1 Formula igaz- és hamishalmazának számítása igazságértékelés fával

Számítsuk ki egy formula igaz- és hamishalmazát igazságértékelés fával! Így látható lesz, hogy tényleg megkapjuk az összes interpretációt. (Használt bázis: A, B)

1. $(A \supset B) \wedge \neg(A \wedge B)$

   - Megoldás hamishalmazra:

     $\varphi((A \supset B) \wedge \neg(A \wedge B))^h(1)$

     $\varphi(A \supset B)^h(2)$ $\quad$ $\varphi(\neg(A \wedge B))^h(3)$

     $\varphi(A)^i$ $\quad$ $\varphi(A \wedge B)^i(4)$

     $\varphi(B)^h$ $\quad$ $\varphi(A)^i$

     $\varphi(B)^i$

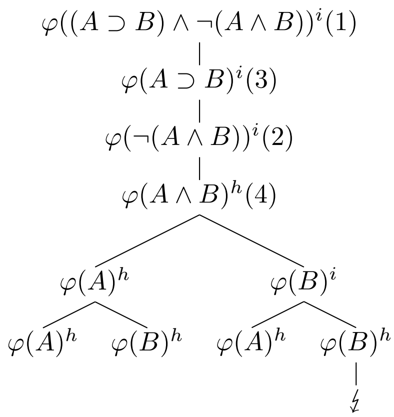
     Az egyes ágakon az alábbi feltételeket kapjuk ($\sim$ jelentse a következőt: lehet igaz vagy hamis is, az adott ágon nem kaptunk feltételt az adott ítéletváltozóra):

1. ág		2.ág	
A	B	A	B
i	h	i	i

     A kapott feltételek alapján az alábbi interpretációk elemei a hamishalmaznak:

A	B
i	h
i	i

- Megoldás igazhalmazra:



Az egyes ágakon az alábbi feltételeket kapjuk:

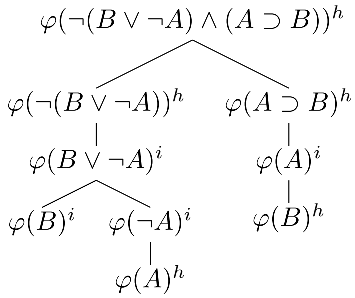
1. ág		2. ág		3. ág	
A	B	A	B	A	B
h	$\sim$	h	h	h	i

A kapott feltételek alapján az alábbi interpretációk elemei az igazhalmaznak:

A	B
h	i
h	h

2. $\neg(B \vee \neg A) \wedge (A \supset B)$

- Megoldás hamishalmazra:



Az egyes ágakon az alábbi feltételeket kapjuk:

1. ág		2. ág		3. ág	
A	B	A	B	A	B
$\sim$	i	h	$\sim$	i	h

A kapott feltételek alapján az alábbi interpretációk elemei a hamishalmaznak:

A	B
i	i
h	i
h	h
i	h

- Megoldás igazhalmazra:

$$\varphi(\neg(B \vee \neg A) \wedge (A \supset B))^i (1)$$

$$\varphi(\neg(B \vee \neg A))^i (2)$$

$$\varphi(A \supset B)^i (5)$$

$$\varphi(B \vee \neg A)^h (3)$$

$$\varphi(B)^h$$

$$\varphi(\neg A)^h (4)$$

$$\varphi(A)^i$$

$$\begin{array}{cc} \varphi(A)^h & \varphi(B)^i \\ \lightning & \lightning \end{array}$$

Minden ágon ellentmondásra jutottunk, vagyis a formula igazhalmaza üres (a formula kielégíthetetlen.)

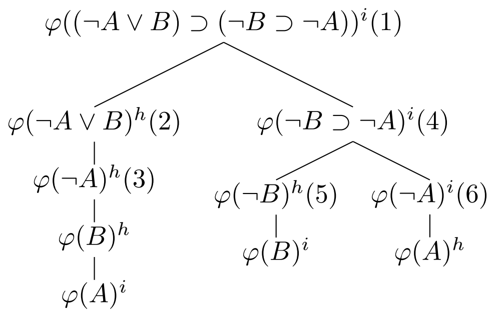
3. $(\neg A \vee B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

- Megoldás hamishalmazra:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \varphi((\neg A \vee B) \supset (\neg B \supset \neg A))^h (1) & \\
 & | & \\
 & \varphi(\neg A \vee B)^i (5) & \\
 & | & \\
 & \varphi(\neg B \supset \neg A)^h (2) & \\
 & | & \\
 & \varphi(\neg B)^i (3) & \\
 & | & \\
 & \varphi(\neg A)^h (4) & \\
 & | & \\
 & \varphi(B)^h & \\
 & | & \\
 & \varphi(A)^i & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \varphi(\neg A)^i (6) & & \varphi(B)^i \\
 | & & | \\
 \varphi(A)^h & & \lightning \\
 | & & \\
 \lightning & &
\end{array}
$$

Minden ágon ellentmondásra jutottunk, vagyis a formula hamishalmaza üres (a formula tautológia.)

