# Formális nyelvek és a fordítóprogramok alapjai

5. előadás

Előadó: Nagy Sára, mesteroktató
Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék

# Emlékeztető :

**<u>Definíció:</u>** Véges determinisztikus automata (VDA)

$A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ rendezett ötöst véges determinisztikus automatának nevezzük, ahol

- Q az állapotok nem üres véges halmaza,
- T az input szimbólumok ábécéje,
- $\delta: Q \times T \to Q$ leképezés az állapot-átmeneti függvény
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot
- $F \subseteq Q$ elfogadó állapotok halmaza.

# Minimális véges determinisztikus automata

Az A véges determinisztikus automata minimális állapotszámú, ha nincs olyan A′ véges determinisztikus automata, amely ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint A, de A′ állapotainak száma kisebb, mint A állapotainak száma.

**Tétel:**

Az L reguláris nyelvet felismerő minimális véges determinisztikus automata az izomorfizmus erejéig egyértelmű.

# Emlékeztető

## Chomsky féle hierarchia:

$$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$$

Pontosabban valódi tartalmazás van

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$$

Megjegyzés: A következő tételek szükséges feltételeket fogalmaznak meg a 3-as típusú nyelvekre. Vannak nyelvek, amelyek bizonyíthatóan nem teljesítik a feltételeket, de 2-es típusú grammatikával generálhatók.

# Szükséges feltétel 3-as típusú nyelvekre

**Tétel: (Kis Bar-Hillel lemma)**

Minden $L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez van olyan $n \geq 1$ nyelvfüggő konstans, hogy $\forall\ u \in L$ , ahol $\ell(u) \geq n$ szó esetén van u-nak olyan $u = xyz$ felbontása, amelyre

- $\ell\,(xy) \leq n$,
- $y \neq \varepsilon$,
- $\forall i \geq 0$ egész esetén $xy^iz \in L$.

# Kis Bar-Hillel lemma

<u>Bizonyítás vázlata:</u>

Ha L ∈ $\mathcal{L}_3$ , akkor adható hozzá egy minimális véges determinisztikus automata.

Tegyük fel, hogy ennek az automatának *n* állapota van. Ha tekintünk egy legalább n hosszú szót, amit az automata elfogad, akkor a szó legalább n hosszú prefixszének olvasásakor legalább egy állapotot kétszer kellett érinteni.

Ez gráfos ábrázolásban azt jelenti, hogy a szó elemzése közben tettünk egy kört. Ezt a kört tetszőleges sokszor ismételhetjük. Így a kör során érintett részszót tetszőleges sokszor „bepumpálhatjuk” a szóba úgy, hogy az L nyelvhez tartozó szót kapunk.

# $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$

Van olyan nyelv, ami nem 3-as típusú.

Megmutatjuk, hogy **$L=\{a^k b^k \mid k \geq 0\} \notin \mathcal{L}_3$.**

Tegyük fel indirekt, hogy $\exists n \geq 1$ a lemma szerint.

Legyen $u= a^k b^k$, ahol $k>n$.

Ekkor léteznie kellene egy $u=xyz$ felbontásnak, ahol $\ell(xy) \leq n$ és $y \neq \varepsilon$.

De $k>n$ miatt $y$ csak ‚a' betűket tartalmazhat.

Legyen $y=a^j$, ahol $j \geq 1$. Ekkor $a^{k+j}b^k$ szónak is benne kéne lenni a nyelvben, de az nem igaz.

Mivel L-re nem teljesülnek a lemma feltételei, így $L \notin \mathcal{L}_3$.

# Nyelv maradéknyelvei

**Definíció:**

Legyen L egy T ábácé felett értelmezett nyelv.

Az L nyelv egy $p \in T^*$ szóra értelmezett maradéknyelve a következő:

$L_p := \{ u \in T^* \mid pu \in L \}$

# Nyelv maradéknyelvei: $L_p$:={ u∈T* | pu ∈ L}

**Példa:**

Legyen R = **a(a|b)*b** és L az R kifejezésnek megfelelő nyelv. Ennek néhány maradéknyelve:

$L_a$=**(a|b)*b**

$L_{aaaa}$=**(a|b)*b**

$L_{abb}$=**(a|b)*b|ε**

$L_{ba}$=∅

$L_\varepsilon$= **a(a|b)*b**

# Myhill-Nerode tétel

**Tétel:**

$L \in \mathcal{L}_3$ akkor és csak akkor, ha az L-hez tartozó maradéknyelvek száma véges, azaz $|\{L_p | p \in T^*\}| < \infty$.

