7. gyakorlat

Differenciálszámítás 2.

1. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy a $\partial_{12}f(0,0)$ és a $\partial_{21}f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_{12}f(0,0) \neq \partial_{21}f(0,0).$$

Mutassa meg azt is, hogy f nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban.

Megoldás. Először az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket határozzuk meg.

A $(0,0)$ pontban az x változó szerinti parciális derivált a definíció alapján:

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_x f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

az y változó szerinti parciális derivált pedig

$$\partial_2 f(0,0) = \partial_y f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (vagyis $x^2+y^2 \neq 0$), akkor

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) = \partial_x f(x,y) &= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{2x\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = \\ &= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^4} \quad \text{és} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x,y) = \partial_y f(x,y) &= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \\ &= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^4}. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltakat az origóban a parciális derivált definíciója alapján számítjuk ki:

$$\begin{aligned} \partial_{12} f(0,0) &= \partial_2\big(\partial_1 f\big)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t)-\partial_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t} = -1, \\ \partial_{21} f(0,0) &= \partial_1\big(\partial_2 f\big)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0)-\partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = 1. \end{aligned}$$

A $\partial_{12}f(0,0) = \partial_{21}f(0,0)$ egyenlőség tehát valóban nem teljesül. (A parciális deriváltak sorrendjének a képzése nem cserélhető fel.)

Az f függvény nem deriválható kétszer az origóban. Valóban, ha ez igaz lenne, akkor Young tétele szerint a különböző sorrendben vett másodrendű deriváltak megegyeznének, és ez a fentiek alapján *nem igaz.* ■

- **Érintősík**

2. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\big).$$

(a) *Számítsa ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait.*

(b) *Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.*

Megoldás.

(a) Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ és $x^2 > 2y^2$, akkor a parciális deriváltak léteznek, és

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2y^2}},$$
$$\partial_2 f(x,y) = -2\frac{y}{\sqrt{x^2 - 2y^2}}.$$

(b) Legyen $(x_0, y_0) = (3,2)$. Az f függvény parciális deriváltjai léteznek az (x_0, y_0) pont egy környezetében és folytonosak az (x_0, y_0) pontban, ezért f totálisan deriválható az (x_0, y_0) pontban. A felület

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

pontjához tehát érintősík húzható. Ennek egyenlete a

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(x_0, y_0)(y - y_0)$$

képlettel adható meg.

Mivel

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 - 2y_0^2} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2} = 1,$$
$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = 3,$$
$$\partial_2 f(x_0, y_0) = -2\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = -2\frac{2}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = -4,$$

ezért az érintősík egyenlete:

$$z - 1 = 3(x - 3) - 4(y - 2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x - 4y - z = 0,$$

egy normálvektora:

$$\mathbf{n} = \big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big) = (3, -4, -1). \quad ■$$

• **Iránymenti deriváltak**

3. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$a = (a_1, a_2) = (1,1)$ *és* e *az* x*-tengely pozitív ágával* α *szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.*

(a) *Határozza meg a definíció alapján a* $\partial_e f(a)$ *iránymenti deriváltat.*

(b) *Ellenőrizze a kapott eredményt a tanult tétellel.*

(c) *Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb?*

Megoldás. **(a)** A $\mathbf{0} = (0,0)$ origóból kiinduló irányokat az

$$e := \big(\cos\alpha, \sin\alpha\big) \quad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big)$$

vektorokkal adjuk meg. Ezek egységvektorok, mert

$$\|e\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1 \quad \big(\alpha \in [0,2\pi)\big).$$

Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméterrel megadott e vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$\begin{aligned} F(t) :&= f(a + te) = f(a_1 + te_1, a_2 + te_2) = f(1 + t\cos\alpha, 1 + t\sin\alpha) = \\ &= (1 + t\cos\alpha)^2 - (1 + t\cos\alpha)(1 + t\sin\alpha) + (1 + t\sin\alpha)^2 = \\ &= \big(1 - (\sin\alpha)(\cos\alpha)\big) \cdot t^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot t + 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

valós-valós függvény deriválható a $t = 0$ pontban.

Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0) = \sin\alpha + \cos\alpha$. Ezért az f függvénynek létezik az e irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így minden rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\partial_e f(1,1) = \sin\alpha + \cos\alpha.}$$

(b) Először az iránymenti derivált kiszámolására vonatkozó állítás feltételeit ellenőrizzük. Az f függvény parciális deriváltfüggvényei léteznek:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x - y, \quad \partial_2 f(x,y) = -x + 2y \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

és folytonosak minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. A szóban forgó tétel szerint a kérdezett iránymenti derivált létezik, és minden $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméter esetén

$$\partial_e f(1,1) = \left\langle \begin{bmatrix} \partial_1 f(1,1) \\ \partial_2 f(1,1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\rangle = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Ez megegyezik a definíció alapján kapott eredménnyel.

(c) A $g : [0, 2\pi) \ni \alpha \mapsto \sin\alpha + \cos\alpha$ függvény abszolút maximumát keressük. Mivel

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \tfrac{\pi}{4}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

ezért g-nek van abszolút maximuma, ezt az $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, vagyis az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ pontban veszi fel. Az iránymenti derivált tehát az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ irányszögű egységvektor esetén lesz a legnagyobb. ∎

4. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x,y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ *pontban a* $v = (1,2)$ *vektor által meghatározott irány mentén.*

Megoldás. Az iránymenti derivált kiszámítására vonatkozó tételt alkalmazzuk.

Mindkét változó szerinti elsőrendű parciális deriváltak léteznek $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$\partial_x f(x,y) = -2\frac{y^3}{e^{2x+1}}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{3y^2}{e^{2x+1}}.$$

Ezek a függvények minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban folytonosak, ezért az f függvény mindenütt totálisan deriválható és

$$f'(x,y) = \left(\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)\right) \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

A megemlített tétel szerint tehát az f függvénynek a P pontban minden irányban létezik az iránymenti deriváltja és

$$\partial_e f(P) = \langle f'(P), e\rangle,$$

ahol

$$f'(P) = f'\left(-\tfrac{1}{2}, 1\right) = \left(\partial_x f\left(-\tfrac{1}{2}, 1\right), \partial_y f\left(-\tfrac{1}{2}, 1\right)\right) = (-2, 3)$$

és e a v irányú euklideszi normában vett egységvektor, azaz

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Így

$$\underline{\partial_e f\left(-\tfrac{1}{2}, 1\right)} = \left\langle (-2,3), \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{4}{\sqrt{5}}}. \ \blacksquare$$

5. feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban

(a) *folytonos,*

(b) *minden irány mentén deriválható,*

(c) *totálisan nem deriválható.*

Megoldás.

(a) $\underline{f \in C\{(0,0)\}}$

A pontbeli folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(*)\qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \text{ esetén} \\ \qquad\qquad |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon, \end{cases}$$

ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren, azaz

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, akkor az

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x|\cdot y^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\cdot(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$
$$= |x| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon$$

becslések alapján a (*) egyenlőtlenség tetszőleges $\delta \in (0,\varepsilon)$ számmal fennáll, ezért az f függvény folytonos az origóban, azaz $f \in C\{(0,0)\}$.

(b) Iránymenti deriváltak.

A $\mathbf{0} = (0,0)$ origóból kiinduló irányokat az

$$e := (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad (\alpha \in [0,2\pi))$$

vektorokkal adjuk meg. Ezek egységvektorok, mert

$$\|e\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1 \quad (\alpha \in [0,2\pi)).$$

Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0,2\pi)$ paraméterrel megadott e vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$F(t) := f(\mathbf{0} + te) = f(te) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) =$$
$$= \frac{t\cos\alpha\cdot(t\sin\alpha)^2}{(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2} = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2\cdot t \quad (t \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvény deriválható a $t = 0$ pontban.

Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$. Ezért az f függvénynek létezik az e irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így

$$\partial_e f(0,0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2.$$

(c) $\underline{f \notin D\{(0,0)\}}$

Az állítással ellentétben tegyük fel azt, hogy $f \in D\{(0,0)\}$. Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) = \big(\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0)\big).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az origóban az f függvénynek mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és

$$\partial_1 f(0,0) = 0, \qquad \partial_2 f(0,0) = 0.$$

Az $f \in D\{(0,0)\}$ indirekt feltételből az következik, hogy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(h_1,h_2) - f(0,0) - \begin{bmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} = 0.$$

Könnyű észrevenni, hogy ez az állítás nem igaz, mert például az $y = x$ egyenletű egyenes pontjaiban a tört értéke $\frac{1}{2^{3/2}}$, tehát a $(0,0)$ pont minden környezetében van olyan pont, amelyben a tört $\frac{1}{2^{3/2}}$-őt vesz fel. Beláttuk tehát azt, hogy *az f nem differenciálható $(0,0)$-ban.* ■

• Láncszabály

6. feladat. *Fogalmazza meg az összetett függvények deriválására vonatkozó állítást (röviden a láncszabályt) az $n, m \in \mathbb{N}$ és $s = 1$ esetben.*

Megoldás. Ha $g = (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ típusú függvények, akkor az $f \circ g$ összetett függvény képezhető, ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$. Ebben az esetben $F := f \circ g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, azaz F egy n-változós valós értékű függvény:

$$F(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)\big) \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Az összetett függvények deriválására vonatkozó tételünk (ezt röviden láncszabálynak neveztük) azt állítja, hogy ha a fenti feltételek mellett $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$ is teljesül, akkor a $F := f \circ g$ függvény is deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban, és

$$(*) \qquad \big(F'(a) =\big)\ \big(f \circ g\big)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Az esetünkben most $g'(a)$ a következő $(m \times n)$-es Jacobi-mátrix:

$$g'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \cdots & \partial_n g_1(a) \\ \partial_1 g_2(a) & \partial_2 g_2(a) & \cdots & \partial_n g_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 g_m(a) & \partial_2 g_m(a) & \cdots & \partial_n g_m(a) \end{bmatrix}$$

és $f'\big(g(a)\big)$ pedig az alábbi sorvektor:

$$f'\big(g(a)\big) = \big[\, \partial_1 f\big(g(a)\big) \quad \partial_2 f\big(g(a)\big) \quad \cdots \quad \partial_m f\big(g(a)\big) \,\big] .$$

A $(*)$ egyenlőség jobb oldalán egy m-dimenziós sorvektornak és egy $(m \times n)$-es mátrixnak a szorzata, tehát egy n-dimenziós sorvektor áll.

Az $F'(a)$ sorvektor koordinátái a parciális deriváltak:

$$F'(a) = \big[\, \partial_1 F(a) \quad \partial_2 F(a) \quad \cdots \quad \partial_n F(a) \,\big] .$$

Mivel a $(*)$ egyenlőség jobb oldalán álló sorvektor j-edik koordinátája

$$\sum_{k=1}^{m} \partial_k f\big(g(a)\big) \cdot \partial_j g_k(a),$$

ezért

$$(**) \qquad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\partial_j F(a) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k f\big(g(a)\big) \cdot \partial_j g_k(a)}$$

minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén. ■

Megjegyzés. A $(**)$ összefüggés könnyebben megjegyezhető a következő alakban. Jelöljük f, illetve g változóit $y_1, \ldots, y_m$-mel, illetve $x_1, \ldots, x_n$-nel. Ekkor azt kapjuk, hogy ha $j = 1, 2, \ldots, n$, akkor

