8. előadás
(2020. április 6.)

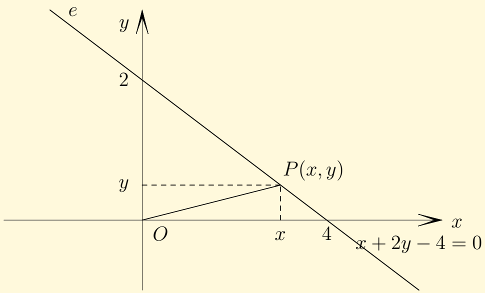
Feltételes szélsőértékek

($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre)

Motiváló példák

1. példa. *Pont és egyenes távolsága.*

Így is felfogható:



$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\min_{P \in e} \overline{OP} = ?$$

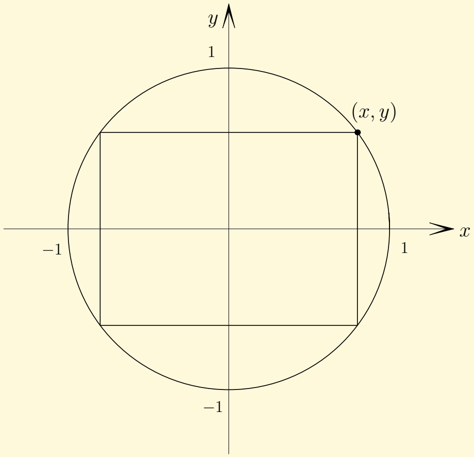
Feladat: Adott: $f(x,y) := x^2 + y^2 \ \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$g(x,y) := x + 2y - 4 \ \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

$$H_g := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g(x,y) = 0\right\} \quad \text{(az egyenes pontjai)}$$

Keressük az f függvény minimumát a H_g halmazon.

2. példa. *Határozzuk meg az egységsugarú körbe írt téglalapok között a maximális területű téglalapot.*



$$H_g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Feladat: Adott: $f(x,y) := 4xy \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \ \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

$$H_g := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big| \ g(x,y) = 0\big\} \quad \text{(a körvonal pontjai)}$$

Keressük az f függvény maximumát a H_g halmazon.

Elemi megoldás: $xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2} \Longrightarrow$ négyzet.

Általánosan

Feladat: Adott: • $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,

• $f : U \to \mathbb{R}$ (célfüggvény),

• $g : U \to \mathbb{R}$ (feltételfüggvény),

$$H_g := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g(x, y) = 0\right\} \neq \emptyset.$$

Keressük az f függvény szélsőértékeit a H_g halmazon, azaz határozzuk meg az $f_{|H_g}$ függvény szélsőértékeit.

Megjegyzés. „Jó esetben” a $H_g \subset \mathbb{R}^2$ halmaz egy síkbeli „görbe”.
Például, ha

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor a H_g halmaz az origó középpntú 1 sugarú körvonal.
Ha

$$g(x, y) := \big(x^2 + y^2\big)^2 - 2a^2\big(x^2 - y^2\big) \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor H_g a korábban már megemlített *Bernoulli-féle lemniszkáta.*

Definíció. Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és
$$a \in H_g := \{z \in U \mid g(z) = 0\} \neq \emptyset.$$
Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az a pontban

- **feltételes abszolút maximuma van**, ha
$$f(x) \leq f(a), \quad \forall\, a \in \mathcal{D}_f \cap H_g;$$
- **feltételes lokális maximuma van**, ha
$$\exists\, K(a) \subset U : \; f(x) \leq f(a), \qquad \forall\, x \in K(a) \cap H_g.$$

A **minimum**mal kapcsolatban hasonló fogalmakat kapunk, ha a fentiekben a $\leq$ egyenlőtlenség helyett $\geq$-t írunk.

A korábbiakkal összhangban használjuk $f(a)$-ra a *feltételes abszolút (lokális) maximum (minimum)*, illetve *szélsőérték*, továbbá a-ra a *feltételes abszolút (lokális) maximumhely (minimumhely)*, illetve *szélsőértékhely* elnevezést is.

Megjegyzés. A továbbiakban csak **lokális** szélsőértékekre fogalmazunk meg eredményeket.

1. megjegyzés. Az $f_{|H_g} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeire *nem alkalmazhatók* az előző előadáson megfogalmazott tételek. Azokban ui. mindig feltettük, hogy a vizsgált pont az értelmezési tartomány *belső pontja*. Könnyen látható azonban, hogy a H_g halmaznak egyetlen pontja *sem belső pont*.

