12. gyakorlat

Iterációs módszerek: ILU iteráció, a részleges LU felbontáson alapuló iteráció

1.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & -2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Konvergál-e az ILU-algoritmus?

(b) Ha igen, akkor számítsuk ki az első két iterációs lépést!

(c) Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

2. Készítsük el az adott pozícióhalmazokhoz illeszkedő ILU-felbontásokat!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) $J = \{(2,1), (3,2)\}$,

(b) $J = \{(1,3), (2,1), (2,3)\}$.

3.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Konvergál-e az ILU-algoritmus?

(b) Ha igen, akkor számítsuk ki az első két iterációs lépést!

(c) Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

4.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Konvergál-e az ILU-algoritmus?

(b) Ha igen, akkor számítsuk ki az első két iterációs lépést!

(c) Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

MEGOLDÁS

Legyen J mátrixelem pozíciók olyan részhalmaza, mely nem tartalmaz diagonális pozíciót, azaz $\forall\, i:\ (i,i) \notin J$. Az ILU-módszer lényege, hogy az A mátrixnak egy olyan LU felbontását kapjuk, ahol az indexhalmaz segítségével meghatározott elemek az L és az U mátrixokban 0-ák, ezáltal az LU mátrix könnyebben lesz invertálható. Ekkor

$$\begin{aligned} l_{i,j} = u_{i,j} &= 0, \qquad \text{ha } (i,j) \in J, \\ a_{i,j} &= (LU)_{i,j} \qquad \text{ha } (i,j) \notin J, \end{aligned}$$

és

$$A = \underbrace{LU}_{P} - Q$$

továbbá

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (P-Q)\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad P\mathbf{x} = Q\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = P^{-1}Q\mathbf{x} + P^{-1}\mathbf{b}$$

Az ILU-iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(P^{-1}Q)}_{B_{\text{ILU}}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{P^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{\text{ILU}}}$$

Ha A szigorúan diagonálisan domináns a soraira nézve, akkor az ILU-felbontás egyértelműen létezik.

1.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & -2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Konvergál-e az ILU-algoritmus?

(b) Ha igen, akkor számítsuk ki az első két iterációs lépést!

(c) Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

Megoldás:

(a) Az ILU-iteráció átmenetmátrixa

$$B_{\mathrm{ILU}} = P^{-1}Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & 0 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Mivel

$$q = \|B_{\mathrm{ILU}}\|_\infty = \frac{2}{3} < 1,$$

az iteráció konvergens tetszőleges kezdővektor esetén.

(b) Legyen a kezdővektor $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Ekkor az 1. iterációs lépés:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (P^{-1}Q)\mathbf{x}^{(0)} + P^{-1}\mathbf{b} = P^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & 0 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A 2. iterációs lépés:

$$\mathbf{x}^{(2)} = (P^{-1}Q)\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

(c) Hibabecslés:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 3 \le 10^{-3},$$

mekyből

$$\frac{\log 3000}{\log \frac{3}{2}} = 19,746 \le k.$$

Tehát a 20. iterációs lépésnél elérjük a kívánt pontosságot.

2. Készítsük el az adott pozícióhalmazokhoz illeszkedő ILU-felbontásokat!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) $J = \{(2,1),(3,2)\}$,

(b) $J = \{(1,3),(2,1),(2,3)\}$.

Megoldás:

(a)

$$J = \{(2,1),(3,2)\} : \qquad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot \end{bmatrix}$$

Az első szeparálási lépés (olyan J-beli elemekre, melyek az 1. sorban, ill. 1. oszlopban vannak):

$$\tilde{A}_1 = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ \boxed{-1} & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad P_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ \boxed{0} & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\tilde{A}_1 = P_1 - Q_1$.

Az 1. eliminációs lépést az P_1 mátrix 1. oszlopára végezzük, majd ismét szeparálunk (olyan J-beli elemekre, melyek az 2. sorban, ill. 2. oszlopban vannak és korábban nem szerepeltek): :

$$\tilde{A}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 4 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & \boxed{-\dfrac{1}{2}} & 3 \end{array}\right] \quad \longrightarrow \quad P_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 4 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & \boxed{0} & 3 \end{array}\right], \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\dfrac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

A 2. eliminációs lépést a P_2 mátrix 2. oszlopára végeznénk, ha nem értünk volna az elimináció végére.

