Diszkrét matematika 1. középszint

Kombinatorika

Juhász Zsófia
jzsofia@inf.elte.hu
jzsofi@gmail.com
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2019 tavasz

Kombinatorika

Kombinatorika fő célja:

- véges halmazok elemeinek elrendezése;
- elrendezések különböző lehetőségeinek megszámlálása.

Példák:

- Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.
- Minimálisan hány ember esetén lesz legalább két embernek ugyanazon a napon a születésnapja?
- Mennyi a lehetséges rendszámok / telefonszámok / IP címek száma?
- Legalább hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan nyerjünk a lottón / totón?

Összefoglaló

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

Ismétléses permutáció $\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az i típusú elemet k_i-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

Ismétlés nélküli variáció $n!/(n-k)!$, n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses variáció n^k, n elemből k-szor választunk (sorrend számít, egy elem többször is).

Ismétlés nélküli kombináció $\binom{n}{k}$, n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses kombináció $\binom{n+k-1}{k}$, n elemből k-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem többször is).

Permutáció

Definíció (permutáció)

Egy A véges halmaz egy permutációja egy olyan, A elemeiből álló sorozat, amely A minden elemét *pontosan egyszer* tartalmazza. (Úgy is mondhatjuk, hogy A elemeinek egy lehetséges sorrendje.)

Ekvivalens definíció: Az A halmaz egy permutációja egy $A \to A$ bijekció.

Tétel (Permutációk száma)

Egy n elemű halmaz permutációinak száma:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

($n!$ kiolvasva: n faktoriális).

Megjegyzés: definíció szerint: $0! = 1$.

Bizonyítás

Az n elemből az első helyre n-féleképpen választhatunk, a második helyre $n-1$-féleképpen választhatunk, … Így az összes lehetőségek száma $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. □

Permutáció

Példa

1. Egy lóversenyen 70 induló vett részt. Hányféle különböző sorrendben érhetnek célba? (Feltételezzük, hogy nincs döntetlen és mindenki célbaér.)
2. Reggelire a
   2 különböző szendvicset $2! = 2 \cdot 1 = 2$ -féle sorrendben lehet megenni.
   3 különböző szendvicset $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben lehet megenni.
   4 különböző szendvicset $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle sorrendben lehet megenni.
3. A 200 fős évfolyam $200! = 200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$-féle sorrendben írhatja alá a jelenléti ívet.

Ismétléses permutáció

Példa

Egy vizsgán 5 hallgató vett részt, 2 darab 4-es, 3 darab 5-ös született. Hány sorrendben írhatjuk le az eredményeket, ha az azonos jegyeket nem különböztetjük meg egymástól?

Megoldás

Ha figyelembe vesszük a hallgatókat is: $(2+3)! = 5!$ lehetséges sorrend van. Ha a hallgatókat nem tüntetjük fel, egy lehetséges sorrendet többször is figyelembe vettünk:

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	...
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

Az 5-ösöket $3! = 6$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.
Hasonlóan a 4-eseket $2! = 2$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.

Összes lehetőség: $\dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{120}{2\cdot 6} = 10.$

Ismétléses permutáció

Tétel (Ismétléses permutációk száma)

k_1 darab első típusú, k_2 második típusú, ..., k_m m-edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek egy ismétléses permutációjának nevezzük, és ezek száma $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ esetén

$$^{i}P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Bizonyítás

Ha minden elem között különbséget teszünk: $n!$ lehetséges sorrend létezik.
Ha azonban az azonos típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor ebben a számításban többször számoltuk az egyes sorrendeket.
Mivel minden $1 \leq i \leq m$-re, adott k_i db. pozíción $k_i!$ különböző sorrendben helyezhetjük el az i-edik típusú elemeket, ezért minden sorrendet $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$-szor számultunk. Így a különböző sorrendek száma: $n!/(k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!)$. □

Variáció

Példa

1. Egy lóversenyen 70 induló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az elsö 5 helyezés? (Feltételezzük, hogy nincs döntetlen.)
   $70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66$
2. Az egyetemen 10 tárgyunk van, ezek közül 3-at szeretnénk hétfőre tenni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

   ### Megoldás

   Hétfőn az első óránk 10-féle lehet. A második 9-féle, a harmadik 8-féle lehet.
   Így összesen $10 \cdot 9 \cdot 8$-féleképpen tehetjük meg.

Definíció (variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^+$. Az A elemiből képezhető k hosszúságú sorozatokat, melyek A bármely elemét *legfeljebb egyszer* tartalmazzák, az A halmaz k-ad osztályú variációinak nevezzük.

Variáció

Tétel (Variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$*. Egy* n *elemű halmaz* k*-ad osztályú variációinak száma:*

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

ha $k \leq n$ *és* 0 *egyébként.*

Bizonyítás

Tfh. $k \leq n$. A sorozat első elemét n-féleképpen választhatjuk ki, ezután a második elemét $(n-1)$-féleképpen választhatjuk (nem lehet ismétlődés), ..., a k-adik elemet $n-k+1$-féleképpen választhatjuk ki. Így a k-ad osztályú variációk száma: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.
Ha $k > n$, akkor nyilván nem lehet k hosszúságú sorozatot képezni n különböző elem segítségével úgy, hogy ne legyen ismétlődés.

