

# Szekvent kalkulus

## Gyakorlat

Logika

2020/2021 1. félév

# Szekvent kalkulus alapjai

Hogy néz ki egy szekvent?

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \longrightarrow \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$$

Mi egy szekvent szemantikája?

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset \perp \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$$

## Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján.

Teljesül-e a következő szekvent:  $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

Írjuk fel a jelentését:  $\neg(A \vee C) \wedge A \supset B$

A de Morgan-azonosság alapján ez a következővel ekvivalens:

$$\neg A \wedge \neg C \wedge A \supset B$$

Az implikáció bal oldala mindig hamis, így az implikáció mindig igaz, tehát a szekvent teljesül.

## Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Teljesül-e a következő szekvent:  $\rightarrow A \supset A$

Írjuk fel a jelentését:  $\top \supset (A \supset A)$

Az implikáció bal- és jobb oldalán is azonosan igaz állítás szerepel, így az implikáció mindig igaz, tehát a szekvent teljesül.

## Példa: szekvent vizsgálata jelentés alapján

Teljesül-e a következő szekvent:  $(\neg A \vee \neg B), \neg A \supset B \longrightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B$

Írjuk fel a jelentését:  $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$

$A$	$B$	$(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \supset B) \supset A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$
$i$	$i$	$i$
$i$	$h$	$i$
$h$	$i$	$h$
$h$	$h$	$i$

# Szekvent kalkulus alapjai

- A szekvent kalkulus a természetes technikához hasonlóan szintaktikus módszer: a vizsgált szekvent tényleges jelentésével nem foglalkozunk, csak a levezetési szabályokat használhatjuk.
- Levezetési szabályok a természetes levezetéshez hasonlóan: ha a felső levezetés megkonstruálható, akkor az alsó is.
- A szabályokat lentről felfelé fogjuk alkalmazni.
- A cél a kitüntetett szekvent (axióma) elérése.
- Kétféle szabályrendszer: Gentzen-féle (G-kalkulus), Curry-féle (C-kalkulus)
- Minden logikai összekötő jelhez két szabály tartozik:  $\circ \rightarrow$  és  $\rightarrow \circ$ , aszerint, hogy a  $\circ$  művelet az alsó szekventben a nyíl bal- vagy jobboldalán található.

# A G- és C-kalkulus szabályrendszere

## G-kalkulus

axiómaséma

$$X \rightarrow X$$

levezetési szabályok

$(\rightarrow sz)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X, X}{\Gamma \rightarrow \Delta, X}$$

$(\rightarrow b)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \bar{X}}$$

$(sz \rightarrow)$

$$\frac{X, X, \Gamma \rightarrow \Delta}{X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(b \rightarrow)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\rightarrow \supset)$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \supset Y)}$$

$(\rightarrow \wedge)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \wedge Y)}$$

$(\rightarrow \vee)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \vee Y)}$$

$(\rightarrow \neg)$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

$(\supset \rightarrow)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \supset Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\wedge \rightarrow)$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\vee \rightarrow)$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \vee Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\neg \rightarrow)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\neg X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\forall \rightarrow)$

$$\frac{[A(x \parallel t)], \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\exists \rightarrow)$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$(\rightarrow \forall)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$(\rightarrow \exists)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, [A(x \parallel t)]}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x A}$$

## C-kalkulus

axiómaséma

$$X, \Gamma \rightarrow \Delta, X$$

levezetési szabályok

$(\rightarrow \supset)$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \supset Y)}$$

$(\supset \rightarrow)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \supset Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\forall \rightarrow)$

$$\frac{[A(x \parallel t)], \forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\rightarrow \wedge)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \wedge Y)}$$

$(\wedge \rightarrow)$

$$\frac{X, Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\exists \rightarrow)$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$(\rightarrow \vee)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, (X \vee Y)}$$

