Logika

Ítéletlogika

Első témakör

2020/21. 1. félév

Tartalom

Formulák szemantikus tulajdonságai

Interpretáció kielégít egy formulát

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ **interpretáció kielégít egy** B **formulát** ($\mathcal{I} \models_0 B$). ha a formula helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban. A formulát kielégítő $\mathcal{I}$ interpretációt a formula modelljének is szokás nevezni.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra (Tk.4.3.1.)

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautologiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.

Példák

Példák ítéletlogikai törvényekre (Tk 71.o és 74.o)

$\models_0 A \supset (B \supset A)$
$\models_0 (A \supset B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C$
$\models_0 A \supset B \supset (A \wedge B)$
$\models_0 ((A \supset B) \supset A) \supset A$

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmaz.

Interpretáció kielégít egy formulahalmazt

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ interpretáció **kielégít** egy F formulahalmazt ($\mathcal{I} \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség formulahalmazokra (Tk.4.3.12.)

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha bármely interpretációban legalább egy formulája h (nincs olyan interpretáció, ami kielégítené).

Szemantikus következményfogalom

Szemantikus következmény (Tk.4.4.1.)

Egy G formula **szemantikus** vagy **tautologikus következménye** az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmaznak,
ha minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models_0 \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ fennáll, $\mathcal{I} \models_0 G$ is fennáll (ha $\mathcal{I}$ modellje $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$-nek, akkor modellje G-nek is).
Jelölés: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$

Tétel

Ha egy G formula bármely $\mathcal{F}$ feltételhalmaznak következménye, akkor G tautológia ($\models_0 G$).

Tehát (F, G) akkor helyes következtetésforma, ha teljesül, hogy $F \models_0 G$ és létezik olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyre $\mathcal{I} \models_0 F$.

Tartalom

Szemantikus következményfogalom

Tétel (Tk.4.4.3.)

Ha $\mathcal{F}$-nek következménye G_1 ($\mathcal{F} \models_0 G_1$) és
$\mathcal{F}$-nek következménye G_2 ($\mathcal{F} \models_0 G_2$) valamint
$\{G_1, G_2\}$-nek következménye A ($\{G_1, G_2\} \models_0 A$),
akkor $\mathcal{F}$-nek következménye A ($\mathcal{F} \models_0 A$).

Szemantikus következményfogalom

Eldöntésprobléma

Eldöntésproblémának nevezik a logikában annak eldöntését, hogy egy (F, G) pár a szemantikus következményfogalom szerint helyes gondolkodásforma-e.

Tétel (Tk.4.4.4.)

$\mathcal{F}$-nek akkor és csak akkor következménye G, ha az $\mathcal{F} \cup \neg G$ formulahalmaz vagy $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ formula kielégíthetetlen.

Ennek alapján az egyik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.

Szemantikus következményfogalom

Tétel (dedukciós) (Tk.4.4.7.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\{F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\} \models_0 (F_n \supset G)$

Tétel (eldöntésprobléma) (Tk.4.4.8.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\models_0 F_1 \supset (F_2 \supset \ldots (F_{n-1} \supset (F_n \supset G)) \ldots)$

Ennek alapján a másik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy tautológia-e.

Dedukciós tétel bizonyítási elve (nem kell vizsgára, csak magyarázat)

F_1	...	F_{n-1}	F_n	G
i	i	i	i	i
i	i	i	h	i/h
i	h	i	i	i/h
...	...	...	...	...

F_1	...	F_{n-1}	$F_n \supset G$
i	i	i	$i \supset i = i$
i	i	i	$h \supset \{i/h\} = i$
i	h	i	$\{i/h\}$
...	...	...	...

A fenti 2 "igazságtábla" (nincs benne konkrét interpretáció) mutatja a 3 lehetséges helyettesítési érték fajtát, amelyek előfordulhatnak.
Az első, amikor a formulahalmaz minden eleme igaz, és a következmény is. Ez az eset az, amikor az eredeti következmény ($\{F_1, .., F_n\} \models_0 G$) feltétele és az átalakított következmény ($\{F_1, .., F_{n-1}\} \models_0 F_n \supset G$) feltétele is teljesül.
A második eset, amikor minden formulahalmazbeli formula helyettesítési értéke igaz, kivéve annak, amelyet átviszünk a jobb oldalra. Ilyenkor a bal oldali következmény feltételét nem kell vizsgálnunk, hiszen nem igaz minden formulahalmazbeli forula, így a következmény értéke lényegtelen. Viszont ha megtörténik az F_n formula átvitele a következményformulába, akkor egy olyan formulahalmazunk lesz, amely minden eleme igazra helyettesítődik, szóval az átalakított következményben a helyes feltételt is vizsgálni kell. A feltétel teljesülni fog, hiszen a $h \supset i$ vagy $h \supset h$ formula szerint helyettesítődik, ami igaz.
A harmadik eset az összes többi esetet foglalja magában (egy konkrétat kiemelve), amikor a formulahalmazban másutt is előfordulhat minimum egy hamis érték. Ezek azok az esetek, amikor sem az eredeti, sem az átalakított következményben nem fog teljesülni, hogy a feltételhalmaz minden eleme igaz, így a következmény szempontjából lényegtelenek a további helyettesítési értékek.

