

Logika

Elsőrendű logika, II.rész

Az elsőrendű logika szemantikája (ismétlés + példák)

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Elsőrendű logikai nyelv interpretációja

Egy elsőrendű logikai nyelv $\mathcal{L}[V_\nu]$ interpretációja egy, az \mathcal{L} nyelvvel azonos szignatúrájú $\langle U, R, M, K \rangle$ matematikai struktúra.

Másik megfogalmazás: egy, a szignatúrának megfelelő U halmaz megadása, ezen a Pr , Fn , $Cnst$ szimbólumhalmazok szignatúrájával megegyező R , M , K reláció-, művelet- és konstanshalmaz definiálása.

Az \mathcal{I} interpretáció működése: $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$
függvénynégyes, ahol:

- $\mathcal{I}_{Srt}: \pi \mapsto \mathcal{U}_\pi$, ahol ha Srt egyelemű, akkor az interpretáció U univerzuma egyfajtájú elemekből áll
- az $\mathcal{I}_{Pr}: P \mapsto P^{\mathcal{I}}$, ahol $P^{\mathcal{I}}$ a struktúra R halmazának egy eleme
- az $\mathcal{I}_{Fn}: f \mapsto f^{\mathcal{I}}$, ahol $f^{\mathcal{I}}$ a struktúra M halmazának egy eleme
- az $\mathcal{I}_{Cnst}: c \mapsto c^{\mathcal{I}}$, ahol $c^{\mathcal{I}}$ a struktúra K halmazának egy eleme

Változókiértékelés

Egy $\kappa: V \rightarrow U$ leképezés, ahol V a nyelv változóinak halmaza, U pedig az interpretáció univerzuma.

$|x|^{\mathcal{I}, \kappa}$ az U univerzumbeli $\kappa(x)$ elem.

Változókiértékelés variánsa

Legyen x egy változó. A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden x -től különböző y változó esetén.

Formula jelentése – informális definíció

Legyen egy formula valamely $\mathcal{L}(P_1, P_2, \dots, P_n; f_1, f_2, \dots, f_k)$ formalizált nyelven, ahol $(r_1, r_2, \dots, r_n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ az \mathcal{L} nyelv típusa/szignatúrája (ν_1, ν_2, ν_3) .

- 1.lépés Választunk egy $S = U(R_1, R_2, \dots, R_n; o_1, o_2, \dots, o_k)$ matematikai struktúrát, amelynek a típusa/szignatúrája $(r_1, r_2, \dots, r_n; s_1, s_2, \dots, s_k)/(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ megegyezik a nyelvével és a logikán kívüli szimbólumokat a megfelelő relációknak illetve műveleteknek feleltetjük meg: $P_i = P_i^{\mathcal{I}}$, $f_k = f_k^{\mathcal{I}}$ (ha az interpretáló struktúrának nincs leíró nyelve, vagy nem akarjuk azt használni. Ha felhasználjuk az interpretáló struktúra leíró nyelvét, akkor $P_i^{\mathcal{I}} = R_i$ neve és $f_k^{\mathcal{I}} = o_k$ neve. Ez a nyelv szimbólumainak interpretációja, ahol R_i és o_k jelentése egyértelmű).
- 2.lépés A nem kötött individuumváltozók kiértékelése $(|x|^{\mathcal{I}, \kappa})$ és a kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítása.

Formális definíció: termék szemantikája

Termék szemantikája

- 1 ha c konstansszimbólum, $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ az U -beli $c^{\mathcal{I}}$ elem
- 2 ha x individuumváltozó, $|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ a $\kappa(x) \in U$ elem
(ahol κ egy változókiértékelés)
- 3 $|f(t_1, t_2, \dots, t_n)|^{\mathcal{I},\kappa} = f^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \dots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa})$

