

Számításelmélet

10. előadás

előadó: Kolonits Gábor
kolomax@inf.elte.hu

3 színezhetőség

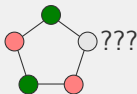
Definíció

Legyen $k \geq 1$ egész szám. Egy (irányítatlan) gráf **k -színezhető**, ha kiszínezhetők a csúcsai k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsnak a színe különböző.

Formálisan: $G = (V, E)$ k -színezhető, ha $\exists f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ leképezés, melyre $\forall x, y \in V : f(x) = f(y) \Rightarrow \{x, y\} \notin E$.

1. Példa: Jelölje K_n a teljes n csúcsú gráfot. Ekkor K_n k -színezhető minden $k \geq n$ -re, de nem $(n - 1)$ -színezhető (semelyik 2 csúcs sem lehet azonos színű).

2. Példa: Egy 5 csúcsú kör 3-színezhető, de nem 2-színezhető.



3 színezhetőség

$k\text{SZÍNEZÉS} := \{\langle G \rangle \mid G \text{ } k\text{-színezhető}\}$

Itt $\langle G \rangle$ a G gráf kódját jelöli $\{0, 1\}$ felett, mondjuk a szomszédsági mátrixa sorfolytonosan.

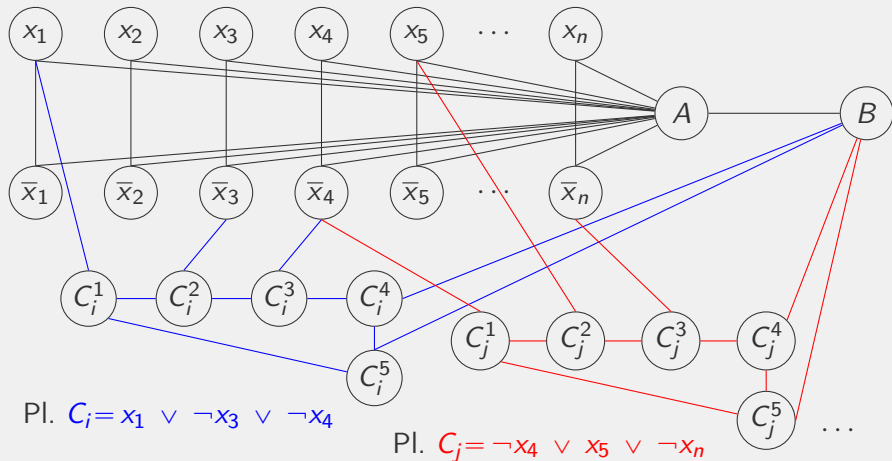
Tétel

3SZÍNEZÉS NP-teljes.

- ▶ $k\text{SZÍNEZÉS}$ NP-beli: egy $\langle G \rangle$ inputra az M NTG egy számítási ága állítson elő egy $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ k -színezést. Mind egy konkrét k -színezés előállítása, mind pedig a konkrét színezés helyességének ellenőrzése polinom időben megtehető. M egy számítása végződjön q_i -ben, ha az egy jó k -színezés.
 G k -színezhető $\Leftrightarrow \exists$ jó k -színezése $\Leftrightarrow M$ elfogadja $\langle G \rangle$ -t.
- ▶ $3\text{SAT} \leq_p 3\text{SZÍNEZÉS}$: elegendő minden φ 3KNF formulához polinom időben elkészíteni egy G_φ gráfot úgy, hogy φ kielégíthető $\Leftrightarrow G_\varphi$ 3-színezhető.

3 színezhetőség

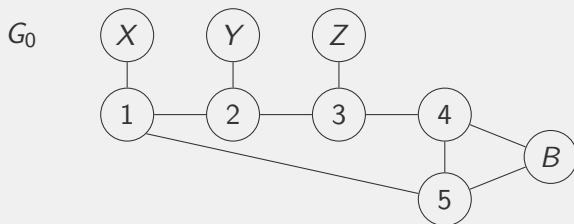
Legyenek x_1, \dots, x_n a φ -ben előforduló ítéletváltozók. Továbbá $\varphi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$, azaz C_1, \dots, C_m φ pontosan 3 literálból álló klózai. G_φ konstrukciója:



Minden klózhoz tartozik egy ötszög a fenti módon.

