Ítéletlogikai rezolúció

Gyakorlat

Logika

2019/2020 2. félév

Fogalmak

- **Literál:** ítéletváltozók vagy azok negáltjai (pl. X, $\neg Y$)
- **Komplemens literálpár:** ugyanannak a literálnak ellentétesen negált változatai (pl. X és $\neg X$)
- **Klóz:** literálokból álló diszjunkciós ("vagyos") láncok (pl. $\neg X \vee Y \vee Z$, X (egységklóz), $\Box$ (üresklóz))
- **KNF = konjunkciós normálforma:** diszjunkciók konjunkciója ("vagyos láncok, összeéselve") (pl. $(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge X \wedge (X \vee \neg Y)$)

Rezolúció

Eldönti, hogy egy klózhalmaz kielégíthetetlen-e.

Lépések:

1. Klózhalmaz készítése
2. Rezolúciós levezetés

Klózhalmaz készítése

Lépések:

1. Implikáció átalakítása
   - $A \supset B \equiv \neg A \vee B$
2. Negálás bevitele a atomi formuláig
   - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
   - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
   - $\neg\neg A \equiv A$
3. Egyéb átalakítások
   - $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   - $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
4. KNF felbontása, klózhalmaz kialakítása
   - $A \wedge B\ (KNF) \rightarrow \{A, B\}$

Klózhalmaz készítése

"Nyomozós" példa

Szemantikus következmény vizsgálat
$\{F \supset K, K \supset A, \neg A\} \models_0 \neg F$

$\downarrow$ visszakövetkeztetés

Formulahalmaz
$\{F \supset K, K \supset A, \neg A, \neg\neg F\}$ kielégíthetetlen?

$\downarrow$ átalakítás

Klózhalmaz
$S = \{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\}$ kielégíthetetlen?

Rezolúciós levezetés

Rezolvens képzés

Egy db komplemens literálpár kell

- $res(X \vee Y, \neg X \vee Z) = Y \vee Z$
- $res(X, \neg X) = \Box$
- $res(X \vee Y, \neg X \vee \neg Y) \rightarrow$ nem képezhető rezolvens!

Levezetés lépései lehetnek:

- Klózhalmazbeli elem ($\in S$)
- Két korábbi lépésbeli formula rezolvense (pl. $res(3, 4)$)

Cél: üresklóz levezetése

Rezolúciós levezetés

$S = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg Y \vee X \vee Z & [\in S] \\
2. & X \vee Y & [\in S] \\
3. & X \vee Z & [res(1,2)] \\
4. & \neg Z & [\in S] \\
5. & X & [res(3,4)] \\
6. & \neg X \vee Z & [\in S] \\
7. & Z & [res(5,6)] \\
8. & \square & [res(4,7)]
\end{array}
$$

Rezolúciós levezetés

$S = \{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\}$

1.	$\neg F \vee K$	$[\in S]$
2.	$\neg K \vee A$	$[\in S]$
3.	$\neg F \vee A$	$[res(1,2)]$
4.	$\neg A$	$[\in S]$
5.	$\neg F$	$[res(3,4)]$
6.	F	$[\in S]$
7.	$\square$	$[res(5,6)]$

Lineáris inputrezolúciós stratégia
$(\in S, \in S, res(1,2), \in S, res(3,4), \in S, res(5,6)...)$

Rezolúciós levezetés

$S = \{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\}$

1.	$\neg F \vee K$	$[\in S]$
2.	F	$[\in S]$
3.	K	$[res(1,2)]$
4.	$\neg K \vee A$	$[\in S]$
5.	A	$[res(3,4)]$
6.	$\neg A$	$[\in S]$
7.	$\square$	$[res(5,6)]$

Egységrezolúciós stratégia (res(x, y) esetén x. vagy y. egységklóz)
Ez egyben lineáris inputrezolúciós stratégia is

Feladat

Készítsünk klózhalmazt a következő szemantikus következmény vizsgálathoz!

$$\{(A \vee B) \supset C\} \models_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$$

Rezolúciós levezetéssel bizonyítsuk a klózhalmaz kielégíthetetlenségét!

Feladat

Klózhalmaz készítése

$\{(A \vee B) \supset C\} \models_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

$\downarrow$ visszakövetkeztetés

$\{(A \vee B) \supset C, \neg((A \supset C) \wedge (B \supset C))\}$ kielégíthetetlen?

$\downarrow$

$(A \vee B) \supset C \equiv \neg(A \vee B) \vee C \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee C \equiv (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$

$\neg((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \equiv \neg((\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)) \equiv$
$\neg(\neg A \vee C) \vee \neg(\neg B \vee C) \equiv (\neg\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg\neg B \wedge \neg C) \equiv$
$(A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \equiv (A \vee B) \wedge \neg C$

$\downarrow$ klózhalmaz

$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$ kielégíthetetlen?

