Numerikus módszerek 1. **2. ZH megoldása** **2019. december 10.**

Programtervező informatikus Bsc szak

1. Bármely $\|.\|$ mátrixnormára igaz, hogy (1 pont)

$$\|\mathbf{A}\| \geq \rho(\mathbf{A}).$$

Vegyük az $\mathbf{e} = [1, \ldots, 1]^T$ csupa egyest tartalmazó vektort. Ekkor

$$\mathbf{Ae} = c\mathbf{e}, \quad \text{ahol } c = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{e}$ sajátvektora és c sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, de $c = \|\mathbf{A}\|_\infty$, ezért a spektrálsugár és a végtelen norma megegyezik, tehát $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty$.

(3 pont)

2. a) Az $\mathbf{A}$ mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{4,\,4,\,3\} = 4, \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}\right\} = \frac{4}{6}.$$

$$\mathrm{cond}_1(\mathbf{A}) = 4 \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{3}$$

(5 pont)

Az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, a 2-es kondíciószámhoz számítsuk ki a sajátértékeit.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\,[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4] = \\ &= (4-\lambda)[\lambda^2 - \lambda - 6] = 0 \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -2.$$

Így $\max|\lambda_i| = 4$, tehát

$$\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{4}{|-2|} = 2$$

(6 pont)

b) A kapott eredmények alapján $\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = 2 < \frac{8}{3} = \mathrm{cond}_1(\mathbf{A})$.
Tehát igaz az állítás! (1 pont)

3. a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk. (3 pont)

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns tulajdonságára hivatkozhatunk.

(1 pont)

b) Az iteráció hibabecslése

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty$$

(1 pont)

c) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$-ból indulva. A Jacobi-iteráció vektoros alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}_{J(1)},$$

ahol

$$\mathbf{B}_{J(1)} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{D^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(2 pont)

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c}_{J(1)} = \mathbf{c}_{J(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \|\mathbf{c}_{J(1)}\|_\infty = 1.$$

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \le 10^{-3}$$

$$1000 \le 2^{k-1} \quad \Rightarrow \quad k-1 \ge 10 \Rightarrow \quad k \ge 11$$

(3 pont)

4. a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, ezért a konvergencia elégséges feltételét vizsgáljuk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz.
A konvergenciát tanult konvergencia tételre hivatkozva is bizonyíthatjuk, ekkor az $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns vagy szimmetrikus és pozitív definit tulajdonságára hivatkozhatunk. Ekkor az átmenetmátrixot sem kell kiszámolni. (4 pont)

b) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = [1,\ 2,\ 3]^T$-ból indulva. A Gauss–Seidel-iteráció koordinátás alakja 3×3-es mátrix esetén

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(0)} + a_{13} \cdot x_3^{(0)} - b_1\right) \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(1)} + a_{23} \cdot x_3^{(0)} - b_2\right) \\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}} \cdot \left(a_{31} \cdot x_1^{(1)} + a_{32} \cdot x_2^{(1)} - b_3\right) \end{aligned}$$

Most

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -1 \cdot (-1) = 1 \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot \left(x_3^{(0)} - 2\right) = -\frac{1}{2}. \\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{3} \cdot \left(x_2^{(1)} - 1\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(3 pont)

c) Mivel az **A** mátrix szigorúan diagonálisan domináns ezért tudjuk, hogy $\left\|\mathbf{B_{S(1)}}\right\|_\infty \leq \left\|\mathbf{B_{J(1)}}\right\|_\infty$, vagyis a G-S iteráció legalább olyan gyors mint a Jacobi. Sőt, mivel **A** mátrix tridiagonális is, ezért $\rho(\mathbf{B_{S(1)}}) = \rho(\mathbf{B_{J(1)}})^2$ is igaz, tehát a G-S kétszer olyan gyors mint a Jacobi.

(1 pont)

5. a) A Richardson-iteráció tanult konvergencia tételét használjuk a megoldáshoz.
A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit **A** mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. Ahol

$$0 < m = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = M$$

az **A** mátrix sajátértékei. Az optimális paraméter a tétel szerint $p_0 = \frac{2}{M+m}$.
Mivel $\mathbf{B_{p_0}}$ szimmetrikus, ezért

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \|\mathbf{B_{p_0}}\|_2$$

a kontrakciós együttható a 2-es vektornormában. A tétel pontos kimondása és a feltételek ellenőrzése a kiszámolt sajátértékek alapján: (4 pont)

Látjuk, hogy a feladat megoldásához az **A** mátrix sajátértékeit ismernünk kell.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[(4-\lambda)(3-\lambda) - 1\right] - 1(3-\lambda) = \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0 \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 5.$$

Innen látszik, hogy minden sajátérték nagyobb, mint nulla. Továbbá $\mathbf{A} = \mathbf{A^T}$ is igaz, így alkalmazva a fenti tétel jelöléseit kapjuk, hogy

$$m = 2, \quad M = 5.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{5})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. (2 pont)

b) Az optimális paraméter a tétel szerint

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{7}.$$

Ezen paraméter mellett az átmenetmátrix spektrálsugara a tétel állítása szerint

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{3}{7}.$$

Mivel $\mathbf{B_{p_0}}$ szimmetrikus, ezért

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \|\mathbf{B_{p_0}}\|_2 = \frac{3}{7} = q$$

a kontrakciós együttható a 2-es vektornormában. (2 pont)

6. A $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját határozzuk meg, azaz a

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}$$

alakot, ahol $\mathbf{J} = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ a pozícióhalmaz. Ez az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & * & \\ & & * \\ * & & \end{bmatrix}$$

1. lépés: Az $\mathbf{A}$ mátrix szétbontása a pozícióhalmaz első sora és oszlopa alapján, majd eliminálás az 1. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \mathbf{B} = \mathbf{P_1} - \mathbf{Q_1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.
(3 pont)

2. lépés: Az $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2}$ mátrix szétbontása a pozícióhalmaz második sora és oszlopa alapján, majd eliminálás a 2. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{P_2} - \mathbf{Q_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk.
(3 pont)

Ezután fel tudjuk írni a kívánt alakot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1}L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2 pont)