Többváltozós függvénytan gyakorlatok

Programtervező informatikus BSc 2018
Szoftvertervező (B) specializáció

2019-2020. tanév tavaszi félév

2020. február

$\boxed{\text{1. gyakorlat}}$

Integrálszámítás 1.

■ Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi **alapintegrálokra vezető** integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$

(b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{3\cos^2 x+2}{\cos 2x-1}\,dx.$

2. Bizonyítsa be (és jegyezze meg) a következő állításokat: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.

- Ha $f > 0$ és $f \in D(I)$, akkor

(a) $\displaystyle\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c} \quad (x \in I),$

(b) $\displaystyle\boxed{\int f^{\alpha}(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c} \quad (x \in I,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}).$

- **Lineáris helyettesítés:** Ha az f függvénynek van primitív függvénye, akkor

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c} \quad (x \in I), \text{ha } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ és } F' = f.$$

- **Első helyettesítési szabály:** Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és $f : J \to \mathbb{R}$. Ha az f függvénynek van primitív függvénye, akkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c} \quad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

3. Az előző feladat állításait felhasználva számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \big(x \in (1,+\infty)\big) \quad \text{vagy} \quad \big(x \in (0,1)\big),$

(c) $\displaystyle\int \cos(5x-3)\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \cdot \cos^5 x\,dx \quad \big(x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big),$

(e) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(f) $\displaystyle\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
(használja fel a $\cos^3 x = \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosságot),

(g) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$
(használja fel a

$$\sin^2 x \cdot \cos^4 x = \frac{1}{4}(2\sin x \cdot \cos x)^2 \cdot \cos^2 x =$$
$$= \tfrac{1}{4} \cdot \sin^2(2x) \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = \tfrac{1}{8}\sin^2(2x) + \tfrac{1}{8}\cos(2x) \cdot \sin^2(2x).$$

azonosságot),

(h) $\displaystyle\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+12x+16}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - 5}{1+\cos 2x}\,dx \quad \big(x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big),$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx \quad \big(x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big),$

(c) $\displaystyle\int \cos^7 x \cdot \sin x\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\, dx \quad \big(x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\big)$,

(e) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$,

(b) $\displaystyle\int \left((3x+1)^2 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \quad \big(x \in (-1, 1)\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \big(x \in (0, 1)\big)$,

(d) $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2\, dx \quad \big(x \in (0, \pi/2)\big)$,

(e) $\displaystyle\int \frac{\left(e^{2x}-1\right)^2}{e^{3x}}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(f) $\displaystyle\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{\ln(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$,

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+5x+7}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$.

2. Az integrandus „alkalmas” átalakítása után számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\, dx, \quad I := \mathbb{R}$,

(b) $\displaystyle\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}\, dx, \quad I := \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx, \quad I := \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$,

(d) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx, \quad I := \mathbb{R}$,

(e) $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \cos 7x\, dx, \quad I := \mathbb{R}$,

(f) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{3}\, dx, \quad I := \mathbb{R}$,

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx, \quad I := (0, \pi)$,

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx, \quad I := \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$.

$\boxed{\text{2. gyakorlat}}$

Integrálszámítás 2.

■ Feladatok

1. Parciális integrálás:

(a) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg}(3x)\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

2. Határozza meg, az

$$f(x) := e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\cos(2x)} \qquad \big(x \in \big[0, \tfrac{\pi}{4}\big]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

3. A második helyettesítési szabály: Számítsa ki a

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

határozott integrált.
Útmutatás. Az integrandus primitív függvényének a meghatározásához alkalmazza a $t = \sin x$ helyettesítést.

4. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$

határozatlan integrált a

$$2\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \big(x \cdot \sqrt{1-x^2}\big)'$$
$$\big(x \in (-1,1)\big).$$

azonosság felhasználásával.

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int x^2 \cdot \sin x \, dx \; \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(b) $\displaystyle\int e^{2x} \cdot \cos\,(x+1)\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int \operatorname{arc}\sin x \, dx, \quad \big(x \in (-1,1)\big)$.

2. A $t = \sqrt{e^x - 1}$ helyettesítéssel számítsa ki a

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

határozott integrált.

■ Gyakorló feladatok

1. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int e^{3x} \cdot \sin\,(2x)\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(b) $\displaystyle\int (x^2 + 2x - 1)e^{-3x}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx, \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$,

(d) $\displaystyle\int x \ln^2 x \, dx, \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$,

(e) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx, \quad \big(x > 0\big)$,

(f) $\displaystyle\int x^5 e^{x^3}\, dx, \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$.

2. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$$

határozatlan integrált

(a) az $x = \operatorname{sh} t = g(t) \;\; (t \in \mathbb{R})$ helyettesítéssel,

(b) parciális integrálással,

(c) az alábbi azonosság felhasználásával:

$$2\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 2, 3, \ldots$ esetén

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\,\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\,\sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\text{3. gyakorlat}}$

Integrálszámítás 3.

■ Feladatok

- **Racionális törtfüggvények integrálása, a parciális törtekre bontás módszere**

1. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx \quad \big(x\in(2,4)\big),$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big),$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+4)}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$

- **Racionális törtfüggvények integrálására vezető helyettesítések**

2. $\boldsymbol{\int S\left(e^x\right)\,dx}$ **alakú integrálok**, ahol $S(u)$ egyváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$t=e^x$$

helyettesítést, azaz az $x=\ln t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazva a feladatot racionális függvény integráljára vezetjük vissza.

Számítsa ki az

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$$

határozatlan integrált.

3. $\boldsymbol{\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx}$ **alakú integrálok**, ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ezekben a gyökös kifejezést egy új változóval helyettesítve racionális törtfüggvény integrálására jutunk. Pontosabban: legyen

$$t:=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

A $x=g(t)$ helyettesítő függvényt úgy kapjuk meg, hogy ebből x-et kifejezzük. Ezután a második helyettesítési szabályt alkalmazzuk.

Számítsa ki az

$$\int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx \qquad \big(x\in(0,+\infty)\big)$$

határozatlan integrált.

■ Házi feladatok

Számítsa ki a következő integrálokat:

1. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx.$

3. $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x-1}}{x}\,dx \qquad \big(x>1/3\big).$

■ Gyakorló feladatok

Számítsa ki a következő integrálokat:

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{3x}}\,dx \qquad \big(x\in\mathbb{R}\big),$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x+1}}\,dx \quad \big(x>0\big),$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx \qquad \big(x>3/2, \quad \text{illetve} \quad x<0\big),$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad \big(x>0\big) \quad \big(t:=\sqrt[6]{x}\big).$

■ További feladatok

1. Számítsa ki az

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$$

integrált.

(*Ötlet*: Alkalmazza a

$$2\,\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}+\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'$$

azonosságot.)

2. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

Ennek felhasználásával határozza meg a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R})$, (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx \quad (x\in\mathbb{R})$.

Megjegyzés. Határozatlan integrálokra különböző módszerekkel kaphatunk (formai szempontból) különböző képleteket. Az így kapott két függvényhalmaz egyenlő, ha a generáló elemeik különbségének a deriváltja a megadott intervallumon azonosan nulla.

3. Számítsa ki az

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big)$$

integrált kétféleképpen:

(a) Alkalmazza a $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ helyettesítést.

(b) Szorozza meg az integrálandó függvényt $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x}} = 1$-gyel.

A végeredmény:

(a)

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x\in(-1,1)\big),$$

(b)

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \operatorname{arc\,sin}\,x - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

A *Mathematica* programcsomag a következő eredményt adja:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 2\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{1+x}{2}} - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

4. Számítsa ki az

$$\int x\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big)$$

integrált az

$$x\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x\in(-1,1)\big)$$

azonosság felhasználásával.

5. Számítsa ki az

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

integrált azzal az észrevétellel, hogy

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad (x > 0).$$

6. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

integrált kétféleképpen:

(a) Alkalmazza a $t = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4x}}$ helyettesítést.

(b) Szorozza meg az integrálandó függvényt 1-gyel, majd integráljon parciálisan.

4. gyakorlat

Integrálszámítás 4.

Feladatok

• Racionális törtfüggvények integrálására vezető helyettesítések

1. $\int \boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x})\ \boldsymbol{dx}$ **alakú integrálok**, ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

helyettesítést, azaz az $x = 2\operatorname{arc\,tg} t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazzuk.

Számítsa ki az

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx \quad \big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \pi\big)\big)$$

határozatlan integrált.

• A határozott integrál alkalmazásai

2. Határozza meg az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét.

3. Számítsa ki az

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} \quad \Big(x \in \Big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big)$$

függvény grafikonjának a hosszát.

Házi feladatok

1. Számítsa ki az $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ és az $y = 2x$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét.