Tautologikusan ekvivalens

Definíció 1. változat (Tk.4.3.7.)

Két vagy több formula igazságtáblája lehet azonos, ekkor azt mondjuk, hogy a formulák **tautologikusan ekvivalensek**. Ennek jelölésére a $\sim_0$ szimbólumot használjuk.

Definíció 2. változat

Az A és B formulák **tautologikusan ekvivalensek**,
ha $A \models_0 B$ és $B \models_0 A$.

Ekkor $\models_0 (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Átalakítási szabályok

$X \supset Y \sim_0 \neg X \vee Y$

$\neg\neg X \sim_0 X$

De Morgan szabályok:

1. $\neg(X \wedge Y) \sim_0 \neg X \vee \neg Y$
2. $\neg(X \vee Y) \sim_0 \neg X \wedge \neg Y$

Egyszerűsítési szabályok:

1. $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) \sim_0 d$
2. $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) \sim_0 k$

   ahol d elemi diszjunkció és k elemi konjunkció.

Következtetési módok I.

Definíció (Tk.4.4.14.)

Legyen a $\mathcal{F}$ feltételhalmazban szereplő változók száma n. Ekkor a **legszűkebb következmény** az az $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel i értéket, amelyek kielégítik az $\mathcal{F}$-et.

Előrekövetkeztetés

Ismert az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz, és keressük $\mathcal{F}$ lehetséges következményeit. Megkeressük $\mathcal{F}$ legszűkebb következményét, R-t. Következmény minden olyan G formula, amelyre $R \supset G$ tautológia, azaz R igazhalmaza része G igazhalmazának.

Előrekövetkeztetés – példa

$\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$

P	M	Z	$Z \supset M \vee P$	Z	$\neg P$	Iszk.	köv.
i	i	i	i	i	h	h	h/i
i	i	h	i	h	h	h	h/i
i	h	i	i	i	h	h	h/i
i	h	h	i	h	h	h	h/i
h	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i	h	h/i
h	h	i	h	i	i	h	h/i
h	h	h	i	h	i	h	h/i

Csak egy igazságértékre kielégíthető a feltételhalmaz.

Következtetési módok II.

Visszakövetkeztetés

Az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz és a B következményformula ismeretében eldöntjük, hogy B valóban következménye-e $\mathcal{F}$-nek. Mivel $\mathcal{F} \models_0 B$ pontosan akkor, ha az $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

Más szóval B pontosan akkor következménye $\mathcal{F}$-nek, ha minden olyan interpretációban, ahol B hamis, az $\mathcal{F}$ kielégíthetetlen.

Példa

Legyen $\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$ és lássuk be, hogy M következmény. Be kell látni, hogy, ha $\neg M$ igaz egy interpretációban, akkor $\mathcal{F}$ nem lesz kielégíthető. Ahhoz,hogy minden feltételformula i legyen $Z = i$, $P = h$ mellett $Z \supset M \vee P$-nek igaznak kellene lennie, viszont ha M hamis, akkor $Z \supset M \vee P = h$ lehet csak. Tehát M következménye F-nek.

Tartalom

Formalizálás az ítéletlogikában [1]

Tegyük fel, hogy adott valamilyen köznapi vagy matematikai probléma.
Ennek természetes nyelvű egyszerű vagy összetett kijelentő mondatokkal való leírását ismerjük.
Az **egyszerű kijelentő mondatok** formalizálására bevezetünk egy **azonosítót (állításjel, ítéletváltozó)**.
Az **összetett mondatot** analizáljuk, átalakítjuk azonos értelmű, de egyszerű kijelentő mondatokból olyan nyelvtani összekötőkkel felírt mondattá, ahol **a nyelvtani összekötők egyben logikai összekötők** (logikai műveletek).

[1] Tk.54-55.o.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes, akkor kistermetű.
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be.
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott.
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles akkor az ablakon mászott be.
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be.
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes (F), akkor kistermetű (K). $F \supset K$
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be (A). $K \supset A$
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott (R). $F \vee R$
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles (H), akkor az ablakon mászott be. $(R \wedge H) \supset A$
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be. $\neg A$
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi. $\neg F$

A feltételhalmaz: $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$
A feltételezés szerinti következmény: $\neg F$

Példa Tk. 54.o

Előrekövetkeztetés:
Az $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$ formulahalmazt egyetlen interpretáció elégíti ki: $A = h,\ F = h,\ K = h,\ R = i,\ H = h$, azaz a legszűkebb következényt leíró formula: $\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H$
$(\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H) \supset \neg F$ tautológia, így $\neg F$ következmény.

Visszakövetkeztetés:
$\neg F$ következmény, mivel a negáltját hozzávéve a feltételhalmazhoz, a kapott formulahalmaz: $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A,\ F\}$ kielégíthetetlen.

Példák

Vizsgálat: formula tautológia - igazságtáblával

A	B	$A \supset B \supset (A \wedge B)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A formula helyettesítési értéke minden interpretáció esetén igaz! $\Rightarrow$
A formula kielégíthető és tautológia.