Formális definíció: formulák szemantikája

Formulák szemantikája

- 1 $|P(t_1, t_2, \dots, t_n)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $(|t_1|^{\mathcal{I}, \kappa}, |t_2|^{\mathcal{I}, \kappa}, \dots, |t_n|^{\mathcal{I}, \kappa}) \in P^{\mathcal{I}}$, ahol a $P^{\mathcal{I}}$ jelöli a $P^{\mathcal{I}}$ reláció igazhalmazát.
- 2 $|\neg A|^{\mathcal{I}, \kappa} = \neg |A|^{\mathcal{I}, \kappa}$
 $|A \wedge B|^{\mathcal{I}, \kappa} = |A|^{\mathcal{I}, \kappa} \wedge |B|^{\mathcal{I}, \kappa}$
 $|A \vee B|^{\mathcal{I}, \kappa} = |A|^{\mathcal{I}, \kappa} \vee |B|^{\mathcal{I}, \kappa}$
 $|A \supset B|^{\mathcal{I}, \kappa} = |A|^{\mathcal{I}, \kappa} \supset |B|^{\mathcal{I}, \kappa}$
- 3 $|\forall x A|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $|A|^{\mathcal{I}, \kappa^*} = i$ κ minden κ^* x variánsára
 $|\exists x A|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $|A|^{\mathcal{I}, \kappa^*} = i$ κ legalább egy κ^* x variánsára

A továbbiakban egyfajtájú struktúrákkal és egyfajtájú \mathcal{L} nyelvvel (Srt egyelemű halmaz) foglalkozunk az elsőrendű logika tárgyalása során.

Formulakifejtés – példa

$U = \{a, b, c\}$, formulakifejtés $\kappa(y) = a, b, c$ -re:

- $\kappa(y) = a$
 $|\forall x P(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = |\forall x P(x, a)|^{\mathcal{I}} = P(a, a) \wedge P(b, a) \wedge P(c, a)$
- $\kappa(y) = b$
 $|\forall x P(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = |\forall x P(x, b)|^{\mathcal{I}} = P(a, b) \wedge P(b, b) \wedge P(c, b)$
- $\kappa(y) = c$
 $|\forall x P(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = |\forall x P(x, c)|^{\mathcal{I}} = P(a, c) \wedge P(b, c) \wedge P(c, c)$

Formulakifejtés – példa

$\forall x \exists y (P(x, y) \supset R(x, y))$ formula kifejtése

$$U = \{a, b, c\}$$

$$|\forall x \exists y (P(x, y) \supset R(x, y))|^{\mathcal{I}}$$

=

$$|\exists y (P(a, y) \supset R(a, y))|^{\mathcal{I}} \wedge$$

$$|\exists y (P(b, y) \supset R(b, y))|^{\mathcal{I}} \wedge$$

$$|\exists y (P(c, y) \supset R(c, y))|^{\mathcal{I}}$$

=

$$\begin{aligned} & ((P^{\mathcal{I}}(a, a) \supset R^{\mathcal{I}}(a, a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(a, b) \supset R^{\mathcal{I}}(a, b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(a, c) \supset R^{\mathcal{I}}(a, c))) \wedge \\ & ((P^{\mathcal{I}}(b, a) \supset R^{\mathcal{I}}(b, a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(b, b) \supset R^{\mathcal{I}}(b, b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(b, c) \supset R^{\mathcal{I}}(b, c))) \wedge \\ & ((P^{\mathcal{I}}(c, a) \supset R^{\mathcal{I}}(c, a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(c, b) \supset R^{\mathcal{I}}(c, b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(c, c) \supset R^{\mathcal{I}}(c, c))) \wedge \end{aligned}$$

Komplett példa I.

Az interpretáló struktúrának van leíró nyelve:

- \mathcal{L} nyelv:
 $\mathcal{L} = (=, P_1, P_2; a, b, f_1, f_2)$
szignatúra: $(2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)$
- a struktúra leíró nyelve:
 $S = \mathbb{N}(=, <, >; 0, 1, +, *)$
szignatúra: $(2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)$

$\mathcal{I}_{Pr} : P \rightarrow P^{\mathcal{I}}$	$=$	P_1	P_2
	$=$	$<$	$>$

$\mathcal{I}_{Fn} : f \rightarrow f^{\mathcal{I}}$	a	b	f_1	f_2
	0	1	$+$	$*$

\mathcal{I}_{Cnst} : nincs konstans, csak két db 0 változós függvény

Példa II.

Egy term interpretációja:

$$\begin{aligned} |t|^{\mathcal{I}, \kappa} &= |f_1(x, f_2(x, y))|^{\mathcal{I}, \kappa} = \\ &|f_1|^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I}, \kappa}, |f_2(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa}) = \\ &+(x, *(x, y)) = \\ &x + x * y \end{aligned}$$

	x	y	$x + x * y$
κ_1	1	1	2
κ_2	2	3	8
κ_3	0	4	0
...