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j}.$$

7. feladat. *Mutassa meg, hogy ha* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G \in D$ *és*

$$f(x, y) := y \cdot G(x^2 - y^2) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor

$$y^2 \cdot \partial_x f(x, y) + xy \cdot \partial_y f(x, y) = x \cdot f(x, y) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Megoldás. Először a $G(x^2 - y^2)$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$ összetett függvény parciális deriváltjait számoljuk ki. Mindegyik változó szerinti parciális derivált létezik minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$\partial_x G\big(x^2 - y^2\big) = 2x \cdot G'\big(x^2 - y^2\big), \quad \partial_y G\big(x^2 - y^2\big) = -2y \cdot G'\big(x^2 - y^2\big).$$

Az f függvénynek is létezik mindegyik változó szerinti parciális deriváltja minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \partial_x \big(y \cdot G\big(x^2 - y^2\big)\big) = y \cdot \partial_x G\big(x^2 - y^2\big) = 2xy \cdot G'\big(x^2 - y^2\big) \\ \partial_y f(x, y) &= \partial_y \big(y \cdot G\big(x^2 - y^2\big)\big) = 1 \cdot G\big(x^2 - y^2\big) + y \cdot \partial_y G\big(x^2 - y^2\big) = \\ &= G\big(x^2 - y^2\big) - 2y^2 \cdot G'\big(x^2 - y^2\big). \end{aligned}$$

Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, akkor

$$\begin{aligned} y^2\cdot\partial_x f(x,y) &= 2xy^3\cdot G'\big(x^2-y^2\big),\\ xy\cdot\partial_y f(x,y) &= xy\cdot\Big(G\big(x^2-y^2\big)-2y^2\cdot G'\big(x^2-y^2\big)\Big)=\\ &= xy\cdot G\big(x^2-y^2\big)-2xy^3\cdot G'\big(x^2-y^2\big), \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{gathered} y^2\cdot\partial_x f(x,y)+xy\cdot\partial_y f(x,y)=2xy^3\cdot G'\big(x^2-y^2\big)+\\ +\Big(xy\cdot G\big(x^2-y^2\big)-2xy^3\cdot G'\big(x^2-y^2\big)\Big)=\\ =xy\cdot G\big(x^2-y^2\big)=x\cdot f(x,y). \end{gathered}$$

A feladat állítását tehát bebizonyítottuk. ■

8. feladat. *Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ egy differenciálható függvény és*

$$g:=\big(g_1,g_2,g_3\big):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \textit{ahol}$$

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z)&:=x^2+y^2+z^2,\\ g_2(x,y,z)&:=xyz, &\qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big).\\ g_3(x,y,z)&:=x, \end{aligned}$$

Határozza meg a $F:=f\circ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjait.

Megoldás. Tetszőleges $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ esetén

$$F(x,y,z)=f\big(g_1(x,y,z),g_2(x,y,z),g_3(x,y,z)\big).$$

Vegyünk egy tetszőleges $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_g=\mathbb{R}^3$ pontot. A láncszabály feltételei teljesülnek, ezért a F függvény deriválható az a pontban és a parciális deriváltjai:

$$\partial_j F(a)=\partial_1 f\big(g(a)\big)\cdot\partial_j g_1(a)+\partial_2 f\big(g(a)\big)\cdot\partial_j g_2(a)+\partial_3 f\big(g(a)\big)\cdot\partial_j g_3(a),$$

ahol $j=1,2,3$.

Így

$$\begin{aligned} \partial_1 F(a)&=\partial_1 f\big(g(a)\big)\cdot 2x+\partial_2 f\big(g(a)\big)\cdot yz+\partial_3 f\big(g(a)\big)\cdot 1,\\ \partial_2 F(a)&=\partial_1 f\big(g(a)\big)\cdot 2y+\partial_2 f\big(g(a)\big)\cdot xz+\partial_3 f\big(g(a)\big)\cdot 0,\\ \partial_3 F(a)&=\partial_1 f\big(g(a)\big)\cdot 2z+\partial_2 f\big(g(a)\big)\cdot xy+\partial_3 f\big(g(a)\big)\cdot 0. \end{aligned}$$ ■