

Bizonyítással kért tételek az 1. zh-n

1. A szuprémum elv

Tétel:

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, felülről korlátos. Ekkor A -nak van legkisebb felső korlátja, azaz $\exists \min B$

Bizonyítás:

Világos, hogy $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$

\Rightarrow (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq b \ (a \in A, b \in B)$

Vagyis, $\forall a \in A : a \leq \xi \Rightarrow \xi$ felső korlátja A -nak $\Rightarrow \xi \in B$

Ugyanakkor: $\forall b \in B : \xi \leq b \Rightarrow \xi$ a legkisebb felső korlát

$\Rightarrow \xi = \min B$

2. Az Archimedes-tétel

Tétel:

$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > b$

Bizonyítás:

1. Ha $b \leq 0$, akkor világos, hogy $b \leq 0 < a = a \cdot 1$, ha $n := 1$

$\Rightarrow n = 1$ jó választás

2. Feltehető, hogy $b > 0$

Áll: $\forall b > 0, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > b$

Indirekt: $\exists b > 0, \exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N} : a \cdot n \leq b$

$A := \{a \cdot n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow b$ egy felső korlátja A -nak $\Rightarrow \xi = \sup A$

$\Rightarrow \xi - a$ már nem felső korlát, azaz $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot n_0 > \xi$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot n_0 + a > \xi \Leftrightarrow a(n_0 + 1) > \xi$

Mivel $n_0 \in \mathbb{N}$ és \mathbb{N} induktív $\Rightarrow n_0 + 1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a(n_0 + 1) \in A \Rightarrow \xi$ nem felső korlát

Ellentmondás $\Rightarrow \Leftarrow$

3. A Cantor-féle közösrész-tétel

Tétel:

Legyen $[a_n, b_n]$ korlátos és zárt intervallum, melyre:

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \ (n \in \mathbb{N})$

Ekkor: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [q_n, b_n] \neq \emptyset$

Bizonyítás:

$A := \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

$B := \{b_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

Ekkor: $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$

Ha $n \leq m : q_n \leq a_m \leq b_m$

Ha $m < n : a_n \leq b_n \leq b_m$

\Rightarrow (Teljességi axióma) $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_m$

Spec: $n = m$, ekkor:

$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_n$

$\Rightarrow \xi \in [a_n, b_n] \ (n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

4. Minden sorozatnak van monoton részsorozata

Tétel:

Minden sorozatnak van monoton részsorozata

Bizonyítás:

1. A sorozatnak végtelen sok csúcsa van

$\exists a_{n_0}$ csúcs $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : a_{n_0} \geq a_n$

$\Rightarrow \exists n_1 > n_0$ és a_{n_1} csúcs $\Rightarrow a_{n_0} \geq a_{n_1}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_1 : a_{n_1} \geq a_n$

$\Rightarrow \exists n_2 > n_1$ és a_{n_2} csúcs $\Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2}$

$\Rightarrow \exists a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \dots$

2. A sorozatnak véges sok csúcsa van

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n$ nem csúcs

Legyen $n_0 = N \Rightarrow a_{n_0}$ nem csúcs \Rightarrow

$\Rightarrow \exists n_1 \geq n_0 : a_{n_0} < a_{n_1} \Rightarrow a_{n_1}$ nem csúcs \Rightarrow

$\Rightarrow n_2 \geq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2} \dots$

$\exists a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$

5. Konvergens sorozat határértéke egyértelmű

Tétel:

Az (a_n) konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás:

Indirekt, Tfh: $\exists A_1, A_2, A_1 \neq A_2$ határértékek

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \epsilon$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \epsilon$

Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2)$:

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - A_1| < \epsilon \\ |a_n - A_2| < \epsilon$$

Legyen $\epsilon < \frac{|A_1 - A_2|}{2} \Rightarrow$

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_n + a_n - A_2| \leq |A_1 - a_n| + |a_n - A_2| < 2\epsilon < |A_1 - A_2|$$

Ellentmondás, $|A_1 - A_2| \not< |A_1 - A_2|$

6. A konvergencia és a korlátosság kapcsolata

Tétel:

Ha a_n konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás:

Legyen $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \epsilon = 1 \text{-re is } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}|, 1 + |A|), \quad (n \in \mathbb{N})$$

7. Műveletek nullsorozatokkal

Tétel:

Legyen $(a_n), (b_n)$ nullsorozat. Ekkor:

1. $(a_n + b_n)$ is nullsorozat.
2. Ha (c_n) korlátos, akkor $(a_n \cdot c_n)$ is nullsorozat.
3. $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.

