Elsőrendű logika alapjai

August 13, 2020

Tartalomjegyzék

1 Feladatok

1.1 Formalizálás

Formalizáljuk a következő mondatokat! Milyen különböző univerzumokkal lehetne dolgozni és azok hogyan változtatják a formulákat?

1. Egyfajtájú példa
   (a) Minden informatikus tud logikusan gondolkozni.
   (b) Aki tud logikusan gondolkozni, az okos.
   (c) Minden informatikus okos.
2. Egyfajtájú eset
   (a) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
   (b) Szarvasnak, a szarvasbogárnak kitines a szárnyfedője.
   (c) Egy rovarnak nincsen kitines szárnyfedője vagy bogár.
   (d) K: Szarvas (egy) bogár.
3. Egyfajtájú függvénnyel
   (a) Ha két számot összeadunk, akkor nagyobb számot kapunk.
   (b) Van olyan szám, aminek a négyzete önmagával egyenlő.
   (c) Ha egy számhoz hozzáadunk nullát, akkor önmagát kapjuk.
   (d) Egy számot szorozva nullával nullát kapunk.

1.2 Értéktábla

Készítsük el a következő formulákhoz és hozzájuk tartozó interpretációhoz az értéketáblát. Mi olvasható le a formula szemantikus tulajdonságairól az értéktábla alapján?

1. Formula: $\forall x \exists y P(x,y) \wedge Q(\bar{a}) \vee P(\bar{a},z)$
   Interpretáció: $U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I - (x < y), |Q(x)|^I - (x == 0), |\bar{a}|^I = 0$
2. Formula: $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall x P(x,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$
   Interpretáció: $U = \{1,2,3\}, |P(x,y)|^I - x == y, |Q(x)|^I -$ x páros,
   $|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I -$ x rákövetkezője univerzumon belül
3. Formula: $\exists x \forall y P(f(x,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$
   Interpretáció: $U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I = (x \geq y), |Q(x)|^I = (x \geq 0),$
   $|\bar{a}|^I = 0, |f(x)|^I$ - összeadás univerzumon belül
4. Formula: $(\forall x P(x) \vee \neg Q(y)) \supset (\neg \exists z Q(f(z)) \supset \forall k (P(k) \vee Q(w)))$
   Interpretáció: $U = \{0,1\}, |P|^I = \{b\}, |Q|^I = \{a\},$
   $f|^I(a) = \{b\}, |f|^I(b) = \{b\}$
5. Formula: $\forall x (P(x) \wedge Q(x,\bar{a})) \supset (\exists x Q(x,y) \vee \neg \forall y (P(\bar{a}) \supset Q(f(y),\bar{a})) \supset P(v))$
   Interpretáció: $U = \{a,b\}, |P|^I = \{1\}, |Q|^I = \{(0,0),(1,1)\}$
   $|f|^I(0) = \{1\}, |f|^I(1) = \{0\}, |a|^I = 0$

1.3 Tautológia vizsgálat

Döntsük el a következő formulákról, hogy tautológiák-e!

1. $\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \supset \forall x P(x)$
2. $\forall x (P(x) \wedge R(x)) \supset \forall x P(x)$
3. $P(x,y) \vee \neg Q(x) \supset \exists x Q(x) \vee (\exists x Q(x) \supset P(x,y) \vee \neg Q(x))$
4. $P(x,y) \supset \neg Q(x) \wedge Q(x) \supset P(x,y)$

2 Megoldások

2.1 Formalizálás

1. U (univerzum) = {emberek}

   Predikátumok:

   - I(x) - x informatikus
   - L(x) - x logikusan gondolkozik
   - O(x) - x okos

   Formalizált állítások:

   (a) $\forall x(I(x) \supset L(x))$

   (b) $\forall x(L(x) \supset O(x))$

   (c) $\forall x(I(x) \supset O(x))$

2. **Megoldás 1:** U (univerzum) = {állatok}

   Predikátumok:

   - R(x) - x rovar
   - B(x) - x bogár
   - K(x) - x kitines a szárnyfedele
   - S(x) - x szarvasbogár

   Konstans: $\bar{a}$ - Szarvas

   Formalizált állítások:

