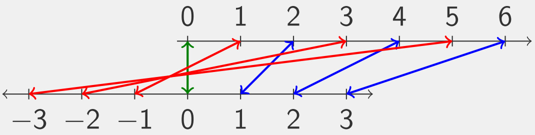
Ha $\exists$ injekció $A$-ból $B$-be és $B$-ből $A$-ba is, akkor $\exists$ bijekció $A$ és $B$ között, azaz ha $|A| \leqslant |B|$ és $|A| \geqslant |B|$, akkor $|A| = |B|$.

# Számosság – példák

1. **Példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

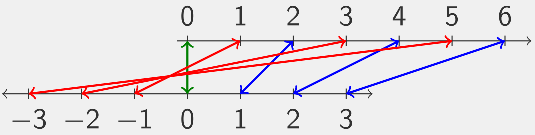
# Számosság – példák

**1. Példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.



# Számosság – példák

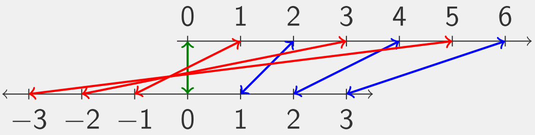
1. **Példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.



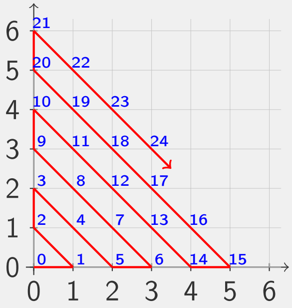

2. **példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

# Számosság – példák

**1. Példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.




**2. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.



# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

**Bizonyítás:**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$.

# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

**Bizonyítás:**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\mathbb{Q}^- := \{-\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.

# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

**Bizonyítás:**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\mathbb{Q}^- := \{-\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \mapsto (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektív, tehát $|\mathbb{Q}^+| \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

**Bizonyítás:**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+,$ a tört nem egyszerűsíthető$\}$.
$\mathbb{Q}^- := \{-\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+,$ a tört nem egyszerűsíthető$\}$.
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \mapsto (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektív, tehát $|\mathbb{Q}^+| \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
Legyen $\mathbb{Q}^+ = \{a_1, a_2 \ldots, \}$, $\mathbb{Q}^- = \{b_1, b_2 \ldots, \}$, ekkor

# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

**Bizonyítás:**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\mathbb{Q}^- := \{-\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \mapsto (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektív, tehát $|\mathbb{Q}^+| \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
Legyen $\mathbb{Q}^+ = \{a_1, a_2 \ldots, \}$, $\mathbb{Q}^- = \{b_1, b_2 \ldots, \}$, ekkor
$\mathbb{Q} = \{0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$.

# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

**Bizonyítás:**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\mathbb{Q}^- := \{-\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \mapsto (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektív, tehát $|\mathbb{Q}^+| \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
Legyen $\mathbb{Q}^+ = \{a_1, a_2 \ldots, \}$, $\mathbb{Q}^- = \{b_1, b_2 \ldots, \}$, ekkor
$\mathbb{Q} = \{0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$.

**Definíció**

Egy $A$ halmaz **megszámlálhatóan végtelen számosságú**, ha létezik $A$ és $\mathbb{N}$ között bijekció.

# A megszámlálhatóan végtelen számosság

**3. példa:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

**Bizonyítás:**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\mathbb{Q}^- := \{-\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}^+, \text{a tört nem egyszerűsíthető}\}$.
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \mapsto (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektív, tehát $|\mathbb{Q}^+| \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Legyen $\mathbb{Q}^+ = \{a_1, a_2 \ldots,\}$, $\mathbb{Q}^- = \{b_1, b_2 \ldots,\}$, ekkor
$\mathbb{Q} = \{0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$.

**Definíció**

Egy $A$ halmaz **megszámlálhatóan végtelen számosságú**, ha létezik $A$ és $\mathbb{N}$ között bijekció.

Azaz egy $A$ halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen, ha elemei megindexelhetők a természetes számokkal.

# A continuum számosság

Egy halmaz **megszámlálható**, ha számossága véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

**Tétel:** Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.

# A continuum számosság

Egy halmaz **megszámlálható**, ha számossága véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

**Tétel:** Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
**Bizonyítás** (vázlat) Konstrukció: mint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ bizonyításánál.

