# Elsőrendű logika alapjai

## Gyakorlat

Logika

2020/2021 1. félév

# Elsőrendű formulák - egyfajtájú eset

Minden páros szám osztható 2-vel és létezik olyan szám, amelyiknek a rákövetkezője osztható 3-mal.

$\forall x(P(x) \supset Q(x, \bar{a})) \wedge \exists y Q(f(y), \bar{b})$

**Milyen elemekből állhat egy elsőrendű formula?**

| | |
|---|---|
| Műveleti jelek: | $\wedge, \vee, \supset, \neg$ |
| Kvantorok: | $\forall, \exists$ |
| Zárójelek: | $(,)$ |
| Individuum változók: | pl.: $x, y, z$ |

| | | |
|---|---|---|
| Predikátumok: | Logikai függvények, $U^n \to L$ | $P(x)$ - x páros szám, $Q(x, y)$ - x osztója y |
| Függvények: | Matematikai függvények, $U^n \to U$ | $f(x)$ - x rákövetkezője |
| Konstansok: | egy kijelölt univerzumbeli elem | $\bar{a} - 2$, $\bar{b} - 3$ |

# Formalizálás

1) Minden informatikus tud logikusan gondolkozni.
2) Aki tud logikusan gondolkozni, az okos.
3) Minden informatikus okos.

Univerzum: {emberek}
**Predikátumok:**

- I(x) - x informatikus
- L(x) - x tud logikusan gondolkozni
- O(x) - x okos

**Formalizált állítások:**
1) $\forall x(I(x) \supset L(x))$
2) $\forall x(L(x) \supset O(x))$
3) $\forall x(I(x) \supset O(x))$

# Formalizálás

1) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
2) Szarvasnak, a szarvasbogárnak kitines a szárnyfedője.
3) Egy rovarnak nincsen kitines szárnyfedője vagy bogár.
4) Szarvas (egy) bogár.

$U = \{\text{állatok}\}$
**Predikátumok:**
R(x) - x rovar
B(x) - x bogár
K(x) - x kitines a szárnyfedele
S(x) - x szarvasbogár
**Konstans:** $\bar{a}$ - Szarvas
**Formalizált állítások:**
1) $\forall x(B(x) \supset R(x)) \land \neg\forall x(R(x) \supset B(x))$
2) $S(\bar{a}) \land K(\bar{a})$
3) $\forall x(R(x) \supset (\neg K(x) \lor B(x)))$
4) $B(\bar{a})$

$U = \{\text{rovarok}\}$
**Predikátumok:**
B(x) - x bogár
K(x) - x kitines a szárnyfedele
S(x) - x szarvasbogár

**Konstans**: $\bar{a}$ - Szarvas
**Formalizált állítások:**
1) $\neg\forall x B(x)$
2) $S(\bar{a}) \land K(\bar{a})$
3) $\forall x(\neg K(x) \lor B(x))$
4) $B(\bar{a})$

# Formalizálás - Többfajtájú eset

1) Minden kutyának van gazdája.
2) Zokni egy kutya, akinek gazdája Norbi.
3) Van olyan kutya, amelyik házban és van amelyik kertben lakik.
4) Zokni kerti kutya.
5) Zokni szomszédjában lakó kutya házban lakik.

**Univerzum:** {emberek} ∪ {kutyák}

**Predikátumok:**

- K(x : kutya) - x kertben él
- H(x : kutya) - x házban él
- G(x : kutya, y : ember) - x gazdája y

**Konstansok:**

- a : kutya - Zokni
- b : ember - Norbi

**Függvények:**

- f(x : kutya) : kutya - x kutya szomszédja

**Formalizált állítások:**

1) $\forall x \exists y G(x, y)$
2) $G(a, b)$
3) $\exists x H(x) \wedge \exists x K(x)$
4) $K(a)$
5) $H(f(a))$

Mi lehet a gond ezekkel a jelölésekkel?

Hogyan lehetne megoldani ezt a problémát?

# Formalizálás - Többfajtájú eset - Gondolkodós

Adott a következő formula:

$$\forall x(P(x) \supset Q(f(x))) \wedge \exists x(Q(f(x)) \wedge R(x,a)) \wedge R(b,a)$$

Tegyük fel, hogy több fajtánk van: $\pi_1$ és $\pi_2$
$P : \pi_1 \rightarrow L$
$Q : \pi_2 \rightarrow L$
$R : \pi_1 \times \pi_2 \rightarrow L$
$f : \pi_1 \rightarrow \pi_2$
$a : \pi_2$
$b : \pi_1$

Próbáljunk meg jelentést adni a különböző szimbólumoknak és a formulának!