Vizsgálat: formula tautológia - igazságértékelés fával

$$
\begin{array}{c}
\varphi(A \supset (B \supset (A \wedge B)))^{\mathbf{h}}\ (1) \\
| \\
\varphi(A)^{\mathbf{i}} \\
| \\
\varphi(B \supset (A \wedge B))^{\mathbf{h}}\ (2) \\
| \\
\varphi(B)^{\mathbf{i}} \\
| \\
\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{h}}\ (3) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\varphi(A)^{\mathbf{h}} & \varphi(B)^{\mathbf{h}} \\
| & | \\
\lightning & \lightning
\end{array}
\end{array}
$$

Minden előállt úton ellentmondásra jutunk. A bal oldali ágon az A értéke miatt, a jobb oldali ágon pedig a B ítéletváltozó értéke miatt. Így a formula hamishalmaza üres, vagyis az igazhalmaza az összes interpretációt tartalmazza. Ezek szerint a formula helyettesítési értéke minden interpretációban igaz, a formula tautológia.
(Az igaz feltételt is lehetett volna számolni, de akkor ellenőrizni kell, hogy a kiszámolt igazhalmaz tartalmazza-e az összes interpretációt.)

Példák

Vizsgálat: formula kielégíthetetlen - igazságtáblával

A	B	$(\neg A \wedge B) \wedge (B \supset A)$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A formula helyettesítési értéke minden interpretáció esetén hamis! $\Rightarrow$
A formula kielégíthetetlen.

Vizsgálat: formula kielégíthetetlen - igazságértékelés fával

$$\varphi((\neg A \wedge B) \wedge (B \supset A))^{\mathbf{i}} \ (1)$$

$$\varphi(\neg A \wedge B)^{\mathbf{i}} \ (2)$$

$$\varphi(B \supset A)^{\mathbf{i}} \ (4)$$

$$\varphi(\neg A)^{\mathbf{i}} \ (3)$$

$$\varphi(B)^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi(A)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(B)^{\mathbf{h}} \qquad \varphi(A)^{\mathbf{i}}$$

$$\lightning \qquad \lightning$$

Minden ágon ellentmondásra jutottunk, vagyis a formula igazhalmaza üres. Így a formula helyettesítési értéke minden interpretációban hamis, vagyis kielégíthetetlen.

Példák

Formulahalmaz igazságtáblája

Adott a következő formulahalmaz: $\{\neg A, A \vee B, B \supset \neg A\}$. Adjuk meg a formula helyettesítési értékeit a különböző interpretációkban igazságtáblával.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$B \supset \neg A$
i	i	h	i	h
i	h	h	i	i
h	i	i	i	i
h	h	i	h	i

A (h, i) (A,B bázissal) interpretációban minden formulahalmazbeli formula helyettesítési értéke igaz, így ebben az interpretációban a formulahalmaz kielégíthető.

Példák

Formulahalmaz szemantikai tulajdonságai

Adott a következő formulahalmaz: $\{\neg A, A \vee B, B \supset \neg A\}$. Ha egy formulahalmaz szemantikai tulajdonságait szeretnénk vizsgálni, akkor lehet egy közös igazságtáblán is számolni, vagy átalakíthatjuk a feladatot formula vizsgálatára.

A követekező formulahalmaz $\{\neg A, A \vee B, B \supset \neg A\}$ átalakítható a következő formulára

$\neg A \wedge (A \vee B) \wedge (B \supset \neg A)$.

A	B	$\neg A \wedge (A \vee B) \wedge (B \supset \neg A)$
i	i	h
i	h	h
h	i	i
h	h	h

A leolvasható eredmény ugyanaz. Vagyis az (h, i) interpretációban kielégíthető a formula, így az eredeti formulahalmaz is. Ha például minden helyettesítési érték hamis lenne, akkor a formula kielégíthetetlen, visszatérve az eredeti feladatra a formulahalmaz is kielégíthetetlen. Ha minden helyettesítési érték igaz lenne, akkor a formula tautológia, visszaérve az eredeti formulahalmazra csak azt mondhatjuk el, hogy kielégíthető, vagy minden interpretációban kielégíthető, hiszen formulahalmazokon tautológi fogalmát nem használjuk.

Példák

Szemantikus következmény igazáságtáblával

Helyes-e a következő szemantikus következmény:
$\{\neg A, \neg A \vee B, B \supset A\} \models_0 \neg A \supset B$.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$B \supset \neg A$	$\neg A \supset B$
i	i	h	i	h	i
i	h	h	h	i	i
h	i	**i**	**i**	**i**	i
h	h	**i**	**i**	**i**	h

A formulahalmaz a (h, i) és (h, h) interpretációkban kielégíthető, így ezekben az esetekben kell vizsgálni a következmény formula helyettesítési értékét is. A (h, i) interpretációban igaz, eddig még jónak tűnik a következmény. Viszont ha megnézzük a (h, h) interpretációt, ott hamis lesz a következmény helyettesítési értéke, így a következmény nem helyes!