Számításelmélet

4. előadás

előadó: Kolonits Gábor
kolomax@inf.elte.hu

Elsőrendű logika

A nulladrendű logika korlátozottan alkalmas a világ leírására, az egyszerű állítások belső szerkezetét nem vizsgálja. Például a „Minden ember halandó.”, „Szókrátész ember.”, „Szókrátész halandó.” állítások nulladrendű formalizálása esetén nincs más lehetőségünk, mint x, y és z-ként formalizálni a fenti állításokat, és így a nulladrendű logikában a 3. állítás nem következménye az első 2-nek.

Elsőrendű logika

A nulladrendű logika korlátozottan alkalmas a világ leírására, az egyszerű állítások belső szerkezetét nem vizsgálja. Például a „Minden ember halandó.”, „Szókrátész ember.”, „Szókrátész halandó.” állítások nulladrendű formalizálása esetén nincs más lehetőségünk, mint x, y és z-ként formalizálni a fenti állításokat, és így a nulladrendű logikában a 3. állítás nem következménye az első 2-nek.

Ugyanakkor jó lenne egy olyan modell, ahol a 3. állítás az első 2 következménye, hiszen az emberek halmaza részhalmaz a halandók halmazának és Szókrátész az ember-halmaz egy eleme, így a halandók halmazának is eleme.

Elsőrendű logika

A nulladrendű logika korlátozottan alkalmas a világ leírására, az egyszerű állítások belső szerkezetét nem vizsgálja. Például a „Minden ember halandó.”, „Szókrátész ember.”, „Szókrátész halandó.” állítások nulladrendű formalizálása esetén nincs más lehetőségünk, mint x, y és z-ként formalizálni a fenti állításokat, és így a nulladrendű logikában a 3. állítás nem következménye az első 2-nek.

Ugyanakkor jó lenne egy olyan modell, ahol a 3. állítás az első 2 következménye, hiszen az emberek halmaza részhalmaz a halandók halmazának és Szókrátész az ember-halmaz egy eleme, így a halandók halmazának is eleme.

Egy elsőrendű logikában (nem véletlen a határozatlan névelő!) az állítások belső szerkezetét is figyelembe tudjuk venni. Tudunk egy halmaz összes elemére illetve legalább egy elemére vonatkozó állításokat formalizálni.

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,
- Cnst, a **konstansszimbólumok** véges halmaza,

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,
- Cnst, a **konstansszimbólumok** véges halmaza,
- $\mathrm{Ind} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, az **individuumváltozók** megszámlálhatóan végtelen halmaza

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,
- Cnst, a **konstansszimbólumok** véges halmaza,
- $\mathrm{Ind} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, az **individuumváltozók** megszámlálhatóan végtelen halmaza
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists\}$ műveleti jelek és kvantorok. $\forall$ neve **univerzális kvantor**, míg $\exists$ neve **egzisztenciális kvantor**

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,
- Cnst, a **konstansszimbólumok** véges halmaza,
- $\mathrm{Ind} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, az **individuumváltozók** megszámlálhatóan végtelen halmaza
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists\}$ műveleti jelek és kvantorok. $\forall$ neve **univerzális kvantor**, míg $\exists$ neve **egzisztenciális kvantor**
- **(**, **)** és **,** (vessző).

Elsőrendű logika – szintaxis

Definiálni fogunk két nyelvet a termek Term és a formulák Form nyelvét. Ehhez előbb definálunk egy megszámlálhatóan végtelen szimbólumhalmazt, a szavak betűinek a halmazát.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,
- Cnst, a **konstansszimbólumok** véges halmaza,
- $\mathrm{Ind} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, az **individuumváltozók** megszámlálhatóan végtelen halmaza
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists\}$ műveleti jelek és kvantorok. $\forall$ neve **univerzális kvantor**, míg $\exists$ neve **egzisztenciális kvantor**
- **(**, **)** és **,** (vessző).

Minden $s \in \mathrm{Pred} \cup \mathrm{Func} \cup \mathrm{Cnst}$-hez hozzá van rendelve egy $\mathrm{ar}(s) \in \mathbb{N}$ szám, a szimbólum **aritása** (a konstansokhoz mindig 0).

Elsőrendű logika – szintaxis

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$

Elsőrendű logika – szintaxis

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$

Elsőrendű logika – szintaxis

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$
- minden $f \in \mathrm{Func}$ és $t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathrm{Term}$ esetén $f(t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(f)}) \in \mathrm{Term}$.

Elsőrendű logika – szintaxis

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$
- minden $f \in \mathrm{Func}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathrm{Term}$ esetén $f(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)}) \in \mathrm{Term}$.

Definíció

Az **elsőrendű formulák** Form nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $p \in \mathrm{Pred}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(p)} \in \mathrm{Term}$ esetén $p(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(p)}) \in \mathrm{Form}$. Ezek az **atomi formulák**.

Elsőrendű logika – szintaxis

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$
- minden $f \in \mathrm{Func}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathrm{Term}$ esetén $f(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)}) \in \mathrm{Term}$.

Definíció

Az **elsőrendű formulák** Form nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $p \in \mathrm{Pred}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(p)} \in \mathrm{Term}$ esetén $p(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(p)}) \in \mathrm{Form}$. Ezek az **atomi formulák**.
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$.

Elsőrendű logika – szintaxis

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$
- minden $f \in \mathrm{Func}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathrm{Term}$ esetén $f(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)}) \in \mathrm{Term}$.

Definíció

Az **elsőrendű formulák** Form nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $p \in \mathrm{Pred}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(p)} \in \mathrm{Term}$ esetén $p(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(p)}) \in \mathrm{Form}$. Ezek az **atomi formulák**.
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$.
- Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}$, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathrm{Form}$.

Elsőrendű logika – szintaxis

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$
- minden $f \in \mathrm{Func}$ és $t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathrm{Term}$ esetén $f(t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(f)}) \in \mathrm{Term}$.

Definíció

Az **elsőrendű formulák** Form nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $p \in \mathrm{Pred}$ és $t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(p)} \in \mathrm{Term}$ esetén $p(t_1, \dots t_{\mathrm{ar}(p)}) \in \mathrm{Form}$. Ezek az **atomi formulák**.
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$.
- Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}$, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathrm{Form}$.
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}, x \in \mathrm{Ind}$, akkor $\forall x\varphi \in \mathrm{Form}$ és $\exists x\varphi \in \mathrm{Form}$.

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\mathrm{Pred} = \{p, q\}, \quad \mathrm{Func} = \{f\}, \quad \mathrm{Cnst} = \{a\}.$

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\text{Pred} = \{p, q\}, \quad \text{Func} = \{f\}, \quad \text{Cnst} = \{a\}.$

$\text{ar}(p) = \text{ar}(q) = \text{ar}(f) = 2.$

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\mathrm{Pred} = \{p, q\}, \quad \mathrm{Func} = \{f\}, \quad \mathrm{Cnst} = \{a\}.$

$\mathrm{ar}(p) = \mathrm{ar}(q) = \mathrm{ar}(f) = 2.$

$x,\ a,\ f(x, y),\ f(x, f(a, x)) \in \mathrm{Term}.$

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\text{Pred} = \{p, q\}, \quad \text{Func} = \{f\}, \quad \text{Cnst} = \{a\}.$

$\text{ar}(p) = \text{ar}(q) = \text{ar}(f) = 2.$

$x, \; a, \; f(x, y), \; f(x, f(a, x)) \in \text{Term}.$

$f(x) \notin \text{Term}$, mert $\text{ar}(f) = 1$

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\text{Pred} = \{p, q\}, \quad \text{Func} = \{f\}, \quad \text{Cnst} = \{a\}.$