3 színezhetőség

Lemma: Legyen G_0 az alábbi gráf és tegyük fel, hogy az X, Y, Z, B csúcsokat 2 színnel kiszíneztük. Akkor és csak akkor létezik ehhez a parciális színezéshez az egész G_0 -ra kiterjeszthető 3-színezés, ha X, Y, Z, B nem mind egyszínű.



A lemma bizonyítása:

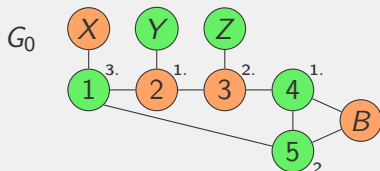
- ▶ Ha X, Y, Z, B egyszínű, akkor a maradék 2 színnel kéne az ötszöget kiszínezni, amit nem lehet.

3 színezhetőség

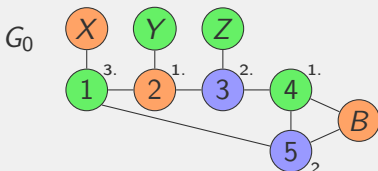
- Ha X, Y, Z, B nem egyszínű, akkor megadható egy színezés.
 1. lépés: első körben 2 színt használunk, 1,2,3,4,5-öt színezzük az $\{X, Y, Z, B\}$ -beli szomszédjával ellentétes színűre.Ez persze még nem jó, lehetnek azonos színű szomszédok.
 2. lépés: bevetjük a 3. színt: ha 1,2,3,4,5 között van valahány egymás utáni azonos színű csúcs (az óramutató járása szerint és ciklikusan), akkor ezen egymás utáni azonos színű csúcsok közül minden párosadikat színezzük át a 3. színre.

Példa:

1. lépés utáni színezés



2. lépés utáni színezés



3 színezhetőség

A visszavezetés bizonyítása:

- ▶ Tegyük fel hogy φ kielégíthető, ekkor meg kell adnunk G_φ egy 3-színezését. Legyenek a színek piros, zöld és kék. Ha x_i igaz, akkor legyen az x_i csúcs zöld, az \bar{x}_i csúcs piros. Ha hamis, akkor épp fordítva. A legyen kék és B legyen piros. Mivel minden klóz ki van elégítve, így minden ötszöghöz van zöld (az igaz literál) és piros szomszéd (B) is, így a lemma miatt a színezés minden ötszögre kiterjeszthető.
- ▶ Tegyük fel most, hogy G_φ jól ki van színezve 3 színnel. Feltehető, hogy A kék. Mivel $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ mind A szomszédai, így egyikük se lehet kék. Továbbá az (x_i, \bar{x}_i) párok össze vannak kötve, így minden párban pontosan egy piros és pont egy zöld csúcs van. Ámnmfth. B piros (a zöld eset analóg). Mivel az ötszögek ki vannak színezve, ezért a lemma miatt minden ötszögnek van zöld szomszédja. Az " $x_i := \text{igaz} \Leftrightarrow x_i$ csúcs zöld" interpretáció tehát kielégíti φ -t.

2 színezhetőség

Beláttuk tehát, hogy $\varphi \mapsto G_\varphi$ visszavezetés. Mivel φ ismeretében G_φ mérete és elkészítésének ideje az input (φ) méretének polinomja, ezért a visszavezetés polinom idejű.

Mivel 3SAT NP-teljes, korábbi tételünk miatt 3SZÍNEZÉS is az. \square

A 2-színezhető gráfok éppen a páros gráfok (a páros gráf két csúcsosztálya a két színosztály). Lineáris időben eldönthető, hogy egy gráf páros-e:

Tétel

2SZÍNEZÉS $\in P$

Bizonyítás:

Indítsunk egy szélességi bejárást G egy tetszőleges x csúcsából. Ez az x -szel egy komponensben lévő csúcsokat szintekre particionálja az x -től való távolságuk (legrövidebb út hossza) szerint. Ha a gráf nem összefüggő, akkor minden komponensre végezzük ezt el. Az algoritmus $O(|V| + |E|)$ idejű.

