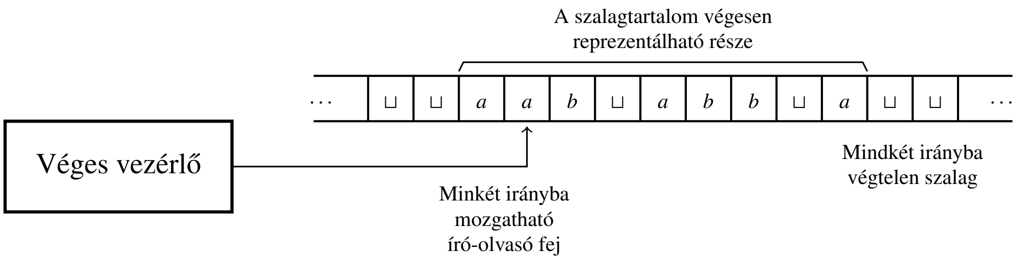
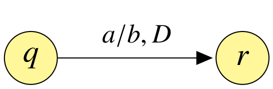
(Determinisztikus) Turing-gépek



- A **Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol
  - Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
  - $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
  - Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$.
  - $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény.
- A Turing-gép működésének fázisait a gép konfigurációival írjuk le. A Turing-gép **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

  A konfiguráció a gép azon állapotát tükrözi amikor a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak ⊔ van), a gép a q állapotban van, és a gép író-olvasó feje a v szó első betűjén áll.
- A gép **kezdőkonfigurációja** egy olyan $q_0 u$ szó, ahol u csak Σ-beli betűket tartalmaz ($q_0 \sqcup$ ha $u = \varepsilon$). Egy M TG lehetséges konfigurációinak halmazát jelölje C_M.
- Egy Turing-gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ (egylépéses) **konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk. Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.
  - Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
  - ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
  - ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.
- A $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ **többlépéses konfigurációátmenet** relációját a következőképpen definiáljuk: $C \vdash^* C' \Leftrightarrow$
  - ha $C = C'$ vagy
  - ha $\exists\, n > 0 \wedge C_1, C_2, \dots C_n \in C_M$, hogy $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$ valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$.
- Ha $q \in \{q_i, q_n\}$, akkor azt mondjuk, hogy az uqv konfiguráció egy **megállási konfiguráció**. $q = q_i$ esetében **elfogadó**, míg $q = q_n$ esetében **elutasító konfigurációról** beszélünk.
- Az M által **felismert nyelv** (amit $L(M)$-mel jelölünk) azoknak az $u \in \Sigma^*$ szavaknak a halmaza, melyekre igaz, hogy $q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y$ valamely $x, y \in \Gamma^*$, $y \neq \varepsilon$ szavakra.
- Az egyszalagos TG-ek **átmenetdiagramja**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

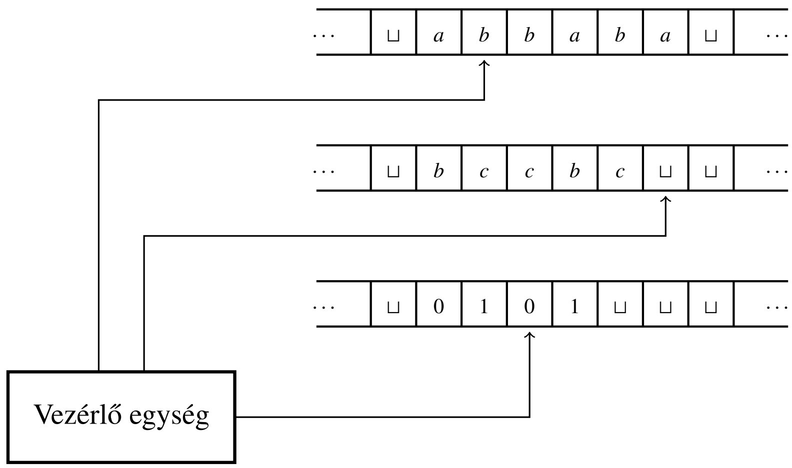
- Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M

  Turing-gépre. Továbbá, egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M

  Turing-gép, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és felismeri az L-et. A Turing-felismerhető nyelveket szokás **rekurzívan felsorolhatónak**, az eldönthető nyelveket pedig **rekurzívnak** is nevezni. A rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát RE -vel, a rekurzív nyelvek osztályát pedig R-rel jelöljük.