$\text{ar}(p) = \text{ar}(q) = \text{ar}(f) = 2.$

$x, \; a, \; f(x, y), \; f(x, f(a, x)) \in \text{Term}.$

$f(x) \notin \text{Term}$, mert $\text{ar}(f) = 1$

$p(x, y), \; q(x, f(a, a)), \; \neg p(x, f(y, z)),$
$(\exists x p(x, y) \to q(x, z)) \in \text{Form}.$

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\mathrm{Pred} = \{p, q\}, \quad \mathrm{Func} = \{f\}, \quad \mathrm{Cnst} = \{a\}.$

$\mathrm{ar}(p) = \mathrm{ar}(q) = \mathrm{ar}(f) = 2.$

$x, \; a, \; f(x, y), \; f(x, f(a, x)) \in \mathrm{Term}.$

$f(x) \notin \mathrm{Term}$, mert $\mathrm{ar}(f) = 1$

$$p(x, y), \; q(x, f(a, a)), \; \neg p(x, f(y, z)), \qquad (\exists x p(x, y) \to q(x, z)) \in \mathrm{Form}.$$

$p(x), \; \forall x f(x, y), \; p(x, q(y, z)) \notin \mathrm{Form}$

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\text{Pred} = \{p, q\}, \quad \text{Func} = \{f\}, \quad \text{Cnst} = \{a\}.$

$\text{ar}(p) = \text{ar}(q) = \text{ar}(f) = 2.$

$x, \; a, \; f(x, y), \; f(x, f(a, x)) \in \text{Term}.$

$f(x) \notin \text{Term}$, mert $\text{ar}(f) = 1$

$$p(x, y), \; q(x, f(a, a)), \; \neg p(x, f(y, z)), \\ (\exists x p(x, y) \to q(x, z)) \in \text{Form}.$$

$p(x), \; \forall x f(x, y), \; p(x, q(y, z)) \notin \text{Form}$

$\varphi_1 = \forall x p(x, a) \in \text{Form},$

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\mathrm{Pred} = \{p, q\}$, $\mathrm{Func} = \{f\}$, $\mathrm{Cnst} = \{a\}$.

$\mathrm{ar}(p) = \mathrm{ar}(q) = \mathrm{ar}(f) = 2$.

$x,\ a,\ f(x, y),\ f(x, f(a, x)) \in \mathrm{Term}$.

$f(x) \notin \mathrm{Term}$, mert $\mathrm{ar}(f) = 1$

$$p(x, y),\ q(x, f(a, a)),\ \neg p(x, f(y, z)),\ (\exists x p(x, y) \to q(x, z)) \in \mathrm{Form}.$$

$p(x),\ \forall x f(x, y),\ p(x, q(y, z)) \notin \mathrm{Form}$

$\varphi_1 = \forall x p(x, a) \in \mathrm{Form}$,

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x, y), a) \in \mathrm{Form}$,

Elsőrendű logika – szintaxis

Példa

$\mathrm{Pred} = \{p, q\}, \quad \mathrm{Func} = \{f\}, \quad \mathrm{Cnst} = \{a\}.$

$\mathrm{ar}(p) = \mathrm{ar}(q) = \mathrm{ar}(f) = 2.$

$x,\ a,\ f(x, y),\ f(x, f(a, x)) \in \mathrm{Term}.$

$f(x) \notin \mathrm{Term}$, mert $\mathrm{ar}(f) = 1$

$$p(x, y),\ q(x, f(a, a)),\ \neg p(x, f(y, z)),$$
$$(\exists x p(x, y) \to q(x, z)) \in \mathrm{Form}.$$

$p(x),\ \forall x f(x, y),\ p(x, q(y, z)) \notin \mathrm{Form}$

$\varphi_1 = \forall x p(x, a) \in \mathrm{Form},$

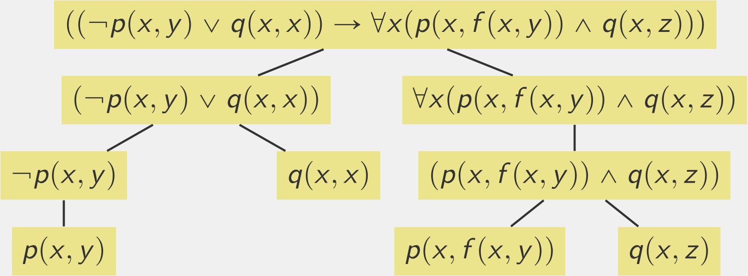
$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x, y), a) \in \mathrm{Form},$

$\varphi_3 = \forall x(\forall y q(f(y, x), y) \to p(x, a)) \in \mathrm{Form}.$

Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő

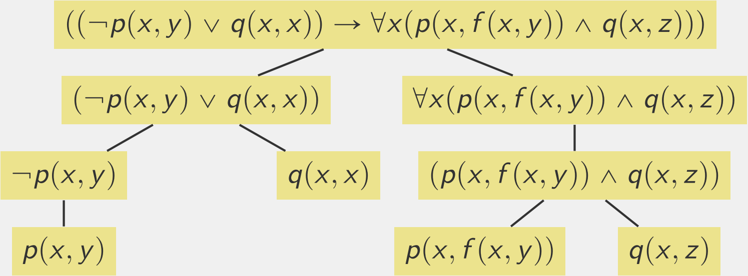
- $((\neg p(x,y) \vee q(x,x)) \to \forall x(p(x,f(x,y)) \wedge q(x,z)))$
  - $(\neg p(x,y) \vee q(x,x))$
    - $\neg p(x,y)$
      - $p(x,y)$
    - $q(x,x)$
  - $\forall x(p(x,f(x,y)) \wedge q(x,z))$
    - $(p(x,f(x,y)) \wedge q(x,z))$
      - $p(x,f(x,y))$
      - $q(x,z)$

Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő



Egy formula **szerkezeti fája** egy csúcscímkézett bináris fa. Egy csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula **közvetlen részformuláival** címkézettek. ($\neg\varphi$ és $Qx\varphi$ esetén φ-vel címkézett az egyetlen gyerek, ahol $Q \in \{\forall, \exists\}, x \in \text{Ind}$. $(\varphi \circ \psi)$ esetén két gyerek van, melyek φ-vel és ψ-vel címkézettek $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.)

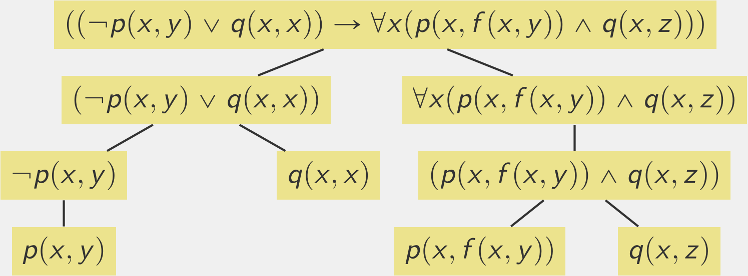
Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő



Egy formula **szerkezeti fája** egy csúcscímkézett bináris fa. Egy csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula **közvetlen részformuláival** címkézettek. ($\neg\varphi$ és $Qx\varphi$ esetén φ-vel címkézett az egyetlen gyerek, ahol $Q \in \{\forall, \exists\}, x \in \mathrm{Ind}$. $(\varphi \circ \psi)$ esetén két gyerek van, melyek φ-vel és ψ-vel címkézettek $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.)