Megjegyzés: A szavakon egy osztályozást végzünk az adott nyelvtől függően.

# Myhill-Nerode tétel

Bizonyítás vázlata:

1. Ha véges sok maradéknyelv van, akkor a maradéknyelvek segítségével megkonstruálható egy A véges determinisztikus automata, amire belátható, hogy L(A)=L. Az automata pedig átírható 3-as típusú grammatikává.

2. Ha L 3-as típusú nyelv, akkor adható hozzá 3-as típusú grammatika, ami átírható véges determinisztikus automatává. Belátható, hogy az egyes állapotokhoz rendelhető egy-egy maradéknyelv. Az így kapott maradék nyelvek között még lehetnek ekvivalensek, ha az állapotok is ekvivalensek. Mivel Q véges halmaz, így a maradéknyelvek száma is véges.

# VDA előállítása maradéknyelvekből

Határozzuk meg a szavak hossza szerint haladva a lehetséges maradék nyelveket!

Legyen $p_1$, $p_2$, … , $p_n$ az egyes maradék nyelvek egy-egy reprezentáns szava!

Feleltessük meg az állapotokat a maradék nyelveknek, azaz

legyen $Q:=\{L_{p_i} \mid n \geq i \geq 1\}$ és

$\delta(L_p, a):=L_{pa}\ \forall a \in T$;

$q_0:=L_{\varepsilon}$;

$F:=\{L_p \mid \varepsilon \in L_p\}$.

# VDA előállítása maradéknyelvekből

Megjegyzés: Az így kapott automata minimális.

**Példa:** R = **a(a|b)*b** és L az R kifejezésnek megfelelő nyelv. Maradéknyelvei:

$L_\varepsilon = \mathbf{a(a|b)^*b}$, $L_a = \mathbf{(a|b)^*b}$, $L_b = \emptyset$,