$(\vee \rightarrow)$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta \quad Y, \Gamma \rightarrow \Delta}{(X \vee Y), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\rightarrow \forall)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A} \quad (x \notin \text{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$(\rightarrow \neg)$

$$\frac{X, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

$(\neg \rightarrow)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\neg X, \Gamma \rightarrow \Delta}$$

$(\rightarrow \exists)$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, [A(x \parallel t)], \exists x A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x A}$$

# Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $\longrightarrow A \supset A$

$$(\rightarrow \supset) \frac{\frac{\checkmark}{A \longrightarrow A}}{\longrightarrow A \supset A}$$

Ez a levezetés a G- és a C-kalkulus szabályai szerint is érvényes.



# Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $A \longrightarrow \neg\neg A$

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A}{A, \neg A \longrightarrow} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, \neg A \longrightarrow}{A \longrightarrow \neg\neg A} \end{array}$$

Ez a levezetés a G- és C-kalkulus szabályai szerint is érvényes.

# Egyszerű levezetések

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $A \wedge C, A \supset B \longrightarrow A \supset B$

- Levezetés G-kalkulusban:

$$(b \rightarrow) \frac{\overline{A \supset B \longrightarrow A \supset B}^{\checkmark}}{A \wedge C, A \supset B \longrightarrow A \supset B}$$

- Levezetés C-kalkulusban

$$\frac{\checkmark}{A \wedge C, A \supset B \longrightarrow A \supset B}$$

## Példa elakadásra (G-kalkulus)

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $\neg(A \vee C), A \longrightarrow B$

$$\begin{array}{c} \frac{?}{A \longrightarrow C, B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{A \longrightarrow C, B}{A \longrightarrow A \vee C, B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A \vee C, B}{\neg(A \vee C), A \longrightarrow B} \end{array}$$

A  $(\rightarrow \vee)$  szabály alkalmazásakor rosszul választottunk, emiatt nem sikerült előállítani a levezetést. Jó választás esetén nem akadunk el:

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A \longrightarrow A} \\ (\rightarrow b) \frac{A \longrightarrow A}{A \longrightarrow A, B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{A \longrightarrow A, B}{A \longrightarrow A \vee C, B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{A \longrightarrow A \vee C, B}{\neg(A \vee C), A \longrightarrow B} \end{array}$$

# 1.feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B$

• Levezetés G-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{B \longrightarrow B} \\ (b \rightarrow) \frac{B \longrightarrow B}{A, B \longrightarrow B} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, B \longrightarrow B}{A \longrightarrow \neg B, B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{A \longrightarrow \neg B, B}{A \longrightarrow \neg A \vee \neg B, B} \\ (\rightarrow \supset) \frac{A \longrightarrow \neg A \vee \neg B, B}{\longrightarrow \neg A \vee \neg B, A \supset B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \neg A \vee \neg B, A \supset B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

• Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c} \frac{\checkmark}{A, B \longrightarrow \neg A, B} \\ (\rightarrow \neg) \frac{A, B \longrightarrow \neg A, B}{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B} \\ (\rightarrow \supset) \frac{A \longrightarrow \neg A, \neg B, B}{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\longrightarrow \neg A, \neg B, A \supset B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B} \\ (\rightarrow \vee) \frac{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A, \neg B}{\neg(A \supset B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B} \end{array}$$

## 2. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $(A \vee B) \supset C \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

- Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A \rightarrow A, B, C}}{(\rightarrow \supset) \rightarrow A, B, A \supset C} \quad (\rightarrow \vee) \rightarrow A \vee B, A \supset C}{(\supset \rightarrow) \rightarrow (A \vee B) \supset C \rightarrow A \supset C} \quad (\rightarrow \wedge) \rightarrow (A \vee B) \supset C \rightarrow A \supset C \\
 \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A, C \rightarrow C}}{(\rightarrow \supset) C \rightarrow A \supset C} \quad (\rightarrow \vee) \rightarrow B, (A \vee B) \supset C \rightarrow C}{(\supset \rightarrow) \rightarrow (A \vee B) \supset C \rightarrow B \supset C} \\
 \hline
 (A \vee B) \supset C \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)
 \end{array}$$

