Programtervező informatikus BSc, A és B szakirány
Analízis II. Gy, 1. zárthelyi – 2019.12.13.

Megoldások

1. *(6 pont)* Legyen $f(x) := e^x + 2x - \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$. Bizonyítsa be, hogy f invertálható, $f^{-1} \in D$, és számítsa ki $\left(f^{-1}\right)'(1)$-et.

Megoldás:

$f \in D$, $f'(x) = e^x + 2 - \cos x > 0$ $(x \in \mathbb{R}) \implies f \uparrow \implies$ invertálható **2p**

$\exists f^{-1}$, $f \in D$, $f' \neq 0 \implies f^{-1} \in D$ **1p**

Észrevehető, hogy $f(x_0) = 1 \iff x_0 = 0$, azaz $f^{-1}(1) = 0$. **1p**

Így

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$ **2p**

---

2. *(4+4 pont)* Legyen $f(x) := \dfrac{x+1}{x^2+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Határozza meg f lokális szélsőértékeit.

b) Határozza meg f abszolút szélsőértékeit a $[-2; 2]$ halmazon.

Megoldás:

a) *Stacionárius pontok (elsőrendű szükséges feltétel)*:

$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2},$$ **1p**

tehát $f'(x) = 0 \iff x_1 = -3$ vagy $x_2 = 1$. **1p**

Lokális szélsőértékek (elsőrendű elégséges feltétel):
f' nevezője pozitív, számlálója negatív főegyütthatós másodfokú polinom, így f' (-3)-ban negatívból pozitívba, 1-ben pozitívból negatívba vált, tehát $f(-3) = -\frac{1}{6}$ **lokális minimum**, $f(1) = \frac{1}{2}$ **lokális maximum**. **2p**

b) $[-2; 2]$ korlátos és zárt, $f \in C[-2; 2]$, tehát a *Weierstrass-tétel* alapján léteznek abszolút szélsőértékei. **1p**

Vizsgálandók a lokális szélsőértékek $(-3 \notin [-2; 2])$: $f(1) = \frac{1}{2}$, és a végpontok: $f(-2) = -\frac{1}{7}$, $f(2) = \frac{3}{7}$. **2p**

Tehát $f(-2) = -\frac{1}{7}$ **abszolút minimum**, $f(1) = \frac{1}{2}$ **abszolút maximum**. **1p**

---

3. *(12 pont)* Teljes függvényvizsgálat után vázolja a következő függvény grafikonját:

$$f(x) := \frac{x^2}{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás:

i. *Folytonosság, deriválhatóság*: $f \in D^\infty$, első két deriváltja:

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x},$$ **1p**

$$f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - (2x-x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2-4x+2}{e^x}.$$ **1p**

ii. *Zérushelyek*: $f(x) = 0 \iff x = 0$. **1p**

iii. *Monotonitási intervallumok*:

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff 2x - x^2 = -x(x-2) \gtreqless 0$$

(mivel $e^x > 0$), vagyis

$$f'(x) > 0 \iff 0 < x < 2, \qquad f'(x) < 0 \iff x < 0 \lor x > 2,$$ **1p**

tehát $f \uparrow (0; 2)$-n, és $f \downarrow (-\infty; 0)$-n és $(2; +\infty)$-en. **1p**

iv. *Lokális szélsőértékek*:

$$f'(x)=0 \iff x=0 \vee x=2$$

, és a monotonitási intervallumok alapján $f(0)=0$ lokális minimum, $f(2)=\frac{4}{e^2}$ lokális maximum. **1p**

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$\ominus$	0	$\oplus$	0	$\ominus$
f	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

v. *Konvexitási intervallumok, inflexió*:

$$f''(x) \gtreqless 0 \iff x^2-4x+2 \gtreqless 0.$$

$x^2-4x+2=0 \iff x=2\pm\sqrt{2}$, és így

$$f''(x)>0 \iff x<2-\sqrt{2} \vee x>2+\sqrt{2}, \qquad f''(x)<0 \iff 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2},$$ **1p**

tehát f konvex $(-\infty;2-\sqrt{2})$-n és $(2+\sqrt{2};+\infty)$-en, konkáv $(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$-n, $2\pm\sqrt{2}$ inflexiós pontok. **2p**

x	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	2	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
f''	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
f	konvex	inflexió	konkáv	inflexió	konvex

vi. *Határérték*: $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f = \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R} = \{\pm\infty\}$:

