Nemlineáris egyenletek numerikus megoldása

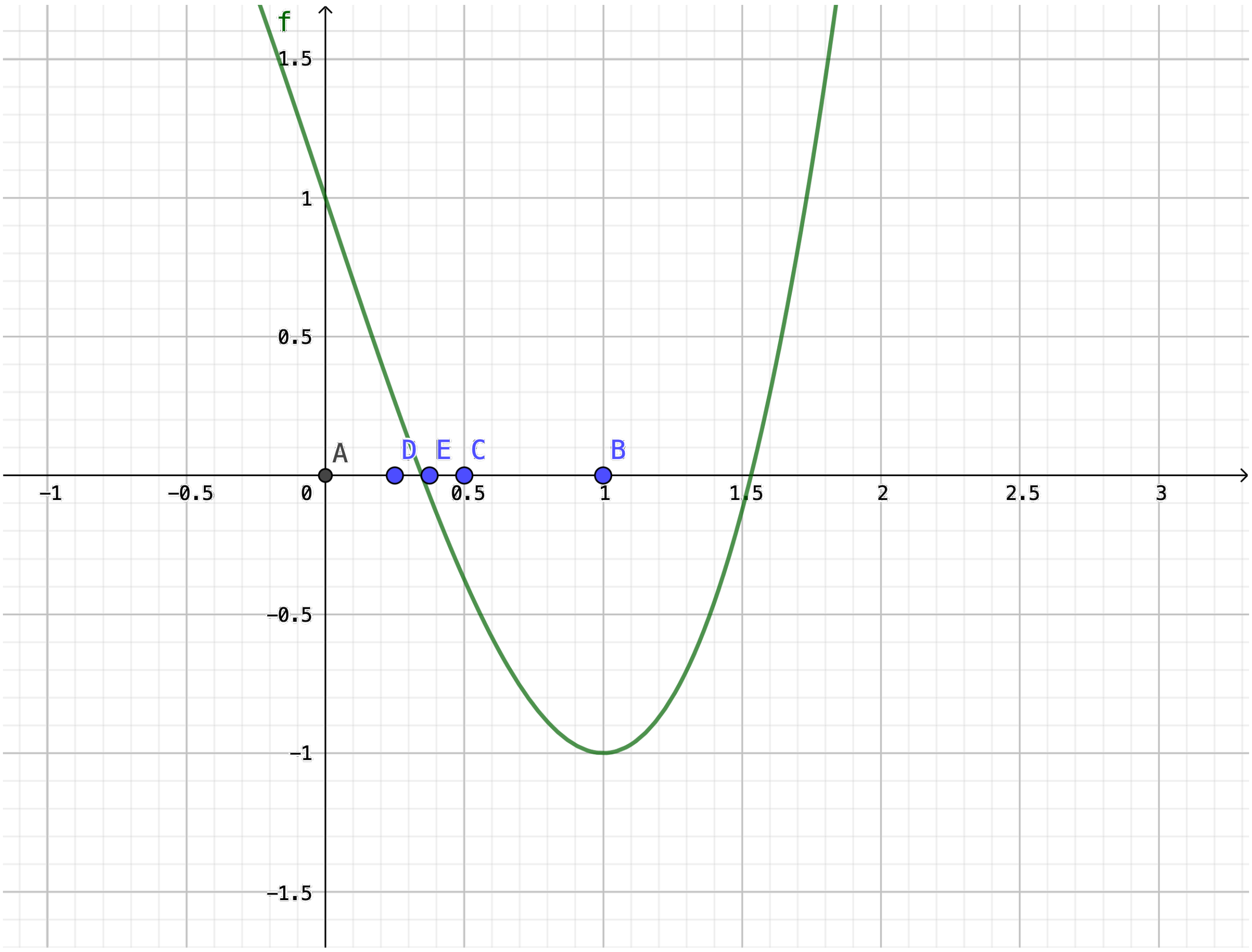
Tétel: Bolzano-tétel

Ha $f \in C[a;b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

Megjegyzés:

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a;b]$ zárt intervallum,
- $C[a;b]$: az $[a;b]$ (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$: $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek
- van gyök az $(a;b)$ (nyílt) intervallumban

Felező módszer



Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$
2. és $\varphi \in C[a;b]$,

akkor $\exists\, x^* \in [a;b] : \varphi(x^*) = x^*$.