$L_{aa} = \mathbf{(a|b)^*b} = L_a$

$L_{ab} = \mathbf{(a|b)^*b|\varepsilon}$

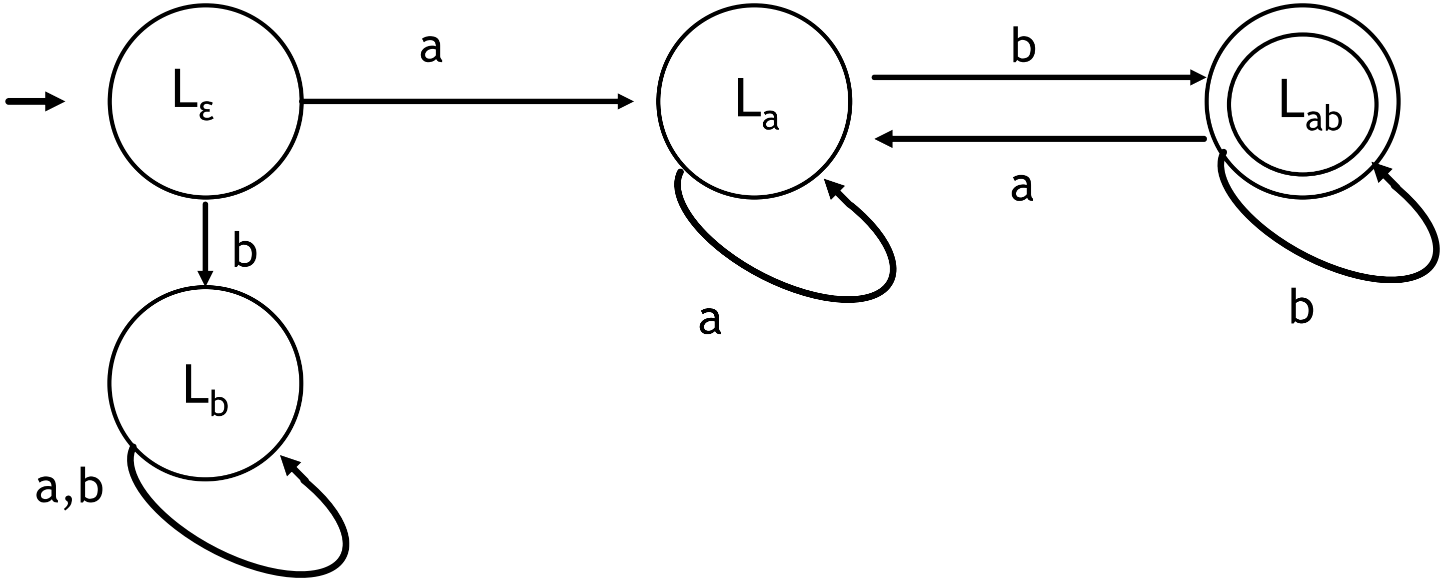
$L_{ba} = \emptyset = L_{bb} = L_b$

($L_{aaa} = \mathbf{(a|b)^*b} = L_a$, $L_{aab} = \mathbf{(a|b)^*b|\varepsilon} = L_{ab}$ )

$L_{aba} = \mathbf{(a|b)^*b} = L_a$, $L_{abb} = \mathbf{(a|b)^*b|\varepsilon} = L_{ab}$

# VDA előállítása maradéknyelvekből

A kapott automata:



# $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$

Van olyan nyelv, ami nem 3-as típusú.

Megmutatjuk, hogy **$L=\{a^k b^k \mid k \geq 0\} \notin \mathcal{L}_3$.**

$L_\varepsilon = \{a^k b^k \mid k \geq 0\}$

$L_a = \{a^{k-1} b^k \mid k \geq 1\}$ és természetesen $L_\varepsilon \neq L_a$

általában $L_{a^i} \neq L_{a^j}$, ha $i \neq j$.

Mivel i és j tetszőleges természetes számok, így a maradék nyelvek száma végtelen, azaz végtelen állapotú automata kellene a nyelvhez.

Mivel L-re nem teljesül a Myhill-Nerode tétel, így $L \notin \mathcal{L}_3$.

# Emlékeztető

G=(N,T,P,S) grammatika **2-es típusú**, ha szabályai

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{u} \text{ alakúak, ahol } A \in N,\ u \in (N \cup T)^*$$

Ezeket nevezzük ***környezetfüggetlen*** grammatikáknak.

Ilyenekkel írható le a programozási nyelvek ***szintaxisa***.

# Emlékeztető

G=(N,T,P,S) négyest nevezzük grammatikának

Nyelvtan által generált nyelv:

$$\mathbf{L(G) := \{ u \in T^* \mid S \underset{G}{\Rightarrow}^* u \}}$$

**<u>Szóprobléma:</u>**

Adott G grammatika és adott u $\in$ T* szó estén eldöntendő, hogy igaz-e, hogy **u$\in$ L(G)** ?

# Programozási nyelvek szintaxisa

Gyakran Backus-Naur formában (BNF) adják meg.

Példa:

<kifejezés> ::= <tag> | <tag> + <kifejezés>

<tag> :: = <faktor> | <faktor> * <tag>

<faktor> ::= i | ( <kifejezés> )

Példák kifejezésekre:

i+i*i, (i+i)*i, i*i*i*i, ((i)), i

# Backus-Naur forma (BNF)

A BNF lényegében egy 2-es típusú grammatika.

- Szabályok véges halmaza, ahol a szabályok bal- és jobb oldalát a

  **::=** jel választja el.

- A bal oldalon egy fogalom (egy nemterminális) szerepel.

  **<** *fogalom* **>** (A < > jelek közé tetszőleges szöveg írható.)

- A jobb oldalon a bal oldal kifejtése szerepel. Ha több alternatíva is van, akkor az alternatívákat **|** jel választja el.
- A terminálisokat nem kell semmilyen jel közé tenni.
- Egy alternatíva terminálisok és nem terminálisok sorozata.

# EBNF (kiterjesztett BNF)

Kényelmi szempontokból további jelöléseket is bevezettek:

[…] a szögletes zárójelek opcionalitást jelölnek;
{…} a kapcsos zárójelek iterációt jelölnek, azaz az adott rész 0 vagy tetszőleges sokszor ismételhető.

