# Numerikus Módszerek

1. Zh megoldása

2019. november 5.

1. (a) Először váltsuk át a $0,12$ és $0,48$ számokat kettes számrendszerbe.

| | 12 |
|---|---|
| 0 | 24 |
| 0 | 48 |
| 0 | 96 |
| 1 | 92 |
| 1 | 84 |
| 1 | 68 |
| 1 | 36 |
| 0 | 72 |
| 1 | 44 |
| 0 | 88 |

A mantissza hosszának megfelelően az első 6 hasznos jegyet kell megtartanunk, ez az 111101. Mivel az ez után következő 7. jegy nulla, ezért ezen az értéken nem változtatunk. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért ellenőriznünk kell, hogy a kapott számhoz vagy a felső szomszédjához van-e közelebb a $0,12$.

$$[111101|-3] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^{-3} = \frac{32+16+8+4+1}{512} = \frac{61}{512}$$

$$[111110|-3] = \frac{62}{512}$$

Mivel

$$0,119140625 \approx \frac{61}{512} - 0,12 \quad < \quad 0,12 - \frac{62}{256} \approx 0,12109375,$$

ezért $fl(0,12) = [111101|-3] = \frac{61}{512}$ a megfeleltetett gépi szám.

Mivel $0,48 = 4\cdot 0,12$, ezért az $0,48$ gépi megfelelője megegyezik az $0,12$-höz tartozó gépi számmal, azzal a különbséggel, hogy most a karakterisztika kettővel nagyobb lesz (az első két nulla törlődik a kettedestörtté alakításkor), vagyis

$$[111101|-1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^{-1} = \frac{32+16+8+4+1}{128} = \frac{61}{128},$$

ezért $fl(0,48) = [111101|-1] = \frac{61}{128}$ a megfeleltetett gépi szám. (6 pont)

(b) El kell végeznünk az $0,12+0,48$ gépi összeadást. Ehhez előbb közös karakterisztikára kell hoznunk a számokat. Mindig a kisebb karakterisztikájú számot igazítjuk a nagyobbhoz, így most az $fl(0,12)$-t kerekítjük. A lecsorduló nulla miatt lefelé kerekítünk, így

$$[111101|-3] \to [001111|-1]\,.$$

$$\begin{array}{r} [111101|-1] \\ +\,[001111|-1] \\ \hline [1001100|-1] \end{array}$$

Innen normalizálással kapjuk a végeredményt:

$$[100110|0] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^0 = \frac{19}{32} \approx 0,59375.$$

(3 pont)

(c) $fl(0,12) = [111101|-3]$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{fl(0,12)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}$$

$fl(0,48) = [111101|-1]$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{fl(0,48)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-1} = 2^{-8}$$

Az eredmény, $[100110|0] = \frac{19}{32}$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{\frac{19}{32}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{0} = 2^{-7}$$

(3 pont)

2. Végezzük el az elimináció első két lépését, hogy megsejtsük a megoldást.
**1. lépés:**
A 2. sorból vonjuk ki az 1. sort.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

**2. lépés:**
A 3. sorból vonjuk ki a 2. sort.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

**Sejtés:** a mátrix általános alakja az elimináció után egy $n \times n$-es felsőháromszögmátrix lesz.
A diagonálisban 1-esek és a fölötte lévő átlóban $-1$-esek. (1 pont)

Feltesszük tehát, hogy a sejtés a mátrix egy $k \times k$-s részmátrixára igaz.
Be kell látnunk, hogy ez az elimináció $k$. lépése után is igaz marad.
A $k$. lépés előtti állapot:

$$
\begin{array}{r}
1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n.
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \boxed{1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix} \rightarrow
$$

A $k$. lépésben a $k+1$. sorból kivonjuk a $k$. sort.
$k$. sor:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}
$$

$k+1$. sor:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}
$$

$k+1$. sor $-$ $k$. sor:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}
$$

A $k+1$. sor eliminálása után, a mátrix bal felső, $(k+1) \times (k+1)$-s részmátrixa megegyezik a sejtésben megfogalmazottal.

$$
\begin{array}{r}
1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n.
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \boxed{0} & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

Ezzel beláttuk, hogy $n-1$ Gauss-eliminációs lépés után a mátrix alakja megegyezik a sejtésben megfogalmazottal. A Gauss-elimináció során determináns tartó átalakításokat végeztünk, így a determináns értéke a felsőháromszög alakból a diagonálisban szereplő 1-esek szorzata:

$$
\det(A) = 1.
$$

(5 pont)

3. (a)

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ -4 & 5 & -13 & -1 \\ 12 & -13 & 38 & 8 \\ 4 & -1 & 8 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}
$$

