11. gyakorlat
Integrálszámítás 1.

1. feladat. *Tekintsük az $I := [0,1] \times [0,2]$ téglalapot. Kétféle sorrendben számítsuk ki az*

$$\iint_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^2 x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy$$

kettős integrált.

Megoldás. Az integrandus folytonos az $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ halmazon (tehát I-n is), ezért az integrál létezik.

Ha először tetszőlegesen rögzített $x \in [0,1]$ változó mellett az y változó szerint integrálunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{\iint_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy}} = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^3 \sqrt{y}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^3 \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(2^{3/2} - 0\right) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 x^3\, dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}}}.$$

Ha először tetszőlegesen rögzített $y \in [0,2]$ változó mellett az x változó szerint integrálunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{\iint_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy}} = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^3 \sqrt{y}\, dx \right) dy = \int_0^2 \left[\sqrt{y} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} dy =$$

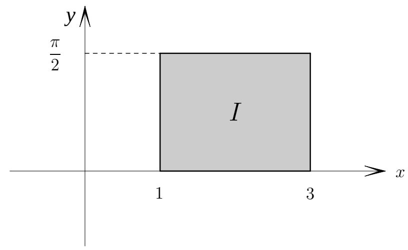
$$= \int_0^2 \sqrt{y} \cdot \left(\frac{1}{4} - 0 \right) dy = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(2^{3/2} - 0\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}}}.$$

A különböző sorrendben számolt integrálok tehát valóban megegyeznek. ■

2. feladat. *Számítsuk ki a következő kettős integrált:*

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy.$$

Megoldás. Az integrálási tartomány az $I = [1,3] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ intervallum:



Az integrálandó $f(x,y) := x \cdot \sin(xy)$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény folytonos I-n ($\mathbb{R}^2$-őn is), ezért $f \in R(I)$. A szukcesszív integrálás tétele alapján mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz lesz.

Ha először az $x \in [1,3]$ változót (tetszőlegesen) rögzítjük, és az y változó szerint integrálunk, akkor az

$$(*) \qquad \int_1^3 \left(\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx$$

egyváltozós integrálokat kell egymás után kiszámolni.

Ha először az $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ változót (tetszőlegesen) rögzítjük, és az x változó szerint integrálunk, akkor pedig azt kapjuk, hogy

$$(**) \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^3 x \cdot \sin(xy)\, dx \right) dy$$

Vegyük észre azonban azt, hogy a $(**)$ esetben először parciálisan kell integrálni, a $(*)$ esetben pedig a belső integrált rögtön kiszámíthatjuk. Ezért a $(*)$ alatti sorrendben integrálunk:

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy = \int_1^3 \left(\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \Big[-\cos(xy) \Big]_{y=0}^{y=\pi/2} dx = \int_1^3 \Big(-\cos\frac{\pi x}{2} + \cos 0 \Big)\, dx = \int_1^3 \Big(-\cos\frac{\pi x}{2} + 1 \Big)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}} + x \right]_1^3 = \Big(-\frac{2}{\pi}\sin\frac{3\pi}{2} + 3 \Big) - \Big(-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} + 1 \Big) = 2 + \frac{4}{\pi}.$$

Így

$$\underline{\underline{\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy = 2 + \frac{4}{\pi}.}} \ \blacksquare$$

Megjegyzés. A szukcesszív integrálás tétele azt állítja, hogy (a tétel feltételeinek a teljesülése esetén) mindegy, hogy melyik sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz lesz. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a kétféle sorrendben történő kiszámolás során ugyanolyan technikai jellegű nehézségek lépnek fel. Előfordulhatnak lényeges különbségek is.

Ezt a tényt illusztráljuk a fenti feladat $(**)$ képlettel való megoldásának a *vázolásával.*

A „belső” integrált parciális integrálással számolhatjuk ki. Ezután *észre lehet venni* azt, hogy a kapott eredményt egyszerűbb alakban is fel lehet írni. A részletek mellőzésével azt kapjuk, hogy $\forall\, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ paraméter esetén

$$g(y) := \int_1^3 x\cdot\sin(xy)\,dx = \left(\frac{\sin y - \sin(3y)}{y}\right)' = \left(\frac{-\,2\cos(2y)\cdot\sin y}{y}\right)' \qquad \left(y \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)$$

és $g(0) := 0$. Ez a g függvény folytonos a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, és ezen az intervallumon a primitív függvénye

