12. gyakorlat
Integrálszámítás 2.

1. példa. *Számítsuk ki a*

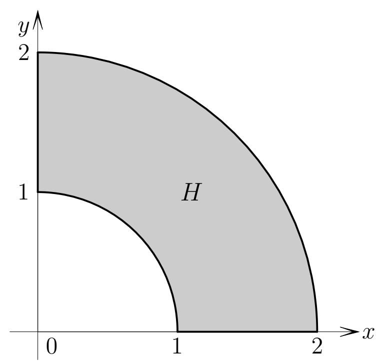
$$\iint\limits_H x^2\, y\, dx\, dy$$

kettős integrált, ahol H az

$$1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos síkrész.

Megoldás. Az alábbi ábra a H-val jelölt integrálási tartományt szemlélteti:



Az integrandus folytonos, következésképpen integrálható a H halmazon. Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\big)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. A megismert képlet alapján

$$\underline{\underline{\iint\limits_H x^2\, y\, dx\, dy}} = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\pi/2} (r\ \cos\varphi)^2 \cdot (r\ \sin\varphi) \cdot r\, dr\, d\varphi = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{\pi/2} r^4 \cdot (\sin\varphi) \cdot \cos^2\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left((\sin\varphi) \cdot \big(\cos^2\varphi\big) \cdot \int\limits_1^2 r^4\, dr \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \left((\sin\varphi) \cdot \cos^2\varphi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=1}^{r=2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{2^5 - 1}{5} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} (\sin\varphi) \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{31}{5} \cdot \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

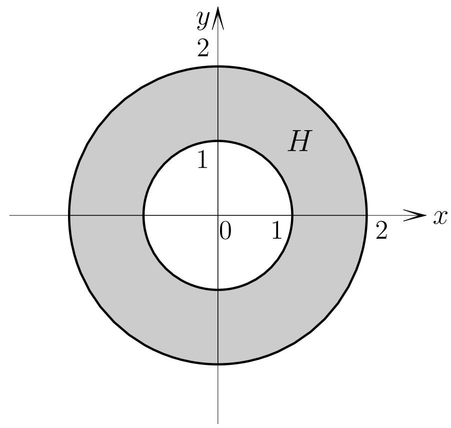
$$= \frac{31}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \frac{31}{\underline{\underline{15}}}. \ \blacksquare$$

2. példa. *Számítsuk ki az*

$$\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \ln\bigl(x^2+y^2\bigr)\,dx\,dy$$

kettős integrált.

Megoldás. Az alábbi ábra a H-val jelölt integrálási tartományt szemlélteti:



Az integrandus folytonos, következésképpen integrálható a H halmazon. Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\bigl(1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\bigr)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. A megismert képlet alapján

$$\underline{\underline{\iint\limits_{H} \ln\bigl(x^2+y^2\bigr)\,dx\,dy}} = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \ln\bigl(r^2\,\cos^2\varphi + r^2\,\sin^2\varphi\bigr)\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \ln r^2 \cdot r\,d\varphi\right) dr = 2\pi\cdot 2\int_1^2 r\cdot\ln r\,dr =$$

$$= 4\pi\left(\left[\frac{r^2}{2}\cdot\ln r\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\,dr\right) = 4\pi\left(\bigl(2\ln 2 - 0\bigr) - \left[\frac{r^2}{4}\right]_1^2\right) =$$

$$= \underline{\underline{8\pi\ln 2 - 3\pi}}.\ \blacksquare$$

3. példa. *Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú kör területét.*

Megoldás. Jelölje H_R az origó középpontú R sugarú zárt körlapot. Legyen

$$f(x,y) := 1 \quad \bigl((x,y)\in H_R\bigr).$$

Mivel $f \in R\big(H_R\big)$, ezért a H_R halmaznak van területe, és az egyenlő a

$$\iint\limits_{H_R} 1\,dx\,dy$$

kettős integrállal. Ezt az

$$\begin{gathered} x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \\ \big(0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big) \end{gathered}$$

polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képlet alapján

$$\iint\limits_{H_R} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} r\,dr\,d\varphi,$$

és ez utóbbi integrált szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$\iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^R r\,dr\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\,d\varphi = R^2\pi.$$

Az R sugarú kör területére tehát így is megkaphatjuk a jól ismert $R^2\pi$ képletet. ■