Végül

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = Q_1 + Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$LU - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = A.$$

(b)

$$J = \{(1,3),(2,1),(2,3)\}: \qquad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & * \\ * & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Az első szeparálási lépés (olyan J-beli elemekre, melyek az 1. sorban, ill. 1. oszlopban vannak):

$$\tilde{A}_1 = A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \boxed{2} \\ \boxed{-1} & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad P_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-2} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\tilde{A}_1 = P_1 - Q_1$. Az 1. eliminációs lépést az P_1 mátrix 1. oszlopára végezzük, majd elvégezzük a 2. szeparálási lépést (olyan J-beli elemekre, melyek az 2. sorban, ill. 2. oszlopban vannak és korábban nem szerepeltek):

$$\tilde{A}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 4 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & \boxed{-1} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \quad P_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 4 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & \boxed{0} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right], \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

A 2. eliminációs lépést a P_2 mátrix 2. oszlopára végezzük (nem kell a továbbiakban szeparálnunk, mert nincs olyan J-beli elemünk, amire ne szeparáltunk volna):

$$\tilde{A}_3 = \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 \\ \cline{2-3} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 4 \end{array}\right]$$

Végül

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad Q = Q_1 + Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$LU - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = A.$$

3.

$$P=\begin{bmatrix}3&5&0\\0&6&0\\5&5&8\end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&2\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

(a) Konvergál-e az ILU-algoritmus?

(b) Ha igen, akkor számítsuk ki az első két iterációs lépést!

(c) Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

Megoldás:

(a) Az ILU-iteráció átmenetmátrixa

$$B_{\text{ILU}}=P^{-1}Q=\begin{bmatrix}3&5&0\\0&6&0\\5&5&8\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3&-5/18&0\\0&1/6&0\\-5/24&5/72&1/8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-5/9&0&-5/9\\1/3&0&1/3\\5/36&0&5/36\end{bmatrix}$$

A mátrixban kis elemek találhatók, ezért a konvergencia vizsgálatához érdemes az elégséges feltétel alkalmazásával próbálkozni.

$$\|B_{\text{ILU}}\|_\infty=\frac{10}{9}>1\qquad\Longrightarrow\qquad\text{nem alkalmazható}$$

$$\|B_{\text{ILU}}\|_1=\frac{37}{36}>1\qquad\Longrightarrow\qquad\text{nem alkalmazható,}$$

$$q=\|B_{\text{ILU}}\|_{\text{F}}=\frac{\sqrt{1138}}{36}=0,9371<1\qquad\Longrightarrow\qquad\text{alkalmazható,}$$

és az iteráció konvergens tetszőleges kezdővektor esetén.

(b) Legyen a kezdővektor $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{0}$. Ekkor az 1. iterációs lépés:

$$\mathbf{x}^{(1)}=(P^{-1}Q)\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{c}=\mathbf{c}=P^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1/3&-5/18&0\\0&1/6&0\\-5/24&5/72&1/8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/9\\1/3\\-1/36\end{bmatrix}$$

A 2. iterációs lépés:

$$\mathbf{x}^{(2)}=(P^{-1}Q)\mathbf{x}^{(1)}+\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-5/9&0&-5/9\\1/3&0&1/3\\5/36&0&5/36\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/9\\1/3\\-1/36\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/9\\1/3\\-1/36\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7/108\\13/36\\-7/432\end{bmatrix}=\frac{1}{432}\begin{bmatrix}28\\156\\-7\end{bmatrix}$$

(c) **Hibabecslés.** A Frobenius-norma illeszkedő norma a $\|\cdot\|_2$ vektornormához, ezért a hibabecslésnél használhatjuk az Euklideszi normát:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2 = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)}\|_2 =$$

$$= \frac{(0,9371)^k}{1-0,9371} \cdot \frac{\sqrt{16+144+1}}{36} = (0,9371)^k \cdot 5,604 \leq 10^{-2},$$

melyből

$$\frac{\log 560,4}{\log 1,067} = 97,59 \leq k.$$

Tehát a 98. iterációs lépésnél elérjük a kívánt pontosságot.

4.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Konvergál-e az ILU-algoritmus?

(b) Ha igen, akkor számítsuk ki az első két iterációs lépést!

(c) Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

Megoldás:

(a) Az ILU-iteráció átmenetmátrixa

$$B_{\mathrm{ILU}} = P^{-1}Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/18 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ -5/24 & 5/72 & 1/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5/9 & 0 & 1/9 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 5/36 & 0 & -5/18 \end{bmatrix}$$

Mivel

$$q = \|B_{\mathrm{ILU}}\|_\infty = \frac{2}{3} < 1,$$

az iteráció konvergens tetszőleges kezdővektor esetén.

(b) Legyen a kezdővektor $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Ekkor az 1. iterációs lépés:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (P^{-1}Q)\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/18 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ -5/24 & 5/72 & 1/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} `1/9 \\ 1/3 \\ -1/36 \end{bmatrix}$$

A 2. iterációs lépés:

$$\mathbf{x}^{(2)} = (P^{-1}Q)\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -5/9 & 0 & 1/9 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 5/36 & 0 & -5/18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/9 \\ 1/3 \\ -1/36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/9 \\ 1/3 \\ -1/36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/108 \\ 13/36 \\ -1/216 \end{bmatrix}$$

(c) Hibabecslés:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \leq 10^{-2},$$

melyből

$$\frac{2}{\log\frac{3}{2}} = 11,35 \leq k.$$

Tehát a 12. iterációs lépésnél elérjük a kívánt pontosságot.