**Példa:**

<egész szám> ::= <számjegy> | <számjegy> <egész szám>

<számjegy> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

Másképpen:

<egész szám> ::= <számjegy> {<számjegy>}

# Szóprobléma

Példa:

<kifejezés> ::= <tag> | <tag> + <kifejezés>

<tag> :: = <faktor> | <faktor> * <tag>

<faktor> ::= i | ( <kifejezés> )

## Szintaktikusan helyes-e az i+i*i kifejezés?

Ha levezethető a <kifejezés> fogalmából, akkor igen.

<kifejezés> ⇒ <tag> + <kifejezés>⇒ <tag> + <tag> ⇒ <faktor> + <tag>

⇒ <faktor> + <faktor> * <tag>⇒ i + <faktor> * <tag> ⇒ i + i * <tag>

⇒ i + i * <faktor> ⇒ i + i * i

# Levezetési fa (szintaxisfa)

**Definició:**

Legyen $G = (N,T,P,S)$ tetszőleges 2-es típusú grammatika.

A **t** nemüres fát G feletti levezetési (szintaxis) fának nevezzük, ha

- pontjai $T \cup N \cup \{\varepsilon\}$ elemeivel vannak címkézve;
- belső pontjai N elemeivel vannak címkézve;
- ha egy belső pont címkéje A, a közvetlen leszármazottjainak címkéi pedig balról jobbra olvasva $X_1, X_2, \ldots, X_k$ , akkor $A \rightarrow X_1X_2 \ldots X_k \in P$.
- az $\varepsilon$ -nal címkézett pontoknak nincs testvére.

# Levezetési fa (szintaxisfa)

**Tétel:**

Ha adott G grammatika esetén **u**$\in$ **L(G)** akkor és csak akkor, ha u-hoz **megadható egy szintaxisfa**.

Megjegyzés: Az u-hoz tartozó szintaxisfa gyökere S és a leveleit balról jobbra összeolvasva az u szót kapjuk.

# Példa

$G = (\{S,A,B\}, \{i,+,*,(,)\}, P, S)$ egy grammatika, ahol a szabályok a következők:

$P: S \to A \mid A + S$

$A \to B \mid B * A$

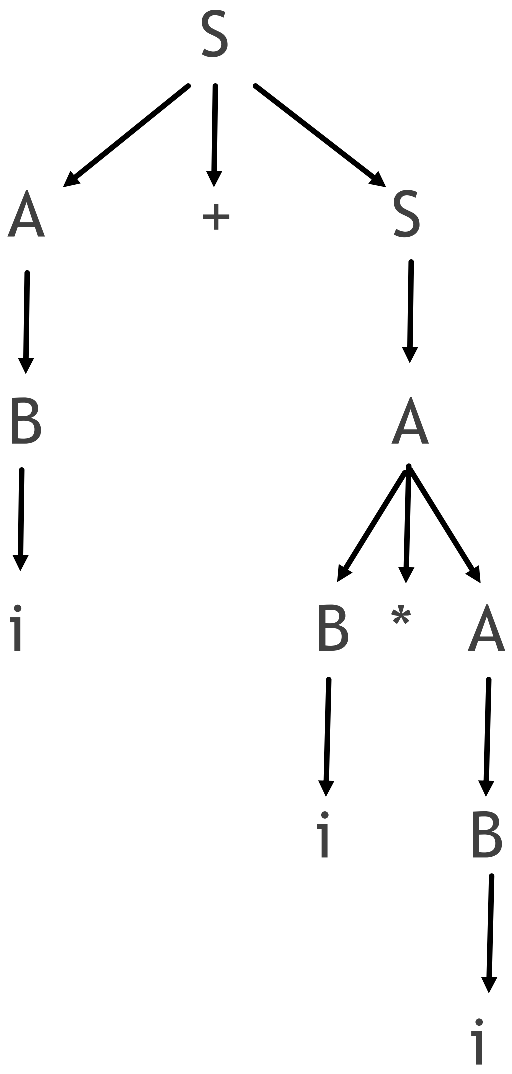
$B \to i \mid ( S )$

$u = i + i * i$ $u \in L(G)$ , ha megadható hozzá levezetési fa.

Megjegyzés: A fenti G grammatika ekvivalens a korábban megadott kifejezés leírásával.

# Szintaxisfa

u = i+i*i



# Szintaxisfa

Állítás:

Minden szintaxisfához megadható egy levezetés és fordítva.

