

# Numerikus módszerek 1.

13. előadás: Polinomokról: gyökök becslése, Horner-algoritmus

Krebsz Anna

ELTE IK

① Becslés polinom gyökeire

② Horner-algoritmus

1 Becslés polinom gyökeire

2 Horner-algoritmus

Vizsgáljunk  $n$ -edfokú polinomokat, melyek alakja:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

## Megjegyzés:

- Akár  $a_i \in \mathbb{C}$  is lehet. . .
- Ha  $a_0 = 0$ , akkor az  $x = 0$  gyök, leoszthatunk  $x$ -szel  $\rightsquigarrow$  egyszerűbb polinomot vizsgálhatunk.
- Ha  $a_n = 0$ , akkor nem is  $n$ -edfokú. . .

## Példa

Vizsgáljuk meg néhány polinom gyökeinek elhelyezkedését.  
Komplex gyökök is szóba jöhetnek.

## **Tétel:** Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére

A  $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$  polinom esetén, ha  $a_0 \neq 0$  és  $a_n \neq 0$ , akkor  $P$  bármely  $x_k$  gyökére:

$$r < |x_k| < R,$$

ahol

$$R = 1 + \frac{\max_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{1 + \frac{\max_{i=1}^n |a_i|}{|a_0|}}.$$

**Megjegyzés:** Ezzel a gyökök elhelyezkedésére egy origó középpontú nyílt körgyűrűt adtunk meg a komplex számsíkon.

**Biz.:**

- ① Megmutatjuk, hogy ha  $|x| \geq R$  ( $x$  a külső körön kívül van), akkor  $|P(x)| > 0$  ( $x$  nem gyöke  $P$ -nek). A becsléshez a kétféle háromszög-egyenlőtlenséget használjuk:

$$|P(x)| \geq |a_n x^n| - |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0|$$

A továbbiakban lefelé akarunk becsülni, így a kivonandó összeget növelnünk kell:

$$\begin{aligned} |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| &\leq |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + \dots + |a_0| \leq \\ &\leq \left( \max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot (|x|^{n-1} + \dots + 1) = \left( \max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < \\ &< \left( \max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \frac{|x|^n}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

**Biz. folyt:** Folytassuk  $|P(x)|$  becslését és vizsgáljuk meg, mikor pozitív.

$$|P(x)| > |a_n| \cdot |x|^n - \left( \max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \frac{|x|^n}{|x| - 1} \geq 0$$

Rendezzük át az egyenlőtlenséget, szorozzunk be  $|x| - 1 > 0$ -val és osszuk le  $|a_n| \cdot |x|^n$ -vel

$$|P(x)| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \cdot |x|^n \geq \left( \max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \frac{|x|^n}{|x| - 1} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| - 1 \geq \left( \max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \frac{|x|^n}{|a_n| \cdot |x|^n} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| \geq 1 + \frac{\max_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} =: R.$$



**Biz. folyt:** Azt kaptuk, hogy ha  $|x| \geq R$ , akkor  $|P(x)| > 0$ , vagyis  $x$  nem gyök. Ezzel beláttuk a tétel első felét.

- ② Az alsó becslést úgy nyerjük, hogy az imént belátott becslést alkalmazzuk  $P(x)$  reciprok-polinomjára.

Vezessük be az  $y := \frac{1}{x}$  új változót ( $x \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} P(x) &= P\left(\frac{1}{y}\right) = a_n \left(\frac{1}{y}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{1}{y}\right) + a_0 = \\ &= \left(\frac{1}{y}\right)^n \cdot \underbrace{(a_n + a_{n-1}y + \dots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n)}_{Q(y)} = x^n \cdot Q\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

A  $Q$  polinomot a  $P$  reciprok-polinomjának nevezzük. Ekkor

$$P(x_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0,$$

vagyis  $Q$  gyökei  $P$  gyökeinek reciprokai.

**Biz. folyt:** Alkalmazzuk a már belátott becslésünket  $Q$ -ra:

$$\frac{1}{|x_k|} < 1 + \frac{\max_{i=1}^n |a_i|}{|a_0|} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad |x_k| > r.$$



**Megjegyzés:** Akár komplex együtthatós polinomokat is megengedhetünk a tételben, a bizonyítás menetén nem változtat.

① Becslés polinom gyökeire

② Horner-algoritmus

Polinomok és deriváltjaik helyettesítési értékeinek kiszámítására.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \dots$$

Átzárójelezzük:

$$\begin{aligned} P(x) &= \underbrace{(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1)}_{a_1^{(1)}} \cdot x + a_0 = \\ &= \underbrace{((a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2)) \cdot x + a_1}_{a_2^{(1)}} \cdot x + a_0 = \\ &= \dots = \underbrace{(\dots (a_n x + a_{n-1})) \cdot x + \dots}_{a_{n-1}^{(1)}} \cdot x + a_0. \end{aligned}$$

**Megj.:** Más elnevezés: Horner-módszer, Horner-elrendezés.

## Definíció: Horner-algoritmus

A  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  polinom adott  $\xi$  helyen vett helyettesítési értéke számolható a következő módon:

$$\textcircled{1} \ a_n^{(1)} := a_n,$$

$$\textcircled{2} \ a_k^{(1)} := a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (k = n-1, \dots, 1, 0),$$

akkor  $P(\xi) = a_0^{(1)}$ .

