Eldönthetetlenség

I. Elméleti háttér

A. Definíciók

- Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, vagy **rekurzívan felsorolható** ha $L = L(M)$ valamely M Turing-gépre. A rekurzívan felsorolható nyelvek osztályát RE -vel jelöljük.
- Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, vagy **rekurzív** ha létezik olyan M Turing-gép, mely minden bemeneten megáll és $L = L(M)$. A rekurzív (eldönthető) nyelvek osztályát pedig R-rel jelöljük.
- Egy M Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M\rangle$): Ha $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, ahol $Q = \{p_1, \dots, p_k\}, p_1 = q_0, p_{k-1} = q_i, p_k = q_n, \Gamma = \{X_1, \dots, X_m\}, D_1 = R, D_2 = L, D_3 = S$, akkor egy $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmenet kódja $0^i10^j10^r10^s10^t$. $\langle M\rangle$ az átmenetek kódjainak felsorolása 11-el elválasztva.
- $\langle M, w\rangle = \langle M\rangle 111w$
- Néhány az előadáson tanult nevezetes nyelv:

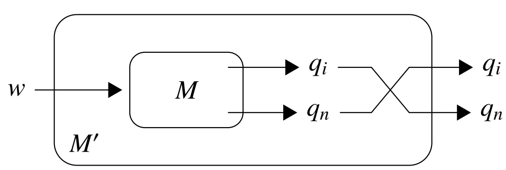
  $L_{\text{átló}} = \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\}$.

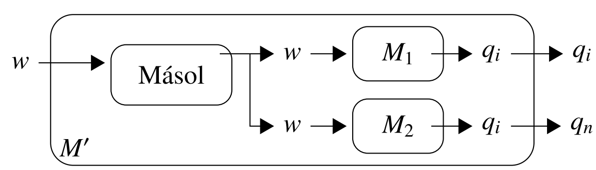
  $L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$.

  $L_{\text{h}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}$.

B. Tételek

- $L_{\text{átló}} \notin RE$
- $L_u \in RE,\ \ L_u \notin R$
- $L_{\text{h}} \in RE,\ \ L_{\text{h}} \notin R$
- Ha $L \in R$, akkor $\bar{L} \in R$.
- Ha $L \in RE$ és $\bar{L} \in RE$, akkor $L \in R$.

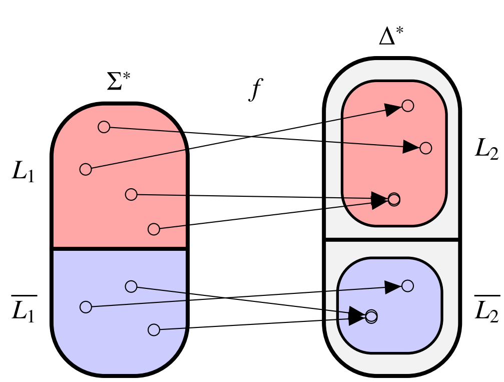




C. Visszavezetés

C1. Definíció

- $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ **kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami kiszámítja. (lásd szófüggvényt kiszámító TG-ek)
- $L_1 \subseteq \Sigma^*$ **visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leq L_2$



C2. Tételek

- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin RE$, akkor $L_2 \notin RE$.
- Ha $L_1 \leq L_2$ és $L_1 \notin R$, akkor $L_2 \notin R$.

D. Egy konkrét eldönthetetlen nyelv

Post megfelelkezési probléma: Legyen Σ egy véges abc. Post megfelelkezési problémájának egy bemenete egy (s,t) $(s,t \in \Sigma^*)$ alakú rendezett párokból álló véges H halmaz. A megfelelkezési feladat egy H bemenetét megoldhatónak nevezzük, ha vannak olyan (nem feltétlenül különböző) H-beli $(s_1,t_1),(s_2,t_2),\ldots,(s_n,t_n)$ párok úgy, hogy $s_1 s_2 \ldots s_n = t_1 t_2 \ldots t_n$, Ilyenkor az $s_1 s_2 \ldots s_n$, vagy ami ugyanaz, a $t_1 t_2 \ldots t_n$ szót a H megoldásának nevezzük.