Az előforduló címkék a formula **részformulái**. (A példában a sárgával megjelölt formulák.) A levelek atomi formulák.

Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő



Egy formula **szerkezeti fája** egy csúcscímkézett bináris fa. Egy csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula **közvetlen részformuláival** címkézettek. ($\neg\varphi$ és $Qx\varphi$ esetén φ-vel címkézett az egyetlen gyerek, ahol $Q \in \{\forall, \exists\}, x \in \mathrm{Ind}$. $(\varphi \circ \psi)$ esetén két gyerek van, melyek φ-vel és ψ-vel címkézettek $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.)

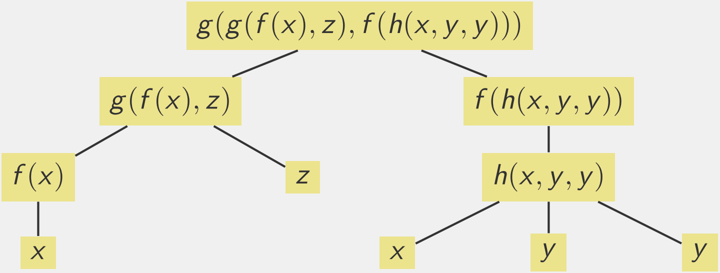
Az előforduló címkék a formula **részformulái**. (A példában a sárgával megjelölt formulák.) A levelek atomi formulák.

A **fő logikai összekötő** az a logikai művelet vagy kvantor, amelyik csak a gyökérben szerepel. (A példában az $\to$ ez az összekötő.)

Term szerkezeti fája, zárójelelhagyás

Term szerkezeti fája:

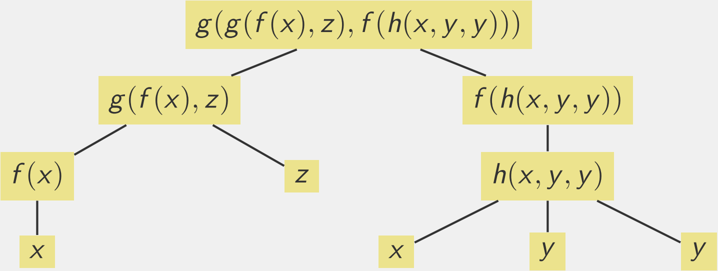
Példa: $\mathrm{ar}(f) = 1, \mathrm{ar}(g) = 2, \mathrm{ar}(h) = 3$



Term szerkezeti fája, zárójelelhagyás

Term szerkezeti fája:

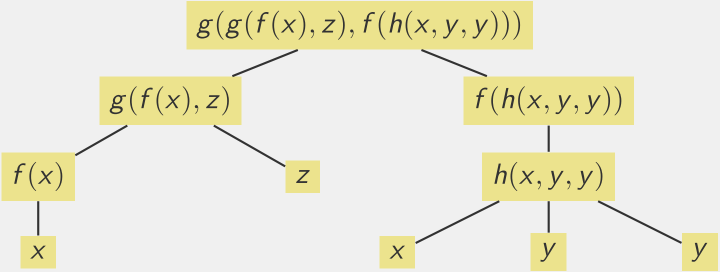
Példa: $\mathrm{ar}(f) = 1, \mathrm{ar}(g) = 2, \mathrm{ar}(h) = 3$



Term szerkezeti fája, zárójelelhagyás

Term szerkezeti fája:

Példa: $\mathrm{ar}(f) = 1, \mathrm{ar}(g) = 2, \mathrm{ar}(h) = 3$



Zárójelelhagyás:

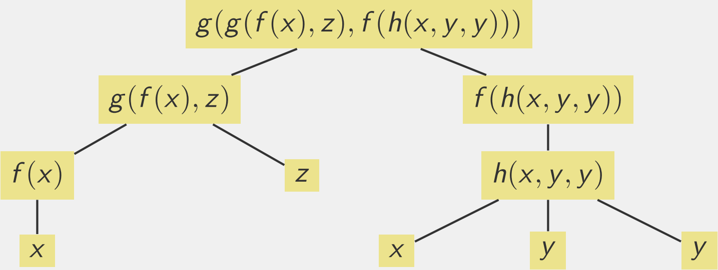
Ugyanúgy, mint a nulladrendű logika esetén.

Precedenciasorrend zárójelelhagyáshoz: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

Term szerkezeti fája, zárójelelhagyás

Term szerkezeti fája:

Példa: $\mathrm{ar}(f) = 1, \mathrm{ar}(g) = 2, \mathrm{ar}(h) = 3$



Zárójelelhagyás:

Ugyanúgy, mint a nulladrendű logika esetén.

Precedenciasorrend zárójelelhagyáshoz: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

Példa: $((\neg p(x, y) \vee q(x, x)) \rightarrow \forall x(p(x, f(x, y)) \wedge q(x, z)))$.

Mindent elhagyva, amit lehet:

$$\neg p(x, y) \vee q(x, x) \rightarrow \forall x(p(x, f(x, y)) \wedge q(x, z)).$$

Elsőrendű logika – interpretáció, változókiértékelés

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Elsőrendű logika – interpretáció, változókiértékelés

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Definíció

Egy elsőrendű logikai szimbólumainak **interpretációja** alatt egy $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ rendezett négyest értünk, ahol

- U egy tetszőleges, nemüres halmaz (univerzum),

Elsőrendű logika – interpretáció, változókiértékelés

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Definíció

Egy elsőrendű logikai szimbólumainak **interpretációja** alatt egy $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ rendezett négyest értünk, ahol

- U egy tetszőleges, nemüres halmaz (univerzum),
- I_{Pred} minden $p \in \mathrm{Pred}$-hez hozzárendel egy $p^I \subseteq U^{\mathrm{ar}(p)}$ $\mathrm{ar}(p)$-változós relációt U felett,

Elsőrendű logika – interpretáció, változókiértékelés

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Definíció

Egy elsőrendű logikai szimbólumainak **interpretációja** alatt egy $I = \langle U, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ rendezett négyest értünk, ahol

- U egy tetszőleges, nemüres halmaz (univerzum),
- I_{Pred} minden $p \in \text{Pred}$-hez hozzárendel egy $p^I \subseteq U^{\text{ar}(p)}$ ar(p)-változós relációt U felett,
- I_{Func} minden $f \in \text{Func}$-hez hozzárendel egy $f^I : U^{\text{ar}(p)} \to U$ ar(p)-változós műveletet U-n,

Elsőrendű logika – interpretáció, változókiértékelés

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Definíció

Egy elsőrendű logikai szimbólumainak **interpretációja** alatt egy $I = \langle U, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ rendezett négyest értünk, ahol

- U egy tetszőleges, nemüres halmaz (univerzum),
- I_{Pred} minden $p \in \text{Pred}$-hez hozzárendel egy $p^I \subseteq U^{\text{ar}(p)}$ $\text{ar}(p)$-változós relációt U felett,
- I_{Func} minden $f \in \text{Func}$-hez hozzárendel egy $f^I : U^{\text{ar}(p)} \to U$ $\text{ar}(p)$-változós műveletet U-n,
- I_{Cnst} minden $c \in \text{Cnst}$-hez hozzárendel egy $c^I \in U$-t.

