

Logika

Elsőrendű logika nyelve

Tartalom

Nulladrendű állítás

Az ítéletlogikában nem foglalkoztunk az állítások minősítésével és az állítások leírásával. Az állítás definíciója szerint az állítást egy kijelentő mondatból ki lehet fejezni.

Ha a kijelentő mondat *alanya valamely konkrét dolog*, akkor az állítást **nulladrendű állítás**nak hívjuk. Az ilyen állítások formális leírására egy relációt (logikai függvényt) definiálunk.

Példák

- $E(x) = i$, ha x egész szám
- $P(x) = i$, ha x prímszám
- $L(x, y, z) = i$, ha z az x és az y legnagyobb közös osztója

Az állítás konkrét egyedekkel behelyettesített reláció. Pl.: $E(9)$ vagy $L(9,6,3)$ állítások, de $L(9,6,z)$ nem állítás (paraméteres állítás).

Ha a kijelentő mondat *alanya egy halmaz*, akkor az állítást **elsőrendű állítás**nak hívjuk.

Ilyenkor az állítás az összes elemre egyidejűleg fennálló megállapítást/általánosítást vagy a halmaz bizonyos elemeire (nem feltétlenül mindre) fennálló megállapítást/létezést fogalmaz meg.

Leírásukhoz a kvantorokat (\forall, \exists) használjuk.

Példa

- $\forall x E(x)$ azt jelenti, hogy a halmaz minden eleme egész szám.
- $\exists x P(x)$ azt jelenti, hogy a halmazban van olyan elem, ami prímszám.

Az 1800-as évek végén és az 1900-as évek elején a matematikai struktúrák (halmazelmélet és az aritmetika – számelmélet) logikai vizsgálatához meg kellett teremteni mind a nulladrendű, mind az elsőrendű állítások leírására szolgáló eszközöket. Szükségessé vált a matematikai struktúrákat leíró nyelv definiálása.

Definíció

A matematikai struktúra egy $\langle U, R, M, K \rangle$ halmaznégyes, ahol

- U : nem üres halmaz, a struktúra értelmezési tartománya (amennyiben U egyfajtájú elemekből áll)
- R : az U -n értelmezett n -változós ($n = 1, 2, \dots, k$) logikai függvények (**alaprelációk**) halmaza
- M : az U -n értelmezett n -változós ($n = 1, 2, \dots, k$) matematikai függvények (**alpműveletek**) halmaza
- K : az U megjelölt elemeinek egy (esetleg üres) részhalmaza

A **struktúra szignatúrája** (ν_1, ν_2, ν_3 egészértékű fgv.együttes) megadja az alaprelációk és az alpműveletek arítását, valamint K elemszámát.

Adott matematikai struktúra leíró nyelv ábécéjének logikán kívüli része áll:

- az R halmazbeli alaprelációk *neveiből*
- az M halmazbeli alpműveletek *neveiből*
- a K halmazbeli elemek *neveiből*

Ezekkel a nevekkal már lehet egyszerű (nulladrendű és paraméteres) állításokat leírni. Az R , M , K -beli nevek a leíró nyelv **logikán kívüli** részét képezik.

Az összetett állítások és az elsőrendű állítások leírására kibővítjük az ábécét a **logikai szimbólumokkal** (az ábécé logikai része):

- individuumváltozók
- unér és binér logikai műveleti jelek $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok \forall, \exists
- elválasztójelek $() ,$

Ez együtt egy adott matematikai struktúra logikai leíró nyelvének az ábécéje.

$\langle \mathbb{N}_0; =, s, +, *, 0 \rangle$ együttes, ahol

- x, y, \dots : individuumváltozók befutják a természetes számok halmazát (\mathbb{N}_0 -t)
- $=$: az $\{(x, x)\}$ igazhalmazú alapreláció neve
- s : az egyváltozós rákövetkezés függvény neve
- $+$ és $*$: rendre az összeadás és a szorzás műveletek nevei
- 0 : a megjelölt univerzumelem neve (az az elem, amely nem tartozik a rákövetkezés függvény értékkészletébe)

¹Tk.36-37.o.

Példa – elemi aritmetika

A **struktúra szignatúrája** alatt az alaprelációk és az alapműveletek arításait, valamint a konstansok számát megadó ν_1, ν_2, ν_3 egész értékű függvényeket értjük.