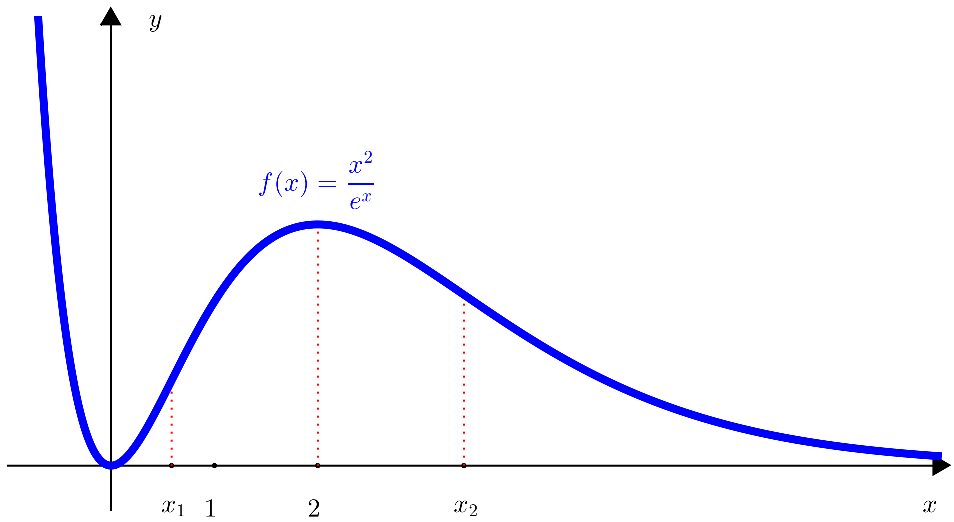
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$ **1p**

vii. *Aszimptoták*: **1p**

$(-\infty)$-ben: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=+\infty$, tehát nincs aszimptotája $(-\infty)$-ben.

$(+\infty)$-ben: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ alapján $y=0$ aszimptota.

viii. *Grafikon*: **1p**



$$\left(f(2)\approx 0.5, \quad x_1=2-\sqrt{2}\approx 0.6, \quad f(x_1)\approx 0.2, \quad x_2=2+\sqrt{2}\approx 3.4, \quad f(x_2)\approx 0.4\right)$$

---

4. *(6 pont)* Számítsa ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to0+0}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Megoldás:

$x\in(0;\pi)$ esetén $\sin x>0$, így $(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(e^{\ln\sin x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{\ln\sin x}{\ln x}}$. **1p**

A kitevőben $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=„\frac{-\infty}{-\infty}”$, tehát alkalmazható a *L'Hospital-szabály*: **1p**

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to0+0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{x\cos x}{\sin x}=„\frac{0}{0}”.$$ **2p**

A *L'Hospital-szabály* újbóli alkalmazásával (VAGY $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ felhasználásával):

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(x\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\cos x - x\sin x}{\cos x} = 1. \qquad \boxed{\mathbf{1p}}$$

.

Az exponenciális függvény folytonossága miatt:

$$\lim_{x\to 0+0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln \sin x}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln \sin x}{\ln x}} = e^1 = e. \qquad \boxed{\mathbf{1p}}$$

---

5. *(4+4 pont)* Legyen $f(x) := x \cdot \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Határozza meg az f függvény $a = 0$ körüli második Taylor-polinomját, $T_{2,0}(f,x)$-et.

b) Adjon becslést az $|f(x) - T_{2,0}(f,x)|$ hibára a $\left[0; \frac{1}{8}\right]$ invervallumon.

Megoldás:

a) $f \in D^\infty$, deriváltjai:

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}, \qquad \boxed{\mathbf{2p}}$$

így

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2. \qquad \boxed{\mathbf{1p}}$$

A 0 körüli Taylor-polinomja tehát:

$$T_{2,0}(f,x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x^2. \qquad \boxed{\mathbf{1p}}$$

b) Taylor-formula Lagrange-maradéktaggal:

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{8}\right] : \exists \xi \in (0; x) : |f(x) - T_{2,0}(f,x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3 \right|. \qquad \boxed{\mathbf{1p}}$$

A harmadik derivált és becslése:

$$f'''(x) = -2 \cdot \frac{2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = -\frac{8x}{(1+x^2)^3} \implies |f'''(\xi)| = \frac{8|\xi|}{(1+\xi^2)^3} \le \frac{8 \cdot \frac{1}{8}}{(1+0)^3} = 1 \quad \left(0 < \xi < x \le \frac{1}{8}\right). \qquad \boxed{\mathbf{2p}}$$

Tehát a hibabecslés $\left[0; \frac{1}{8}\right]$-on:

$$|f(x) - T_{2,0}(f,x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|x|^3 \le \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8^3}. \qquad \boxed{\mathbf{1p}}$$