Biz.: Definiáljuk a $g(x) = x - \varphi(x)$ függvényt, majd alkalmazzuk a Bolzano-tételt.

1. PÉLDA Igazoljuk, hogy a $\varphi(x) = \dfrac{x^3+2}{5}$ függvénynek a $[0,1]$ intervallumban pontosan egy fixpontja van.

Megoldás:

A $\varphi(x)$ függvény folytonos függvény. Mivel $\varphi'(x) = \frac{3}{5}x^2 \geq 0$ minden $x \in [0;1]$, és $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, a $\varphi(x)$ szigorúan monoton nő $[0;1]$-en. Az intervallum két végpontjában $\varphi(0) = \frac{2}{5}$, ezért $\varphi(1) = \frac{3}{5}$, ezért $\varphi\big([0;1]\big) = [\frac{2}{5}; \frac{3}{5}] \subset [0;1]$. A Brouwer-tétel alapján létezik fixpontja, az egyértelműséget a szigorú monotonitás biztosítja.

Definíció: kontrakció

A $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ leképezés *kontrakció* $[a;b]$-n, ha $\exists\, q \in [0,1)$, hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|\,, \qquad \forall x, y \in [a;b].$$

Állítás

1. $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény, $\varphi \in C^1[a;b]$ és
2. $|\varphi'(x)| < 1$ $(\forall\, x \in [a;b])$,

akkor φ kontrakció $[a;b]$-n.

Megj.:

- C^1: egyszer folyonosan differenciálható, vagyis a deriváltja folytonos.
- A kontrakciós tulajdonság függ az intervallumtól.

Tétel: Banach-féle fixponttétel $[a; b]$-re

Ha a $\varphi\colon [a; b] \to [a; b]$ függvény kontrakció $[a; b]$-n q kontrakciós együtthatóval, akkor

1. $\exists!\, x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. $\forall\, x_0 \in [a; b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $|x_k - x^*| \le q^k \cdot |x_0 - x^*| \le q^k(b - a)$,
   - $|x_k - x^*| \le \dfrac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$.

Biz.: Már volt, csak most $\mathbb{R}^n$ helyett $\mathbb{R}$ $(n = 1)$, sőt $[a; b]$. $\square$

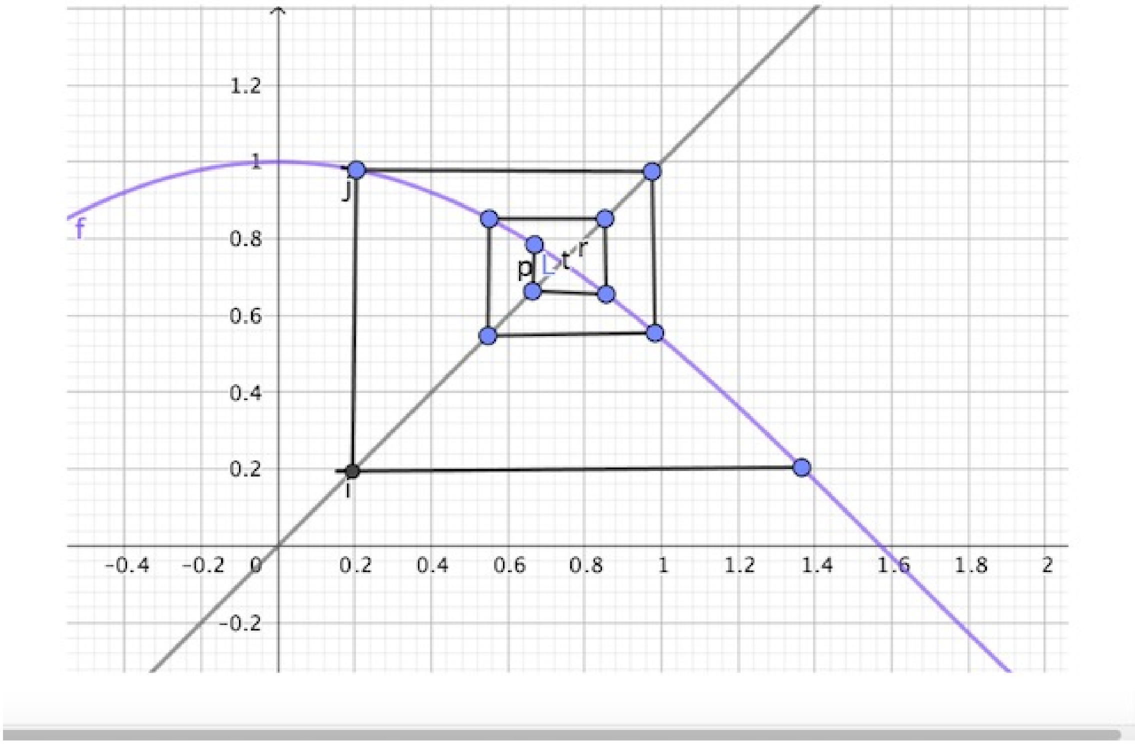
Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