Példa III.

Egy formula interpretációja:

$$\begin{aligned} &|P_1(t, f_1(y, f_2(x, y)))|^{\mathcal{I}, \kappa} = \\ &|P_1|^{\mathcal{I}}(|t|^{\mathcal{I}, \kappa}, |f_1|^{\mathcal{I}}(|y|^{\mathcal{I}, \kappa}, |f_2|^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I}, \kappa}, |y|^{\mathcal{I}, \kappa}))) = \\ &< (+ (x, *(x, y)), + (y, *(x, y))) = \\ &< (x + x * y, y + x * y) = \\ &(x + x * y) < (y + x * y) \end{aligned}$$

Egy kvantortmentes formula kiértékelése: a formula minden alap előfordulását generáljuk és így minden állítás előáll \mathcal{I} -ben.

\times	y	$(x + x * y) < (y + x * y)$
1	1	$(1 + 1 * 1) < (1 + 1 * 1) = h$
2	3	$(2 + 2 * 3) < (3 + 2 * 3) = i$
...

Példa IV.

Egzisztenciális formula interpretálása:

$|\exists x P_1(a, f_1(x, x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $|P_1(a, f_1(x, x))|^{\mathcal{I}, \kappa^*} = i$ κ legalább egy κ^* variánsára ebben az interpretációban, ha $0 < (x + x) = i$ legalább egy $u \in N$ esetén.

Nézzük meg az értéktábláját:

x	$0 < (x + x)$
0	h
1	i
...	...

Mivel az $x = 1$ -re a formula törzse i , ezért a $\exists x(0 < (x + x))$ formula is i .

Példa V.

Univerzális formula interpretálása:

$|\forall x P_1(a, f_1(b, x))|_{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $|P_1(a, f_1(b, x))|_{\mathcal{I}, \kappa^*} = i$ κ minden κ^* x variánsára.

Nézzük meg az értéktábláját:

x	$0 < (1 + x)$
0	i
1	i
\dots	\dots

Mivel minden egészre a formula törzse i , ezért a $\forall x(0 < (1 + x))$ formula értéke i .

A formula értéktáblája

Egy 1. rendű formula **prímformulái** az atomi formulák (ezek paraméteres állítások az interpretációkban) és a kvantált formulák (ezek állítások, ha zártak).

Egy 1. rendű formula **prímkomponensei** a formula azon **prímformulái**, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

Az **igazságtáblában** (ítéletlogika) az első sorba az állításváltozók (ezek a formula **prímkomponensei**) és a formula kerülnek. A változók alá igazságértékeiket (interpretáció) írjuk. A formula alatt a megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

Egy 1. rendű formula **értéktáblájában** az első sorba a formula szabad változói, a **prímkomponensek** és a formula kerülnek. (Mivel a **prímformulák** több esetben paraméteres állítások, ezért az interpretációban az **individuumváltozók** kiértékelése után válnak állításokká.) Az **individuumváltozók** alá a lehetséges változókiértékelések, a **prímformulák** alá a megfelelő helyettesítési értékek kerülnek. A formula alatt a formulának a **prímformulák** értékei alapján kiszámított helyettesítési értékei találhatók.

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x), \exists y Q(w, y), P(v), \forall z Q(w, z)$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$
- A szabad individuumváltozók: v, w

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$
- A szabad individuumváltozók: v, w
- Legyen az interpretáló struktúra:
 $U = \{1, 2, 3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1, 3\}$,
 $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$
- A szabad individuumváltozók: v, w
- Legyen az interpretáló struktúra:
 $U = \{1, 2, 3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1, 3\}$,
 $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
- Ekkor $|\exists x P(x)|^{\mathcal{I}} = i$, a többiek paraméteres állítások.

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists xP(x) \supset \exists yQ(w, y) \vee P(v) \supset \forall zQ(w, z)$

- A prímkomponensek: $\exists xP(x)$, $\exists yQ(w, y)$, $P(v)$, $\forall zQ(w, z)$
- A szabad individuumváltozók: v, w
- Legyen az interpretáló struktúra:
 $U = \{1, 2, 3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1, 3\}$,
 $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
- Ekkor $|\exists xP(x)|^{\mathcal{I}} = i$, a többiek paraméteres állítások.