# A continuum számosság

Egy halmaz **megszámlálható**, ha számossága véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

**Tétel:** Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
**Bizonyítás** (vázlat) Konstrukció: mint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ bizonyításánál.

**Definíció**

Egy $A$ halmaz **continuum számosságú**, ha létezik $A$ és $\mathbb{R}$ között bijekció.

# A continuum számosság

Egy halmaz **megszámlálható**, ha számossága véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

**Tétel:** Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
**Bizonyítás** (vázlat) Konstrukció: mint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ bizonyításánál.

**Definíció**

Egy $A$ halmaz **continuum számosságú**, ha létezik $A$ és $\mathbb{R}$ között bijekció.

Be fogjuk látni, hogy $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

# A continuum számosság

Egy halmaz **megszámlálható**, ha számossága véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

**Tétel:** Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
**Bizonyítás** (vázlat) Konstrukció: mint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ bizonyításánál.

## Definíció

Egy $A$ halmaz **continuum számosságú**, ha létezik $A$ és $\mathbb{R}$ között bijekció.

Be fogjuk látni, hogy $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

**4. példa:** $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$.

# A continuum számosság

Egy halmaz **megszámlálható**, ha számossága véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

**Tétel:** Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
**Bizonyítás** (vázlat) Konstrukció: mint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ bizonyításánál.

**Definíció**

Egy $A$ halmaz **continuum számosságú**, ha létezik $A$ és $\mathbb{R}$ között bijekció.

Be fogjuk látni, hogy $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

**4. példa:** $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$.

**Bizonyítás:** $\mathrm{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))\big|_{(0,1)} : (0,1) \to \mathbb{R}$ bijekció $(0,1)$ és $\mathbb{R}$ között.

# A continuum számosság

Egy halmaz **megszámlálható**, ha számossága véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

**Tétel:** Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.
**Bizonyítás** (vázlat) Konstrukció: mint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ bizonyításánál.

## Definíció

Egy $A$ halmaz **continuum számosságú**, ha létezik $A$ és $\mathbb{R}$ között bijekció.

Be fogjuk látni, hogy $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

**4. példa:** $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$.

**Bizonyítás:** $\mathrm{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))\big|_{(0,1)} : (0,1) \to \mathbb{R}$ bijekció $(0,1)$ és $\mathbb{R}$ között.

*Megjegyzés:* $|\mathbb{R}| = |(a,b)| = |[c,d]|$ és $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$.

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**5. Példa:** $|\{0,1\}^*| = |\mathbb{N}|$.

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**5. Példa:** $|\{0,1\}^*| = |\mathbb{N}|$.

A hossz-lexikografikus (shortlex) rendezés egy bijekciót ad:
$\varepsilon$,0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111,0000,...

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**5. Példa:** $|\{0,1\}^*| = |\mathbb{N}|$.

A hossz-lexikografikus (shortlex) rendezés egy bijekciót ad:
$\varepsilon$,0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111,0000,...

Jelöljük a megszámlálhatóan $\infty$ hosszúságú $\{0,1\}$-sorozatok halmazát $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-nel, azaz

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(b_1,\ldots,b_i,\ldots) \mid b_i \in \{0,1\},\ i \in \mathbb{N}\}.$$

**6. Példa:** $\left|\left\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\right\}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**5. Példa:** $|\{0,1\}^*| = |\mathbb{N}|$.

A hossz-lexikografikus (shortlex) rendezés egy bijekciót ad:
$\varepsilon$,0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111,0000,...

Jelöljük a megszámlálhatóan $\infty$ hosszúságú $\{0,1\}$-sorozatok halmazát $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-nel, azaz

$\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(b_1,\ldots,b_i,\ldots) \mid b_i \in \{0,1\},\ i \in \mathbb{N}\}$.

**6. Példa:** $\left|\left\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\right\}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$

**Bizonyítás:** Jelölje $w_i$ $\{0,1\}^*$ hossz-lexikografikus rendezésének $i$. szavát $\quad (i \in \mathbb{N})$.

Egy $L$ nyelvhez rendeljük hozzá azt a megszámlálhatóan végtelen hosszúságú $\mathbf{b}_L = (b_1,\ldots,b_i,\ldots)$ bitsorozatot, amelyre
$b_i = 1 \Leftrightarrow w_i \in L$.

