NÉV: NEPTUN kód:

ELTE IK Diszkrét matematika II (BSc, Szoftvertervező szakirány, 2019/20)

2. MINTA zárthelyi dolgozat (Algebra és Polinomok)

Időtartam: 90 perc. Számológép használata megengedett (kivéve grafikus, ill. programozható számológép). Minden feladat megoldásánál levezetés, illetve indoklás szükséges. Az órán tanult módszerek helyes alkalmazása minden további magyarázat nélkül is helyes indoklásnak számít.

1. Tekintsük az $(\mathbb{R}, \circ)$ párt, ahol $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \circ b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Döntsük el, hogy $\mathbb{R}$ a $\circ$ művelettel grupoid, félcsoport, csoport, illetve Abel-csoport-e. Indokoljuk is meg a válaszokat.

   8 pont

2. Döntsük el, hogy gyűrűt, illetve testet alkot-e a $H = \{(a+b\sqrt{5}) : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ alaphalmaz a valós számok szokásos összeadásával és szorzásával mint két művelettel: $(H, +, \cdot)$. Indokoljuk is meg a válaszokat. **12 pont**

3. a) A Horner-módszer segítségével határozzuk meg az $f(x) = 4x^3 + x^2$-nek $g(x) = x + 2$-vel vett osztási maradékát és a hányadosát $\mathbb{C}$ felett.

   b) Határozzuk meg az a, b valós paraméterek értékét úgy, hogy a -1 legalább kétszeres gyöke legyen az $ax^3 + bx^2 + 1$ polinomnak. **10 pont**

4. Osszuk el az $5x^4 + 2x - 3$ polinomot maradékosan a $2x^2 - 3x + 4$ polinommal $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}_7$ felett és adjuk meg a hányados és a maradékot mindkét esetben. **8 pont**

5. Határozzuk meg az $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ és $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$ polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}_3$ felett. **10 pont**

6. Legyen $f = 2x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ és $g = 2x^2 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Adjunk meg olyan $u, v \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomokat, melyekre az
$$u \cdot f + v \cdot g = 2x^2 + 4$$
   egyenlőség teljesül $\mathbb{Z}_5[x]$-ben. **12 pont**

Ponthatárok:

1: 0 - 19,
2: 20 - 29,
3: 30 - 39,
4: 40 - 49,
5: 50 -