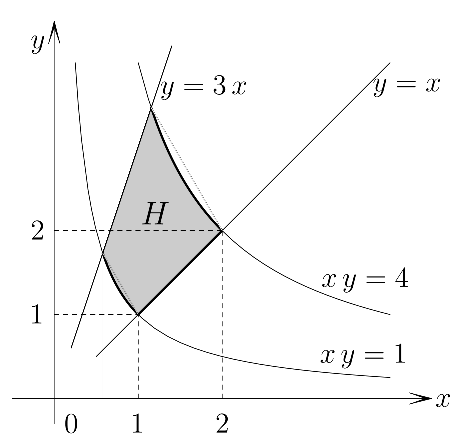
Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a félkör területét a

$$\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

4. példa. *Számítsuk ki az $x\,y = 1$, $x\,y = 4$, valamint az $y = x$ és az $y = 3\,x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét.*

Megoldás. Jelöljük H-val a szóban forgó síkidomot, és ábrázoljuk a H halmazt.



Legyen

$$f(x,y) := 1 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Mivel $f\in R(H)$, ezért H-nak van területe, és azt a

$$t(H) = \iint\limits_H 1\,dx\,dy$$

kettős integrállal számítjuk ki az integráltranszformációra vonatkozó képlet alapján.

Most a feladathoz „illeszkedően" az (u,v) „új" változókat a következőképpen vezetjük be:

$$x\,y = u \ \ (1\le u\le 4) \quad \text{és} \quad y = v\,x \ \ (1\le v\le 3),$$

azaz az

$$\begin{aligned} x &= g_1(u,v) = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y &= g_2(u,v) = \sqrt{u\,v} \end{aligned} \qquad \big((u,v)\in(1,4)\times(1,3) := U\big)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor a $g=(g_1,g_2) : U\to \operatorname{int} H$ függvény folytonosan deriválható bijekció és

$$\det g'(u,v) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Így

$$\underline{\underline{t(H)}} = \iint\limits_H 1\,dx\,dy = \iint\limits_U 1\cdot\big|\det g'(u,v)\big|\,du\,dv = \int_1^4\int_1^3 \frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

$$4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_1^3 \frac{1}{v}\,dv = 2\cdot\big[\ln v\big]_{v=1}^{v=3} = 2\cdot\big(\ln 3 - \ln 1\big) = \underline{\underline{2\,\ln 3}}. \ \blacksquare$$

5. példa. *Határozzuk meg a $z = 1-x^2-y^2$ egyenletű felület (forgásparaboloid) és az (x,y) sík által határolt korlátos térrész térfogatát.*

Megoldás. Legyen

$$f(x,y) := 1-x^2-y^2 \quad \Big(H := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \big|\ x^2+y^2\le 1\big\}\Big).$$

A

$$T := \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \big|\ (x,y)\in H,\ 0\le z\le f(x,y)\big\}\subset\mathbb{R}^3$$

térrészről van szó.

Mivel $f\in C(H)$, ezért $f\in R(H)$, következésképpen T-nek van térfogata, és az a

$$V(T) = \iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy$$

kettős integrállal egyenlő.

$V(T)$-t polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képletek alapján

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big),$$

$$V(T) = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} f\big(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Így

$$V(T) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (r-r^3)\,dr\right)d\varphi = 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

A kérdezett térfogat tehát $\underline{\underline{V(T) = \pi/2}}$. ■

6. példa. *Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát.*

Megoldás. Legyen $R > 0$ adott valós szám és

$$f(x,y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad \Big(H_R := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \big|\ \sqrt{x^2+y^2}\le R\big\}\Big).$$

Az f függvény grafikonja az origó középpontú R sugarú gömb felső féltérbe eső felülete; az ez alatti térrész pedig a félgömb. Mivel $f \in C\big(H_R\big)$, ezért $f \in R\big(H_R\big)$. Így a félgömbnek van térfogata, és az egyenlő az alábbi kettős integrállal:

$$\iint_{H_R} f = \iint_{H_R} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{H_R} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Ezt az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big)$$

polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A megismert képlet alapján

$$\iint_{H_R} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\big(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi,$$

és ez utóbbi integrált szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\big(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,d\varphi\right)dr = 2\pi\int_0^R r\cdot\sqrt{R^2-r^2}\,dr = 2\pi\cdot\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{2R^3\pi}{3}.$$

Az R sugarú gömb térfogata tehát $\underline{\underline{4R^3\pi/3}}$. ■

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a gömb (forgástest) térfogatát a

$$\pi \cdot \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \, dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

7. példa. *Legyenek a, b és c pozitív valós paraméterek. Határozzuk meg az*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoiddal határolt térrész térfogatát.