Elsőrendű logika – interpretáció, változókiértékelés

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Definíció

Egy elsőrendű logikai szimbólumainak **interpretációja** alatt egy $I = \langle U, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ rendezett négyest értünk, ahol

- U egy tetszőleges, nemüres halmaz (univerzum),
- I_{Pred} minden $p \in \text{Pred}$-hez hozzárendel egy $p^I \subseteq U^{\text{ar}(p)}$ $\text{ar}(p)$-változós relációt U felett,
- I_{Func} minden $f \in \text{Func}$-hez hozzárendel egy $f^I : U^{\text{ar}(p)} \to U$ $\text{ar}(p)$-változós műveletet U-n,
- I_{Cnst} minden $c \in \text{Cnst}$-hez hozzárendel egy $c^I \in U$-t.

Definíció

Változókiértékelés alatt egy $\kappa : \text{Ind} \to U$ leképezést értünk.

Elsőrendű logika – interpretáció, változókiértékelés

Egy elsőrendű logika szemantikáját a szimbólumainak interpretációja és a változók kiértékelése adja meg.

Definíció

Egy elsőrendű logikai szimbólumainak **interpretációja** alatt egy $I = \langle U, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ rendezett négyest értünk, ahol

- U egy tetszőleges, nemüres halmaz (univerzum),
- I_{Pred} minden $p \in \text{Pred}$-hez hozzárendel egy $p^I \subseteq U^{\text{ar}(p)}$ $\text{ar}(p)$-változós relációt U felett,
- I_{Func} minden $f \in \text{Func}$-hez hozzárendel egy $f^I : U^{\text{ar}(p)} \to U$ $\text{ar}(p)$-változós műveletet U-n,
- I_{Cnst} minden $c \in \text{Cnst}$-hez hozzárendel egy $c^I \in U$-t.

Definíció

Változókiértékelés alatt egy $\kappa : \text{Ind} \to U$ leképezést értünk.

Vegyük észre, hogy κ függ az U univerzumtól.

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol

$I_{\mathrm{Pred}}(p) = p^I, \;\; (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol

$I_{\mathrm{Pred}}(p) = p^I, \;\; (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$

$I_{\mathrm{Pred}}(q) = q^I, \;\;\; (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\mathsf{Pred}}, I_{\mathsf{Func}}, I_{\mathsf{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol

$I_{\mathsf{Pred}}(p) = p^I, \ (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$

$I_{\mathsf{Pred}}(q) = q^I, \quad (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$

$I_{\mathsf{Func}}(f) = f^I, \quad f^I(m, n) := m + n$

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol

$I_{\text{Pred}}(p) = p^I, \ \ (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$

$I_{\text{Pred}}(q) = q^I, \ \ (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$

$I_{\text{Func}}(f) = f^I, \ \ f^I(m, n) := m + n$

$I_{\text{Cnst}}(a) := 0,$

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\mathsf{Pred}}, I_{\mathsf{Func}}, I_{\mathsf{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol
$I_{\mathsf{Pred}}(p) = p^I, \ \ (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$
$I_{\mathsf{Pred}}(q) = q^I, \quad (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$
$I_{\mathsf{Func}}(f) = f^I, \quad f^I(m, n) := m + n$
$I_{\mathsf{Cnst}}(a) := 0,$
legyen továbbá κ egy változókiértékelés, amelyre
$\kappa(x) = 5, \kappa(y) = 3.$

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol

$I_{\mathrm{Pred}}(p) = p^I, \ \ (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$

$I_{\mathrm{Pred}}(q) = q^I, \ \ (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$

$I_{\mathrm{Func}}(f) = f^I, \ \ f^I(m, n) := m + n$

$I_{\mathrm{Cnst}}(a) := 0,$

legyen továbbá κ egy változókiértékelés, amelyre $\kappa(x) = 5, \kappa(y) = 3.$

Definíció

Egy $t \in \mathrm{Term}$ **értékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|t|^{I,\kappa}$ jelöli és a következőképpen definiáljuk

- Ha $x \in \mathrm{Ind}$, akkor $|x|^{I,\kappa} := \kappa(x)$,

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol

$I_{\mathrm{Pred}}(p) = p^I, \quad (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$
$I_{\mathrm{Pred}}(q) = q^I, \quad (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$
$I_{\mathrm{Func}}(f) = f^I, \quad f^I(m, n) := m + n$
$I_{\mathrm{Cnst}}(a) := 0,$

legyen továbbá κ egy változókiértékelés, amelyre $\kappa(x) = 5, \kappa(y) = 3$.

Definíció

Egy $t \in \mathrm{Term}$ **értékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|t|^{I,\kappa}$ jelöli és a következőképpen definiáljuk

- Ha $x \in \mathrm{Ind}$, akkor $|x|^{I,\kappa} := \kappa(x)$,
- Ha $c \in \mathrm{Cnst}$, akkor $|c|^{I,\kappa} := c^I$,

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\text{Pred}}, I_{\text{Func}}, I_{\text{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol

$I_{\text{Pred}}(p) = p^I, \quad (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$
$I_{\text{Pred}}(q) = q^I, \quad (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$
$I_{\text{Func}}(f) = f^I, \quad f^I(m, n) := m + n$
$I_{\text{Cnst}}(a) := 0,$

legyen továbbá κ egy változókiértékelés, amelyre $\kappa(x) = 5, \kappa(y) = 3.$

Definíció

Egy $t \in \text{Term}$ **értékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|t|^{I,\kappa}$ jelöli és a következőképpen definiáljuk

- Ha $x \in \text{Ind}$, akkor $|x|^{I,\kappa} := \kappa(x)$,
- Ha $c \in \text{Cnst}$, akkor $|c|^{I,\kappa} := c^I$,
- $|f(t_1, t_2, \ldots, t_{\text{ar}(f)})|^{I,\kappa} := f^I(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\text{ar}(f)}|^{I,\kappa})$.

Elsőrendű logika – a termek szemantikája

Példa Az előző példát folytatva legyen $I = \langle \mathbb{N}, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy interpretáció, ahol
$I_{\mathrm{Pred}}(p) = p^I, \ (m, n) :\in p^I \Leftrightarrow m \geqslant n$
$I_{\mathrm{Pred}}(q) = q^I, \ (m, n) :\in q^I \Leftrightarrow m = n$
$I_{\mathrm{Func}}(f) = f^I, \ f^I(m, n) := m + n$
$I_{\mathrm{Cnst}}(a) := 0,$
legyen továbbá κ egy változókiértékelés, amelyre $\kappa(x) = 5, \kappa(y) = 3$.

Definíció

Egy $t \in \mathrm{Term}$ **értékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|t|^{I,\kappa}$ jelöli és a következőképpen definiáljuk

- Ha $x \in \mathrm{Ind}$, akkor $|x|^{I,\kappa} := \kappa(x)$,
- Ha $c \in \mathrm{Cnst}$, akkor $|c|^{I,\kappa} := c^I$,
- $|f(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)})|^{I,\kappa} := f^I(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\mathrm{ar}(f)}|^{I,\kappa})$.

Példa Az előző példát folytatva $|f(f(x, y), y)|^{I,\kappa} = 11$.

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \mathrm{Ind}, y \neq x$ esetén.