**Legbal levezetés**: A legbal levezetés olyan levezetés, hogy ha a levezetés folyamán a mondatforma i. betűjén helyettesítés történik, akkor a korábbi pozíciókat (1., … , i-1.) a levezetés a további lépesekben már nem érinti, azok változatlanul maradnak.

# Szintaxisfa

Egy G 2-es típusú grammatika **egyértelmű**, ha minden $u \in L(G)$ szóhoz egyetlen szintaxisfa tartozik.

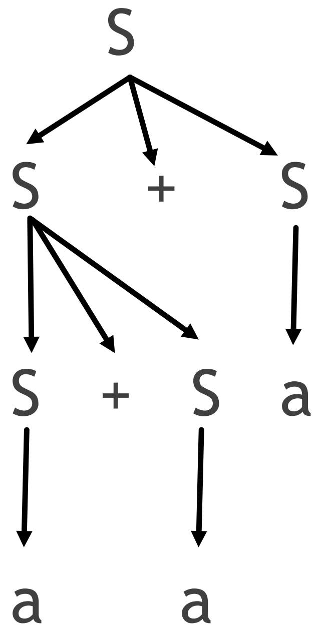
Ellenpélda:

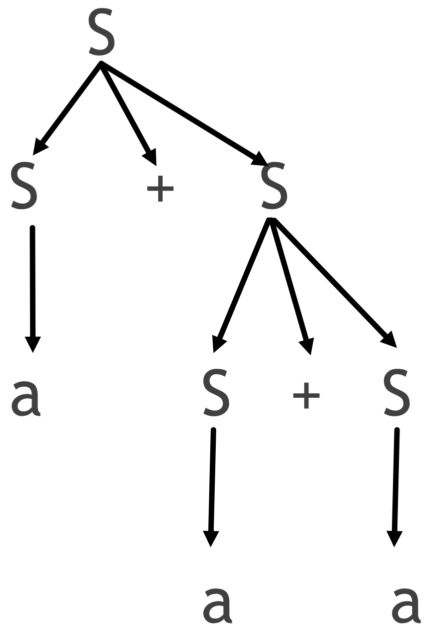
$S \to a \mid S + S \qquad u = a + a + a$

# Szintaxisfa

<u>Ellenpélda</u>:

$S \rightarrow a \mid S + S$ $\qquad$ $u = a + a + a$



# Emlékeztető

**<u>Tétel:</u>** (ε-mentesítés)

Minden G=(N,T, P, S) környezetfüggetlen grammatikához meg lehet konstruálni egy olyan G'= (N', T, P', S') környezetfüggetlen grammatikát, amelyre igaz, hogy

- egyetlen szabály jobboldala sem az üresszó (ε);
- kivéve, ha az üresszó benne van a G által generált nyelvben, mert akkor
  S' $\rightarrow$ ε megengedett, de ekkor S' nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem

# 2-típusú grammatikák normál formája

**Definíció:**

Egy G=(N,T,P,S) környezetfüggetlen grammatikát **Chomsky normál formájúnak** mondunk, ha szabályai

- **A** $\rightarrow$ **a,** ahol A ∈ N és a ∈ T vagy
- **A** $\rightarrow$ **BC** alakúak, ahol A,B,C ∈ N.
- S $\rightarrow$ ε, de ekkor S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.

# Chomsky normál forma

**<u>Tétel:</u>**

Minden **környezetfüggetlen** grammatikához megkonstruálható egy vele ekvivalens **Chomsky normál formájú** grammatika.

Megjegyzés: Chomsky normálformájú grammatikákhoz megadható olyan elemző program, amely $O(n^3)$ időben eldönti a szóproblémát (CYK elemző).

Valamint bizonyos állítások bizonyítást elég elvégezni a normál formájú grammatikákra.

# 2-es típusú grammatikák redukálása

A grammatikák transzformálása közben keletkezhetnek olyan szabályok, amelyek egyetlen szó levezetésében sem használhatóak.

A grammatikában lehetnek olyan nemterminálisok, amelyekből

1. nem lehet csupa nem terminálisból álló sorozatot előállítani; (zsákutcák)
2. nem érhetők el a kezdőszimbólumból.

# Hasznos/ nem hasznos nemterminálisok

**<u>Definició:</u>** ***Aktív*** nemterminálisok halmaza egy adott G=(N,T,P,S) környezetfüggetlen grammatika esetén:

$$A := \{ X \in N \mid X \underset{G}{\Rightarrow}^* u \text{ és } u \in T^* \}.$$

Inaktív (zsákutca) nemterminálisok: N \ A.