Ez nyilván bijekció, $\mathbf{b}_L$-t nevezhetjük is az $L$ nyelv **karakterisztikus sorozatának**.

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**7. Példa:** $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1)|$.

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**7. Példa:** $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1)|$.

**Bizonyítás** (vázlat):

Minden $x \in [0,1)$-hez rendeljük hozzá $x$ kettedestört alakjának "0." utáni részét. Ez nem feltétlen egyértelmű, hiszen a véges kettedestörteknek két végtelen kettedestört alakja is van. (Például 0,01=0,0100...=0,0011...)

Válasszuk ilyenkor a $\infty$ 0-ra végződő alakot. Ez a leképezés így nem bijekció, de injektív, azaz $|[0,1)| \leqslant |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**7. Példa:** $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1)|$.

**Bizonyítás** (vázlat):

Minden $x \in [0,1)$-hez rendeljük hozzá $x$ kettedestört alakjának "0." utáni részét. Ez nem feltétlen egyértelmű, hiszen a véges kettedestörteknek két végtelen kettedestört alakja is van. (Például 0,01=0,0100...=0,0011...)

Válasszuk ilyenkor a $\infty$ 0-ra végződő alakot. Ez a leképezés így nem bijekció, de injektív, azaz $|[0,1)| \leqslant |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Fordítva, $\mathbf{z} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ minden 1-esét helyettesítsük 2-essel, írjunk elé "0."-t és tekintsük végtelen harmadostörtnek. Meggondolható, hogy csak 0-ásokat és 2-eseket tartalmazó harmadostört alakja egy valós számnak legfeljebb 1 lehet (azaz a véges harmadostörtek két alakja közül legaláb az egyik tartalmaz 1-est). Tehát $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leqslant |[0,1)|$.

# Szavakkal kapcsolatos halmazok számossága

**7. Példa:** $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1)|$.

**Bizonyítás** (vázlat):

Minden $x \in [0,1)$-hez rendeljük hozzá $x$ kettedestört alakjának "0." utáni részét. Ez nem feltétlen egyértelmű, hiszen a véges kettedestörteknek két végtelen kettedestört alakja is van. (Például 0,01=0,0100...=0,0011...)

Válasszuk ilyenkor a $\infty$ 0-ra végződő alakot. Ez a leképezés így nem bijekció, de injektív, azaz $|[0,1)| \leqslant |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Fordítva, $\mathbf{z} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ minden 1-esét helyettesítsük 2-essel, írjunk elé "0."-t és tekintsük végtelen harmadostörtnek. Meggondolható, hogy csak 0-ásokat és 2-eseket tartalmazó harmadostört alakja egy valós számnak legfeljebb 1 lehet (azaz a véges harmadostörtek két alakja közül legalább az egyik tartalmaz 1-est). Tehát $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leqslant |[0,1)|$.

A Cantor-Bernstein-Schröder tétel alapján $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[0,1)|$.

# Megszámlálhatóan végtelen vs continuum számosság

**Tétel**

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

# Megszámlálhatóan végtelen vs continuum számosság

**Tétel**

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

**Bizonyítás:**

Mivel $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, ezért elég belátni, hogy $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$.

$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \geqslant |\mathbb{N}|$:

$H_0 := \{(1,0,0,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),\ldots\}$

$H_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, és $|H_0| = |\mathbb{N}|$.

# Megszámlálhatóan végtelen vs continuum számosság

**Tétel**

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

**Bizonyítás:**
Mivel $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, ezért elég belátni, hogy $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$.

$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \geqslant |\mathbb{N}|$:

$H_0 := \{(1,0,0,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),\ldots\}$

$H_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, és $|H_0| = |\mathbb{N}|$.

$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \neq |\mathbb{N}|$:

# Megszámlálhatóan végtelen vs continuum számosság

**Tétel**

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

**Bizonyítás:**
Mivel $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$, ezért elég belátni, hogy $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$.

$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \geqslant |\mathbb{N}|$:

$H_0 := \{(1,0,0,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),\ldots\}$

$H_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, és $|H_0| = |\mathbb{N}|$.

