# Valószínűségszámítás
# 1. előadás

Arató Miklós

Esély

Várható

Kockázat

Véletlen

Hiba

Előrejelzés

ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

# Követelmények

- Részletes leírás: http://kovacsam.web.elte.hu/index_infovszstat
- Évfolyam zárthelyi dolgozatok:
- 1. zárthelyi: 2020. március 31. (kedd) előadás ideje és terme
- 2. zárthelyi: 2020. május 12. (kedd) előadás ideje és terme
- javító zárthelyi: 2020. május 20 (szerda)
- gyakorlati utóvizsga: 2020. május 26 (kedd)

# Követelmények (folyt.)

- zárthelyi dolgozatok (2 db 90 perces): 2x60 pont
- kis dolgozatok (2 db 30 perces): 2x30 pont
- extra feladatok (táblás+laboros): 2x10 pont
- Összesen: 200 pont
- Tervezett ponthatárok: 80 ponttól elégséges, 160 ponttól jeles
- Elégtelentől különböző gyakorlati jegyet csak az szerezhet, a ki mindkét zárthelyi dolgozatra legalább 15-15 pontot kapott.

# Diák, ajánlott irodalom:

http://amiklos.web.elte.hu/Oktatas/2020tavaszinf/Valszam&Stat2020tavasz.htm

# Hagyományosan




# Klasszikus valószínűségi mező

- Esemény valószínűsége:

"kedvező" esetek száma/összes esetek száma

- Kiszámítása néha könnyű, néha igen nehéz.

# Mi az „összes eset”?

- r=6 golyót teszünk N=8 dobozba. Mennyi a valószínűsége, hogy k=2 golyó kerül az első dobozba?

# Maxwell-Boltzmann statisztika

- Összes esetszám: $N^r = 8^6$
- „Kedvező" esetek száma:

$$\binom{r}{k}(N-1)^{r-k} = \binom{6}{2}(8-1)^{6-2}$$

- Valószínűség: 13,74%

# Bose-Einstein statisztika

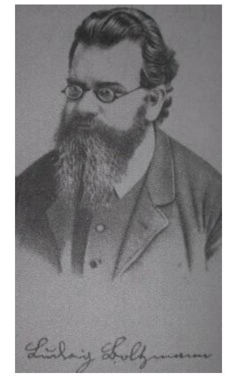
- Összes esetszám: $\binom{r+N-1}{N-1} = \binom{6+8-1}{8-1}$
- „Kedvező" esetek száma:

$$\binom{r-k+N-2}{N-2} = \binom{6-2+8-2}{8-2}$$

- Valószínűség: 12,24%

# Melyik az igazi?

- Maxwell–Boltzmann statisztika: a statisztikus mechanikában alkalmazható a gázmolekulák rendszereire



- Bose–Eistein statisztika: fotonrendszerek


Törp
Törpapa
Törpilla
Hókuszpók
Törperős
Kertitörp
Okoska
Törpojáca
Dulifuli
Ügyifogyi
Sziamiaú
Törpvihar
Katti
Buki sötétben világít
Királyi törp arany
Törpingáló
Nótata
Lusti
Tréfi
Vadócka
Hami
Költörp
A lila törp
Habzsi

# Poincaré-formula

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ események. Ekkor egyesítésük valószínűsége:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k^{(n)},$$

ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k} P\left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\right)$$

# Megoldás

- $A_i$: $i-$ edik típusú figura nincs meg (50 figuránk van)
- Kérdés: $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{24})$=?
- $P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = \frac{(24-k)^{50}}{24^{50}}$
- $S_k^{(n)} = \binom{24}{k}\left(\frac{24-k}{24}\right)^{50}$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{24}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{24}{k}\left(\frac{24-k}{24}\right)^{50} = 0{,}9737209$

# Feltételes valószínűség

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor az $A$ esemény $B$ feltétel melletti feltételes valószínűsége:
$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$
- Kombinatorikus valószínűségi mező esetén:

$$P(A|B) = \frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|AB|}{|B|}$$

# Feltételes valószínűség (folyt.)

- Amennyiben $P(B) > 0$, akkor $(\Omega, \mathcal{A}, P(.|B))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező lesz.

$$\Longrightarrow$$

- A „“normál” valószínűségre bizonyítottak a feltételes valószínűségre is teljesülnek.

# Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza ?

- Nicole Brown-t 1994-ben gyilkolták meg. Férjét, O.J. Simpsont, gyanúsították meg.
- Az ügyész külön hangsúlyozta, hogy Simpson korábban már bántalmazta feleségét.
- Az ügyvéd válaszában arra hivatkozott, hogy a statisztikák szerint "csak" minden 100-adik bántalmazó férj öli meg feleségét. Valójában a házastársuk/élettársuk által bántalmazottak közül "csak" minden 2500-adikat öli meg házastársuk/élettársuk.

# Az ügyvédnek vagy ügyésznek volt igaza ? (folyt.)

- Valójában a helyes kérdés az, hogy milyen valószínűséggel ölte meg a feleségét a férj, ha a feleséget megölték és ő korábban bántalmazta a feleséget?
- 1/20000 annak az esélye, hogy valakit megölnek az USA-ban.
- Csak a bántalmazottak körét tekintjük.
- $B$: férj öli meg, C: nem férj öli meg
- Kérdés: $P(B|B \cup C) =?$

$$P(B|B \cup C) = \frac{P(B)}{P(B \cup C)} = \frac{\frac{1}{2500}}{\frac{1}{2500} + \frac{1}{20000}} = \frac{8}{9}$$

# Bayes-formula

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, 0 < P(A) < 1$, ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

Bizonyítás:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(BA)}{P(BA)+P(B\bar{A})} =$$

$$= \frac{\frac{P(BA)}{P(A)}P(A)}{\frac{P(BA)}{P(A)}P(A) + \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}P(\bar{A})}$$

# Mammográfiás vizsgálat

- 50 éves nő (tünetek nélkül) rutin mammográfiás vizsgálaton vett részt.
- A teszt pozitív lett.
- Mennyi a valószínűsége, hogy emlődaganata van?
- Adatok:
  - 50 éves nőnél emlődaganat valószínűsége 1%
  - Emlődaganat felismerésének valószínűsége 90%
  - Emlődaganat nélkül pozitív teszt valószínűsége 9%

