Numerikus módszerek 2B.

7. előadás: B-Spline interpoláció

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. október 22.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Definíció:

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény tartója* a következő valós számhalmaz

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 0\}}.$$

$\Omega_\infty := \{\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ alappontrendszer
$S_\ell(\Omega_\infty)$: az Ω_∞ alappontrendszeren értelmezett ℓ-edfokú spline-ok halmaza.

Definíció: B-spline-ok

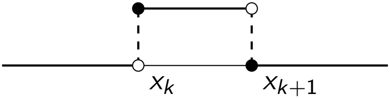
A $B_{\ell,k}\in S_\ell(\Omega_\infty)$ spline-okat *B-spline-oknak* nevezzük, ha

1. $B_{\ell,k}(x)\geq 0 \quad (\forall\, x\in\mathbb{R})$,
2. $\operatorname{supp}(B_{\ell,k})$ minimális,
3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_{\ell,k}(x)\equiv 1 \quad (\forall\, x\in\mathbb{R})$.

Nulladfokú B-spline-ok

$\ell = 0$ esetben a B-spline:

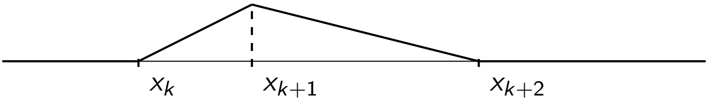
$$B_{0,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [x_k; x_{k+1}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



Elsőfokú B-spline-ok, "Kalap függvények"

$\ell = 1$ esetben a B-spline

$$B_{1,k}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} & \text{ha } \; x \in [x_k; x_{k+1}) \\ \frac{x_{k+2} - x}{x_{k+2} - x_{k+1}} & \text{ha } \; x \in [x_{k+1}; x_{k+2}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

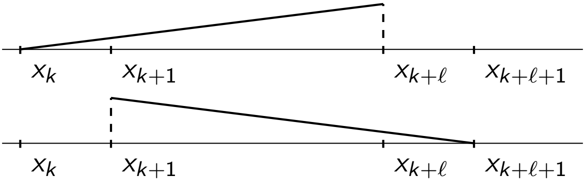


Tétel: Rekurzió

A B-spline-okra a következő rekurzió teljesül:

$$B_{\ell,k}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+\ell} - x_k} \cdot B_{\ell-1,k}(x) + \\ + \frac{x_{k+\ell+1} - x}{x_{k+\ell+1} - x_{k+1}} \cdot B_{\ell-1,k+1}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Biz. nélkül. A lineáris szorzók alakja:



Tartalomjegyzék

Tétel Spline előállítása B-spline-okkal

$$\forall\, S \in S_\ell(\Omega_\infty) \quad \exists\, c_k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{Z}): \quad S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot B_{\ell,k}(x)$$

$$\forall\, S \in S_\ell(\Omega_n) \quad \exists\, c_{-\ell}, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}: \quad S(x) = \sum_{k=-\ell}^{n-1} c_k \cdot B_{\ell,k}(x)$$

Emlékeztető: $\dim S_\ell(\Omega_n) = n + \ell$, így B-spline-okból egy $n + \ell$ elemű bázisra van szükségünk az interpolációs spline előállításához.

Biz. nélkül.

Másodfokú B-spline-ok egyenletes felosztáson

$\ell = 2$ esetben a B-spline a $h_k \equiv h$ esetben

$$B_{2,k}(x) =$$
$$= \frac{1}{2h^2} \cdot \begin{cases} (x - x_k)^2, & x \in [x_k; x_{k+1}] \\ h^2 + 2h(x - x_{k+1}) - 2(x - x_{k+1})^2, & x \in [x_{k+1}; x_{k+2}] \\ (x_{k+3} - x)^2, & x \in [x_{k+2}; x_{k+3}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Biz. gyakorlaton.

Harmadfokú B-spline-ok egyenletes felosztáson

$\ell = 3$ esetben a B-spline a $h_k \equiv h$ esetben

$$B_{3,k}(x) = \frac{1}{6h^3}\cdot$$
$$\cdot \begin{cases} (x - x_k)^3, & I_1 \\ h^3 + 3h^2(x - x_{k+1}) + 3h(x - x_{k+1})^2 - 3(x - x_{k+1})^3, & I_2 \\ h^3 + 3h^2(x_{k+3} - x) + 3h(x_{k+3} - x)^2 - 3(x_{k+3} - x)^3, & I_3 \\ (x_{k+4} - x)^3, & I_4 \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$$

ahol $I_1 := [x_k; x_{k+1}]$, $I_2 := [x_{k+1}; x_{k+2}]$, $I_3 := [x_{k+2}; x_{k+3}]$ és $I_4 := [x_{k+3}; x_{k+4}]$.

Biz. gyakorlaton.

Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Tétel Lineáris interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Tetszőleges $x_{-1}, x_0, \ldots, x_n$ alappontrendszer és $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ függvényértékek esetén az interpolációs spline

$$S(x) = \sum_{k=-1}^{n-1} f(x_{k+1}) \cdot B_{1,k}(x) \ \ (i = 0, \ldots, n).$$

Biz.:

$$B_{1,k}(x_i) = \delta_{i,k+1} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \ i = k+1 \\ 0 & \text{ha } \ i \neq k+1 \end{cases}$$

$$S(x_i) = \sum_{k=-1}^{n-1} f(x_{k+1}) \cdot \delta_{i,k+1} = f(x_i) \quad (i = 0, \ldots, n)$$

Másodfokú interpolációs spline előállítása B-spline-okkal:
Tetszőleges $x_{-2}, x_{-1}, x_0, \ldots, x_n$ egyenletes felosztású alappontrendszer ($h \equiv h_k$) esetén

$$S_2(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} c_k \cdot B_{2,k}(x)$$

alakú spline-t keresünk, melyre adott $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ függvényértékek esetén $f(x_i) = S_2(x_i)$, $(i = 0, \ldots, n)$.

$$B_{2,k}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } \ i = k+1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } \ i = k+2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Behelyettesítve $(i = 0, \ldots, n)$-re
$f(x_i) = S_2(x_i) = \sum_{k=-2}^{n-1} c_k \cdot B_{2,k}(x_i) = \frac{1}{2}\left(c_{i-1} + c_{i-2}\right)$.

Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Hozzá véve a peremfeltételt x_0-ban:

$$f'(a) = f'(x_0) = S_2'(x_0) = \sum_{k=-2}^{n-1} c_k \cdot B_{2,k}'(x_0) = -\frac{1}{h} c_{-2} + \frac{1}{h} c_{-1}.$$

$$B_{2,k}'(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{ha } \; i = k+1 \\ -\frac{1}{h} & \text{ha } \; i = k+2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A $c_{-2}, \ldots, c_{n-1}$ együtthatókat a következő kétátlós LER-ből fogjuk meghatározni:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} f'(a) \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

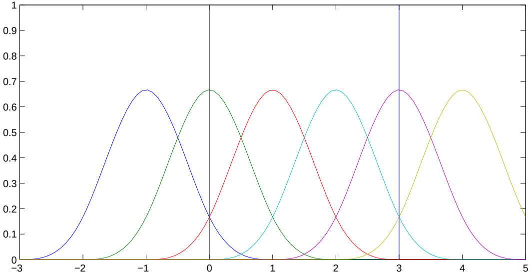
Megjegyzések:

- Az LER első két egyenlete külön megoldható, utána már csak be kell helyettesíteni a többi egyenletbe. (A mátrix felső háromszög alakú.)
- Az $f'(b)$ peremfeltétellel ugyanígy dolgozunk, ekkor az előző LER első egyenlete hiányzik, helyette egy hasonló utolsó egyenlet lép be. Ebben az esetben a LER felső háromszögmátrixú, alulról kezdjük a behelyettesítést.

Köbös interpolációs spline előállítása B-spline-okkal:
Tetszőleges $x_{-3}, \ldots, x_0, \ldots, x_n$ egyenletes felosztású alappontrendszer ($h \equiv h_k$) esetén

$$S_3(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} c_k \cdot B_{3,k}(x)$$

alakú spline-t keresünk, melyre adott $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ függvényértékek esetén $f(x_i) = S_3(x_i)$, $(i = 0, \ldots, n)$.



Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Az előállításhoz a következő táblázat lesz segítségünkre:

	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	x_{k+3}	x_{k+4}
$B_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
$B'_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0
$B''_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$	0

$$f(x_i) = S_3(x_i) = \sum_{k=-3}^{n-1} c_k \cdot B_{3,k}(x_i) = \frac{1}{6}\, c_{i-3} + \frac{4}{6}\, c_{i-2} + \frac{1}{6}\, c_{i-1}$$

$$c_{i-3} + 4 \cdot c_{i-2} + c_{i-1} = 6 \cdot f(x_i) \ \ (i = 0, \ldots, n)$$

Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Az interpolációs feltételekből a tridiagonális LER belseje:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} \dots \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ \dots \end{bmatrix}$$

A hiányzó -1. és $n+1$. egyenletet peremfeltételekből kapjuk meg.

Tétel: $\ell = 1$ esetén

Ha $f \in C^2[a;b]$ és $S \in S_1(\Omega_n)$ lineáris interpolációs spline, akkor

$$\|f - S\|_\infty \le \frac{1}{8}\, h^2 \cdot \|f''\|_\infty$$

ahol $h := \max_{i=1}^{n} |h_k|$.

Biz.: Az I_k részintervallumokra felírjuk a lineáris interpoláció hibáját, ami

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{M_2}{8} h^2 \quad \forall\, x \in I_k,$$

ahol $M_2 = \max_{x \in I_k} |f''(x)|$, innen triviális.

Tétel: $\ell = 3$ Hermite peremfeltétel

Ha $f \in C^4[a;b]$ és $S \in S_3(\Omega_n)$ köbös interpolációs spline Hermite-peremfeltétellel, akkor

$$\|f - S\|_\infty \leq \frac{5}{384}\, h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$
$$\|f' - S'\|_\infty \leq \frac{1}{24}\, h^3 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$
$$\|f'' - S''\|_\infty \leq \frac{3}{8}\, h^2 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$

ahol $h := \max_{i=1}^{n} |h_k|$.

Nem bizonyítjuk.