Természetes levezetés

November 4, 2020

Tartalomjegyzék

1 Feladatok

1.1 Ítéletlogika

1. Bizonyítsuk a következő levezetést: $\vdash_0 A \supset A$
2. Bizonyítsuk a következőt: $\neg\neg A \vdash_0 A$
3. Bizonyítsuk a következőt: Biz 3 - $A \vdash_0 \neg\neg A$
4. Bizonyítsuk a következőt: Biz 4 - $A \supset B \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$
5. Bizonyítsuk a következő levezetést: $(A \vee B) \supset C \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$
6. Bizonyítsuk a következő levezetést: $\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B)$
7. Bizonyítsuk a "Nyomozós feladatot": $F \supset K, K \supset A, \neg A \vdash_0 \neg F$

1.2 Elsőrendű logika

1. Bizonyítsuk a következő levezetést: $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$
2. Bizonyítsuk a következő levezetést: $\neg\forall x(P(x) \vee R(x)) \vdash \exists x(P(x) \supset R(x))$
3. Helyes-e a következtetés?

   (a) Fifi puli.
   (b) Minden puli kutya.
   (c) Minden kutya, aki ugat, nem harap.
   (d) Fifi ugat.

   Következmény: Van olyan kutya, aki nem harap.

2 Megoldások

2.1 Ítéletlogika

1. $\vdash_0 A \supset A$

$$(\supset b)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{A \vdash_0 A}}{\vdash_0 A \supset A}$$

2. $\neg\neg A \vdash_0 A$

$$(\neg a)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{\neg\neg A \vdash_0 \neg\neg A}}{\neg\neg A \vdash_0 A}$$

3. $A \vdash_0 \neg\neg A$

$$(\neg b)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{A, \neg A \vdash_0 A} \qquad \dfrac{\checkmark}{A, \neg A \vdash_0 \neg A}}{A \vdash_0 \neg\neg A}$$

4. $A \supset B \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B$

$$(\supset b)\ \dfrac{(\neg b)\ \dfrac{(\supset a)\ \dfrac{(\neg a)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 \neg\neg A}}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 A} \qquad \dfrac{\checkmark}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 A \supset B}}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 B} \qquad \dfrac{\checkmark}{A \supset B, \neg\neg A, \neg B \vdash_0 \neg B}}{A \supset B, \neg\neg A \vdash_0 \neg\neg B}}{A \supset B \vdash_0 \neg\neg A \supset \neg\neg B}$$

5. $(A \vee B) \supset C \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

$$(\wedge b)\ \dfrac{(\supset b)\ \dfrac{(\supset a)\ \dfrac{(\vee b)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 A}}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 A \vee B} \qquad \dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 (A \vee B) \supset C}}{(A \vee B) \supset C, A \vdash_0 C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 A \supset C} \qquad (\supset b)\ \dfrac{(\supset a)\ \dfrac{(\vee b)\ \dfrac{\dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 B}}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 A \vee B} \qquad \dfrac{\checkmark}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 (A \vee B) \supset C}}{(A \vee B) \supset C, B \vdash_0 C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 B \supset C}}{(A \vee B) \supset C \vdash_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)}$$

6. $\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B)$

$$
(\supset b)\,\dfrac{(\supset b)\,\dfrac{(\neg a)\,\dfrac{(\neg b)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{A, \neg A, \neg B \vdash_0 A} \qquad \dfrac{\checkmark}{A, \neg A, \neg B \vdash_0 \neg A}}{A, \neg A \vdash_0 \neg\neg B}}{A, \neg A \vdash_0 B}}{A \vdash_0 \neg A \supset B}}{\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B)}
$$

7.
$$
(\neg b)\,\dfrac{(\supset a)\,\dfrac{(\supset a)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 F} \qquad \dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 F \supset K}}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 K} \qquad \dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 K \supset A}}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 A} \qquad \dfrac{\checkmark}{F \supset K, K \supset A, \neg A, F \vdash_0 \neg A}}{F \supset K, K \supset A, \neg A \vdash_0 \neg F}
$$

2.2 Elsőrendű logika

1. $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$

Próba 1:

$$
(\wedge b)\,\dfrac{(\exists b)\,\dfrac{(\exists a)\,\dfrac{\text{Nem valid lépés, mert } x \in Par(P(x))!}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 P(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x)} \qquad \dfrac{...}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x R(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)}
$$

Próba 2:

$$
(\wedge b)\,\dfrac{(\exists b)\,\dfrac{(\exists a)\,\dfrac{(\wedge a)\,\dfrac{\dfrac{\text{Nem jó!}}{P(x), R(x) \vdash_0 P(y)}}{P(x) \wedge R(x) \vdash_0 P(y)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 P(y)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x)} \qquad \dfrac{...}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x R(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash_0 \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)}
$$