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{-2\cdot\cos(2y)\cdot\sin y}{y}, & \text{ha } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -2, & \text{ha } y = 0. \end{cases}$$

Ezért

$$\int_0^{\pi/2} g(y)\,dy = \Big[G(y)\Big]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{2\cdot\cos\pi\cdot\sin(\pi/2)}{\pi/2}\right) - (-2) = \frac{4}{\pi} + 2.$$

Így

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_1^3 x\cdot\sin(xy)\,dx\right) dy = \frac{4}{\pi} + 2.$$

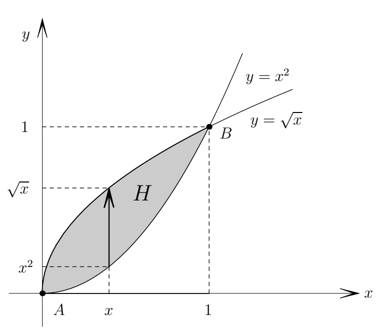
A különböző sorrendben számolt integrálok tehát valóban megegyeznek. ■

3. feladat. *Számítsuk ki a következő integrált:*

$$\iint_H xy^2\,dx\,dy,$$

ahol H *az* $y = x^2$ *és az* $y = \sqrt{x}$ *egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész.*

Megoldás. Ábrázoljuk a H halmazt!



Az integrandus folytonos az egész $\mathbb{R}^2$-őn, tehát a korlátos H halmazon is. Következésképpen $f \in R(H)$.

Az integrál kiszámításához először a görbék metszéspontjainak a koordinátáit határozzuk meg:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{array}\right\} \iff \sqrt{x} = x^2 \iff \sqrt{x}\cdot(x^{3/2}-1) = 0 \iff x = 0 \text{ vagy } x = 1.$$

A metszéspontok tehát $A(0,0)$ és $B(1,1)$.

A H halmaz a x tengelyre és az y tengelyre nézve is normáltartomány, ezért mindegyik megismert képletet használhatjuk. (Érdemes arra is figyelni, hogy mindegyik esetben a „belső" integrálokat könnyen kiszámolhatjuk, ezért bármelyik változó szerinti integrálással kezdhetünk.)

Tekintsük a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak:

$$0 \le x \le 1, \qquad x^2 \le y \le \sqrt{x}.$$

Ekkor először y szerint kell integrálnunk. (A nyíl jelzi a „belső" integrál irányát.) Így

$$\underline{\underline{\iint\limits_H xy^2\,dx\,dy}} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy\right) dx = \int\limits_0^1 \left[x \cdot \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x \cdot \left(x^{3/2} - x^6\right) dx =$$

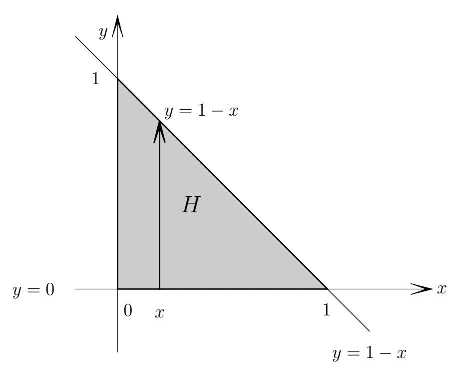
$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left(x^{5/2} - x^7\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{7/2} - \frac{1}{8}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{56}}}. \blacksquare$$

4. feladat. *Legyen* $H := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\right\}$. *Számítsuk ki a*

$$\iint\limits_H (x+y)\,dx\,dy$$

integrált.

Megoldás. Ábrázoljuk a H halmazt!



Az integrandus folytonos az egész $\mathbb{R}^2$-őn, tehát a korlátos H halmazon is. Következésképpen $f \in R(H)$.