1. Ha $\varphi\colon [a; b] \to [a; b]$,
2. $\varphi \in C^1[a; b]$ és
3. $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall\, x \in [a; b]$,

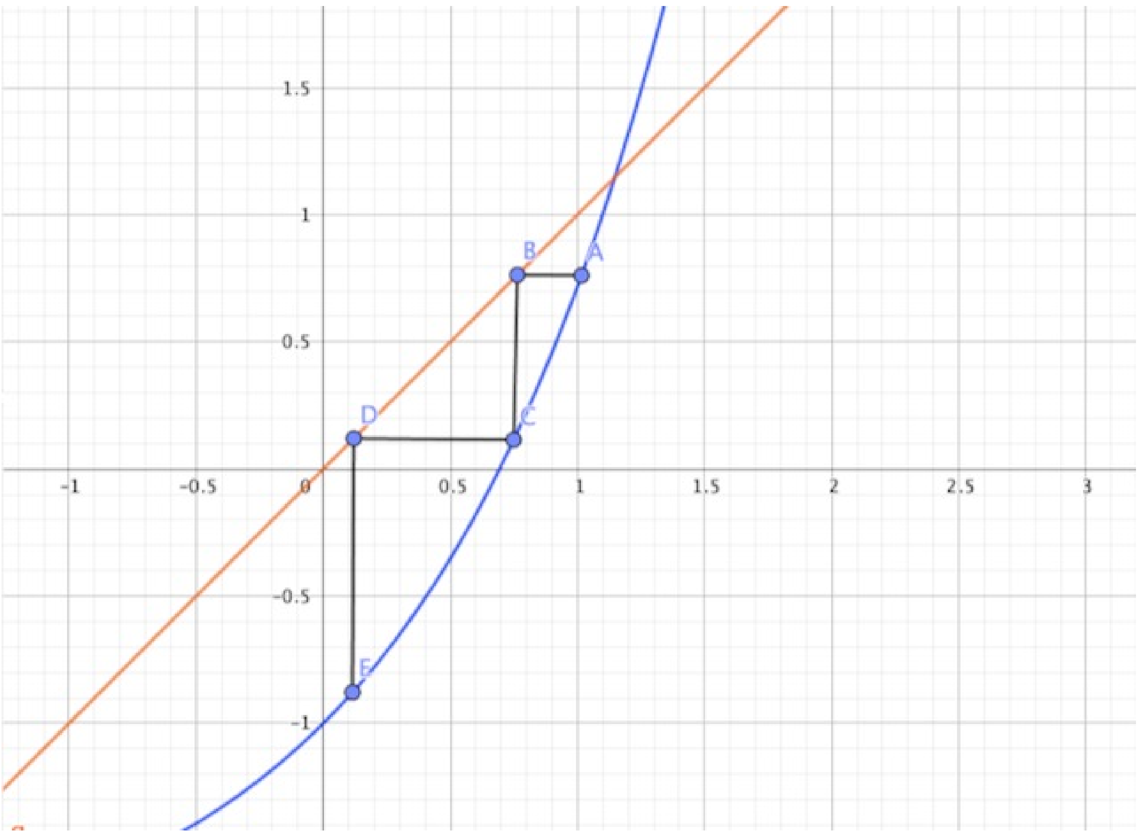
   akkor az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iteráció konvergens $\forall x_0 \in [a; b]$ esetén.