- Megoldás igazhalmazra:



Az egyes ágakon az alábbi feltételeket kapjuk:

1. ág		2. ág		3. ág	
A	B	A	B	A	B
i	h	$\sim$	i	h	$\sim$

A kapott feltételek alapján az alábbi interpretációk elemei az igazhalmaznak:

A	B
i	h
i	i
h	i
h	h

4. $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

- Megoldás hamishalmazra:

$$\varphi((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))^h(1)$$

$$\varphi(\neg A \vee B)^h(2) \qquad \varphi(A \vee \neg B)^h(4)$$

$$\varphi(\neg A)^h(3) \qquad \varphi(A)^h$$

$$\varphi(B)^h \qquad \varphi(\neg B)^h(5)$$

$$\varphi(A)^i \qquad \varphi(B)^i$$

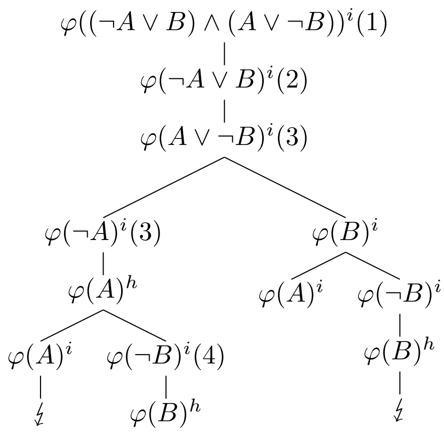
Az egyes ágakon az alábbi feltételeket kapjuk:

1. ág		2.ág	
A	B	A	B
i	h	h	i

A kapott feltételek alapján az alábbi interpretációk elemei a hamishalmaznak:

A	B
i	h
h	i

- Megoldás igazhalmazra:



Az egyes ágakon az alábbi feltételeket kapjuk:

2. ág		3.ág	
A	B	A	B
h	h	i	i

A kapott feltételek alapján az alábbi interpretációk elemei az igazhalmaznak:

A	B
i	i
h	h

2 Szemantikus következmény vizsgálata igazságértékelés fával

Vizsgáljuk meg a következő szemantikus következményeket igazságértékelés fával! (visszakövetkeztetéssel illetve dedukciós tétellel elindítva)

1. $\{(K \vee M) \wedge \neg O, (K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K), \neg O\} \models_0 O \supset \neg K$

   - Visszakövetkeztetéssel indulunk el. Az átalakított formulahalmaz: $\{(K \vee M) \wedge \neg O, (K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K), \neg O, \neg(O \supset \neg K)\}$
     Vizsgáljunk igazhalmazt:

     $$\varphi((K \vee M) \wedge \neg O \wedge (K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K) \wedge \neg O \wedge \neg(O \supset \neg K))^i (1)$$
     $$|$$
     $$\varphi(K \vee M)^i$$
     $$|$$
     $$\varphi(\neg O)^i (2)$$
     $$|$$
     $$\varphi(K \supset \neg M)^i$$
     $$|$$
     $$\varphi(\neg M \supset K)^i$$
     $$|$$
     $$\varphi(\neg O)^i$$
     $$|$$
     $$\varphi(\neg(O \supset \neg K))^i (3)$$
     $$|$$
     $$\varphi(O)^h$$
     $$|$$
     $$\varphi(O \supset \neg K)^h (4)$$
     $$|$$
     $$\varphi(O)^i$$
     $$|$$
     $$\varphi(\neg K)^h$$
     $$|$$
     $$\lightning$$

     Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula igazsághalmaza üres, azaz a formula kielégíthetetlen. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.

   - A dedukciós tétel többszöri alkalmazásával indulunk el. A kapott formuláról be kell látni, hogy tautológia. Ehhez a hamishalmazát vizsgáljuk:

$$\varphi((K \vee M) \wedge \neg O \supset (K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K) \supset \neg O \supset O \supset \neg K)^h(1)$$

$$\varphi((K \vee M) \wedge \neg O)^i$$

$$\varphi((K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K))^i$$

$$\varphi(\neg O)^i(2)$$

$$\varphi(O)^i$$

$$\varphi(\neg K)^h$$

$$\varphi(O)^h$$

$$\lightning$$

Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula hamishalmaza üres, azaz a formula tautológia. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.

2. $\{N \wedge J \supset S, J \supset N, J \vee \neg S\} \models_0 N \vee \neg J$

- Visszakövetkeztetéssel indulunk el. Az átalakított formulahalmaz: $\{N \wedge J \supset S, J \supset N, J \vee \neg S, \neg(N \vee \neg J)\}$
  Vizsgáljunk igazhalmazt:

$$\varphi((N \wedge J \supset S) \wedge (J \supset N) \wedge (J \vee \neg S) \wedge (\neg(N \vee \neg J)))^i(1)$$

$$\varphi(N \wedge J \supset S)^i$$

$$\varphi(J \supset N)^i(5)$$

$$\varphi(J \vee \neg S)^i$$

$$\varphi(\neg(N \vee \neg J))^i(2)$$

$$\varphi(N \vee \neg J)^h(3)$$

$$\varphi(N)^h$$

$$\varphi(\neg J)^h(4)$$

$$\varphi(J)^i$$

$$\varphi(J)^h \qquad \varphi(N)^i$$

$$\lightning \qquad\qquad \lightning$$

Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula igazsághalmaza üres, azaz a formula kielégíthetetlen. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.

- A dedukciós tétel többszöri alkalmazásával indulunk el. A kapott formuláról be kell látni, hogy tautológia. Ehhez a hamishalmazát vizsgáljuk:

$$\varphi((N \wedge J \supset S) \supset (J \supset N) \supset J \vee \neg S \supset N \vee \neg J)^h (1)$$
$$|$$
$$\varphi(N \wedge J \supset S)^i$$
$$|$$
$$\varphi(J \supset N)^i (4)$$
$$|$$
$$\varphi(J \vee \neg S)^i$$
$$|$$
$$\varphi(N \vee \neg J)^h (2)$$
$$|$$
$$\varphi(N)^h$$
$$|$$
$$\varphi(\neg J)^h (3)$$
$$|$$
$$\varphi(J)^i$$
$$\begin{array}{cc} \varphi(J)^h & \varphi(N)^i \\ | & | \\ \lightning & \lightning \end{array}$$

  Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula hamishalmaza üres, azaz a formula tautológia. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.

3. $\{F \supset K, K \supset A, F \vee H, H \wedge S \supset A, \neg A\} \models_0 \neg F$

   - Visszakövetkeztetéssel indulunk el. Az átalakított formulahalmaz: $\{F \supset K, K \supset A, F \vee H, H \wedge S \supset A, \neg A, F\}$
     Vizsgáljunk igazhalmazt:

$$\varphi((F \supset K) \wedge (K \supset A) \wedge (F \vee H) \wedge (H \wedge S \supset A) \wedge \neg A \wedge F)^i (1)$$

$$\varphi(F \supset K)^i (4)$$

$$\varphi(K \supset A)^i (3)$$

$$\varphi(F \vee H)^i$$

$$\varphi(H \wedge S \supset A)^i$$

$$\varphi(\neg A)^i (2)$$

$$\varphi(F)^i$$

$$\varphi(A)^h$$

$$\begin{array}{ccc}
\multicolumn{2}{c}{\varphi(K)^h} & \varphi(A)^i \\
\varphi(F)^h & \varphi(K)^i & \lightning \\
\lightning & \lightning &
\end{array}$$

Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula igazsághalmaza üres, azaz a formula kielégíthetetlen. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.

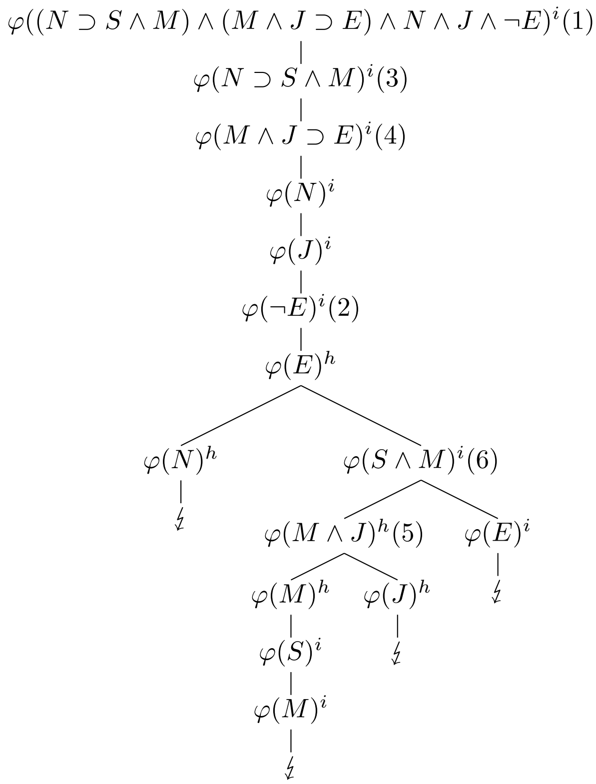
- A dedukciós tétel többszöri alkalmazásával indulunk el. A kapott formuláról be kell látni, hogy tautológia. Ehhez a hamishalmazát vizsgáljuk:

$$\varphi((F \supset K) \supset (K \supset A) \supset F \vee H \supset (H \wedge S \supset A) \supset \neg A \supset \neg F)^h(1)$$
$$\varphi(F \supset K)^i(5)$$
$$\varphi(K \supset A)^i(4)$$
$$\varphi(F \vee H)^i$$
$$\varphi(H \wedge S \supset A)^i$$
$$\varphi(\neg A)^i(3)$$
$$\varphi(\neg F)^h(2)$$
$$\varphi(F)^i$$
$$\varphi(A)^h$$
$$\begin{array}{cc} \varphi(K)^h & \varphi(A)^i \\ \begin{array}{cc} \varphi(F)^h & \varphi(K)^i \\ \lightning & \lightning \end{array} & \lightning \end{array}$$

  Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula hamishalmaza üres, azaz a formula tautológia. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.

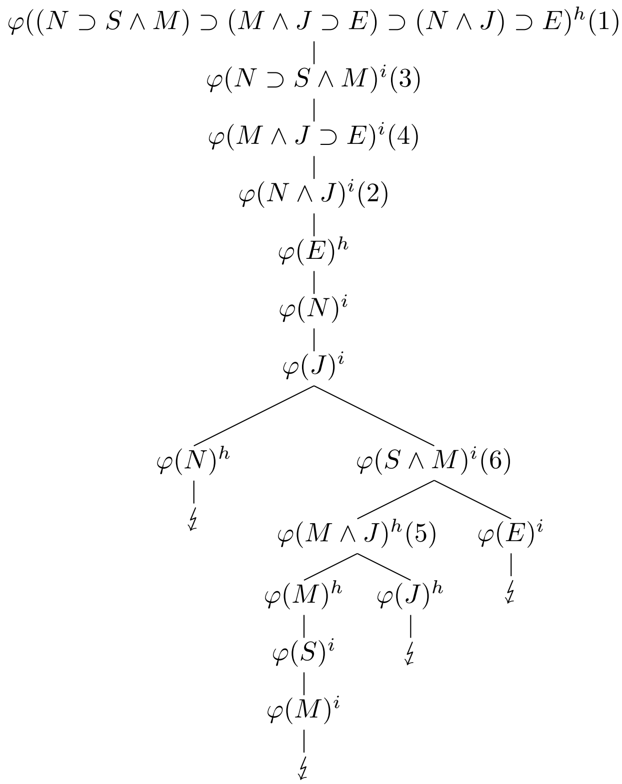
4. $\{N \supset S \wedge M, M \wedge J \supset E, N \wedge J\} \models_0 E$

   - Visszakövetkeztetéssel indulunk el. Az átalakított formulahalmaz: $\{N \supset S \wedge M, M \wedge J \supset E, N \wedge J, \neg E\}$
     Vizsgáljunk igazhalmazt:



Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula igazsághalmaza üres, azaz a formula kielégíthetetlen. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.

- A dedukciós tétel többszöri alkalmazásával indulunk el. A kapott formuláról be kell látni, hogy tautológia. Ehhez a hamishalmazát vizsgáljuk:



Minden ágon ellentmondásra jutottunk, így a formula hamishalmaza üres, azaz a formula tautológia. Ezzel beláttuk, hogy az eredetileg felírt szemantikus következmény teljesül.