Tekintsük a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak:

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1 - x.$$

Ekkor először y szerint kell integrálnunk. (A nyíl jelzi a „belső" integrál irányát.) Így

$$\underline{\underline{\iint\limits_H (x+y)\,dx\,dy}} = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x\,y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x \cdot (1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(2\,x \cdot (1-x) + (1-x)^2 \right) dx =$$

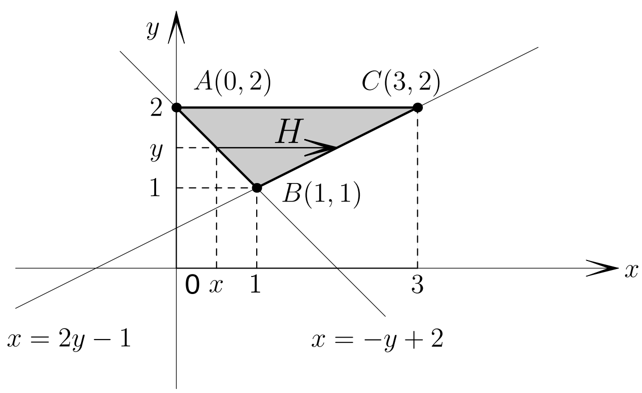
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}. \blacksquare$$

5. feladat. *Jelölje H a $(0,2)$, az $(1,1)$ és a $(3,2)$ csúcspontú háromszöglapot. Számítsuk ki az*

$$\iint\limits_H y\,e^x\,dx\,dy$$

integrált.

Megoldás. Ábrázoljuk a H halmazt!



Az integrandus folytonos az egész $\mathbb{R}^2$-őn, tehát a korlátos H halmazon is. Következésképpen $f \in R(H)$.

A H halmaz a x tengelyre és az y tengelyre nézve is normáltartomány, ezért mindegyik megismert képletet használhatjuk.

Ha az x tengelyre nézve normáltartományokra vonatkozó képletet használjuk, akkor az integrál kiszámítását két részre kell bontani a $[0,1]$ és az $[1,3]$ intervallumokkal.

Célszerűbb H-t az y tengelyre nézve normáltartománynak tekinteni. Ehhez meg kell határozni az AB és a BC egyenes egyenletét:

Az AB egyenes egyenlete: $y = -x + 2$, a BC egyenes egyenlete: $y = \dfrac{x+1}{2}$.

Az y tengelyre nézve normáltartománynak tekintett H halmaz tehát:

$$1 \leq y \leq 2, \qquad -y+2 \leq x \leq 2y-1.$$

Így

$$\iint\limits_H ye^x \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\int_{-y+2}^{2y-1} ye^x \, dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 y \cdot \Big[e^x \Big]_{x=-y+2}^{x=2y-1} dy = \int_1^2 y \cdot \left(e^{2y-1} - e^{-y+2} \right) dy =$$

$$= e^{-1} \int_1^2 y \cdot e^{2y} \, dy - e^2 \int_1^2 y \cdot e^{-y} \, dy.$$

Mivel

$$\int_1^2 y \cdot e^{2y} \, dy = \left[y \cdot \frac{e^{2y}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{e^{2y}}{2} \, dy = \frac{1}{2}\left(2e^4 - e^2\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left(e^4 - \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(e^4 - e^2\right) = \frac{e^2}{4}\left(3e^2 - 1\right)$$

és

$$\int_1^2 y \cdot e^{-y} \, dy = \left[y \cdot \frac{e^{-y}}{-1} \right]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{e^{-y}}{-1} \, dy = (-1) \cdot \left(2e^{-2} - e^{-1}\right) + \left[\frac{e^{-y}}{-1}\right]_1^2 =$$

$$= \left(-2e^{-2} + e^{-1}\right) - \left(e^{-2} - e^{-1}\right) = \frac{2e-3}{e^2},$$

ezért

$$\iint\limits_H ye^x \, dx \, dy = \frac{3}{4}e^3 - \frac{9}{4}e + 3. \ \blacksquare$$

6. feladat. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük a következő kettős integrált:*

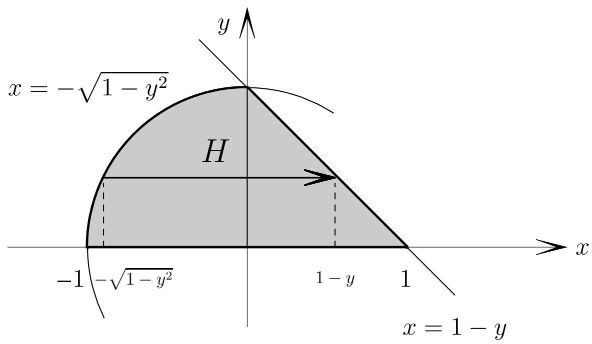
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) \, dx \, dy \,.$$

Szemléltessük az integrálási tartományt. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét.