Feladat

Rezolúciós levezetés

$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$

Egységrezolúciós stratégia

1.	$\neg A \vee C$	$[\in S]$
2.	$\neg C$	$[\in S]$
3.	$\neg A$	$[res(1,2)]$
4.	$A \vee B$	$[\in S]$
5.	B	$[res(3,4)]$
6.	$\neg B \vee C$	$[\in S]$
7.	C	$[res(5,6)]$
8.	$\square$	$[res(2,7)]$

Feladat

Rezolúciós levezetés

$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$

Lineáris inputrezolúciós stratégia (az előbbi átalakításával)

1.	$\neg A \vee C$	$[\in S]$
2.	$\neg C$	$[\in S]$
3.	$\neg A$	$[res(1,2)]$
4.	$A \vee B$	$[\in S]$
5.	B	$[res(3,4)]$
6.	$\neg B \vee C$	$[\in S]$
7.	C	$[res(5,6)]$
8.	$\neg C$	$[\in S]$
9.	$\Box$	$[res(7,8)]$

Feladat

Rezolúciós levezetés

$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$

Lineáris inputrezolúció (ismétlés nélküli)

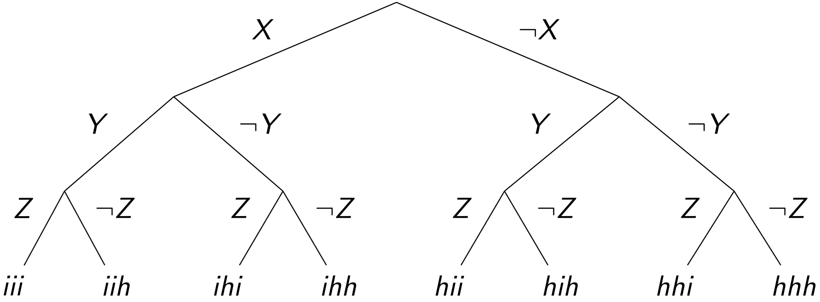
1.	$\neg A \vee C$	$[\in S]$
2.	$A \vee B$	$[\in S]$
3.	$C \vee B$	$[res(1,2)]$
4.	$\neg B \vee C$	$[\in S]$
5.	C	$[res(3,4)]$
6.	$\neg C$	$[\in S]$
7.	$\square$	$[res(5,6)]$

Szemantikus fa

$X \vee Y \wedge \neg Z$

Bázis: X, Y, Z
(**Bázis:** az ítéletváltozók egy rögzített sorrendje, pl. az igazságtáblában)

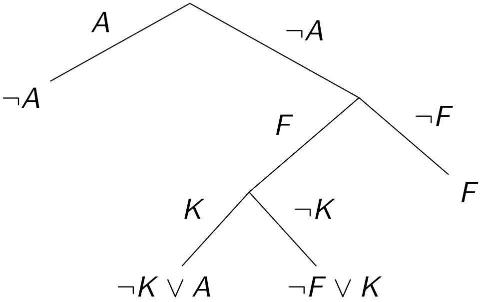
Interpretációk megadása szemantikus fával:



Szemantikus fa lezárása

$\{\neg F \vee K, \neg K \vee A, \neg A, F\}$

Bázis: A, F, K

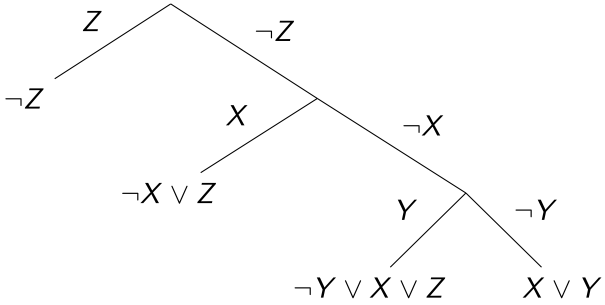


Minden ágat le tudtunk zárni ellentmondás alapján $\rightarrow$
A halmaz kielégíthetetlen

Szemantikus fa lezárása

$\{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Bázis: Z, X, Y
(Érdemes a kisebb logikai összetettségű formulából kiindulni)