2. megjegyzés. A feltételes szélsőértékek vizsgálatára alkalmazható módszer kitalálója *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) francia matematikus. Ezért a szóban forgó módszert *Lagrange-szorzók* (vagy *Lagrange-féle multiplikátorok*) *módszerének* nevezzük.

1. tétel. (Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.)

Tegyük fel, hogy

(a) $U \subset \mathbb{R}^2$ *nyílt halmaz és az* $f, g : U \to \mathbb{R}$ *függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az* U *halmazon;*

(b) *az* $(x_0, y_0) \in U$ *pontban az* f *függvénynek a* $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van;*

(c) $g'(x_0, y_0) = \big(\partial_1 g(x_0, y_0), \partial_2 g(x_0, y_0)\big) \neq \big(0, 0\big)$.

Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ *valós szám (ezt* ***Lagrange-szorzónak*** *szokás nevezni), hogy az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvénynek (x_0, y_0) *stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \big(\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0), \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)\big) = (0, 0).$$

A tétel alkalmazása:

1^o Képezzük az

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) \qquad \big((x,y)\in U\big)$$

Lagrange függvényt.

2^o Az x, y, λ ismeretlenekre megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{L}(x,y) &= \partial_x f(x,y) + \lambda \partial_x g(x,y) = 0, \\ \partial_y \mathcal{L}(x,y) &= \partial_y f(x,y) + \lambda \partial_y g(x,y) = 0, \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Az így kapott (x_0, y_0) pont(ok)ban *lehet(nek)* a feltételes lokális szélsőértékhelyek.

Megjegyzés. Az $\mathcal{L}'(x_0, y_0) = (0,0)$ csak *szükséges*, de *nem elégséges* feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.

Tétel. (A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.)
Tegyük fel, hogy

(a) $U \subset \mathbb{R}^2$ *nyílt halmaz és az* $f, g : U \to \mathbb{R}$ *függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az* U *halmazon;*

(b) *az* $(x_0, y_0) \in U$ *pontban a* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *számmal teljesül a szükséges feltétel.*

Tekintsük ezzel a λ_0 *számmal az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvényt. Legyen

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12}\mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22}\mathcal{L}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Ekkor,

ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* ***maximumhely****,*

ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* ***minimumhely****.*

1. megjegyzés. A fentiekben két változó és egy egyenlőségi feltétel mellett vizsgáltuk a feltételes szélsőérték-problémát. Az eredmények kiterjeszthetők arra az esetre is, amikor az f célfüggvény n-változós ($2 < n \in \mathbb{N}$), és ekkor az egyetlen $g = 0$ feltétel helyett több egyenlőségi feltételt is előírhatunk.

2. megjegyzés. A gyakorlat felvet számos olyan szélsőérték-problámát, amelyekben a változókra tett korlátozó feltételek *nem egyenlőségekkel*, hanem *egyenlőtlenségekkel* adottak. Az ilyen típusú problémákat *(lineáris) programozási* feladatoknak hívják. Vizsgálatukhoz nem az *analízis*, hanem a *lineáris algebra* eszköztárát lehet felhasználni.

3. megjegyzés. Most a feltételt megadó $g(x,y)=0$ egyenletről lesz szó. Tegyük fel, hogy ebből az egyenletből (például) az y változó kifejezhető az x változó *függvényeként*, azaz létezik olyan $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g\big(x,\varphi(x)\big)=0$ teljesül. A $H_g = \big\{(x,y) \mid g(x,y)=0\big\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz tehát a φ függvény garfikonja, ami „jó" esetben egy síkbeli „görbe".

Az f függvénynek a H_g halmaz pontjaiban felvett értékeit a $h(x) := f\big(x,\varphi(x)\big)$ valós-valós függvénnyel lehet kifejezni.

A kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételes szélsőérték-problémát a szóban forgó esetben a h egyváltozós függvény szélsőérték-problémájára lehet visszavezetni.

Az esetek „többségében" a $g(x,y)=0$ egyenletből nem lehet (például) az y változót kifejezni az x változó explicit függvényeként (vagy lehet, de csak nagyon bonyolult módon).

Vannak és fontosak azonban azok az eredmények, amelyek az egyenlet *megoldhatóságára*, vagyis a fentiekben megemlített φ függvénynek a *létezésére* adnak feltételeket, és φ explicit alakjáról semmit sem állítanak.