Esetünkben: $\nu_1(=) = 2$, $\nu_2(s) = 1$, $\nu_2(+) = 2$, $\nu_2(*) = 2$, $\nu_3 = 1$

Felsorolással megadva:

=	s	+	*	0
2	1	2	2	1

Az elemi aritmetika leíró nyelvének ábécéjében az \mathbb{N}_0 kezelésére a **változók** (x, y, \dots) szolgálnak (individuumváltozók), az $\{=, s, +, *, 0\}$ jelek a megfelelő **leképezések azonosítói**. A leíró nyelv szignatúrája ugyanaz, mint a struktúráé.

Az alaprelációkkal (itt az $=$ relációval) lehet állításokat leírni, pl. $2 = 3$, $5 = 5$. De nem állítás pl. $y = 5$ vagy $z = w$ (paraméteres állítások). Egyéb ismert egyszerű állításokat pl. a kisebb egyenlő relációt ezen a nyelven csak összetett állítás formájában lehet felírni (formalizálni). Ehhez a nyelv ábécéjét logikai résszel bővítjük ki. Ezek:

- individuumváltozók: x, y, \dots
- logikai összekötőjelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok: \forall, \exists
- elválasztójelek: $() ,$

Példa – aritmetika, geometria

Definiáljuk (formalizáljuk) az aritmetika logikai leíró nyelvén a \leq relációt:

$$x \leq y$$

$$x \leq y =_{def} \exists z((x + z) = y)$$

Megjegyzés: Az aritmetika univerzuma *egyfajtájú* elemekből, a természetes számokból állt. Egy matematikai struktúra univerzuma *többfajtájú* elemekből is állhat. Például a térgeometriában pontok, egyenesek és síkok alkotják az értelmezési tartományt. Ekkor a leíró nyelv ábécéjében a fajták elnevezésére is bevezetünk jeleket. Esetünkben ezek a nevek: p, e, s . Így az értelmezési tartomány $U_p \cup U_e \cup U_s$ lesz, a struktúra pedig az $\langle U_p \cup U_e \cup U_s, R, M, K \rangle$ együttes.

Az elsőrendű logika leíró nyelve (\mathcal{L}) – követelmények

Olyan ábécével kell hogy rendelkezzen, melynek a logikán kívüli szimbólumai és azok szignatúrája paraméterezéssel bármely adott matematikai struktúra szignatúrájával megfeleltethető kell legyen, és ennél fogva a szimbólumok lehessenek a struktúra relációinak, műveleteinek és megjelölt elemeinek a nevei. Más szóval a nyelv alkalmas kell, hogy legyen tetszőleges szignatúrájú matematikai struktúrák leírására.

Egyféle elemből álló U esetén az $\langle U, R, M, K \rangle$ struktúra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az \mathcal{L} nyelv ábécéje: $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$, szignatúrája: (ν_1, ν_2, ν_3) .

- Pr : predikátumszimbólumok halmaza
 ν_1 : $P \in Pr$ -re megadja P aritását (k)
- Fn : függvényszimbólumok halmaza
 ν_2 : $f \in Fn$ -re megadja f aritását (k)
- $Cnst$: konstansszimbólumok halmaza
 ν_3 : megadja a konstansok számát

Többfajtájú struktúrákat leíró nyelvek

Többféle elemből álló U esetén az $\langle U, R, M, K \rangle$ struktúra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az \mathcal{L} nyelv ábécéje: $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$, szignatúrája: (ν_1, ν_2, ν_3) .

- Srt : nemüres halmaz, melynek π_j elemei fajtákat szimbolizálnak
- Pr : predikátumszimbólumok halmazaza
 ν_1 : $P \in Pr$ -re megadja P aritását (k), és hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$
- Fn : függvénytípusok halmazaza
 ν_2 : $f \in Fn$ -re megadja f aritását (k), és hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok, valamint a függvény értéke $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k; \pi_f)$
- $Cnst$: konstansszimbólumok halmazaza
 ν_3 : megadja minden fajtához a konstansok számát.

- különböző fajtájú individuumváltozók (minden fajtához megszámlálhatóan végtelen sok): x, y, y_k, \dots
- unér és binér logikai műveleti jelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok: \forall, \exists
- elválasztójelek: $() ,$

Az \mathcal{L} nyelv ábécéjére $V[V_\nu]$ -vel hivatkozunk, ahol V_ν adja meg a (ν_1, ν_2, ν_3) szignatúrájú $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$ halmaznégyest.

