Numerikus módszerek 2B.

10. előadás: Hilbert térbeli approximáció

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. november 19.

Tartalomjegyzék

Definíció: Hilbert tér

A $(H, \langle , \rangle)$ *Hilbert tér*, ha

- H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és

Definíció: Hilbert tér

A $(H, \langle , \rangle)$ *Hilbert tér*, ha

- H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és
- értelmezett egy skalárisszorzat a térben.

Definíció: Hilbert tér

A $(H, \langle , \rangle)$ *Hilbert tér*, ha

- H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és
- értelmezett egy skalárisszorzat a térben.
- A skaláris szorzatból természetes módon definiálható a tér normája: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Definíció: Hilbert tér

A $(H, \langle , \rangle)$ *Hilbert tér*, ha

- H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és
- értelmezett egy skalárisszorzat a térben.
- A skaláris szorzatból természetes módon definiálható a tér normája: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
- Erre a normára nézve *teljes a tér*, ez azt jelenti, hogy minden H-beli Cauchy-sorozat konvergens.

Definíció: Hilbert tér

A $(H, \langle , \rangle)$ *Hilbert tér*, ha

- H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és
- értelmezett egy skalárisszorzat a térben.
- A skaláris szorzatból természetes módon definiálható a tér normája: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Erre a normára nézve *teljes a tér*, ez azt jelenti, hogy minden H-beli Cauchy-sorozat konvergens.

Megjegyzés:

Definíció: Hilbert tér

A $(H, \langle , \rangle)$ *Hilbert tér*, ha

- H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és
- értelmezett egy skalárisszorzat a térben.
- A skaláris szorzatból természetes módon definiálható a tér normája: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Erre a normára nézve *teljes a tér*, ez azt jelenti, hogy minden H-beli Cauchy-sorozat konvergens.

Megjegyzés:

- A Hilbert tér egy teljes euklideszi tér.

Definíció: Hilbert tér

A $(H, \langle , \rangle)$ *Hilbert tér*, ha

- H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és
- értelmezett egy skalárisszorzat a térben.
- A skaláris szorzatból természetes módon definiálható a tér normája: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.
- Erre a normára nézve *teljes a tér*, ez azt jelenti, hogy minden H-beli Cauchy-sorozat konvergens.

Megjegyzés:

- A Hilbert tér egy teljes euklideszi tér.
- Minden Hilbert térben érvényes a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, a Bessel-egyenlőtlenség és Pitagorasz-tétele.

Példák Hilbert térre:

- $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ Hilbert tér, ahol

$$f, g \in \mathbb{R}^n : \quad \langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i .$$

Példák Hilbert térre:

- $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ Hilbert tér, ahol
$$f, g \in \mathbb{R}^n : \quad \langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i .$$
- $(L_{2,w}[a; b], \langle , \rangle_w)$ Hilbert tér, ahol
$w : [a; b] \to \mathbb{R}$, $w \geq 0$ súlyfüggvény, melyre $\int_a^b w < \infty$.
$L_{2,w}[a; b] := \{f : [a; b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2 w < \infty\}$ és
$$f, g \in L_{2,w}[a; b] : \quad \langle f, g \rangle := \int_a^b fgw$$

Tétel: Hilbert térbeli approximáció

Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\, f' \in H' : \quad \|f - f'\| = \inf\{\|f - h'\| : \ h' \in H'\}$$

$$\text{és} \ \ f - f' \perp H' \quad (\text{azaz} \ \langle f - f', h' \rangle = 0 \ \ \forall\, h' \in H').$$

Tétel: Hilbert térbeli approximáció

Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\ f' \in H' : \quad \|f - f'\| = \inf\{\|f - h'\| : \ h' \in H'\}$$

$$\text{és} \ \ f - f' \perp H' \quad (\text{azaz} \ \langle f - f', h' \rangle = 0 \ \ \forall\, h' \in H').$$

Nem biz.

Tétel: Hilbert térbeli approximáció

Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\, f' \in H' : \quad \|f - f'\| = \inf\{\|f - h'\| : \; h' \in H'\}$$

$$\text{és } \; f - f' \perp H' \quad (\text{azaz } \langle f - f', h' \rangle = 0 \;\; \forall\, h' \in H').$$

Nem biz.