$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \neq |\mathbb{N}|$:

Indirekt tegyük fel, hogy bijekcióba lehet állítani $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ elemeit $\mathbb{N}$ elemeivel, azaz $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{u_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ elemeinek egy felsorolása (a természetes számokkal való megindexelése).

# A Cantor-féle átlós módszer

Jelölje $u_{i,j}$ $u_i$ $j$. bitjét ($i, j \in \mathbb{N}, u_{i,j} \in \{0, 1\}$), azaz

$$u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,j}, \ldots).$$

# A Cantor-féle átlós módszer

Jelölje $u_{i,j}$ $u_i$ $j$. bitjét ($i, j \in \mathbb{N}, u_{i,j} \in \{0,1\}$), azaz

$$u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,j}, \ldots).$$

Tekintsük az $u = \{\overline{u_{1,1}}, \overline{u_{2,2}}, \ldots, \overline{u_{i,i}}, \ldots)$ megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris (azaz $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-beli) szót, ahol $\overline{b} = 0$, ha $b = 1$ és $\overline{b} = 1$, ha $b = 0$.

# A Cantor-féle átlós módszer

Jelölje $u_{i,j}$ $u_i$ $j$. bitjét ($i, j \in \mathbb{N}, u_{i,j} \in \{0, 1\}$), azaz

$$u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,j}, \ldots).$$

Tekintsük az $u = \{\overline{u_{1,1}}, \overline{u_{2,2}}, \ldots, \overline{u_{i,i}}, \ldots)$ megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris (azaz $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$-beli) szót, ahol $\overline{b} = 0$, ha $b = 1$ és $\overline{b} = 1$, ha $b = 0$.

Mivel, minden megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris szó fel van sorolva, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $u = u_k$.

# A Cantor-féle átlós módszer

Jelölje $u_{i,j}$ $u_i$ $j$. bitjét ($i, j \in \mathbb{N}, u_{i,j} \in \{0, 1\}$), azaz

$$u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,j}, \dots).$$

Tekintsük az $u = \{\overline{u_{1,1}}, \overline{u_{2,2}}, \dots, \overline{u_{i,i}}, \dots)$ megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris (azaz $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$-beli) szót, ahol $\overline{b} = 0$, ha $b = 1$ és $\overline{b} = 1$, ha $b = 0$.

Mivel, minden megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris szó fel van sorolva, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $u = u_k$.

Ekkor $u$ $k$.bitje $u_{k,k}$ (így jelöltük $u_k$ $k$. bitjét), másrészt $\overline{u_{k,k}}$ (így definiáltuk $u$-t).

# A Cantor-féle átlós módszer

Jelölje $u_{i,j}$ $u_i$ $j$. bitjét ($i, j \in \mathbb{N}, u_{i,j} \in \{0, 1\}$), azaz

$$u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,j}, \ldots).$$

Tekintsük az $u = \{\overline{u_{1,1}}, \overline{u_{2,2}}, \ldots, \overline{u_{i,i}}, \ldots)$ megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris (azaz $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$-beli) szót, ahol $\overline{b} = 0$, ha $b = 1$ és $\overline{b} = 1$, ha $b = 0$.

Mivel, minden megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris szó fel van sorolva, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $u = u_k$.

Ekkor $u$ $k$.bitje $u_{k,k}$ (így jelöltük $u_k$ $k$. bitjét), másrészt $\overline{u_{k,k}}$ (így definiáltuk $u$-t).

De egy bit nem lehet 0 és 1 is egyszerre, tehát az indirekt feltevésünk, azaz hogy $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ és $\mathbb{N}$ között $\exists$ bijekció helytelen volt.

# A Cantor-féle átlós módszer

Jelölje $u_{i,j}$ $u_i$ $j$. bitjét ($i, j \in \mathbb{N}, u_{i,j} \in \{0, 1\}$), azaz

$$u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,j}, \ldots).$$

Tekintsük az $u = \{\overline{u_{1,1}}, \overline{u_{2,2}}, \ldots, \overline{u_{i,i}}, \ldots)$ megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris (azaz $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$-beli) szót, ahol $\overline{b} = 0$, ha $b = 1$ és $\overline{b} = 1$, ha $b = 0$.

Mivel, minden megszámlálhatóan végtelen hosszúságú bináris szó fel van sorolva, ezért létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre $u = u_k$.