$\square$

Ismétléses variáció

Példa

Az 1, 2, 3 számjegyekből hány kétjegyű szám képezhető?

Megoldás

Az első helyiértékre 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

A második helyiértékre szintén 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{ccc} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{array}$$

Összesen:

$$3 \cdot 3 \quad = 9$$

Ismétléses variáció

Definíció (ismétléses variáció)

Legyen A egy halmaz és $k \in \mathbb{N}^+$. Egy, az A elemiből készíthető k hosszúságú sorozatokat az A halmaz k-ad osztályú ismétléses variációinak nevezzük.

Tétel (Ismétléses variációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Egy n elemű k-ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$ {}^{i}V_n^k = n^k. $$

Bizonyítás

A sorozat első elemét n-féleképpen választhatjuk, a második elemét n-féleképpen választhatjuk, ... $\square$

Ismétléses variáció

Példák

1. Egy totószelvényt ($13 + 1$ helyre 1, 2 vagy X kerülhet) $3^{14} = 4\,782\,969$-féleképpen lehet kitölteni.
2. Hány 5 hosszúságú $0 - 1$ sorozat létezik?
3. Hány n hosszúságú $0 - 1$ sorozat létezik?
4. Hány 12 jegyű szám készíthető csak az $1 - 9$ számjegyek felhasználásával? (Nem kell minden jegyet felhasználni, és egy jegy többször is felhasználható.)

Kombináció

Definíció (kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az A halmaz k elemű részhalmazait az A halmaz k-ad osztályú kombinációinak nevezzük.

Tétel (Kombinációk száma)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy n elemű halmaz k-ad osztályú kombinációinak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ha $k \leq n$ (és 0 egyébként).

Bizonyítás

Először válasszunk a halmez elemei közül k darabot a sorrendet figyelembevéve. Ezt $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$-féleképpen tehetjük meg.
Ha a sorrendtől eltekintünk, akkor az előző leszámlálásnál minden k elemű részhalmaz pontosan $k!$-szor szerepel. Ezzel leosztva kapjuk a k elemű részhalmazok számát. $\square$

Kombináció

Példák

1. Egy lottószelvény (90 számból 5) lehetséges kitöltéseinek száma:
$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268.$$

2. Hány olyan, 20 hosszúságú $0-1$ sorozat van, amelyik pontosan 7 db 1-est tartalmaz?
A 20 pozíció közül $\binom{20}{7}$-féleképpen választhatjuk ki az a 7 pozíciót, ahova az 1-esek kerülnek.

Ismétléses kombináció

Definíció (ismétléses kombináció)

Legyen $k \in \mathbb{N}$. Egy A halmazból k-szor választva, ismétléseket is megengedve, de a sorrendet figyelmen kívül hagyva, az A halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációit kapjuk.

Megjegyzés: Az ismétléses kombinációknál tehát csak az számít, hogy az A halmaz egyes elemeit hányszor választottuk (sorrend nem számít).

Tétel (Ismétléses kombinációk száma)

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ismétléses kombináció

Tétel (Ismétléses kombinációk száma)

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás

Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ekkor minden egyes lehetőségnek megfeleltetünk egy $0-1$ sorozatot:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1\text{-ek száma}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_2\text{-k száma}}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_n\text{-ek száma}}.$$

Ekkor a sorozatban k darab 1-es van (választott elemek száma), $n-1$ darab 0 van (szeparátorok száma). Összesen $n-1+k$ pozíció, ezekből k-t választunk. Ilyen sorozat $\binom{n+k-1}{k}$ darab van. □

Ismétléses kombináció

Példák

1. 5-féle sütemény van a cukrászdában, 8 darabot szeretnénk vásárolni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
   Itt $n = 5$, $k = 8$:
   $$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495.$$

2. Hányféleképpen dobhatunk 5 dobókockával, ha csak a dobott számok számítanak, az nem, hogy melyik kockán dobtuk az egyes számokat?

   Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból 5-ször választunk (sorrend nem számít, egy elemet többször is választhatunk). Ismétléses kombináció $n = 6$, $k = 5$ választással:
   $$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Összefoglaló

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

Ismétléses permutáció $\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az i típusú elemet k_i-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

Ismétlés nélküli variáció $n!/(n-k)!$, n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses variáció n^k, n elemből k-szor választunk (sorrend számít, egy elem többször is).

Ismétlés nélküli kombináció $\dbinom{n}{k}$, n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses kombináció $\dbinom{n+k-1}{k}$, n elemből k-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem többször is).

