Numerikus Módszerek

1. Zh megoldása

2019. március 26.

1. (a) Írjuk fel ε_0 értékét.

$$\varepsilon_0 = [100000|-5] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} = 2^{-6}$$

(2 pont)

(b) Először váltsuk át a $0,12$-t kettes számrendszerbe.

	12
0	24
0	48
0	96
1	92
1	84
1	68
1	36
0	72
1	44
0	88

A mantissza hosszának megfelelően, az első 6 hasznos jegyet kell megtartanunk, ezek az 111101 jegyek. Mivel az utána következő 7. jegy nulla, ezért ezen az értéken nem változtatunk. A karakterisztika értéke -3. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért ellenőriznünk kell, hogy a kapott számhoz vagy a felső szomszédjához van-e közelebb a $0,12$.

$$[111101|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{32+16+8+4+1}{512} = \frac{61}{512}$$

$$[111110|-3] = \frac{62}{512}$$

Mivel

$$\frac{61}{512} < 0,12 = \frac{1}{100} < \frac{62}{512} \quad \Leftrightarrow \quad 6100 < 12 \cdot 512 = 6144 < 6200,$$

látszik, hogy a kisebb szomszédhoz van közelebb a $0,12$, így

$$fl(0,12) = [111101|-3] = \frac{61}{512}$$

a megfeleltetett gépi szám. (4 pont)

(c) A gépi összeadáshoz előbb közös karakterisztikára kell hoznunk a számokat. Mindig a kisebb karakterisztikájú számot igazítjuk a nagyobbhoz, így most az ε_0-t hozzuk -3 karakterisztikára.

$$[100000|-5] \to [001000|-3]\,.$$

$$\begin{array}{r} [001000|-3] \\ +\,[111101|-3] \\ \hline [1000101|-3] \end{array}$$

Innen az utolsó jegyet felfelé kerekítve normalizálással kapjuk a végeredményt:

$$[100011|-2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{32+2+1}{256} = \frac{35}{256}.$$

(4 pont)

(d) $fl(0,12) = [110011|-3]$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{fl(0,12)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}$$

Az eredmény: $[100011|-2] = \frac{35}{256}$ abszolút hibakorlátja:

$$\Delta_{\frac{35}{256}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-9}$$

(2 pont)

2. **Az elimináció**:
1. lépés:
2. sor $-\left(\frac{1}{3}\right) \ast$ 1. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \to$$

Rész számítások: $3 - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}, \quad 5 - \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{11}{3}$. (2 pont)

2. lépés:
3. sor $-\left(\frac{3}{8}\right) \ast$ 2. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & \frac{21}{8} \end{array}\right] \to$$

Rész számítások: $3 - \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8} \cdot (24-3) = \frac{21}{8}, \quad 4 - \frac{3}{8} \cdot \frac{11}{3} = \frac{1}{8} \cdot (32-11) = \frac{21}{8}$. (2 pont)

A visszahelyettesítés:
3. sor $\ast\frac{8}{21}$
2. sor $-$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & \frac{21}{8} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2. sor $\ast\frac{3}{8}$
1. sor $-$ új 2. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2. sor /3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{x} = [1,1,1]^T$ vektor. (2 pont)

3. Végezzük el az eliminációt és menet közben a Gauss-eliminációs hányadosokat tároljuk az L mátrixban. Mivel a mátrix tridiagonális, ezért L és U is tridiagonális lesz. A rekurzió felírásához vezessük be a következő jelöléseket:

$$L = tridiag(l_i, 1, 0), \quad U = tridiag(0, u_i, 1).$$

Az i. lépésig elkészült L mátrixot $L^{(i)}$-vel jelöljük. Menet közben ellenőrizzük, hogy U átlója felett megmaradnak az 1 elemek.

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

U 1. sora azonos A első sorával, így $u_1 = 3$ és $U_{12} = 1$.

1. lépés:
2. sor $- \left(\frac{1}{u_1}\right) * 1$. sor.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Tehát $l_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{3}$ az eliminációs hányados és $u_2 = 3 - l_2 \cdot 1 = 3 - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}$ és $U_{23} = 1$.

2. lépés:
3. sor $- \left(\frac{1}{u_2}\right) * 2$. sor.