Ekkor $u$ $k$.bitje $u_{k,k}$ (így jelöltük $u_k$ $k$. bitjét), másrészt $\overline{u_{k,k}}$ (így definiáltuk $u$-t).

De egy bit nem lehet 0 és 1 is egyszerre, tehát az indirekt feltevésünk, azaz hogy $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ és $\mathbb{N}$ között $\exists$ bijekció helytelen volt.

*Megjegyzés:* A bizonyítás módszerét **Cantor-féle átlós módszernek** nevezik.

# Túl sok a nyelv

## Következmény

A $\{0, 1\}$ feletti nyelvek halmazának számossága nagyobb, mint a $\{0, 1\}$ feletti szavak számossága.

# Túl sok a nyelv

**Következmény**

A $\{0,1\}$ feletti nyelvek halmazának számossága nagyobb, mint a $\{0,1\}$ feletti szavak számossága.

Ezekhez csak foglaljuk össze amit tudunk:

# Túl sok a nyelv

**Következmény**

A $\{0,1\}$ feletti nyelvek halmazának számossága nagyobb, mint a $\{0,1\}$ feletti szavak számossága.

Ezekhez csak foglaljuk össze amit tudunk:
$|\mathbb{R}| = |[0,1)| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \left|\left\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\right\}\right| > |\mathbb{N}| = |\{0,1\}^*|$.

# Túl sok a nyelv

**Következmény**

A $\{0,1\}$ feletti nyelvek halmazának számossága nagyobb, mint a $\{0,1\}$ feletti szavak számossága.

Ezekhez csak foglaljuk össze amit tudunk:
$|\mathbb{R}| = |[0,1)| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \left|\left\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\right\}\right| > |\mathbb{N}| = |\{0,1\}^*|$.

*Észrevétel:* $\left\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\right\} = \mathcal{P}(\{0,1\}^*)$.

# Túl sok a nyelv

## Következmény

A $\{0,1\}$ feletti nyelvek halmazának számossága nagyobb, mint a $\{0,1\}$ feletti szavak számossága.

Ezekhez csak foglaljuk össze amit tudunk:
$|\mathbb{R}| = |[0,1)| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \left|\left\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\right\}\right| > |\mathbb{N}| = |\{0,1\}^*|$.

*Észrevétel:* $\left\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\right\} = \mathcal{P}(\{0,1\}^*)$.

Igaz-e általában, hogy $|\mathcal{P}(H)| > |H|$?

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

$|\mathcal{P}(H)| \geqslant |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

$|\mathcal{P}(H)| \geqslant |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

$|\mathcal{P}(H)| \neq |H|$:

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

$|\mathcal{P}(H)| \geqslant |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

$|\mathcal{P}(H)| \neq |H|$: Indirekt $\exists\, f : \mathcal{P}(H) \leftrightarrow H$ bijekció. Definiálunk egy $A \subseteq H$ halmazt:

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

$|\mathcal{P}(H)| \geqslant |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

$|\mathcal{P}(H)| \neq |H|$: Indirekt $\exists\, f : \mathcal{P}(H) \leftrightarrow H$ bijekció. Definiálunk egy $A \subseteq H$ halmazt: $\quad \forall x \in H : \quad x :\in A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(x)$

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

$|\mathcal{P}(H)| \geqslant |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

$|\mathcal{P}(H)| \neq |H|$: Indirekt $\exists\, f : \mathcal{P}(H) \leftrightarrow H$ bijekció. Definiálunk egy $A \subseteq H$ halmazt: $\quad \forall x \in H : \quad x :\in A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(x)$

$f(A) \in A$ igaz-e? Ha igaz, $f(A) \notin A$, ha nem igaz $f(A) \in A$ következik $A$ definíciójából. Tehát $f(A) \in A$ se igaz, se hamis nem lehet, ellentmondás.

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

$|\mathcal{P}(H)| \geqslant |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

$|\mathcal{P}(H)| \neq |H|$: Indirekt $\exists\, f : \mathcal{P}(H) \leftrightarrow H$ bijekció. Definiálunk egy $A \subseteq H$ halmazt: $\quad \forall x \in H : \quad x :\in A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(x)$

$f(A) \in A$ igaz-e? Ha igaz, $f(A) \notin A$, ha nem igaz $f(A) \in A$ következik $A$ definíciójából. Tehát $f(A) \in A$ se igaz, se hamis nem lehet, ellentmondás.

