Numerikus módszerek 1. **2. ZÁRTHELYI** **2019. május 14.**

Programtervező informatikus Bsc szak

Név ______________________

Neptun kód ______________________

Gyak.vez. neve ______________________

Pontszám ____________

1. Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $\|\mathbf{A}\|_m := n \cdot \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.
a) Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{A}\|_m$ mátrixnorma.
b) Bizonyítsuk, hogy a 2-es vektornormához illeszkedik. (6 pont)

2. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix kondíciószámát az 1-es, 2-es és a ∞ mátrixnormában! (10 pont)

3. Az $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Jacobi-iterációt!
a) Bizonyítsuk a konvergenciát!
b) Írjuk fel a hibabecslését!
c) Hány lépést kell tennünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$? (10 pont)

4. Az $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Gauss–Seidel-iterációt!
a) Bizonyítsuk a konvergenciát!
b) Számítsuk ki $\mathbf{x}_1$ -et a koordinátás alakjában, ha $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$! (6 pont)

5. Az $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre írjuk fel a Richardson-iterációt!
a) Pontosan mely p paraméter értékekre konvergens?
b) Mi az optimális paraméter és mennyi ekkor a kontrakciós együttható? (8 pont)

6. Készítsük el a következő mátrix $J = \{(1,2),(2,3)\}$ pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!
b) Írjuk fel az ILU-algoritmus vektoros alakját a kapott $\mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{Q}$ mátrixokkal!
(Az átmenetmátrixot nem kell kiszámolni.) (10 pont)