10. előadás

2020. április 27.

Kettős integrálok kiszámítása 1.

Kétváltozós valós értékű függvény integrálhatóságának az eldöntése és az integráljának a kiszámolása a definíció alapján *nem egyszerű* feladat.

Ha a korlátos $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integrálható a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor az integrálját a korábbi jelöléseinket kissé módosítva a

$$\iint\limits_H f \quad \text{vagy az} \quad \iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy$$

szimbólumok valamelyikével fogjuk jelölni.

Az integrálok kiszámolására a gyakorlatban jól használható, *az integrálási tartománytól függő* képletek ismeretesek. A továbbiakban ezekre vonatkozó eredményeket ismertetünk.

• Kettős integrál kiszámítása téglalapon (szukcesszív integrálással)

Leonhard Euler (1707–1783) fedezte fel azt a fontos tényt, hogy *folytonos függvény* kettős integráljának a kiszámítását vissza lehet vezetni két valós-valós függvény egymásra következő (szukcesszív) integráljának a kiszámolására. Euler eredményét *Guido Fubini* (1879–1943) általánosította *integrálható függvényekre*.

A továbbiakban feltesszük, hogy adott egy

$$I := I_1 \times I_2 := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$$

kétdimenziós intervallum és egy $f : I \to \mathbb{R}$ *korlátos* függvény.

Kétváltozós függvény viselkedésének az áttekintését megkönnyítheti, ha az egyik változóját rögzítjük, és a függvényt a másik változó függvényének fogjuk fel. Az így kapott függvények az eredeti függvény ún. *szekciófüggvényei.*

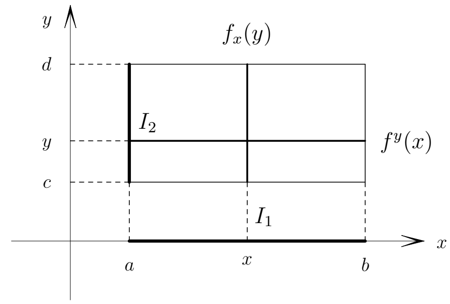
Ha $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ adott kétváltozós függvény, akkor tetszőlegesen rögzített $x \in I_1$ esetén az

$$f_x : I_2 \to \mathbb{R}, \quad f_x(y) := f(x,y) \quad \big(y \in I_2\big);$$

tetszőlegesen rögzített $y \in I_2$ esetén az

$$f^y : I_1 \to \mathbb{R}, \quad f^y(x) := f(x,y) \quad \big(x \in I_1\big)$$

az f függvény szekciófüggvényei.



1. tétel. (A szukcesszív integrálás tétele.) *Legyen* $I = [a, b] \times [c, d]$ *és* $f : I \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy*

(a) $f \in R(I)$,

(b) $\forall\, x \in [a, b]$ *pont esetén* $f_x \in R[c, d]$;

(c) $\forall\, y \in [c, d]$ *pont esetén* $f^y \in R[a, b]$.

Ekkor

$$(1) \qquad \iint\limits_I f = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

1. megjegyzés. Ha az f függvény folytonos az I téglalapon, akkor az f_x $(x \in [a, b])$ és az f^y $(y \in [c, d])$ szekciófüggvények is folytonosak, következésképpen Riemann-integrálhatóak. Így a tétel feltételei teljesülnek. Ebben az esetben az állítás egyszerűen bebizonyítható. Korábban már említettük, hogy ennek a speciális esetnek a felfedezése Euler érdeme.

2. megjegyzés. Formálisan megfogalmazva tehát a fenti feltételek teljesülése esetén egy kétváltozós függvény integrálját kiszámíthatjuk úgy is, hogy az egyik változót először (tetszőlegesen) rögzítjük, és a másik változó szerint integrálunk, majd az így kapott (a rögzített változótól függő) integrált integráljuk. (Innen ered a *szukcesszív* (egymás utáni) jelző.) Az (1) egyenlőség azt is állítja, hogy az integrálást bármelyik változóval kezdhetjük, tehát az *integrálás sorrendje felcserélhető*. Ez a helyzet például akkor, ha az f függvény *folytonos*.

3. megjegyzés. A szukcesszív integrálás tétele azt állítja, hogy (a tétel feltételeinek a teljesülése esetén) mindegy, hogy melyik sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz lesz. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a kétféle sorrendben történő kiszámolás során ugyanolyan technikai jellegű nehézségek lépnek fel. Előfordulhatnak lényeges különbségek is. Erre a gyakorlaton mutatunk majd példát.

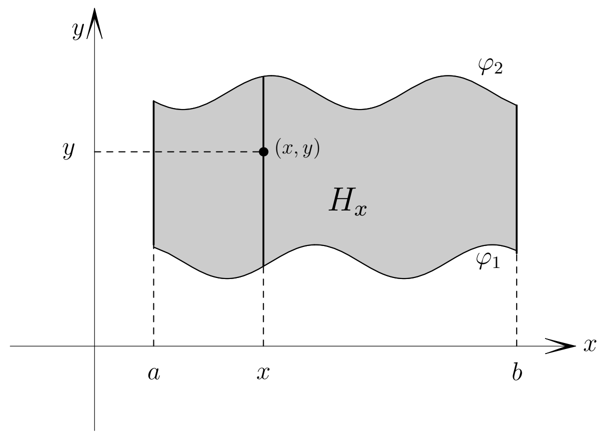
• Kettős integrál kiszámítása normáltartományon

Gyakran előfordul, hogy nem intervallumon értelmezett függvény integrálját kell kiszámítani. A legegyszerűbb esetek a következők.

