Analízis1ABC, 1. zárthelyi dolgozat , 2017.03.31.

Megoldások

1. Adott az $A := \left\{ \frac{5x-1}{2x-7} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [4;+\infty) \right\}$ halmaz. Határozza meg $supA$, $infA$, $minA$, $maxA$–t ha léteznek és állításait bizonyítsa is be.

Megoldás :

A A halmaz elemei a következő alakra hozhatóak :

$$\frac{5x-1}{2x-7} = \underline{\frac{5}{2} + \frac{33}{4x-14}}.$$

A fenti alakból leolvasható, hogy ha $x \in [4;+\infty)$, akkor $\frac{33}{4x-14} > 0$, így a halmaz minden elemére igaz, hogy :

$$\frac{5}{2} + \frac{33}{4x-14} > \frac{5}{2} \qquad (\forall x \in [4;+\infty)) \qquad (1)$$

vagyis $\frac{5}{2}$ az A–nak egy alsó korlátja.

Belátjuk, hogy ez egyben a legnagyobb alsó korlát is. Ehhez elég már csak azt megmutatnunk, hogy :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, a \in A : \;\; a < \frac{5}{2} + \varepsilon.$$

Rögzítsünk egy pozitív ε számot és keresünk olyan alkalmas $x_0 \in [4;+\infty)$ valós számot, amelyre :

$$a := \frac{5}{2} + \frac{33}{4x_0 - 14} < \frac{5}{2} + \varepsilon \iff 4x_0 - 14 > \frac{33}{\varepsilon} \iff x_0 > \frac{33}{4\varepsilon} + \frac{7}{2}.$$

Ilyen például $x_0 := \frac{33}{4\varepsilon} + 4 \in [4;+\infty)$. Ezzel beláttuk, hogy $\underline{infA = \frac{5}{2}}$.

A fenti (1) egyenlőtlenség alapján világos, hogy a kapott alsó határ $\frac{5}{2} \notin A$ ezért nincs a halmazban legkisebb elem.

Mivel A elemei (1) alakúak, ezért látható, hogy ez akkor a legnagyobb, amikor a második tört a legnagyobb, azaz ennek nevezője a legkisebb. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = 4$. Formálisan :

$$\forall\, x \in [4;+\infty) \Rightarrow \;\; 4x - 14 \geq 2 \Rightarrow \;\; \frac{5}{2} + \frac{33}{4x-14} \leq \frac{5}{2} + \frac{33}{2} = 19 \in A.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\underline{maxA = 19}$ és ez egyben a legkisebb felső korlát is. Tehát $\underline{supA = 19}$.

2. Adott az $f(x) := \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \in [0;+\infty))$ függvény. Igazolja, hogy f invertáható és adja meg a $D_{f^{-1}}; R_{f^{-1}}$ halmazokat és $x \in D_{f^{-1}}$ esetén $f^{-1}(x)$ – et.

Megoldás : Az invertálhatóság definíciójából kiindulva tegyük fel, hogy $x, t \in [0;+\infty)$ és $f(x) = f(t)$. Belátjuk, hogy ekkor $x = t$, ugyanis :

$$f(x) = f(t) \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{x}{1+x}} = \sqrt{\frac{t}{1+t}} \;\Big|()^2 \;\; \Longrightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{t}{1+t} \Longrightarrow x + xt = t + xt \Longrightarrow x = t.$$

Tehát f invertálható.

Határozzuk meg az f értékkészletét :

$$R_f = \left\{ f(x) \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in D_f \right\} = \left\{ y = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [0;+\infty) \right\}.$$

Vegyük észre, hogy ha $x \in [0;+\infty)$, akkor :

$$0 \leq y = \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} < 1,$$

tehát $R_f \subset [0;1)$ és fordítva, ha most $y \in [0;1)$ tetszőlegesen rögzített érték, akkor belátjuk, hogy van olyan $x \geq 0$, melyre $y = f(x)$ és így $y \in R_f$ adódik.

$$y = \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{1-y^2} - 1 \in [0;+\infty).$$

Ezek alapján $[0;1) \subset R_f$ és

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0;1) \quad \wedge \quad R_{f^{-1}} = D_f = [0;+\infty);$$

illetve

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1 \quad (x \in [0;1)).$$

3. Határozza meg az $f \circ g$ összetett függvényt és az $(f \circ g)^{-1}$ inverz függvényt (ha léteznek) , ahol :

$$f(x) := \frac{1}{(x+3)\cdot\sqrt{2-x}} \quad (x \in (-\infty;2) \setminus \{-3\}) \quad \wedge \quad g(x) := |x-2| - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás : Meg kell adnunk az $f \circ g$ függvény értelmezési tartományát, majd itteni x számokhoz az $(f \circ g)(x)$ értéket :