Az együtthatókat a parkettázásnak megfelelő sorrendben számítjuk ki:

$$
\begin{array}{cc}
-4 = l_1 \cdot 4 \rightarrow l_1 = -1 & 5 = l_1 \cdot (-4) + u_1 = 4 + u_1 \rightarrow u_1 = 1 \\
12 = l_2 \cdot 4 \rightarrow l_2 = 3 & -13 = l_1 \cdot 12 + u_2 = -12 + u_2 \rightarrow u_2 = -1 \\
4 = l_4 \cdot 4 \rightarrow l_4 = 1 & -1 = l_1 \cdot 4 + u_3 = -4 + u_3 \rightarrow u_3 = 3
\end{array}
$$

Ezt követően kiszámítjuk $L$ második oszlopát:

$$
\begin{gathered}
-13 = l_2 \cdot (-4) + l_3 \cdot u_1 = -12 + l_3 \rightarrow l_3 = -1 \\
-1 = l_4 \cdot (-4) + l_5 \cdot u_1 = -4 + l_5 \rightarrow l_5 = -1
\end{gathered}
$$

és $U$ harmadik sorát:

$$\begin{aligned} 38 &= l_2 \cdot 12 + l_3 \cdot u_2 + u_4 = 36 + 1 + u_4 \to u_4 = 1 \\ 8 &= l_2 \cdot 4 + l_3 \cdot u_3 + u_5 = 12 + 3 + u_5 \to u_5 = -1 \end{aligned}$$

Majd végül $l_6$-ot és $u_6$-ot:

$$\begin{aligned} 8 &= l_4 \cdot 12 + l_5 \cdot u_2 + l_6 = 12 - 3 + l_6 \cdot u_4 \to l_6 = -1 \\ 18 &= l_4 \cdot 4 + l_5 \cdot u_3 + l_6 \cdot u_5 + u_6 = 4 + 9 + 1 + u_6 \to u_6 = 4 \end{aligned}$$

Visszaírva a kapott értékeket a megfelelő mátrixokba:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(6 pont)

Innen a $\det(A) = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 16$. (1 pont)

Az LU-felbontást a „tárolós" módszerrel is elkészíthetjük.

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ -4 & 5 & -13 & -1 \\ 12 & -13 & 38 & 8 \\ 4 & -1 & 8 & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ \hline -1 & \multicolumn{1}{|c}{1} & -1 & 3 \\ 3 & \multicolumn{1}{|c}{-1} & 2 & -4 \\ 1 & \multicolumn{1}{|c}{3} & -4 & 14 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ \hline -1 & \multicolumn{1}{|c}{1} & -1 & 3 \\ \cline{2-4} 3 & \multicolumn{1}{|c}{-1} & \multicolumn{1}{|c}{1} & -1 \\ 1 & \multicolumn{1}{|c}{3} & \multicolumn{1}{|c}{-1} & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 & 4 \\ \hline -1 & \multicolumn{1}{|c}{1} & -1 & 3 \\ \cline{2-4} 3 & \multicolumn{1}{|c}{-1} & \multicolumn{1}{|c}{1} & -1 \\ \cline{3-4} 1 & \multicolumn{1}{|c}{3} & \multicolumn{1}{|c}{-1} & \multicolumn{1}{|c}{4} \end{bmatrix}$$

(b) Vegyük ki $U$ diagonálisát a $D$ diagonális mátrixba.
Ennek felhasználásával a Cholesky-felbontást a következőképpen kapjuk:

$$A = LU = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = \widetilde{L}\widetilde{L}^T.$$

$$\widetilde{L} = L \cdot \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(5 pont)

4. Számítsuk ki az $A$ mátrix $QR$-felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ \mathbf{q_1} &= \tfrac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \tfrac{1}{5}\mathbf{a_1} = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3 pont)

$$r_{12} = \langle \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{5} \cdot ((-2) \cdot 4 + 1 \cdot 3) = -\frac{5}{5} = -1$$

$$\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -10 + 4 \\ 5 + 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\|_2 = \left\| \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$$

$$\mathbf{q_2} = \frac{1}{r_{22}}(\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

Tehát a $Q$ és $R$ mátrixok a következők:

$$Q = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1 pont)

5. Első lépésben a mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A numerikusan stabil számolás érdekében jó előjelet választunk $k = \sigma$-nak.

$$\sigma = -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(4) \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = -5$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2 = \frac{\sqrt{10}}{3},$$
$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

A mátrix első oszlopára nem kell alkalmaznunk a transzformációt, mert a konstrukció garantálja az eredményt.
Alkalmazzuk a transzformációt a második oszlopra:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a_2} &= \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}\right) \cdot \mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-5) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3 pont)

Alkalmazzuk a transzformációt a jobb oldali vektorra:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} &= \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{b}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3 pont)

Egy Householder-transzformációs lépés után a lineáris egyenletrendszer felsőháromszög alakú.

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk a megoldást:

$$2x_2 = 4 \rightarrow x_2 = 2$$
$$-5x_1 + x_2 = -3 \rightarrow -5x_1 = -5 \rightarrow x_1 = 1$$

(1 pont)