Valószínűségszámítás

6. előadás

Arató Miklós

2020.03.24.

Tartalomjegyzék

Egyenlőtlenségek

Tétel [Markov-egyenlőtlenség]: Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az $E\xi$ várható értéke, továbbá legyen c pozitív szám. Ekkor $P(\xi \geq c) \leq \frac{E\xi}{c}$.

Tétel[Csebisev-egyenlőtlenség]: Ha ξ szórásnégyzete véges, azaz $D^2\xi < \infty$, valamint $0 \leq \lambda$, akkor teljesül a $P(|\xi - E\xi| \geq \lambda) \leq \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$ egyenlőtlenség.

Biz.: A Markov-egyenlőtlenségből könnyen adódik, hiszen az $\eta := (\xi - E\xi)^2$ választással $P(\eta \geq \lambda^2) \leq \frac{E\eta}{\lambda^2} = \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$.

Példa

Egy országban meg szeretnék becsülni a koronavírussal fertőzöttek arányát úgy, hogy legalább $0,95$ valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk.

Példa

Egy országban meg szeretnék becsülni a koronavírussal fertőzöttek arányát úgy, hogy legalább $0,95$ valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk. Jelölje N az ország lakosai, M a koronavírusosak szavazók, n pedig a megvizsgáltak számát, ekkor $p := \frac{M}{N}$-et akarjuk jól közelíteni. Legyen továbbá X_i értéke 1, ha az i-edik megvizsgált koronavírusos és 0 különben. Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\frac{M}{N}\right|\leq 0,01\right)\geq 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ami pontosan akkor igaz, ha $P\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-p\right|>0,01\right)\leq 0,05$. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján $P\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-p\right|>0,01\right)\leq\frac{D^2(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n})}{0{,}01^2}$, ahol $\frac{\frac{1}{n^2}D^2(\sum X_i)}{0{,}01^2}=\frac{\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot p(1-p)}{0{,}01^2}=\frac{10000\cdot p(1-p)}{n}\leq\frac{10000\cdot\frac{1}{4}}{n}\leq\frac{5}{100}$, tehát $n\geq 50000$ ember megvizsgálása biztosan elegendő.

Törvény

Tétel[A nagy számok gyenge törvénye]: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $D^2\xi_i < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $0 < \varepsilon$-ra

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Biz.: Tudjuk, hogy $E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = n \cdot m$. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot D^2\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D^2\xi_i}{\varepsilon^2} =$$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{D^2\xi_1}{\varepsilon^2} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Példa

Tekintsünk független kísérleteket, minden kísérlet legyen p valószínűséggel sikeres.
Jelölje η_n a sikeres kísérletek számát az első n kísérletben.
Ekkor $P(|\frac{\eta_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$.
Legyen ugyanis $\eta_n = X_1 + \ldots + X_n$, ahol $X_i = 1$, ha az i-edik kísérlet sikeres, különben pedig 0.
Továbbá $EX_i = p$ és $D^2X_i = p(1-p)$. Így X_i-kre teljesülnek az előbbi tétel feltételei, tehát a relatív gyakoriság tart p-hez.

Sztochasztikus konvergencia

Definíció: A ξ_n valószínűségi változó-sorozat **sztochasztikusan tart** ξ-hez, ha minden $0 < \varepsilon$-ra $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$ esetén. Jelölése: $\xi_n \Rightarrow \xi$ (vagy $\xi_n \stackrel{st.}{\to} \xi$).

Állítás: Ha $\xi_n \Rightarrow \xi$, akkor $P(\xi_n < x) \to P(\xi < x)$ $(n \to \infty)$, ez utóbbi minden folytonossági pontjában.

Bizonyítás

Legyen $A_n := \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$. Ekkor
$P(\xi_n < x) = P((\xi_n < x) \cap A_n) + P((\xi_n < x) \cap \overline{A_n}) \leq$
$P((\xi_n < x) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) =$
$P(((\xi_n - \xi) < (x - \xi)) \cap A_n) + P(\overline{A_n}) \leq$
$P(\xi < x + \varepsilon,\ A_n) + P(\overline{A_n}) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + P(\overline{A_n}) \Rightarrow$
$\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + \limsup P(\overline{A_n})$, ahol
$\limsup P(\overline{A_n}) = 0$ minden $0 < \varepsilon$-ra $\Rightarrow$
Ha x folytonossági pontja $P(\xi < x)$-nek, akkor
$\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x)$.

Bizonyítás (folyt.)