Az értéktábla:

v	w	$ \exists xP(x) ^{\mathcal{I}}$	$ \exists yQ(w, y) ^{\mathcal{I}}$	$ P(v) ^{\mathcal{I}}$	$ \forall zQ(w, z) ^{\mathcal{I}}$	F
1	1	i	$ \exists yQ(1, y) ^{\mathcal{I}, \kappa} = i$	$ P(1) ^{\mathcal{I}} = i$	$ \forall zQ(1, z) ^{\mathcal{I}, \kappa} = h$	h
1	2	i	$ \exists yQ(2, y) ^{\mathcal{I}, \kappa} = i$	$ P(1) ^{\mathcal{I}} = i$	$ \forall zQ(2, z) ^{\mathcal{I}, \kappa} = i$	i
1	3	i	$ \exists yQ(3, y) ^{\mathcal{I}, \kappa} = h$	$ P(1) ^{\mathcal{I}} = i$	$ \forall zQ(3, z) ^{\mathcal{I}, \kappa} = h$	h
2	1	i
3	1	i
2	2	i
2	3	i
3	3	i
3	2	i

Az elsőrendű logika szemantikája (ismétlés + példák)

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

$$\mathcal{I}, \kappa \models A$$

Az \mathcal{L} egy \mathcal{I} interpretációja adott κ változókiértékelés mellett kielégít egy 1. rendű A formulát ($\mathcal{I}, \kappa \models A$), ha a formula $|A|^{\mathcal{I}, \kappa}$ értéke i . Ha az A formula mondat (zárt formula) és $\mathcal{I} \models A$, akkor azt mondjuk, hogy az \mathcal{I} által megadott S struktúra elégíti ki A -t, így $S \models A$. Más szóval S **modellje** A -nak.

$$\mathcal{I} \models \mathcal{F}$$

Ha \mathcal{L} egy \mathcal{I} interpretációjára az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ zárt formulahalmazban $|F_k|^{\mathcal{I}}$ értéke i , minden $1 \leq k \leq n$ értékre, akkor \mathcal{I} kielégíti \mathcal{F} -et. Jelölés: $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$.

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Kielégíthető formula

Azt mondjuk, hogy egy G **formula kielégíthető** ha \mathcal{L} -hez van legalább egy \mathcal{I} interpretáció és κ változókiértékelés, hogy $\mathcal{I}, \kappa \models G$.

Kielégíthető formulahalmaz

Azt mondjuk, hogy \mathcal{F} **zárt formulahalmaz kielégíthető** ha \mathcal{L} -nek legalább egy \mathcal{I} interpretációja kielégíti, azaz $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$.

Logikailag igaz és tautológia kérdése

Azt mondjuk, hogy egy G formula **logikailag igaz (logikai törvény)**, ha G igaz minden lehetséges \mathcal{I} interpretációra és minden κ változókiértékelésre. Ez azt jelenti, hogy G igaz minden lehetséges interpretáló struktúrában. Jelölés: $\models G$.

Azt mondjuk, hogy egy G formula **tautológia**, ha G értéktáblájában a prímkomponensekhez rendelhető összes lehetséges igazságérték hozzárendelés esetén a formula helyettesítési értéke i .

Példa

$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \forall x P(x)$ formula prímkomponens alakja
 $p \wedge q \supset p$. ami tautológia, de

$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall x P(x)$ prímkomponens alakja
 $r \supset p$ nem tautológia (viszont mindkettő logikailag igaz!)

Azt mondjuk, hogy G illetve \mathcal{F} **kielégíthetetlen** (nem kielégíthető), ha \mathcal{L} -hez nincs olyan \mathcal{I} interpretáció, hogy $\mathcal{I} \models G$ illetve, hogy $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$. Más szóval egy G formula kielégíthetetlen, ha minden interpretációban a G értéktáblájának minden sorában G helyettesítési értéke $h(\text{amis})$. Az \mathcal{F} formulahalmaz kielégíthetetlen, ha az \mathcal{F} közös értéktáblájában minden sorban van legalább egy eleme \mathcal{F} -nek, amelynek a helyettesítési értéke $h(\text{amis})$.