- Tekintsünk egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ Turing-gépet és annak egy $u \in \Sigma^*$ bemenõ szavát. Azt mondjuk, hogy M **futási ideje** (időigénye) az u szón n ($n \geq 0$), ha M a $q_0 u$ kezdőkonfigurációból n lépésben (konfigurációátmenettel) jut el megállási konfigurációba. Ha nincs ilyen szám, akkor M futási ideje az u-n végtelen.

- Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy M egy $f(n)$ **időkorlátos gép** ($f(n)$ az időigénye), ha minden $u \in \Sigma^*$ input szóra, M futási ideje az u szón legfeljebb $f(|u|)$.



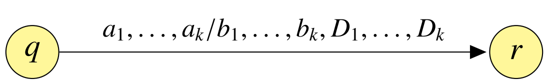
- A k**-szalagos Turing-gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendszer, ahol
  - Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
  - $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
  - Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$,
  - $\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$ az átmenet függvény.

- A k szalagos Turing-gép **konfigurációja** : $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ $(2k+1)$-es, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$. Az u szóhoz tartozó **kezdõkonfiguráció:** $u_i = \varepsilon$ $(1 \leq i \leq k)$, $v_1 = u$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leq i \leq k)$. Idõigény: mint az egyszalagosnál (konfigurációátmenetek száma alapján).

- k**-szalagos Turing gép által felismert nyelv:**

  $$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),$$
  $$\text{valamely } x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon \text{ -ra}\}$$

- A k-szalagos TG-ek **átmenetdiagramja** egy csúcs- és élcímkézett irányított gráf, melyre

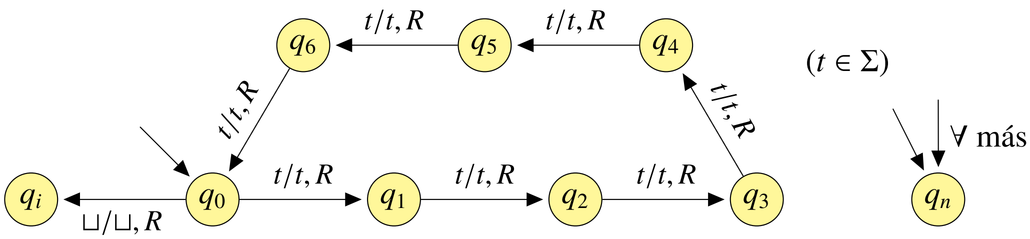


$$\Longleftrightarrow \quad \delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$$
$$(q, r \in Q, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \Gamma, D_1, \ldots, D_k \in \{L, S, R\})$$

Feladatok

1. Feladat: Készítsünk TG-et, mely a 7-tel osztható hosszúságú szavak nyelvét ismeri fel!

Megoldás:



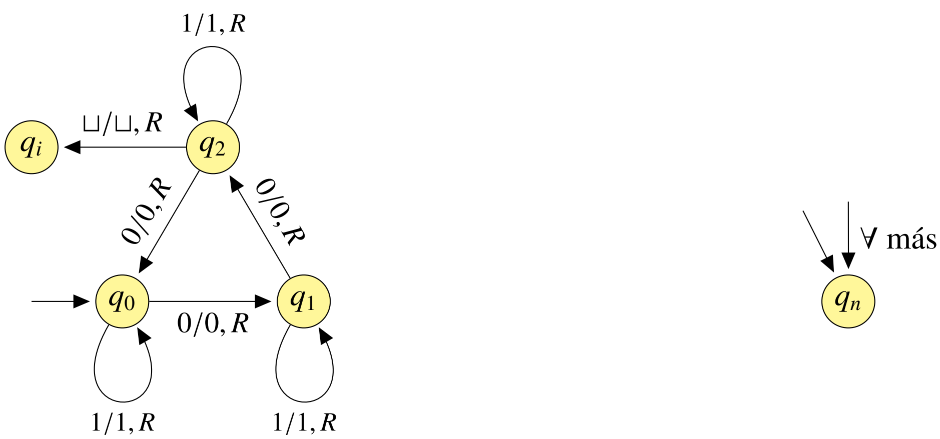
$\Sigma = \{a, b\}$.

$q_0abb \vdash aq_1bb \vdash abq_2b \vdash abbq_3\sqcup \vdash abbq_n\sqcup$

Legyen $f(n) = n + 1$. Ekkor a gép $f(n)$ időkorlátos.

2. Feladat: Készítsünk egy M TG-et, amelyre $L(M) = \{\, u \in \{0,1\}^* \mid |u|_0 \equiv 2 \pmod 3\}$, ahol $|u|_t$ az u-ban szereplő t betűk száma.

