Ítéletlogika alapjai kivonat

Gyakorlat

Logika

2020/2021 1. félév

Bevezető

A tárgy a következő problémákat járja körbe:

Hogyan tudunk állításokat formalizálni?
Állítások egy halmazából következik-e egy állítás?
Létezik-e módszer ennek bizonyítására?

A félév során ezen problémák megválaszolására az ítéletlogika és egy elsőrendű logika nyelvét fogjuk megismerni, majd szemantikus és szintaktikus módszerek segítségével különböző válaszokat adunk.

A félév során szó lesz a következő témakörökről:

- Igazságtábla és elsőrendű formula értéktáblája
- Igazságértékelés függvény
- Bizonyításelmélet
- Természets levezetés
- Szekvent kalkulus
- Rezolúció
- Tablókalkulus

Követelmény

- Maximum 3 hiányzás
- Beadandók:
  - heti szinten
  - Canvasben: canvas.elte.hu - Neptun belépés
  - Össz: 30 pont
  - Minimum: 15 pont
  - Plusz pont zh-ra:

16 pont	–	(+1 zh pont)
17 pont	–	(+2 zh pont)
	...	
21 pont	–	(+6 zh pont)
22-23 pont	–	(+7 zh pont)
24-25 pont	–	(+8 zh pont)
26-27 pont	–	(+9 zh pont)
28-29-30 pont	–	(+10 zh pont)

Követelmény

- Év végi zh
  - Alap össz pont: 80 pont
  - Feladatok:
    - Ítéletlogika (40 + 10 pont): 5 feladat, alappontozásba 1 nem számít bele, ezt hallgató választja
    - Elsőrendű logika (40 pont): 2 feladat
  - Plusz pontok:
    - Beadandó plusz pont, ha eléri a zh alappont a 35 pontot.
    - Plusz feladat pontja, ha eléri a zh alappont az 50 pontot.
  - Pontozás:

Ponthatár	Gyakjegy
40-49.5	2
50-59.5	3
60-60.5	4
70-70.5	5

Alapvető fogalmak

Egyszerű állítás

Egy olyan kijelentés, amelynek tartalmáról eldönthető, hogy igaz-e vagy nem. Egy állításhoz hozzárendeljük az igazságértékét: az i (igaz) vagy h (hamis) értéket.

Példa

Esik az eső.
Nem süt a nap.
Felhős az ég.

Alapvető fogalmak

Összetett állítás

Egy egyszerű állításokból álló összetett mondat, amelynek az igazságértéke csak az egyszerű állítások igazságértékétől függ. Az összetett állítások csak olyan nyelvtani összekötőszavakat tartalmazhatnak, amelyek logikai műveleteknek feleltethetőek meg.

Példa

Esik az eső és nem süt a nap.
Süt a nap vagy felhős az ég.
Ha esik az eső, akkor felhős az ég.

Alapvető fogalmak

Ítéletlogika ábécéje

- Ítéletváltozók (V_v): X, Y, X_i, ...
- Unér logikai műveleti jel: $\neg$ (negáció)
- Binér logikai műveleti jelek:
  - $\wedge$ (konjunkció)
  - $\vee$ (diszjunkció)
  - $\supset$ (implikáció)
- Elválasztójelek: ( )

Formalizálás gyakorlat

Formalizáljuk a következő egyszerű állításokat ítéletlogikában!

1. $\overbrace{\text{Esik az eső.}}^{E}$
2. $\overbrace{\text{Nem süt a nap.}}^{\neg N}$
3. $\overbrace{\text{Felhős az ég}}^{F}$

Megjegyzés

Az, hogy "Nem süt a nap" önmagában is egy állítás és felbontás nélkül formalizálható N-ként. Ebben az esetben a "Süt a nap" állítás lenne N tagadása és formalizálás után $\neg N$ lenne.

Formalizálás gyakorlat

Formalizáljuk a következő összetett állításokat ítéletlogikában!