2 színezhetőség

Állítás: G 2-színezhető \Leftrightarrow a szélességi bejárás G semelyik komponensében se talál élt két azonos szintű csúcs között.

Az állítás bizonyítása:

(\Leftarrow) Legyenek a páros szinteken lévő csúcsok kékek, a páratlan szinteken lévők pirosak. Ekkor nincs két azonos színű csúcs között él. A felétel és a színezés miatt ilyen csak úgy lehetne ha azonos komponensben legalább 2 szintkülönbségű csúcsokról lenne szó. Azonban irányítatlan gráfok szélességi bejárása során ilyen nincs.

(\Rightarrow) Ha van két azonos szintű x és y csúcs között él, akkor legyen a k szinttel feljebb levő z az a csúcs, ami x és y legnagyobb szintszámú (azaz legelső) közös őse a szélességi feszítőfában. Ekkor kaptunk egy x, y, z -t tartalmazó $2k + 1$ hosszú kört, hiszen z elsősége miatt a szélességi feszítőfában a $z \rightsquigarrow x$ és $z \rightsquigarrow y$ utaknak z -n kívül nem lehet közös pontja. Így G nem 2-színezhető, mivel páratlan hosszú körök nyilván nem 2-színezhetők.

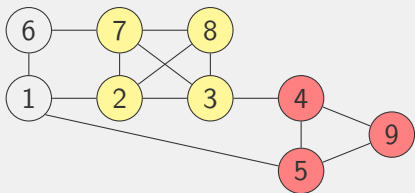
Az állítás feltételét a szélességi bejárás menet közben ellenőrizheti. \square

Definíció

Egy G egyszerű, irányítatlan gráf egy teljes részgráfját **klikknek** nevezzük.

$\text{KLIKK} := \{ \langle G, k \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű klikkje} \}$

Példa:



$\{2, 3, 7, 8\}$ és $\{4, 5, 9\}$ klikk. $\{1, 2, 6, 7\}$ nem klikk.

Észrevétel: Ha G -nek van k méretű klikkje, akkor bármely kisebb k -ra is van.

Független ponthalmaz

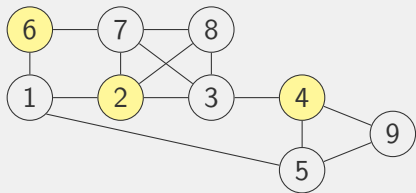
Definíció

Egy G egyszerű, irányítatlan gráf egy üres részgráfját **független ponthalmaznak** mondjuk.

FÜGGETLEN PONTNALMAZ:=

$\{\langle G, k \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű független ponthalmaza}\}$

Példa:



$\{2, 6, 4\}$ független. $\{1, 7, 3, 9\}$ nem független a $\{3, 7\}$ él miatt.

Észrevétel: Ha G -nek van k méretű független ponthalmaza, akkor bármely kisebb k -ra is van.

Lefogó ponthalmaz

Definíció

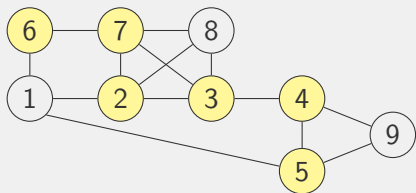
Legyen $S \subseteq V(G)$ és $E \in E(G)$. Ha $S \cap E \neq \emptyset$, akkor a csúcshalmaz **lefogja** E -t. Ha S minden $E \in E(G)$ élt lefog, akkor S egy **lefogó ponthalmaz**.

Megjegyzés: A fenti fogalom **csúcsfedés** néven is ismeretes.

LEFOGÓ PONTTHALMAZ:=

$\{\langle G, k \rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű lefogó ponthalmaza}\}$

Példa:



$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
lefogó ponthalmaz.

Észrevétel: Ha G -nek van k méretű lefogó ponthalmaza, akkor bármely $k \leq k' \leq |V(G)|$ -re is van.

FÜGGETLEN PONTALMAZ

Tétel

KLIKK, FÜGGETLEN PONTALMAZ, LEFOGÓ PONTALMAZ
NP-teljes.

