

# Logika (MSc)

Elsőrendű logika  
A logika szintaktikus tárgyalása

# Eldöntésprobléma megoldása szemantikai eszközökkel

Elsőrendű  $n$  változós  $B$  formula logikailag igaz, ha

- minden  $U$  univerzumon, a változók minden behelyettesítése mellett kapott  $B'$  alapformulák igazak minden, a nyelvnek megfelelő struktúrában.
- $\neg B$  kielégíthetetlen. Egyetlen interpretációban sem igaz.

Ezek a problémák szemantikailag világosak, de megoldásuk a teljes kipróbálást tételezi fel.

# Szemantikus eldöntésprobléma megoldhatósága

Gödel bebizonyította, hogy **„A szemantikus eldöntésprobléma algoritmikusan nem oldható meg – nem létezik univerzális eldöntési algoritmus”**.

Kutatások **„eldönthető formulaosztályok”** keresésére. Logikailag ekvivalens formulaátalakítások.

Az egyik, eldönthető formulaosztályokhoz tartozó formulákkal leírt szemantikus eldöntésproblémára kalkulus keresése (tabló, rezolúciós elv).

A másik, a logika szintaktikai alapon való felépítése, szintaktikus eldöntésprobléma megadása és arra kalkulus kidolgozása.

# Tartalom

A logika szintaktikus tárgyalása

Függelék

# A logika szintaktikus tárgyalása – bevezetés

Eddig a logika szemantikus tárgyalását tisztáztuk. Mivel el akarjuk kerülni az interpretációval kapcsolatos halmazelméleti problémákat a logika tárgyalását szintaktikai alapokra helyezzük.

Az ítéletlogika szintaktikai alapokon való felépítése az **ítéletkalkulus**.

Az elsőrendű logika szintaktikai alapokon való felépítése a **predikátumkalkulus** vagy logikai **függvénykalkulus**.

(bizonyításelméleti tárgyalás = szintaktikus következményfogalom – szintaktikus eldöntésprobléma).

Az ítélet vagy állításlogika **bizonyításelméleti felépítése**.

(Elmélet – egy axiomatizált struktúra)

# Axiómasémák az ítéletlogikában

- Ítéletlogika, mint matematikai struktúra:  $\langle \{i, h\}, \neg, \supset \rangle$
- Axiómák (**axiómasémák**): megadják a műveletek tulajdonságait.
- Az ítéletlogikai nyelvben itt a logikai összekötőjelekből csak a  $\neg, \supset$  párt használjuk (funkcionálisan teljes művelethalmaz).

## Axiómasémák – ítéletlogika Tk.168.o.

$$(A1) \quad X \supset (Y \supset X)$$

$$(A2) \quad (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$$

$$(A3) \quad (\neg X \supset Y) \supset ((\neg X \supset \neg Y) \supset X)$$

Axiómasémák a bővebb logikai művelethalmaz esetén: Id.

► Függelék1

# Axiómák kapcsolata a szemantikával

Az axiómák **tautológiák/logikai törvények**.

## Tétel

Legyen egy  $G$  formula,  $G(X|S)$  az a formula, amit  $G$ -ből  $X$  változójának egy  $S$  formulával való behelyettesítésével kaptunk. Ha  $G$  tautológia, akkor  $G(X|S)$  is az.

*Következmény:* Az axiómákból behelyettesítéssel kapott formulák is logikai törvények – axiómának tekinthetők.

## Tétel (modus ponens)

$$\{A \supset B, A\} \models_0 B$$

## Bizonyításelméleti levezetés fogalma

$G$ -nek  $\mathcal{F}$ -ből való levezetése egy olyan  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_n$  formulasorozat, amelynek utolsó formulája a  $G$ , ahol

- $\varphi_k \in \mathcal{F}$ , vagy
- $\varphi_k$ -t axiómasémákból kaptuk, vagy
- $\varphi_k$ -t a levezetési szabállyal kaptuk  $\varphi_s, \varphi_t$  -ből ( $s, t < k$ ), azaz  $\varphi_k = mp(\varphi_s, \varphi_t)$

Levezetési szabály a modus ponens: **leválasztási szabály**.

Egy  $G$  formula az  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  formulahalmazból levezethető ( $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ ), ha van  $G$ -nek  $\mathcal{F}$ -ből való levezetése. Ez a **szintaktikus következményfogalom**.

Egy  $A$  formulának az üres feltételhalmazból (csak axiómákból) való levezetése az  $A$  **bizonyítása** ( $\vdash_0 A$ ).



Az elsőrendű logika bizonyításelméleti felépítése: **predikátumkalkulus**.  
A szintaktikus következményfogalom definiálásához csak az elsőrendű logika axiomatizálását kell megadni. Ehhez még a kvantorok és a műveletek kapcsolatát kell axiómákkal megadni.

