Ítéletlogika

A. Elméleti háttér

0. Bevezetés

Állítások

Egy **állítás** a kontextustól függetlenül vagy igaz (i) vagy hamis (h). Ezt az értéket az állítás **igazságértékének** nevezzük.

Az **egyszerű állítás** egy olyan kijelentő mondat, mely egy individuumról állít valamit.

Összetett állítás egy egyszerű állításokból álló összetett mondat, amelynek az igazságértéke csak az egyszerű állítások igazságértékeitől függ. Ezért az összetett állítások csak olyan nyelvtani összekötőszavakat tartalmazhatnak amelyek logikai műveleteknek feleltethetők meg.

Logikai műveletek

A legfontosabb logikai műveletek:
$\neg$ **negáció** (nem igaz, hogy...)
$\wedge$ **konjunkció** (logikai és)
$\vee$ **diszjunkció** (megengedő vagy)
$\to$ **implikáció** (ha ... akkor ...) [alternatív jelölés: $\supset$]

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

I. Szintaktika

Az ítéletlogika leíró nyelve ($\mathcal{L}_0$)

Ábécé

Adott (megszámlálhatóan) végtelen sok ún. **ítéletváltozó**: $A; Y; Z; A_1; A_2; \ldots$, (ezek halmazát jelölje V_v), továbbá a $\neg; \wedge; \vee; \to; (;)$ szimbólumok.

Ítéletlogikai formulák

- Az ítéletváltozók ítéletlogikai formulák.
- Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ is ítéletlogikai formulák.
- Csak az első két pont véges sokszori alkalmazásával kapott (véges) sorozatok az ítéletlogikai formulák.

Alapfogalmak

Az ítéletlogikai formulák logikai összetettsége

- Az X ítéletváltozó logikai összetettsége 0, azaz $\ell(X) = 0$.
- $\ell(\neg A) = \ell(A) + 1$.
- $\ell(A \circ B) = \ell(A) + \ell(B) + 1$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Közvetlen részformula

- Az X ítéletváltozónak nincs közvetlen részformulája.
- $\neg A$ közvetlen részformulája A.
- $A \circ B$ közvetlen részformulája A és B, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Részformula

- Maga a formula részformulája önmagának.
- Formula részformulájának közvetlen részformulái részformulái a formulának.
- Csak ezek a formula részformulái.

Logikai műveletek hatásköre

A logikai műveletek hatásköre a formula részformulái közül az a legkisebb logikai összetettségű, amelyben az adott logikai összekötőjel előfordul.

Formula fő műveleti jele (logikai összekötője)

Formula fő műveleti jele az a logikai művelet, melynek hatásköre az egész formula.

A fő logikai összekötő alapján megkülönböztetünk **negációs** ($\neg$), **konjunkciós** ($\wedge$), **diszjunkciós** ($\vee$), **implikációs** ($\rightarrow$) formulákat.

Formula szerkezeti fája

Olyan gyökeres, csúcscímkézett, bináris fa, ahol a gyökér címkéje maga a formula, a csúcsok címkéi pedig a formula részformulái. Egy csúcs gyerekeinek címkéi a csúcsnak megfelelő részformula közvetlen részformulái.

Zárójelelhagyás

Prioritási sorrend: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
Zárójelelhagyás célja egy formulából a legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének megtartása mellett.

- a formula külső zárójel párjának elhagyása (ha még van ilyen)
- egy binér logikai összekötő hatáskörébe eső részformulák külső zárójelei akkor hagyhatók el, ha a részformula fő logikai összekötőjele nagyobb prioritású nála.

Láncformulák zárójelelhagyása:

- Konjunkció illetve diszjunkciólánc esetén minden belső zárójel elhagyható.
- Implikációlánc: $(X_1 \to (X_2 \to (X_3 \to \ldots X_n)))$ a default zárójelezés.

II. Szemantika

$\mathcal{L}_0$ interpretációja:

$I : V_v \to \{i, h\}$ függvény.

Formulák igazságkiértékelése

Egy I interpretációban egy A formula $\mathcal{B}_I(A)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következőképpen kapjuk meg:

- ha A ítéletváltozó, akkor $\mathcal{B}_I(A) := I(A)$,
- $\mathcal{B}_I(\neg A) := \neg \mathcal{B}_I(A)$,
- $\mathcal{B}_I(A \circ B) := \mathcal{B}_I(A) \circ \mathcal{B}_I(B)$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$

Igazságtábla

Egy formula igazságértéke csak a benne szereplő ítéletváltozók kiértékelésétől függ. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ az A formulában szereplő ítéletváltozók.

Az ítéletváltozók egy rögzített sorrendjét **bázisnak** nevezzük.