$P(\xi_n < x) \geq P(\xi_n < x,\ A_n) = P(\xi_n + \xi < x + \xi,\ A_n) =$
$P(\xi < x + \xi - \xi_n,\ A_n) \geq P(\xi < x - \varepsilon,\ A_n) =$
$P(\xi < x - \varepsilon) - P(\xi < x - \varepsilon,\ \overline{A_n}) \geq$
$P(\xi < x - \varepsilon) - P(\overline{A_n}) \Rightarrow$
$\liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x - \varepsilon) - \limsup P(\overline{A_n})$, ahol
$\limsup P(\overline{A_n}) = 0 \Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x - \varepsilon)$ minden
$0 < \varepsilon$-ra $\Rightarrow \liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x)$.
A folytonossági pontokban $\limsup P(\xi_n < x) \leq P(\xi < x)$ és
$\liminf P(\xi_n < x) \geq P(\xi < x) \Rightarrow \lim P(\xi_n < x) = P(\xi < x)$.

Konvergenciák

Definíció:
$\xi_n \to \xi$ **eloszlásban**, ha $F_{\xi_n}(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} F_\xi(x)$ az utóbbi minden folytonossági pontjában.
$\xi_n \to \xi$ **majdnem mindenütt**, ha $P\left(w : \xi_n(w) \to \xi(w)\right) = 1$. [1 valószínűségű konvergencia].
$\xi_n \to \xi$ L^p**-ben**, ha $E|\xi_n - \xi|^p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Állítás: Ha $\xi_n \to \xi$ L^p-ben, akkor $\xi_n \Rightarrow \xi$
Bizonyítás:
$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0.$

Állítás: Ha $\xi_n \to \xi$ 1 valószínűséggel, akkor $\xi_n \Rightarrow \xi$

Példa

ξ_n tart ξ-hez majdnem mindenütt, de L^p-ben nem

$\Omega := [0,1]$ geometriai valószínűségi mező

$$\xi_n(w) = \begin{cases} e^n & : \quad w \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \quad w \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases} .$$

Ekkor $\xi_n \to 0$ majdnem mindenütt, viszont

$E|\xi_n|^p = \frac{1}{n} e^{np} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 0 = \frac{e^{np}}{n} \nrightarrow 0.$

Tétel

Állítás: $\xi_n \to \xi$ majdnem mindenütt akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{m\to\infty} P(\sup\limits_{n\geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$ minden pozitív ε-ra.

Következmény: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$ minden $0 < \varepsilon \Rightarrow$ $\xi_n \to \xi$ 1 valószínűséggel.

Bizonyítás: $P\left(\sup\limits_{n\geq m} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = P\left(\bigcup\limits_{n\geq m} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq$

$$\sum_{n=m}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nagy számok Cantelli-féle erős törvénye: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $E|\xi_n - E\xi_n|^4$ véges.

Ekkor $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \to E\xi_1$ 1 valószínűséggel.

Bizonyítás

Megjegyzés: Elég, ha $E|\xi_i| < \infty$, ez a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye

Bizonyítás: $m = E\xi_1, \tilde{\xi}_k = \xi_k - m$

Elég $\frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k}{n} \to 0$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k, P\left(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4}{\varepsilon^4}$

$S_n^4 = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k^4 + 6 \cdot \sum_{i<j} \tilde{\xi}_i^2 \tilde{\xi}_j^2 +$

$12 \cdot \sum_{i \neq j, i \neq k, i<k} \tilde{\xi}_i^2 \tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_k + 24 \cdot \sum_{i<j<k<l} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l + 4 \cdot \sum_{i \neq j} \tilde{\xi}_i^3 \tilde{\xi}_j \Rightarrow$

$ES_n^4 = nE\tilde{\xi}_1^4 + 6 \cdot \sum_{i<j} E\tilde{\xi}_i^2 E\tilde{\xi}_j^2 = nE\tilde{\xi}_1^4 + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \left(E\tilde{\xi}_1^2\right)^2 \Rightarrow$

$\frac{ES_n^4}{n^4} < c \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\right) < \infty$

Példa 1.

0,25-paraméterű indikátor és N(0,25,1) változók átlaga

Definíció: Az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha} & x > 0. \end{cases}$$

(1,5)-Pareto változók átlaga

Példa 2.

"A számok rendesek" (Borel): $\Omega = [0,1]$, $w = 0, w_1 w_2 \ldots$ 2-es diadikus tört és $\xi_n(w) = w_n$ (n-edik számjegy)
$\left\{ w : \xi_1(w) = x_1, \ldots, \xi_n(w) = x_n \right\} =$
$\left\{ w : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} \leq w < \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right\} \Rightarrow$

$P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \frac{1}{2^n} \Rightarrow P(\xi_i = x_i) = \frac{1}{2}$
$x_i = 0, 1$ és ξ-k függetlenek. $\Rightarrow$
$\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \to E\xi_1 = \frac{1}{2}$ 1 valószínűséggel

Példa 3.