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ $(\forall\, x \in [a, b])$. A

$$H_x := \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \big\}$$

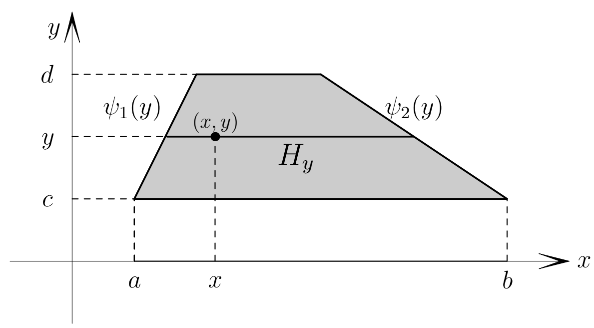
halmazt a *x tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Legyenek $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ $(\forall\, y \in [c,d])$. A

$$H_y := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; c \le y \le d,\; \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\big\}$$

halmazt a *y tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Az eddigiekből egyszerűen adódnak az alábbi fontos állítások.

2. tétel.

1^o *Legyen H_x az x tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_x \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_x)$ és*

$$\iint\limits_{H_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2^o *Legyen H_y az y tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_y \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_y)$ és*

$$\iint\limits_{H_y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Tegyük fel, hogy a H integrálási tartomány az x tengelyre és az y tengelyre nézve is normáltartomány és az f függvény folytonos H-n. Ekkor a fenti tétel szerint az $\iint_H f$ kettős integrált kétféle sorrendben is kiszámíthatjuk. Az integrálás sorrendjének felcserélésénél azonban körültekintően kell eljárnunk.

Példa. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük a következő kettős integrált:*

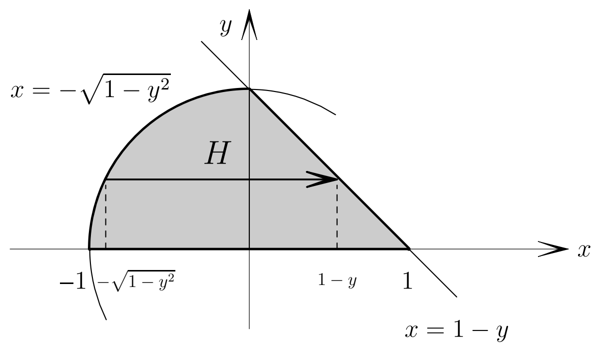
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Szemléltessük az integrálási tartományt. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét.

Megoldás. A H-val jelölt integrálási tartomány a

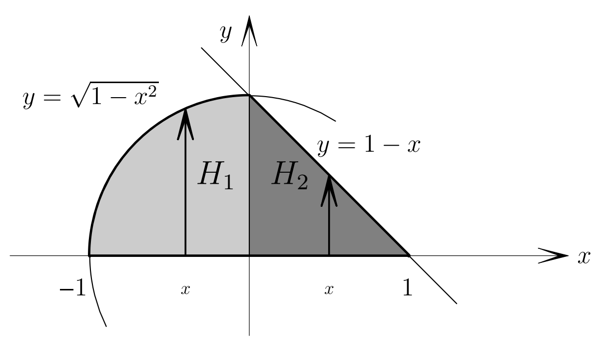
$$0 \le y \le 1, \quad -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza:



Mivel H az y tengelyre nézve normáltartomány, ezért először az x változó, utána pedig az y változó szerint integrálunk. (A nyíl jelzi a belső integrálban az integrálás irányát.)

Ha a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak tekintjük, akkor először az y, utána pedig az x változó szerint kell integrálnunk. Az f függvény folytonos $\mathbb{R}^2$-őn (tehát a H halmazon is), ezért az integrálás sorrendje felcserélhető. A H tartományt ebben az esetben az alábbi módon két részre bontjuk:



A tartományokat a következő egyenlőtlenségrendszerek határozzák meg:

$$H_1 : \quad -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2};$$
$$H_2 : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x.$$

Így

$$\iint\limits_{H_1} f = \int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

$$\iint\limits_{H_2} f = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Mivel

$$\iint\limits_{H} f = \iint\limits_{H_1} f + \iint\limits_{H_2} f,$$

ezért

$$\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx. \blacksquare$$

Megjegyzés. Itt emlékeztetünk arra, hogy egyváltozós határozott integrálok kiszámításához bizonyos esetekben a Newton–Leibniz-tétel nem használható. Ez a helyzet például akkor, amikor az inetgrálandó függvénynek van primitív függvénye (mert pl. folytonos), azonban a primitív függvény nem elemi függvény. Bebizonyítható, hogy ilyenek a következő függvények:

$$e^{\pm x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \cos x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{\cos x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$$

$$\frac{1}{\ln x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \sqrt{x^3+1} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$$

Ha egy kettős integrál kiszámolásánál ilyen függvények adódnak, akkor bizonyos esetekben az integrálás sorrendjének a felcserélése segíthet.