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \text{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció

Egy $\varphi \in \text{Form}$ formula **igazságértékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \mathrm{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció

Egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula **igazságértékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

- $|p(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ $(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\mathrm{ar}(p)}|^{I,\kappa}) \in p^I$,

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \mathrm{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció

Egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula **igazságértékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

- $|p(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ $(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\mathrm{ar}(p)}|^{I,\kappa}) \in p^I$,
- $|\neg\varphi|^{I,\kappa} := \neg|\varphi|^{I,\kappa}$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \mathrm{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció

Egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula **igazságértékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

- $|p(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ $(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\mathrm{ar}(p)}|^{I,\kappa}) \in p^I$,
- $|\neg\varphi|^{I,\kappa} := \neg|\varphi|^{I,\kappa}$
- $|\varphi \circ \psi|^{I,\kappa} := |\varphi|^{I,\kappa} \circ |\psi|^{I,\kappa} \qquad \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \mathrm{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció

Egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula igazságértékét egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

- $|p(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ $(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\mathrm{ar}(p)}|^{I,\kappa}) \in p^I$,
- $|\neg\varphi|^{I,\kappa} := \neg|\varphi|^{I,\kappa}$
- $|\varphi \circ \psi|^{I,\kappa} := |\varphi|^{I,\kappa} \circ |\psi|^{I,\kappa}$ $\qquad \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $|\forall x\varphi|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ ha $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$ κ-nak minden κ^* x-variánsára,

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \mathrm{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció

Egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula **igazságértékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

- $|p(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ $(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\mathrm{ar}(p)}|^{I,\kappa}) \in p^I$,
- $|\neg\varphi|^{I,\kappa} := \neg|\varphi|^{I,\kappa}$
- $|\varphi \circ \psi|^{I,\kappa} := |\varphi|^{I,\kappa} \circ |\psi|^{I,\kappa}$ $\quad \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $|\forall x\varphi|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ ha $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$ κ-nak minden κ^* x-variánsára,
- $|\exists x\varphi|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ ha $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$ κ-nak legalább egy κ^* x-variánsára.

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Definíció

A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden $y \in \mathrm{Ind}, y \neq x$ esetén.

Definíció

Egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula **igazságértékét** egy I interpretációban a κ változókiértékelés mellett $|\varphi|^{I,\kappa}$ jelöli és így definiáljuk:

- $|p(t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})|^{I,\kappa} = i \Leftrightarrow$ $(|t_1|^{I,\kappa}, |t_2|^{I,\kappa}, \ldots, |t_{\mathrm{ar}(p)}|^{I,\kappa}) \in p^I$,
- $|\neg\varphi|^{I,\kappa} := \neg|\varphi|^{I,\kappa}$
- $|\varphi \circ \psi|^{I,\kappa} := |\varphi|^{I,\kappa} \circ |\psi|^{I,\kappa}$ $\quad \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $|\forall x\varphi|^{I,\kappa} = i \;\Leftrightarrow$ ha $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$ κ-nak minden κ^* x-variánsára,
- $|\exists x\varphi|^{I,\kappa} = i \;\Leftrightarrow$ ha $|\varphi|^{I,\kappa^*} = i$ κ-nak legalább egy κ^* x-variánsára.

A $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ műveletek ugyanazok, mint az ítéletlogikánál.

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y, y), x)|^{I,\kappa} = i.$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$$
$$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$$
$$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$$
$$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y, y), x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y, y), x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x, y) \to q(x, y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x, a),$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a),$
Minden természetes szám $\geqslant 0$.

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a),$

Minden természetes szám $\geqslant 0$. $\quad |\varphi_1|^{I,\kappa} = i,$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a),$

Minden természetes szám $\geqslant 0$. $\quad |\varphi_1|^{I,\kappa} = i,$

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a),$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a),$
Minden természetes szám $\geqslant 0$. $|\varphi_1|^{I,\kappa} = i,$

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a),$
Minden természetes számhoz hozzá tudjuk adni egy természetes számot úgy, hogy 0-t kapjunk.

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a),$
Minden természetes szám $\geqslant 0$. $\quad |\varphi_1|^{I,\kappa} = i,$

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a),$
Minden természetes számhoz hozzá tudjuk adni egy természetes számot úgy, hogy 0-t kapjunk. $\quad |\varphi_2|^{I,\kappa} = h,$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a)$,
Minden természetes szám $\geqslant 0$. $|\varphi_1|^{I,\kappa} = i$,

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a)$,
Minden természetes számhoz hozzá tudjuk adni egy természetes számot úgy, hogy 0-t kapjunk. $|\varphi_2|^{I,\kappa} = h$,

$\varphi_3 = \forall x(\forall y q(f(y,x),y) \to p(x,a))$,

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a),$
Minden természetes szám $\geqslant 0$. $\quad |\varphi_1|^{I,\kappa} = i,$

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a),$
Minden természetes számhoz hozzá tudjuk adni egy természetes számot úgy, hogy 0-t kapjunk. $\quad |\varphi_2|^{I,\kappa} = h,$

$\varphi_3 = \forall x(\forall y q(f(y,x),y) \to p(x,a)),$
$\forall y q(f(y,x),y)$: az x nullelem, ez $x = 0$-ra igaz, más x-re hamis.
Viszont $p(x,a)$ minden x-re igaz

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a),$
Minden természetes szám $\geqslant 0$. $|\varphi_1|^{I,\kappa} = i,$

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a),$
Minden természetes számhoz hozzá tudjuk adni egy természetes számot úgy, hogy 0-t kapjunk. $|\varphi_2|^{I,\kappa} = h,$

$\varphi_3 = \forall x(\forall y q(f(y,x),y) \to p(x,a)),$
$\forall y q(f(y,x),y)$: az x nullelem, ez $x = 0$-ra igaz, más x-re hamis.
Viszont $p(x,a)$ minden x-re igaz, így $|\varphi_3|^{I,\kappa} = i.$

Elsőrendű logika – a formulák szemantikája

Példa Az előző példát folytatva

$|p(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = i.$

$|q(f(y,y),x)|^{I,\kappa} = h.$

$|p(x,y) \to q(x,y)|^{I,\kappa} = h.$

$\varphi_1 = \forall x p(x,a)$,
Minden természetes szám $\geqslant 0$. $|\varphi_1|^{I,\kappa} = i$,

$\varphi_2 = \forall x \exists y q(f(x,y),a)$,
Minden természetes számhoz hozzá tudjuk adni egy természetes számot úgy, hogy 0-t kapjunk. $|\varphi_2|^{I,\kappa} = h$,

$\varphi_3 = \forall x(\forall y q(f(y,x),y) \to p(x,a))$,
$\forall y q(f(y,x),y)$: az x nullelem, ez $x = 0$-ra igaz, más x-re hamis.
Viszont $p(x,a)$ minden x-re igaz, így $|\varphi_3|^{I,\kappa} = i$.

Ha $U = \mathbb{Z}$ lenne, akkor φ_2 is igaz lenne.

Elsőrendű logika – szabad és kötött előfordulás

Definíció

Legyen φ egy formula, és tekintsük $x \in \mathrm{Ind}$ egy előfordulását φ-ben. (A kvantorokat közvetlenül követő változókat nem tekintjük ezen változó előfordulásának.) Azt mondjuk, hogy x ezen előfordulása **kötött**, ha x a φ egy $\exists x \psi$ vagy $\forall x \psi$ alakú részformulájába esik.

Elsőrendű logika – szabad és kötött előfordulás

Definíció

Legyen φ egy formula, és tekintsük $x \in \mathrm{Ind}$ egy előfordulását φ-ben. (A kvantorokat közvetlenül követő váltózókat nem tekintjük ezen változó előfordulásának.) Azt mondjuk, hogy x ezen előfordulása **kötött**, ha x a φ egy $\exists x\psi$ vagy $\forall x\psi$ alakú részformulájába esik. Ellenkező esetben x ezen előfordulása **szabad**.