# Melyikhez van közelebb a valószínűség?

- 1%
- 10%
- 90%

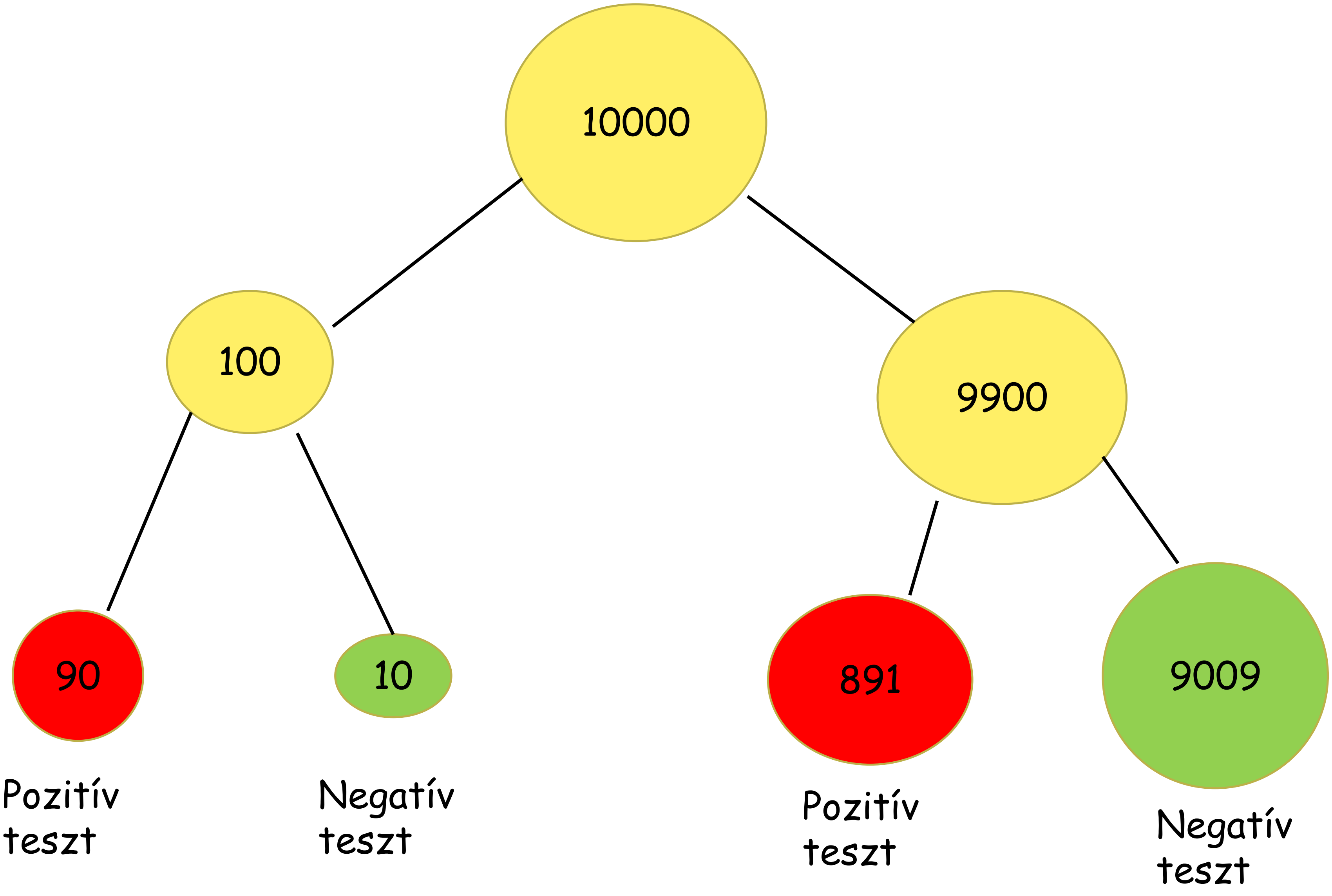
# Megoldás

- Legyen $A$: emlődaganata van, $B$: pozitív a teszt. Ekkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} =$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}09 \cdot 0{,}99} = 0{,}09174312$$

# Gyakoriságok



# Teljes eseményrendszer

- Definíció: $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszert alkotnak, ha

$$A_i A_j = \emptyset, i \neq j\text{-re és}$$

$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

# Teljes valószínűség tétele

- Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots$ $(0 < P(A_i))$ teljes eseményrendszer, ekkor

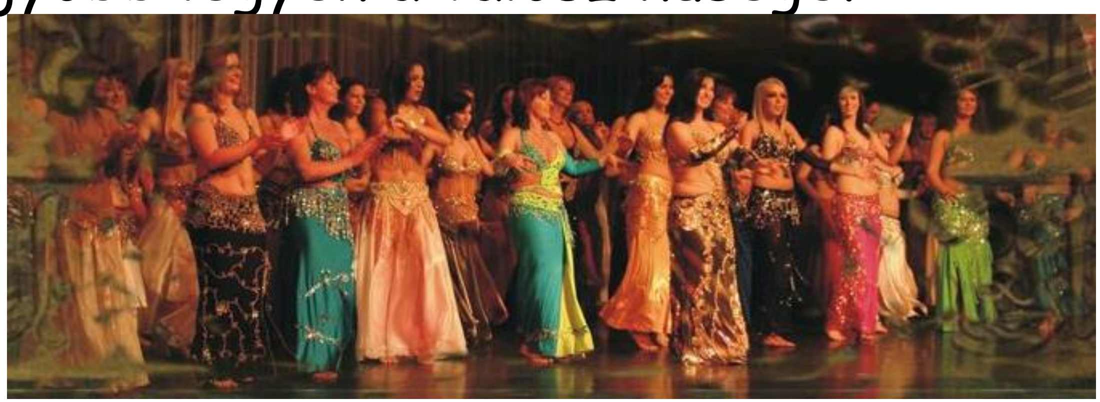
$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