**Következmény**

Minden számosságnál van nagyobb számosság, tehát végtelen sok számosság van.

# Hatványhalmaz számossága

**Tétel**

Minden $H$ halmazra $|\mathcal{P}(H)| > |H|$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

$|\mathcal{P}(H)| \geqslant |H|$, hiszen $\{\{h\} \mid h \in H\} \subseteq \mathcal{P}(H)$.

$|\mathcal{P}(H)| \neq |H|$: Indirekt $\exists\, f : \mathcal{P}(H) \leftrightarrow H$ bijekció. Definiálunk egy $A \subseteq H$ halmazt: $\quad \forall x \in H : \quad x :\in A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(x)$

$f(A) \in A$ igaz-e? Ha igaz, $f(A) \notin A$, ha nem igaz $f(A) \in A$ következik $A$ definíciójából. Tehát $f(A) \in A$ se igaz, se hamis nem lehet, ellentmondás.

**Következmény**

Minden számosságnál van nagyobb számosság, tehát végtelen sok számosság van.

$\aleph_0 := |\mathbb{N}|, \aleph_1 := |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Ha $|H| = \aleph_i$ akkor $\aleph_{i+1} := |\mathcal{P}(H)|$.

# A Turing gépek egy elkódolása

Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{0, 1\}$. Ez feltehető, mivel minden input hatékonyan kódolható $\Sigma$ felett.

# A Turing gépek egy elkódolása

Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{0, 1\}$. Ez feltehető, mivel minden input hatékonyan kódolható $\Sigma$ felett.

## Definíció

Egy $M$ Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M \rangle$) a következő:

# A Turing gépek egy elkódolása

Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{0, 1\}$. Ez feltehető, mivel minden input hatékonyan kódolható $\Sigma$ felett.

**Definíció**

Egy $M$ Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M \rangle$) a következő:
Legyen $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, ahol

# A Turing gépek egy elkódolása

Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{0, 1\}$. Ez feltehető, mivel minden input hatékonyan kódolható $\Sigma$ felett.

## Definíció

Egy $M$ Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M \rangle$) a következő:
Legyen $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, ahol

- $Q = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $\Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}$, $D_1 = R$, $D_2 = S$, $D_3 = L$
- $k \geqslant 3$, $p_1 = q_0$, $p_{k-1} = q_i$, $p_k = q_n$,
- $m \geqslant 3$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = \sqcup$.
- Egy $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmenet kódja $0^i 1 0^j 1 0^r 1 0^s 1 0^t$.
- $\langle M \rangle$ az átmenetek kódjainak felsorolása 11-el elválasztva.

# A Turing gépek egy elkódolása

Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{0, 1\}$. Ez feltehető, mivel minden input hatékonyan kódolható $\Sigma$ felett.

**Definíció**

Egy $M$ Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M \rangle$) a következő:
Legyen $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, ahol

- $Q = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $\Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}$, $D_1 = R$, $D_2 = S$, $D_3 = L$
- $k \geqslant 3$, $p_1 = q_0$, $p_{k-1} = q_i$, $p_k = q_n$,
- $m \geqslant 3$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = \sqcup$.
- Egy $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmenet kódja $0^i10^j10^r10^s10^t$.
- $\langle M \rangle$ az átmenetek kódjainak felsorolása 11-el elválasztva.

*Észrevétel:* $\langle M \rangle$ 0-val kezdődik és végződik, nem tartalmaz 3 darab 1-t egymás után.

# A Turing gépek egy elkódolása

Tegyük fel, hogy $\Sigma = \{0, 1\}$. Ez feltehető, mivel minden input hatékonyan kódolható $\Sigma$ felett.

## Definíció

Egy $M$ Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M\rangle$) a következő:
Legyen $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, ahol

- $Q = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $\Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}$, $D_1 = R$, $D_2 = S$, $D_3 = L$
- $k \geqslant 3$, $p_1 = q_0$, $p_{k-1} = q_i$, $p_k = q_n$,
- $m \geqslant 3$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = \sqcup$.
- Egy $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmenet kódja $0^i10^j10^r10^s10^t$.
- $\langle M\rangle$ az átmenetek kódjainak felsorolása 11-el elválasztva.