# Mi egy interpretáció?

Ha adott egy F formula, pl $\forall x(B(x) \supset R(f(x))) \wedge B(f(\bar{a})))$, akkor ennek mi lesz a jelentése?
Az, hogy milyen Univerzumon értelmezzük, milyen jelentést társítunk a predikátum-, a függvény- és konstans szimbólumokhoz!

- **1 eset:**
  $U_1 = \{fel, le\}$
  $|B(x)|^{I_1} = (x \text{ felkapcsolt})$; $|R(x)|^{I_1} = (x \text{ lekapcsolt})$;
  $|f(fel)|^{I_1} = le$, $|f(le)|^{I_1} = fel$; $|\bar{a}|^{I_1} = le$
- **Másik eset:**
  $U_2 =$ természetes számok
  $|B(x)|^{I_2} = x > 0$; $|R(x)|^{I_2} =$ x páros; $|f(x)|^{I_2} = x * 2$; $|\bar{a}|^{I_2} = 0$
- ...
- **Végtelen mennyiségű interpretáció lehet!**

# Mi ilyenkor a formula helyettesítési értéke?

$\forall x(B(x) \supset R(f(x))) \wedge B(f(\bar{a})))$

- **1 eset:**
  $U_1 = \{fel, le\}$
  $|B(x)|^{I_1} =$ ($x$ felkapcsolt); $|R(x)|^{I_1} =$ ($x$ lekapcsolt);
  $|f(fel)|^{I_1} = le$, $|f(le)|^{I_1} = fel$; $|\bar{a}|^{I_1} = le$

  Példa jelentés: Adott egy lámpa, ami fel vagy le van kapcsolva.
  Ha a lámpa fel van kapcsolva, akkor a következő kapcsolás után le lesz kapcsolva és a lekapcsolt állapotot a felkapcsolt állapot követi.

  A leírt interpretáció alapján a helyettesítési értéke a formulának: *igaz*.

- **Másik eset:**
  $U_2 =$ természetes számok
  $|B(x)|^{I_2} = x > 0$; $|R(x)|^{I_2} =$ x páros; $|f(x)|^{I_2} = x * 2$; $|\bar{a}|^{I_2} = 0$

  Formula jelentése ilyenkor: Ha egy szám nagyobb nullánál, akkor a kétszerese páros, és a nulla kétszerese nagyobb nullánál.

  A leírt interpretáció alapján a helyettesítési értéke a formulának: *hamis*.

# Értéktábla

**Felépítése:**

| szabad változók | prímkomponensek | formula |
|---|---|---|
| változókiértékelés | helyettesítési érték | helyettesítési érték |

**Mit ad meg?** Egy formula helyettesítési értékeit a különböző változó kiértékelések mellett, **1 interpretációban**.

**Szemantikus tulajdonságok:**

- **Kielégíthető** egy formula, ha van olyan interpretáció és változókiértékelés, ami kielégíti. Másképp: Van olyan értéktábla és annak sora, ahol igaz a formula.
- **Kielégíthetetlen** egy formula, ha nincs olyan interpretáció és változókiértékelés, ami kielégítené. Másképp: Minden értéktábla minden sorában hamis a helyettesítési értéke a formulának.
- **Logikai törvény** egy formula, ha minden interpretáció és változókiértékelés kielégíti. Másképp: Minden értéktábla minden sorában igaz a formula helyettesítési értéke.

# Változók

- Változók előfordulása:
  - kötött: Ha kvantor által kötve van.
  - szabad: Ha nincs kvantor által kötve.
- Változó típusa:
  - kötött: Ha minden előfordulása kötött.
  - szabad: Ha minden előfordulása szabad.
  - vegyes: Ha van kötött és szabad előfordulása is.

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x,y)) \supset \forall y Q(z,y)$$

- x: kötött
  - 1. előfordulása: kötött
  - 2. előfordulása: kötött
- y: vegyes
  - 1. ef.: szabad
  - 2. ef.: kötött
- z: szabad
  - 1. ef.: szabad

# Változóiban tiszta alak

Egy formula változóiban tiszta, ha egy változó csak szabad változóként, vagy csak 1 kvantor által van kötve.
Az átalakítás a kvantor által kötött változók átnevezésével lehetséges.

**Változó átnevezés:**

- $\forall x P(x) = \forall y P(y)$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall y (P(y) \wedge Q(y))$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(y)) \neq \forall y (P(y) \wedge Q(y))$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(y)) = \forall z (P(z) \wedge Q(y))$

**Változóiban tisztává alakítás:**

- $\forall x P(x) \supset \forall x Q(x) = \forall x P(x) \supset \forall y Q(y)$
- $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(x) = \forall y P(y) \wedge \exists z Q(z) \wedge P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge Q(x) = \forall y P(y) \wedge Q(x)$

# Prímkomponensek

Legkisebb részei a formulának, amelyhez "helyes" igazságérték társítható. Ezek egy része atomi formula, másik része kvantált formula.