Megjegyzés:

- Minden véges dimenziós altér zárt.
- $M \subset H$, $M \neq \emptyset$ altér, akkor

$$M^{\perp} := \{f \in H |\; f \perp g, \;\; \forall\, g \in M\}$$

az M ortogonális kiegészítő altere (zárt altér).

Tétel: Átfogalmazás

Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\ f' \in H' \text{ és } f'' \in (H')^{\perp} : \quad f = f' + f''.$$

Tétel: Átfogalmazás

Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\ f' \in H' \text{ és } f'' \in (H')^{\perp}: \quad f = f' + f''.$$

Alkalmazás véges dimenziós altérre: $(n = \dim H' < \infty)$

$$H' = \mathrm{Span}\,(g_1, \ldots, g_n)$$

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $f' = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ alakban keressük.

Tétel: Átfogalmazás

Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\ f' \in H' \text{ és } f'' \in (H')^{\perp} : \quad f = f' + f''.$$

Alkalmazás véges dimenziós altérre: $(n = \dim H' < \infty)$

$$H' = \operatorname{Span}(g_1, \ldots, g_n)$$

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $f' = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ alakban keressük.

$$f - f' \perp H' \quad \Leftrightarrow \quad f - f' \perp g_j \ \ (j = 1, \ldots, n)$$

$j = 1, \ldots, n$-re:

$$\begin{aligned} \langle f - f', g_j \rangle &= 0 \\ \langle f', g_j \rangle &= \langle f, g_j \rangle \\ \sum_{i=1}^{n} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i g_i, g_j \right\rangle &= \langle f, g_j \rangle. \end{aligned}$$

$j = 1, \ldots, n$-re:

$$
\begin{aligned}
\langle f - f', g_j \rangle &= 0 \\
\langle f', g_j \rangle &= \langle f, g_j \rangle \\
\sum_{i=1}^{n} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i g_i, g_j \right\rangle &= \langle f, g_j \rangle.
\end{aligned}
$$

$n \times n$-es Gram mátrixú LER-t kaptunk: $\quad Gc = b,$

ahol $G = (\langle g_i, g_j \rangle)_{j,i=1}^{n}, \;\; c = (c_i)_{i=1}^{n}, b = (\langle f, g_j \rangle)_{j=1}^{n}.$

$j = 1, \ldots, n$-re:

$$\begin{aligned} \langle f - f', g_j \rangle &= 0 \\ \langle f', g_j \rangle &= \langle f, g_j \rangle \\ \sum_{i=1}^{n} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i g_i, g_j \right\rangle &= \langle f, g_j \rangle. \end{aligned}$$

$n \times n$-es Gram mátrixú LER-t kaptunk: $\quad Gc = b$,

ahol $G = (\langle g_i, g_j \rangle)_{j,i=1}^{n}, \;\; c = (c_i)_{i=1}^{n}, b = (\langle f, g_j \rangle)_{j=1}^{n}$.

Állítás:

$g_1, \ldots, g_n$ lineárisan független $\quad \Leftrightarrow \quad$ G szimm. és poz. def.

$j = 1, \ldots, n$-re:

$$\begin{aligned} \langle f - f', g_j \rangle &= 0 \\ \langle f', g_j \rangle &= \langle f, g_j \rangle \\ \sum_{i=1}^{n} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i g_i, g_j \right\rangle &= \langle f, g_j \rangle. \end{aligned}$$

$n \times n$-es Gram mátrixú LER-t kaptunk: $\quad Gc = b$,

ahol $G = (\langle g_i, g_j \rangle)_{j,i=1}^{n}$, $c = (c_i)_{i=1}^{n}$, $b = (\langle f, g_j \rangle)_{j=1}^{n}$.

Állítás:

$g_1, \ldots, g_n$ lineárisan független $\quad \Leftrightarrow \quad$ G szimm. és poz. def.

Nem biz.

Köv.: $\exists!\ c$, melyre $Gc = b$.