Megoldás. Szimmetria okok miatt elég a test (pl.) első térnyolcadba eső részének a térfogatát kiszámolni.

Az ellipszoid egyenletéből $z > 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Legyen

$$f(x, y) := c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$
$$\Big((x, y) \in H := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\Big\}\Big).$$

Mivel $f \in R(H)$, ezért a szóban forgó testnek van térfogata, és az egyenlő az

$$\iint_H f(x, y) \, dx \, dy$$

számmal.

Ennek a kettős integrálnak a kiszámolásához (u, v) „új” változókat vezetünk be az alábbi módon:

$$\begin{aligned} x &= g_1(u, v) = a\ u \cos v \\ y &= g_2(u, v) = b\ u \sin v \end{aligned} \qquad \Big((u, v) \in (0, 1) \times (0, \tfrac{\pi}{2}) =: U\Big).$$

Ekkor a $g := (g_1, g_2) : U \to \operatorname{int} H$ függvény folytonosan deriválható bijekció és

$$\det g'(u, v) = \det \begin{bmatrix} a \cos v & -a\ u \sin v \\ b \sin v & b\, u \cos v \end{bmatrix} = a\, b\, u.$$

Így

$$\iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy = c\iint\limits_U \sqrt{1-u^2}\cdot a\,b\,u\,dx\,dy = a\,b\,c\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2} u\cdot\sqrt{1-u^2}\,du\,dv =$$

$$= a\,b\,c\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\big(-\frac{1}{2}\big)\int\limits_0^1 (-2\,u)\cdot\sqrt{1-u^2}\,du = -a\,b\,c\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\Big[\frac{(1-u^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_0^1 =$$

$$= a\,b\,c\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{a\,b\,c}{3}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Az ellipszoid térfogata tehát $V = 8\cdot\dfrac{a\,b\,c}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \underline{\underline{\dfrac{4\,a\,b\,c}{3}\cdot\pi}}$. ∎

8. példa. *Jelöljük H_R-rel az origó középpontú R sugarú zárt körlapot. Számítsuk ki az*

$$I_R := \iint\limits_{H_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

kettős integrált.

Megoldás. Legyen $R>0$ adott valós szám és

$$f(x,y) := e^{-x^2-y^2}\qquad \Big(H_R := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; \sqrt{x^2+y^2}\le R\big\}\Big).$$

Mivel $f\in C\big(H_R\big)$, ezért $f\in R\big(H_R\big)$.

Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi\big)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Azt kapjuk, hogy

$$I_R = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\big(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R\left(\int\limits_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi\right)dr = 2\pi\int\limits_0^R r\cdot e^{-r^2}\,dr = 2\pi\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \pi\cdot\Big(1-e^{-R^2}\Big).$$

Így

$$\underline{\underline{\iint\limits_{H_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi\cdot\Big(1-e^{-R^2}\Big)}}.\ ∎$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy H_R (pl.) az x tengelyre nézve normáltartomány. Az integrál kiszámolásához azonban a megismert képletet most nem tudjuk használni, mert az e^{-y^2} $(y \in \mathbb{R})$ függvény primitív függvénye (ez létezik, mert a függvény folytonos) nem elemi függvény, következésképpen a „belső” integrál kiszámolásához a Newton–Leibniz-tételt nem lehet alkalmazni.

9. példa. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Megoldás. Az előző példa jelöléseit és eredményét használjuk.

Mivel $[-R/2, R/2]^2 \subset H_R \subset [-R, R]^2$ és az f függvény mindenütt pozitív, ezért

$$\iint\limits_{[-R/2,R/2]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint\limits_{H_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint\limits_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Mivel

$$\iint\limits_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \quad \text{és} \quad \iint\limits_{[-R/2,R/2]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-R/2}^{R/2} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

ezért

$$(*)\qquad \begin{aligned} \iint\limits_{[-R/2,R/2]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \left(\int_{-R/2}^{R/2} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \\ &\le \pi\cdot\left(1-e^{-R^2}\right) \le \\ \le \iint\limits_{[-R/2,R/2]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \left(\int_{-R/2}^{R/2} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \end{aligned}$$

adódik minden $R > 0$-ra. Tudjuk, hogy az $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ improprius integrál konvergens. Ezért $(*)$-ban R-rel végtelenhez tartva azt kapjuk, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \pi \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

tehát

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \blacksquare$$