A két szemantikus tulajdonság fennállásának vizsgálatához az összes interpretáló struktúrára szükség van.

Lehetséges interpretáló struktúrák száma adott U és adott szignatúra mellett

Legyenek rendre az \mathcal{L} nyelv szignatúrája szerint

$(r_1, r_2, \dots, r_n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ a predikátumszimbólumok és függvényszimbólumok arításai. Legyen U az univerzum, ahol $|U| = M$.

Állapítsuk meg hány különböző $(r_1, r_2, \dots, r_n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ szignatúrájú struktúra létezik U felett?

Ezekkel az arításokkal relációkat $\prod_{j=1}^n 2^{M^{r_j}}$, míg műveleteket $\prod_{t=1}^k M^{M^{s_t}}$

féleképp lehet definiálni. Az összes definiálható struktúra száma a kettő

szorzata: $(\prod_{j=1}^n 2^{M^{r_j}}) * \prod_{t=1}^k M^{M^{s_t}}$.

Lehetséges interpretáló struktúrák száma

Alsó becslés esetén csak a lehetséges relációk számát állapítjuk meg. Egy n változós reláció esetén az értelmezési tartomány elemszáma $|U^n| = M^n$, a relációt megadhatjuk az U^n halmaz egy részhalmazának kijelölésével. A lehetséges n -változós relációk száma megegyezik az értelmezési tartomány hatványhalmaza (összes részhalmazai halmaza) számosságával $|\mathcal{P}(U^n)|$ -el, ez ha U megszámlálhatóan végtelen, akkor kontinuum számosságú (több mint megszámlálhatóan végtelen), ami algoritmikusan nem kezelhető.

Legyenek rendre az \mathcal{L} nyelv szignatúrája szerint (r_1, r_2, \dots, r_n) a predikátumszimbólumok arításai.

Előállítjuk minden $j = 1, \dots, n$ értékre az U^{r_j} értékeinek felhazsnálásával P_{r_j} összes alapatomját, tekintsük ezek egy rögzített sorrendjét (bázis), a szemantikus fa szintjeihez ebben a sorrendben rendeljük hozzá az alapatomokat. Egy-egy szint minden csúcsából pontosan két él indul ki, az egyik a szinthez rendelt alapatommal (ez jelenti, hogy az alapatom igaz az élhez tartozó interpretációkban), a másik ennek negáltjával van címkézve (ez jelenti, hogy az alapatom hamis az élhez tartozó interpretációkban). A bináris fa ágai adják meg a lehetséges interpretációkat.

Adott nyelv esetén a predikátumszimbólumokra az összes interpretáció megadása szemantikus fával.

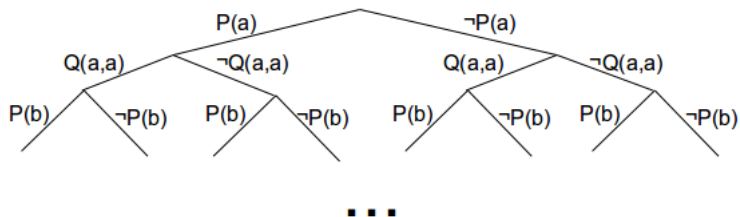
Legyen

- a formulahalmaz:

$$K = \{\forall x P(x), \forall y \forall z (\neg Q(y, z) \vee \neg P(z)), \forall u \forall v Q(u, v)\}$$

- $U = \{a, b, c\}$
- a B bázis: $P(a), Q(a, a), P(b), Q(a, b), \dots, Q(c, c)$ alapatom sorozat

A szemantikus fa a B bázis alapján:



Az elsőrendű logika szemantikája (ismétlés + példák)

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Következményszemantika az elsőrendű logikában

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Logikai vagy szemantikus következmény

Azt mondjuk, hogy a G formula logikai (szemantikus) következménye az \mathcal{F} formulahalmaznak, ha minden olyan \mathcal{I} interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$ teljesül, az $\mathcal{I} \models G$ is fennáll.

Más szóval $\mathcal{F} \models G$ teljesül, ha minden interpretáló struktúrában, az \mathcal{F}, G közös értéktáblájában minden olyan sorban, ahol az \mathcal{F} elemeinek helyettesítési értéke *igaz*, a G helyettesítési értéke is *igaz*.