Köv.: $\exists!\ c$, melyre $Gc = b$.

Állítás: A legjobban közelítő elem távolsága

$$d^2 := \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c$$

Köv.: $\exists!\, c$, melyre $Gc = b$.

Állítás: A legjobban közelítő elem távolsága

$$d^2 := \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c$$

Biz.: $d^2 := \|f - f'\|^2 = \langle f - f', f - f' \rangle =$

$$= \langle f, f - f' \rangle - \underbrace{\langle f', f - f' \rangle}_{=0} = \|f\|^2 - \langle f, f' \rangle =$$

$$= \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \right\rangle = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\langle f, g_i \rangle}_{=b_i} =$$

$$= \|f\|^2 - b^T c.$$

Speciális esetek:

1. Ha $g_1, \ldots, g_n$ ortogonális rendszer (OGR), akkor

$$G = \operatorname{diag}\left(\|g_1\|^2, \ldots, \|g_n\|^2\right), \quad c_i = \frac{\langle f, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle},$$

így a legjobban közelítő elem

$$f' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle f, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle} g_i .$$

Speciális esetek:

1. Ha $g_1, \ldots, g_n$ ortogonális rendszer (OGR), akkor

$$G = \operatorname{diag}\left(\|g_1\|^2, \ldots, \|g_n\|^2\right), \quad c_i = \frac{\langle f, g_i\rangle}{\langle g_i, g_i\rangle},$$

   így a legjobban közelítő elem

$$f' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle f, g_i\rangle}{\langle g_i, g_i\rangle}\, g_i.$$

2. Ha $g_1, \ldots, g_n$ ortonormált rendszer (ONR), akkor $G = I$, $c_i = \langle f, g_i\rangle$, így a legjobban közelítő elem

$$f' = \sum_{i=1}^{n} \langle f, g_i\rangle\, g_i.$$

Ortonormált rendszer esetén a távolság képlete:

$$d^2 = \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle f, g_i \rangle^2 \geq 0.$$

Ortonormált rendszer esetén a távolság képlete:

$$d^2 = \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle f, g_i \rangle^2 \geq 0.$$

Innen átrendezéssel kapható a Bessel-egyenlőtlenség:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \langle f, g_i \rangle^2.$$

Alkalmazzuk az elméletet a legkisebb négyzetek módszerének feladatára:

$$H = \mathbb{R}^N, \;\; f = (y_k)_{k=1}^N \in H, \;\; H' = \mathrm{Span}\,(g_0, \ldots, g_n) \subset H,$$

ahol $g_j := ((x_k)^j)_{k=1}^N = \begin{bmatrix} x_1^j & x_2^j & \ldots & x_N^j \end{bmatrix}^T \in H \;\; (j = 0, \ldots, n).$

Alkalmazzuk az elméletet a legkisebb négyzetek módszerének feladatára:

$$H = \mathbb{R}^N, \quad f = (y_k)_{k=1}^N \in H, \quad H' = \operatorname{Span}(g_0, \dots, g_n) \subset H,$$

ahol $g_j := ((x_k)^j)_{k=1}^N = \begin{bmatrix} x_1^j & x_2^j & \dots & x_N^j \end{bmatrix}^T \in H \ \ (j = 0, \dots, n).$

Tehát a bázisunk

$$g_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_1 := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \dots \quad g_n := \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_N^n \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk az elméletet a legkisebb négyzetek módszerének feladatára:

$$H = \mathbb{R}^N, \quad f = (y_k)_{k=1}^N \in H, \quad H' = \mathrm{Span}\,(g_0, \ldots, g_n) \subset H,$$

ahol $g_j := ((x_k)^j)_{k=1}^N = \begin{bmatrix} x_1^j & x_2^j & \ldots & x_N^j \end{bmatrix}^T \in H \;\; (j = 0, \ldots, n)$.