2. Határozza meg az

$$f(x) := \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x} \qquad \big(x \in [0,1]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

3. Határozza meg az

$$f(x) := x^{3/2} \quad \big(0 \le x \le 4\big)$$

függvény grafikonjának a hosszát.

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Útmutatás. *1. megoldás.* Számítsa ki a bal oldalon álló integrálokat.
2. megoldás. Használja fel, hogy az arc tg a tg függvény inverze és készítsen ábrát.

2. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5},$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx,$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\cdot\cos^2 x\,dx.$

3. Határozza meg az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \quad \text{és a} \quad 0 \le x \mapsto \sqrt{x}$$

függvények grafikonjai által közrezárt korlátos síkidom területét.

4. Számítsa ki az $x = 1$, $x = 4$, $y = \dfrac{1}{x}$ és az $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét.

5. Milyen arányú részekre osztja az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör által határolt síkrész területét?

További feladatok

1. Számítsa ki az

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \quad \big(x \in (0, 2\pi)\big)$$

integrált

(a) a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel,

(b) szorozza meg az integrálandó függvényt $\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = 1$-gyel,

(c) térjen át félszögekre.

Útmutatás. (b)

$$\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1+\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x} + \cos x\cdot\sin^{-2} x + \frac{\cos x}{\sin x}.$$

(c)

$$\frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+2\,\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)} = \\ = \frac{1}{2\,\sin^2\frac{x}{2}} + 2\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

vagy

$$\frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{2\sin^2(x/2)} + \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

2. Az integrandus „alkalmas” átalakításával számítsa ki a következő intergrált:

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx \qquad \big(x\in(-\pi,\pi)\big).$$

Útmutatás. Ha $x\in(-\pi,\pi)$, akkor

$$\frac{\cos x}{1+\cos x} = 1-\frac{1}{1+\cos x} = 1-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}. \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Az $\int R\,(\sin x,\cos x)\;dx$ alakú integrálok kiszámolásához a mindig alkalmazható $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítés helyett bizonyos esetekben más helyettesítéseket is használhatunk. Ilyenkor általában kevesebb számolással kaphatjuk meg a végeredményt. Például:

(a) $t=\operatorname{tg}x$, ha R-ben $\sin x$ és $\cos x$ együttes kitevője minden tagban páros, vagy minden tagban páratlan;

(b) $t=\sin x$, ha R-ben $\cos x$ kitevője a számlálóban páros és a nevezőben páratlan, vagy fordítva;

(c) $t=\cos x$, ha R-ben $\sin x$ kitevője a számlálóban páros és a nevezőben páratlan, vagy fordítva.

3. A $t=\operatorname{tg}x$ helyettesítéssel számítsa ki az

$$\int \frac{\sin^2 x+1}{2\cos^2+3}\,dx \quad \big(x\in(-\pi/2,\pi/2)\big)$$

határozatlan integrált.

4. Számítsa ki az

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx \quad \big(x\in(0,\pi/2)\big)$$

határozatlan intergrált

(a) a $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel,

(b) a $t=\operatorname{tg}x$ helyettesítéssel,

(c) a következő ötlettel: ha $x \in (0, \pi/2)$, akkor legyen

$$I_1(x) := \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx, \quad I_2(x) := \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx,$$

és számolja ki az $I_1(x) + I_2(x)$ és az $I_1(x) - I_2(x)$ függvényeket.

5. Számítsa ki a következő integrált:

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\big(\sin x\big) + \cos^2\big(\cos x\big)\right)\, dx.$$

6. Számítsa ki a következő integrált:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^x+1}\, dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{xe^x}{e^x-1}\, dx.$$

Útmutatás. Integráljon parciálisan. Ezután vegye észre azt, hogy az

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \ln\big(e^x + 1\big) \quad \text{és az} \quad (0, +\infty) \ni x \mapsto \ln\big(e^x - 1\big)$$

függvények egymás inverzei.

$\boxed{\text{5. gyakorlat}}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-típusú függvények folytonossága és határértéke

■ Feladatok

1. Határozza meg és szemléltesse az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit és szintvonalait. Milyen felülettel szemléltethető a függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

(a) $f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2 \le 1\big)$,

(b) $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$.

2. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény *folytonos* az $a := (0,0)$ pontban.

3. Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény *nem folytonos* az $a := (0,0)$ pontban.

4. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy az f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0,0)\}$.

5. Mutassa meg, hogy

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$.

6. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvénynek az $a := (0,0)$ pontban *nincs határértéke*.

■ Házi feladatok

1. Mutassa meg, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

2. Biyonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+xy+y^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvénynek *nincs határértéke* az origóban.

■ Gyakorló feladatok

1. Az $f(x,y) := x^2+y^2$ $\big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$ függvény grafikonja egy forgásparaboloid. Milyen felülettel szemléltethető a

$$g(x,y) := x^2+y^2-2x+4y+1 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

2. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq -y\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\exists \lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)$, (b) $\exists \lim\limits_{y\to 0}\big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)$,

(c) $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f$.

3. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\cdot\sin^2(2x)}{x^2+3y^2}$, (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$,

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

4. Vizsgálja meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket (itt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$):

(a) $$f(x,y) := \begin{cases} x\,y\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

(b) $$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$\boxed{\text{6. és 7. gyakorlat}}$

Parciális deriváltak. Iránymenti deriváltak. Totális derivált

■ Feladatok

1. Számítsa ki az

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \qquad (x, y > 0)$$

függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait.

2. Melyik $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek:

$$\partial_x f(x,y) = x^2 y, \quad \partial_y f(x,y) = 1 + x^3/3 \ \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)?$$

3. Legyen

$$f(x,y) := x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a következő másodrendű parciális deriváltakat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

az $(x,y) = (1,0)$ pontban.

4. A definíció alapján lássa be, hogy az

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

5. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f *nem differenciálható* $(0,0)$-ban.

6. Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\big).$$

(a) Számítsa ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

(b) Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.

7. Legyen

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a := (1,1)$$

és e az x-tengely pozitív ágával α szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.

(a) Határozza meg a definíció alapján a $\partial_e f(a)$ iránymenti deriváltat.

(b) Ellenőrizze a kapott eredményt a tanult tétellel.

(c) Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb?

8. Fogalmazza meg a láncszabályt az $2 \le n, m \in \mathbb{N}$ és $s = 1$ speciális esetben.

Válasz. Ha $g = (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor az

$$F(x) := \big(f \circ g\big)(x) = f(g(x)) = f\big(g_1(x), \ldots, g_m(x)\big) \quad \big(x \in \mathcal{D}_g\big)$$

függvény differenciálható az a pontban, és

$$\partial_j F(a) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k f\big(g(a)\big) \cdot \partial_j g_k(a) \tag{1}$$

minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Megjegyzés. A (1) összefüggés könnyebben megjegyezhető a következő alakban. Jelöljük f, illetve g változóit $y_1, \ldots, y_m$-mel, illetve $x_1, \ldots, x_n$-nel. Ekkor azt kapjuk, hogy ha $j = 1, 2, \ldots, n$, akkor

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j}.$$

■ Házi feladatok

1. Legyen

$$f(x,y) := x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a következő másodrendű parciális deriváltakat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

az $(x,y) = (1,0)$ pontban.

2. A definíció alapján lássa be, hogy az

$$f(x,y) := x^3 + xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (2,3)$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

3. Írja fel a $z = x^2 + 3y^2$ egyenletű felület $(x_0, y_0) = (3, 2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.

4. Számolja ki az

$$f(x,y) := xe^{yx} - xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban a $v = (3,4)$ vektor által meghatározott irány mentén.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az

(a) $f(x,y) := y^2 \ln(xy) \qquad (x, y > 0)$,

(b) $f(x,y) := e^{x^2 y} - 2x^2 y^7 \sin(x+y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x,y) := e^x \cos y - x \ln y \qquad (x, y > 0)$

függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait.

2. Határozza meg az $f(x,y) := x^3 e^{y^2}$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját az $(x,y) := (2,1)$ pontban.

3. A definíció alapján lássa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{bmatrix} x^2 + xy \\ y^2 - 2x^2 \end{bmatrix} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény deriválható az $a := (-1, 1) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ mátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

4. Legyen

$$f(x,y) := e^x \cdot y + x \cdot \cos y \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a := (0;1) \text{ és } u = (1; -\sqrt{3}).$$

Határozza meg a definíció alapján a $\partial_e f(a)$ iránymenti deriváltat, ahol e az u irányú egységvektor. Lássa be, hogy $f \in D\{a\}$ és ellenőrizze a kapott iránymenti deriváltat az $f'(a)$ segítségével.

5. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban

(a) folytonos,

(b) minden irány mentén deriválható,

(c) totálisan nem deriválható.