   (a) $\forall x(B(x) \supset R(x)) \wedge \neg\forall x(R(x) \supset B(x))$

   (b) $S(\bar{a}) \wedge K(\bar{a})$

   (c) $\forall x(R(x) \supset (\neg K(x) \vee B(x)))$

   (d) $B(\bar{a})$

   Megoldás 2: U (univerzum) = {rovarok}

   Predikátumok:

   - B(x) - x bogár
   - K(x) - x kitines a szárnyfedele
   - S(x) - x szarvasbogár

   Konstans: $\bar{a}$ - Szarvas

   Formalizált állítások:

   (a) $\neg\forall x B(x)$

   (b) $S(\bar{a}) \wedge K(\bar{a})$

   (c) $\forall x(\neg K(x) \vee B(x))$

   (d) $B(\bar{a})$

3. U (univerzum) = {természetes számok}

   Predikátumok:

   - N(x,y) - $(x > y)$
   - E(x,y) - $(x == y)$

   Függvények:

   - p(x,y) - $(x + y)$
   - m(x,y) - $(x * y)$
   - s(x) - x^2

   Konstans: $\bar{a}$ - nulla

   Formalizált állítások:

   (a) $\forall x\forall y(N(p(x,y),x) \wedge N(p(x,y),y))$

   (b) $\exists x E(x, s(x))$

   (c) $\forall x(E(x, p(\bar{a}, x)))$

   (d) $\forall x(E(m(x, \bar{a}), \bar{a}))$

2.2 Értéktábla

1. $\forall x \exists y P(x,y) \wedge Q(\bar{a}) \vee P(\bar{a},z)$

   Prímkomponensek: $\forall x \exists y P(x,y)$, $Q(\bar{a})$, $P(\bar{a},z)$
   Szabad változók: z

   Értéktábla adott interpretációhoz:

z	$\forall x \exists y P(x,y)$ (1)	$Q(\bar{a})$ (2)	$P(\bar{a},z)$ (3)	$1 \wedge 2 \vee 3$
0	h	i	h	h
1	h	i	i	i

   Kvantált formula kiszámítása:
   $\forall x \exists y P(x,y) = \exists y P(0,y) \wedge \exists y P(1,y) =$
   $(P(0,0) \vee P(0,1)) \wedge (P(1,0) \vee P(1,1)) = (h \vee i) \wedge (h \vee h) = h$

   Az értéktábla alapján:

   - Kielégíthető, mert az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol $igaz$.
   - Biztos nem kielégíthetetlen, mert az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol $hamis$.
   - Biztos nem logikai törvény, mert az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol $hamis$.

---

2. $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall x P(x,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

   Változóiban tiszta alak pl: $\exists w \exists y (P(w,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall z P(z,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

   Prímkomponensek: $\exists w \exists y (P(w,y) \wedge Q(f(\bar{a})))$, $\forall z P(z,\bar{a})$, $P(f(x),\bar{b})$
   Szabad változók: x

   Értéktábla adott interpretációhoz:

x	$\exists w \exists y (P(w,y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1)	$\forall z P(z,\bar{a})$ (2)	$P(f(x),\bar{b})$ (3)	$1 \supset (2 \wedge 3)$
1	i	h	h	h
2	i	h	i	h
3	i	h	h	h

   Kvantált formulák kiszámítása:

   - $\exists w \exists y (P(w,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$
     $\exists y (P(1,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y (P(2,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y (P(3,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$
     $[(P(1,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1,3) \wedge Q(f(\bar{a}))]\vee$
     $[(P(2,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2,3) \wedge Q(f(\bar{a}))]\vee$
     $[(P(3,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3,3) \wedge Q(f(\bar{a}))] = i$

   - $\forall z P(z,\bar{a}) = P(1,\bar{a}) \wedge P(2,\bar{a}) \wedge P(3,\bar{a}) = i \wedge h \wedge h = h$

   Az értéktábla alapján:

   - Lehet kielégíthető, mert lehet, hogy egy másik interpretációban van $igaz$ helyettesítési értéke.

- Lehet kielégíthetetlen, hiszen a többi interpretációban szintén lehet, hogy minden változókiértékelésben *hamis* a helyettesítési értéke.
- Biztos nem logikai törvény, mert az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol *hamis*.