A nyelv kifejezései

A nyelv kifejezései informálisan:

- **termek:** a matematikai leképezéseket szimbolizálják
- **formulák:** a logikai leképezéseket szimbolizálják

Az elsőrendű logika szintaxisa ² – term I.

Egyfajtájú eset.

Termek – $\mathcal{L}_t(V_\nu)$

- ① (alaplépés) Minden individuumváltozó és konstans szimbólum term.
- ② (rekurzív lépés) Ha az $f \in F_n$ k -változós függvénytípus szimbólum és t_1, t_2, \dots, t_k termek, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ is term.
- ③ Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

²Tk.112.o.

Egyfajtájú eset.

Formulák – $\mathcal{L}_f(V_\nu)$

- ① (alaplépés) Ha a $P \in Pr$ k -változós predikátumszimbólum és t_1, t_2, \dots, t_k termek, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$ formula (atomi formula).
- ② (rekurzív lépés)
 - Ha A formula, akkor $\neg A$ is az.
 - Ha A és B formulák, akkor $(A \circ B)$ is formula, ahol \circ a három binér művelet bármelyike.
- ③ Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.
- ④ Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Többfajtájú eset.

Termek – $\mathcal{L}_t(V_\nu)$

- 1 (alaplépés) Minden $\pi \in Srt$ fajtájú individuumváltozó és konstans szimbólum π fajtájú term.
- 2 (rekurzív lépés) Ha az $f \in Fn(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k; \pi_f)$ fajtájú függvényszimbólum és t_1, t_2, \dots, t_k rendre $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ π_f fajtájú term.
- 3 Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Többfajtájú eset.

Formulák – $\mathcal{L}_f(V_\nu)$

- ① (alaplépés) Ha a $P \in Pr(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ fajtájú predikátumszimbólum és t_1, t_2, \dots, t_k rendre $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ fajtájú termék, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$ formula (atomi formula).
- ② (rekurzív lépés)
 - Ha A formula, akkor $\neg A$ is az.
 - Ha A és B formulák, akkor $(A \circ B)$ is formula, ahol \circ a három binér művelet bármelyike.
- ③ Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.
- ④ Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Elsőrendű logikai nyelv: $\mathcal{L}(V_\nu) = \mathcal{L}_t(V_\nu) \cup \mathcal{L}_f(V_\nu)$.

- $\neg A$ negáció
- $A \wedge B$ konjunkció
- $A \vee B$ diszjunkció
- $A \supset B$ implikáció
- $\forall x A$ univerzálisan kvantált
- $\exists x A$ egzisztenciálisan kvantált

A $\forall x A$ és $\exists x A$ formulák esetén az A formula a kvantált formula törzse - mátrixa.

Elsőrendű formulákhoz kapcsolódó fogalmak

Vezessük be a $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \supset$ prioritási sorrendet, ekkor az ítéletlogikához hasonlóan definiáljuk:

- a zárójelelhagyásokat
- a műveletek és a kvantorok hatáskörét
- a komponens és prímkomponens fogalmakat
- egy formula fő műveleti jelét

Az ítéletlogikában minden formulát fel lehet írni a prímmformulák (azaz ítéletváltozók) és a műveletek segítségével. Az elsőrendű nyelvben is vannak ilyen formulák. **Prímmformulák**^a az elsőrendű nyelvben az atomi formulák és a kvantált formulák.

^aTk.113.o.

Közvetlen részterm és részformula

Közvetlen részterm

- 1 Konstansnak és individuumváltozónak nincs közvetlen résztermje.
- 2 Az $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a t_1, t_2, \dots, t_k termek.

Közvetlen részformula

- 1 Egy atomi formulának nincs közvetlen részformulája.
- 2 $\neg A$ közvetlen részformulája az A formula.
- 3 Az $(A \circ B)$ közvetlen részformulái az A (baloldali) és a B (jobboldali) formulák.
- 4 A QxA ($Q \in \{\forall, \exists\}$) közvetlen részformulája az A formula.

Prímkomponensek

Egy formulában egy logikai művelet hatáskörében lévő részformulá(ka)t **komponens formuláknak** nevezzük.

- 1 Egy atomi formulának nincs közvetlen komponense (**prímformula**).
- 2 $\neg A$ közvetlen komponense az A formula.
- 3 Az $(A \circ B)$ közvetlen komponensei az A és a B formulák.
- 4 A QxA ($Q \in \{\forall, \exists\}$) formulának nincs közvetlen komponense (**prímformula**).