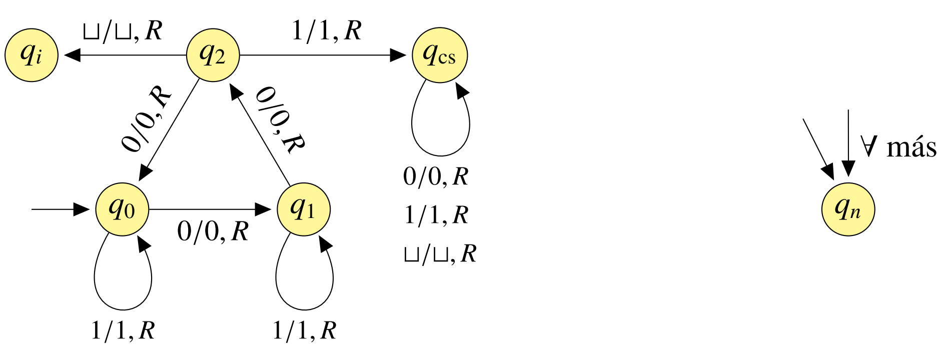
Megoldás:



Ez a TG nem csak felismeri, hanem el is dönti $L(M)$-et.

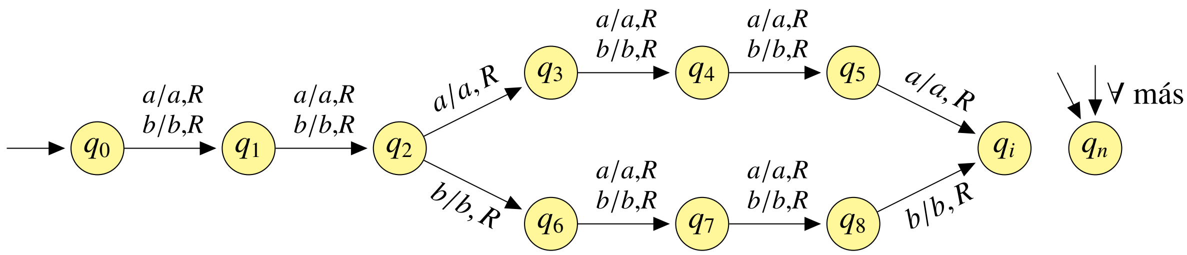
3. Feladat: Készítsünk egy olyan M' TG-et, amely felismeri ugyan a 2. feladatban megadott nyelvet, de nem dönti el.

Megoldás:



4. Feladat: Készítsünk TG-et, mely azon szavakat ismeri fel, melyeknek 3. és 6. betűje azonos! ($\Sigma = \{a, b\}$)

Megoldás:

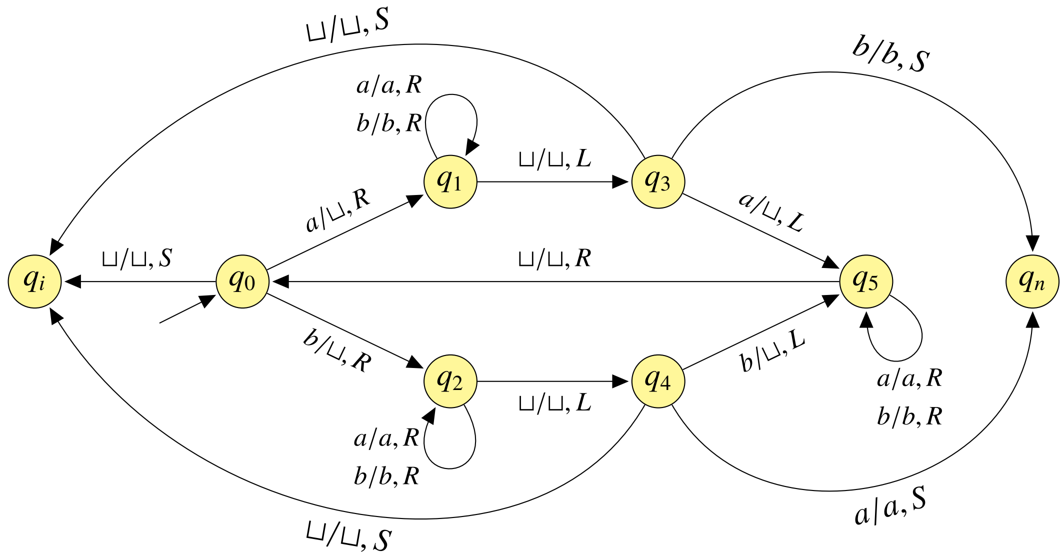


$q_0abbabaa \vdash aq_1bbabaa \vdash abq_2babaa \vdash abbq_6abaa \vdash abbaq_7baa \vdash abbabq_8aa \vdash abbabq_naa.$

Legyen $f(n) = 6$. Ekkor a gép $f(n)$ időkorlátos.

