# Bizonyítással kért tételek az 1. zh-n

## 1. A szuprémum elv

**Tétel:** Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, felülről korlátos. Ekkor $A$-nak van legkisebb felső korlátja, azaz $\exists \min B$

**Bizonyítás:** Világos, hogy $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq K \Rightarrow$ (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq K$ $(a \in A, K \in B)$ Vagyis, $\forall a \in A : a \leq \xi \rightarrow \xi$ felső korlátja $A$ -nak $\Rightarrow \xi \in B$ Ugyanakkor: $\forall K \in B : \xi \leq K \Rightarrow \xi$ a legkisebb felső korlát $\Rightarrow \xi = \min B$

## 2. Az Archimedes-tétel

**Tétel:** $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in N : a \cdot n > b$

**Bizonyítás:**

1. Ha $b \leq 0$, akkor világos, hogy $b \leq 0 < a = a \cdot 1$, ha $n := 1 \Rightarrow n = 1$ jó választás
2. Feltehető, hogy $b > 0$ Áll: $\forall b > 0, \forall a > 0, \exists n \in N : a \cdot n > b$
   Indirekt: $\exists b > 0, \exists a > 0, \forall n \in N : a \cdot n \leq b$

   $A := \{a \cdot n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow b$ egy felső korlátja $A$-nak $\Rightarrow \xi = supA$
   $\Rightarrow \xi - a$ már nem felső korlát, azaz $\exists n_0 \in N : a \cdot n_0 > \xi$
   $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot n_0 + a > \xi \Leftrightarrow a(n_0 + 1) > \xi$

   Mivel $n_0 \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{N}$ induktív $\Rightarrow n_0 + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow a(n_0 + 1) \in A \Rightarrow \xi$ nem felső korlát

   Ellentmondás $\Rightarrow\Leftarrow$

## 3. A Cantor-féle közösrész-tétel

**Tétel:** Legyen $[a_n, b_n]$ korlátos és zárt intervallum, melyre: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$

Ekkor: $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [q_n, b_n] \neq \emptyset$

**Bizonyítás:** $A := \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ $B := \{b_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

Ekkor: $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ Ha $n \leq m : q_n \leq a_m \leq b_m$ Ha $m < n : a_n \leq b_n \leq b_m$

$\Rightarrow$ (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_m$ Spec: $n = m$, ekkor:
$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_n \Rightarrow \xi \in [a_n, b_n]\ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \xi \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

## 4. Minden sorozatnak van monoton részsorozata

**Tétel:** Minden sorozatnak van monoton részsorozata

**Bizonyítás:**

1. A sorozatnak végtelen sok csúcsa van

   $\exists a_{n_0}$ csúcs $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : a_{n_0} \geq a_n \Rightarrow \exists n_1 > n_0$ és $a_{n_1}$ csúcs
   $\Rightarrow a_{n_0} \geq q_{n_1} \Rightarrow \forall n \geq n_1 : a_{n_1} \geq a_n \Rightarrow \exists n_2 > n_1$ és $a_{n_2}$ csúcs
   $\Rightarrow a_{n_1} \geq q_{n_2}$

   $\Rightarrow \exists a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots$
2. A sorozatnak véges sok csúcsa van

   $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n$ nem csúcs Legyen $n_0 = N \Rightarrow a_{n_0}$ nem csúcs
   $\Rightarrow \Rightarrow \exists n_1 \geq n_0 : a_{n_0} < a_{n_1} \Rightarrow a_{n_1}$ nem csúcs $\Rightarrow$

   $\Rightarrow n_2 \geq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2} \ldots$

   $\exists a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots$

## 5. Konvergens sorozat határértéke egyértelmű

**Tétel:** Az $(a_n)$ konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

**Bizonyítás:** Indirekt, Tfh: $\exists A_1, A_2, A_1 \neq A_2$ határértékek
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \epsilon$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \epsilon$

Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2) : \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - A_1| < \epsilon$
$|a_n - A_2| < \epsilon$

Legyen $\epsilon < \dfrac{|A_1 - A_2|}{2} \Rightarrow$
$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_n + a_n - A_2| \leq |A_1 - a_n| + |A_n - A_2| < 2\epsilon < |A_1 - A_2|$

Ellentmondás, $|A_1 - A_2| \not< |A_1 - A_2|$

## 6. A konvergencia és a korlátosság kapcsolata

**Tétel:** Ha $a_n$ konvergens, akkor korlátos.

**Bizonyítás:** Legyen $\lim a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \epsilon = 1$-re is
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < 1$
$\Rightarrow |a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow |a_n| \leq max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0 - 1}|, |a_{n_0}|, a + |A|), \ \ (n \in \mathbb{N})$

## 7. Műveletek nullsorozatokkal

**Tétel:** Legyen $(a_n), (b_n)$ nullsorozat. Ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ is nullsorozat.
2. Ha $(c_n)$ korlátos, akkor $(a_n \cdot c_n)$ is nullsorozat.
3. $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.

