7. Interpoláció polinomokkal

Legyenek $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, ..., y_n \in I\!R$ értékek.
(Általában $y_i = f(x_i)$, ahol $f : [a,b] \to I\!R$ függvény.)
Olyan $P \in \mathrm{P}_n$ (legfeljebb n-edfokú) polinomot keresünk, amelyre

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0,...,n).$$

7.1. Tétel. $\exists! \, P \in \mathrm{P}_n$, melyre $P(x_i) = y_i \quad (i = 0,...,n)$.
Bizonyítás. P meghatározása és az egyértelműség bizonyítása a határozatlan együtthatók módszerével történik. Legyen $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alakú, ekkor az interpolációs feltételből

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x_i)^k = y_i \quad (i = 0,...,n).$$

Ez a_k -kra az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

(Vandermonde mátrixú egyenletrendszer)

Ha $x_i \neq x_j (i \neq j)$, akkor a Vandermonde mátrix determinánsa nem nulla, az egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása, így az interpolációs polinom is létezik és egyértelmű.

7.1. Előállítás Lagrange-alakkal

7.1. Definíció. Az $x_0, x_1, ..., x_n$ alappontok által meghatározott Lagrange-alappolinomokat a következőképpen definiáljuk:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0,...,n)$$

7.2. Állítás. $l_k(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} = \delta_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } i \neq k \\ 1 & \text{, ha } i = k \end{cases}$.

Bizonyítás Hf.

7.3. Állítás. Legyen $\omega(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, ekkor belátható, hogy $l_k(x) = \dfrac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$.

Bizonyítás Hf.

A Lagrange-alappolinomok segítségével a következőképpen írható fel az interpolációs polinom Lagrange-alakja: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot l_k(x) =: L_n(x)$

7.2. Előállítás Newton-alakkal

7.2. Definíció. Az elsőrendű osztott differenciákat a következőképpen definiáljuk:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (= f[x_{i+1}, x_i]) \ , \ (i = 1, \dots, n)$$

A k-adrendű osztott differenciák:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \dots x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \ , \ (k = 1,2,\dots,n) \text{ és } (i = 0,\dots,n-k)$$

7.4. Tétel. Ha $\sigma \in Perm\{i,\dots,i+k\}$, akkor $f[x_i,\dots,x_{i+k}] = f[x_{\sigma(i)},\dots,x_{\sigma(i+k)}]$
Bizonyítás Hf.

Tegyük fel, hogy $y_i = f(x_i)$ és írjuk fel a Lagrange-alakot a következőképpen:

$$L_n = L_0 + \sum_{k=1}^{n} (L_k - L_{k-1}) \ , \text{ahol } L_k - L_{k-1} \in P_k$$

$$L_0(x) = \text{konstans} = f(x_0) = y_0 ,$$

$$(L_k - L_{k-1})(x_j) = L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0 \ , \ (j = 0,\dots,k-1).$$

Tehát $L_k - L_{k-1}$ legfeljebb k -adfokú polinomnak megtaláltuk a k db gyökét, tehát

$(L_k - L_{k-1})(x) = c_k \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ alakú, ahol c_k -ról belátható, hogy

$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$.

Így az interpolációs polinom Newton-alakja

$$N_n(x) := P(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,\dots,x_k] \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) .$$

Megjegyzés: Új alappont hozzávétele esetén a Newton-alak jobban használható, csak 1 új tagot kell hozzávenni a korábban már elkészített polinomhoz.

7.3. Hibabecslés.

7.5. Tétel. Legyen $f \in D^{(n+1)}(a,b)$, $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
(Ahol $[a,b]$ az $x_0,\dots,x_n$ és az $x \in \mathbb{R}$ által kifeszített intervallum.)
Ekkor $\exists \xi \in (a,b)$:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega(x) \ .$$

Ha $\sup_{y \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right| =: M_{n+1} < \infty$, akkor az

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega(x)|$$

becslést kapjuk az interpoláció hibájára.

Bizonyítás. Ha $x = x_i$, akkor triviális: $f(x_i) - P(x_i) = 0$ és $\omega(x_i) = 0$ $(i = 0,...,n)$.

Ha $x \neq x_i$, akkor $g(z) := f(z) - P(z) - \frac{\omega(z)}{\omega(x)}(f(x) - P(x))$.

Mivel $g(x_i) = 0$ $(i = 0,...,n)$ és $g(x) = 0$, g-nek n+2 db gyöke van a Rolle tétel miatt következik, hogy g'-nak van gyöke a szomszédos gyökök között.