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x,y)) \supset \forall y Q(z,y) \supset P(\bar{a}) \vee Q(w)$

  **prímkomponensek:** $\forall x(P(x) \wedge Q(x,y))$, $\forall y Q(z,y)$, $P(\bar{a})$, $Q(w)$

- $\forall z(P(x) \wedge \forall x(Q(x,y) \supset P(z))) \supset \forall y Q(z,y) \supset P(\bar{a})$

  **prímkomponensek:** $\forall z(P(x) \wedge \forall x(Q(x,y) \supset P(x)))$, $\forall y Q(z,y)$, $P(\bar{a})$

- $\forall z(\forall x(P(x) \wedge Q(x,y)) \supset \forall y Q(z,y) \supset P(\bar{a}) \vee Q(\bar{a}))$

  **prímkomponensek:** maga a formula

# Kvantált formulák értéke

**Univerzálisan kvantált formula** - egy tulajdonság az univerzum minden elemére teljesül. pl.: $\forall x P(x)$

**Egzisztenciálisan kvantált formula** - van olyan elem az univerzumban, amire a tulajdonság teljesül. pl.: $\exists x P(x)$

Legyen $U = \{0, 1, 2\}$ és $|P(x)|^I = \{0, 2\}$

Ekkor

$$|\forall x P(x)|^I = |P(0)|^I \wedge |P(1)|^I \wedge |P(2)|^I = i \wedge h \wedge i = h$$

$$|\exists x P(x)|^I = |P(0)|^I \vee |P(1)|^I \vee |P(2)|^I = i \vee h \vee i = i$$

# 1. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához: $\forall x \exists y P(x,y) \wedge Q(\bar{a}) \vee P(\bar{a}, z)$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0, 1\}, |P(x,y)|^I - (x < y), |Q(x)|^I - (x == 0), |\bar{a}|^I = 0$

| $z$ | $\forall x \exists y P(x,y)$ (1) | $Q(\bar{a})$ (2) | $P(\bar{a}, z)$ (3) | $1 \wedge 2 \vee 3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $h$ | $i$ | $h$ | $h$ |
| 1 | $h$ | $i$ | $i$ | $i$ |

$\forall x \exists y P(x,y) = \exists y P(0,y) \wedge \exists y P(1,y) =$
$(P(0,0) \vee P(0,1)) \wedge (P(1,0) \vee P(1,1)) = (h \vee i) \wedge (h \vee h) = h$

**Szemantikus tulajdonságok:**
Kielégíthető - az adott interpretációban volt változókiértékelés, ahol igaz.
Nem kielégíthetetlen
Nem logikai törvény - Volt olyan változókiértékelés, ahol hamis.

# 2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists x \exists y(P(x,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall x P(x,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{1,2,3\}, |P(x,y)|^I - x == y, |Q(x)|^I -$ x páros,
$|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I -$ x rákövetkezője univerzumon belül

Változóiban tiszta alak: $\exists z \exists y(P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

| $x$ | $\exists z \exists y(P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1) | $\forall v P(v,\bar{a})$ (2) | $P(f(x),\bar{b})$ (3) | $1 \supset (2 \wedge 3)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $i$ | | | |
| 2 | $i$ | | | |
| 3 | $i$ | | | |

$\exists z \exists y(P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$
$\exists y(P(1,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y(P(2,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y(P(3,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$
$[(P(1,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1,3) \wedge Q(f(\bar{a})))] \vee$
$[(P(2,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2,3) \wedge Q(f(\bar{a})))] \vee$
$[(P(3,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3,3) \wedge Q(f(\bar{a})))] = i$

# 2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists x \exists y (P(x,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall x P(x,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{1,2,3\}, |P(x,y)|^I - x == y, |Q(x)|^I -$ x páros,
$|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I -$ x rákövetkezője univerzumon belül

Változóiban tiszta alak: $\exists z \exists y (P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

| $x$ | $\exists z \exists y (P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1) | $\forall v P(v,\bar{a})$ (2) | $P(f(x),\bar{b})$ (3) | $1 \supset (2 \wedge 3)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $i$ | $h$ | $h$ | |
| 2 | $i$ | $h$ | $i$ | |
| 3 | $i$ | $h$ | $h$ | |

$\forall v P(v,\bar{a}) = P(1,\bar{a}) \wedge P(2,\bar{a}) \wedge P(3,\bar{a}) = i \wedge h \wedge h = h$

# 2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists x \exists y(P(x,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall x P(x,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{1,2,3\}, |P(x,y)|^I - x == y, |Q(x)|^I -$ x páros,
$|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I -$ x rákövetkezője univerzumon belül