Tehát a bázisunk

$$g_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_1 := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \ldots \quad g_n := \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_N^n \end{bmatrix}.$$

A $Gc = b$ LER-beli skaláris szorzatok

$$\langle g_i, g_j \rangle = \sum_{k=1}^N (x_k)^{i+j}, \quad \langle f, g_i \rangle = \sum_{k=1}^N (x_k)^i y_k.$$

A LER alakja:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}.$$

A LER alakja:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}.$$

Látjuk, hogy a Gauss-féle normálegyenleteket kaptuk, az approximációs feladat megoldása:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j.$$

Tekintsük az $(L_{2,w}[a;b], \langle , \rangle_w)$ Hilbert teret.

Tekintsük az $(L_{2,w}[a;b], \langle , \rangle_w)$ Hilbert teret.

Definíció: Ortogonális rendszer

A $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ *rendszer ortogonális*, ha $\langle p_i, p_j \rangle_w = 0$, $i \neq j$.

Tekintsük az $(L_{2,w}[a;b], \langle , \rangle_w)$ Hilbert teret.

Definíció: Ortogonális rendszer

A $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ *rendszer ortogonális*, ha $\langle p_i, p_j \rangle_w = 0$, $i \neq j$.

Induljunk ki az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ hatványfüggvény rendszerből és állítsuk elő Gram–Schmidt-ortogonalizációval az 1 főegyütthatós $\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n$ ortogonális polinomokat.

Tekintsük az $(L_{2,w}[a;b], \langle , \rangle_w)$ Hilbert teret.

Definíció: Ortogonális rendszer

A $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ *rendszer ortogonális*, ha $\langle p_i, p_j\rangle_w = 0$, $i \neq j$.

Induljunk ki az $1, x, x^2, \dots, x^n$ hatványfüggvény rendszerből és állítsuk elő Gram–Schmidt-ortogonalizációval az 1 főegyütthatós $\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \dots, \widetilde{p}_n$ ortogonális polinomokat.

$$\widetilde{p}_0(x) \equiv 1$$

$$\widetilde{p}_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(k)} \widetilde{p}_j(x), \quad \text{ahol} \quad c_j^{(k)} = \frac{\langle x^k, \widetilde{p}_j(x)\rangle_w}{\langle \widetilde{p}_j, \widetilde{p}_j\rangle_w}.$$

Keressük a következő approximációs feladat megoldását:

$H := L_{2,w}[a;b], \;\; f := \widetilde{p}_n \in H, \;\; H' = \text{Span}\left(\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-1}\right)$ és keressük az altérbeli legjobb közelítést illetve a legkisebb távolságot.

Keressük a következő approximációs feladat megoldását:

$H := L_{2,w}[a;b]$, $f := \widetilde{p}_n \in H$, $H' = \text{Span}\left(\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-1}\right)$ és keressük az altérbeli legjobb közelítést illetve a legkisebb távolságot.

Tétel: Az ortogonális polinomok approximációs tulajdonsága

$$\min_{\widetilde{p} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{p}\|_w^2 = \min_{\widetilde{p} \in P_n^{(1)}} \left(\int_a^b \widetilde{p}^2 w \right) = \|\widetilde{p}_n\|_w^2$$

Keressük a következő approximációs feladat megoldását:

$H := L_{2,w}[a;b]$, $f := \widetilde{p}_n \in H$, $H' = \mathrm{Span}\,(\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-1})$ és keressük az altérbeli legjobb közelítést illetve a legkisebb távolságot.

Tétel: Az ortogonális polinomok approximációs tulajdonsága

$$\min_{\widetilde{p} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{p}\|_w^2 = \min_{\widetilde{p} \in P_n^{(1)}} \left(\int_a^b \widetilde{p}^2 w \right) = \|\widetilde{p}_n\|_w^2$$

Biz.: Mivel $f = \widetilde{p}_n$, így az approximációs tételből következik, hogy $f' \equiv 0$.

$$f - f' = \widetilde{p}_n - 0 = \widetilde{p}_n \perp H'.$$

Tétel: Az ortogonális polinomok rekurziója

A $(\widetilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$ 1 főegyütthatós polinomrendszerre a következő rekurzió teljesül:

$$\widetilde{p}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \widetilde{p}_0(x) \equiv 1$$
$$\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \cdot \widetilde{p}_n(x) - \beta_n \cdot \widetilde{p}_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{ahol} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle x\widetilde{p}_n(x), \widetilde{p}_n(x)\rangle_w}{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}, \quad \beta_n = \frac{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|_w^2} > 0.$$