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $l_3 = \frac{1}{u_2} = \frac{3}{8}$ az eliminációs hányados és $u_3 = 3 - l_3 \cdot 1 = 3 - \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{21}{8}$ és $U_{34} = 1$.
(2 pont)

Sejtés: a k. lépés előtt a k. sorig elkészültek az L és U elemei a következő rekurzióval

$$u_1 = 3,$$
$$l_i = \frac{1}{u_{i-1}}, \quad u_i = 3 - l_i \cdot 1 \quad (i = 2, \dots, k)$$

és a k. lépés előtt a mátrixok alakja:

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & u_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A^{(k)}$$

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & l_k & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = L^{(k)}$$

(2 pont)

Be kell látnunk, hogy az alak és a rekurzió az elimináció k. lépése után megmarad.

k. lépés:

$k+1$. sor $-\left(\frac{1}{u_k}\right) * k$. sor.

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & u_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & u_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A^{(k+1)}$$

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ k+2. \\ \vdots \\ n. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & l_k & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & l_{k+1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = L^{(k+1)}$$

Tehát $l_{k+1} = \frac{1}{u_k}$ az eliminációs hányados, $u_{k+1} = 3 - l_{k+1} \cdot 1$ és $U_{k+1,k+2} = 1$.
Tehát a rekurzió és az alak a $k+1$. lépés után is megmarad. (2 pont)

4. (a) Először elkészítjük az LU-felbontást.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 12 & 18 & 12 & 6 \\ 8 & 12 & 12 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az együtthatókat a parkettázásnak megfelelő sorrendben számítjuk ki:

$$12 = l_1 \cdot 16 \to l_1 = \frac{3}{4} \qquad 18 = l_1 \cdot 12 + u_1 \to u_1 = 9$$
$$8 = l_2 \cdot 16 \to l_2 = \frac{1}{2} \qquad 12 = l_1 \cdot 8 + u_2 \to u_2 = 6$$
$$4 = l_4 \cdot 16 \to l_4 = \frac{1}{4} \qquad 6 = l_1 \cdot 4 + u_3 \to u_3 = 3$$

Ezt követően kiszámítjuk L második oszlopát és U harmadik sorát:

$$12 = l_2 \cdot 12 + l_3 \cdot u_1 \to l_3 = \frac{2}{3} \qquad 12 = l_2 \cdot 8 + l_3 \cdot u_2 + u_4 \to u_4 = 4$$
$$6 = l_4 \cdot 12 + l_5 \cdot u_1 \to l_5 = \frac{1}{3} \qquad 6 = l_2 \cdot 4 + l_3 \cdot u_3 + u_5 \to u_5 = 2$$

Majd végül l_6-ot és u_6-ot:

$$6 = l_4 \cdot 8 + l_5 \cdot u_2 + l_6 \cdot u_4 \to l_6 = \frac{1}{2}$$
$$4 = l_4 \cdot 4 + l_5 \cdot u_3 + l_6 \cdot u_5 + u_6 \to u_6 = 1$$

Visszaírva a kapott értékeket a megfelelő mátrixokba:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

Az LDL^T felbontást egyszerűen megkapjuk az LU felbontásból:

$$A = LU = LDD^{-1}U = LDL^T,$$

ahol L az LU felbontásbeli L,

$$D = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

(b) A Cholesky felbontást a következőképpen kapjuk:

$$A = LU = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = \widetilde{L}\widetilde{L}^T.$$

$$\widetilde{L} = L \cdot \sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

5. Számítsuk ki az A mátrix QR felbontását:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q_1} = \frac{1}{r_{11}} \mathbf{a_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

$$r_{12} = \langle \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 5-8 \\ 10-4 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\|_2 = \left\| \frac{3}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{q_2} = \frac{1}{r_{22}} (\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}) = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

$$r_{13} = \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 0$$

$$r_{23} = \langle \mathbf{a_3}, \mathbf{q_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = 0$$

$$\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\|_2 = 2$$

$$\mathbf{q_3} = \frac{1}{r_{22}} (\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1 pont)

6. Householder transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra.

$$\sigma = -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(-1) \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2$$

Innen már ki tudjuk számolni a $\mathbf{v}$ vektort:

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2 = 2\sqrt{3}, \qquad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

Alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektorra:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} &= \left(\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-6) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(4 pont)