6. Tekintse az

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=0 \end{cases}$$

függvényt.

(a) Határozza meg a $\partial_1 f, \partial_2 f$ parciális deriváltfüggvényeket.

(b) Lássa be, hogy a fenti parciális deriváltak nem folytonosak a $(0,0)$ pontban.

(c) Mutassa meg, hogy $f \in D\{(0,0)\}$.

7. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy a $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ és a $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0).$$

Mutassa meg azt is, hogy f nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban.

8. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

(a) Folytonos-e az f függvény az origóban?

(b) Határozza meg a $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ függvényeket $\mathbb{R}^2$ minden pontjában.

(c) Igaz-e az, hogy $f \in D\big\{(0,0)\big\}$?

(d) Létezik-e $\partial_{12} f(x,y)$, $\partial_{21} f(x,y)$, és ha igen, akkor egyenlők-e?

9. Mutassa meg, hogy ha $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F\in D$ és

$$f(x,y) := y\cdot F(x^2-y^2) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$

akkor

$$y^2\cdot\partial_x f(x,y) + xy\cdot\partial_y f(x,y) = x\cdot f(x,y) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

10. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in D^3$ és

$$F(x,y,z) := f(xyz) \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big).$$

Bizonyítsa be, hogy alkalmas $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénnyel

$$\partial_{123} F(x,y,z) = g(xyz) \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big).$$

8. gyakorlat

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények szélsőértékei

Feladatok

1. (2 × 2-es mátrixokra vonatkozó Sylvester-féle kritérium.) Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Mutassa meg, hogy a

$$Q(h) := \langle Ah, h\rangle = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \qquad \left(h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

kvadratikus alak, illetve az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix

- pozitív definit $\iff$ $a > 0$ és $\det A > 0$,
- negatív definit $\iff$ $a < 0$ és $\det A > 0$,
- indefinit $\iff$ $\det A < 0$.

2. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

3. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

4. Határozza meg az

$$f(x,y) := xy(x^2 + y^2 - 1) \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit a

$$H := \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

zárt körlapon.

5. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 - 12x + y^3 - 3y \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvénynek

(a) a lokális szélsőértékhelyeit és a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékhelyeit és az abszolút szélsőértékeit a

$$H := \left\{\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 3, \quad -x \le y \le 2\right\}$$

halmazon.

■ Házi feladatok

1. Határozza meg az

$$f(x, y) := x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1 \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

2. Határozza meg az

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit:

(a) $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$,

(b) $f(x, y) := x^4y^2(4 - x - y) \ \big((x, y) \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $f(x, y) := x^3y^2(4 - x - y) \ \big((x, y) \in \mathbb{R}\big)$,

(d) $f(x, y) := e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2) \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$,

(e) $f(x, y) := (1 + e^y)\cos x - ye^y \ (x, y \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x, y) := x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \ (x, y, z \in \mathbb{R})$.

2. Határozza meg az

$$f(x, y) := 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) a lokális szélsőértékhelyeit és a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékhelyeit és az abszolút szélsőértékeit az $A(0, 0)$, $B(0, -3)$, $C(-2, -3)$, $D(-2, 0)$ pontok által határolt zárt téglalapon.

3. Határozza meg az

$$f(x, y) := x^3y^5 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit,

(b) az $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ pontok által határolt zárt háromszöglapon az abszolút szélsőértékhelyeit és az abszolút szélsőértékeit.

4. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) lokális szélsőértékhelyeit;

(b) az $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 2x\big\}$ halmazon az abszolút szélsőértékeit.

5. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) lokális szélsőértékhelyeit és a lokális szélsőértékeit,

(b) az $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge -1,\ x-1 \le y \le 4\big\}$ halmazon az abszolút szélsőértékeit.

6. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x,y) := x^4 + y^2 \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^3 + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor

(a) f-nek az origóban lokális (és abszolút) minimuma van, g-nek ugyanott nincs lokális szélsőértéke;

(b) mindegyik függvény origóban vett Hesse-mátrixának a determinánsa nullával egyenlő.

9. gyakorlat

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények feltételes szélsőértékei

■ Feladatok

1. Határozza meg az $f(x,y) := x^2 + y^2 \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes lokális minimumhelyeit a $g(x,y) = x + 2y - 4 = 0$ feltételre vonatkozóan.

(a) Mi a feladat geometriai tartalma?

(b) Oldja meg a feladatot úgy, hogy a korlátozó feltételből y kifejezésével visszavezeti egyváltozós szélsőérték-problémára.