Bizonyítás:

$$B = \cup_i BA_i \Longrightarrow P(B) = \sum_i P(BA_i) = \sum_i \frac{P(BA_i)}{P(A_i)} P(A_i)$$

# Szindbád és a háremhölgyek

- Szindbád a szultánnak tett szolgálataiért cserében 100 háremhölgy közül választhat. Azonban a háremhölgyeket nem egyszerre, hanem sorban egymás után mutatják be neki. Amennyiben egy bemutatott hölgyet nem választ ki azonnal, úgy már az örökké elveszik számára. Milyen stratégiát válasszon Szindbád, hogy a legszebb választásának minél nagyobb legyen a valószínűsége?



# Stratégia

- Szindbád azt a stratégiát választja, hogy elengedi az első $k$ hölgyet, és az utána következők közül az addigi legszebbet választja.
- Mennyi az optimális $k$?

# Megoldás

- $A_i$: $i -$ edik hölgyet választja Szindbád $(i = k+1, k+2, \dots, n = 100)$.
- $A_0$ egyik hölgyet sem választja ki Szindbád
- $A_0, A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer
- $B$: a legszebbet választja ki

# Megoldás (folyt.)

- $P(B) = \sum_i P(BA_i)$
- $P(BA_0) = 0$
- $P(BA_i) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (i-2) \cdot 1 \cdot i \cdot \ldots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} =$
$$= \frac{k}{(i-1)n}$$
- $P(B) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{(i-1)n} = \frac{k}{n} \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$
- Milyen $k$-ra lesz ez maximális?

# Megoldás (folyt.)

- $k_n^*$: az optimális érték
- $\frac{n}{k_n^*} \rightarrow e$

# Bayes-formula általános alakja

- Tegyük fel, hogy $P(B) > 0, A_1, A_2, \ldots$

$(0 < P(A_i))$ teljes eseményrendszer, ekkor

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Bizonyítás:

$$P(A_k|B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{\frac{P(BA_k)}{P(A_k)}P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