Monte-Carlo módszer: $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos.
Kérdés: $\int_0^1 f(x)\, dx$ becsülhető-e véletlen számgenerálás segítségével?
$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ független $E(0,1)$-eloszlásúak

$$\varrho_i = \begin{cases} 1, & ha\ f(\xi_i) > \eta_i \\ 0, & különben \end{cases}.$$

Belátható, hogy $E\varrho_i = P\left(f(\xi_i) > \eta_i\right) = \int_0^1 f(x) dx$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} \varrho_i}{n} \to \int_0^1 f(x)\, dx$ 1 valószínűséggel

Példa 4.

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n-el. Mihez tart X_n?

Példa 4.

A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n-el. Mihez tart X_n?

A részvény várható éves hozama 20%.

Y_n:hányszorosára változik a részvény árfolyama az n-edik évben $\Rightarrow$

$X_n = Y_1 \dots Y_n$ és $EX_n = EY_1 \dots EY_n = 1,2^n \Rightarrow EX_n \to +\infty$

Egy tipikus HUNCUT részvényárváltozás

Példa folytatása

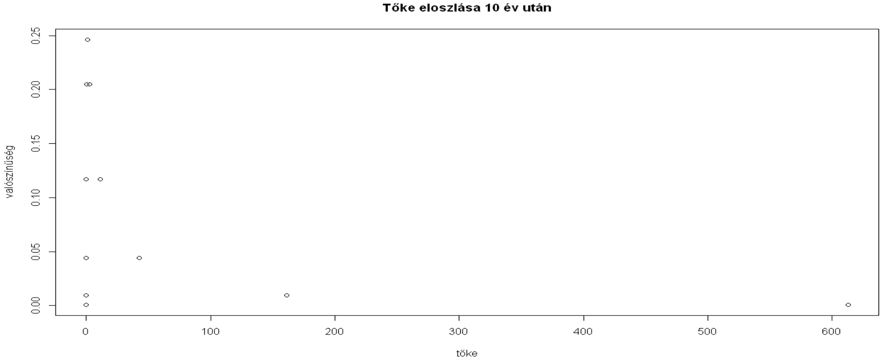

Figure: A HUNCUT részvény eloszlása

Példa folytatása

$X_n = \exp\{lnY_1 + \cdots + lnY_n\}$.
Nagy számok erős törvénye $\Rightarrow$

$$\frac{lnY_1+\cdots+lnY_n}{n} \to E(lnY_1) = \frac{1}{2}ln(0,95) < 0 \text{ (1 valószínűséggel).}$$

$$\Rightarrow X_n = \left(\exp\left\{\frac{lnY_1+\cdots+lnY_n}{n}\right\}\right)^n \to 0 \text{ (1 valószínűséggel).}$$

Előző példa folytatása

Minden év végén tőként felét a HUNCUT részvénybe fektetjük, a másik felét azonban párnánk alatt készpénzben tartjuk.
Z_n: tőkénk n év múlvabeli értéke. Tőkénk várható éves hozama
$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 190\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 50\% + \frac{1}{2} \cdot 100\%\right) - 100\% = 10\%.$
U_n: hányszorosára változik a részvény árfolyama az n-edik évben.
$Z_n = U_1 \dots U_n$ és $EZ_n = EU_1 \dots EU_n = 1,1^n \to +\infty$
Tőkeváltozás új stratégiával

Példa folytatása

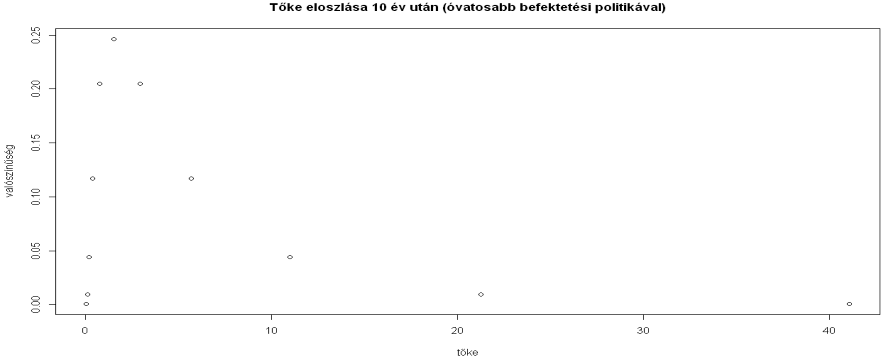

Figure: Tőkénk eloszlása, ha mindig csak a felét fektetjük be a HUNCUT részvénybe

Példa folytatása

$Z_n = \exp\{lnU_1 + \cdots + lnU_n\}$.

$\frac{lnU_1+\cdots+lnU_n}{n} \to E(lnU_1) = \frac{1}{2}ln(1,45 \cdot 0,75) > 0$ (1 valószínűséggel). $\Rightarrow$
$Z_n = \exp\left(\frac{lnU_1+\cdots+lnU_n}{n}\right)^n \to +\infty$ (1 valószínűséggel)