Numerikus Módszerek

1. Zh megoldása

2020. április 17.

1. (a) Írjuk fel az $0,125$ gépi számot.

$$\frac{1}{8} = [10000| -2] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2}$$

(1 pont)

A $12,5$-öt két részletben írjuk át. Váltsuk át először az egész részét, 12-t kettes számrendszerbe: $12 = 8 + 4 = 1100_{(2)}$. A szám tizedestört részének átírása

	5
1	0
0	0

A mantissza hosszának megfelelően az első $4 + 1$ hasznos jegyet kell megtartanunk, ez az $1100.1_{(2)}$. Ezt normalizált alakra hozva:

$$[11001|4]\,.$$

Mivel a 6. jegy nulla, ezért ezen az értéken nem változtatunk. Kerekítenünk nem kellett, de azért ellenőrizhetjük, hogy jó-e a közelítés.

$$[11001|4] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^4 = \frac{16 + 8 + 1}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$$

Látjuk, hogy $12,5$ is gépi szám, ezért $fl(12,5) = [11001|4] = 12,5$. (4 pont)

(b) El kell végeznünk az $12,5 - 0,125$ gépi összadást. Ehhez előbb közös karakterisztikára kell hoznunk a számokat. Mindig a kisebb karakterisztikájú számot igazítjuk a nagyobbhoz, így most az $fl(0,125)$-t kell a 4 karakterisztikához igazítani. 6-tal nő a karakterisztika, ezt az első jegy elé 6 db nullával tudjuk kompenzálni. Csak 5 jegyű a mantisszánk, ezért a lecsorduló nulla miatt lefelé kerekítünk, így

$$[10000| -2] \to [00000|4]\,.$$

$$\begin{array}{r} [11001|4] \\ +\,[00000|4] \\ \hline [11001|4] \end{array}$$

A kapott eredmény normalizált.

$$[11001|04] = 12,5.$$

(3 pont)

(c) Mivel $0,125$ és $12,5$ is gépi szám, ezért a kinndulási értékek hibája 0. Az eredmény, $[11001|4] = 12,5$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{eredm.} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^4 = \frac{1}{4}$$

(2 pont)

2. **Az elimináció**: A mátrix mellé írjuk az egységmátrixot és együtt eleininálunk rajtuk.
1. lépés:
2. sor $-$ (4) $*$ 1. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

(2 pont)

2. lépés:
3. sor $-$ 2. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right] \to$$

(2 pont)

A visszahelyettesítés:
3. sor / (-3)
2. sor $-$ (4) $*$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

(2 pont)

1. sor $-$ 2. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Tehát a mátrix inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

3. (a) Az LU-felbontást a „tárolós" módszerrel készítjük el.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|ccc} 4 & -2 & 2 & 2 \\ \hline -\frac{1}{2} & 4 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 5 & -3 \\ \frac{1}{2} & 2 & -3 & 6 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{c|c|cc} 4 & -2 & 2 & 2 \\ \hline -\frac{1}{2} & 4 & -2 & 2 \\ \cline{2-4} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c|c} 4 & -2 & 2 & 2 \\ \hline -\frac{1}{2} & 4 & -2 & 2 \\ \cline{2-4} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 & -2 \\ \cline{3-4} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right]$$

Kiolvasva a felbontást:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(6 pont)

Innen a $\det(A) = 4^4 = 256$. (1 pont)

(b) Vegyük ki U diagonálisát a D diagonális mátrixba.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Az LDU felbontásban L-et az LU-felbontásból kaptuk, D a fenti diagonális mátrix és $U = L^T$. (2 pont)

(c) A D mátrix gyökével állítjuk elő a Cholesky-felbontást:

$$A = LU = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = \widetilde{L}\widetilde{L}^T.$$

$$\widetilde{L} = L \cdot \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

4. Számítsuk ki az A mátrix QR-felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{q_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\mathbf{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2 pont)

$$\begin{aligned} r_{12} &= \langle \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot ((-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 0 \\ \mathbf{s_2} &= \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \mathbf{a_2} \\ r_{22} &= \|\mathbf{s_2}\|_2 = \sqrt{3} \\ \mathbf{q_2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3 pont)

$$\begin{aligned} r_{13} &= \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot ((-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ r_{23} &= \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \mathbf{s_3} &= \mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0+3-4 \\ 6-3-4 \\ 6-4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|\mathbf{s_3}\|_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{q_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

(1 pont)

5. Első lépésben a mátrix első oszlopát Householder-transzformációval $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozzuk. A numerikusan stabil számolás érdekében jó előjelet választunk $k = \sigma$-nak.

$$\sigma = -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(12) \cdot \sqrt{12^2 + 5^2} = -13$$

Kiszámoljuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} + 13 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2 = 5 \cdot \sqrt{26},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

A mátrix első oszlopára nem kell alkalmaznunk a transzformációt, mert a konstrukció garantálja az eredményt.

Alkalmazzuk a transzformációt a második oszlopra:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a_2} &= \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}\right) \cdot \mathbf{a_2} = \mathbf{a_2} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} - \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-13) = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3 pont)

Alkalmazzuk a transzformációt a jobb oldali vektorra:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} &= \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{b}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} - \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 52 = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3 pont)

Egy Householder-transzformációs lépés után a lineáris egyenletrendszer felsőháromszög alakú.

$$\begin{bmatrix} -13 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk a megoldást:

$$\begin{aligned} 8x_2 &= 8 \to x_2 = 1 \\ -13x_1 + x_2 &= -12 \to -13x_1 = -12 - x_2 = -12 - 1 = -13 \to x_1 = 1 \end{aligned}$$

(1 pont)