Megj.: Attól még lehet konvergens a sorozat, ha valahol $|\varphi'| \ge 1$. (Nem szükséges feltétel.)

$\varphi(x) = \cos x$



$\varphi(x) = e^x - 2$



2. PÉLDA Az $\sqrt{x} - x + 1 = 0$ egyenlet $[1;4]$-beli megoldására az $x_{k+1} = \sqrt{x_k} + 1$ iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját és írjuk fel a hibabecslését!

Megoldás:

$$\sqrt{x} - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{x} + 1$$

$\varphi(x) = \sqrt{x} + 1$ szigorúan monoton nő, $\varphi(1) = 2, \quad \varphi(4) = 3$ miatt

$$\varphi\Big([1,4]\Big) = [2,3] \subset [1,4],$$

és

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} < 1$$

miatt φ kontrakció, tehát alkalmazható a fixponttétel, ami igazolja a konvergenciát.
Hibabecslés: $q = \frac{1}{2}$

$$|x_k - x^*| \leq q^k(b-a) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

3. PÉLDA Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldására vizsgáljuk az

$$x_{k+1} = 1 + \frac{2}{x_k}$$

iterációt. Milyen kezdőérték esetén lesz konvergens? Bizonyítsuk a konvergenciát!

Megoldás: $f(x) = x^2 - x - 2, \quad f(1) = -2 < 0, \quad f(3) = 4 > 0$, így $f(x)$-nek az $[1,3]$-on van gyöke.

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + \frac{2}{x}$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{2}{x} \searrow, \quad \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \nearrow, \quad \varphi''(x) = \frac{4}{x^3} > 0$$

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(3) = \frac{5}{3}, \quad \varphi'(1) = -2, \quad \varphi'(2) = -\frac{1}{2}, \quad \varphi'(3) = \frac{2}{9}, \quad \varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{9}$$

A fentiekből látszik, hogy az $[1,3]$-on nem teljesülnek a feltételek, de szűkíthetjük az intervallumot $[3/2;3]$-ra, melyen már teljesülnek

$$\varphi\Big([3/2;3]\Big) \subset [3/2;3], \qquad |\varphi'(x)| < 1, \;\; x \in [3/2;3]$$

azaz az $x_{k+1} = 1 + \frac{2}{x_k}$ iteráció konvergens tetsz. $x_0 \in [3/2;3]$ esetén.

4. PÉLDA Írjunk fel fixpont-iterációt az $x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet megoldására, és vizsgáljuk meg a konvergenciát, ha

(a) $x = x^3 - 1$

(b) $x = \sqrt[3]{x+1}$

Megoldás: $f(x) = x^3 - x - 1$, továbbá $f(1) = -1 < 0$, $\quad f(2) = 5 > 0$, $\quad [1;2]$-n van gyöke. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, ezért pontosan egy gyöke van ezen az intervallumon.

(a) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x^3 - 1$

$\varphi(x) = x^3 - 1, \quad \varphi'(x) = 3x^2 > 1$ $[1;2]$-n, nem konvergens az iteráció.

(b) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{x+1}$

$\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} > 0$ az $[1;2]$-en, ezért $\varphi(x) \nearrow$,

és mivel $\varphi(1) = \sqrt[3]{2} > 1, \quad \varphi(2) = \sqrt[3]{3} < 2$,

$$\varphi\Big([1;2]\Big) \subset [1;2].$$

Továbbá

$$\varphi''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) \searrow \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}2^{-2/3} < 1 \quad (\forall\, x \in [1;2]),$$

így az iteráció konvergens tetszőleges $x_0 \in [1;2]$ kezdőérték esetén.

Definíció: konvergencia rend

Az (x_k) konvergens sorozat – határértékét jelölje x^* – *p-edrendben konvergens*, ha $\exists c \in (0;+\infty) \subset \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

Megjegyzés:

- p egyértelmű, $p \geq 1$,
- p nem feltétlenül egész (A szelőmódszernél $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)
- $p = 1$: elsőrendű vagy lineáris konvergencia (ekkor $c \leq 1$)
  $p = 2$: másodrendű vagy kvadratikus konvergencia
- $p > 1$: szuperlineáris konvergencia

Tétel: *p*-edrendben konvergens iterációk

1. Legyen $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^p[a;b]$ és
2. az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozat konvergens, határértéke x^*.
3. Ha $\varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,

akkor a konvergencia *p*-edrendű és hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p ,$$

ahol $M_p = \max\limits_{\xi \in [a;b]} \left| \varphi^{(p)}(\xi) \right|$.