(c) Oldja meg a feladatot a Lagrange-szorzók módszerével.

2. Legyen

$$f(x,y) := xy \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Keresse meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett

(a) elemi úton,

(b) a Lagrange-szorzók módszerével.

3. Legyen

$$f(x,y) := 2x + 3y \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Határozza meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett.

• **Érdeklődőknek**

4. Tekintse az

$$f(x,y) := x^2 + y^2, \quad g(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 3 \qquad \big((x,y)^2 \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvényeket, és határozza meg az f feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett.

■ Házi feladatok

1. Határozza meg az $f(x,y) := xy \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes lokális szélsőértékeit a $g(x,y) := x + y - 1 = 0$ feltétel mellett. Mi a feladat geometriai tartalma?

2. Tekintse az

$$f(x,y) := x + y, \quad g(x,y) := x^2 + 3xy + 3y^2 - 3 \qquad \big((x,y)^2 \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvényeket, és határozza meg az f feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett.

■ Gyakorló feladatok

1. Adott kerületű téglalapokat megforgatunk az egyik oldaluk körül. Mikor lesz a keletkező henger térfogata a legnagyobb?

2. Legyen $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g := \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ és

(a) $f(x,y) := 2x + 3y, \quad g(x,y) := x^2 - y^3$;

(b) $f(x,y) := x^3 + y^3, \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1$;

(c) $f(x,y) := x^2 + 12xy + 2y^2, \quad g(x,y) := 4x^2 + y^2 - 25$.

Határozza meg az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozó feltételes lokális szélsőértékeit.

3. A Lagrange-szorzók módszerével keresse meg az alábbi feltételes szélsőérték-problémák lokális megoldásait.

(a) max $\ f(x,y) := xy$, feltéve, hogy $\ g(x,y) := x + y - 1 = 0$;

(b) max $\ f(x,y) := x + y$, feltéve, hogy $\ g(x,y) := x^2 + y - 1 = 0$;

(c) max (min) $\ f(x,y) := 3xy$, feltéve, hogy $\ g(x,y) := x^2 + y^2 - 8 = 0$;

(d) max $\ f(x,y) := x + y$, feltéve, hogy $\ g(x,y) := x^2 + 3xy + 3y^2 - 3 = 0$;

(e) max $x^2 + 3xy + y^2$ feltéve, hogy $x + y = 100$;

(f) max $12x\sqrt{y}$ feltéve, hogy $3x + 4y = 12$;

(g) max $\ f(x,y) := 10x^{1/2}y^{1/3}$, feltéve, hogy $\ g(x,y) := 2x + 4y - 9 = 0$.

4. Alkalmazhatók-e a feltételes szélsőértékkel kapcsolatban tanult tételek az f függvény $g = 0$ feltételre vonatkozó (esetleg létező) feltételes lokális szélsőértékeinek a meghatározására, ha

(a) $f(x,y) := x, \qquad g(x,y) := x^3 - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x,y) := x^3, \qquad g(x,y) := y - x^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x,y) := y, \qquad g(x,y) := x^3 - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(d) $f(x,y) := x + y, \qquad g(x,y) := x^3 - y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$?

(Ha a tételek nem alkalmazhatók, akkor a definíció alapján okoskodjon.)

10. gyakorlat

Az inverzfüggvény- és az egyváltozós implicitfüggvény-tétel

■ Feladatok

• Az inverzfüggvény-tétel

1. Legyen

$$f(x,y) := \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) Mi az f értékkészlete?

(b) Mutassuk meg, hogy f *globálisan* nem invertálható, de $\mathbb{R}^2$ minden pontjában *lokálisan* invertálható.

(c) Legyen $a := (0, \pi/3)$ és $b := f(a)$. Keressünk explicit képletet f-nek a b pont valamely környezetében értelmezett f^{-1} lokális inverzére, és azt deriválva határozzuk meg $\big(f^{-1}\big)'(b)$-t. Számítsuk ki a deriváltat a tanult képletel is.

2. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{bmatrix} -x + \sqrt{x^2+y^2} \\ -x - \sqrt{x^2+y^2} \end{bmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (4,3)$ pont egy környezetében, és határozzuk meg a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban.

3. Lássuk be, hogy az

$$f(x,y,z) := \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ 3x + 4z \\ x - y + 2z \end{bmatrix} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (1,1,1)$ pont egy környezetében, és számoljuk ki a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban.