Megoldás. A H-val jelölt integrálási tartomány a

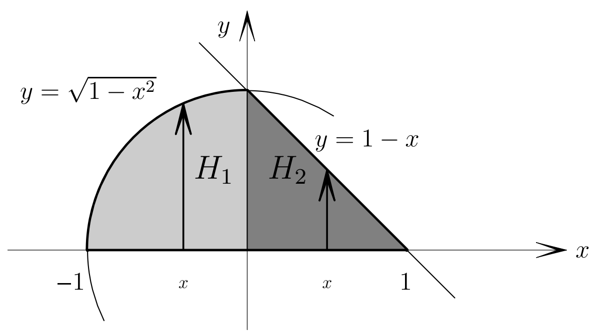
$$0 \le y \le 1, \quad -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza:



Mivel H az y tengelyre nézve normáltartomány, ezért először az x változó, utána pedig az y változó szerint integrálunk. (A nyíl jelzi a belső integrálban az integrálás irányát.)

Ha a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak tekintjük, akkor először az y, utána pedig az x változó szerint kell integrálnunk. Az f függvény folytonos $\mathbb{R}^2$-őn (tehát a H halmazon is), ezért az integrálás sorrendje felcserélhető. A H tartományt ebben az esetben az alábbi módon két részre bontjuk:



A tartományokat a következő egyenlőtlenségrendszerek határozzák meg:

$$H_1 : \quad -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2};$$
$$H_2 : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x.$$

Így

$$\iint\limits_{H_1} f = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

$$\iint\limits_{H_2} f = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Mivel

$$\iint_H f = \iint_{H_1} f + \iint_{H_2} f,$$

ezért

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx. \blacksquare$$

Megjegyzés. Itt emlékeztetünk arra, hogy egyváltozós határozott integrálok kiszámításához bizonyos esetekben a Newton–Leibniz-tétel nem használható. Ez a helyzet például akkor, amikor az integrálandó függvénynek van primitív függvénye (mert pl. folytonos), azonban a primitív függvény nem elemi függvény. Bebizonyítható, hogy ilyenek a következő függvények:

$$e^{\pm x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \cos x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{\cos x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$$

$$\frac{1}{\ln x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \sqrt{x^3+1} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$$

Ha egy kettős integrál kiszámolásánál ilyen függvények adódnak, akkor bizonyos esetekben az integrálás sorrendjének a felcserélése segíthet.

7. feladat. *Számítsuk ki a*

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \,dx\,dy$$

integrált.

Megoldás. A H-val jelölt integrálási halmaz az

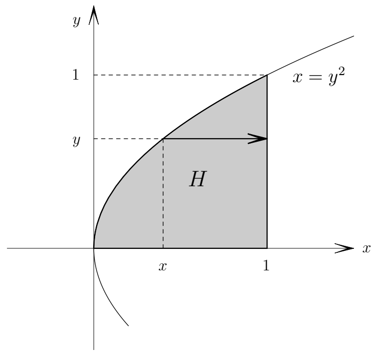
$$y^2 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott y tengelyre nézve normáltartomány (l. az (a) ábrát). Ezért

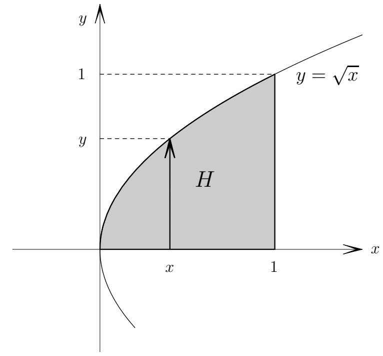
$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \sin x^2 \,dx \right) dy.$$

Ha a fenti képlet szerint először x szerint integrálunk, akkor a következő problémába ütközünk: A $\sin x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek *van* primitív függvénye (hiszen folytonos), de az *nem elemi függvény*, így a belső (egyváltozós) integrál kiszámítására a Newton–Leibniz-tétel *nem alkalmazható*. Próbáljuk meg az integrálás sorrendjét felcserélni, azaz először y szerint integrálni. Ezt megtehetjük, mert a szóban forgó halmaz az

x tengelyre nézve is normáltartomány, amelyet a (b) ábra alatti egyenlőtlenségek határoznak meg.



(a) ábra
H az y-ra normáltartomány
$0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq 1$



(b) ábra
H az x-re normáltartomány
$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}$

(A nyíl jelzi az eredeti felírásban, illetve az integrálok felcserélése után a belső integrálok irányát.)