Változóiban tiszta alak: $\exists z \exists y(P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

| $x$ | $\exists z \exists y(P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1) | $\forall v P(v,\bar{a})$ (2) | $P(f(x),\bar{b})$ (3) | $1 \supset (2 \wedge 3)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $i$ | $h$ | $h$ | $h$ |
| 2 | $i$ | $h$ | $i$ | $h$ |
| 3 | $i$ | $h$ | $h$ | $h$ |

**Szemantikus tulajdonságok:**
Lehet kielégíthető - az adott interpretációban mindenhol hamis, de lehet másik, ahol van igaz helyettesítés.
Lehet kielégíthetetlen - A többi interpretációban kérdéses
Nem logikai törvény - Volt olyan változókiértékelés, ahol hamis.

# 3. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists x \forall y P(f(x,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I = (x \geq y), |Q(x)|^I = (x \geq 0), |\bar{a}|^I = 0, |f(x)|^I$ - összeadás univerzumon belül.

Változóiban tiszta alak: $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

| $z$ | $x$ | $v$ | $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a})$ | $Q(z)$ | $P(z,x)$ | $P(v,\bar{a})$ | $1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

# 3. Feladat

Változóiban tiszta alak: $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I = (x \geq y), |Q(x)|^I = (x \geq 0), |\bar{a}|^I = 0, |f(x,y)|^I$ - összeadás univerzumon belül.

| $z$ | $x$ | $v$ | $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a})$ | $Q(z)$ | $P(z,x)$ | $P(v,\bar{a})$ | $1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | i | i | i | i | i |
| 0 | 0 | 1 | i | i | i | i | i |
| 0 | 1 | 0 | i | i | h | i | i |
| 1 | 0 | 0 | i | i | i | i | i |
| 0 | 1 | 1 | i | i | h | i | i |
| 1 | 0 | 1 | i | i | i | i | i |
| 1 | 1 | 0 | i | i | i | i | i |
| 1 | 1 | 1 | i | i | i | i | i |

# 3. Feladat

Változóiban tiszta alak: $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I = (x \geq y), |Q(x)|^I = (x \geq 0), |\bar{a}|^I = 0, |f(x,y)|^I$ - összeadás univerzumon belül.

| $z$ | $x$ | $v$ | $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a})$ | $Q(z)$ | $P(z,x)$ | $P(v,\bar{a})$ | $1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | i | i | i | i | i |
| 0 | 0 | 1 | i | i | i | i | i |
| 0 | 1 | 0 | i | i | h | i | i |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 1 | 1 | 1 | i | i | i | i | i |

**Szemantikus tulajdonságok:**
Kielégíthető - Van olyan interpretáció és változókiértékelés, ahol igaz.
Nem kielégíthetetlen
Lehet logikai törvény - Attól függ, hogy a többi interpretációban milyen helyettesítési értékek vannak.

# Tautológia és logikai törvény

**Logikai törvény:** A formula minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén igaz.

**Tautológia:** A prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén a formula helyettesítési értéke igaz.
Ha valami tautológia, akkor biztos, hogy logikai törvény.

$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \supset \forall x P(x)$ - **biztos, hogy logikai törvény**

Prímkomponensek: $\forall x P(x)$ és $\forall x R(x)$ legyenek $A$ és $B$

| $\forall x P(x)$ | $\forall x R(x)$ | $\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \supset \forall x P(x)$ |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $(A \wedge B \supset A)$ |
| i | i | i |
| i | h | i |
| h | i | i |
| h | h | i |

**A tábla alapján tautológia.**

# Tautológia és logikai törvény

**Logikai törvény:** A formula minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén igaz.

**Tautológia:** A prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén a formula helyettesítési értéke igaz.

$\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall x P(x)$ - **biztos, hogy logikai törvény**

Prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ és $\forall x P(x)$ legyenek $A$ és $B$

| $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ | $\forall x P(x)$ | $\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall x P(x)$ |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $(A \supset B)$ |
| i | i | i |
| i | h | h |
| h | i | i |
| h | h | i |

**A tábla alapján nem tautológia.**

# Tautológia - Logikai törvény

Nézzük meg, hogy a következő formulák tautológiák-e!

- $P(x,y) \vee \neg Q(x) \supset \exists x Q(x) \vee (\exists x Q(x) \supset P(x,y) \vee \neg Q(x))$
- $P(x,y) \supset \neg Q(x) \wedge Q(x,y) \supset P(x,y)$
- $(\exists y P(a,y) \supset \neg \forall x Q(x)) \vee \exists z P(a,z)$
- $(\exists y P(a,y) \supset \neg \forall x Q(x)) \vee \exists y P(a,y)$

**Egy plusz diasor canvasben elérhető az anyaghoz!**