Bizonyítás:

$$1. (a_n) \text{ nullsor} \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$(b_n) \text{ nullsor} \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = \max(n_1, n_2), \forall n \geq n_0 :$$

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

$$\Rightarrow (a_n + b_n) \text{ nullsor}$$

$$2. (c_n) \text{ korlátos} \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n : |c_n| \leq K$$

$$(a_n) \text{ nullsor} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| < \frac{\epsilon}{K}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :$$

$$|a_n \cdot c_n| < \frac{\epsilon}{K} \cdot K = \epsilon$$

$$3. (b_n) \text{ nullsor} \Rightarrow (b_n) \text{ konvergens} \Rightarrow (b_n) \text{ korlátos}$$

$$(a_n) \text{ nullsor} \stackrel{2. \text{ miatt}}{\Rightarrow} (a_n \cdot c_n) \text{ nullsor}$$

8. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

Tétel:

Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$. Ekkor:
 $(a_n \cdot b_n)$ konvergens és $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
 |a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n b_n - A \cdot b_n + A \cdot b_n - AB| \leq \\
 &\leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| = \underbrace{|b_n|}_{\text{konvergens}} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{\text{nullsor}} + \underbrace{|A|}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{\text{nullsor}} \\
 &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{korlátos}} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{nullsor}} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{nullsor}}
 \end{aligned}$$

9. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel**Tétel:**

Legyen $(a_n), (b_n)$ konvergens, $b_n \neq 0$ és $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$ és $B \neq 0$.
 Ekkor:

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ konvergens és } \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
 \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - Ab_n}{b_n B}\right| = \frac{|a_n B - AB + AB - Ab_n|}{|b_n B|} \leq \\
 &\leq \underbrace{\frac{|B|}{|b_n||B|}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{\text{nullsor}} + \underbrace{\frac{|A|}{|b_n||B|}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{\text{nullsor}} \\
 &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{nullsor}} \\
 &\Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) \text{ nullsor} \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}
 \end{aligned}$$

10. A közrefogási elv**Tétel:**

Tfh: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$

Ha $\lim a_n = \lim c_n$, akkor $\lim b_n = \lim a_n$

Bizonyítás:

$$\lim a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}
 1. \ A \in \mathbb{R} &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : A - \epsilon < a_n < A + \epsilon \\
 &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2, \forall n \geq n_2 : A - \epsilon < c_n < A + \epsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Legyen } n_0 &= \max(n_1, n_2, N) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : A - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \epsilon \\
 &\Rightarrow \lim b_n = A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \ A = \infty : \lim a_n = \infty &\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : a_n > P \\
 \text{De } b_n &\geq a_n, \forall n \geq N \Rightarrow \\
 &\forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 = \max(n_1, N), \forall n \geq n_0 : b_n \geq a_n > P \\
 &\Rightarrow \lim b_n = \infty
 \end{aligned}$$

11. Monoton növekvő sorozatok határértéke (véges és végtelen eset)

Tétel:

1. Ha (a_n) monoton nő és korlátos, akkor konvergens és
 $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
2. Ha (a_n) monoton nő és nem korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$

Bizonyítás:

1. (a_n) korlátos $\Rightarrow \exists \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$
 $\Rightarrow a_n \leq \xi, \forall n$ és $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq \xi \Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi$
 $= |a_n - \xi| < \epsilon$
 $\Rightarrow \lim a_n = \xi$
- (a_n) nem korlátos $\Rightarrow (a_n)$ felülről nem korlátos
 $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n > P \Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n_0} > P \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim a_n = \infty$

12. A Cauchy-féle konvergencia kritérium sorozatokra

Tétel:

(a_n) konvergens $\Leftrightarrow (a_n)$ Cauchy

Bizonyítás:

(\Rightarrow) bizonyítása:

Tfh: (a_n) konvergens. Megmutatjuk, hogy (a_n) Cauchy

$A := \lim(a_n), \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$

Legyen $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N$ Ekkor:

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon$$

Tehát $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$

$\Rightarrow (a_n)$ Cauchy

(\Leftarrow) bizonyítása:

Tfh: (a_n) Cauchy. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos.

