Logika (MSc)

Természetes levezetés

Tartalom

Emlékeztető - szintaktikus következmény

Axiómasémák (ítéletlogika)

(A1) $X \supset (Y \supset X)$
(A2) $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$
(A3) $(\neg X \supset Y) \supset ((\neg X \supset \neg Y) \supset X)$

Tétel (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \models_0 B$

Emlékeztető - szintaktikus következmény

Bizonyításelméleti levezetés fogalma

G-nek $\mathcal{F}$-ből való levezetése egy olyan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots, \varphi_n$ formulasorozat, amelynek utolsó formulája a G, ahol

- $\varphi_k \in \mathcal{F}$, vagy
- φ_k-t axiómasémákból kaptuk, vagy
- φ_k-t a levezetési szabállyal kaptuk φ_s, φ_t -ből $(s, t < k)$, azaz $\varphi_k = mp(\varphi_s, \varphi_t)$

Egy G formula az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmazból levezethető ($\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vdash_0 G$), ha van G-nek $\mathcal{F}$-ből való levezetése. Ez a **szintaktikus következményfogalom**.

Egy A formulának az üres feltételhalmazból (csak axiómákból) való levezetése az A **bizonyítása** ($\vdash_0 A$).

Eldöntésprobléma

A bizonyításelmélet **általános eldöntésproblémája** ítéletlogikában és elsőrendű logikában: létezik-e $\{F_1, F_2, \ldots\}$-ből tetszőleges (nem feltétlenül véges) bizonyításelméleti levezetése G-nek.

A bizonyításelmélet **gyönge eldöntésproblémája**: bizonyítható-e tetszőleges Q ítéletlogikai illetve elsőrendű formula.

Előre - és visszakövetkeztetés a bizonyításelméletben

Előrekövetkeztetés és **visszakövetkeztetés** a bizonyításelméletben az **általános** illetve a **gyönge** eldöntésprobléma megoldása.

Bizonyításelméleti levezetés konstrukciójára nincs algoritmus.

Milyen kalkulusokat ismerünk a szintaktikus eldöntésproblémára és melyikre?

Kalkulusok a szintaktikus eldöntésproblémára

A **logikai programozás** alapja lehet bármely (helyes, nem feltétlenül teljes) szintaktikus tételbizonyító eljárás.

A logikai programozással úgy oldunk meg egy problémát, hogy a logika nyelvén megadjuk a feltételeket és a várt következményt, majd valamelyik tételbizonyításra alkalmas kalkulussal feldolgozzuk.

Tartalom

Gentzen stílusú kalkulusok

Gentzen stílusú kalkulusok:

- Természetes technika[1]
- Gentzen szekvent módszer[2]

[1] Tk.193-199.o.
[2] Tk.200-222.o.

Természetes technika: helyesség, teljesség

Az alapgondolat olyan szabályok megadása, amelyek azt mutatják, hogy a szabály második részében (vonal alatt) megjelölt levezetés akkor létezik, ha az első részben (vonal felett) megjelölt levezetés létezik.

A szabályok egyben helyes következtetésformák. Ez biztosítja a helyességet, vagyis azt, hogy ha a megállási feltételt elértük egy adott szekvenciára alkalmazva a természetes technika szabályait, akkor a szekvencia feltételhalmazából a jobboldalán lévő formula levezethető. Megállási feltétel: $\Gamma, A \vdash A$.

Egy szabály általában kisebb logikai összetettségű (egyszerűbb szerkezetű) szekvencia megalapozásának (bizonyításelméleti levezetés létének) fennállása esetén garantálja az összetettebb szekvencia megalapozhatóságát.

A természetes technika stukturális szabályai

az azonosság törvénye

$$\Gamma, A \vdash_0 A$$

a bővítés szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma, B \vdash_0 A}$$

a szűkítés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a felcserélés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash_0 A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash_0 A}$$

a vágás szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Delta, A \vdash_0 B}{\Gamma, \Delta \vdash_0 B}$$

Strukturális szabályok bizonyítása

Vizsgáljuk meg a *vágás szabályát*.

A dedukciós tétel szerint ha $\Delta, A \vdash_0 B$, akkor $\Delta \vdash_0 A \supset B$. Ekkor viszont a $\Gamma \vdash_0 A$-t és a $\Delta \vdash_0 A \supset B$-t igazoló levezetések konkatenációja megalapozza $\Gamma, \Delta \vdash_0 B$-t.

A természetes technika logikai szabályai

bevezető szabályok		*alkalmazó szabályok*	
$(\supset b)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \supset B}$	$(\supset a)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Gamma \vdash_0 A \supset B}{\Gamma \vdash_0 B}$
$(\wedge b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 A \qquad \Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \wedge B}$	$(\wedge a)$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \wedge B \vdash_0 C}$
$(\vee b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 A}{\Gamma \vdash_0 A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_0 B}{\Gamma \vdash_0 A \vee B}$	$(\vee a)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash_0 C \qquad \Gamma, B \vdash_0 C}{\Gamma, A \vee B \vdash_0 C}$
$(\neg b)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash_0 B \qquad \Gamma, A \vdash_0 \neg B}{\Gamma \vdash_0 \neg A}$	$(\neg a)$	$\dfrac{\Gamma \vdash_0 \neg\neg A}{\Gamma \vdash_0 A}$