Binomiális tétel

Tétel (Binomiális tétel)

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás

$$(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)$$

Ha elvégezzük a beszorzást, akkor $x^k y^{n-k}$ alakú tagokat kapunk, és ezen tagot annyiszor kapjuk meg, ahányszor az n tényezőből k darab x-et választunk. □

Definíció (Binomiális együtthatók)

Az $\binom{n}{k}$ alakú számokat ($n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$) binomiális együtthatónak nevezzük.

Binomiális együtthatók

Tétel (A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága)

Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ esetén:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, *ha* $k \geq 1, n \geq k+1$.

Bizonyítás

$\binom{n}{k}$ azon n hosszú $0-1$ sorozatok száma, melyben k darab 1-es van.

1. Az n hosszú $0-1$ sorozatok közül azok száma, melyek k darab 1-est tartalmaznak megegyezik azok számával, melyek $n-k$ darab 1-est tartalmaznak.
2. Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 1: $\binom{n-1}{k-1}$.
   Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 0: $\binom{n-1}{k}$.

Binomiális együtthatók és a Pascal-háromszög

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n	$\binom{n}{k}$	$(x+y)^n$
0	1	1
1	1 1	$x+y$
2	1 2 1	$x^2+2xy+y^2$
3	1 3 3 1	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
4	1 4 6 4 1	$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
5	1 5 10 10 5 1	$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

Polinomiális tétel

Példa

Mennyi lesz?

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$ $\qquad (x+y+z)^3 = \ldots$

Tétel (Polinomiális tétel)

Tetszőeges $r,\ n \in \mathbb{N}$ *esetén:*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n} \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_r!} x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{i_r}.$$

Bizonyítás

$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n =$

$(x_1+x_2+\ldots+x_r)(x_1+x_2+\ldots+x_r)\cdots(x_1+x_2+\ldots+x_r).$

Az $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_r^{i_r}$ együtthatója:

$$\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3}\cdots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{r-1}}{i_r} =$$

$$\frac{n!}{i_1!(n-i_1)!}\,\frac{(n-i_1)!}{i_2!(n-i_1-i_2)!}\cdots\frac{(n-i_1-i_2-\ldots-i_{r-1})!}{i_r!(n-i_1-\ldots-i_{r-1}-i_r)!} = \frac{n!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_r!} \qquad \square$$

Polinomiális tétel

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_r!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r}$$

$$(x + y + z)^3 = \ldots$$

i_1	i_2	i_3	$\frac{3!}{i_1!i_2!i_3!}$
3	0	0	$\frac{3!}{3!0!0!} = 1$
2	1	0	$\frac{3!}{2!1!0!} = 3$
2	0	1	$\frac{3!}{2!0!1!} = 3$
1	2	0	$\frac{3!}{1!2!0!} = 3$
1	1	1	$\frac{3!}{1!1!1!} = 6$
1	0	2	$\frac{3!}{1!0!2!} = 3$
0	3	0	$\frac{3!}{0!3!0!} = 1$
0	2	1	$\frac{3!}{0!2!1!} = 3$
0	1	2	$\frac{3!}{0!1!2!} = 3$
0	0	3	$\frac{3!}{0!0!3!} = 1$

$$(x + y + z)^3 =$$
$$x^3$$
$$+3x^2y$$
$$+3x^2z$$
$$+3xy^2$$
$$+6xyz$$
$$+3xz^2$$
$$+y^3$$
$$+3y^2z$$
$$+3yz^2$$
$$+z^3$$

Skatulya-elv

Skatulya-elv

Ha n darab gyufásdobozunk és $n+1$ gyufaszálunk van, akkor akárhogyan rakjuk bele az összes gyufát a skatulyákba, valamelyikben legalább kettő gyufa lesz.

Példák

- Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.
- Az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazból bárhogyan választunk ki ötöt, akkor lesz közülük kettő, melyek összege 9.

  Tekintsük az $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ halmazokat. Ekkor a kiválasztott öt elem közül lesz kettő, melyek azonos halmazban lesznek, így összegük 9.

Szita módszer

Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Az 1000-nél kisebb számok

összes	999	999
2-vel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$	$-\,499$
3-mal osztható	$\left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$	$-\,333$
5-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$	$-\,199$
$2 \cdot 3$-mal osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor = 166$	$+\,166$
$2 \cdot 5$-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor = 99$	$+\,99$
$3 \cdot 5$-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor = 66$	$+\,66$
$2 \cdot 3 \cdot 5$-tel osztható	$\left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor = 33$	$-\,33$
		$=266$

Szita módszer

Tétel (Szita-formula)

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges halmazok. Ekkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \mp \ldots$$

Példa

Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

Először: Hány olyan 1000-nél kisebb szám van, amely osztható 2-vel vagy 3-mal vagy 5-tel?

$A_1 = \{1 \le n \le 999 : 2|n\} \to |A_1| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor$;

$A_2 = \{1 \le n \le 999 : 3|n\} \to |A_2| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor$;

$A_3 = \{1 \le n \le 999 : 5|n\} \to |A_3| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor$.

Hasonlóan $|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor$, $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor$.

2-vel vagy 3-mal vagy 5-tel osztható számok száma:

$$\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor.$$