- Levezetés G-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\checkmark}{A \rightarrow A}}{(\rightarrow b) A \rightarrow C, A} \quad (\rightarrow \supset) \rightarrow A \supset C, A}{(\rightarrow \vee) \rightarrow A \supset C, A \vee B} \quad (\rightarrow \wedge) \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C), A \vee B}{(\supset \rightarrow) \rightarrow (A \vee B) \supset C \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)} \\
 \frac{\frac{\frac{\checkmark}{B \rightarrow B}}{(\rightarrow b) B \rightarrow C, B} \quad (\rightarrow \supset) \rightarrow B \supset C, B}{(\rightarrow \vee) \rightarrow B \supset C, A \vee B} \quad (\rightarrow \wedge) \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C), A \vee B}{(\supset \rightarrow) \rightarrow (A \vee B) \supset C \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)} \\
 \frac{\frac{\frac{\checkmark}{C \rightarrow C}}{(b \rightarrow) C, A \rightarrow C} \quad (\rightarrow \supset) C \rightarrow A \supset C}{(\rightarrow \wedge) C \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)} \quad \frac{\frac{\frac{\checkmark}{C \rightarrow C}}{(b \rightarrow) C, B \rightarrow C} \quad (\rightarrow \supset) C \rightarrow B \supset C}{(\rightarrow \wedge) C \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)} \\
 \hline
 (A \vee B) \supset C \rightarrow (A \supset C) \wedge (B \supset C)
 \end{array}$$

### 3. feladat

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))$

- Levezetés C-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\checkmark} \\
 \frac{}{P(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), R(y), P(x)} \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x) \supset R(y), P(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)} \\
 (\rightarrow \forall) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x)} \\
 (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\vee \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{\checkmark} \\
 \frac{}{R(y), P(x) \longrightarrow R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y), \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}
 \end{array}$$

- Levezetés G-kalkulusban:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\checkmark} \\
 \frac{}{P(x) \longrightarrow P(x)} \\
 (\rightarrow b) \frac{}{P(x) \longrightarrow R(y), P(x)} \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{\longrightarrow P(x) \supset R(y), P(x)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), P(x)} \\
 (\rightarrow \forall) \frac{}{\longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y)), \forall xP(x)} \\
 (\neg \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))} \\
 (\vee \rightarrow) \frac{}{\neg\forall xP(x) \vee R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{\checkmark} \\
 \frac{}{R(y) \longrightarrow R(y)} \\
 (b \rightarrow) \frac{}{R(y), P(x) \longrightarrow R(y)} \\
 (\rightarrow \supset) \frac{}{R(y) \longrightarrow P(x) \supset R(y)} \\
 (\rightarrow \exists) \frac{}{R(y) \longrightarrow \exists x(P(x) \supset R(y))}
 \end{array}$$

## Példa elakadásra (C-kalkulus)

Bizonyítsuk a következő szekventet:  $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{?}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x), P(y)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad (\rightarrow \wedge) \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{?}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xR(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}}
 \end{array}$$

Rosszul helyettesítettünk a  $(\rightarrow \exists)$  szabály alkalmazásakor:  $x$ -nek lett szabad előfordulása, emiatt nem alkalmazható a  $(\exists \rightarrow)$  szabály. Jó sorrendben:

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{\checkmark}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x), P(x)}}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}}{(\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x)}} \quad \frac{(\rightarrow \exists) \frac{\frac{\checkmark}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x), R(x)}}{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}}{(\rightarrow \wedge) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xR(x)}} \\
 \frac{(\wedge \rightarrow) \frac{P(x), R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}}{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)} \\
 (\exists \rightarrow) \frac{P(x) \wedge R(x) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \longrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xR(x)}
 \end{array}$$