*Észrevétel:* $\langle M\rangle$ 0-val kezdődik és végződik, nem tartalmaz 3 darab 1-t egymás után.

**Jelölés:** $\langle M, w\rangle := \langle M\rangle 111w$

# Létezik nem Turing-felismerhető nyelv

**Tétel**

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

# Létezik nem Turing-felismerhető nyelv

**Tétel**

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

**Bizonyítás:** A TG-ek számossága megszámlálható (a fenti kódolás injekció $\{0,1\}^*$-ba, amiről tudjuk, hogy megszámlálható). Másrészt azt is tudjuk, hogy a $\{0,1\}$ feletti nyelvek számossága continuum. Tehát nem jut minden nyelvre őt felismerő TG (minden TG egyetlen nyelvet ismer fel).

# Létezik nem Turing-felismerhető nyelv

**Tétel**

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

**Bizonyítás:** A TG-ek számossága megszámlálható (a fenti kódolás injekció $\{0,1\}^*$-ba, amiről tudjuk, hogy megszámlálható). Másrészt azt is tudjuk, hogy a $\{0,1\}$ feletti nyelvek számossága continuum. Tehát nem jut minden nyelvre őt felismerő TG (minden TG egyetlen nyelvet ismer fel).

*Megjegyzés:* Tehát valójában a nyelvek „többsége” $\notin$ RE.
Tudnánk-e konkrét nyelvet mondani?

# Létezik nem Turing-felismerhető nyelv

**Tétel**

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

**Bizonyítás:** A TG-ek számossága megszámlálható (a fenti kódolás injekció $\{0,1\}^*$-ba, amiről tudjuk, hogy megszámlálható). Másrészt azt is tudjuk, hogy a $\{0,1\}$ feletti nyelvek számossága continuum. Tehát nem jut minden nyelvre őt felismerő TG (minden TG egyetlen nyelvet ismer fel).

*Megjegyzés:* Tehát valójában a nyelvek „többsége" $\notin$ RE. Tudnánk-e konkrét nyelvet mondani?

*Jelölés:* Minden $i \geqslant 1$-re,

# Létezik nem Turing-felismerhető nyelv

**Tétel**

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

**Bizonyítás:** A TG-ek számossága megszámlálható (a fenti kódolás injekció $\{0,1\}^*$-ba, amiről tudjuk, hogy megszámlálható). Másrészt azt is tudjuk, hogy a $\{0,1\}$ feletti nyelvek számossága continuum. Tehát nem jut minden nyelvre őt felismerő TG (minden TG egyetlen nyelvet ismer fel).

*Megjegyzés:* Tehát valójában a nyelvek „többsége” $\notin$ RE. Tudnánk-e konkrét nyelvet mondani?

*Jelölés:* Minden $i \geqslant 1$-re,

- jelölje $w_i$ a $\{0,1\}^*$ halmaz $i$-ik elemét a hossz-lexikografikus rendezés szerint.

# Létezik nem Turing-felismerhető nyelv

**Tétel**

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

**Bizonyítás:** A TG-ek számossága megszámlálható (a fenti kódolás injekció $\{0,1\}^*$-ba, amiről tudjuk, hogy megszámlálható). Másrészt azt is tudjuk, hogy a $\{0,1\}$ feletti nyelvek számossága continuum. Tehát nem jut minden nyelvre őt felismerő TG (minden TG egyetlen nyelvet ismer fel).

*Megjegyzés:* Tehát valójában a nyelvek „többsége” $\notin$ RE. Tudnánk-e konkrét nyelvet mondani?

*Jelölés:* Minden $i \geqslant 1$-re,

- jelölje $w_i$ a $\{0,1\}^*$ halmaz $i$-ik elemét a hossz-lexikografikus rendezés szerint.
- jelölje $M_i$ a $w_i$ által kódolt TG-t (ha $w_i$ nem kódol TG-t, akkor $M_i$ egy tetszőleges olyan TG, ami nem fogad el semmit)

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE.$

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE.$

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE.$

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen $T$ bittáblázatot, melyre $T(i,j) = 1 \iff w_j \in L(M_i)$ $(i,j \geqslant 1)$.

## $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen $T$ bittáblázatot, melyre $T(i,j) = 1 \Leftrightarrow w_j \in L(M_i)$ $(i,j \geqslant 1)$.

