8. gyakorlat

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények szélsőértékei

1. feladat. *(2 × 2-es mátrixokra vonatkozó Sylvester-féle kritérium.) Legyen*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Mutassa meg, hogy a

$$Q(h) := \langle Ah, h\rangle = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \quad \left(h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

kvadratikus alak, illetve az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix

- *pozitív definit* $\iff$ $a > 0$ *és* $\det A > 0$,
- *negatív definit* $\iff$ $a < 0$ *és* $\det A > 0$,
- *indefinit* $\iff$ $\det A < 0$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy Q pozitív definit, azaz

$$Q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \left(h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ h_1^2 + h_2^2 > 0\right).$$

Így $Q(1, 0) = a > 0$, továbbá

$$Q(h_1, 1) = ah_1^2 + 2bh_1 + c =: P_1(h_1) \quad \big(\forall\, h_1 \in \mathbb{R}\big).$$

Mivel P_1 valós együtthatós pozitív polinom, ezért nincs valós gyöke, következésképpen a $D = (2b)^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$ diszkriminánsa negatív, azaz $b^2 - 4ac < 0 \Longrightarrow \det A = ac - b^2 > 0$.

Fordítva: ha $a >$ és $\det A = ac - b^2 > 0$, akkor tetszőleges $0 \neq h_1 \in \mathbb{R}$ esetén $Q(h_1, 0) = ah_1^2 > 0$.

Ha $0 \neq h_2 \in \mathbb{R}$, akkor a $t := h_1/h_2$ $(t \in \mathbb{R})$ jelöléssel (nyilván bármelyik $t \in \mathbb{R}$ szám felírható ilyen alakban)

$$Q(h_1, h_2) = h_2^2 \cdot \left(a\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2b\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + c\right) = h_2^2\big(at^2 + 2bt + c\big) = h_2^2 \cdot P(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A fentiek szerint P diszkriminánsa negatív, a főegyütthatója pozitív, ezért $P(t) > 0$ $(\forall\, t \in \mathbb{R})$. Következésképpen

$$Q\big(h_1, h_2\big) = h_2^2 \cdot P\big(h_1/h_2\big) > 0 \quad \big((h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2,\ h_2 \neq 0\big).$$

Az előbbieket is figyelembe véve beláttuk, hogy

$$Q\big(h_1, h_2\big) > 0 \quad \left(h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ h_1^2 + h_2^2 > 0\right),$$

azaz Q pozitív definit.

Ugyanígy „intézhető” el a negatív definitségre vonatkozó $a < 0$ és $\det A > 0$ szükséges és elégséges feltétel.

Tegyük fel most azt, hogy $\det A = ac - b^2 < 0$. Ekkor a fenti P polinom diszkriminánsa (vagyis $4(b^2 - ac)$) pozitív. P-nek tehát két különböző valós gyöke van, következésképpen P (tehát a Q kvadratikus alak is) felvesz pozitív és negatív értéket is, ami azt jelenti, hogy Q indefinit.

A fenti gondolatmenethez hasonlóan az is igazolható, hogy ha a Q kvadratikus alak indefinit, akkor a $\det A = ac - b^2 < 0$ egyenlőtlenség teljesül. ■

2. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. Az f függvény kétszer deriválható $\mathbb{R}^2$-őn.

Elsőrendű szükséges feltétel: Mivel

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 3x^2 - 6x + 2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 2x + 2y & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = -x, \Longrightarrow x = 0 \text{ vagy } x = \frac{8}{3},$$

ezért az f függvény stacionárius pontjai, azaz a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0), \quad P_2(\tfrac{8}{3}, -\tfrac{8}{3}).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban: Mivel

$$\partial_{xx} f(x,y) = 6x - 6, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 2 = \partial_{yx} f(x,y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = 2,$$

ezért

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = 6x - 6, \quad D_2 = \det f''(x,y) = 12x - 16.$$

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D_2 = -16 < 0$. Az $f''(0,0)$ mátrix indefinit, ezért a $P_1(0,0)$ pontban az f függvénynek *nincs lokális szélsőértéke.*

A $P_2(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontban $f''\big(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\big) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $D_1 = 10 > 0$, $D_2 = 16 > 0$. Az $f''\big(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\big)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2\big(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\big)$ *lokális minimumhely.* ■

3. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. Az f függvény kétszer deriválható $\mathbb{R}^2$-őn.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 4x^3-2x-2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 4y^3-2x-2y & = & 0 \end{array}\right\} \implies x^3=y^3 \implies x=y.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 \implies x=0, \quad x=1 \ \text{ vagy } \ x=-1.$$

Az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0), \quad P_2(1,1), \quad P_3(-1,-1).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban: Mivel

$$\begin{array}{ll} \partial_{xx} f(x,y)=12x^2-2, & \partial_{xy} f(x,y)=-2, \\ \partial_{yx} f(x,y)=-2, & \partial_{yy} f(x,y)=12y^2-2, \end{array}$$

ezért

$$f''(x,y)=\begin{bmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{bmatrix},$$

$$D_1=12x^2-2, \quad D_2=\det f''(x,y).$$

<u>A $P_2(1,1)$ pontban</u> $f''(1,1)=\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$, $D_1=10>0$, $D_2=10^2-4>0$. Az $f''(1,1)$ mátrix pozitív definit, ezért <u>$P_2(1,1)$ *lokális minimumhely.*</u>

<u>A $P_3(-1,-1)$ pontban</u> $f''(-1,-1)=\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}=f''(1,1)$, ezért az f függvénynek <u>$P_3(-1,-1)$ is *lokális minimumhelye.*</u>

<u>A $P_1(0,0)$ pontban</u> $f''(0,0)=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ és $\det f''(0,0)=0$. Ebben a pontban Sylvester-kritérium, tehát a másodrendű elégséges feltétel nem alkalmazható. Egyedi vizsgálattal tudjuk csak eldönteni, hogy ez a pont vajon lokális szélsőértékhely-e.

Mivel $f(0,0)=0$, ezért f-nek a $(0,0)$ pontban pontosan akkor van lokális szélsőértéke, ha f az origó egy környezetében azonos előjelű. Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. *Vegyük észre*, hogy

$$f(x,y):=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2=x^4+y^4-(x+y)^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

és tekintsük f értékeit először az $y=-x$ egyenes mentén: $f(x,y)=f(x,-x)=2x^4$, ami pozitív minden $x\neq 0$ valós számra. Nézzük most a függvény értékeit az $y=0$ egyenes (vagyis az x-tengely) mentén: $f(x,0)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$; ez pedig negatív, ha $|x|<1$ és $x\neq 0$. Az f függvény tehát az origó tetszőleges kicsi környezetében felvesz negatív és pozitív értéket is, ezért ebben a pontban *nincs lokális szélsőértéke.* ■

4. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x,y) := xy(x^2+y^2-1) \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit a

$$H := \big\{(x,y) \;\big|\; x^2+y^2 \le 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

zárt körlapon.

Megoldás. A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz korlátos és zárt, továbbá az f polinomfüggvény folytonos a H halmazon. Ezért Weierstrass tétele szerint f-nek a H halmazon van legnagyobb és legkisebb értéke. Az abszolút szélsőértékhelyek vagy a körlap határán (ez az $x^2+y^2=1$ egyenletű körvonal), vagy pedig a H halmaz belsejében helyezkednek el.

Világos, hogy az f függvény értéke nulla a H halmaz határának minden pontjában. Mivel $(x,y)\in\operatorname{int}H$ (azaz $x^2+y^2<1$), $x>0$, $y<0$ esetén f pozitív, továbbá $x>0$ és $y>0$ esetén f negatív, ezért f abszolút szélsőértékhelyei szükségképpen H belsejében helyezkednek el, és az abszolút szélsőértékek nullától különbözőek.

Legyen $(x,y)\in\operatorname{int}H$ egy olyan pont, ahol f-nek abszolút szélsőértéke van. Ez a pont egyúttal lokális szélsőértékhely is. Az

$$f(x,y) := xy(x^2+y^2-1) = x^3y+xy^3-xy \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

egy polinomfüggvény, ezért $f\in D(\operatorname{int}H)$. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel szerint a szóban forgó helyen a parciális deriváltak 0-val egyenlőek:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= 3x^2y+y^3-y = y(3x^2+y^2-1)=0,\\ \partial_y f(x,y) &= x^3+3xy^2-x = x(x^2+3y^2-1)=0.\end{aligned}$$