- ▶ Egy NTG egy számítási ágán vizsgálja meg a csúcsoknak egy konkrét, k elemű részhalmazát. Egy k elemű pontalmaz előállítása illetve annak ellenőrzése, hogy ez egy klikk/független pontalmaz/lefogó pontalmaz az input méretének polinomiális függvénye. Tehát mindhárom nyelv NP-ben van.

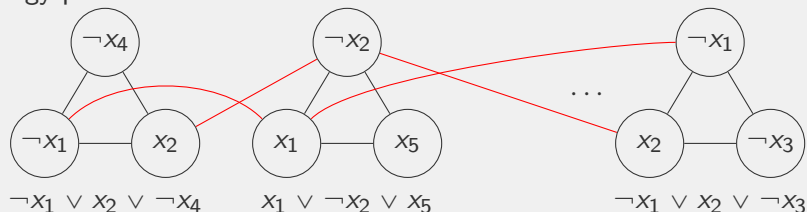
- ▶ $3SAT \leq_p FÜGGETLEN CSÚCSALMAZ$

Kell: $f : \varphi \mapsto (G_\varphi, k)$, φ 3KNF, G_φ -ben van k független csúcs akkor és csak akkor ha φ kielégíthető.

(G_φ, k) konstrukciója: minden egyes $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$ klózhoz vegyünk fel egy a többitől diszjunkt háromszöget, a csúcsokhoz rendeljük hozzá a literálokat. Így m darab klóz esetén $3m$ csúcsot kapunk. Kössük össze éllel ezen felül a komplement párokat is. $k := m$.

FÜGGETLEN PONTHALMAZ

Egy példa:



* Ha φ kielégíthető, akkor minden klózban van kielégített literál, válasszunk klózonként egyet, ezeknek megfelelő csúcsok m elemű független csúcshalmazt alkotnak.

* Ha G_φ -ben van m független csúcs, akkor ez csak úgy lehet, ha háromszögenként 1 van. Vegyünk egy ilyen, ezen csúcsoknak megfelelő literálok között nem lehet komplementens pár, hiszen azok össze vannak kötve. Így a független halmaznak megfelelő, (esetleg csak parciális) interpretáció kielégít minden klózt. Ha nincs minden változó kiértékelve, egészítsük ki tetszőlegesen egy teljes interpretációvá.

KLIKK, LEFOGÓ PONTALMAZ

- ▶ FÜGGETLEN PONTALMAZ \leq_p KLIKK

$$f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$$

Ez egy jó visszavezetés, hiszen ami G -ben klikk az \bar{G} -ben független pontalmaz és fordítva, ami G -ben független pontalmaz az \bar{G} -ben klikk.

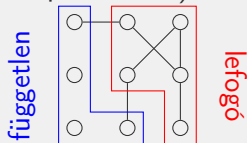
- ▶ FÜGGETLEN PONTALMAZ \leq_p LEFOGÓ PONTALMAZ

$$f : (G, k) \mapsto (G, |V(G)| - k)$$

Ha G -ben van k méretű F független pontalmaz, akkor van $|V(G)| - k$ méretű lefogó pontalmaz (F komplementere).

Ha G -ben van $|V(G)| - k$ méretű L lefogó pontalmaz, akkor van k méretű független pontalmaz (L komplementere).

Mindkét visszavezetés polinom időben kiszámítható.



Lefogó ponthalmaz hipergráfokban

Definíció

\mathcal{S} egy **hipergráf** (vagy halmazrendszer), ha $\mathcal{S} = \{A_1, \dots, A_n\}$, ahol $A_i \subseteq U$, $(1 \leq i \leq n)$ valamely U alaphalmazra. $H \subseteq U$ egy **hipergráf lefogó ponthalmaz**, ha $\forall 1 \leq i \leq n : H \cap A_i \neq \emptyset$.

HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTTHALMAZ:=

$\{\langle \mathcal{S}, k \rangle \mid \mathcal{S} \text{ egy hipergráf és van } k \text{ elemű } \mathcal{S}\text{-et lefogó ponthalmaz}\}.$

Tétel

HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTTHALMAZ NP-teljes.

Bizonyítás: A nyelv NP-beli, hiszen polinom időben előállítható U egy tetszőleges H részhalmaza és szintén polinom időben ellenőrizhető, hogy H minden \mathcal{S} -beli halmazt metsz-e.