Tehát g'-nak n+1 db gyöke van $[a,b]$-n.

Hasonlóan g''-nak n db ,…, $g^{(n+1)}$-nak 1 db gyöke van $[a,b]$-n, jelöljük ξ-vel.

Ekkor

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - \frac{\omega^{(n+1)}(\xi)}{\omega(x)} \cdot (f(x) - P(x)),$$

ahol $P^{(n+1)}(\xi) = 0$, $\omega^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$.

$$\Rightarrow \quad f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega(x).$$

7.6. Tétel. A Newton-alak hibaformulája $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$ $\forall i$-re

$$f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, ..., x_n] \cdot \omega(x).$$

Bizonyítás. Legyen $N_{n+1}(x)$ az $x_0, x_1, ..., x_n$ és x pontokon interpoláló polinom Newton-alakja. Ekkor $N_{n+1}(x) = f(x)$ az interpolációból. A Newton alak rekurziójából

$$f(x) - N_n(x) = N_{n+1}(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, ..., x_n] \cdot \omega(x).$$

Következmény: A két hibaformulát összehasonlítva kapjuk:

Legyen $f \in D^{n+1}(a,b)$ és $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$ $\forall i$-re, ekkor

$$\exists \xi \in (a,b):\ f[x, x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

7.4. Kidolgozott példák.

1. Példa: Legyen $f(x) := \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$, $x \in [-1;1]$.

Írjuk fel az f fv-t, a -1; 0; 1 alappontokon interpoláló (másodfokú) polinomot, és adjuk meg a hibabecslését a $[-1,1]$ intervallumban és az $x = \frac{1}{2}$ pontban!

Megoldás. a) Határozatlan együtthatók módszerével:

$$\begin{array}{ll} x_0 = -1 & y_0 = 0 \\ x_1 = 0 & y_1 = 1 \\ x_2 = 1 & y_2 = 0 \end{array}$$

$P(x) = ax^2 + bx + c$ alakban keressük a polinomot.

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket!

$f(x_i) = y_i = P(x_i)$, $(i = 0,1,2)$

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ 2. & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \\ 3. & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \end{array}\right\} \to c = 1$$

$$\begin{array}{ll} 3.-1. & 2b = 0 \to b = 0 \\ 3. & a + 0 + 1 = 0 \to a = -1 \end{array}$$

Tehát $P(x) = \underline{\underline{-x^2 + 1}}$.

b) Lagrange-alakkal. Az alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomok:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0) \cdot (x - 1)}{(-1 - 0) \cdot (-1 - 1)} = \frac{1}{2} \cdot x(x - 1)$$

$$l_1(x) = \frac{(x - (-1)) \cdot (x - 1)}{(0 - (-1)) \cdot (0 - 1)} = (-1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$l_2(x) = \frac{(x - (-1)) \cdot (x - 0)}{(1 - (-1)) \cdot (1 - 0)} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x + 1)$$

$$P(x) = L_2(x) = 0 \cdot l_0(x) + 1 \cdot l_1(x) + 0 \cdot l_2(x) = -(x + 1) \cdot (x - 1) = \underline{\underline{-x^2 + 1}}$$

c) Newton-alakkal. Elkészítjük az osztott differencia táblázatot:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	
-1	0	$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1 = f[x_0, x_1]$	$\frac{-1-1}{1-(-1)} = -1 = f[x_0, x_1, x_2]$
0	1	$\frac{0-1}{1-0} = -1 = f[x_1, x_2]$	
1	0		

$$P(x) = N_2(x) = 0 + 1 \cdot (x - (-1)) + (-1) \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 0) = x + 1 - x^2 - x = \underline{\underline{-x^2 + 1}}$$

d) Hibabecslés:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{2} x\right)$$

$$f''(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$f'''(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$|f'''(\xi)| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot 1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \quad \xi \in [-1;1] \quad \Rightarrow M_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Tehát $\left|f(x)-P(x)\right| \le \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}\cdot\left|(x-(-1))\cdot(x-0)\cdot(x-1)\right| \le \dfrac{\pi^3}{8\cdot 3!}\cdot\dfrac{2}{3\cdot\sqrt{3}} = \underline{\underline{\dfrac{\pi^3}{72\cdot\sqrt{3}}}}$.

$$\omega(x) = x^3 - x$$

$$\omega'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow \omega'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left|\omega\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \left|\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{3\cdot\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \max_{x\in[-1,1]}\left|\omega(x)\right| = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Beírva a hibaformulába, megkapjuk az interpolációs polinom hibabecslését a $[-1,1]$ intervallumra.