$L_D = \{\langle D \rangle \,|\, \text{a } D \text{ dominókészletnek van megoldása}\} \in RE \setminus R$

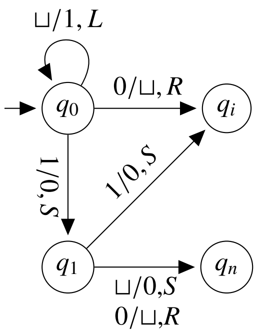
Eészrevétel: Egy megoldáshoz a dominók többször felhasználhatók és nem kell minden dominót felhasználni. Egy dominókészletnek több megoldása is lehet.

II. Feladatok

1. Melyik TG-et kódolja az alábbi sorozat?

   010100100010110100100010100011010001010010 0

2. Legyen M az alábbi TG és $w = 1011100$ Adjuk meg $\langle M, w \rangle$-t.



3. Legyen az i. Turing gép (M_i) előadáson (és gyakorlaton) látott kódolása w_i. Lássuk be visszavezetéssel, hogy az alábbi nyelvek nem rekurzívak!

   (a) $L_{\mathrm{h},\varepsilon} = \{w_i \mid M_i \text{ megáll } \varepsilon\text{-n}\}$,

   (b) $L_{\text{üres}} = \{w_i \mid L(M_i) = \emptyset\}$,

   (c) $L_{\mathrm{EQ}} = \{w_i 111 w_j \mid L(M_i) = L(M_j)\}$,

   (d) $L_{\text{h, valami}} = \{w_i \mid M_i \text{ megáll valamely inputon}\}$

   (e) $L_{\text{véges}} = \{w_i \mid L(M_i) \text{ véges}\}$

4. Rekurzíve felsorolhatók-e az előző feladat nyelvei?

5. Adjuk meg a PMP egy olyan bemenetét, amelyiknek van megoldása és egy olyat is aminek nincs!

6. Adjuk meg a PMP egy olyan D bementét, melyre az alábbi feltételek mindegyike teljesül

   (a) $|D| \geq 3$

   (b) D-nek van megoldása

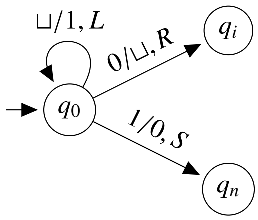
   (c) D semmelyik 2 elemű részhalmazának nincs megoldása

III. Megoldások

1.

$0 = q_0$	$0 = 0$	$0 = R$
$00 = q_i$	$00 = 1$	$00 = L$
$000 = q_n$	$000 = \sqcup$	$000 = S$

010100100010 11 01001000101000 11 0100010100100



3.a.
Visszavezetjük rá az $L_{\mathrm{h}} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ megáll a w bemeneten$\}$ nyelvet.
$f(\langle M, w\rangle) := \langle M_w\rangle$
M_w konstrukciója:

- másolja rá w-t a szalagjára, tekerjen vissza az elejére
- tekerjen w elejére
- működjön úgy, ahogy M

Ekkor:

- f kiszámítható
- M' megáll ε-n $\Leftrightarrow$ M megáll w-n

Tehát $L_{\mathrm{h}} \leq L_{\mathrm{h},\varepsilon}$.

3.b.
Visszavezetjük $\bar{L}_{\text{üres}}$-re az $L_{\mathrm{h},\varepsilon}$ nyelvet.
$f(\langle M\rangle) := \langle M'\rangle$
M' konstrukciója:

- törölje le az inputját
- működjön úgy, ahogy M
- ha M q_n-be jutna, M' menjen q_i-be.

Ekkor:

- f kiszámítható
- $L(M') = \emptyset \Leftrightarrow M$ nem áll meg ε-n

Tehát $L_{\mathrm{h},\varepsilon} \leq \bar{L}_{\text{üres}}$. Ebből következik.

3.c. Ha eldönthető lenne, akkor el tudnánk dönteni $L_{\text{üres}}$-et.
Indirekt: létezik az L_{EQ}-t eldöntő gép.
Az M gépre, és egy tudottan semmit sem elfogadó M'-re kérdezzük meg, hogy ugyanazt a nyelvet ismerik-e fel.

5.

$$\left\{\frac{b}{ca}, \frac{dd}{e}, \frac{a}{ab}, \frac{ca}{a}, \frac{abc}{c}\right\}$$

készlet egy lehetséges megoldása

$$\frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}$$

.

Egy másik megoldás

$$\frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}\ \frac{a}{ab}\ \frac{b}{ca}\ \frac{ca}{a}\ \frac{a}{ab}\ \frac{abc}{c}$$

.

6.

$$\left\{\frac{a}{ab}, \frac{b}{cd}, \frac{cde}{e}\right\}$$