Bizonyítással kért tételek az 1. zh-n

1. A szuprémum elv

Tétel:
Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, felülről korlátos. Ekkor A-nak van legkisebb felső korlátja, azaz $\exists \min B$

Bizonyítás:
Világos, hogy $\forall a \in A, \forall K \in B : a \leq K$
$\Rightarrow$ (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq K \ (a \in A, K \in B)$
Vagyis, $\forall a \in A : a \leq \xi \rightarrow \xi$ felső korlátja A-nak $\Rightarrow \xi \in B$
Ugyanakkor: $\forall K \in B : \xi \leq K \Rightarrow \xi$ a legkisebb felső korlát
$\Rightarrow \xi = \min B$

2. Az Archimedes-tétel

Tétel:
$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in N : a \cdot n > b$

Bizonyítás:

1. Ha $b \leq 0$, akkor világos, hogy $b \leq 0 < a = a \cdot 1$, ha $n := 1$

   $\Rightarrow n = 1$ jó választás
2. Feltehető, hogy $b > 0$

   Áll: $\forall b > 0, \forall a > 0, \exists n \in N : a \cdot n > b$

   Indirekt: $\exists b > 0, \exists a > 0, \forall n \in N : a \cdot n \leq b$

   $A := \{a \cdot n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

   $\Rightarrow b$ egy felső korlátja A-nak $\Rightarrow \xi = supA$

   $\Rightarrow \xi - a$ már nem felső korlát, azaz $\exists n_0 \in N : a \cdot n_0 > \xi - a$

   $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot n_0 + a > \xi \Leftrightarrow a(n_0 + 1) > \xi$

   Mivel $n_0 \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{N}$ induktív $\Rightarrow n_0 + 1 \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow a(n_0 + 1) \in A \Rightarrow \xi$ nem felső korlát

   Ellentmondás $\Rightarrow\Leftarrow$

3. A Cantor-féle közösrész-tétel

Tétel:
Legyen $[a_n, b_n]$ korlátos és zárt intervallum, melyre:
$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \ (n \in \mathbb{N})$

Ekkor: $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \emptyset$

Bizonyítás:
$A := \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$
$B := \{b_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

Ekkor: $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$
Ha $n \leq m : a_n \leq a_m \leq b_m$
Ha $m < n : a_n \leq b_n \leq b_m$

$\Rightarrow$ (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_m$
Spec: $n = m$, ekkor:
$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_n$
$\Rightarrow \xi \in [a_n, b_n]\ (n \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow \xi \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$

4. Minden sorozatnak van monoton részsorozata

Tétel:
Minden sorozatnak van monoton részsorozata

Bizonyítás:

1. A sorozatnak végtelen sok csúcsa van

   $\exists a_{n_0}$ csúcs $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : a_{n_0} \geq a_n$
   $\Rightarrow \exists n_1 > n_0$ és a_{n_1} csúcs $\Rightarrow a_{n_0} \geq a_{n_1}$
   $\Rightarrow \forall n \geq n_1 : a_{n_1} \geq a_n$
   $\Rightarrow \exists n_2 > n_1$ és a_{n_2} csúcs $\Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2}$

   $\Rightarrow \exists a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots$
2. A sorozatnak véges sok csúcsa van

   $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n$ nem csúcs
   Legyen $n_0 = N \Rightarrow a_{n_0}$ nem csúcs $\Rightarrow$
   $\Rightarrow \exists n_1 \geq n_0 : a_{n_0} < a_{n_1} \Rightarrow a_{n_1}$ nem csúcs $\Rightarrow$

   $\Rightarrow \exists n_2 \geq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2} \ldots$

   $\exists a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots$

5. Konvergens sorozat határértéke egyértelmű

Tétel:
Az (a_n) konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás:
Indirekt, Tfh: $\exists A_1, A_2, A_1 \neq A_2$ határértékek
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \epsilon$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \epsilon$

Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2)$:

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - A_1| < \epsilon$$
$$|a_n - A_2| < \epsilon$$

Legyen $\epsilon < \dfrac{|A_1 - A_2|}{2} \Rightarrow$

$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_n + a_n - A_2| \leq |A_1 - a_n| + |a_n - A_2| < 2\epsilon < |A_1 - A_2|$

Ellentmondás, $|A_1 - A_2| \not< |A_1 - A_2|$

6. A konvergencia és a korlátosság kapcsolata

Tétel:
Ha a_n konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás:
Legyen $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \epsilon = 1$-re is $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < 1$
$\Rightarrow |a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow |a_n| \leq max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |A|), \quad (n \in \mathbb{N})$

7. Műveletek nullsorozatokkal

Tétel:
Legyen $(a_n), (b_n)$ nullsorozat. Ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ is nullsorozat.
2. Ha (c_n) korlátos, akkor $(a_n \cdot c_n)$ is nullsorozat.
3. $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.