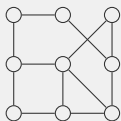
LEFOGÓ PONTTHALMAZ a HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTTHALMAZ speciális esete. Minden gráf hipergráf is egyben, a megfeleltetés $U = V(G)$, $\mathcal{S} = E(G)$. k ugyanaz, mivel a lefogó ponthalmaz szintén speciális esete a hipergráf lefogó ponthalmaznak.

Irányítatlan/irányított Hamilton út/kör

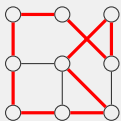
Definíció

Adott egy G gráf. Egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó utat **Hamilton útnak**, egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó kört **Hamilton körnek** nevezünk. Ha a gráf irányított, a Hamilton útnak/körnek irányítottnak kell lennie.

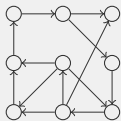
Rövidítés: H-út/ H-kör: Hamilton út/ Hamilton kör.



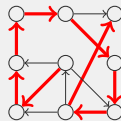
G



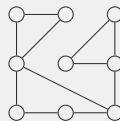
H-kör G -ben



G'



H-út G' -ben



nincs H-kör

$H\dot{U} = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányított gráfban } s\text{-ből } t\text{-be H-út} \}.$

$IH\dot{U} = \{ \langle G, s, t \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányítatlan gráfban } s \text{ és } t \text{ végpontokkal H-út} \}.$

$IHK = \{ \langle G \rangle \mid \text{van a } G \text{ irányítatlan gráfban H-kör} \}.$

Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

Tétel

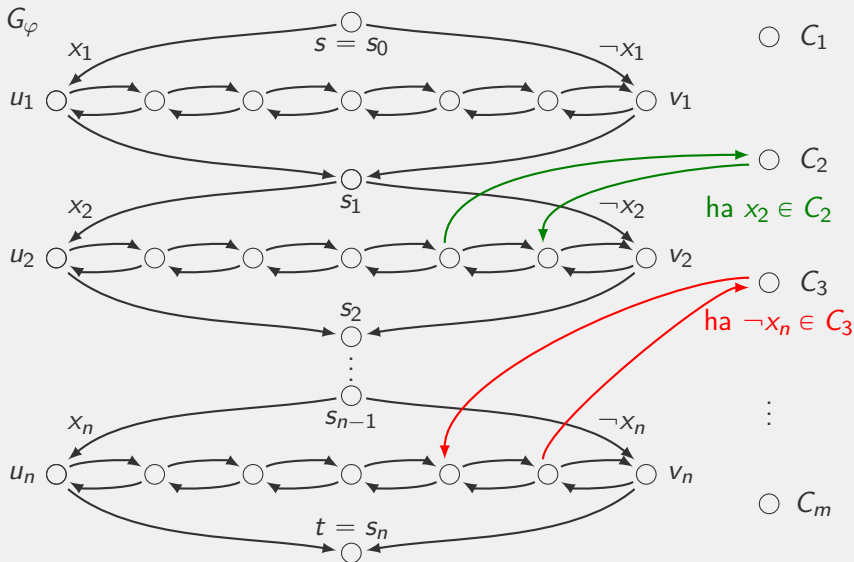
HÚ NP-teljes

Bizonyítás: NP-beli, hiszen polinom időben előállítható n darab csúcs egy P felsorolása. P -ről polinom időben ellenőrizhető, hogy a csúcsok egy permutációja-e és hogy tényleg H-út-e.

$\text{SAT} \leq_p \text{HÚ}$. Elég bármely φ KNF-hez konstruálni (G_φ, s, t) -t azzal a tulajdonsággal, hogy φ kielégíthető \Leftrightarrow a G_φ -ben van s -ből t -be H-út.

Legyenek x_1, \dots, x_n a φ -ben előforduló ítéletváltozók és C_1, \dots, C_m φ klózai.

Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége



Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

G_φ konstrukciója

- ▶ $\forall 1 \leq i \leq n : (s_{i-1}, u_i), (s_{i-1}, v_i), (u_i, s_i), (v_i, s_i) \in E(G_\varphi)$
- ▶ $s := s_0, t := s_n$
- ▶ $\forall 1 \leq i \leq n$ -re u_i és v_i között $3m - 1$ belső pontú kétirányú út $w_{i,1}, \dots, w_{i,3m-1}$.
- ▶ Minden $w_{i,k}$ legfeljebb egy C_j -vel lehet összekötve, ha $3|k$, akkor eggyel se.
- ▶ Ha $x_i \in C_j$, akkor $(w_{i,3j-2}, C_j)$ és $(C_j, w_{i,3j-1}) \in E(G_\varphi)$.
(pozitív bekötés)
- ▶ Ha $\neg x_i \in C_j$, akkor $(w_{i,3j-1}, C_j)$ és $(C_j, w_{i,3j-2}) \in E(G_\varphi)$.
(negatív bekötés)

Az $u_i v_i$ út pozitív bejárása: $u_i \rightsquigarrow v_i$.

Az $u_i v_i$ út negatív bejárása: $u_i \leftarrow v_i$.

Irányított $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

- ▶ Egy $s \rightsquigarrow t$ H-út $\forall 1 \leq i \leq n$ -re az (s_{i-1}, u_i) és (s_{i-1}, v_i) közül pontosan egyiket tartalmazza, előbbi esetben az $u_i v_i$ utat pozitív, utóbbi esetben negatív irányban járja be.
- ▶ Egy $s \rightsquigarrow t$ H-út minden C_j -t pontosan egyszer köt be. Az $u_i v_i$ út pozitív bejárása esetén csak pozitív, negatív bejárása esetén csak negatív bekötés lehetséges.
- ▶ Ha van H-út, akkor az $u_i v_i$ utak pozitív/negatív bejárása meghatároz egy I változókiértékelést. A C_j klóz bekötése mutat C_j -ben egy igaz literált ($\forall 1 \leq j \leq m$). Tehát I kielégíti φ -t.
- ▶ Fordítva, ha φ kielégíthető, válasszunk egy φ -t igazra kiértékelő I interpretációt és φ minden klózához egy I -ben igaz literált. Az $u_i v_i$ utat $I(x_i) = i$ esetén pozitívan, $I(x_i) = h$ esetén negatívan járjuk be. Ha a kiválasztott literálokhoz rendre bekötjük a C_j csúcsokat H-utat kapunk.

G_φ polinom időben megkonstruálható így $\text{SAT} \leq_p \text{HÚ}$, azaz HÚ NP-nehéz, de láttuk, hogy NP-beli, így NP-teljes is.

Irányítatlan $s \rightsquigarrow t$ Hamilton út NP teljessége

Megjegyzés: IHÚ és IHK NP-belisége az előzőekhez hasonlóan adódik.

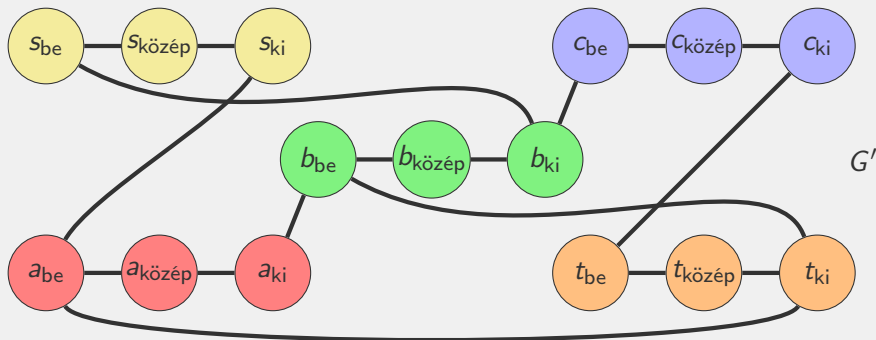
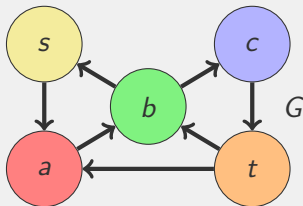
Tétel

IHÚ NP-teljes

Bizonyítás: $HÚ \leq_p IHÚ$. Adott G, s, t , ahol G irányított. Kell G', s', t' , ahol G' irányítatlan és akkor és csak akkor van G -ben s -ből t -be H-út, ha G' -ben van s' -ből t' -be.