## Axiómasémák – elsőrendű logika

- (B1)  $A \supset (B \supset A)$
- (B2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (B3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (B4)  $\forall x A \supset [A(x \parallel t)]$
- (B5)  $\forall x (A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$
- (B6)  $A \supset \forall x A$ , ahol  $x \notin \text{Par}(A)$
- (B7) a (B1)–(B6) axiómák általánosításai

A levezetés fogalma, a dedukciós tétel és a szintaktikus következményfogalom:  
mint az ítéletlogikában.

Bővített axiómarendszer: [▶ Függelék2](#), [▶ Függelék3](#)

# Bizonyításelmélet helyessége, teljessége

## Tétel

A bizonyításelméleti kalkulus **helyes**, azaz ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ , akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models_0 G$ .

## Tétel

A bizonyításelméleti kalkulus **teljes**, azaz ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models_0 G$ , akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ .

**Biz.:** ítéletkalkulus esetén ld. később; predikátumkalkulus teljességét nem bizonyítjuk.

Egy  $G$  formula az  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  formulahalmazból **levezethető** ( $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ ), ha van  $G$ -nek  $\mathcal{F}$ -ből való levezetése.

$G$  **bizonyítható** ( $\vdash_0 G$ ), ha a  $G$  formula bármely  $\mathcal{F}$  feltételhalmazból levezethető.

Egy  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  formulahalmaz **ellentmondásos** (**inkonzisztens**), ha  $\mathcal{F} \vdash_0 G$  és  $\mathcal{F} \vdash_0 \neg G$ .

Egyébként a formulahalmaz **nem ellentmondásos** (**konzisztens**).

# Tételek I.

## Tétel

Két levezetés konkatenációja is levezetés. Ha  $\mathcal{F}$ -ből levezethető  $G_1$  és  $\mathcal{S}$ -ből levezethető  $G_2$ , akkor a két levezetés konkatenációja az  $\mathcal{F} \cup \mathcal{S}$ -ből való levezetés.

## Tétel

Ha  $\mathcal{F}$ -ből levezethető  $G_1$  és  $\mathcal{S}$ -ből levezethető  $G_2$ , valamint  $\{G_1, G_2\}$ -ből levezethető  $A$ , akkor az  $\mathcal{F} \cup \mathcal{S}$ -ből levezethető  $A$ .

## Az eldöntésprobléma tétele a bizonyításelméletben

Az  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G \iff$   
 $\vdash_0 F_1 \supset (F_2 \supset (\dots \supset (F_{n-1} \supset (F_n \supset G)) \dots))$ .

**Biz.:** a dedukciós tétel következménye

## Tételek II.

### Tétel

Ha  $\mathcal{F}$ -ből levezethető  $G$ , akkor az  $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$  ellentmondásos.

### Tétel

Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  ellentmondásos, akkor kielégíthetetlen.

### Tétel

Legyen  $A$  egy formula, és  $\mathcal{F}$  egy konzisztens formulahalmaz, ekkor

- (a)  $\mathcal{F}, \neg A$  ellentmondásos, akkor és csak akkor, ha  $\mathcal{F} \vdash_0 A$ .
- (b)  $\mathcal{F}, A$  ellentmondásos, akkor és csak akkor, ha  $\mathcal{F} \vdash_0 \neg A$ .

# Tétel – bizonyítás

Az előző dia utolsó tételének bizonyítása.

(a)  $\Rightarrow$ : Ha  $\mathcal{F}, \neg A$  ellentmondásos, akkor  $\mathcal{F}, \neg A \vdash_0 B$  és  $\mathcal{F}, \neg A \vdash_0 \neg B$ . A dedukciós tétel miatt  $\mathcal{F} \vdash_0 \neg A \supset B$  és  $\mathcal{F} \vdash_0 \neg A \supset \neg B$ . A két levezetés konkatenációját folytatva a 3. axióma  $(\neg A \supset B) \supset (\neg A \supset \neg B) \supset A$  alakjával, majd a  $\neg A \supset B$  és a  $\neg A \supset \neg B$  leválasztásával megkapjuk az  $A$  levezetését az  $\mathcal{F}$ -ből.

$\Leftarrow$ : Ha  $\mathcal{F} \vdash_0 A$ , akkor  $\mathcal{F}, \neg A$  ellentmondásos, mivel  $\mathcal{F}, \neg A \vdash_0 A$  és  $\mathcal{F}, \neg A \vdash_0 \neg A$

(b)  $\Rightarrow$ :  $\mathcal{F}, A$  ellentmondásos, akkor mivel minden, ami  $\mathcal{F}, A$ -ból levezethető, az  $\mathcal{F}, \neg\neg A$ -ból is levezethető; tehát, ha  $\mathcal{F}, A$  ellentmondásos, akkor  $\mathcal{F}, \neg\neg A$  is az. Használva a tétel (a) részét,  $A$  helyett  $\neg A$ -ra:  $F \models_0 \neg A$ .

$\Leftarrow$ : Ha  $F \vdash_0 \neg A$ , akkor  $\mathcal{F}, A$  ellentmondásos, mivel  $F, A \vdash_0 A$  és  $F, A \vdash_0 \neg A$ .

