Ismétlés nélküli permutációinak számáról szóló tétel

Tétel:
Egy n elemű A halmaz ismétlés nélküli permutációinak száma:

$$P_n = n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Bizonyítás:
Teljes indukcióval.
n = 0,1 : 1 féle, 0! = 1! = 1 ✓
Ha A egy $(n+1)$ elemű halmaz, $f : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to A$ bijektív
Ha $f(1) = x \in A$, akkor $f(2), f(3), \ldots, f(n+1)$ az az $A \setminus \{x\}$ halmaz egy permutációját adja.

$A \setminus \{x\}$ elemszáma n, tehát $n!$ módon fejezhetem be azt a felsorolást, ami x-el kezdődött.

De x választási lehetősége $(n+1)$ féle $\Rightarrow$ Az A permutációinak száma:

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Bizonyítás2:
Az n elemből az első helyre n féleképpen választhatunk, a másodikra $n-1$ féleképpen, ... Így az összes lehetőségek száma $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Ismétléses permutációk számáról szóló tétel

Tétel:
Ha egy n hosszú sorozatban r db különböző elem van és ezek $i_1, i_2, \ldots, i_r$-szer ismétlődnek ($i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n$), akkor a képezhető ismétléses permutációk száma:

$$^{i}P_n^{i_1, i_2, \ldots i_r} = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_r!}$$

Bizonyítás:
Tfh.: az i_1 darab egyforma elem mégis különböző.
Ekkor ezeknek az egymás közti sorrendje $i_1!$ féle lehetne, és az ismétléses permutációk száma $i_1!$ -szorosára nőne.
Ugyanezt eljátszva a többi elemmel a permutációk száma $i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_r!$-szorosára nőne, és akkor kapnánk meg az $n!$ lehetőséget.

Bizonyítás2:
Ha minden elem között különbséget teszünk, akkor $n!$ lehetséges sorrend van. Ha azonban az azonos típusú elemek köött nem teszünk különbséget, akkor ebben a számításban többször számoltuk az egyes sorrendeket.

Mivel minden $1 \leq k \leq r$-re adott i_k db pozíción $i_k!$ különböző sorrendben helyezhetjük el a k-adik típusú elemeket, ezért minden sorrendet $i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_r!$-szor számoltunk. Így a különböző sorrendek száma:
$\frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_r!}$

Ismétlés nélküli variációk számáról szóló tétel

Tétel:
Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bizonyítás:
Jelölje a keresett mennyiséget V_n^k
Minden felsorolása A-nak ($n!$ összesen) felbontható az első k és a következő $(n-k)$ elemre.

$$\underbrace{a_1\ a_2\ \ldots\ a_k}_{k\ db} \qquad \underbrace{a_{k+1} \ldots a_n}_{n-k\ db}$$

Itt az első k elem V_n^k-féle lehet, az utolsó $(n-k)$ elem $(n-k)!$-féle lehet.

Ekkor: $V_n^k \cdot (n-k)! = n! \Leftrightarrow V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ismétléses variációk számáról szóló tétel

Tétel:
Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses veriációinak száma:

$$^{i}V_n^k = n^k$$

Bizonyítás2:
A sorozat első elemét n féleképpen választhatjuk, a második elemét n-féleképpen választhatjuk ..., a sorozat k-adik elemét n-féleképpen választhatjuk. $\Rightarrow n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$

Ismétlés nélküli kombinációk számáról szóló tétel

Tétel:
Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Bizonyítás:
A keresett szám: C_n^k
A variációt megadhatjuk 2 lépésben:
1, Melyik elemet választom $\rightarrow C_n^k$
2, Milyen sorrendben $\rightarrow k!$

$$V_n^k = C_n^k \cdot k! \Leftrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Bizonyítás2:
Először válasszuk a halmaz elemei közül k darabot a sorrendet figyelembevéve. Ezt $\frac{n!}{(n-k)!}$-féleképpen tehetjük meg.
Ha a sorrendtól eltekintünk, akkor az előző számlálásnál minden k elemű részhalmaz pontosan $k!$-szor szerepel. Ezzel leosztva kapjuk a k elemű részhalmazok számát.

Ismétléses kombinációk számáról szóló tétel

Tétel:
Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:
$^iC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Bizonyítás:
Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ Ekkor minden egyes lehetőségnek megfeleltetünk egy $0-1$ sorozatot:

$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a_1\text{-ek száma}},0,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a_2\text{-ek száma}},0,\ldots,0,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a_n\text{-ek száma}}$$

Ekkor a sorozatban k db 1-es van (választott elemek száma), $n-1$ darab 0 van (szeparátorok száma). Összesen $n-1+k$ pozíció, ezekből k-t választunk. Ilyen sorozat $\binom{n+k-1}{k}$ db van.

Binomiális tétel

Tétel:
Ha x és y számok (pl.: $\mathbb{R}$), akkor $2 < n \in \mathbb{N}$ esetén: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Bizonyítás:
$(x+y)^n = (x+y) \cdot (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)$
Ha elvégezzük a beszorzást, akkor $x^n y^{n-k}$ alakú tagokat kapunk, és ezen tagot annyiszor kapjuk meg, ahányszor n tényezőből k darab x-et választunk.

Polinomiális tétel

Tétel:
$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$ kifejezésben olyan $x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{i_r}$ tagok vannak, melyekre $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n$ és ennek a tagnak az együtthatója:
$$\frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_r!}$$

Bizonyítás:
$x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{i_r}$ hányféle változatban jelenik meg = hányféle permutációja van ismétlésesen = $\dfrac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_r!}$

Gráf csúcsainak fokszámösszegére vonatkozó tétel

Tétel:
Egy $G = (V, E, \varphi)$ véges gráfban $\sum\limits_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$

Bizonyítás:
Készítsünk egy táblázatot:

	e_1	e_2	...
v_1	0	1	...
v_2	2	0	...
...	...	...	

Sorok = V, Oszlopok = E, írjunk majdnem mindenhova 0-t, kivéve oda, ha a megfelelő csúcs az él egyik végpontja akkor 1-est, ha hurokél akkor 2-est írjunk oda.

A v_j sorának összege: $deg(v_j)$
Az e_k oszlopának összege: 2
A táblázat összege: $\sum\limits_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$

Bizonyítás2:
Élszám szerinti teljes indukció:
$|E| = 0$ esetén az egyenlet mindkét oldala 0 ✓
Tfh.: $|E| = n$ esetén igaz az állítás.
Ekkor kell, hogy ha adott egy gráf, melynek $n+1$ éle van, akkor annak egy élét elhagyva egy n élű gráfot kapunk. Erre teljesül az állítás az indukciós feltevés miatt. Az elhagyott élt hozzátéve az egyenlőség mindkét oldala 2-vel nő.

Állítás út létrehozásáról sétából gráf két csúcsa között

Állítás:
Ha egy G gráfban v_1 és v_2 között van séta, akkor van közöttük út is.

Bizonyítás:
Ha van séta és van csúcs amit kétszer is meglátogatok, akkor a két csúcs közötti séta-részt hagyjuk el. Ezt ismételjük addig amég van olyan csúcs amit kétszer látogatunk meg. Végül így egy utat kapunk.

v_1 ---> v_i ---> v_i ---> v_2 $\quad \Rightarrow \quad$ v_1 ---> v_i ---> v_2