Bizonyítás:

1. $(a_n) nullsor \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$
   $(b_n) nullsor \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n| < \frac{\epsilon}{2}$

   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = max(n_1, n_2), \forall n \geq n_0 :$
   $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$
   $\Rightarrow (a_n + b_n)$ nullsor
2. (c_n) korlátos $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n : |c_n| \leq K$
   (a_n) nullsor $\Rightarrow \forall \frac{\epsilon}{K} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| < \frac{\epsilon}{K}$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :$
   $|a_n \cdot c_n| < \frac{\epsilon}{K} \cdot K = \epsilon$
3. (b_n) nullsor $\Rightarrow (b_n)$ konvergens $\Rightarrow (b_n)$ korlátos
   (a_n) nullsor $\stackrel{2.miatt}{\Rightarrow} (a_n \cdot b_n)$ nullsor

8. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

Tétel:

Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$. Ekkor:
$(a_n \cdot b_n)$ konvergens és $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

Bizonyítás:

$|a_n \cdot b_n - A \cdot B| = |a_n b_n - A \cdot b_n + A \cdot b_n - AB| \leq$

$$\leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{|b_n|}_{konvergens}}_{korl\acute{a}tos} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{nullsor}}_{nullsor} + \underbrace{\underbrace{|A|}_{korl\acute{a}tos} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{nullsor}}_{nullsor}}_{nullsor}$$

9. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel

Tétel:

Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens, $b_n \neq 0$ és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$ és $B \neq 0$.
Ekkor:

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergens és $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$

Bizonyítás:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - Ab_n}{b_n B}\right| = \frac{|a_n B - AB + AB - Ab_n|}{|b_n B|} \leq$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{\frac{|B|}{|b_n||B|}}_{korl\acute{a}tos} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{nullsor} + \underbrace{\frac{|A|}{|b_n||B|}}_{korl\acute{a}tos} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{nullsor}}_{nullsor}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) nullsor \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$

10. A közrefogási elv

Tétel:

Tfh: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$
Ha $\lim a_n = \lim c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n$

Bizonyítás:

$\lim a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$

1. $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2, \forall n \geq n_2 : A - \epsilon < c_n < A + \epsilon$

   Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2, N) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : A - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \epsilon$
   $\Rightarrow \lim b_n = A$
2. $A = \infty : \lim a_n = \infty \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : a_n > P$
   De $b_n \geq a_n, \forall n \geq N \Rightarrow$
   $\forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 = \max(n_1, N), \forall n \geq n_0 : b_n \geq a_n \geq P$
   $\Rightarrow \lim b_n = \infty$
3. $A = -\infty$
   Ugyan úgy mint a $+\infty$, csak p-vel és $a_n \geq P$ helyett $c_n \leq p$

11. Monoton növő sorozatok határértéke (véges és végtelen eset)

Tétel:

1. Ha (a_n) monoton nő és korlátos, akkor konvergens és $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
2. Ha (a_n) mon nő és nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$

Bizonyítás:

1. (a_n) korlátos $\Rightarrow \exists \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$
   $\Rightarrow a_n \leq \xi, \forall n$ és $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq \xi \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi$
   $= |a_n - \xi| < \epsilon$
   $\Rightarrow \lim a_n = \xi$
2. (a_n) nem korlátos $\Rightarrow$ (a_n) felülről nem korlátos
   $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n > P \Rightarrow$
   $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0} > P \Rightarrow$
   $\Rightarrow \lim a_n = \infty$

12. A Cauchy-féle konvergencia kritérium sorozatokra

Tétel:
(a_n) konvergens $\Leftrightarrow$ (a_n) Cauchy

Bizonyítás:
$(\Rightarrow)$ bizonyítása:
Tfh: (a_n) konvergens. Megmutatjuk, hogy (a_n) Cauchy
$A := \lim(a_n), \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - A| < \epsilon$
Legyen $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N$ Ekkor:
$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |\underbrace{a_n - A}_{\to\epsilon}| + |\underbrace{a_m - A}_{\to\epsilon}| < 2\epsilon$$
Tehát $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq \mathbb{N} : |a_n - a_m| < 2\epsilon$
$\Rightarrow (a_n)$ Cauchy