Tétel: Az ortogonális polinomok rekurziója

A $(\widetilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$ 1 főegyütthatós polinomrendszerre a következő rekurzió teljesül:

$$\widetilde{p}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \widetilde{p}_0(x) \equiv 1$$
$$\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \cdot \widetilde{p}_n(x) - \beta_n \cdot \widetilde{p}_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{ahol} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle x\widetilde{p}_n(x), \widetilde{p}_n(x)\rangle_w}{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}, \quad \beta_n = \frac{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|_w^2} > 0.$$

Tétel: Az ortogonális polinomok rekurziója

A $(\widetilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$ 1 főegyütthatós polinomrendszerre a következő rekurzió teljesül:

$$\widetilde{p}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \widetilde{p}_0(x) \equiv 1$$
$$\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \cdot \widetilde{p}_n(x) - \beta_n \cdot \widetilde{p}_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{ahol} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle x\widetilde{p}_n(x), \widetilde{p}_n(x)\rangle_w}{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}, \quad \beta_n = \frac{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|_w^2} > 0.$$

Tétel: Az ortogonális polinomok rekurziója

A $(\widetilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$ 1 főegyütthatós polinomrendszerre a következő rekurzió teljesül:

$$\widetilde{p}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \widetilde{p}_0(x) \equiv 1$$
$$\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \cdot \widetilde{p}_n(x) - \beta_n \cdot \widetilde{p}_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{ahol} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle x\widetilde{p}_n(x), \widetilde{p}_n(x)\rangle_w}{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}, \quad \beta_n = \frac{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|_w^2} > 0.$$

Nem biz.

Tétel: Az ortogonális polinomok gyökei

1. $n \geq 1$ esetén a $\widetilde{p}_n$ ortogonális polinomnak n db valós különböző gyöke van $[a; b]$-n.

Tétel: Az ortogonális polinomok gyökei

1. $n \geq 1$ esetén a $\widetilde{p}_n$ ortogonális polinomnak n db valós különböző gyöke van $[a; b]$-n.
2. $\widetilde{p}_{n-1}$ és $\widetilde{p}_n$ gyökei váltakozva helyezkednek el.

Tétel: Az ortogonális polinomok gyökei

1. $n \geq 1$ esetén a $\widetilde{p}_n$ ortogonális polinomnak n db valós különböző gyöke van $[a; b]$-n.
2. $\widetilde{p}_{n-1}$ és $\widetilde{p}_n$ gyökei váltakozva helyezkednek el.

Tétel: Az ortogonális polinomok gyökei

1. $n \geq 1$ esetén a $\widetilde{p}_n$ ortogonális polinomnak n db valós különböző gyöke van $[a; b]$-n.
2. $\widetilde{p}_{n-1}$ és $\widetilde{p}_n$ gyökei váltakozva helyezkednek el.

Nem biz.

Legendre polinom

$[-1;1]$, $w(x) \equiv 1$,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x) \;\; (n = 1, 2, \ldots).$$

Legendre polinom

$[-1;1],\ w(x) \equiv 1,$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$
$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x) \ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Csebisev I.fajú polinom

$[-1;1],\ w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \ \ (x \in [-1;1])$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Csebisev II.fajú polinom

$[-1;1]$, $w(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))} \quad (x \in [-1;1])$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x,$$
$$U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Csebisev II.fajú polinom

$[-1;1]$, $w(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))} \quad (x \in [-1;1])$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x,$$
$$U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Hermite polinom

$(-\infty, +\infty)$, $w(x) = e^{-x^2}$,

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x,$$
$$H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Laguerre polinom

$(0, +\infty)$, $w(x) = e^{-x}$,

$$P_0(x) = 1, \;\; P_1(x) = x - 1,$$
$$P_{n+1}(x) = (x - (2n+1)) \cdot P_n(x) - n^2 \cdot P_{n-1}(x) \;\; (n = 1, 2, \ldots).$$