Elsőrendű logika – szabad és kötött előfordulás

Definíció

Legyen φ egy formula, és tekintsük $x \in \mathrm{Ind}$ egy előfordulását φ-ben. (A kvantorokat közvetlenül követő váltózókat nem tekintjük ezen változó előfordulásának.) Azt mondjuk, hogy x ezen előfordulása **kötött**, ha x a φ egy $\exists x\psi$ vagy $\forall x\psi$ alakú részformulájába esik. Ellenkező esetben x ezen előfordulása **szabad**. Ha φ minden individuumváltozójának minden előfordulása kötött, akkor **zárt** formuláról beszélünk.

Elsőrendű logika – szabad és kötött előfordulás

Definíció

Legyen φ egy formula, és tekintsük $x \in \text{Ind}$ egy előfordulását φ-ben. (A kvantorokat közvetlenül követő váltózókat nem tekintjük ezen változó előfordulásának.) Azt mondjuk, hogy x ezen előfordulása **kötött**, ha x a φ egy $\exists x\psi$ vagy $\forall x\psi$ alakú részformulájába esik. Ellenkező esetben x ezen előfordulása **szabad**. Ha φ minden individuumváltozójának minden előfordulása kötött, akkor **zárt** formuláról beszélünk. Egyébként a kormula **nyitott**.

Elsőrendű logika – szabad és kötött előfordulás

Definíció

Legyen φ egy formula, és tekintsük $x \in \mathrm{Ind}$ egy előfordulását φ-ben. (A kvantorokat közvetlenül követő váltózókat nem tekintjük ezen változó előfordulásának.) Azt mondjuk, hogy x ezen előfordulása **kötött**, ha x a φ egy $\exists x\psi$ vagy $\forall x\psi$ alakú részformulájába esik. Ellenkező esetben x ezen előfordulása **szabad**. Ha φ minden individuumváltozójának minden előfordulása kötött, akkor **zárt** formuláról beszélünk. Egyébként a kormula **nyitott**.

Észrevétel: Ha φ zárt, ekkor bármely I interpretáció esetén $|\varphi|^{I,\kappa}$ értéke nem függ κ-tól. Ilyenkor $|\varphi|^{I,\kappa}$ helyett $|\varphi|^{I}$ írható.

Elsőrendű logika – szabad és kötött előfordulás

Definíció

Legyen φ egy formula, és tekintsük $x \in \mathrm{Ind}$ egy előfordulását φ-ben. (A kvantorokat közvetlenül követő változókat nem tekintjük ezen változó előfordulásának.) Azt mondjuk, hogy x ezen előfordulása **kötött**, ha x a φ egy $\exists x\psi$ vagy $\forall x\psi$ alakú részformulájába esik. Ellenkező esetben x ezen előfordulása **szabad**. Ha φ minden individuumváltozójának minden előfordulása kötött, akkor **zárt** formuláról beszélünk. Egyébként a kormula **nyitott**.

Észrevétel: Ha φ zárt, ekkor bármely I interpretáció esetén $|\varphi|^{I,\kappa}$ értéke nem függ κ-tól. Ilyenkor $|\varphi|^{I,\kappa}$ helyett $|\varphi|^{I}$ írható.

Példa Az előző példában φ_1, φ_2, φ_3 zárt formulák, míg $\forall x p(x,x) \to q(x,x)$ nyitott, mert x 3. és 4. előfordulását nem tartalmazza kvantált részformula. (A formula részformulái: $\forall x p(x,x) \to q(x,x)$, $\forall x p(x,x)$, $p(x,x)$, $q(x,x)$.)

Az elsőrendű logika szemantikus alapfogalmai

Definíció

- Egy φ elsőrendű logikai formula **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, egyébként **kielégíthetetlen**.

Az elsőrendű logika szemantikus alapfogalmai

Definíció

- Egy φ elsőrendű logikai formula **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, egyébként **kielégíthetetlen**.
- φ **logikailag igaz** (vagy **érvényes**), ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, ennek jelölése $\models \varphi$.

Az elsőrendű logika szemantikus alapfogalmai

Definíció

- Egy φ elsőrendű logikai formula **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, egyébként **kielégíthetetlen**.
- φ **logikailag igaz** (vagy **érvényes**), ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, ennek jelölése $\models \varphi$.
- φ és ψ elsőrendű logikai formulák **logikailag ekvivalensek**, ha ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = |\psi|^{I,\kappa}$. Jelölése $\varphi \sim \psi$.

Az elsőrendű logika szemantikus alapfogalmai

Definíció

- Egy φ elsőrendű logikai formula **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, egyébként **kielégíthetetlen**.
- φ **logikailag igaz** (vagy **érvényes**), ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, ennek jelölése $\models \varphi$.
- φ és ψ elsőrendű logikai formulák **logikailag ekvivalensek**, ha ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = |\psi|^{I,\kappa}$. Jelölése $\varphi \sim \psi$.
- Az $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$ teljesül minden $\varphi \in \mathcal{F}$-re, egyébként **kielégíthetetlen**.

Az elsőrendű logika szemantikus alapfogalmai

Definíció

- Egy φ elsőrendű logikai formula **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, egyébként **kielégíthetetlen**.
- φ **logikailag igaz** (vagy **érvényes**), ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = i$, ennek jelölése $\models \varphi$.
- φ és ψ elsőrendű logikai formulák **logikailag ekvivalensek**, ha ha minden I, κ-ra, $|\varphi|^{I,\kappa} = |\psi|^{I,\kappa}$. Jelölése $\varphi \sim \psi$.
- Az $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha van olyan I interpretáció és κ változókiértékelés, amelyre $|\varphi|^{I,\kappa} = i$ teljesül minden $\varphi \in \mathcal{F}$-re, egyébként **kielégíthetetlen**.
- Az $\mathcal{F}$ formulahalmaznak φ **logikai következménye** (jelölés: $\mathcal{F} \models \varphi$) ha minden I, κ-ra ha minden $\psi \in \mathcal{F}$-re $|\psi|^{I,\kappa} = i$ teljesül, akkor $|\varphi|^{I,\kappa} = i$ is teljesül.

Elsőrendű logikai törvények

1. a nulladrendű törvények elsőrendben is érvényesek

Elsőrendű logikai törvények

1. a nulladrendű törvények elsőrendben is érvényesek
2. ha x nem szabad változója A-nak
   $\forall x A \sim A$ és $\exists x A \sim A$,

Elsőrendű logikai törvények

1. a nulladrendű törvények elsőrendben is érvényesek
2. ha x nem szabad változója A-nak
   $\forall x A \sim A$ és $\exists x A \sim A$,
3. $\forall x \forall y A \sim \forall y \forall x A$ és $\exists x \exists y A \sim \exists y \exists x A$,

Elsőrendű logikai törvények

1. a nulladrendű törvények elsőrendben is érvényesek
2. ha x nem szabad változója A-nak
   $\forall x A \sim A$ és $\exists x A \sim A$,
3. $\forall x \forall y A \sim \forall y \forall x A$ és $\exists x \exists y A \sim \exists y \exists x A$,
4. $\neg \exists x A \sim \forall x \neg A$ és $\neg \forall x A \sim \exists x \neg A$,

Elsőrendű logikai törvények

1. a nulladrendű törvények elsőrendben is érvényesek
2. ha x nem szabad változója A-nak
   $\forall xA \sim A$ és $\exists xA \sim A$,
3. $\forall x \forall yA \sim \forall y \forall xA$ és $\exists x \exists yA \sim \exists y \exists xA$,
4. $\neg \exists xA \sim \forall x \neg A$ és $\neg \forall xA \sim \exists x \neg A$,
5. ha x nem szabad változója A-nak
   $A \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$ és $A \wedge \exists xB \sim \exists x(A \wedge B)$,
   $A \vee \forall xB \sim \forall x(A \vee B)$ és $A \vee \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$,
   $A \to \forall xB \sim \forall x(A \to B)$ és $A \to \exists xB \sim \exists x(A \to B)$,
   $\forall xB \to A \sim \exists x(B \to A)$ és $\exists xB \to A \sim \forall x(B \to A)$,

