10. gyakorlat

Iterációs módszerek: a Gauss-Seidel-iteráció

1. Konvergál-e az A mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-t. A megoldáshoz a Gauss-Seidel-iterációt szeretnénk alkalmazni.

(a) Konvergens-e tetszőleges $\boldsymbol{x}^{(0)}$ esetén?

(b) Írjuk fel a hibabecslést!

(c) $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki a $\boldsymbol{x}^{(1)}$-et koordinátánként!

(d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

3. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Megoldható az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER a Gauss-Seidel iteráció segítségével?

(b) Ha igen, hány lépés szükséges a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha az iterációt az $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ vektorral indítjuk?

4. Vizsgáljuk meg a Gauss-Seidel és a relaxált Gauss-Seidel iterációk konvergenciáját az alábbi mátrix esetén

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS

Legyen $A = L + D + U$, ekkor

$$(L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (L + D)\mathbf{x} = -U\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

innen

$$\mathbf{x} = -(L + D)^{-1}U\mathbf{x} + (L + D)^{-1}\mathbf{b},$$

és a

Gauss-Seidel-iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_{B_\mathrm{S}} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(L + D)^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_\mathrm{S}},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= -(L + D)^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}\mathbf{b} \\ (L + D)\mathbf{x}^{(k+1)} &= -U\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \\ D\mathbf{x}^{(k+1)} &= -L\mathbf{x}^{(k+1)} - U\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= -D^{-1}\left(L\mathbf{x}^{(k+1)} + U\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\right) \end{aligned}$$

A Gauss-Seidel-iteráció koordinátás alakja:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Ha A szigorúan diagonálisan domináns a mátrix soraira, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-re felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens tetszőleges kezdővektor esetén.

1. Konvergál-e az A mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás

Írjuk fel a $B_S = -(L+D)^{-1}U$ átmenetmátrixot. Ehhez először is invertáljuk $(L+D)$-t a Gauss-elimináció segítségével.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ (2)+1\cdot(1) \\ (3)+2\cdot(1) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ (3)+2\cdot(2) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

azaz

$$(L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az iterációs mátrix meghatározásához már csak egy mátrix szorzást kell elvégeznünk, ugyanis $B_s = -(L+D)^{-1}\cdot U = (L+D)^{-1}\cdot(-U)$. Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix} = B_s$$

A Gauss-Seidel iteráció akkor és csak akkor konvergens, ha $\varrho(B_s) < 1$. A szükséges feltétel ellenőrzéséhez meg kell határoznunk B_s sajátértékeit. Ennek első lépéseként íŋrjuk fel a B_s mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinomot.

$$P(\lambda) = det(B_s - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \cdot [(2-\lambda)(-6-\lambda)+8] = -\lambda \cdot \left(\lambda^2 + 4\lambda - 4\right)$$

A sajátértékek ebből már (másodfokú megoldóképlettel) könnyedén meghatározhatók:

$$\lambda_0 = 0$$
$$\lambda_1 = -2-\sqrt{8}$$
$$\lambda_1 = -2+\sqrt{8}$$

A B_s iterációs mátrix spektrál sugara ennek alapján $\rho(B_s) = 2+\sqrt{8} > 1$, azaz az iteráció **nem** konvergál minden $x^{(0)}$ esetén.

2. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-t. A megoldáshoz a Gauss-Seidel-iterációt szeretnénk alkalmazni.

(a) Konvergens-e tetszőleges $\boldsymbol{x}^{(0)}$ esetén?

(b) Írjuk fel a hibabecslést!

(c) $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki a $\boldsymbol{x}^{(1)}$-et koordinátánként!

(d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

Megoldás:

(a) A feladatunk (Gauss-Seidel-iteráció) átmeneti mátrixa

$$B_S = -(D+L)^{-1}U,$$

ahol

$$D+L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad (D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 \end{bmatrix},$$

végül

$$B_S = (D+L)^{-1}(-U) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 & 1/4 \\ 0 & 1/64 & 1/16 \end{bmatrix}$$

amelyből $\|B_S\|_\infty = \frac{5}{16} = q < 1$, azaz az iteráció bármely $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ esetén konvergens.

Második megoldás: Az A mátrix szig.diag.dom. a soraira nézve, ez biztosítja az iteráció konvergenciáját tetszőleges kezdővektor esetén.
A konvergencia igazolására az előadás anyagából további tételeket is felhasználhatunk:

i. Az A mátrix szimmetrikus és pozitív definit, így az S(1) iteráció konvergens.
ii. Az A mátrix tridiagonális, ezért az S(1) (sőt a J(1) is) konvergens.

(b) A hibabecslést a fixpont tétel segítségével írjuk fel:

$$\|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{5}{16}\right)^k}{1-\frac{5}{16}}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty$$

(c) Ha $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, akkor

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = B_S \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{c}_S = \boldsymbol{c}_S = (L+D)^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 11/16 \\ 59/64 \end{bmatrix}.$$

Koordinátás alakban felírhatjuk az $\mathbf{x}^{k+1}$ vektort az alábbi formula segítségével is:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Megjegyezzük, hogy a képletből látszik, hogy a Gauss-Seidel-iteráció azonnal felhasználja a $(k+1)$-ik lépés során a közben kiszámított koordinátákat. Ezzel szemben, a Jacobi-iteráció a $(k+1)$-ik lépés során csak a k-adik lépésben kiszámolt koordinátákat használja fel.