4. Tekintsük az

$$\begin{aligned} e^{x-1} + x \sin y &= u \\ e^{x-1} - x \cos y &= v \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol $u, v \in \mathbb{R}$ adott paraméterek és x, y az ismeretlenek. Ha $\big(u_0, v_0\big) = \big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$, akkor $\big(x_0, y_0\big) = \big(1, \frac{\pi}{4}\big)$ megoldása az egyenletrendszernek.

(a) Mutassuk meg, hogy $\big(u_0, v_0\big)$ egy környezetében az egyenletrendszernek az $\big(x_0, y_0\big)$ pont egy alkalmas környezetében a megoldás egyértelmű és az (u, v) változó folytonosan deriválható függvénye.

(b) Számítsuk ki a szóban forgó függvény deriváltját az $\big(u_0, v_0\big)$ pontban.

- **Az egyváltozós implicitfüggvény-tétel**

5. Legyen

$$f(x,y) := \ln x + y\,e^{y^2} + 1 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Mutassuk meg, hogy az $a = 1/e$ pontnak van olyan $U = K(a)$ környezete és létezik olyan $\varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \quad \big(\forall\, x \in U\big)$$

egyenlőség teljesül. Számítsuk ki $\varphi'\big(1/e\big)$-t.

6. Legyen

$$f(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\big).$$

Mutassuk meg, hogy az $(a,b) = (1,0)$ pont egy környezetében az $f(x,y) = 0$ egyenlettel megadott síkbeli halmaz egy folytonosan deriválható $\varphi : K(a) \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja. Számítsuk ki $\varphi'(1)$-et, és írjuk fel a szóban forgó görbe $(1,0)$ pontbeli érintő egyenesének az egyenletét.

7. Tekintsük az

$$y^2 + 5x = x\,e^{x\,(y-2)}$$

egyenletet. Ennek egy megoldása $x = -1$ és $y = 2$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy az egyenletből y kifejezhető az x változó implicit függvényeként a $(-1,2)$ pont egy környezetében.

(b) Határozzuk meg a függvény deriváltját az $x = -1$ pontban.

■ Házi feladatok

1. Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{bmatrix} (x+y)\cos(x^2) \\ \dfrac{y^2}{x^2+1} \end{bmatrix} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (0,1)$ pont egy környezetében, és határozza meg a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban.

2. Tekintse az

$$e^{x+y} = 2\cos y - 1$$

egyenletet. Ennek egy megoldása $x = 0$ és $y = 0$.

(a) Bizonyítsa be, hogy az egyenletből y kifejezhető az x változó implicit függvényeként a $(0,0)$ pont egy környezetében.

(b) Határozza meg a függvény deriváltját az $x = 0$ pontban.

■ Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy az alábbi $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvények a megadott $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban lokálisan invertálhatók; és határozza meg a lokális inverzek deriváltját a $b := f(a)$ pontban, ha

(a) $f(x,y) := \begin{bmatrix} x \cos \dfrac{y}{x} \\ x \sin \dfrac{y}{x} \end{bmatrix} \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R}), \quad a := (1,0);$

(b) $f(x,y) := \begin{bmatrix} y \ln x \\ \\ x e^y \end{bmatrix} \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R}), \quad a := (1,1);$

(c) $f(x,y) := \begin{bmatrix} x^2 e^{xy} \\ \ln\bigl(x^2 + \cos^2 y\bigr) \end{bmatrix} \quad \bigl((x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\bigr), \quad a := (1,0).$

2. Lássa be, hogy az $f(x,y) := (x^3, y^3)$ $\bigl((x,y) \in \mathbb{R}^2\bigr)$ függvény invertálható az origó egy környezetében (sőt az egész síkon is!), de az $f'(0,0)$ mátrix nem invertálható. Deriválható-e az inverz az origóban?

3. Bizonyítsa be, hogy az alábbi egyenletből y kifejezhető x implicit függvényeként a $(2,1)$ pont egy környezetében is és a $(2,3)$ pont egy környezetében is:

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7.$$

Határozza meg mindkét függvény deriváltját az $x = 2$ helyen.

$\boxed{\text{11. gyakorlat}}$

Integrálszámítás 1.

■ Feladatok

1. Tekintsük az $I := [0,1] \times [0,2]$ téglalapot. Kétféle sorrendben számítsuk ki az

$$\iint_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^2 x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy$$

kettős integrált.