Logikai szabályok bizonyítása

- *Az implikáció bevezetésének szabálya* épp a dedukciós tétel.
- *Az implikációt alkalmazó szabály*: Ha adottak a $\Gamma \vdash_0 A$ és a $\Gamma \vdash_0 A \supset B$ állításokat megalapozó levezetések, a kettő konkatenációja után alkalmazható a modus ponens, és így épp B-nek egy, a Γ-ból való levezetését állítottuk elő.
- *A diszjunkció bevezetése*: Ha adott Γ-ból A-nak a levezetése, akkor az $A \supset A \vee B$ axiómát beírva a levezetésbe alkalmazhatjuk a modus ponenst, és máris megkaptuk a Γ-ból az $A \vee B$ egy levezetését.
- *A diszjunkció alkalmazása*: Ha adottak a $\Gamma, A \vdash_0 C$ és a $\Gamma, B \vdash_0 C$ állításokat megalapozó levezetések, akkor a dedukciós tétel miatt megkonstruálhatók a $\Gamma \vdash_0 A \supset C$ és a $\Gamma \vdash_0 B \supset C$ állításokat megalapozó levezetések is. Ezt a két levezetést konkatenáljuk, és írjuk le az $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$ axiómát. Kétszer alkalmazva a modus ponenst megalapoztuk, hogy $\Gamma \vdash_0 A \vee B \supset C$. Írjuk be a levezetésbe a vonal alatti szekvenciából az $A \vee B$ hipotézist, és ha most újból alkalmazzuk a modus ponenst, megkapjuk a $\Gamma, A \vee B \vdash_0 C$-t megalapozó levezetést.

További logikai szabályok elsőrendű logikában

bevezető szabályok			*alkalmazó szabályok*		
$(\forall\ b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}$	$(x \notin Par(\Gamma))$	$(\forall\ a)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}$	
$(\exists\ b)$	$\dfrac{\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]}{\Gamma \vdash \exists x A}$		$(\exists\ a)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x A \vdash B}$	$(x \notin Par(\Gamma, B))$

Szabályok bizonyítása

- *Az egzisztenciális kvantort bevezetõ szabály*:
  Ha adott a $\Gamma \vdash [A(x \parallel t)]$ szekvenciát megalapozó levezetés, akkor írjuk be az $[A(x \parallel t)] \supset \exists x A$ axiómát a levezetésbe, és alkalmazzuk a modus ponenst. Így Γ-ból levezettük $\exists x A$-t.
- *Az egzisztenciális kvantor alkalmazásának szabálya*:
  Ha adott a $\Gamma, A \vdash B$ szekvenciát megalapozó levezetés, akkor a dedukciós tétel miatt megkonstruálható a $\Gamma \vdash A \supset B$ szekvenciát megalapozó levezetés is. Ebből az általánosítás szabálya miatt (mivel $x \notin Par(\Gamma)$) $\Gamma \vdash \forall x(A \supset B)$ adódik.
  Ha most a levezetésbe beírjuk a $\forall x(A \supset B) \supset (\exists x A \supset B)$ axiómát (lényeges, hogy $x \notin Par(B)$), alkalmazhatjuk a modus ponenst.
  Ezzel megkapjuk a $\exists x A \supset B$ egy levezetését Γ-ból.
  A dedukciós tétel újbóli alkalmazásával pedig igazoltuk, hogy $\Gamma, \exists x A \vdash B$.

Természetes technika – példa I.

Lássuk be a természetes levezetés technikájával, hogy

$$\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B).$$

A bizonyítás során a természetes levezetés technikai szabályait „felülről lefelé" használjuk fel.

1.	$A, \neg A, \neg B \vdash_0 A$	[az azonosság törvénye alapján]
2.	$A, \neg A, \neg B \vdash_0 \neg A$	[az azonosság törvénye alapján]
3.	$A, \neg A \vdash_0 \neg\neg B$	[1-ből és 2-ből $(\neg b)$]
4.	$A, \neg A \vdash_0 B$	[3-ból $(\neg a)$]
5.	$A \vdash_0 \neg A \supset B$	[$(\supset b)$]
6.	$\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B)$	[$(\supset b)$]

Természetes technika – példa I.

Konstruáljuk meg az előző

$$\vdash_0 A \supset (\neg A \supset B)$$

levezetést a természetes levezetés technikáját „alulról felfelé” alkalmazva.

Ha alkalmazzuk kétszer az implikáció bevezetésének szabályát, az

$$A, \neg A \vdash_0 B$$

bizonyítandó állítást kapjuk. Felhasználva a negáció alkalmazásának a szabályát az

$$A, \neg A \vdash_0 \neg\neg B$$

megalapozandó szekvenciát nyerjük. Ezután a negáció bevezetésének szabályával visszavezethetjük a kérdést arra, vajon levezethető-e az $A, \neg A, \neg B$ hipotézisekből valamely formula és annak negáltja is. E hipotézisekből viszont az azonosság törvénye miatt A és $\neg A$ is levezethetõ.

Természetes technika – példa II.

A természetes levezetés technikája segítségével bizonyítsuk be, hogy

$$\exists x A \vdash \neg \forall x \neg A$$

A hipotézis egy egzisztenciálisan kvantált formula, tehát az egzisztenciális kvantort alkalmazó szabály szerint elég igazolni, hogy $A \vdash \neg \forall x \neg A$, hisz $x \notin Par(\neg \forall x \neg A)$. A jobb oldali negáció miatt érdemes alkalmazni a negáció bevezetést: alapozzuk meg az

$$A, \forall x \neg A \vdash A \quad \text{és az} \quad A, \forall x \neg A \vdash \neg A$$

szekvenciákat. Az első az azonosság törvénye. A második igazolása az univerzális kvantort alkalmazó szabály segítségével vezethető vissza az $A, \forall x \neg A \vdash \forall x \neg A$ szekvenciára, ami szintén az azonosság törvénye.