

Gyak.vez. neve _____

Név _____

Gyak. ideje _____

Neptun kód _____

Pontszám _____

1. (4 pont) Igazolja, hogy \mathbf{D} diagonális mátrix és a $\|\cdot\|_p$ vektornormából indukált mátrixnorma esetén

$$\|\mathbf{D}\|_p = \max_{i=1}^n |d_{ii}|.$$

2. (14 pont) Számítsa ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix kondíciós számát az 1-es, 2-es és Frobenius mátrixnormában!

3. (10 pont) A $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írja fel a Jacobi-iterációt!

a) Bizonyítsa a konvergenciát!

b) Írja fel a hibabecslését!

c) Hány lépést kell tennünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$?

4. (8 pont) A $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írja fel a Gauss-Seidel-iterációt!

a) Bizonyítsa a konvergenciát!

b) Számítsa ki $\mathbf{x}^{(1)}$ -et a koordinátás alakjában, ha $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$!

c) Hasonlítsa össze a Jacobi és a Gauss-Seidel iteráció a gyorsaságát tetszőleges kezdővektor esetén!

5. (6 pont) A $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Richardson-iterációt!

a) Pontosan mely p paraméter értékekre konvergens?

b) Mi az optimális paraméter és mennyi ekkor a kontrakciós együttható?

c) Írja fel tetszőleges kezdővektor esetén a hibabecslést!

6. (8 pont) Mi lesz a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix $J = \{(1, 4), (2, 1), (4, 3)\}$ pozícióhalmazra

illeszkedő részleges LU -felbontása? Határozza meg az \mathbf{L} , \mathbf{U} és \mathbf{Q} mátrixokat!