Mivel (a_n) Cauchy, ezért $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |a_n - a_m| < 1$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| \leq K := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

$\Rightarrow (a_n)$ korlátos

\Rightarrow (ld.: Bolzano - Weierstrass): $\exists (a_{n_k})$ konvergens részsorozat és

$$A := \lim(a_{n_k})$$

Megmutatjuk, hogy (a_n) is konvergens és $\lim(a_n) = A$

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$$

Mivel (a_n) Cauchy: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n_k \in \mathbb{N}, n, n_k \geq N : |a_n - a_{n_k}| < \epsilon$

Mivel $\lim(a_{n_k}) = A$ ezért $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n_k \in \mathbb{N}, n_k \geq N_1 : |a_{n_k} - A| < \epsilon$

Tehát: $\forall \epsilon > 0, \exists N := \max\{N_0, N_1\} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - A| < 2 \cdot \epsilon$
 $\Rightarrow (a_n)$ konvergens és $\lim(a_n) = A$

13. A geometriai sorozat határértékére vonatkozó tétel

Tétel:

Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim(q^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Bizonyítás:

Ha $q = 1$, $q = 0$, $q = -1$ akkor triviális.

Tfh: $q > 1$. Ekkor $\exists h \in \mathbb{R}, h > 0 : q = 1 + h$

$$\Rightarrow q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \geq n \cdot h \rightarrow +\infty$$

Tfh: $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, azaz $0 < |q| < 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 &\Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + h \Rightarrow \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + h)^n \geq \\ &\geq 1 + nh \geq n \cdot h \Rightarrow 0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{nh} \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \lim(|q|^n) = 0 \text{ és } \lim(q^n) = 0 \end{aligned}$$

Tfh: $q < -1$, akkor $q^2 > 1$. Ekkor:

- $q^{2n} = (q^2)^n \rightarrow +\infty$
- $q^{2n+1} = q(q^2)^n \rightarrow -\infty$

$$\Rightarrow \nexists \lim(q^n)$$

14. Az $(\sqrt[n]{a})$ és az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat határértéke

Tétel:

$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, : \lim(\sqrt[n]{a}) = 1$

Bizonyítás:

Ha $a = 1$ ✓

Tfh: $a > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{a} > 1$

$$\Rightarrow \exists h_n > 0 : \sqrt[n]{a} = 1 + h_n$$

$$\Rightarrow a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n \leq \frac{a - 1}{n} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim(h_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(1 + h_n) = \lim(1) + \lim_{nullsor}(h_n) = 1 \checkmark$$

Tfh: $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \rightarrow 1$

$$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}\right) \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \checkmark$$

Tétel:

$$\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$$

Bizonyítás:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \text{ ahol } h_n > 0, (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow n = (1 + h_n)^n \stackrel{\text{binomiális}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} h_n^j \stackrel{j \geq 2}{\geq} \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot h_n^2$$

$$\Rightarrow 0 < h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \lim(h_n) = 0 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{n}) = \lim(1 + h_n) = 1 \checkmark$$

15. Pozitív szám m -edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével

Tétel:

Legyen $2 \leq m \in \mathbb{N}$, Ekkor:

$$1. \forall A > 0, \exists! \alpha > 0 : \alpha^n = A$$

$$2. \forall a_0 > 0, a_{n+1} := \frac{1}{m} \left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Az így definiált sorozat konvergens és $\lim(a_n) = \alpha$

Bizonyítás:

$a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, (ld.: Teljes indukció)

$\Rightarrow (a_n)$ alulról korlátos, ill.:

$$a_{n+1} = \left(\frac{\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n}{m} \right)^m \stackrel{\text{számtani-mértani}}{\geq} \frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_n}_{(m-1)\text{db}} = A \quad (n \in \mathbb{N})$$

Azaz: $a_1 \geq A, a_2 \geq A, a_3 \geq A, \dots$

Mutassuk meg, hogy az (a_{n+1}) elshiftelt sorozat monoton fogyó, azaz

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 1$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{m} \left(\frac{A}{a_{n+1}^{m-1}} + (m-1)a_{n+1} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{A}{a_{n+1}^m} + (m-1) \right) =$$

$$= \frac{1}{m} \left(\frac{A - a_{n+1}^m}{a_{n+1}^m} + m \right) = \frac{A - a_{n+1}^m}{m \cdot a_{n+1}^m} + 1 \stackrel{\leq 0}{\Rightarrow} \leq 1, \text{ monoton fogyó}$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}) \text{ korlátos és monoton fogyó} \Rightarrow \text{konvergens} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim(a_{n+1}) = \alpha$$