## Állítás: A Horner-algoritmus műveletigénye

Egy  $n$ -edfokú polinom adott helyen felvett értéke kiszámítható  $n$  szorzás és  $n$  összeadás által, azaz  $\mathcal{O}(n)$  művelettel.

Biz.: ✓



Táblázat  $P(\xi)$  kézi számolásához:

$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_k$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$\xi$	$\xi \cdot a_n^{(1)}$	$\xi \cdot a_{n-1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_2^{(1)}$	$\xi \cdot a_1^{(1)}$
$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$\dots$	$a_k^{(1)}$	$\dots$	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$

## Példa

Számítsuk ki a  $P(x) = x^5 + 6x^4 - x^3 + 3x^2 - 15x - 7$  polinom helyettesítési értékét a  $\xi = 2$  helyen.

1	6	-1	3	-15	-7
2	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 8$	$2 \cdot 15$	$2 \cdot 33$	$2 \cdot 51$
1	8	15	33	51	95

Tehát  $P(2) = 95$ , amihez összesen 10 műveletet végeztünk.

**Állítás:** Horner-algoritmus és a derivált

A  $P$  polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \overbrace{(a_1^{(1)} + \dots + a_n^{(1)} x^{n-1})}^{P_1(x)},$$

ahol az  $a_i^{(1)}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) értékeket a Horner-algoritmus adja.  
Továbbá

$$P'(\xi) = P_1(\xi) = a_1^{(2)}.$$

**Megj.:**  $\sim$ Taylor-polinom  $\xi$  körül.



$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \underbrace{(a_1^{(1)} + \dots + a_k^{(1)} x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)} x^k + \dots + a_n^{(1)} x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

**Biz.:**

- ①  $P$ -ben  $x^k$  ( $k = 0, \dots, n - 1$ ) együtthatója
  - külön:  $x^n$  együtthatói a két oldalon:  $a_n = a_n^{(1)}$ , ✓
  - bal oldalon definíció szerint:  $a_k$ ,
  - a fenti alak szerint a jobb oldalon:  $a_k^{(1)} - \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$ .
  - A Horner-algoritmus szerint:  $a_k^{(1)} = a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$ . ✓
- ②  $P$  deriváltja a fenti alakból (összeg, szorzat):

$$P'(x) = 1 \cdot P_1(x) + (x - \xi) \cdot P_1'(x) \quad \Rightarrow \quad P'(\xi) = P_1(\xi).$$

**Biz. folyt:**  $P_1(\xi)$  kiszámítása ugyanúgy, Horner-algoritmussal,  
 $P_1$  együtthatói:  $a_n^{(1)}, \dots, a_1^{(1)}$ .

①  $a_n^{(2)} := a_n^{(1)},$

②  $a_k^{(2)} := a_k^{(1)} + \xi \cdot a_{k+1}^{(2)} \quad (k = n-1, \dots, 1),$

ekkor  $P_1(\xi) = P'(\xi) = a_1^{(2)}.$



Folytatjuk a táblázatot:

$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$\xi$	$\xi \cdot a_n^{(1)}$	$\xi \cdot a_{n-1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_2^{(1)}$	$\xi \cdot a_1^{(1)}$
$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$\dots$	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)} = P(\xi)$
$\xi$	$\xi \cdot a_n^{(1)}$	$\xi \cdot a_{n-1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_2^{(1)}$	
$a_n^{(2)}$	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	$\dots$	$a_1^{(2)} = P_1(\xi)$	

Tovább is folytathatjuk...

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot P_1(x)$$

**Állítás:** Horner-algoritmus és a magasabbrendű deriváltak

A  $P$  polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x - \xi) + a_2^{(3)}(x - \xi)^2 + \cdots + a_n^{(n+1)}(x - \xi)^n,$$

ahol az  $a_i^{(j+1)}$  ( $j = 0, \dots, n; i = j, \dots, n$ ) értékeket a Horner-módszer adja. Továbbá:

$$\frac{P^{(j)}(\xi)}{j!} = P_j(\xi) = a_j^{(j+1)},$$

ahol  $P_j(x) = a_j^{(j)} + \cdots + a_n^{(j)}x^{n-j}$ .

**Biz.:** indukcióval, nem kell.

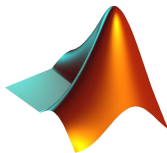
**Megjegyzés:** Ha a táblázatot addig folytatjuk, míg csak 1 elemet kapunk, akkor az átlóban találjuk a  $P$  polinom  $\xi$  körüli Taylor-polinomjának együtthatóit.

## Példa

Határozzuk meg a  $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$  polinom  $\xi = 1$  körüli Taylor-polinomját a Horner-módszer segítségével!

$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1 =$   
 $= 1 \cdot (x-1)^4 + 2 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1)^2 + 3 \cdot (x-1) + 2$   
 az 1 körüli Taylor-polinomot kaptuk.

1	-2	3	-1	1
1	1 · 1	1 · (-1)	1 · 2	1 · 1
1	-1	2	1	2 = P(1)
1	1 · 1	1 · 0	1 · 2	
1	0	2	3 = P'(1)	
1	1 · 1	1 · 1		
1	1	3 = $\frac{P''(1)}{2}$		
1	1 · 1			
1	2 = $\frac{P'''(1)}{3!}$			



- 1 Véletlen (valós és komplex) együtthatós magasabbfokú ( $n = 5, 10, 50, 100$ ) polinomok gyökeinek és a rájuk adott korlátoknak szemléltetése.