Megjegyzés: **prímkomponensnek** nevezzük azokat a prímformulákat, amelyekből a formula kizárólag a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ műveletek segítségével épül fel.

Ennek megfelelően a **prímformulák**:

- 1 Egy atomi formula prímformula.
- 2 Egy QxA formula prímformula.

Term szerkezeti fája.

Egy t term szerkezeti fája egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

- a gyökeréhez a t term van rendelve,
- ha valamelyik csúcsához egy t' term van rendelve, akkor az adott csúcs gyerekeihez a t' term közvetlen résztermjei vannak rendelve,
- leveleihez individuumváltozók vagy konstansok vannak rendelve.

³Tk. 116-118.o.

Formula szerkezeti fája.

Egy F formula szerkezeti egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

- a gyökeréhez az F formula van rendelve,
- ha valamelyik csúcsához egy F' formula van rendelve, akkor az adott csúcs gyerekeihez az F' formula közvetlen részformulái vannak rendelve,
- leveleihez atomi formulák vannak rendelve.

Egy A formula **logikai összetettsége**: $\ell(A)$

Szerkezeti rekurzió szerinti definíció (Tk.5.1.15)

- ① Ha A atomi formula, akkor $\ell(A) = 0$
- ② $\ell(\neg A) = \ell(A) + 1$
- ③ $\ell(A \circ B) = \ell(A) + \ell(B) + 1$
- ④ $\ell(QxA) = \ell(A) + 1$

Egy formulában egy x változó egy előfordulása

- **szabad**, ha nem esik x -re vonatkozó kvantor hatáskörébe
- **kötött**, ha x -re vonatkozó kvantor hatáskörébe esik

Egy x változó egy formulában

- **kötött változó**, ha x minden előfordulása kötött
- **szabad változó**, ha x minden előfordulása szabad
- **vegyes változó**, ha x -nek van szabad és kötött előfordulása is

Megjegyzés: Ha egy formulában egy változó kötött, akkor átnevezve ezt a változót a formulában elő nem forduló változónévvvel a formula ekvivalens marad az eredetivel. Ily módon minden formula átírható változóátnevezésekkel *vegyes változót* már *nem tartalmazó formulává*.

Szabad és kötött változók – példa

Szabad és kötött változók

A formula: $\forall x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

A prímkomponensek: $\forall x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$

A szabad individuumváltozók: v , w

Zártság

- **Egy formula zárt**, ha minden változója kötött.
- **Egy formula nyitott**, ha legalább egy individuumváltozónak van legalább egy szabad előfordulása.
- **Egy formula kvantormentes**, ha nem tartalmaz kvantort.

1. rendű állításokat szimbolizálnak az \mathcal{L} nyelven a zárt formulák vagy **mondatok**.

Alapkifejezés

Alapkifejezés a változót nem tartalmazó \mathcal{L} kifejezés (alapformula, alapterm). Ezeket alappéldányoknak is nevezik. Az atomi formulák alappéldányait két csoportba soroljuk:

- 1 Egy atomi formula **alapatom**, ha argumentumai konstans szimbólumok vagy egy megadott univerzum elemei (pl. $P(c)$)
- 2 Egy atomi formulát **az atomi formula alappéldányának** nevezzük, ha argumentumai **alaptermek** (pl. $Q(f(a, b), a)$)

Megjegyzés: Egy atomi formulát (nem alappéldány) egyébként paraméteres állításnak is neveznek.

Elsőrendű logikai nyelv interpretációja

Egy elsőrendű logikai nyelv $\mathcal{L}[V_\nu]$ interpretációja egy, az \mathcal{L} nyelvvel azonos szignatúrájú $\langle U, R, M, K \rangle$ matematikai struktúra.

Másik megfogalmazás: egy, a szignatúrának megfelelő U halmaz megadása, ezen a Pr , Fn , $Cnst$ szimbólumhalmazok szignatúrájával megegyező R , M , K reláció-, művelet- és konstanshalmaz definiálása.