Legyen $\mathbf{z}= (T(1,1),\ldots,T(i,i),\ldots)$ a $T$ átlójában olvasható megszámlálhatóan végtelen hosszú bitsztring és $\bar{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{z}$ bitenkénti komplementere. Ekkor:

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen $T$ bittáblázatot, melyre $T(i,j) = 1 \Leftrightarrow w_j \in L(M_i)$ $(i,j \geqslant 1)$.

Legyen $\mathbf{z} = (T(1,1), \ldots, T(i,i), \ldots)$ a $T$ átlójában olvasható megszámlálhatóan végtelen hosszú bitsztring és $\bar{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{z}$ bitenkénti komplementere. Ekkor:

- minden $i \geqslant 1$-re, $T$ $i$-ik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus sorozata

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen $T$ bittáblázatot, melyre $T(i,j) = 1 \Leftrightarrow w_j \in L(M_i)$ $(i,j \geqslant 1)$.

Legyen $\mathbf{z}= (T(1,1), \ldots, T(i,i), \ldots)$ a $T$ átlójában olvasható megszámlálhatóan végtelen hosszú bitsztring és $\bar{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{z}$ bitenkénti komplementere. Ekkor:

- minden $i \geqslant 1$-re, $T$ $i$-ik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus sorozata
- $\bar{\mathbf{z}}$ az $L_{\text{átló}}$ karakterisztikus sorozata.

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE.$

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen $T$ bittáblázatot, melyre $T(i,j) = 1 \Leftrightarrow w_j \in L(M_i)$ $(i,j \geqslant 1)$.

Legyen $\mathbf{z} = (T(1,1), \ldots, T(i,i), \ldots)$ a $T$ átlójában olvasható megszámlálhatóan végtelen hosszú bitsztring és $\bar{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{z}$ bitenkénti komplementere. Ekkor:

- minden $i \geqslant 1$-re, $T$ $i$-ik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus sorozata
- $\bar{\mathbf{z}}$ az $L_{\text{átló}}$ karakterisztikus sorozata.
- Minden TG-pel felismerhető, azaz RE-beli nyelv karakterisztikus sorozata megegyezik $T$ valamelyik sorával.

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE.$

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen $T$ bittáblázatot, melyre $T(i,j) = 1 \Leftrightarrow w_j \in L(M_i)$ $(i,j \geqslant 1)$.

Legyen $\mathbf{z} = (T(1,1), \ldots, T(i,i), \ldots)$ a $T$ átlójában olvasható megszámlálhatóan végtelen hosszú bitsztring és $\bar{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{z}$ bitenkénti komplementere. Ekkor:

- minden $i \geqslant 1$-re, $T$ $i$-ik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus sorozata
- $\bar{\mathbf{z}}$ az $L_{\text{átló}}$ karakterisztikus sorozata.
- Minden TG-pel felismerhető, azaz RE-beli nyelv karakterisztikus sorozata megegyezik $T$ valamelyik sorával.
- $\bar{\mathbf{z}}$ különbözik $T$ minden sorától.

# $L_{\text{átló}}$ Turing-felismerhetetlen

**Tétel**

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE$.

**Bizonyítás:** [Cantor-féle átlós módszerrel]

Tekintsük azt a mindkét dimenziójában megszámlálhatóan végtelen $T$ bittáblázatot, melyre $T(i,j) = 1 \;\Leftrightarrow\; w_j \in L(M_i)$ $(i,j \geqslant 1)$.

Legyen $\mathbf{z} = (T(1,1), \ldots, T(i,i), \ldots)$ a $T$ átlójában olvasható megszámlálhatóan végtelen hosszú bitsztring és $\bar{\mathbf{z}}$ a $\mathbf{z}$ bitenkénti komplementere. Ekkor:

- minden $i \geqslant 1$-re, $T$ $i$-ik sora az $L(M_i)$ nyelv karakterisztikus sorozata
- $\bar{\mathbf{z}}$ az $L_{\text{átló}}$ karakterisztikus sorozata.
- Minden TG-pel felismerhető, azaz RE-beli nyelv karakterisztikus sorozata megegyezik $T$ valamelyik sorával.
- $\bar{\mathbf{z}}$ különbözik $T$ minden sorától.
- Tehát $L_{\text{átló}}$ különbözik az összes RE-beli nyelvtől.