Következmény

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$ kontrakció,
2. x^* a φ fixpontja és
3. $\varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,

akkor

1. a fixpont egyértelmű,
2. $\forall x_0 \in [a;b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. és a következő hibabecslés teljesül: $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p$.

Biz.: Ez a Banach-féle fixponttétel és a *p*-edrendben konvergens iterációk tételének összeházasításaként adódik. □

Definíció: Newton-módszer

Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőpont esetén a *Newton-módszer* alakja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

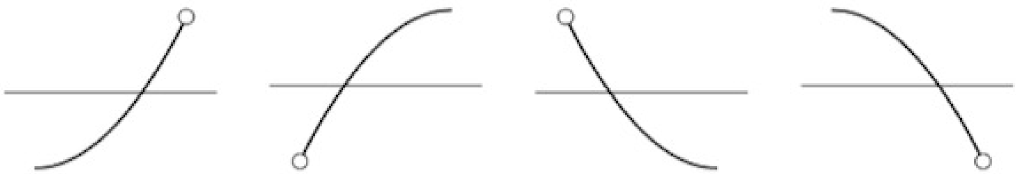
Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

1. $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' és f'' állandó előjelű,
3. $x_0 \in [a; b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer (által adott (x_k) sorozat) monoton konvergál x^*-hoz.

Megj.: 4 eset van:



Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

1. $\exists x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $m_1 = \min\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)| > 0$,
4. $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)| < +\infty$, innen $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$.
5. $x_0 \in [a; b] : |x_0 - x^*| < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer másodrendben konvergál a gyökhöz, és az

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*|^2$$

hibabecslés érvényes.

5. PÉLDA Az $f(x) = \cos x - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert! Igazoljuk a módszer másodrendű konvergenciáját a gyök valamely környezetében!

Megoldás: $f(x) = \cos x - 4x + 2$ folytonos (sőt kétszer folytonosan differenciálható) függvény, $f(0) = 3 > 0$, $f(\pi/2) = 2 - 2\pi < 0$, a Bolzano-tétel értelmében a $[0; \pi/2]$-on van gyöke.

A Newton iteráció:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{\cos x_n - 4x_n + 2}{\sin x_n + 4}$$

Nézzük a **Newton-módszer globális konvergencia-tételének** további feltételeit. A $[0; \pi/2]$ intervallumon

$$f'(x) = -\sin x - 4 < 0, \qquad f''(x) = -\cos x < 0$$

Az $f''(x)$ negativitása miatt

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) < 0,$$

tehát a Newton-módszer konvergens, ha az $[0; \pi/2]$ intervallum olyan x_0 pontjából indítjuk, melyben $f(x_0) < 0$.

Most nézzük a **Newton-módszer lokális konvergencia-tételének** további feltételeit. A $[0; \pi/2]$ intervallumon

$$f'(x) = -\sin x - 4 < 0, \quad \Rightarrow \quad f'(x) \quad \text{állandó előjelű},$$

$$|f'(x)| = \sin x + 4 \geq 4 = m_1,$$
$$|f''(x)| = \cos x \leq 1 = M_2.$$

Ekkor

$$M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{1}{8},$$

és minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\Big\{\frac{1}{M},\ |x^* - \frac{\pi}{2}|,\ |x^* - 0|\Big\} = |x^* - 0|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és a hiba becslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{8}|x_k - x^*|^2.$$

Tétel: Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére

A $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ polinom esetén, ha $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$, akkor P bármely x_k gyökére:

$$r < |x_k| < R,$$

ahol

$$R = 1 + \frac{\max\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|}, \qquad r = \frac{1}{1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}.$$

Megjegyzés: Ezzel a gyökök elhelyezkedésére egy origó középpontú nyílt körgyűrűt adtunk meg a komplex számsíkon.