Ha $y=0$, akkor a második egyenletből $x=0$ adódik (hiszen $|x|<1$ miatt $x^2-1\ne 0$). Az origóban a függvény értéke nulla, ezért a fentiek alapján a $(0,0)$ pont *nem* abszolút szélsőértékhely. Így $x\ne 0$, $y\ne 0$, tehát

$$\left.\begin{array}{r}3x^2+y^2-1=0\\ x^2+3y^2-1=0\end{array}\right\} \iff 3x^2+y^2-1=x^2+3y^2-1 \iff x^2=y^2 \iff$$

$$x^2=\frac14 \text{ és } y^2=\frac14 \iff x=\pm\frac12 \text{ és } y=\pm\frac12.$$

A lehetséges szélsőértékhelyek tehát az

$$\Big(\frac12,\frac12\Big),\quad \Big(\frac12,-\frac12\Big),\quad \Big(-\frac12,\frac12\Big),\quad \Big(-\frac12,-\frac12\Big)$$

pontok. Az itt felvett helyettesítési értékek:

$$f\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)=-\frac{1}{8},\quad f\Big(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{8},\quad f\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{8},\quad f\Big(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\Big)=-\frac{1}{8}.$$

A függvényértékeket összehasonlítva azt kaptuk, hogy a H halmazon az f függvény legnagyobb értéke $\frac{1}{8}$, és ezt az értéket az $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ pontokban veszi fel. Az abszolút minimumhelyek pedig az $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ pontok, és az abszolút minimum $-\frac{1}{8}$. ■

5. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x,y):=x^3-12x+y^3-3y \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek

(a) *a lokális szélsőértékhelyeit és a lokális szélsőértékeit,*

(b) *az abszolút szélsőértékhelyeit és az abszolút szélsőértékeit a*

$$H:=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le x\le 3,\quad -x\le y\le 2\big\}$$

halmazon.

Megoldás. (a) Az f függvény kétszer deriválható $\mathbb{R}^2$-őn.

Elsőrendű szükséges feltétel. Mivel

$$\left.\begin{array}{rcccl}\partial_x f(x,y) &=& 3x^2-12 &=& 0\\ \partial_y f(x,y) &=& 3y^2-3 &=& 0\end{array}\right\}\implies x=\pm 2 \ \text{ és } \ y=\pm 1,$$

ezért f stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(-2,-1),\quad P_2(-2,1),\quad P_3(2,-1),\quad P_4(2,1).$$

Másodrendű elégséges feltétel. Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban a

$$\partial_{xx}f(x,y)=6x,\quad \partial_{xy}f(x,y)=0=\partial_{yx}f(x,y),\quad \partial_{yy}f(x,y)=6y$$

képletek alapján

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & 0\\ 0 & 6y\end{pmatrix},$$

$$D_1=6x,\quad D_2=\det f''(x,y)=36xy.$$

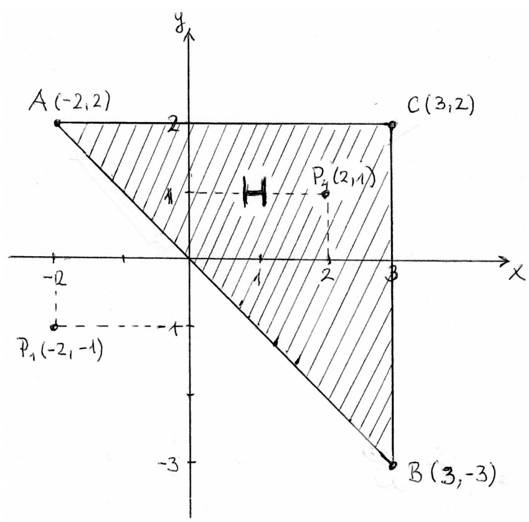
A $P_1(-2,-1)$ pontban $f''(-2,-1)=\begin{pmatrix}-12 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$, $\quad D_1=-12<0$, $D_2=72>0$
$\implies$ az $f''(-2,-1)$ mátrix negatív definit $\implies$
$P_1(-2,-1)$ lokális maximumhely, *$f(-2,-1)=18$ lokális maximum.*

A $P_2(-2,1)$ pontban $f''(-2,1) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad D_2 = -72 < 0 \quad \Longrightarrow$ az $f''(-2,1)$ mátrix indefinit $\quad \Longrightarrow$ a $P_2(-2,1)$ pontban *nincs lokális szélsőérték.*

