Numerikus módszerek 2B.

11–12. előadás: Numerikus integrálás

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. november 26 – december 3.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Feladat: az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Riemann integrál közelítő kiszámítása.

Kézenfekvő lenne a definícióval (alsó- és felső közelítő összegekkel vagy Riemann közelítő összeggel) számolni, azonban így túl sokat kellene számolnunk a pontosabb eredmény eléréséhez.
$\rightarrow$ Nem gazdaságos.

Alkalmazási területei a matematikában:

- Amikor a primitív függvény nem állítható elő zárt alakban.
- Az analitikus integrálás túl bonyolult lenne.
- Terület, térfogat, ívhossz számításnál.
- Differenciálegyeletek numerikus módszereinél a módszerek konstrukciójakor.

Példa: Számítsuk ki a következő integrálok értékét!

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?, \quad \int_0^\pi \cos(x^2)\,dx = ?$$

Ötlet:

Tekintsük az $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ felosztást. Közelítsük az $f(x)$ függvényt az interpolációs polinomjának Lagrange-alakjával, $L_n(x)$-el.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x)\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b \ell_k(x)\,dx}_{=:A_k} = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Megj.: A_k csak az alappontoktól függ, f-től nem.

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.
2. A kvadratúra formula *interpolációs típusú*, ha $A_k = \int_a^b \ell_k(x)\,dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$.

Tétel: Pontossági tétel

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \ \ \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad \Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x)\,dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$$

Megjegyzés.: A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ képletben $2(n+1)$ szabad paraméter van: A_k, x_k, így a legfeljebb n-edfokú polinomokra való pontosság kevésnek tűnik.

Kvadratúra formula típusok:

1. **Newton–Cotes típus:**
   Az $\{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ alappontok egyenletes felosztású pontok $[a; b]$-n.
2. **Csebisev típus:**
   $A_k \equiv A$ $(k = 0, \ldots, n)$.
3. **Gauss típus:**
   maximális $(2n+1)$ fokszámig pontos formulák.

Tartalomjegyzék

Newton–Cotes típusú kvadratúra formulák:

$$x_k = x_0 + kh$$

- **Zárt formulák** $(Z(n))$**:** a és b alappont

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ és } k = 0, \ldots, n, \text{ azaz } x_0 = a, x_n = b.$$

- **Nyílt formulák** $(Ny(n))$**:** a és b *nem* alappont

$$h = \frac{b-a}{n+2}, \quad k = 1, \ldots, n+1, \text{ azaz } x_0 = a + h, x_n = b - h.$$

A N-C formulák együtthatóit a definíció mellett más módon is meghatározhatjuk.
A P_n-re való pontosság az integrál linearitása miatt azonos az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ hatványfüggvényekre való pontossággal. Ebből A_k-ra LER-t írhatunk fel:

$$\int_a^b 1\, dx = b - a = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$$

$$\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$$

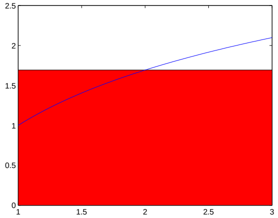
$$\ldots\ldots$$

$$\int_a^b x^n\, dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) = A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \ldots + A_n x_n^n$$

A kapott LER mátrixa a Vandermonde-mátrix transzponáltja.

Érintő formula (Ny(0))

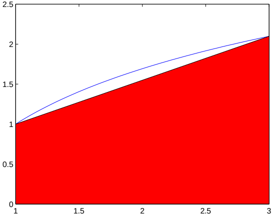
$$\int_a^b f \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$



Trapéz formula (Z(1)) és Simpson formula (Z(2))

Trapéz formula (Z(1))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =: T(f)$$



Simpson formula (Z(2))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) =: S(f)$$

Tétel (Emlékeztető): Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a;b]$ és $g \geq 0$, ekkor $\exists\, \xi \in (a;b)$:

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Tétel: Az érintő formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

Tétel: A trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Tétel: A Simpson formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Trapéz összetett formula

$[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát $(T(f))$ alkalmazunk.

Trapéz összetett formula (Trapéz szabály)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b) \right) =: T_m(f)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1$.

Tétel: A trapéz összetett formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

Legyen m páros és $[a; b]$-t m egyenlő részre osztjuk, majd az $I_k := [x_{2k-2}, x_{2k}]$, $(k = 1, \ldots, \frac{m}{2})$ részintervallumokra Simpson formulát $(S(f))$ alkalmazunk. Vagyis a belső felezőpontokat is megszámoztuk, így $\frac{m}{2}$ Simpson formulát használunk.

A Simpson összetett formula (Simpson szabály)

$$S_m(f) := \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

$$\int_a^b f \approx S_m(f)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat:
$1, 4, 2, 4, \ldots, 4, 2, 4, 1.$

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Megjegyzés:

- Az érintő formulából is készíthető összetett formula az előzőekhez hasonlóan.
- Ha $f \in C^2[a;b]$ illetve $f \in C^4[a;b]$, akkor $m \to \infty$ esetén

$$T_m(f) \to \int_a^b f, \text{ illetve } S_m(f) \to \int_a^b f$$

m^2 illetve m^4 nagyságrendben.