5. PÉLDA Adjunk alsó és felső becslést az alábbi polinomok gyökeinek abszolút értékére!

(a) $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 + 8$

(b) $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x - 1$

Megoldás:

(a) $r = \dfrac{1}{1 + \frac{2}{8}} = \dfrac{4}{5}$, $\qquad R = 1 + \dfrac{8}{1} = 9$, tehát a polinom gyökeire

$$\frac{4}{5} < |x_k| < 9 \qquad (k = 1, \ldots, 5).$$

(b) $r := \dfrac{1}{1 + \frac{6}{1}}$, $\qquad R = 1 + \dfrac{6}{4} = \dfrac{5}{2}$, tehát a polinom gyökeire

$$\frac{1}{7} < |x_k| < \frac{5}{2} \qquad (k = 1, \ldots, 4).$$

Polinom- és deriváltjai helyettesítési értékének kiszámítása

Horner-elrendezés

Az n-edfokú P polinomra

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$= \big(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1\big)x + a_0 = \big((a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \dots + a_2)x + a_1\big)x + a_0 =$$

$$= \dots = \Big(\big(\dots(a_n x + a_{n-1})x + \dots\big)x + a_1\Big)x + a_0$$

Táblázatba foglalva

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & \dots & & a_1 & & a_0 \\
c & & & c \cdot a_n^{(1)} & & c \cdot a_{n-1}^{(1)} & & \dots & & c \cdot a_2^{(1)} & & c \cdot a_1^{(1)} \\
\hline
 & a_n^{(1)} & \nearrow & a_{n-1}^{(1)} & \nearrow & a_{n-2}^{(1)} & \nearrow & \dots & \nearrow & a_1^{(1)} & \nearrow & a_0^{(1)} = P(c)
\end{array}$$

ahol

$$\begin{aligned}
a_n^{(1)} &= a_n, \\
a_k^{(1)} &= a_k + c \cdot a_{k+1}^{(1)}, \quad (k = n-1, \dots, 1, 0).,
\end{aligned}$$

és $\;P(c) = a_0^{(1)}$.
Mivel

$$P(x) = P(c) + (x - c)\Big[b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_x + b_0\Big],$$

az egyenlőség két oldalán összehasonítva az x^k hatványok együtthatóit, látjuk, hogy

$$a_k = b_{k-1} - c \cdot b_k,$$

azaz

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k, \quad (k = n-1, ..., 0).$$

Ez azt mutatja, hogy $b_{k-1} = a_k^{(1)}$, azaz

$$P(x) = P(c) + (x - c)P^{(1)}(x),$$

ahol a $P^{(1)}(x)$ polinomot a Horner-elrendezéssel kaptuk. Ezt az egyenlőséget deriválva látjuk, hogy

$$P'(x) = P^{(1)}(x) + (x - c)P^{(1)'}(x),$$

és

$$P'(c) = P^{(1)}(c).$$

Ezért ha felírjuk a Horner-sémát a $P^{(1)}(x)$ függvényre, hogy kiszámítsuk a helyettesítési értékét a c pontban, $P'(c)$-t kapjuk.

Az eljárást folytathatjuk....

6. PÉLDA Írjuk fel a

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$$

polinomot

(a) $(x-2)$ hatványai szerint, azaz a $P(x)$ polinom 2 körüli Taylor-polinomját;

(b) $(x+1)$ hatványai szerint, azaz a $P(x)$ polinom (-1) körüli Taylor-polinomját!

Megoldás: Horner-elrendezéssel.

(a)

	1	-2	0	-1	1
2		2	0	0	-2
	1	0	0	-1	$\boxed{-1} = P(2)$
2		2	4	8	
	1	2	4	$\boxed{7} = P'(2)$	
2		2	8		
	1	4	$\boxed{12} = \frac{1}{2}P''(2)$		
2		2			
	1	$\boxed{6} = \frac{1}{3!}P^{(3)}(2)$			
2					
	$\boxed{1} = \frac{1}{4!}P^{(4)}(2)$				

A fentiekből leolvasható, hogy

$$P(x) = -1 + 7(x-2) + 12(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^4$$

(b) Az előző részhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$P(x) = 5 - 11(x-1) + 12(x-1)^2 - 6(x-1)^3 + (x-1)^4.$$