## Kalmár László lemmája

Egy  $k$  változós  $G$  formula igazságtáblájának minden sorában  $X'_1, X'_2, \dots, X'_k \vdash_0 G'$ .

## Tétel

Ha  $X'_1, X'_2, \dots, X'_k \vdash_0 G'$  és  $\neg X'_1, X'_2, \dots, X'_k \vdash_0 G'$ , akkor  $X'_2, \dots, X'_k \vdash_0 G'$ .

## Tétel

Ha  $G$  tautológia, akkor  $G$  bizonyítható (gyenge teljesség).

# Teljesség bizonyítása (Gödel)

## Tétel

Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models_0 G$ , akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ .

*Bizonyítás a Gödel-féle gondolatmenettel:*

- 1 Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models_0 G$ , akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \cup \{\neg G\}$  kielégíthetetlen.
- 2 Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \cup \{\neg G\}$  ellentmondásos (inkonzisztens), akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ .



Azt tudjuk, hogy az ellentmondásos formulahalmaz kielégíthetetlen. Ha meg tudjuk mutatni, hogy a **kielégíthetetlenség** mint **szemantikus** tulajdonság és az **inkonzisztencia** mint **szintaktikus** tulajdonság a formulahalmazok halmazát ugyanúgy osztja két diszjunkt részre, akkor a bizonyítás a következő lenne:

Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models_0 G$ , akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \cup \{\neg G\}$  kielégíthetetlen. Ha egy formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor ellentmondásos (inkonzisztens) is.

Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \cup \{\neg G\}$  ellentmondásos, akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ .

Azt nem tudjuk közvetlenül belátni, hogy ha egy formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor ellentmondásos (inkonzisztens) is. E helyett belátjuk azt, hogy ha egy formulahalmaz ellentmondásmentes (konzisztens), akkor kielégíthető.

## Tétel

Ha egy  $\mathcal{F}$  formulahalmaz kielégíthető, akkor konzisztens.

**Biz.:** A helyesség miatt ha  $\mathcal{F} \vdash_0 A$ , akkor  $\mathcal{F} \models_0 A$ . Ezért  $\mathcal{F} \vdash_0 \neg A$  nem lehetséges, mert akkor  $\mathcal{F}$  kielégíthetetlen lenne. Vagyis  $\mathcal{F}$  konzisztens.

Az ítéletkalkulus tehát a szemantikus tárgyalásával ekvivalens szintaktikus tárgyalásmód. A bizonyításelméleti levezetés konstrukciója a tételbizonyítás eszköze, szintaktikus **kalkulus**.

# Tartalom

A logika szintaktikus tárgyalása

Függelék

# Az ítéletkalkulus axiómasémái kibővítve

- (A1)  $X \supset (Y \supset X)$
- (A2)  $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$
- (A3)  $(\neg X \supset Y) \supset ((\neg X \supset \neg Y) \supset X)$
- (A4)  $\neg\neg X \supset X$
- (A5)  $X \supset (Y \supset X \wedge Y)$
- (A6)  $X \wedge Y \supset X$
- (A7)  $X \wedge Y \supset Y$
- (A8)  $(X \supset Z) \supset ((Y \supset Z) \supset (X \vee Y \supset Z))$
- (A9)  $X \supset X \vee Y$
- (A10)  $Y \supset X \vee Y$

# A predikátumkalkulus axiómasémái kibővítve

- (C1)  $A \supset (B \supset A)$
- (C2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (C3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (C4)  $\neg\neg A \supset A$
- (C5)  $A \supset (B \supset A \wedge B)$
- (C6)  $A \wedge B \supset A$
- (C7)  $A \wedge B \supset B$
- (C8)  $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
- (C9)  $A \supset A \vee B$
- (C10)  $B \supset A \vee B$
- (C11)  $\forall x A \supset [A(x \parallel t)]$
- (C12)  $\forall x (B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$ , ahol  $x \notin \text{Par}(B)$
- (C13)  $[A(x \parallel t)] \supset \exists x A$
- (C14)  $\forall x (A \supset B) \supset (\exists x A \supset B)$ , ahol  $x \notin \text{Par}(B)$ .
- (C15)  $A \supset \forall x A$ , ahol  $x \notin \text{Par}(A)$
- (C16) a (C1)–(C15) axiómák általánosításai

# Az egyenlőségjeles predikátumkalkulus axiómasémái

- (D1)  $A \supset (B \supset A)$
- (D2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (D3)  $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
- (D4)  $\forall x A \supset [A(x \parallel t)]$
- (D5)  $\forall x (A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$
- (D6)  $A \supset \forall x A$ , ahol  $x \notin \text{Par}(A)$
- (D7)  $t = t$
- (D8)  $t_1 = t_{n+1} \supset \dots \supset t_n = t_{2n} \supset f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{2n})$
- (D9)  $t_1 = t_{n+1} \supset \dots \supset t_n = t_{2n} \supset P(t_1, t_2, \dots, t_n) \supset P(t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{2n})$
- (D10) a (D1)–(D9) axiómák általánosításai