1. $\overbrace{\text{Esik az eső és nem süt a nap.}}^{E \wedge \neg N}$
2. $\overbrace{\text{Süt a nap vagy felhős az ég.}}^{N \vee F}$
3. $\overbrace{\text{Ha esik az eső, akkor felhős az ég.}}^{E \supset F}$

Formalizálás gyakorlat

Formalizáljuk a következő összetett állításokat ítéletlogikában!

1. $\overbrace{\text{Ha tudok formalizálni és készülök az órákra, akkor jó jegyet fogok kapni.}}^{(F \wedge K) \supset J}$
2. $\overbrace{\text{Esik a hó, de nincs hideg és a szél sem fúj.}}^{E \wedge \neg H \wedge \neg F}$
3. $\overbrace{\text{Megveszem az almát, ha érett vagy nem kukacos.}}^{(E \vee \neg K) \supset M}$
4. $\overbrace{\text{Csak akkor veszem meg az almát, ha érett vagy nem kukacos.}}^{M \supset (E \vee \neg K)}$

Formalizálás gyakorlat - gondolkodós

Formalizáljuk a következő állításokat, ügyeljünk arra, hogy az azonos állításokat azonos ítéletváltozó jelöljön!

1. Ha elalszom, akkor - föltételezve, hogy reggelizni is szeretnék - nem érek be időben a gyakorlatra. $E \supset (R \supset \neg G)$ vagy $(E \wedge R) \supset \neg G$
2. Feltéve, hogy nem alszom el, elérem a buszt és időben beérek a gyakorlatra. $\neg E \supset (B \wedge G)$
3. De ha nem érek be időben a gyakorlatra, annak ellenére, hogy nem aludtam el, akkor reggelizni is szeretnék. $(\neg G \wedge \neg E) \supset R$
4. Csak akkor nem igaz, hogy időben érek be a gyakorlatra vagy elérem a buszt, ha reggelizni is szeretnék. $\neg(G \vee B) \supset R$

Műveletek

Műveletek prioritása csökkenő sorrendben

$\neg, \wedge, \vee, \supset$

Műveletek zárójelezésének iránya

- $\wedge, \vee$ zárójelezésének iránya tetszőleges
  - Pl.: $A \wedge B \wedge \neg C \approx ((A \wedge B) \wedge \neg C)$
    $\approx (A \wedge (B \wedge \neg C))$
- $\supset$ zárójelezése jobbról balra történik!
  - Pl.: $A \supset \neg B \supset C \approx (A \supset (\neg B \supset C))$

Bezárójelezés

Műveletek prioritása csökkenő sorrendben

$\neg, \wedge, \vee, \supset$

Zárójelezzük be teljesen a formulát!

$$\neg\neg A \supset \neg B \vee B \wedge \neg A \supset A$$

1. $\neg\neg A \supset \neg B \vee B \wedge \neg A \supset A$
2. $\neg\neg A \supset \neg B \vee (B \wedge \neg A) \supset A$
3. $\neg\neg A \supset (\neg B \vee (B \wedge \neg A)) \supset A$
4. $\neg\neg A \supset ((\neg B \vee (B \wedge \neg A)) \supset A)$
5. $(\neg\neg A \supset ((\neg B \vee (B \wedge \neg A)) \supset A))$ ✓

Zárójelelhagyás

Hagyjuk el az összes felesleges zárójelet a formulákról!

1. $(((A \wedge B) \supset C) \supset ((\neg A \vee \neg B) \wedge C))$
2. $((\neg B \wedge (\neg C \wedge A)) \supset (A \supset B))$

Zárójelelhagyás - 1. feladat

$$(((A \land B) \supset C) \supset ((\neg A \lor \neg B) \land C))$$

1. $\underline{(}((A \land B) \supset C) \supset ((\neg A \lor \neg B) \land C)\underline{)}$
2. $((A \land B) \supset C) \supset \underline{(}(\neg A \lor \neg B) \land C\underline{)}$
3. $(\underline{(}A \land B\underline{)} \supset C) \supset (\neg A \lor \neg B) \land C$
4. $(A \land B \supset C) \supset (\neg A \lor \neg B) \land C$ ✓

A többi zárójelet miért nem lehet elhagyni?