---

3. $\exists x \forall y P(f(x,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

   Változóiban tiszta alak pl: $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

   Prímkomponensek: $\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a})$, $Q(z)$, $P(z,x)$, $P(v,\bar{a})$
   Szabad változók: z, x, v

   Értéktábla adott interpretációhoz:

z	x	v	$\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a})$	$Q(z)$	$P(z,x)$	$P(v,\bar{a})$	$1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$
0	0	0	i	i	i	i	i
0	0	1	i	i	i	i	i
0	1	0	i	i	h	i	i
1	0	0	i	i	i	i	i
0	1	1	i	i	h	i	i
1	0	1	i	i	i	i	i
1	1	0	i	i	i	i	i
1	1	1	i	i	i	i	i

   Kvantált formulák kiszámítása:

   - TODO

   Az értéktábla alapján:

   - Kielégíthető, mert az adott interpretációban volt olyan változókiértékelés, ahol *igaz*.
   - Biztos nem kielégíthetetlen, hiszen az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol *igaz*.
   - Lehet logikai törvény, hiszen a többi interpretációban még lehet *igaz* minden helyettesítési érték.

---

4. $(\forall x P(x) \vee \neg Q(y)) \supset (\neg \exists z Q(f(z)) \supset \forall k(P(k) \vee Q(w)))$

   Változóiban tiszta alak pl: Már abban van.

   Prímkomponensek: $\forall x P(x)$, $Q(y)$, $\exists z Q(f(z)$, $\forall k(P(k) \vee Q(w))$
   Szabad változók: y, w

   Értéktábla adott interpretációhoz:

	y	**w**	$\forall x P(x)$ (1)	$Q(y)$ (2)	$\exists z Q(f(z))$ (3)	$\forall k(P(k) \vee Q(w))$ (4)	$(1 \vee 2) \supset (\neg 3 \supset 4)$
κ_1	a	a	h	i	h	i	i
κ_2	a	b	h	i	h	h	i
κ_3	b	a	h	h	h	i	i
κ_4	b	b	h	h	h	h	h

Kvantált formulák kiszámítása:

- $|\forall x P(x)|^{I,\kappa_{1-4}} = |\forall x P(x)|^I = |P(a)|^I \wedge |P(b)|^I = h \wedge i = h$
- $|\exists z Q(f(z))|^{I,\kappa_{1-4}} = |Q(f(a)) \vee Q(f(b))|^I = h \vee h = h$

- $|Q(y)|^{I,\kappa_{1,2}} = |Q(a)|^I = i$
- $|Q(y)|^{I,\kappa_{3,4}} = |Q(b)|^I = h$

- $|\forall k(P(k) \vee Q(w))|^{I,\kappa_{1,3}} = |P(a) \vee Q(w)|^{I,\kappa_{1,3}} \wedge |P(b) \vee Q(w)|^{I,\kappa_{1,3}} = |P(a) \vee Q(a)|^I \wedge |P(b) \vee Q(a)|^I = i$
  $|\forall k(P(k) \vee Q(w))|^{I,\kappa_{2,4}} = |P(a) \vee Q(w)|^{I,\kappa_{2,4}} \wedge |P(b) \vee Q(w)|^{I,\kappa_{2,4}} = |P(a) \vee Q(b)|^I \wedge |P(b) \vee Q(b)|^I = h$

Az értéktábla alapján:

- Kielégíthető, mert az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol *igaz*.
- Biztos nem kielégíthetetlen, mert az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol *hamis*.
- Biztos nem logikai törvény, mert az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol *hamis*.