# Monty Hall-paradoxon

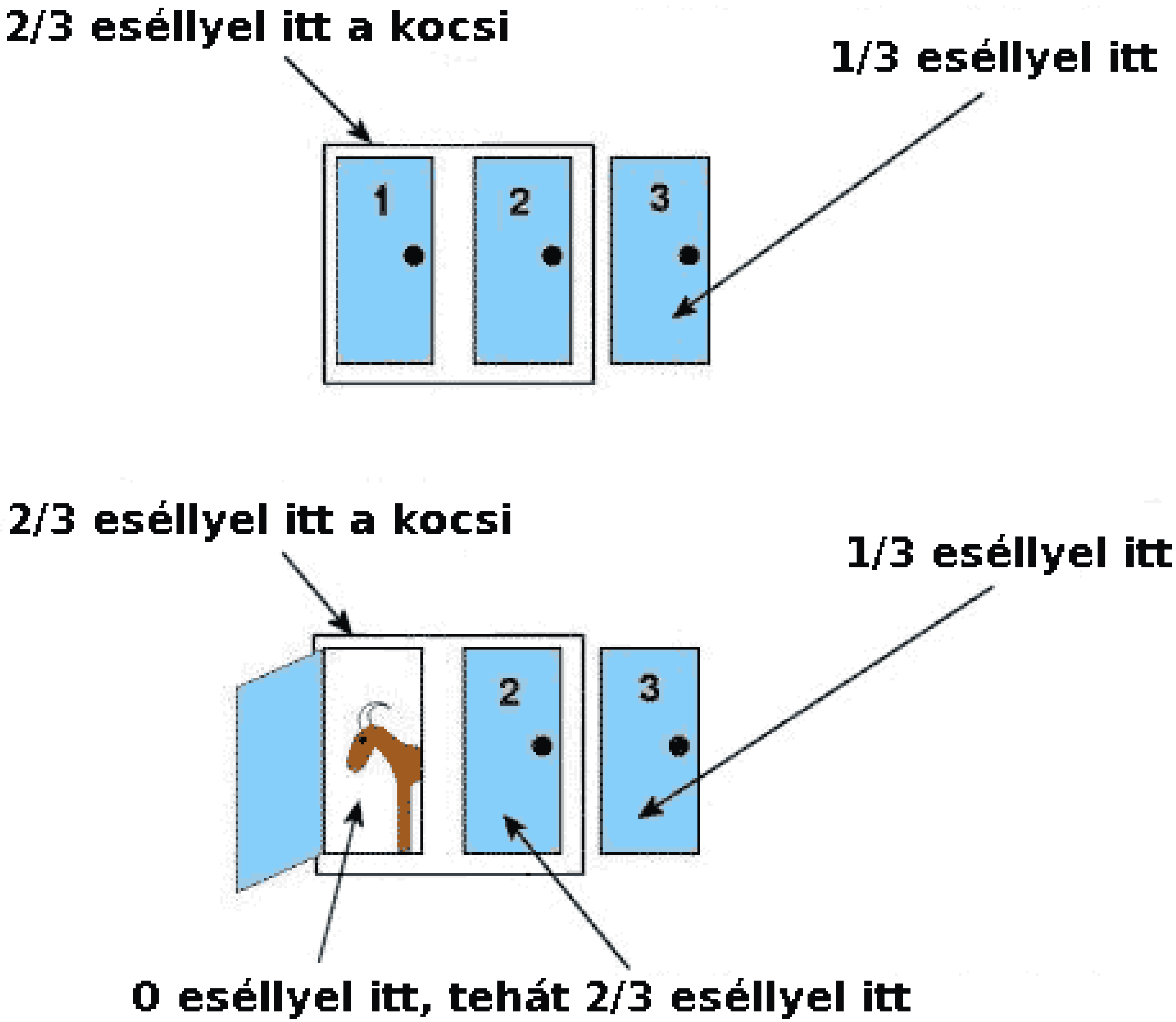
- Képzeljük el, hogy egy vetélkedőben szerepel, és három ajtó közül kell választania. Az egyik mögött kocsi van, a másik kettő mögött viszont kecske. Tegyük fel, hogy maga a 3. ajtót választja, mire a műsorvezető, aki tudja, melyik ajtó mögött mi van, kinyitja az 1. ajtót, megmutatván, hogy amögött kecske van. Ezután önhöz fordul, és megkérdezi: „Nem akarja esetleg mégis a 2. ajtót választani?" Vajon előnyére válik, ha vált?

# Megoldás

- $A_i: i -$ edik ajtó mögött van a kocsi
- $P(A_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$
- $B$: műsorvezető az első ajtót nyitja ki
- Kérdés: $P(A_3|B) =?$
- $P(A_3|B) =$

$$\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{0\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$


2/3 eséllyel itt a kocsi
1/3 eséllyel itt
1
2
3
2/3 eséllyel itt a kocsi
1/3 eséllyel itt
2
3
0 eséllyel itt, tehát 2/3 eséllyel itt

# Függetlenség

- Az egyik legfontosabb valószínűségszámítási fogalom.
- Definíció: $A$ és $B$ függetlenek, ha $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Ha $P(B) > 0$, akkor