Elsőrendű logikai törvények

1. a nulladrendű törvények elsőrendben is érvényesek
2. ha x nem szabad változója A-nak
   $\forall xA \sim A$ és $\exists xA \sim A$,
3. $\forall x\forall yA \sim \forall y\forall xA$ és $\exists x\exists yA \sim \exists y\exists xA$,
4. $\neg\exists xA \sim \forall x\neg A$ és $\neg\forall xA \sim \exists x\neg A$,
5. ha x nem szabad változója A-nak
   $A \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$ és $A \wedge \exists xB \sim \exists x(A \wedge B)$,
   $A \vee \forall xB \sim \forall x(A \vee B)$ és $A \vee \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$,
   $A \to \forall xB \sim \forall x(A \to B)$ és $A \to \exists xB \sim \exists x(A \to B)$,
   $\forall xB \to A \sim \exists x(B \to A)$ és $\exists xB \to A \sim \forall x(B \to A)$,
6. $\forall xA \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$ és $\exists xA \vee \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$.

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$!

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists xA \sim \forall x\neg A$!

Megoldás:

$$\left|\neg\exists xA\right|^{I,\kappa} = h$$

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$!

Megoldás:

$$\left|\neg\exists x A\right|^{I,\kappa} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$\left|\exists x A\right|^{I,\kappa} = i$$

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists xA \sim \forall x\neg A$!

Megoldás:

$$|\neg\exists xA|^{I,\kappa} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$|\exists xA|^{I,\kappa} = i$$
$$\Updownarrow$$
$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \ x\text{-variánsa, amelyre } |A|^{I,\kappa^*} = i$$

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$!

Megoldás:

$$|\neg\exists x A|^{I,\kappa} = h$$

$$\Updownarrow$$

$$|\exists x A|^{I,\kappa} = i$$

$$\Updownarrow$$

$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \; x\text{-variánsa, amelyre } |A|^{I,\kappa^*} = i$$

$$\Updownarrow$$

$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \; x\text{-variánsa, amelyre } |\neg A|^{I,\kappa^*} = h$$

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$!

Megoldás:

$$|\neg\exists x A|^{I,\kappa} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$|\exists x A|^{I,\kappa} = i$$
$$\Updownarrow$$
$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \text{ } x\text{-variánsa, amelyre } |A|^{I,\kappa^*} = i$$
$$\Updownarrow$$
$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \text{ } x\text{-variánsa, amelyre } |\neg A|^{I,\kappa^*} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$|\forall x \neg A|^{I,\kappa} = h$$

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists xA \sim \forall x\neg A$!

Megoldás:

$$|\neg\exists xA|^{I,\kappa} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$|\exists xA|^{I,\kappa} = i$$
$$\Updownarrow$$
$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \text{ } x\text{-variánsa, amelyre } |A|^{I,\kappa^*} = i$$
$$\Updownarrow$$
$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \text{ } x\text{-variánsa, amelyre } |\neg A|^{I,\kappa^*} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$|\forall x\neg A|^{I,\kappa} = h$$

Ugyanazon (I, κ) (interpretáció,változókiértékelés)-párokra hamis a forma, tehát valóban logikailag ekvivalensek.

Elsőrendű logikai törvények

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $\neg\exists xA \sim \forall x\neg A$!

Megoldás:

$$|\neg\exists xA|^{I,\kappa} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$|\exists xA|^{I,\kappa} = i$$
$$\Updownarrow$$
$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \; x\text{-variánsa, amelyre } |A|^{I,\kappa^*} = i$$
$$\Updownarrow$$
$$\kappa\text{-nak van olyan } \kappa^* \; x\text{-variánsa, amelyre } |\neg A|^{I,\kappa^*} = h$$
$$\Updownarrow$$
$$|\forall x\neg A|^{I,\kappa} = h$$

Ugyanazon (I, κ) (interpretáció,változókiértékelés)-párokra hamis a forma, tehát valóban logikailag ekvivalensek.

A bizonyítás egyik nehézsége: végtelen sok (I, κ) pár van.

Elsőrendű következmény

Példa: Igazoljuk formálisan a bevezetőben említett következtetést!

Elsőrendű következmény

Példa: Igazoljuk formálisan a bevezetőben említett következtetést!

Megoldás:

Először is, a formalizáláshoz legyenek
$E(x)$: x ember
$H(x)$: x halandó
s : Szókrátész (konstans)

Elsőrendű következmény

Példa: Igazoljuk formálisan a bevezetőben említett következtetést!

Megoldás:

Először is, a formalizáláshoz legyenek
$E(x)$: x ember
$H(x)$: x halandó
s : Szókrátész (konstans)

„Minden ember halandó."	$\forall x(E(x) \to H(x))$
„Szókrátész ember."	$E(s)$
„Szókrátész halandó."	$H(s)$

Elsőrendű következmény

Példa: Igazoljuk formálisan a bevezetőben említett következtetést!

Megoldás:

Először is, a formalizáláshoz legyenek
$E(x)$: x ember
$H(x)$: x halandó
s : Szókrátész (konstans)

„Minden ember halandó.”	$\forall x(E(x) \to H(x))$
„Szókrátész ember.”	$E(s)$
„Szókrátész halandó.”	$H(s)$

Azt kell belátni, hogy $\{\forall x(E(x) \to H(x)), E(s)\} \models H(s)$, azaz hogy minden I, κ-ra amelyre $|\forall x(E(x) \to H(x))|^{I,\kappa} = i$ és $|E(s)|^{I,\kappa} = i$ teljesül $|H(s)|^{I,\kappa} = i$ is igaz.

Elsőrendű következmény

Azt kell belátni, hogy $\{\forall x(E(x) \to H(x)), E(s)\} \models H(s)$.

Elsőrendű következmény

Azt kell belátni, hogy $\{\forall x(E(x) \to H(x)), E(s)\} \models H(s)$.

Legyen I tetszőleges interpretáció és κ ebben tetszőleges változókiértékelés és tegyük fel, hogy $|\forall x(E(x) \to H(x))|^{I,\kappa} = i$ és $|E(s)|^{I,\kappa} = i$.

Elsőrendű következmény

Azt kell belátni, hogy $\{\forall x(E(x) \to H(x)), E(s)\} \models H(s)$.

Legyen I tetszőleges interpretáció és κ ebben tetszőleges változókiértékelés és tegyük fel, hogy $|\forall x(E(x) \to H(x))|^{I,\kappa} = i$ és $|E(s)|^{I,\kappa} = i$.

Előbbi miatt κ-nak minden κ^* x-variánsára $|E(x) \to H(x)|^{I,\kappa^*} = i$. Vegyük ezek közül azt, amelyre $\kappa^*(x) = s^I$. Ekkor $|E(x)|^{I,\kappa^*} = |E(s)|^{I,\kappa} = i$, hiszen mindkettő épp akkor igaz, ha $(s^I) \in E^I$.

Elsőrendű következmény

Azt kell belátni, hogy $\{\forall x(E(x) \to H(x)), E(s)\} \models H(s)$.

Legyen I tetszőleges interpretáció és κ ebben tetszőleges változókiértékelés és tegyük fel, hogy $|\forall x(E(x) \to H(x))|^{I,\kappa} = i$ és $|E(s)|^{I,\kappa} = i$.