$$(A \land B \supset C) \supset (\neg A \lor \neg B) \land C$$

Zárójelelhagyás - 2. feladat

$$((\neg B \wedge (\neg C \wedge A)) \supset (A \supset B))$$

1. $\underline{(}(\neg B \wedge (\neg C \wedge A)) \supset (A \supset B)\underline{)}$
2. $\underline{(}\neg B \wedge (\neg C \wedge A)\underline{)} \supset (A \supset B)$
3. $\neg B \wedge (\neg C \wedge A) \supset \underline{(}A \supset B\underline{)}$
4. $\neg B \wedge \underline{(}\neg C \wedge A\underline{)} \supset A \supset B$
5. $\neg B \wedge \neg C \wedge A \supset A \supset B$ ✓

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Műveletek közös igazságtáblája

X	**Y**	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \supset Y$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

1. Készítsük el a következő formulához a kiterjesztett igazságtáblát:

$$((A \wedge B) \supset (B \supset \neg A))$$

A	**B**	$A \wedge B$	$B \supset \neg A$	$((A \wedge B) \supset (B \supset \neg A))$
i	i	i	h	h
i	h	h	i	i
h	i	h	i	i
h	h	h	i	i

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautológiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

Ezek alapján mit tudunk elmondani az előbb vizsgált formuláról?

- Kielégíthető?
- Kielégíthetetlen?
- Tautológia?

A	**B**	$((A \wedge B) \supset (B \supset \neg A))$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

$\Longrightarrow$ **Kielégíthető!**

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

2. Készítsük el a következő formulához az igazságtáblát:

$$(\neg A \wedge \neg B) \supset (\neg A \vee B)$$

A	**B**	$(\neg A \wedge \neg B) \supset (\neg A \vee B)$
i	i	$(h \wedge h) \supset (h \vee i) = i$
i	h	$(h \wedge i) \supset (h \vee h) = i$
h	i	$(i \wedge h) \supset (i \vee i) = i$
h	h	$(i \wedge i) \supset (i \vee h) = i$

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

2. Mit tudunk leolvasni az előző formula igazságtáblája alapján?

- Kielégíthető?
- Kielégíthetetlen?
- Tautológia?

A	**B**	$(\neg A \wedge \neg B) \supset (\neg A \vee B)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

$\Longrightarrow$ **Kielégíthető!**

$\Longrightarrow$ **Tautológia!**

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

3. Készítsük el a következő formulához az igazságtáblát:

$$(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg A \vee B)$$

A	**B**	$(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg A \vee B)$
i	i	$(h \vee h) \wedge i \wedge (h \vee i) = h$
i	h	$(h \vee i) \wedge i \wedge (h \vee h) = h$
h	i	$(i \vee h) \wedge h \wedge (i \vee i) = h$
h	h	$(i \vee i) \wedge h \wedge (i \vee h) = h$

Igazságtábla, szemantikus tulajdonságok

3. Mit tudunk leolvasni az előző formula igazságtáblája alapján?

- Kielégíthető?
- Kielégíthetetlen?
- Tautológia?

A	**B**	$(\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg A \vee B)$
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	h

$\Longrightarrow$ **Kielégíthetetlen!**

Szemantikus tulajdonságok - gondolkodós

Vizsgáljuk a következő szemantikus tulajdonságú formulák által alkotott formulákat, melyik tulajdonság teljesül rájuk? Válaszunk indokoljuk!

1. (kielégíthetetlen formula) $\supset$ (tetszőleges formula)
2. (kielégíthető formula) $\supset$ (kielégíthető formula)
3. (tautológia) $\vee$ (tetszőleges formula)
4. (kielégíthető formula) $\wedge$ (tetszőleges formula)

Szemantikus következményfogalom

Szemantikus következmény

Egy G formula **szemantikus** vagy **tautologikus következménye** az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ..., F_n\}$ formulahalmaznak, ha minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models_0 \{F_1, F_2, ..., F_n\}$ fennáll, $\mathcal{I} \models_0 G$ is fennáll.
Jelölés: $\{F_1, F_2, ..., F_n\} \models_0 G$

Szemantikus következményfogalom

Formalizáljuk a következő állításokat és állapítsuk meg igazságtábla segítségével,hogy helyes-e a következtetés.