Próba 3:

$$
(\exists a)\,\dfrac{(\wedge a)\,\dfrac{(\wedge b)\,\dfrac{(\exists b)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{P(x),R(x)\vdash_0 P(x)}}{P(x),R(x)\vdash_0 \exists xP(x)} \qquad (\exists b)\,\dfrac{\dfrac{\checkmark}{P(x),R(x)\vdash_0 R(x)}}{P(x),R(x)\vdash_0 \exists xR(x)}}{P(x),R(x)\vdash_0 \exists xP(x)\wedge\exists xR(x)}}{P(x)\wedge R(x)\vdash_0 \exists xP(x)\wedge\exists xR(x)}}{\exists x(P(x)\wedge R(x))\vdash_0 \exists xP(x)\wedge\exists xR(x)}
$$

2. $\neg\forall x(P(x)\vee R(x))\vdash\exists x(P(x)\supset R(x))$

$$
(\exists b)\,\dfrac{(\supset b)\,\dfrac{(\neg a)\,\dfrac{(\neg b)\,\dfrac{(\forall b)\,\dfrac{\text{Nem valid, mert x szabad változó a formulahalmazban!}}{\neg\forall x(P(x)\vee R(x)),P(x),\neg R(x)\vdash\forall x(P(x)\vee R(x))} \qquad \dfrac{\checkmark}{\neg\forall x(P(x)\vee R(x)),P(x),\neg R(x)\vdash\neg\forall x(P(x)\vee R(x))}}{\neg\forall x(P(x)\vee R(x)),P(x)\vdash\neg\neg R(x)}}{\neg\forall x(P(x)\vee R(x)),P(x)\vdash R(x)}}{\neg\forall x(P(x)\vee R(x))\vdash P(x)\supset R(x)}}{\neg\forall x(P(x)\vee R(x))\vdash\exists x(P(x)\supset R(x))}
$$

Amit látunk: Az összetett $\neg\forall x(...)$ formulát a negált szabályokkal tudjuk kihozni, viszont figyelni kell arra, hogy ezt hamarabb kell megtennünk, mint a levezetendő állításban a egzisztenciális kvantor elhagyást!

3.

Formalizálás $U=\{\text{állatok}\}$, $a\in U$, ahol a egy konstans, ami Fifit jelöli.

$$
3.\quad \begin{array}{l||l}
\text{- } K(x): \text{x kutya} & 1.\ P(a) \\
\text{- } P(x): \text{x puli} & 2.\ \forall x(P(x)\supset K(x)) \\
\text{- } U(x): \text{x ugat} & 3.\ \forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x)) \\
\text{- } H(x): \text{x harap} & 4.\ U(a) \\
 & \text{Következmény: } \exists x(K(x)\wedge\neg H(x))
\end{array}
$$

A könnyebb olvashatóság miatt időnként csak a fontos halmazbeli elemeket írtuk ki, úgy, hogy ... jelöli a formulahalmaz meg nem jelenített elemeit. De természetesen a formulahalmaz elemei ugyanúgy jelen vannak a levezetés bal oldalán.

1. ábra

$$[\exists b]\;\dfrac{[\wedge b]\;\dfrac{[\supset a]\;\dfrac{[3\text{ csere}]\;\dfrac{\dfrac{\checkmark}{...,P(a)\vdash P(a)}}{P(a),...\vdash P(a)} \qquad [\forall a]\;\dfrac{\dfrac{\checkmark}{...,\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash \forall x(P(x)\supset K(x))}}{...,\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash P(a)\supset K(a)}}{...,\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash K(a)} \qquad \dfrac{\text{2. ábra} \quad \text{3. ábra}}{...,\forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x)),...\vdash \neg H(a)}\;[\supset a]}{P(a),U(a),\forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x)),\forall(P(x)\supset K(x))\vdash K(a)\wedge\neg H(a)}}{P(a),U(a),\forall(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x)),\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash \exists x(K(x)\wedge\neg H(x))}$$

2. ábra

$$[\wedge b]\;\dfrac{[\supset a]\;\dfrac{[3\text{ csere}]\;\dfrac{\dfrac{\checkmark}{...,P(a)\vdash P(a)}}{P(a),...\vdash P(a)} \qquad [\forall a]\;\dfrac{\dfrac{\checkmark}{...,\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash \forall x(P(x)\supset K(x))}}{...,\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash P(a)\supset K(a)}}{...,\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash K(a)} \qquad \dfrac{\checkmark}{...,U(a)\vdash U(a)}}{P(a),U(a),\forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x)),\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash K(a)\wedge U(a)}$$

3. ábra

$$[\forall a]\;\dfrac{[\text{csere}]\;\dfrac{\dfrac{\checkmark}{P(a),U(a),\forall x(P(x)\supset K(x)),\forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x))\vdash \forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x))}}{P(a),U(a),\forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x)),\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash \forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x))}}{P(a),U(a),\forall x(K(x)\wedge U(x)\supset\neg H(x)),\forall x(P(x)\supset K(x))\vdash (K(a)\wedge U(a))\supset\neg H(a)}$$

Minden ágon eljutottunk az azonosság törvényéhez, vagyis a levezetés helyes.