**<u>Definició:</u>** ***Elérhető*** nemterminálisok halmaza:

$$R := \{ X \in N \mid S \underset{G}{\Rightarrow}^* uXw \text{ és } u,w \in (T \cup N)^* \}.$$

Nemelérhető nemterminálisok: N \ R.

# Hasznos/ nem hasznos nemterminálisok

**Definició:** Egy nemterminálist **hasznos**nak mondunk, ha aktív és elérhető.

**Definició:** Egy környezetfüggetlen grammatika **redukált**, ha minden nemterminálisa hasznos, azaz a grammatika zsákutcamentes és összefüggő.

**Tétel:** Minden 2-es típusú grammatikához megkonstruálható egy vele ekvivalens redukált grammatika.

# Hasznos/ nem hasznos nemterminálisok

**Tétel:** Minden 2-es típusú grammatikához megkonstruálható egy vele ekvivalens redukált grammatika.

**Bizonyítás:**

1. Zsákutcák meghatározása és minden olyan szabály elhagyása, amiben inaktív nemterminálisok szerepelnek.
2. Az S-ből nem elérhető nemterminálisokhoz tartozó szabályok elhagyása, azaz a grammatika összefüggővé tétele.

# Redukált grammatika meghatározása

Bizonyítás folytatása:

$A_1 = \{ X \in N \mid X \rightarrow u \in P$ és $u \in T^* \}$

$A_{i+1} = A_i \cup \{ X \in N \mid X \rightarrow w \in P$ és $w \in (A_i \cup T)^* \}$ , ahol $i \geq 1$.

$\exists$ k úgy, hogy $\forall$ m>k esetén $A_k = A_m$ .

Ekkor $A_k$ a grammatika aktív nemterminálisainak halmaza.

Az $N \setminus A_k$ inaktív (zsákutca) nemterminálisokat elhagyjuk a grammatikából és minden olyan szabályt is, amiben szerepelnek.

# Redukált grammatika meghatározása

Bizonyítás folytatása:

$R_1 = \{ S \}$

$R_{i+1} = R_i \cup \{ Y \in N \mid X \rightarrow uYw \in P,\ X \in R_i,\ u,w \in (N \cup T)^* \}$ , ahol $i \geq 1$.

$\exists$ k úgy, hogy $\forall$ m>k esetén $R_k = R_m$ .

Ekkor $R_k$ a grammatika elérhető nemterminálisainak halmaza.

Az $N \setminus R_k$ nem elérhető nemterminálisokat elhagyjuk a grammatikából és minden olyan szabályt is, amiben szerepelnek.

Az így kapott grammatika redukált.

# Példa: grammatika redukálása

$S \rightarrow AB \mid aaC$

$A \rightarrow AS \mid aDa$

$B \rightarrow aaS \mid bAD$

$C \rightarrow aAD \mid ab$

$D \rightarrow bA$

Aktív nemterminálisok meghatározása:

$A_1 = \{ C \}$, $A_2 = \{ C \} \cup \{ S \}$, $A_3 = \{ C, S \} \cup \{ B \}$, $A_4 = A_3$

Inaktív nem terminálisok, amelyek elhagyhatók a grammatikából:

**A, D**

# Példa: grammatika redukálása

Inaktív nem terminálisok, amelyek elhagyhatók a grammatikából:

**A, D**

$S \rightarrow \cancel{AB} \mid aaC$

$\cancel{A \rightarrow AS \mid aDa}$

$B \rightarrow aaS \mid \cancel{bAD}$

$C \rightarrow \cancel{aAD} \mid ab$

$\cancel{D \rightarrow bA}$

# Példa: grammatika redukálása

Csak aktív nem terminálisokat tartalmazó ekvivalens grammatika:

$S \rightarrow aaC$

$B \rightarrow aaS$

$C \rightarrow ab$

Elérhető nem terminálisok:

$R_1 = \{ S \}$, $R_2 = \{ S \} \cup \{ C \}$, $R_4 = R_3$

Nem elérhető: B

**Redukált grammatika:**

**$S \rightarrow aaC$**

**$C \rightarrow ab$**

***Köszönöm a figyelmet!***