$(\Leftarrow) bizonyítása:$
Tfh: (a_n) Cauchy. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos.
Mivel (a_n) Cauchy, ezértmár $\epsilon = 1$-re
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |a_n - a_m| < 1$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |\underbrace{a_n - a_N}_{= a_n - a_m}| + |a_N| < 1 + |a_N|$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| \leq K := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$
$\Rightarrow (a_n)$ korlátos
$\Rightarrow$ (ld.: Bolzano - Weierstrass): $\exists (a_{n_k})$ konvergens részsorozat és
$A := \lim(a_{n_k})$
Megmutatjuk, hogy (a_n) is konvergens és $\lim(a_n) = A$
$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$
Mivel (a_n) Cauchy : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n, n_k \in \mathbb{N}, n, n_k \geq N_0 : |a_n - a_{n_k}| < \epsilon$
Mivel $\lim(a_{n_k}) = A$ ezért $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n_k \in \mathbb{N}, n_k \geq N_1 : |a_{n_k} - A| < \epsilon$

Tehát: $\forall \epsilon > 0, \exists N := \max\{N_0, N_1\} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - A| < 2 \cdot \epsilon$
$\Rightarrow (a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = A$

13. A geometriai sorozat határértékére vonatkozó tétel

Tétel:
Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$lim(q^n) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty, & ha\; q > 1 \\ 1, & ha\; q = 1 \\ 0, & ha\; |q| < 1 \\ \nexists, & ha\; q \leq -1 \end{array} \right\}$$

Bizonyítás:
Ha $q = 1,\ q = 0,\ q = -1$ akkor triviális.
Tfh: $q > 1$. Ekkor $\exists h \in \mathbb{R}, h > 0 : q = 1 + h$
$\Rightarrow q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \geq n \cdot h \to +\infty$

Tfh: $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, azaz $0 < |q| < 1$
$\Rightarrow \dfrac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|q|} = 1 + h \Rightarrow \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n \geq$
$\geq 1 + nh \geq n \cdot h \Rightarrow 0 \leq |q|^n \leq \dfrac{1}{nh} \to 0$
$\Rightarrow \lim(|q|^n) = 0$ és $\lim(q^n) = 0$

Tfh: $q < -1$, akkor $q^2 > 1$. Ekkor:

- $q^{2n} = (q^2)^n \to +\infty$
- $q^{2n+1} = q(q^2)^n \to -\infty$

$\Rightarrow \nexists \lim(q^n)$

14. Az $(\sqrt[n]{a})$ és az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat határértéke

Tétel:
$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, : \lim(\sqrt[n]{a}) = 1$

Bizonyítás:
Ha $a = 1 \checkmark$
Tfh: $a > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{a} > 1$
$\Rightarrow \exists h_n > 0 : \sqrt[n]{a} = 1 + h_n$
$\Rightarrow a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n \leq \dfrac{a-1}{n} \to 0$
$\Rightarrow \lim(h_n) = 0$
$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(1 + h_n) = \lim(1) + \underbrace{\lim(h_n)}_{nullsor} = 1 \checkmark$
Tfh: $0 < a < 1$, akkor $\dfrac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$
$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}) \to \dfrac{1}{1} = 1 \checkmark$

Tétel:
$\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$

Bizonyítás:
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \text{ahol} h_n > 0, (n \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow n = (1 + h_n)^n \overset{binomiális}{=} \sum_{j=0} \binom{n}{j} h_n^j \overset{j \geq 2}{\geq} \binom{n}{2} h_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot h_n^2$
$\Rightarrow 0 < h_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow \lim(h_n) = 0 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{n}) = \lim(1 + h_n) = 1 \checkmark$

15. Pozitív szám m-edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével

Tétel:
Legyen $2 \leq m \in \mathbb{N}$, Ekkor:

1. $\forall A > 0, \exists! \alpha > 0 : \alpha^n = A$
2. $\forall a_0 > 0, a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N})$

Az így definiált sorozat konvergens és $\lim(a_n) = \alpha$

Bizonyítás:
$a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, (ld:: Teljes indukció)
$\Rightarrow (a_n)$ alulról korlátos, ill.:

$$a_{n+1} = \left(\frac{\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n}{m}\right)^m \overset{\text{számtani-mértani}}{\geq} \frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot a_n \cdot \underbrace{a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{(m-1)db} = A \quad (n \in \mathbb{N})$$

Azaz: $a_1 \geq A, a_2 \geq A, a_3 \geq A, \ldots$
Mutassuk meg, hogy az (a_{n+1}) elshiftelt sorozat monoton fogyó, azaz
$\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 1$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_{n+1}^{m-1}} + (m-1)a_{n+1}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_{n+1}^m} + (m-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{A - a_{n+1}^m}{a_{n+1}^m} + m\right) = \frac{\overset{\leq 0}{A - a_{n+1}^m}}{\underset{\leq 0}{m \cdot a_{n+1}^m}} + 1 \Rightarrow \leq 1, \text{ monoton fogyó}$$

$\Rightarrow (a_{n+1})$ korlátos és monoton fogyó $\Rightarrow$ konvergens $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim(a_{n+1}) = \alpha$