# Bizonyítással kért tételek a 2. zh-n

## 1. A geometriai sor konvergenciája

**Tétel:**

Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ekkor ha $\sum q^n$ konvergens $\Leftrightarrow |q| < 1$

Ekkor a részsorösszeg: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

**Bizonyítás:**

$q = 1$ esetén:

$s_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1 \;\; (n \in \mathbb{N})$ miatt $(s_n)$ divergens $\Rightarrow \sum q^n$ is divergens

$q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$, akkor:

$$1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) \text{ miatt}$$
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Tehát: $(s_n)$ konvergens $\Leftrightarrow (q^{n+1}) = q(q^n)$ konvergens
De $(q^n)$ konvergens $\overset{q \neq 1}{\Leftrightarrow} |q| < 1$
És ekkor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim(s_n) = \lim(\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}) = \frac{1}{1-q}$$

## 2. A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium

**Tétel:**

$\sum a_n$ sor Cauchy, ha:
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N : |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \epsilon$$

$\sum a_n$ sor konvergens $\Leftrightarrow \sum a_n$ Cauchy

**Bizonyítás:**

$\sum a_n$ konvergens $\Leftrightarrow (s_n)$ konvergens $\Leftrightarrow (s_n)$ Cauchy-sorozat, azaz:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N :$$

$$\underbrace{|s_m - s_n|} < \epsilon$$

$$|a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots a_m - (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)| =$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| \Leftrightarrow \sum a_n \text{ sor Cauchy}$$

## 3. Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok

**Tétel:**

Legyen $\sum a_n, \sum b_n$ pozitív tagú sorok, melyekre
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : 0 \leq a_n \leq b_n$

1. Ekkor ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens
2. Ekkor ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens

**Bizonyítás:**

Tfh.: $n \geq N$, legyenek
$s_n^a := a_N + a_{N+1} + \ldots a_n$
$s_n^b := b_N + b_{N+1} + \ldots + b_n$

Mivel $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : a_n \leq b_n$, ezért $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : s_n^a \leq s_n^b$

1. Ha $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow (s_n^b)$ korlátos $\overset{a_n \leq b_n}{\Rightarrow} (s_n^a)$ is korlátos
   $\Rightarrow \sum\limits_{n=N} a_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens
2. $\sum a_n$ divergens $\Rightarrow \sum\limits_{n=N} a_n$ divergens $(s_n^a)$ nem felülről korlátos
   $\Rightarrow (s_n^b)$ sem felülről korlátos $\Rightarrow \sum\limits_{n=N} b_n$ divergens $\Rightarrow \sum b_n$ divergens

## 4. A Cauchy-féle gyökkritérium

**Tétel:**

Tekintsük a $\sum a_n$ sort és tfh.: $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozat konvergens és $A := \lim(\sqrt[n]{|a_n|})$
Ekkor:

1. Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens, tehát konvergens is
2. Ha $1 < A$, akkor $\sum a_n$ divergens
3. Ha $A = 1$, akkor lehet konvergens és divergens is

**Bizonyítás:**

**1,**
$0 \leq A < 1$ esetén $\exists q \in \mathbb{R}$, hogy $A < q < 1$
Mivel $\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = A$, ezért:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| < q^n$

Mivel $0 \leq A < q < 1$, ezért $\sum q^n$ konvergens $\Rightarrow \sum\limits_{n=N} q^n$ konvergens
De: $\sum\limits_{n=N} q^n$ majorálja a $\sum\limits_{n=N} |a_n|$ sort
$\Rightarrow$ (ld.: Majoráló kritérium) $\sum\limits_{n=N} |a_n|$ konvergens $\Rightarrow \sum |a_n|$ konvergens
$\Rightarrow \sum a_n$ abszolút konvergens

**2,**
Tfh.: $A > 1$. Ekkor $\exists q \in \mathbb{R} : 1 < q < A$
$\lim(\sqrt[n]{|a_n|}) = A$ miatt:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} > q$$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| > q^n > 1$
$\Rightarrow \lim(a_n) \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergens

**3,**
Tekintsük a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}$ konvergens sort és a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ divergens sort.
Ekkor:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

## 5. A D'Alembert-féle hányados-kritérium

**Tétel:**

Tekintsük a $\sum a_n$ sort, ahol $a_n \neq 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$ és tfh.: $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ sorozat konvergens és $A := \lim\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$
Ekkor:

1. Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens, tehát konvergens is
2. Ha $1 < A$, akkor $\sum a_n$ divergens
3. Ha $A = 1$, akkor lehet konvergens és divergens is

**Bizonyítás:**

**1,**
Tfh.: $A < 1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{R} : A < q < 1$
$\lim\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = A$ miatt:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$$

Tehát: $|a_{n+1}| < q|a_n|$

$|a_n| < q|a_{n-1}|$

$|a_{n-1}| < q|a_{n-2}|$

...

$|a_{n_0+1}| < q|a_{n_0}|$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_{n+1}| < \underbrace{q|a_n|}_{<q|a_{n+1}|} < q^2|a_{n+1}| < \ldots < q^{n+1-n_0} \cdot |a_{n_0}| =$

$= \underbrace{q^{1-n_0} \cdot |a_{n_0}|}_{=K>0} \cdot q^n$

$\Rightarrow q \in (0,1)$ miatt $\sum q^n$ konvergens $\Rightarrow \sum\limits_{n=n_0} q^n$ konvergens

De! $\sum\limits_{n=n_0} q^n$ majorálja a $\sum |a_{n+1}|$ sort $\Rightarrow \sum\limits_{n=n_0} |a_{n+1}|$ konvergens $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum |a_{n+1}|$ konvergens $\Rightarrow \sum |a_n|$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ abszolút konvergens

**2,**

Tfh.: $A > 1$. Ekkor: $\exists q \in \mathbb{R} : A > q > 1$

$\Rightarrow \sum n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q$

$\Rightarrow |a_{n+1}| > K \cdot q^n > K > 0 \quad (n \geq n_0)$

$\Rightarrow \lim(a_{n+1}) \neq 0 \Rightarrow \lim(a_n) \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergens

**3,**Tekintsük a $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^2}$ konvergens sort és a $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n}$ divergens sort.

Ekkor:

$$\frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)^2}\right|}{\left|\dfrac{1}{n^2}\right|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$$\frac{\left|\dfrac{1}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{1}{n}\right|} = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

## 6. Leibniz-típusú sorok konvergenciája

## 7. Minden $[0,1]$-beli szám előállítható tizedestört alakban

## 8. Abszolút konvergens sorok átrendezése

**9. Abszolút konvergens sorok szorzására vonatkozó tétel**

**10. Hatványsorok konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel**

**11. A Cauchy-Hadamard-tétel**

**12. Függvények határértékének egyértelműsége**

**13. A határértékre vonatkozó átviteli elv**

**14. Hatványsorok konvergenciája**

**15. Monoton függvények határértéke**