Így

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y \sin x^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\sin x^2\right) \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{4} \left[-\cos x^2\right]_0^1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{4}\left(1 - \cos 1\right)}. \blacksquare$$

■ További feladatok

1. feladat. *Tegyük fel, hogy az*

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned}$$

egyenletrendszerben u és v az ismeretlenek és x, y adott paraméterek.

(a) *Mutassuk meg, hogy ha $(x_0, y_0) = (1, 2)$, akkor $(u_0, v_0) = (0, 0)$ egy megoldása az egyenletrendszernek.*

(b) *Bizonyítsuk be, hogy az (x_0, y_0) pontnak van olyan U környezete, hogy tetszőleges $(x, y) \in U$ paraméterek esetén az (u_0, v_0) pont egy V környezetében az egyenletrendszer (u, v) megoldása egyértelmű és az (x, y) változó folytonosan deriválható függvénye.*

(c) *Számítsuk ki a szóban forgó függvény deriváltját az (x_0, y_0) pontban.*

Megoldás.

(a) Ha $x_0 = 1$ és $y_0 = 2$, akkor az

$$\begin{aligned} e^{u+v} + 2uv &= 1 \\ 2e^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek $(u_0, v_0) = (0, 0)$ nyilván megoldása.

(b) Az általános implicitfüggvény-tételt alkalmazzuk.

Legyen $n_1 = n_2 = 2$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^2$, és tekintsük az $f = (f_1, f_2) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_2$ függvényt, ahol

$$\begin{aligned} f_1(x, y; u, v) &: = x\, e^{u+v} + 2\, u\, v - 1 \\ f_2(x, y; u, v) &: = y\, e^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x \end{aligned} \qquad \big((x, y) \in \Omega_1, \quad (u, v) \in \Omega_2\big).$$

Világos, hogy $f \in C^1\big(\mathcal{D}_f\big)$, és ha $a := (x_0, y_0) = (1, 2)$, $b := (u_0, v_0) = (0, 0)$, akkor $f(a, b) = f(1, 2; 0, 0) = (0, 0)$.

Most ellenőrizzük a $\det \partial_2 f(a, b) \neq 0$ feltételt. Legyen

$$F(u, v) := f(1, 2; u, v) = \begin{bmatrix} e^{u+v} + 2\, u\, v - 1 \\ 2\, e^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} - 2 \end{bmatrix} \qquad \big((u, v) \in \Omega_2\big).$$

Ekkor

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} e^{u+v} + 2v & e^{u+v} + 2\, u \\ 2\, e^{u-v} - \dfrac{1}{1+v} & -2\, e^{u-v} + \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{bmatrix} \qquad \big((u, v) \in \Omega_2\big).$$

Mivel

$$\partial_2 f(a,b) = \partial_2 f(1,2;0,0) = F'(b) = F'(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

ezért a $\det \partial_2 f(a,b) = -3 \neq 0$ feltétel is teljesül.

Az implcitfüggvény-tételből következik, hogy $\exists\, K(a) = U_1$, $\exists\, K(b) = U_2$ és $\exists\, \varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2\big) : U_1 \to U_2$ folytonosan deriválható függvény, amelyre

$$f\big(x, y; \varphi(x,y)\big) = f\big(x, y; \varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) = (0,0) \quad \big((x,y) \in U_1\big).$$

Ennek az egyenletrendszer megoldásával kapcsolatos értelmezése a következő. Tetszőleges $(x,y) \in U_1$ paraméterek esetén az egyenletrendszernek pontosan egy $(u,v) \in U_2$ megoldása van. Az

$$(u,v) = \big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) \quad \big((u,v) \in U_2\big)$$

megoldás az (x,y) változó folytonosan deriválható függvénye.

(c) Az implicitfüggvény-tétel azt is állítja, hogy

$$\varphi'(1,2) = -\big[\partial_2 f(1,2;0,0)\big]^{-1} \cdot \partial_1 f(1,2;0,0).$$

Az előzőek alapján

$$\big[\partial_2 f(1,2;0,0)\big]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$G(x,y) := f(x,y;0,0) = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2\,x \end{bmatrix} \quad \big((x,y) \in \Omega_1\big).$$

Ekkor

$$G'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \big((x,y) \in \Omega_1\big).$$

Mivel

$$\partial_1 f(1,2;0,0) = G'(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\varphi'(1,2) = (-1) \cdot \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így

$$\underline{\underline{\varphi'(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}}. \ \blacksquare$$