G minden v csúcsának feleljen meg G' -ben 3 csúcs v_{be} , $v_{közép}$ és v_{ki} . és G' élei közé vegyük be a $\{v_{be}, v_{közép}\}$ és $\{v_{közép}, v_{ki}\}$ éleket. Továbbá minden $E = (u, v)$ G -beli él estén adjuk hozzá $E(G')$ -höz $\{u_{ki}, v_{be}\}$ -t. $s' := s_{be}$, $t' := t_{ki}$.

Irányítatlan *sawt* Hamilton út NP teljessége



Irányítatlan $s \rightsquigarrow t$ -Hamilton út NP teljessége

Könnyen meggondolható, hogy ez egy polinomiális visszavezetés:

- ▶ G' mérete G méretének polinomja és G' G -ből nyilván polinom időben előállítható.
- ▶ ha G -ben van egy $P : s \rightsquigarrow t$ irányított H-út, akkor G' konstrukciója miatt a következő G' -beli csúcssorozat H-út G' -ben: P szerint haladva minden v csúcst sorra a v_{be} , $v_{közép}$, v_{ki} csúcsokkal helyettesítsük.
- ▶ ha G' -ben van egy $P' : s' \rightsquigarrow t'$ H-út, akkor P' -ben minden v -re v_{be} , $v_{közép}$, v_{ki} egymást követő csúcsok, hiszen $v_{közép}$ 2-fokú csúcs és máskülönben nem lehetne rajta P' -n. Ezen csúcshármasokat $\{u_{ki}, v_{be}\}$ típusú élek kötik össze, melyekhez definíció szerint van $u \rightarrow v$ él G -ben.
Tehát ha minden v -re a P' -ben egymást követő v_{be} , $v_{közép}$, v_{ki} csúcshármas v -vel helyettesítjük egy G -beli irányított H-utat kapunk. □

Irányítatlan Hamilton kör NP teljessége

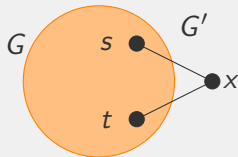
Tétel

IHK NP-teljes

Bizonyítás: $IH\bar{U} \leq_p IHK$. Adott G, s, t . G' konstrukciója: adjunk hozzá G csúcshalmazához egy új x csúcsot és élhalmazához két új élt $\{s, x\}$ -et és $\{t, x\}$ -t.

Könnyen meggondolható, hogy ez egy polinomiális visszavezetés:

- ▶ G' G -ből nyilván polinom időben előállítható.
- ▶ ha G -ben van $P : s \rightsquigarrow t$ H-út, akkor G' -ben van H-kör: egészítsük ki P -t az $\{s, x\}$ és $\{t, x\}$ élekkel.



- ▶ ha G' -ben van C H-kör, akkor G -ben van $s \rightsquigarrow t$ H-út: C -nek tartalmaznia kell az $\{s, x\}$ és $\{t, x\}$ éleket, mivel x 2-fokú. C -ből $\{s, x\}$ -et, $\{t, x\}$ -et és x -et elhagyva egy G -beli $s \rightsquigarrow t$ H-út marad.

Az utazóügynök probléma

Számítási (optimalizálási) verzió: Adott egy G élsúlyozott irányítatlan gráf nemnegatív élsúlyokkal. Határozzuk meg a legkisebb összsúlyú H-kört (ha van).

Eldöntési verzió:

$TSP = \{ \langle G, K \rangle \mid G\text{-ben van } \leq K \text{ súlyú H-kör} \}.$

Tétel

TSP NP-teljes

Bizonyítás: $TSP \in NP$, hasonló érvek miatt, mint HÚ, az összköltség feltétel is polinom időben ellenőrizhető.

$IHK \leq_p TSP$. Adott egy G gráf. G függvényében konstruálunk egy G' élsúlyozott gráfot és megadunk egy K számot. $G' := G$, minden élsúly legyen 1 és $K := |V|$. Könnyen látható, hogy G -ben van H-kör $\Leftrightarrow G'$ -ben van legfeljebb K összsúlyú H-kör.

A visszavezetés nyilvánvalóan polinom idejű.