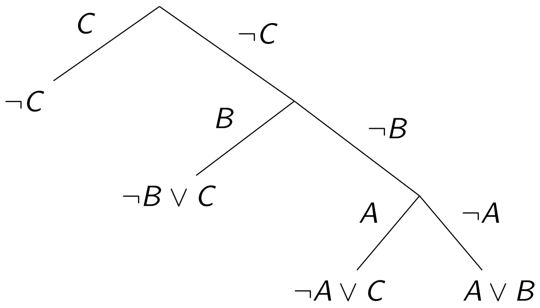


A halmaz kielégíthetetlen

Szemantikus fa lezárása

$S = \{\neg A \vee C, \neg B \vee C, A \vee B, \neg C\}$

Bázis: C, B, A



A halmaz kielégíthetetlen

Feladat

Készítsünk klózhalmazt a következő formulahalmazból!

$$\{(Y \supset (X \vee Z)) \wedge (X \vee Y), X \supset Z, \neg Z\}$$

Rezolúciós levezetéssel bizonyítsuk a klózhalmaz kielégíthetetlenségét!
Szemantikus fával is ellenőrizzük a kielégíthetetlenséget!

Feladat

Klózhalmaz készítése

$\{(Y \supset (X \vee Z)) \wedge (X \vee Y), X \supset Z, \neg Z\}$

$\downarrow$

...

$\downarrow$

$K = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Feladat

Rezolúciós levezetés

$K = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Lineáris inputrezolúciós stratégiát alkalmazva:

1.	$\neg Y \vee X \vee Z$	$[\in K]$
2.	$X \vee Y$	$[\in K]$
3.	$X \vee Z$	$[res(1,2)]$
4.	$\neg X \vee Z$	$[\in K]$
5.	Z	$[res(3,4)]$
6.	$\neg Z$	$[\in K]$
7.	$\square$	$[res(5,6)]$

Feladat

Rezolúciós levezetés

$K = \{\neg Y \vee X \vee Z, X \vee Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Egységrezolúciós sratégiát alkalmazva:

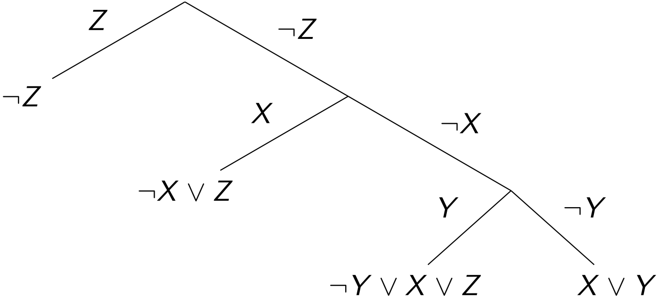
1.	$\neg Y \vee X \vee Z$	$[\in K]$
2.	$X \vee Y$	$[\in K]$
3.	$\neg X \vee Z$	$[\in K]$
4.	$\neg Z$	$[\in K]$
5.	$\neg X$	$[res(3,4)]$
6.	Y	$[res(5,2)]$
7.	$X \vee Z$	$[res(1,6)]$
8.	X	$[res(7,4)]$
9.	$\square$	$[res(8,5)]$

Feladat

Szemantikus fa lezárása

$K = \{\neg Y \lor X \lor Z, X \lor Y, \neg X \lor Z, \neg Z\}$

Bázis : Z, X, Y



Feladat

Készítsünk klózhalmazt a következő formulából!

$$(Z \supset Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg(X \wedge Y) \wedge (X \supset Z) \wedge \neg Z$$

Rezolúciós levezetéssel bizonyítsuk a klózhalmaz kielégíthetetlenségét!
Szemantikus fával is ellenőrizzük a kielégíthetetlenséget!

Feladat

Klózhalmaz készítése

$(Z \supset Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg(X \wedge Y) \wedge (X \supset Z) \wedge \neg Z$

$\downarrow$

$(Z \supset Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg(X \wedge Y) \wedge (X \supset Z) \wedge \neg Z \equiv$
$(\neg Z \vee Y) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg(X \wedge Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge \neg Z \equiv$
$(\neg Z \vee Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge \neg Z$

$\downarrow$

$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Feladat

Rezolúciós levezetés

$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Lineáris inputrezolúciós stratégiát alkalmazva:

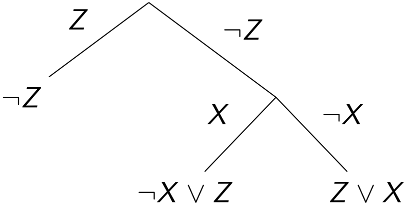
1.	$X \vee Z$	$[\in K]$
2.	$\neg X \vee Z$	$[\in K]$
3.	Z	$[res(1,2)]$
4.	$\neg Z$	$[\in K]$
5.	$\Box$	$[res(3,4)]$

Feladat

Szemantikus fa lezárása

$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Bázis : Z, X, Y



Feladat

Szemantikus fa lezárása (másik bázissal)

$K = \{\neg Z \vee Y, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z\}$

Bázis : X, Y, Z