Numerikus módszerek 1. **2. ZH megoldása** **2019. május 14.**

Programtervező informatikus Bsc szak

1. Nézzük a mátrixnorma tulajdonságait:

$\|\mathbf{A}\|_m \geq 0$

$\|\mathbf{A}\|_m = n \cdot \max_{i,j=1}^n |a_{ij}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i,j: \;\; a_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}.$

$\|\lambda\mathbf{A}\|_m = n \cdot \max_{i,j=1}^n |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\|_m.$

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|_m = n \cdot \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}| \leq n \cdot \max_{i,j=1}^{n} (|a_{ij}|+|b_{ij}|) \leq n \cdot \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| + n \cdot \max_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| = \|\mathbf{A}\|_m + \|\mathbf{B}\|_m$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\|_m &= n \cdot \max_{i,j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq n \cdot \max_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leq n \cdot \max_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\max_{p,q=1}^{n} |a_{pq}|\right) |b_{kj}| \leq \\ &\leq n \cdot \max_{p,q=1}^{n} |a_{pq}| \cdot \max_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| \leq n \cdot \max_{p,q=1}^{n} |a_{pq}| \cdot n \cdot \max_{k,j=1}^{n} |b_{kj}| = \|\mathbf{A}\|_m \cdot \|\mathbf{B}\|_m\end{aligned}$$

(4 pont)

Az illeszkedés bizonyításához a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget alkalmazzuk.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{Ax}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \cdot n^2 \cdot \max_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|\mathbf{A}\|_m^2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2.\end{aligned}$$

Innen $\|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_m \cdot \|\mathbf{x}\|_2$. (2 pont)

2. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

A mátrix szimmetriája miatt az 1-es és ∞ kondíciószám megegyezik.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 \quad \Rightarrow \quad cond_1(\mathbf{A}) = cond_\infty(\mathbf{A}) = 3$$

(2 pont)

Az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, a 2-es kondíciószámhoz számítsuk ki a sajátértékeit.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2-1] = \\ &= (2-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+3] = 0\end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1.$$

$$cond_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{3}{1} = 3$$

(4 pont)

3. a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\ &= -\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk.

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns tulajdonságára hivatkozhatunk.
(4 pont)

b) Az iteráció hibabecslése (1 pont)

$$\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}}\cdot\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty$$

c) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$-ból indulva. A Jacobi-iteráció vektoros alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\cdot\mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)}\cdot\mathbf{x_k} + \mathbf{c}_{J(1)},$$

ahol

$$\mathbf{B}_{J(1)} = \begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{D^{-1}b} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B}_{J(1)}\cdot\mathbf{0} + \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{c}_{J(1)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}.$$

(2 pont)

A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:

$$\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)}-\mathbf{0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)}\|_\infty = 1.$$

$$\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}}\cdot\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 2\cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \le 10^{-3}$$

$$1000 \le 2^{k-1} \quad\Rightarrow\quad k \ge 11$$

(3 pont)

4. a) A konvergenciát a tanult konvergencia tételekre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns vagy szimmetrikus és pozitív definit vagy tridiagonális tulajdonságára hivatkozhatunk. Ha kiszámoljuk az átmenetmátrixot

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\ &= -\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

a konvergencia elégséges feltételét elegendő megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz.
(3 pont)

b) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$-ból indulva. A Gauss–Seidel-iteráció koordinátás alakja

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1-1) = 0 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(-1 - x_1^{(1)}\right) = \frac{1}{2} \cdot (-1-0) = -\frac{1}{2} \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1. \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3 pont)

5. a) A Richardson-iteráció tanult konvergencia tételét használjuk a megoldáshoz.
A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. Ahol

$$0 < m = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = M$$

az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.
Látjuk, hogy a feladat megoldásához az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit ismernünk kell.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] - (2-\lambda) = \\ &= (2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 2] = 0 \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Nagyság szerinti sorrendbe rendezve:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}.$$

A tételben szereplő jelöléseket használva (4 pont)

$$m = 2 - \sqrt{2}, \quad M = 2 + \sqrt{2}.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{2+\sqrt{2}}) = (0; 2-\sqrt{2})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra.

(2 pont)

b) Az optimális paraméter a tétel szerint

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ezen paraméter mellett az átmenetmátrix spektrálsugara a tétel állítása szerint

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel $\mathbf{B_{p_0}}$ szimmetrikus, ezért

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \|\mathbf{B_{p_0}}\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = q$$

a kontrakciós együttható a 2-es vektornormában. (2 pont)

6. A $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját határozzuk meg, azaz a

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}$$

alakot, ahol $\mathbf{J} = \{1,2),(2,3)\}$ a pozícióhalmaz. Ez az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & * & \\ & & * \\ & & \end{bmatrix}$$

1. lépés: Az $\mathbf{A}$ mátrix szétbontása a pozicióhalmaz első sora és oszlopa alapján, majd eliminálás az 1. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{P_1} - \mathbf{Q_1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.
(3 pont)

2. lépés: Az $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2}$ mátrix szétbontása a pozicióhalmaz második sora és oszlopa alapján, majd eliminálás a 2. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P_2} - \mathbf{Q_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk.
(3 pont)

Ezután fel tudjuk írni a kívánt alakot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1} L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2 pont)

Az ILU-algoritmus vektoros alakja felhasználva a $P = LU$ mátrixot

$$\mathbf{x^{(k+1)}} := \mathbf{P^{-1} Q} \cdot \mathbf{x^{(k)}} + \mathbf{P^{-1} b}$$

(2 pont)