Az \mathcal{I} interpretáció működése: $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$
függvénynégyes, ahol:

- $\mathcal{I}_{Srt}: \pi \mapsto \mathcal{U}_\pi$, ahol ha Srt egyelemű, akkor az interpretáció U univerzuma egyfajtájú elemekből áll
- az $\mathcal{I}_{Pr}: P \mapsto P^{\mathcal{I}}$, ahol $P^{\mathcal{I}}$ a struktúra R halmazának egy eleme
- az $\mathcal{I}_{Fn}: f \mapsto f^{\mathcal{I}}$, ahol $f^{\mathcal{I}}$ a struktúra M halmazának egy eleme
- az $\mathcal{I}_{Cnst}: c \mapsto c^{\mathcal{I}}$, ahol $c^{\mathcal{I}}$ a struktúra K halmazának egy eleme

Változókiértékelés

Egy $\kappa: V \rightarrow U$ leképezés, ahol V a nyelv változóinak halmaza, U pedig az interpretáció univerzuma.

$|x|^{\mathcal{I}, \kappa}$ az U univerzumbeli $\kappa(x)$ elem.

Változókiértékelés variánsa

Legyen x egy változó. A κ^* változókiértékelés a κ változókiértékelés x variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden x -től különböző y változó esetén.

Formula jelentése – informális definíció

Legyen egy formula valamely $\mathcal{L}(P_1, P_2, \dots, P_n; f_1, f_2, \dots, f_k)$ formalizált nyelven, ahol $(r_1, r_2, \dots, r_n; s_1, s_2, \dots, s_k)$ az \mathcal{L} nyelv típusa/szignatúrája (ν_1, ν_2, ν_3) .

- 1.lépés Választunk egy $S = U(R_1, R_2, \dots, R_n; o_1, o_2, \dots, o_k)$ matematikai struktúrát, amelynek a típusa/szignatúrája $(r_1, r_2, \dots, r_n; s_1, s_2, \dots, s_k)/(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ megegyezik a nyelvével és a logikán kívüli szimbólumokat a megfelelő relációknak illetve műveleteknek feleltetjük meg: $P_i = P_i^{\mathcal{I}}$, $f_k = f_k^{\mathcal{I}}$ (ha az interpretáló struktúrának nincs leíró nyelve, vagy nem akarjuk azt használni. Ha felhasználjuk az interpretáló struktúra leíró nyelvét, akkor $P_i^{\mathcal{I}} = R_i$ neve és $f_k^{\mathcal{I}} = o_k$ neve. Ez a nyelv szimbólumainak interpretációja, ahol R_i és o_k jelentése egyértelmű).
- 2.lépés A nem kötött individuumváltozók kiértékelése $(|x|^{\mathcal{I}, \kappa})$ és a kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítása.

Formális definíció: termék szemantikája

Termék szemantikája

- 1 ha c konstansszimbólum, $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ az U -beli $c^{\mathcal{I}}$ elem
- 2 ha x individuumváltozó, $|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ a $\kappa(x) \in U$ elem
(ahol κ egy változókiértékelés)
- 3 $|f(t_1, t_2, \dots, t_n)|^{\mathcal{I},\kappa} = f^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \dots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa})$

Formális definíció: formulák szemantikája

Formulák szemantikája

- 1 $|P(t_1, t_2, \dots, t_n)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $(|t_1|^{\mathcal{I}, \kappa}, |t_2|^{\mathcal{I}, \kappa}, \dots, |t_n|^{\mathcal{I}, \kappa}) \in P^{\mathcal{I}}$, ahol a $P^{\mathcal{I}}$ jelöli a $P^{\mathcal{I}}$ reláció igazhalmazát.
- 2 $|\neg A|^{\mathcal{I}, \kappa} = \neg |A|^{\mathcal{I}, \kappa}$
 $|A \wedge B|^{\mathcal{I}, \kappa} = |A|^{\mathcal{I}, \kappa} \wedge |B|^{\mathcal{I}, \kappa}$
 $|A \vee B|^{\mathcal{I}, \kappa} = |A|^{\mathcal{I}, \kappa} \vee |B|^{\mathcal{I}, \kappa}$
 $|A \supset B|^{\mathcal{I}, \kappa} = |A|^{\mathcal{I}, \kappa} \supset |B|^{\mathcal{I}, \kappa}$
- 3 $|\forall x A|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $|A|^{\mathcal{I}, \kappa^*} = i$ κ minden κ^* x variánsára
 $|\exists x A|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, ha $|A|^{\mathcal{I}, \kappa^*} = i$ κ legalább egy κ^* x variánsára

A továbbiakban egyfajtájú struktúrákkal és egyfajtájú \mathcal{L} nyelvvel (Srt egyelemű halmaz) foglalkozunk az elsőrendű logika tárgyalása során.