1. Esik az eső és nem süt a nap. $E \wedge \neg N$
2. Süt a nap vagy felhős az ég. $N \vee F$

K. Ha esik az eső, akkor felhős az ég. $E \supset F$

E	**N**	**F**	$E \wedge \neg N$	$N \vee F$	$E \supset F$
i	i	i	h	i	i
i	i	h	h	i	h
i	h	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i
h	h	i	h	i	i
h	h	h	h	h	i

Ezek alapján a szemantikus következmény **teljesül**.

Szemantikus következményfogalom

Formalizáljuk a következő állításokat és állapítsuk meg igazságtábla segítségével,hogy helyes-e a következtetés.

1. Elmegyek a könyvtárba vagy moziba, de biztos nem maradok otthon. $(K \vee M) \wedge \neg O$
2. Akkor és csak akkor megyek könyvtárba,ha nem megyek moziba. $(K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K)$
3. Nem maradok otthon. $\neg O$

K. Otthon maradok vagy könyvtárba megyek. $O \wedge K$

K	**M**	**O**	$(K \vee M) \wedge \neg O$	$(K \supset \neg M) \wedge (\neg M \supset K)$	$\neg O$	$O \wedge K$
i	i	i	h	h	h	
i	i	h	i	h	i	
i	h	i	h	i	h	
i	h	h	h	i	h	
h	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i	h
h	h	i	h	h	h	
h	h	h	h	h	i	

Ezek alapján a szemantikus következmény **nem teljesül**.

Szemantikus következményfogalom

Formalizáljuk a következő állításokat és állapítsuk meg igazságtábla segítségével,hogy helyes-e a következtetés.

1. Ha esik az eső, akkor fúj a szél. $E \supset F$
2. Esik az eső és nem fúj a szél. $E \wedge \neg F$

K. Nem esik az eső. $\neg E$

E	**F**	$E \supset F$	$E \wedge \neg F$	$\neg E$
i	i	i	h	
i	h	h	i	
h	i	i	h	
h	h	i	h	

Leolvasható,hogy nincs olyan interpretáció, amikor a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke igaz, de ez mit jelent?

Ez azt jelenti,hogy a formulahalmaz **ellentmondást** tartalmaz. Ilyen formulahalmazoknak bármilyen formula a következménye.

Szemantikus következményfogalom - gondolkodós

Gondoljuk végig, hogy helyesek-e a következtetések! Válaszunk indokoljuk!

1. feladat

P állítás: A gyakorlat érdekes is, meg nem is.

K következmény: Az előadás érdekes.

2. feladat

P állítás: A gyakorlat nagyon korán van.

K következmény: Vagy elmarad az előadás, vagy nem.

Fejtörő

Hosszú évek keresése után végre ráleltél kis felderítőcsapatoddal az inkák ősi aranyvárosára El Dorado-ra. Azonban a helyi lakosok nem vették jó néven, amikor meg akartad lovasítani aranyukat a kincstárból. Az uralkodó úgy döntött, hogy ad nektek egy utolsó esélyt a szabadulásra, ráadásul az összes arany amit elbírtok is magatokkal vihetitek, ha kiálljátok próbáját!

Az uralkodó felszólította legkiválóbb alkimistáját, hogy álljon elő egy az alkalomhoz méltó próbával. Az alkimista hosszas gondolkodás után négy pohár színes italt helyez eléd, majd azt mondja:

"Ezen négy pohár ital közül egy szabadulásod kulcsát tartalmazza, míg a másik 3 veszted okozza, segítségül öt állítással szolgálok, választásodhoz sok szerencsét kívánok!"

Az állítások a következőek:

1. Ha a piros ital vagy a kék ital méreg, akkor a zöld is.
2. Vagy a lila ital vagy a piros méreg, vagy mindkettő.
3. A zöld vagy a kék ital nem méreg, de a piros biztosan.
4. Ha a kék méreg, akkor a piros vagy a lila ital is.
5. Csak akkor nem méreg a lila, ha a piros sem.

Melyik színű ital nem méreg? Válaszod indokold!