Jelölés: $\mathcal{F} \models G$ vagy $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models G$.

Tétel (logikailag igaz)

Ha egy G formula bármely \mathcal{F} feltételhalmaznak következménye, akkor G **logikailag igaz**.

Az ítéletlogikában bebizonyított tételek itt is igazak.

Tétel

\mathcal{F} -nek szemantikus következménye G , akkor és csak akkor, ha az $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ kielégíthetetlen.

Egyik **eldöntésprobléma**: tetszőleges 1.rendű formulahalmazról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.

Tétel

Ha \mathcal{F} -nek következménye G_1 és \mathcal{F} -nek következménye G_2 , valamint, $\{G_1, G_2\}$ -nek következménye A , akkor az \mathcal{F} -nek következménye A .

Következményfogalom – definíciók

A következményfogalom alapján, annak eldöntése, hogy $\mathcal{F} \models G$ *elméletileg* megoldható az interpretáló struktúrákban az F_1, F_2, \dots, F_n és G -re kapott közös értéktábla alapján.

Legszűkebb következmény

Ha minden interpretáló struktúrában, a G a közös értéktáblának pontosan azokban a soraiban igaz, ahol F_1, F_2, \dots, F_n mindegyike igaz, akkor G a **legsűkebb következménye** \mathcal{F} -nek.

Ekvivalencia

Az A és B elsőrendű formulák **logikailag ekvivalensek**, ha $\{A\} \models B$ és $\{B\} \models A$.

Tétel

G elsőrendű formula. Ha $\models_0 G$, akkor $\models G$.
(Ha G tautológia, akkor G logikailag igaz.)

Biz.: Ha $\models_0 G$, akkor G igaz a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére. Tekintsük a G egy \mathcal{I} interpretációját, az individuumváltozók egy κ kiértékelése mellett. Ekkor a prímkomponensek igazságértéke kiszámolható és bármi is lesz a konkrét értékük, ezután a G helyettesítési értéke i lesz (mivel a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére igaz).

Dedukciós tétel

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models G \iff \{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\} \models F_n \supset G.$$

Biz.: ugyanaz, mint ítéletlogikában

Tétel

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models G \iff \\ \models F_1 \supset (F_2 \supset (\dots \supset (F_{n-1} \supset (F_n \supset G)) \dots)) \text{ (logikailag igaz).}$$

Biz.: A dedukciós tétel n -szeres alkalmazásával.

A másik eldöntésprobléma a predikátumlogikában: tetszőleges 1. rendű formuláról el kell tudni dönteni, hogy logikailag igaz-e.

Eldöntésképrobléma megoldása szemantikai eszközökkel

Egy n változós ítéletlogikai B formula tautológia, ha

- hamishalmaza üres. Ez azt jelenti, hogy $\neg B$ kielégíthetetlen.
- az ítéletváltozók minden kiértékelésére (minden interpretációban) a helyettesítési érték i .

Elsőrendű n változós B formula logikailag igaz, ha

- minden U univerzumon, a változók minden behelyettesítése mellett kapott B' alapformulák igazak minden, a nyelvnek megfelelő struktúrában.
- $\neg B$ kielégíthetetlen. Egyetlen interpretációban, egyetlen változókiértékelés mellett sem igaz.

Ezek a problémák szemantikailag világosak, de megoldásuk a teljes kipróbálást tételezi fel. Szintaktikai eszközökre van szükség a megoldáshoz.

Szemantikus eldöntésprobléma megoldhatósága

Gödel bebizonyította, hogy **„A szemantikus eldöntésprobléma algoritmikusan nem oldható meg – nem létezik univerzális eldöntési algoritmus”**.

Kutatások **„eldönthető formulaosztályok”** keresésére. Logikailag ekvivalens formulaátalakítások alkalmazása mellett.

Az egyik lehetőség, eldönthető formulaosztályokhoz tartozó formulákkal leírt szemantikus eldöntésproblémára kalkulus (döntési eljárás) keresése (tabló, rezolúciós elv).

A másik lehetőség, a logika szintaktikai alapon való felépítése, szintaktikus eldöntésprobléma megadása és arra kalkulus kidolgozása.