2. Számítsuk ki a következő kettős integrált:

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy.$$

3. Számítsuk ki a következő integrált:

$$\iint_H xy^2\, dx\, dy,$$

ahol H az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész.

4. Legyen $H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\big\}$. Számítsuk ki az

$$\iint_H (x+y)\, dx\, dy$$

integrált.

5. Jelölje H a $(0,2)$, az $(1,1)$ és a $(3,2)$ csúcspontú háromszöglapot. Számítsuk ki az

$$\iint_H y\, e^x\, dx\, dy$$

integrált.

6. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük a következő kettős integrált:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\, dx\, dy\,.$$

Szemléltessük az integrálási tartományt. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét.

7. Számítsuk ki a

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy$$

integrált.

■ Házi feladatok

1. Számítsuk ki a következő integrált:

$$\iint_H x \, dx \, dy,$$

ahol H az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész.

2. Számítsuk ki a

$$\iint_H \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy,$$

kettős integrált, ahol H az $y \geq \dfrac{1}{x}$, az $y \leq x$ és az $1 \leq x \leq 2$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos síkrész.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{2x+3y} \, dx \, dy$$

kettős integrált.

2. Számítsuk ki a

$$\int_0^1 \int_x^{5x} (x + 6y) \, dy \, dx$$

kettős integrált.

3. Az integrálás sorrendjének felcserélése után számítsuk ki a

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \, \sin y}{y} \, dy \, dx$$

kettős integrált.

■ További feladatok

• Többváltozós implicit függvények

1. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{aligned}$$

egyenletrendszerben u és v az ismeretlenek és x, y adott paraméterek.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $(x_0, y_0) = (1, 2)$, akkor $(u_0, v_0) = (0, 0)$ egy megoldása az egyenletrendszernek.

(b) Bizonyítsuk be, hogy az (x_0, y_0) pontnak van olyan U környezete, hogy tetszőleges $(x, y) \in U$ paraméterek esetén az (u_0, v_0) pont egy V környezetében az egyenletrendszer (u, v) megoldása egyértelmű és az (x, y) változó folytonosan deriválható függvénye.

(c) Számítsuk ki a szóban forgó függvény deriváltját az (x_0, y_0) pontban.

2. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$$

egyenletből z kifejezhető (x, y)-nal az $(x_0, y_0) := (0, 1)$ pont egy környezetében. Azaz: az (x_0, y_0) pont egy alkalmas környezetében van olyan $\varphi \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre

$$\frac{x}{\varphi(x,y)} = \ln \frac{\varphi(x,y)}{y} + 1 \qquad ((x,y) \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Számítsuk ki $\varphi'(x_0, y_0)$-t.

3. Mutassuk meg, hogy az

$$\left(x^2 + y^2\right) \operatorname{tg}(zx) = x - 2y + z$$

egyenletből z kifejezhető (x, y)-nal az $(x_0, y_0) := (2, 1)$ pont egy környezetében, és számítsuk ki $z'(2, 1)$-et (z-vel jelölve az implicit függvényt is).

4. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{aligned} 3x + y - z - u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer

(a) megoldható az x, y, u ismeretlenekre a z függvényében;

(b) megoldható az x, z, u ismeretlenekre a y függvényében;

(c) megoldható az y, z, u ismeretlenekre az x függvényében;

(d) nem oldható meg az x, y, z ismeretlenekre az u függvényében.

12. gyakorlat

Integrálszámítás 2.

Feladatok

1. Számítsuk ki a

$$\iint_H x^2\, y\, dx\, dy$$

kettős integrált, ahol H az

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos síkrész.

2. Számítsuk ki az

$$\iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 4} \ln\bigl(x^2 + y^2\bigr)\, dx\, dy$$

kettős integrált.

3. Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú kör területét.

4. Számítsuk ki az $x\,y = 1$, $x\,y = 4$, valamint az $y = x$ és az $y = 3\,x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét.

5. Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ egyenletű felület (forgásparaboloid) és az (x, y) sík által határolt korlátos térrész térfogatát.

6. Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ egyenletű felület (forgásparaboloid) és az (x, y) sík által határolt korlátos térrész térfogatát.

7. Legyenek a, b és c pozitív valós paraméterek. Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoiddal határolt térrész térfogatát.

8. Jelöljük H_R-rel az origó középpontú R sugarú zárt körlapot. Számítsuk ki az

$$I_R := \iint_{H_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

kettős integrált.

9. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$