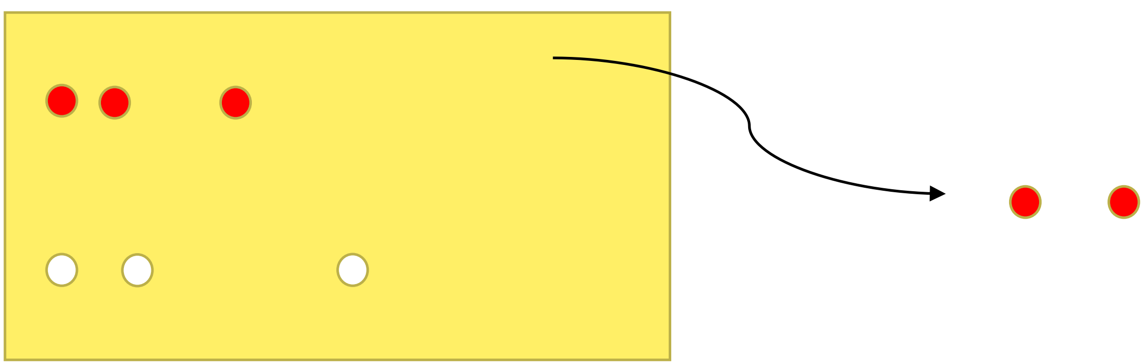
$A$ és $B$ függetlenek $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Bizonyítás:

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \underset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(AB) = P(A)P(B)$$

# Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban $M$ piros és $N - M$ fehér golyó van. 2-szer húzunk.
- $A$: elsőre pirosat, $B$: másodikra pirosat húzunk. Függetlenek-e?



# Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel (folyt.)

- $P(A) = P(B) = \frac{M}{N}$.
- Visszatevésesnél:

$$P(AB) = \frac{M^2}{N^2} = P(A)P(B).$$

- Visszatevés nélkül:

$$P(AB) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} \neq P(A)P(B).$$

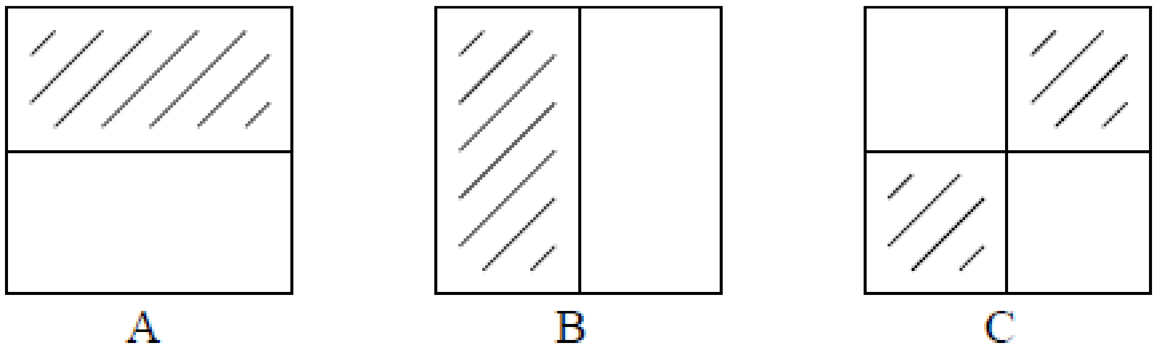
# Több esemény függetlensége

- Definíció: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ függetlenek, ha bárhogy választunk ki közülük $k$ darabot $(2 \leq k \leq n)$ úgy:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

- Nem elég sem a páronkénti függetlenség, sem az "$n$-es szorzat"!

# Páronkénti, de nem teljes függetlenség




$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(ABC) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

# Jogos volt-e az ítélet?

- 1999-ben egy brit bíróság elítélte Sally Clarkot, mert 2 gyermeke is hirtelen csecsemőhalállal hunyt el.
- Az indok az volt, hogy a gyermekorvos szakértő szerint egy csecsemőnél 1/8500 az esélye egy ilyen halálesetnek, ezért a bíróság szerint a 2 eset valószínűsége ~ 1/73 millió.
- Későbbi kutatások kimutatták, hogy az első haláleset után a második esetnek már 1/100 az esélye (nem függetlenek).