---

5. $\forall x(P(x) \wedge Q(x, \overline{a})) \supset (\exists x Q(x, y) \vee \neg \forall y(P(\overline{a}) \supset Q(f(y), \overline{a})) \supset P(v))$

Változóiban tiszta alak pl: $\forall x(P(x) \wedge Q(x, \overline{a})) \supset (\exists z Q(z, y) \vee \neg \forall w(P(\overline{a}) \supset Q(f(w), \overline{a})) \supset P(v))$

Prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge Q(x, \overline{a})), \exists z Q(z, y), \forall w(P(\overline{a}) \supset Q(f(w), \overline{a})), P(v)$
Szabad változók: y, v

Értéktábla adott interpretációhoz:

	y	**v**	$\forall x(P(x) \wedge Q(x, \overline{a}))$	$\exists z Q(z, y)$	$\forall w(P(\overline{a}) \supset Q(f(w), \overline{a}))$	$P(v)$	**F**
κ_1	0	0	h	i	i	h	i
κ_2	0	1	h	i	i	i	i
κ_3	1	0	h	i	i	h	i
κ_4	1	1	h	i	i	i	i

Kvantált formulák kiszámítása:

- $|\forall x(P(x) \wedge Q(x, \overline{a}))|^{I,\kappa_{1-4}} = |\forall x(P(x) \wedge Q(x, \overline{a}))|^I = |P(0) \wedge Q(0,0)|^I \wedge |P(1) \wedge Q(1,0)|^I = h$
- $|\exists z Q(z, y)|^{I,\kappa_{1,2}} = |Q(0,0) \vee Q(1,0)|^I = i$
- $|\exists z Q(z, y)|^{I,\kappa_{3,4}} = |Q(0,1) \vee Q(1,1)|^I = i$

- $|\forall w(P(\overline{a}) \supset Q(f(w), \overline{a}))|^{I,\kappa_{1-4}} = |\forall w(P(\overline{a}) \supset Q(f(w), \overline{a}))|^I =$
  $|(P(0) \supset Q(f(0), 0))|^I \wedge |(P(0) \supset Q(f(1), 0))|^I = i$

- $|P(v)|^{I,\kappa_{1,3}} = |P(0)|^I = h$
- $|P(v)|^{I,\kappa_{2,4}} = |P(1)|^I = i$

Az értéktábla alapján:

- Kielégíthető, mert az adott interpretációban volt olyan változókiértékelés, ahol *igaz*.
- Biztos nem kielégíthetetlen, hiszen az adott interpretációban van olyan változókiértékelés, ahol *igaz*.
- Lehet logikai törvény, hiszen a többi interpretációban még lehet *igaz* minden helyettesítési érték.

2.3 Tautológia vizsgálat

1. $\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \supset \forall x P(x)$

   Prímkomponensek: $\forall x P(x)$, $\forall x R(x)$

   Quine-féle táblázat:

$\forall x P(x)$	$\forall x R(x)$	$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \supset \forall x P(x)$
A	B	$(A \wedge B \supset A)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

   A táblázatból látható, hogy a prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén igaz lenne a formula, így tautológia.

2. $\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall x P(x)$

   Prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge R(x))$, $\forall x P(x)$

   Quine-féle táblázat:

$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	$\forall x P(x)$	$\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall x P(x)$
A	B	$(A \supset B)$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

   A táblázatból látható, hogy a prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén nem minden esetben igaz a formula, így nem tautológia.

3. $P(x,y) \vee \neg Q(x) \supset \exists x Q(x) \vee (\exists x Q(x) \supset P(x,y) \vee \neg Q(x))$

   Prímkomponensek: $P(x,y)$, $Q(x)$, $\exists x Q(x)$

   Quine-féle táblázat:

$P(x,y)$	$Q(x)$	$\exists x Q(x)$	$P(x,y) \vee \neg Q(x) \supset \exists x Q(x) \vee (\exists x Q(x) \supset P(x,y) \vee \neg Q(x))$
A	B	C	$(A \vee \neg B) \supset C \vee (C \supset A \vee \neg B)$
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	i
h	i	i	i
i	h	h	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	i

   A táblázatból látható, hogy a prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén igaz lenne a formula, így tautológia.

4. $P(x,y) \supset \neg Q(x) \wedge Q(x) \supset P(x,y)$

   Prímkomponensek: $P(x,y)$, $Q(x)$

   Quine-féle táblázat:

$P(x,y)$	$Q(x)$	$P(x,y) \supset \neg Q(x) \wedge Q(x) \supset P(x,y)$
A	B	$A \supset ((\neg B \wedge B) \supset A)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A táblázatból látható, hogy a prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén igaz lenne a formula, így tautológia.