**Bizonyítás:**

1. $(a_n) nullsor \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$
   $(b_n) nullsor \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n| < \frac{\epsilon}{2}$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = max(n_1, n_2), \forall n \geq n_0 : \Rightarrow$ $(a_n + b_n)$ nullsor
   $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$
2. $(c_n)$ korlátos $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n : |c_n| \leq K$ $(a_n)$ nullsor
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| < \frac{\epsilon}{K}$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :$
   $|a_n \cdot c_n| < \frac{\epsilon}{K} \cdot K = \epsilon$
3. $(b_n)$ nullsor $\Rightarrow$ $(b_n)$ konvergens $\Rightarrow$ $(b_n)$ korlátos $(a_n)$ nullsor
   $\overset{2. miatt}{\Rightarrow}$ $(a_n \cdot c_n)$ nullsor

## 8. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

**Tétel:** Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$. Ekkor: $(a_n \cdot b_n)$ konvergens és $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

**Bizonyítás:**
$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |a_n b_n - A \cdot b_n + A \cdot b_n - AB| \leq$

$$\leq |a_n b_n - A b_n| + |A b_n - AB| = \underset{nullsor}{\underset{nullsor}{\underset{korlátos}{\underset{konvergens}{|b_n|}} \cdot \underset{nullsor}{|a_n - A|}} + \underset{nullsor}{\underset{korlátos}{|A|} \cdot \underset{nullsor}{|b_n - B|}}}$$

## 9. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel

**Tétel:** Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens, $b_n \neq 0$ és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$ és $B \neq 0$. Ekkor: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergens és $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$

**Bizonyítás:** $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - A b_n}{b_n B}\right| = \frac{|a_n B - AB + AB - A b_n|}{|b_n B|} \leq$

$$\leq \underset{nullsor}{\underset{korlátos}{\frac{|B|}{|b_n||B|}} \cdot \underset{nullsor}{|a_n - A|} + \underset{korlátos}{\frac{|A|}{|b_n||B|}} \cdot \underset{nullsor}{|b_n - B|}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) nullsor \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$

## 10. A közrefogási elv

**Tétel:** Tfh: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$ Ha $\lim a_n = \lim c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n$

**Bizonyítás:** $\lim a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$

1. $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2, \forall n \geq n_2 : A - \epsilon < c_n < A + \epsilon$

   Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2, N) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : A - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \epsilon$
   $\Rightarrow \lim b_n = A$
2. $A = \infty : lima_n = \infty \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : a_n > P$ De
   $b_n \geq a_n, \forall n \geq N \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim b_n = \infty$
   $\forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 = \max(n_1, N), \forall n \geq n_0 : b_n \geq a_n \geq P$

## 11. Monoton növő sorozatok határértéke (véges és végtelen eset)

**Tétel:**

1. Ha $(a_n)$ monoton nő és korlátos, akkor konvergens és $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
2. Ha $(a_n)$ mon nő és nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$

**Bizonyítás:**

1. $(a_n)$ korlátos $\Rightarrow \exists \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty \Rightarrow a_n \leq \xi, \forall n$ és
   $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq \xi \Rightarrow$ $= |a - \xi| < \epsilon$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi$
   $\Rightarrow \lim a_n = \xi$

   $(a_n)$ nem korlátos $\Rightarrow$ $(a_n)$ felülről nem korlátos
   $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n > P \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n_0} > P \Rightarrow$
   $\Rightarrow \lim a_n = \infty$

## 12. A Cauchy-féle konvergencia kritérium sorozatokra

## 13. A geometriai sorozat határértékére vonatkozó tétel

## 14. Az $(\sqrt[n]{a})$ és az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat határértéke

**Tétel:** $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, : \lim(\sqrt[n]{a}) = 1$

**Bizonyítás:** Ha $a = 1$✓ Tfh: $a > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{a} > 1$
$\Rightarrow \exists h_n > 0 : \sqrt[n]{a} = 1 + h_n$
$\Rightarrow a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n \leq \dfrac{a-1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim(h_n) = 0$
$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(1 + h_n) = \lim(1) + \underbrace{\lim(h_n)}_{nullsor} = 1$✓ Tfh: $0 < a < 1$, akkor
$\dfrac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}) \to \dfrac{1}{1} = 1$✓

## 15. Pozitív szám $m$-edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével