Lebegőpontos számábrázolás, a hibaszámítás elemei

1. Az $M = M(3, -2, 2)$ gépi számok halmazában írjuk fel M elemeit, adjuk meg az $|M|$, ε_0, M_∞, ε_1 értékeket.

2. Az $M = M(5, -6, 6)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg az 1 és 8 gépi számot,

(b) adjuk meg a 0,12-nek megfeleltetett gépi számot.

(c) végezzük el az $(1 + 8) + fl(0, 12)$ gépi összeadást.

(d) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(0, 12)$-re és az eredményre!

3. Az $M = M(5, -3, 3)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi számokat.

(b) végezzük el az $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gépi összeadást.

(c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút és relatív hibakorlátot az eredményre!

4. Az $M = M(6, -10, 10)$ gépi számok halmazában adott

$$x_1 = [100000\,|\,0], \quad x_2 = [111111\,|\,-1].$$

Végezzük el az $x_1 \ominus x_2$ gépi kivonást és vizsgáljuk meg a fellépő relatív hibakorlátot!

5. Műveletek hibája

(a) Adjuk meg a $\sqrt{3} \approx 1,73$ (2 tizedesjegyre kerekítve) közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

(b) Adjuk meg a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \approx 1,73 \cdot 1,73$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

(c) Adjuk meg az $\pi \approx 3,14$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

(d) Adjuk meg az $\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{3{,}14}$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

6. Adjunk algoritmust az

$$x^2 - 2px - q = 0, \qquad (p, q > 0)$$

egyenlet megoldására!

Mi a helyzet, ha $p >> q$? (A másodfokú egyenlet megoldóképletében egymáshoz közeli számokat kell kivonnunk, ezért válasszunk más algoritmust a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján.) Példa:

$$x^2 - \sqrt{2}(10^5 - 10^{-5})x - 2 = 0$$

7. Függvényérték hibája. Az $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ függvény értékét közelítjük az 2 helyen, ahol $x \approx 2$ és $\Delta_x = 0,1$. Határozzuk meg a $\Delta_{f(x)}$ abszolút hibakorlátot!

MEGOLDÁS

1. Az $M = M(3, -2, 2)$ gépi számok halmazában írjuk fel M elemeit, adjuk meg az $|M|$, ε_0, M_∞, ε_1 értékeket.

Megoldás:

A k karakterisztika értékei: $-2, -1, 0, 1, 2$.

A $k = 0$ karakterisztikájú pozitív elemek

$$[100\,|\,0] = \frac{4}{8},\ \ [101\,|\,0] = \frac{5}{8},\ \ [110\,|\,0] = \frac{6}{8},\ \ [111\,|\,0] = \frac{7}{8}$$

Tehát

$$M = \Big\{0, \pm\frac{4}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{6}{8}, \pm\frac{7}{8},\ \ \pm\frac{4}{4}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{6}{4}, \pm\frac{7}{4},\ \ \pm\frac{4}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{6}{2}, \pm\frac{7}{2},$$
$$\pm\frac{4}{16}, \pm\frac{5}{16}, \pm\frac{6}{16}, \pm\frac{7}{16},\ \ \pm\frac{4}{32}, \pm\frac{5}{32}, \pm\frac{6}{32}, \pm\frac{7}{32}\Big\}$$

Az M halmaz elemszáma $|M| = 41$,

az M halmaz legkisebb pozitív eleme $\varepsilon_0 = [100\,|-2] = \frac{1}{8}$,

az M halmaz legnagyobb eleme $M_\infty = \frac{7}{2}$,

az M-ben az 1 után következő gépi szám és 1 különbsége $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$.

2. Az $M = M(5, -6, 6)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg az 1 és 8 gépi számot.

Megoldás: $1 = [10000\,|1]$, $8 = [10000\,|4]$.

(b) adjuk meg a 0,12-nek megfeleltetett gépi számot.

Megoldás: $fl(0,12) = [11111\,|-3] = 31/256$

(c) végezzük el az $(1 + 8) + fl(0,12)$ gépi összeadást.

Megoldás: $(1 + 8) + fl(0,12) = [10010\,|4] + [00000\,|4] = [10010\,|4] = 9$

(d) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(0,12)$-re és az eredményre!

Megoldás: $\Delta_{fl(0,12)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-3} = 2^{-9}$, $\Delta_9 = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^4 = 1/4$

3. Az $M = M(5, -3, 3)$ gépi számok halmazában

(a) adjuk meg a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi számokat.

Megoldás: $fl(\sqrt{2}) = [10111\,|1]$, $\quad fl(\sqrt{3}) = [11100\,|1]$

(b) Végezzük el az $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gépi összeadást.

Megoldás: Összeadás után kerekítünk, majd normálunk:

$$fl(\sqrt{2}) + fl(\sqrt{3}) = [11010\,|2] = \frac{13}{4} = 3,25$$

(c) Adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút és relatív hibakorlátot az eredményre!

Megoldás: $\Delta_{13/4} = \frac{1}{2} \cdot 2^k \cdot 2^{-t} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^2 = 2^{-4}$, $\qquad \delta_{13/4} = 2^{-t} = 2^{-5}$.

4. Az $M = M(6, -10, 10)$ gépi számok halmazában adott

$$x_1 = [100000\,|0], \quad x_2 = [111111\,|-1].$$

Végezzük el az $x_1 \ominus x_2$ gépi kivonást és vizsgáljuk meg a fellépő relatív hibakorlátot!

Megoldás:

$$x_1 = [100000\,|0] = \frac{1}{2}, \quad x_2 = [111111\,|-1] = \frac{63}{128}, \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{128} = 2^{-7}$$

(a) A gépi kivonást kerekítéssel (rounding) végezzük:

$$x_1 \ominus x_2 = [100000\,|0] \ominus [111111\,|-1] = [100000\,|\,0] \ominus [100000\,|0] = 0,$$

és

$$\frac{(x_1 - x_2) - (x_1 \ominus x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1 >> \frac{1}{128} = 2^{-7}.$$

(b) A gépi kivonást levágással (chopping) végezzük:

$$x_1 \ominus x_2 = [100000\,|0] \ominus [111111\,|-1] = [100000\,|\,0] \ominus [100000\,|5] = [100000\,|\,0] \ominus [011111\,|0] = 2^{-6},$$

és

$$\left|\frac{(x_1 - x_2) - (x_1 \ominus x_2)}{x_1 - x_2}\right| = \left|\frac{2^{-7} - 2^{-6}}{2^{-7}}\right| = |1 - 2| = 1 >> \frac{1}{128} = 2^{-7}.$$

5. Műveletek hibája

(a) Adjuk meg a $\sqrt{3} \approx 1,73$ (2 tizedesjegyre kerekítve) közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

Megoldás:

$$\Delta_{1,73} = 0,005, \qquad \frac{\Delta_{1,73}}{1,73} = \frac{0,005}{1,73} \leq 0,0029 = \delta_{1,73}.$$

(b) Adjuk meg a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \approx 1,73 \cdot 1,73$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját. **Megoldás:** $3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$,

$$\Delta_{1,73 \cdot 1,73} = 2 \cdot 1,73 \Delta_{1,73} = 2 \cdot 1,73 \cdot 0,005 = 0,0173;$$
$$\delta_{1,73 \cdot 1,73} = 2 \cdot \delta_{1,73} = 0,0058.$$

(c) Adjuk meg az $\pi \approx 3,14$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

Megoldás: $\Delta_{3,14} = 0,005$ és $\delta_{3,14} = 0,0016.$

(d) Adjuk meg az $\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{3,14}$ közelítés abszolút és relatív hibakorlátját.

Megoldás:

$$\Delta_{1/3,14} = \frac{1 \cdot \Delta_{3,14} + 0 \cdot 3,14}{3,14^2} \approx \frac{0,005}{3,14^2} < 0,00051$$

és

$$\delta_{1/3.14} = \delta_1 + \delta_{3,14} = \delta_{3,14} = 0,0016.$$

6. Adjunk algoritmust az

$$x^2 - 2px - q = 0, \qquad (p, q > 0)$$

egyenlet megoldására!

Megoldás: kézenfekvőnek tűnik a jól ismert megoldóképlet alkalmazása:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q}, \qquad x_2 = p - \sqrt{p^2 + q}$$

Mi a helyzet, ha $p >> q$? (A másodfokú egyenlet megoldóképletében egymáshoz közeli számokat kell kivonnunk, ezért válasszunk más algoritmust a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján.)

Megoldás:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q}, \qquad x_2 = -\frac{q}{x_1}$$

Példa:

$$x^2 - \sqrt{2}(10^5 - 10^{-5})x - 2 = 0$$

A pontos megoldás:

$$x_1 = \sqrt{2} \cdot 10^5, \qquad x_2 = -\sqrt{2} \cdot 10^{-5}$$

Számoljuk ki a megoldást a kalkulátorunkon mindkét algoritmus szerint!

$$p = 70710,68, \qquad \sqrt{p^2 + q} = 70710,68,$$

A megoldóképlettel:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q} = 141421,36 \quad \text{és} \quad x_2 = 0.$$

A másodk algoritmussal, amikor az x_2-t a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján számoljuk:

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 + q} = 141421,36 = 1,4142136 \cdot 10^5 \quad \text{és} \quad x_2 = -1,4142135 \cdot 10^{-5}.$$

7. Függvényérték hibája. Az $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ függvény értékét közelítjük az 2 helyen, ahol $x \approx 2$ és $\Delta_x = 0,1$. Határozzuk meg a $\Delta_{f(x)}$ abszolút hibakorlátot!

Megoldás:

A Lagrange-tétellel

$$f(x) - f(2) = f'(\xi)(x-2) \quad \Longrightarrow \quad |\Delta f(x)| = |f(x) - f(2)| = |f'(\xi)| \cdot |x-2|$$

innen

$$|\Delta f(x)| \leq \Delta_{f(x)} = M_1 \cdot \Delta_x,$$

ahol $\Delta_x = 0,1$ és $M_1 = \max\limits_{|x-2|\leq 0,1} |f'(x)|$.

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

$$f''(x) = \frac{2x(1-x^2)^2 - (1+x^2)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(1-x^2)^2 + 4x(1-x^4)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{-2x^5 - 4x^3 + 6x}{(1-x^2)^3} = \frac{-2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(1-x^2)^3} > 0 \qquad (1,9 \leq x \leq 2,1),$$

ami azt jelenti, hogy a pozitív f' függvény szigorúan monoton nő az $[1,9\,;\, 2,1]$ intervallumon és

$$M_1 = \max_{|x-2|\leq 0,1} |f'(x)| = \max_{|x-2|\leq 0,1} f'(x) = f'(2,1) = \frac{1+2,1^2}{(1-2,1^2)^2} = \frac{5,41}{11,6281} = 0,465252$$

és végül

$$\Delta_{f(x)} = M_1 \cdot \Delta_x = 0,0465252.$$