A $P_3(2,-1)$ pontban $f''(2,-1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad D_2 = -72 < 0 \quad \Longrightarrow$ az $f''(2,-1)$ mátrix indefinit $\quad \Longrightarrow$ a $P_3(2,-1)$ pontban *nincs lokális szélsőérték.*

A $P_4(2,1)$ pontban $f''(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $D_1 = 12 > 0$, $D_2 = 72 > 0 \Longrightarrow$ az $f''(2,1)$ mátrix pozitív definit $\Longrightarrow$
$P_4(2,1)$ *lokális minimumhely*, $\;$ $f(2,1) = -18$ *lokális minimum.*

(b) Szemléltessük a H halmazt és a P_1, P_4 lokális szélsőértékhelyeket:



A H halmaz az $A(-2,2)$, $B(3,-3)$ és $C(3,2)$ csúcspontú korlátos és zárt háromszöglap. Az f függvény folytonos H-n, ezért Weierstrass tétele alapján a függvénynek a H-n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb érték.

Az abszolút szélsőértékhelyek vagy a H halmaz belső pontjaiban (ekkor azok egyúttal lokális szélsőértékhelyek is), vagy pedig a H halmaz határán lehetnek.

Mivel $P_1(-2,-1) \notin H$ és $P_4(2,1) \in \operatorname{int} H$ lokális minimumhely, ezért $P_4(2,1)$ lehet az f függvénynek (egy) abszolút minimumhelye. Az itt felvett függvényérték:

$$f(2,1) = -18.$$

Most megvizsgáljuk az f függvény H határán felvett helyettesítési értékeit. A H halmaz határa három szakaszra bontható.

Az AB szakaszon a $g_1(x) := f(x,-x) = -9x \ \big(x \in [-2,3]\big)$ függvény abszolút minimuma $g_1(3) = -27$, abszolút maximuma $g_1(-2) = 18$, ezért az f függvény az AB szakaszon a $B(3,-3)$, illetve az $A(-2,2)$ pontban veszi fel a legkisebb, illetve legnagyobb értékét, és

$$f(3,-3) = -27, \quad \text{illetve} \quad f(-2,2) = 18.$$

A BC szakaszon $f(3,y)=y^3-3y-9=: g_2(y)$ $\big(y\in[-3,2]\big)$. Mivel

$$g_2'(y)=3y^2-3=0 \implies y=\pm1;\quad g_2''(y)=6y \implies$$
$$\implies g_2(-1)=-7 \text{ lokális maximum},\quad g_2(1)=-11 \text{ lokális minimum},$$

továbbá $g_2(-3)=-27$ és $g_2(2)=-7$, ezért az f függvény a BC szakaszon a $B(3,-3)$, illetve a $(3,-1)$ és a $C(3,2)$ pontokban veszi fel a legkisebb, illetve legnagyobb értékét, és

$$\underset{\sim\sim\sim}{f(3,-3)=-27},\quad \text{illetve}\quad \underset{\sim\sim\sim}{f(3,-1)=f(3,2)=-7}.$$

Az AC szakaszon $f(x,2)=x^3-12x+2=: g_3(x)$ $\big(x\in[-2,3]\big)$. Mivel

$$g_3'(x)=3x^2-12=0 \implies x=\pm2;\quad g_3''(x)=6x \implies$$
$$\implies g_3(2)=-14 \text{ lokális minimum},$$

továbbá $g_3(-2)=18$ és $g_3(3)=-7$, ezért az f függvény a AC szakaszon a $(2,2)$, illetve az $A(-2,2)$ pontban veszi fel a legkisebb, illetve legnagyobb értékét, és

$$\underset{\sim\sim\sim}{f(2,2)=-14},\quad \text{illetve}\quad \underset{\sim\sim\sim}{f(-2,2)=18}.$$

Összefoglalva: A kapott értékeket összehasonlítva azt kapjuk, hogy a H halmazon az f függvény abszolút maximumhelye az $A(-2,2)$ pont és az abszolút maximuma $f(-2,2)=18$, abszolút minimumhelye a $B(3,-3)$ pont és az abszolút minimuma $f(3,-3)=-27$, azaz

$$\boxed{\min_{(x,y)\in H} f(x,y)=f(3,-3)=-27},\qquad \boxed{\max_{(x,y)\in H} f(x,y)=f(-2,2)=18}. \blacksquare$$