$$D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g \;\middle|\; g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x-2| - 3 \in (-\infty;2) \setminus \{-3\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 \neq |x-2| < 5\right\} = (-3;7) \setminus \{2\};$$

illetve :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{(g(x)+3)\cdot\sqrt{2-g(x)}} = \frac{1}{(|x-2|-3+3)\cdot\sqrt{2-(|x-2|-3)}} =$$

$$= \frac{1}{|x-2|\cdot\sqrt{5-|x-2|}} \quad (x \in (-3;7) \setminus \{2\}).$$

Vegyük észre, hogy

$$(f \circ g)(1) = \frac{1}{2} = (f \circ g)(3) \quad \wedge \quad 1 \neq 3 \in D_{f\circ g} \Longrightarrow$$

az $f \circ g$ függvény **nem invertálható.**

4. Határozza meg a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^2$ határértéket és állítását igazolja a *definíció* segítségével.

Megoldás :

Legyen $x_n := \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^2 = \dfrac{n^2-2n+1}{4n^2+4n+1}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$. Ez így $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ típus, ezért emeljük ki a domináns tagokat (a számlálóban is és a nevezőben is n^2-et), majd egyszerűsítsünk velük :

$$x_n = \frac{n^2-2n+1}{4n^2+4n+1} = \frac{1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{4 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad (n \to \infty).$$

A definíció szerinti bizonyításhoz legyen $A := \dfrac{1}{4}$ a határérték és rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Becsüljük meg a sorozat valamely tagjának eltérését a határértéktől az alábbi módon :

$$|x_n - A| = \left|\frac{n^2-2n+1}{4n^2+4n+1} - \frac{1}{4}\right| = \frac{|-12n+3|}{4(4n^2+4n+1)} \leq (\triangle) \leq$$

$$\leq \frac{|-12n|+3}{4(4n^2+4n+1)} = \frac{12n+3}{4(4n^2+4n+1)} \leq (NRF) \leq \frac{15n}{16n^2} = \frac{15}{16n} < \varepsilon$$

A fenti becslések teljesülnek minden olyan $n \in \mathbb{N}-$re, amelyre $n \geq 1$ és $n > \dfrac{15}{16\varepsilon}$.

Itt $(\triangle)$ a háromszög egyenlőtlenséget jelenti, (NRF) pedig a törtekre vonatkozó nagyságrendőrző felső becslést.

Összefoglalva a fentieket :

$$\exists\, A = \frac{1}{4}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 := \left[\frac{15}{16\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N} : \forall\, n > n_0, n \in \mathbb{N} : |x_n - A| = \left|x_n - \frac{1}{4}\right| < \frac{15}{16n} < \frac{15}{16n_0} < \varepsilon$$

tehát a sorozat konvergens és határértéke $\dfrac{1}{4}$.

5. Számítsa ki a következő határértékeket :

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+2^{2n}}-n}{2^n+3};\qquad b)\ \lim_{n\to+\infty} n^k\cdot(\sqrt{n^2+7n+3}-n)\quad (k\in\mathbb{N}).$$

Megoldás :

$$\text{a)}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+2^{2n}}-n}{2^n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2^{2n}}-n)\cdot(\sqrt{n^2+2^{2n}}+n)}{(2^n+3)\cdot(\sqrt{n^2+2^{2n}}+n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n}{(2^n+3)\cdot(\sqrt{n^2+2^{2n}}+n)}=\frac{+\infty}{+\infty}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n}{4^n\cdot\left(1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}=$$

$$=\frac{1}{1}=1.$$

Itt használtuk az alábbi nevezetes határértékeket továbbá a határértékek és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (összeg, szorzat, hányados határérétéke a határértékek összege, szorzata, hányadosa ha a műveletek "értelmezhetőek", illetve a gyöksorozat határértéke a határérték gyöke).

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}(q)^n=0;\quad (q=1/2\in(-1;1));$$

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(n^k\cdot q^n\right)=0;\quad (k=2;q=1/4\in(-1;1));$$

$$\lim_{n\to+\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(n^k\cdot q^n\right)=0;\quad (k=1;q=1/2\in(-1;1)).$$

$$\text{b)}\quad L:=\lim_{n\to+\infty}n^k\cdot(\sqrt{n^2+7n+3}-n)=\lim_{n\to+\infty}n^k\cdot\frac{7n+3}{\sqrt{n^2+7n+3}+n}=\lim_{n\to+\infty}n^k\cdot\frac{n\cdot\left(7+\frac{3}{n}\right)}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(n^k)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(7+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{7}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}(n^k)=\begin{cases}\frac{7}{2}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}(1)=\frac{7}{2}, & \text{ha}\quad \text{k=0};\\ \frac{7}{2}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}(n^k)=+\infty, & \text{ha}\quad 1\le k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Megjegyzés : Itt is használtuk az említett tételeket a határértékek és műveletek kapcsolatát illetően.