Előbbi miatt κ-nak minden κ^* x-variánsára $|E(x) \to H(x)|^{I,\kappa^*} = i$. Vegyük ezek közül azt, amelyre $\kappa^*(x) = s^I$. Ekkor $|E(x)|^{I,\kappa^*} = |E(s)|^{I,\kappa} = i$, hiszen mindkettő épp akkor igaz, ha $(s^I) \in E^I$.

Tehát $|H(x)|^{I,\kappa^*} = i$, és így $(s^I) \in H^I$, ami épp azt jelenti, hogy $|H(s)|^{I,\kappa} = i$.

Elsőrendű következmény

Azt kell belátni, hogy $\{\forall x(E(x) \to H(x)), E(s)\} \models H(s)$.

Legyen I tetszőleges interpretáció és κ ebben tetszőleges változókiértékelés és tegyük fel, hogy $|\forall x(E(x) \to H(x))|^{I,\kappa} = i$ és $|E(s)|^{I,\kappa} = i$.

Előbbi miatt κ-nak minden κ^* x-variánsára $|E(x) \to H(x)|^{I,\kappa^*} = i$. Vegyük ezek közül azt, amelyre $\kappa^*(x) = s^I$. Ekkor $|E(x)|^{I,\kappa^*} = |E(s)|^{I,\kappa} = i$, hiszen mindkettő épp akkor igaz, ha $(s^I) \in E^I$.

Tehát $|H(x)|^{I,\kappa^*} = i$, és így $(s^I) \in H^I$, ami épp azt jelenti, hogy $|H(s)|^{I,\kappa} = i$.

Léteznek a végtelen a keresési teret szűkítő bizonyítási módszerek (pl. elsőrendű rezolúció), de ezek nem adnak egy minden esetben véges sok lépésben termináló algoritmust.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- f-nek g aszimptotikus felső korlátja (jelölése: $f(n) = O(g(n))$; ejtsd: $f(n) =$ nagyordó $g(n)$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- f-nek g aszimptotikus felső korlátja (jelölése: $f(n) = O(g(n))$; ejtsd: $f(n) =$ nagyordó $g(n)$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.
- f-nek g aszimptotikus alsó korlátja (jelölése: $f(n) = \Omega(g(n))$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \geqslant c \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- f-nek g aszimptotikus felső korlátja (jelölése: $f(n) = O(g(n))$; ejtsd: $f(n) =$ nagyordó $g(n)$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.
- f-nek g aszimptotikus alsó korlátja (jelölése: $f(n) = \Omega(g(n))$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \geqslant c \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.
- f-nek g aszimptotikus éles korlátja (jelölése: $f(n) = \Theta(g(n))$) ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $c_1 \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}_0^+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- f-nek g aszimptotikus felső korlátja (jelölése: $f(n) = O(g(n))$; ejtsd: $f(n) =$ nagyordó $g(n)$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.
- f-nek g aszimptotikus alsó korlátja (jelölése: $f(n) = \Omega(g(n))$) ha létezik olyan $c > 0$ konstans és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $f(n) \geqslant c \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.
- f-nek g aszimptotikus éles korlátja (jelölése: $f(n) = \Theta(g(n))$) ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok és $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $c_1 \cdot g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \cdot g(n)$ minden $n \geqslant N$-re.

Megjegyzés: a definíció könnyen kiterjeszthető aszimptotikusan nemnegatív, azaz egy korlát után nemnegatív értékű függvényekre. Ilyenek például a pozitív főegyütthatójú polinomok.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is tekinthető az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények univerzumán, ekkor

- O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h) \ \Rightarrow\ f = O(h)$)

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is tekinthető az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények univerzumán, ekkor

- O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h) \ \Rightarrow\ f = O(h)$)
- O, Ω, Θ reflexív

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is tekinthető az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények univerzumán, ekkor

- O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h) \ \Rightarrow \ f = O(h)$)
- O, Ω, Θ reflexív
- Θ szimmetrikus

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is tekinthető az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ függvények univerzumán, ekkor

- O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$)
- O, Ω, Θ reflexív
- Θ szimmetrikus
- O, Ω fordítottan szimmetrikus ($f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$)

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

O, Ω, Θ 2-aritású relációnak is tekinthető az $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvények univerzumán, ekkor

- O, Ω, Θ tranzitív (pl. $f = O(g),\ g = O(h)\ \Rightarrow\ f = O(h)$)
- O, Ω, Θ reflexív
- Θ szimmetrikus
- O, Ω fordítottan szimmetrikus ($f = O(g)\ \Leftrightarrow g = \Omega(f)$)
- (köv.) Θ ekvivalenciareláció, az $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvények egy osztályozását adja. Az egyes függvényosztályokat általában "legegyszerűbb" tagjukkal reprezentáljuk. Pl. 1 (korlátos függvények), n (lineáris függvények), n^2 (négyzetes függvények), stb. Persze a négyzetes függvények osztálya nem csak másodfokú polinomokat tartalmaz. Pl. $2n^2 + 3\log_2 n = \Theta(n^2)$.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Összeadásra való zártság)

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Összeadásra való zártság)
- Legyen $c > 0$ konstans $f = O(g) \Rightarrow c \cdot f = O(g)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Pozitív konstanssal szorzásra való zártság)

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Összeadásra való zártság)
- Legyen $c > 0$ konstans $f = O(g) \Rightarrow c \cdot f = O(g)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Pozitív konstanssal szorzásra való zártság)
- $f + g = \Theta(\max\{f, g\})$ (szekvencia tétele). A domináns tag határozza meg egy összeg aszimptotikus nagyságrendjét.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Összeadásra való zártság)
- Legyen $c > 0$ konstans $f = O(g) \Rightarrow c \cdot f = O(g)$, hasonlóan Ω-ra, Θ-ra. (Pozitív konstanssal szorzásra való zártság)
- $f + g = \Theta(\max\{f, g\})$ (szekvencia tétele). A domináns tag határozza meg egy összeg aszimptotikus nagyságrendjét.
- Ha létezik az f/g határérték

  ha $f(n)/g(n) \to +\infty \Rightarrow f(n){=}\Omega(g(n))$ és $f(n){\neq}O(g(n))$

  ha $f(n)/g(n) \to c \quad (c > 0) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

  ha $f(n)/g(n) \to 0 \quad \Rightarrow f(n) = O(g(n))$ és $f(n) \neq \Omega(g(n))$

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,
- Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,
- Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$,

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,
- Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $a, b > 1$-re $\log_a n = \Theta(\log_b n)$,

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,
- Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $a, b > 1$-re $\log_a n = \Theta(\log_b n)$,
- Minden $c > 0$ -ra $\log n = O(n^c)$, de $\log n \neq \Omega(n^c)$.

Függvények aszimptotikus nagyságrendje

- $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$, ekkor $p(n) = \Theta(n^k)$,
- Minden $p(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $p(n) = O(c^n)$, de $p(n) \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n = O(c^n)$, de $d^n \neq \Omega(c^n)$,
- Minden $a, b > 1$-re $\log_a n = \Theta(\log_b n)$,
- Minden $c > 0$ -ra $\log n = O(n^c)$, de $\log n \neq \Omega(n^c)$.

Megjegyzés:

A jelölés Edmund Landau német matematikustól származik.

Matematikailag precízebb például $f = O(g)$ helyett a következő:

$O(g) := \{f \mid \exists c > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N : f(n) \leqslant c \cdot g(n)\}$.

Ilyenkor ha f-nek g aszimptotikus felső korlátja $f \in O(g)$-t írhatunk.