e) Hibabecslés az $x = \frac{1}{2}$ pontban: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

$$\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - P\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}\cdot\left|\left(\tfrac{1}{2}-(-1)\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}-0\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}-1\right)\right| \le \frac{\pi^3}{8\cdot 3!}\cdot\frac{3}{8} = \underline{\underline{\frac{\pi^3}{128}}}$$

2. Példa: Illesszünk polinomot az alábbi pontokra:
(1;1) (4;19) (5;29)

Megoldás. Newton-alakkal.

$$\begin{array}{ll|l|l}
x_i & f(x_i) & & \\
1 & 1 & \frac{19-1}{4-1} = 6 & \\
4 & 19 & & \frac{10-6}{5-1} = 1 \\
5 & 29 & \frac{29-19}{5-4} = 10 &
\end{array}$$

$$P(x) = N_2(x) = 1 + 6\cdot(x-1) + 1\cdot(x-1)\cdot(x-4) = \underline{\underline{x^2 + x - 1}}$$

3. Példa: Legyen és P az (a, f(a)) és (b,f(b)) pontokra felírt (lineáris) interpolációs polinom. Írjuk fel a polinomot és adjuk meg a hibáját!

Megoldás. Lagrange-alakkal. A Lagrange-alappolinomok a következők:

$$l_0(x) = \frac{x-b}{a-b} \quad , \qquad l_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$P(x) = f(a)\cdot\frac{x-b}{a-b} + f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x + \frac{1}{b-a}\left(b\cdot f(a) - a\cdot f(b)\right)$$

Legyen $M_2 := \max_{\xi\in[a,b]}\left|f''(\xi)\right|$, ekkor

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{M_2}{2!}|(x-a)\cdot(x-b)| \le \underline{\underline{\frac{M_2}{8}\cdot(b-a)^2}}$$

$$|\omega(x)| = |(x-a)(x-b)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

az $x=\dfrac{a+b}{2}$ helyen veszi fel ω a maximumát.

4. Példa. Milyen sűrűn kell táblázatban megadni a cos függvény értékeit a [0,π]-n, ha a közbülső értékeket lineáris interpolációval számoljuk és azt szeretnénk, hogy a hiba 0.05–nál kisebb legyen? Egyenletes (ekvidisztans) felosztást tekintünk.

Megoldás. Az $x_i := i\cdot\dfrac{\pi}{n}, \quad (i=0,\dots,n)$ helyeken számoljuk a függvény értékeit.

Hiba azonos a részintervallumonkénti hiba maximumával.

Az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon a hiba az előző feladat eredménye alapján:

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{M_2}{8}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

$M_2 = \sup\limits_{\xi\in[0,\pi]}|\cos''(\xi)| = 1$. Olyan $n \in \mathbb{N}$ -et keresünk, melyre

$$\frac{M_2}{8}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}.$$

$$\frac{\pi^2}{n^2} < 40\cdot 10^{-4}$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{\pi}{n} \le 6\cdot 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}\cdot 10^2 < n$$

$$\underline{\underline{n \approx 52}}$$

Megjegyzés: Pontosabbá tehető a közelítés nem ekvidisztans felosztású, hanem a szélek felé sűrűsödő felosztással

7.4. Inverz interpoláció

(Az interpoláció alkalmazása az f(x)=0 egyenlet iteratív megoldására)

Tegyük fel, hogy az $x_0,\dots,x_n$ -k által meghatározott intervallumban f -nek létezik inverze, jelöljük g -vel (pl. az $f'(x) \ne 0$, vagy f monoton).

Ekkor az $f(x)=0$ megoldása egyenértékű a $g(0)$ értékének meghatározásával.

A $g(0)$ értékének közelítő meghatározására alkalmazzuk az interpoláció elvét. Írjuk fel a g függvényt közelítő interpolációs polinomot a következő adatok alapján:

$y_i = f(x_i)$, $(i=0,\dots,n)$ az alappontok

$g(y_i) = x_i$, $(i=0,\dots,n)$ az inverz függvény értékei.

A kapott $G(y) \in P_n$ polinom $G(0)$ helyettesítési értékét keressük.

Iteráció úgy készíthető belőle, ha valamelyik $x_i, f(x_i)$ $(g(y_i), y_i)$ értéket kicseréljük a $G(0) = g(y_{új})$, $f(G(y_{új})) = y_{új}$ értékekre.