Implicit függvények

(Egyenletek megoldása)

Probléma. Adott: $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

$$H := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) = 0\right\} \neq \emptyset.$$

Kérdés:

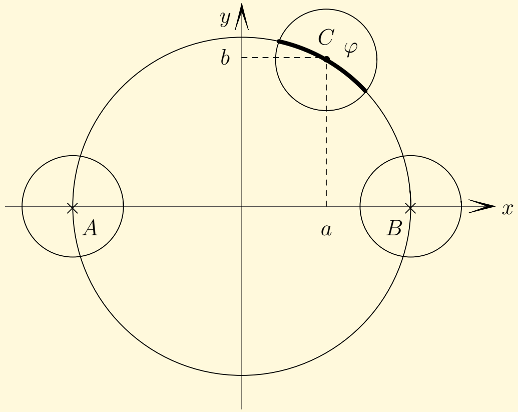
$$\left\{\begin{array}{c}\text{Megoldható-e az}\\ f(x,y) = 0\\ \text{egyenlet } y\text{-ra?}\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}\text{Van-e olyan } \varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}\text{:}\\ f(x,\varphi(x)) = 0?\end{array}\right\}$$

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy adott függvény. Ha létezik olyan $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f\big(x,\varphi(x)\big) = 0 \qquad (\forall\, x \in I),$$

akkor azt mondjuk, hogy a φ függvény az $f(x,y) = 0$ *implicit alakban van megadva*; másképpen fogalmazva: φ *megoldása* az $f(x,y) = 0$ implicit egyenletnek.

<u>A probléma vizsgálata:</u> Legyen $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$.



- Csak lokális tétel várható.
- C környezetében $\exists\,\varphi$.
- $A(-1,0)$ és $B(1,0)$ környezetében $\nexists\,\varphi$.

Mi jellemzi A-t és B-t?

<u>Észrevétel</u>: $\partial_2 f(x,y) = 2y \Longrightarrow \partial_2 f(A) = \partial_2 f(B) = 0$.

A többi C pontban (ahol $\exists\,\varphi$) $\partial_2 f(C) \neq 0$.

<u>Szerencse</u>: az általános esetben is ezen múlik a φ függvény létezése.

1. tétel. (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel.) *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Tegyük fel, hogy*

(a) f *folytonosan deriválható* Ω*-n,*

(b) *az* $(a,b) \in \Omega$ *pontban* $f(a,b) = 0$ *és* $\partial_2 f(a,b) \neq 0$*.*

Ekkor

1^o *van olyan* $K(a) =: U$ *és* $K(b) =: V$ *nyílt halmaz* $\mathbb{R}$*-ben, hogy minden* $x \in U$ *ponthoz létezik egyetlen* $\varphi(x) \in V$*, amelyre* $f(x, \varphi(x)) = 0$*;*

2^o *az így definiált* $\varphi : U \to V$ *függvény folytonosan deriválható* U*-n és*

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))} \qquad (x \in U).$$

1. megjegyzés. Világos, hogy $\varphi(a) = b$. A φ függvényt az $f(x, \varphi(x)) = 0$ $(x \in U)$ egyenlőség „implicit” (= nem kifejtett, burkolt, rejtett) módon definiálja. Innen származik a tétel neve.

2. megjegyzés. Másként: Ha $f \in C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$, akkor az $f(x,y) = 0$ egyenlet megoldható y-ra x függvényében minden olyan (a,b) pont valamely környezetében, amelyben $f(a,b) = 0$ és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$.

2. tétel. (Implicitfüggvény-tétel az általános esetben.) *Legyenek* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *nyílt halmazok* $(n_1, n_2 \in \mathbb{N})$ *és* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$. *Tegyük fel, hogy,*

(a) f *folytonosan deriválható az* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *halmazon,*

(b) *az* $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ *pontban* $f(a, b) = 0$ *és* $\det \partial_2 f(a, b) \neq 0$.

Ekkor

1^o *létezik* a*-nak olyan* $K(a) =: U_1 \subset \Omega_1$ *és* b*-nek olyan* $K(b) =: U_2 \subset \Omega_2$ *környezete, hogy minden* $x \in U_1$ *ponthoz létezik egyetlen* $\varphi(x) \in U_2$, *amelyre* $f(x, \varphi(x)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_2}$;

2^o *az így definiált* $\varphi : U_1 \to U_2$ *függvény folytonosan deriválható* U_1*-en és*

$$\varphi'(x) = -\left[\partial_2 f(x, \varphi(x))\right]^{-1} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in U_1).$$

1. megjegyzés. A tételben $\partial_2 f(a, b)$ jelöli az f függvény *második változócsoport szerinti parciális deriváltját* az (a, b) pontban. Ez az alábbi módon definiált $n_2 \times n_2$-típusú mátrix:

$$\partial_2 f(a, b) := \left(\mathbb{R}^{n_2} \supset \Omega_2 \ni y \mapsto f(a, y) \in \mathbb{R}^{n_2}\right)'_{y=b} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

A $\partial_1 f(a, b)$ derivált definíciója hasonló.