Alkalmazzuk a formulát a feladatra. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} \left(a_{12} x_2^{(0)} + a_{13} x_3^{(0)} - b_1 \right) = -\frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{3}{4} \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} \left(a_{21} x_1^{(1)} + a_{23} x_3^{(0)} - b_2 \right) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{3}{4} + 0 - 2 \right) = \frac{11}{16} \\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}} \left(a_{31} x_1^{(1)} + a_{32} x_2^{(1)} - b_3 \right) = -\frac{1}{4} \left(0 \cdot \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{11}{16} - 3 \right) = \frac{59}{64}. \end{aligned}$$

(d) Mivel $\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(1)}$, ezért $\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{59}{64}$. Innen a korábban felírt hibabecslésünk

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{(\frac{5}{16})^k}{1 - \frac{5}{16}} \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \left(\frac{5}{16} \right)^k \cdot \frac{16}{11} \cdot \frac{59}{64} = \left(\frac{5}{16} \right)^k \cdot \frac{59}{44}$$

Ahhoz, hogy 10^{-3}-nál kisebb hibát kapjunk, k-t úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\left(\frac{5}{16} \right)^k \cdot \frac{59}{44} < 10^{-3}$$

teljesüljön. Átrendezzük az egyenlőtlenséget, majd mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát vesszük

$$\frac{59}{44} \cdot 10^3 < \left(\frac{16}{5} \right)^k \qquad \Longrightarrow \qquad k > \frac{\log\left(\frac{59}{44} \cdot 10^3 \right)}{\log\left(\frac{16}{5} \right)} \approx 6.19$$

azaz legalább hét lépés elvégzése szükséges a kívánt pontosság eléréséhez. Megjegyezzük, hogy a Jacobi-iterációhoz képest erre a feladatra nézve a Gauss-Seidel iteráció majdnem kétszer olyan gyorsan konvergál a megoldáshoz. Végtelen normában tekintve a kontrakciós paramétereket ugyanis azt látjuk, hogy

$$q_J = \frac{1}{2}, \qquad q_S = \frac{5}{16}.$$

3. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Megoldható az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER a Gauss-Seidel iteráció segítségével?

(b) Ha igen, hány lépés szükséges a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha az iterációt az $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ vektorral indítjuk?

Megoldás:

(a) Felírjuk az iteráció átmeneti mátrixát és ellenőrizzük, hogy teljesíti-e a konvergencia valamelyik elégséges feltételét. A Gauss-Seidel-iteráció átmeneti mátrixa

$$B_S = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/25 & 1/5 & 0 \\ 13/50 & 1/10 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3/5 & -1/5 \\ 0 & 6/25 & 12/25 \\ 0 & -39/50 & -3/50 \end{bmatrix}$$

Mivel

$$\|B_S\|_\infty = \frac{21}{25} < 1,$$

az iteráció konvergens bármely $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén.

(b) Felírjuk az iterációhoz tartozó hibaformulát:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{(\frac{21}{25})^k}{1 - \frac{21}{25}} \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{25}{4} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty,$$

ahol

$$\mathbf{x}^{(1)} = B_S \cdot \mathbf{0} + (L+D)^{-1}\mathbf{b} = (L+D)^{-1}\mathbf{b} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/25 & 1/5 & 0 \\ 13/50 & 1/10 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 3/25 \\ -7/50 \end{bmatrix}$$

és

$$\|\boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty = \frac{1}{5}.$$

Behelyettesítve a hibaformulába

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{5}{4}.$$

Keressük azt a legkisebb k-t, amelyre

$$\left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{5}{4} \leq 10^{-3}$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget, majd mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$k \geq \frac{\log(\frac{5}{4} \cdot 10^3)}{\log(\frac{25}{21})} \approx 40.9,$$

tehát legalább 41 lépés kell a 10^{-3} pontossághoz.

4. Vizsgáljuk meg a Gauss-Seidel és a relaxált Gauss-Seidel iterációk konvergenciáját az alábbi mátrix esetén

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

(a) Először írjuk fel a Gauss-Seidel iteráció átmeneti mátrixát:

$$B_S = -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A $\|B_S\|_\infty = 1$ miatt nem teljesül a konvergencia elégséges feltétele, ezért megvizsgáljuk a B_S spektrálsugarát (a konvergencia szükséges és elégséges feltételét).
A B_S mátrix karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (-1-\lambda) = \lambda(\lambda+1)$$

A keresett sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -1$$

és $\varrho(B_S) = 1$, ami azt jelenti, hogy a Gauss-Seidel iteráció nem konvergens.

(b) Vizsgáljuk meg, hogy relaxációs paraméter alkalmazásával konvergenssé tehető-e a Gauss-Seidel iteráció. Ehhez elsőször is számoljuk ki a $B_{S(\omega)}$ iterációs mátrixot, a

$$B_{S(\omega)} = (D+\omega L)^{-1}\Big[(1-\omega)D - \omega U\Big]$$

képlet alapján elvégezve a kívánt műveleteket kapjuk, hogy

$$B_{S(\omega)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega \\ \omega^2-\omega & -\omega^2-\omega+1 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy

$$\|B_{S(\omega)}\|_\infty = \max\Big(1, |1-2\omega|\Big) \geq 1$$

és

$$\|B_{S(\omega)}\|_1 = \max\Big(1+\omega^2-2\omega, 1-\omega^2\Big)$$

Az utóbbi norma pl. az $\omega = \frac{1}{2}$ paraméter esetén

$$\|B_{S(\frac{1}{2})}\|_1 = \frac{3}{4} < 1.$$

Mivel az $\|.\|_1$ illeszkedő mátrixnorma, az iteráció konvergens lesz.