2^n lehetséges interpretáció van (ha nem törődünk a formulában nem szereplő ítéletváltozók kiértékelésével).

Egy A ítéletlogikai formula **igazságtáblája** egy $2^n \times (n+1)$-es táblázat, ha $X_1, \ldots, X_n$ az A formulában szereplő ítéletváltozók. A sorok megfelelnek a lehetséges interpretációknak. Az első n oszlop tartalmazza az ítéletváltozók kiértékelését. Az I interpretációhoz tartozó sor $n + 1$. oszlopa pedig $\mathcal{B}_I(A)$-t.

Igazhalmaz/hamishalmaz

Az A formula **igazhalmaza**: $A^i := \{ I \mid \mathcal{B}_I(A) = i\}$.

Az A formula **hamishalmaza**: $A^h := \{ I \mid \mathcal{B}_I(A) = h\}$.

Rögzített bázis esetén az interpretációkat megfeleltethetjük egy rendezett n-esnek, például $(X \to Y)^i = \{(i, i), (h, i), (h, h)\}$ az X, Y bázisban.

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció **kielégít** egy B formulát ($I \models_0 B$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.
- Egy B formula **tautologia** (ítéletlogikai törvény) ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti.
- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha nincs olyan interpretáció, ami egyszerre minden $\mathcal{F}$-beli formulát kielégít.
- Egy A formulának a B formula **tautologikus következménye**($A \models_0 B$), ha minden A-t kielégítő interpretáció kielégíti B-t is.
- A és B **tautologikusan ekvivalensek** ($A \sim_0 B$), ha $A \models_0 B$ és $B \models_0 A$ is teljesül.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaznak a B formula **tautologikus következménye**($\mathcal{F} \models_0 B$), ha minden $\mathcal{F}$-t kielégítő interpretáció kielégíti B-t is.

Nevezetes ekvivalenciák ($\top$ tautológia, $\perp$ kielégíthetetlen formula.)

(a) $\neg\neg A \sim_0 A$,

(b) $A \vee A \sim_0 A$ valamint $A \wedge A \sim_0 A$,

(c) $A \vee B \sim_0 B \vee A$ valamint $A \wedge B \sim_0 B \wedge A$,

(d) $(A \vee B) \vee C \sim_0 A \vee (B \vee C)$ valamint $(A \wedge B) \wedge C \sim_0 A \wedge (B \wedge C)$,

(e) $(A \vee B) \wedge C \sim_0 (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ valamint $(A \wedge B) \vee C \sim_0 (A \vee C) \wedge (B \vee C)$,

(f) $(A \vee B) \wedge B \sim_0 B$ valamint $(A \wedge B) \vee B \sim_0 B$,

(g) $A \to B \sim_0 \neg A \vee B$,

(h) $\neg(A \wedge B) \sim_0 \neg A \vee \neg B$ valamint $\neg(A \vee B) \sim_0 \neg A \wedge \neg B$,

(i) $A \vee \neg A \sim_0 \top$ valamint $A \wedge \neg A \sim_0 \perp$,

(j) $A \vee \top \sim_0 \top$ valamint $A \wedge \perp \sim_0 \perp$,

(k) $A \vee \perp \sim_0 A$ valamint $A \wedge \top \sim_0 A$.

III. Konjunktív és diszjunktív normálforma

Literál

Prímformula (azaz: ítéletváltozó) vagy a negáltja. A literál **alapja**: maga a prímformula. Egyetlen literál másik elnevezései: Egységkonjunkció, egységdiszjunkció (egységklóz).

(Teljes) elemi kon-/diszjunkció

Elemi konjunkció: Különböző alapú literálok konjunkciója. **Elemi diszjunkció (klóz)**: Egységdiszjunkció vagy különböző alapú literálok diszjunkciója. Egy elemi konjunkció/diszjunkció **teljes** egy n változós műveletre, ha mind az n ítéletváltozó alapja valamely literáljának.

DNF, KDNF, KNF, KKNF

Diszjunktív normálforma (DNF): elemi konjunkciók diszjunkciója.
Konjunktív normálforma (KNF): elemi diszjunkciók konjunkciója.
Kitűntetett diszjunktív / konjunktív normálforma (KDNF / KKNF): teljes elemi diszjunkciók konjunkciója / konjunkciók diszjunkciója.

B. Feladatok

1. Melyik (egyszerű) állítás?

   (a) A természetes számok körében kétszer kettő az öt.

   (b) Holnap megírom a leckém.

   (c) A világbajnok magyar férfi labdarúgóválogatott kapusa a Real Madridhoz igazolt.

   (d) Iskolánk tanára 50 éves.

   (e) x nagyobb, mint 3, ahol x eleme a természetes számoknak.