2. megjegyzés. A tételnek egyenletrendszerek *megoldhatóságával* kapcsolatos értelmezés is adható.

Legyen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$ és $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_2}$.

Tekintsük az $f(x, y) = 0$ egyenletrendszert, amelyet komponensekre bontott alakban így írhatunk fel:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0. \end{aligned}$$

Itt az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ számok az ismeretlenek és $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ a paraméterek. Feltesszük, hogy *ismerjük* ennek egy megoldását, azaz tudjuk, hogy az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_1})$ paraméter esetén $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n_2})$ egy megoldás, vagyis $f(a, b) = 0$. A fenti egyenletrendszerből szeretnénk kifejezni az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ ismeretleneket az $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ paraméterek függvényében. A 2. tétel szerint ez minden a-hoz közeli x esetén megtehető, ha f folytonosan deriválható és $\partial_2 f(a, b) \neq 0$; a megoldások egyértelműek és x-nek folytonosan deriválható függvényei.

Inverz függvények
($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú függvények)

Emlékeztető. Valós-valós függvények inverzének a létezésére, illetve az inverz függvény deriválhatóságára több eredményt ismertünk meg. Most a következő *lokális* jellegű állításra emlékeztetünk:

Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum) függvény folytonosan deriválható I-n és egy $a \in I$ pontban $f'(a) \neq 0$. Ekkor

1^o *f lokálisan invertálható, azaz $\exists\, K(a) =: U$ és $\exists\, K(f(a)) =: U$,*

$f_{|U} : U \to V$ függvény bijekció (következésképpen invertálható),

2^o *az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n és*

$$(*) \qquad \big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} \quad (y \in V).$$

Megjegyzés. Érdemes felidézni az állítás bizonyítását, valamint a $(*)$ képlet geometriai jelentését.

A többváltozós esetben hasonló állítás érvényes.

1. tétel. (Inverzfüggvény-tétel.) *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *Tegyük fel, hogy,*

(a) f *folytonosan deriválható* Ω*-n,*

(b) *az* $a \in \Omega$ *pontban* $\det f'(a) \neq 0$.

Ekkor

1^o f *lokálisan invertálható, azaz van olyan* $K(a) =: U$ *és* $K(f(a)) =: V$, *hogy az* $f_{|U} : U \to V$ *bijekció (következésképpen invertálható),*

2^o *az* f^{-1} *inverz függvény folytonosan deriválható* V*-n és*

$$(**) \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1} \qquad (y \in V).$$

1. megjegyzés. Az inverz függvény létezése a többváltozós esetben *minőségileg bonyolultabb* az egyváltozós esetnél; ez tehát egy olyan pont, ahol az egyváltozós analógia létezik ugyan, a immár nem elegendő.

2. megjegyzés. Az f függvény explicit alakjának az ismeretében f^{-1} helyettesítési értékeire általában nincs explicit képlet; viszont $(**)$ alapján a derivált helyettesítési értékei az f' helyettesítési értékeinek felhasználásával már kiszámíthatók.

3. megjegyzés. A tételnek egyenletrendszerek megoldásával kapcsolatos értelmezés is adható. Legyen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Jelölje $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az f függvény koordinátafüggvényeit: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tekintsük az

$$f(x) = y$$

egyenletet. A komponensekre bontott alakba írva kapjuk az n egyenletből álló

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned}$$

egyenletrendszert, amelyben az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokat paramétereknek tekintjük, és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az ismeretlenek.

Legyen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}_f$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) := f(a)$. Tegyük fel, hogy f folytonosan deriválható az a pont egy $k(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetében, továbbá teljesül (a könnyen ellenőrizhető) $\det f'(a) \neq 0$ feltétel. Ekkor a fenti tétel azt állítja, hogy az egyenletrendszer megoldható az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenekre az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ paraméterek függvényében, ha az x és az y pontokat a és b elegendően kicsiny környezetére korlátozzuk; a megoldás egyértelmű és folytonosan differenciálható.