5. Feladat: Készítsünk egy M Turing gépet, melyre $L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^{-1}\}$!

1. megoldás:

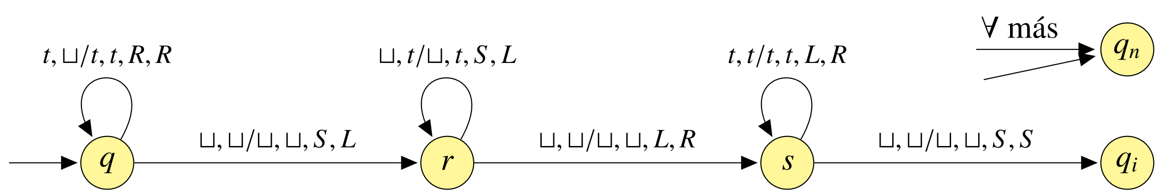


Az iterációk száma legfeljebb $\lceil n/2 \rceil$. Az iterációnkénti lépések száma legfeljebb $2n+1$, így M $\lceil n/2 \rceil(2n+1)+1 = O(n^2)$ időkorlátos.

Másrészt van végtelen szó, amelyre kell $\Omega(n^2)$ lépés:
Ha $u = a^{2k}$, és $n = 2k$, akkor iterációnként $4k+1, 4(k-1)+1, \ldots, 4 \cdot 0 + 1$ lépés kell.

$$\sum_{i=0}^{k}(4i+1) = 4\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = (n+1)(n/2+1) = \Omega(n^2).$$

2. megoldás:

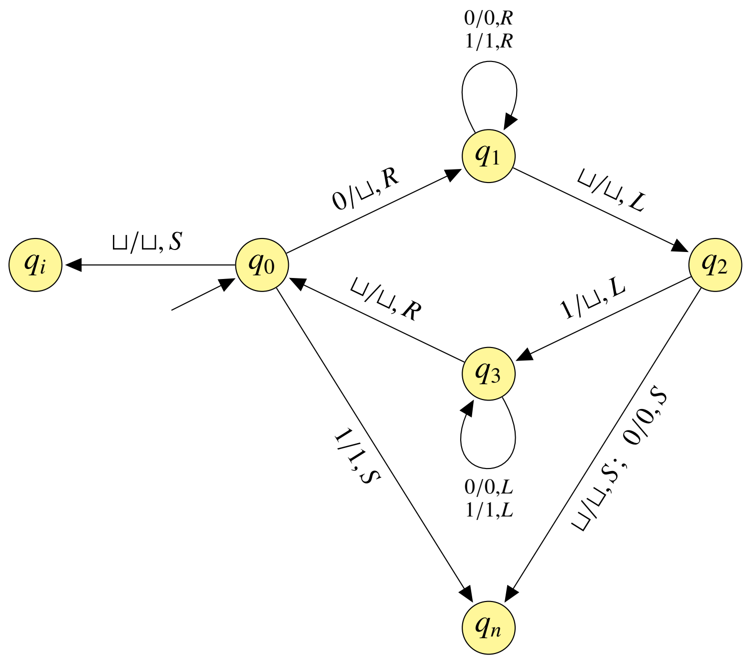


$(t \in \{a,b\})$

Például $(q, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, a, bba, a, \sqcup) \vdash (q, ab, ba, ab, \sqcup) \vdash (q, abb, a, abb, \sqcup) \vdash (q, abba, \sqcup, abba, \sqcup) \vdash (r, abba, \sqcup, abb, a) \vdash (r, abba, \sqcup, ab, ba) \vdash (r, abba, \sqcup, a, bba) \vdash (r, abba, \sqcup, \varepsilon, abba) \vdash (r, abba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup abba) \vdash (s, abb, a, \varepsilon, abba) \vdash (s, ab, ba, a, bba) \vdash (s, a, bba, ab, ba) \vdash (s, \varepsilon, abba, abb, a) \vdash (s, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup) \vdash (q_i, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup)$

Ez egy $O(n)$ időkorlátos TG, mivel egy n hosszú inputra legfeljebb $3n+3$ lépést tesz.

6. Feladat: Készítsünk egy M Turing gépet, melyre $L(M) = \{ 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \}$!
Megoldás:



Ez egy $O(n^2)$ időkorlátos TG, van végtelen szó (például épp az L-beliek), melyre kell $\Omega(n^2)$ lépés.