   (f) Ez az állítás hamis.

   (g) Mi értelme ennek a feladatnak?

2. Formalizálás. Az alábbi összetett állításoknak mely egyszerű állítások a komponensei és a nyelvi összekötők mely logikai összekötőnek felelnek meg?

   (a) Elmegyek veled moziba, de előbb kiugrok a közértbe.

   (b) Anna nem táncol Bélával kivéve ha Béla meghívja egy üdítőre.

   (c) Csak úgy lehet sikeres egy vállalkozás, ha van egy jó üzleti terv.

   (d) A vizsgára jelentkezés előfeltétele a gyakorlati jegy megszerzése.

   (e) Ádám csak akkor hívja meg Évát egy kólára, ha Éva rámosolyog.

3. Készítsünk ítéletlogikai formulákat csak az X, Y és Z ítéletváltozók felhasználásával és határozzuk meg a logikai összetettségüket. Rajzoljuk fel egy legalább 3 összetettségű formula szerkezeti fáját és határozzuk meg az összes részformuláját!

4. Jelöljük be az alábbi formulákban az egyes logikai összekötők hatáskörét!

   (a) $((((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to \neg X) \vee Z)$

   (b) $(((X \vee Y) \wedge \neg Z) \wedge (Z \supset (\neg Z \to Y)))$

5. Adjuk meg, hogy mennyire összetettek az alábbi formulák! Hagyjuk el a lehető legtöbb zárójelet az alábbi formulákból!

   (a) $(((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \supset (\neg X \vee Z))$

   (b) $((X \to Y) \to (Y \to X))$

   (c) $(((X \to (\neg Y \wedge Z)) \vee (X \wedge Y)) \vee Z)$

   (d) $((Y \to (X \wedge Z)) \wedge \neg((X \vee Z) \to Y))$

6. Jelöljük be az alábbi formulákban az egyes logikai összekötők hatáskörét!
   (a) $(X \to Y \wedge (Y \to Z) \to \neg X) \vee Z$
   (b) $Y \to X \wedge \neg Z \vee \neg Y \to X$
7. Legyen $I(X) = i, I(Y) = h$ és $A = X \to \neg Y \wedge X$. Határozzuk meg $\mathcal{B}_I(A)$-t!
8. Készítsük el az alábbi formulák ítélettábláját!
   (a) $X \to \neg Y \wedge X$
   (b) $\neg(\neg X \vee \neg Y)$
   (c) $(X \to Y) \to Z$
   (d) $X \to (Y \to Z)$
9. Adjunk meg egy olyan formulát, amelyik csak a $\neg, \wedge, \vee$ műveleteket tartalmazza és amelynek ítélettáblájának utolsó oszlopa megegyezik az alábbi formulával.
   (a) $X \to Y$
   (b) $X \oplus Y$ („kizáró vagy", éppen az (i, h) és (h, i) sorokban igaz)
10. Adjunk 1-1 példát minden szemantikus fogalomra.
11. Lássuk be a nevezetes ekvivalenciák közül az (f)-et!
12. Gondoljuk végig (nem feltétlenül formálisan) miért igaz az alábbi állítás!

    Legyen A egy formula és F egy részformulája. Tegyük fel, hogy $F \sim_0 G$ valamely G formulára és legyen B az a formula, amit A-ból úgy kapunk, hogy az F részformulát G-vel helyettesítjük. (Például A szerkezeti fájában az F-nek megfelelő részfát G szerkezeti fájával helyettesítjük.) Ekkor $A \sim_0 B$.
13. Lássuk be hogy $\models_0 X \to (Y \to X)$!
    (a) ítélettáblás módszerrel
    (b) a formula átalakításával

14. Melyik literál, (teljes) elemi diszjunkció/konjunkció, (kitűntetett) KNF/DNF az alábbiak közül az X, Y, Z bázisban?

    (a) $X \to Y$

    (b) $\neg Z$

    (c) $X \wedge \neg Y \wedge Z$

    (d) $(X \vee \neg Y) \wedge Y$

    (e) $(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z)$

15. (a) Bizonyítsuk be, hogy minden A formulához adható vele ekvivalens KNF és DNF!

    (b) Adjuk meg a KNF-et/DNF-et amit a fenti módszer eredményez az $(X \to Y) \to Z$ formulára!

16. Ekvivalens átalakításokkal hozzuk KNF-re az alábbi formulákat!

    (a) $(X \to Y) \to \neg(X \wedge \neg Y)$

    (b) $\neg(X \to Z) \vee \neg(\neg X \vee Z \to Y)$

    (c) $\neg(\neg X \vee Z \to Y \vee X)$

C. Megoldások