11. előadás

2020. május 4.

Kettős integrálok kiszámítása 2.

• Kettős integrál kiszámítása egyéb halmazokon (integráltranszformációval)

A helyettesítéssel való integrálást illetően idézzük fel a valós-valós függvényekre vonatkozó állításokat. Először a határozatlan integrálokkal kapcsolatos második helyettesítési szabályra emlékeztetünk:

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ bijekció, $g \in D(J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\,dx$ alakú határozatlan integrált akarunk kiszámítani. Olyan g-t keresünk, amelyre az $\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt$ integrált ki tudjuk számítani. E cél érdekében általában olyan g függvényt próbálunk választani, amelyre $f \circ g \cdot g'$ egyszerűbb, mint f.

A Newton–Leibniz-tételből egyszerűen következik a helyettesítéssel való integrálás (vagyis az integráltranszformációs formula) határozott integrálokra vonatkozó alábbi változata: Tegyük fel, hogy $f \in R[a, b]$, $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ folytonosan deriválható bijekció és $g'(t) \neq 0$ $\big(t \in [\alpha, \beta]\big)$. Ekkor

$$(*) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g' = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f.$$

Ha $g' > 0$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, akkor $g \uparrow [\alpha, \beta]$-n, így $g(\alpha) = a$ és $g(\beta) = b$, ezért $(*)$-ból következik, hogy

$$\int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Ha viszont $g' < 0$ az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, akkor $g \downarrow [\alpha, \beta]$-n, így $g(\alpha) = b$ és $g(\beta) = a$, ezért $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g' = \int_b^a f = -\int_a^b f, \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot \big(-g'\big).$$

Összefoglalva a következő állítás igaz:

Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$, $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ folytonosan deriválható bijekció és $g'(t) \neq 0$ $\big(t \in [\alpha,\beta]\big)$. Ekkor

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f \circ g \cdot |g'|.$$

Most azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet új változók bevezetésével („helyettesítéssel”) kettős integrálokat egyszerűbb alakra transzformálni (átalakítani). Az új változókban vagy az integrálandó *függvény*, vagy pedig az *integrációs tartomány* egyszerűbb lehet, és így könnyebbé válhat az integrál kiszámítása.

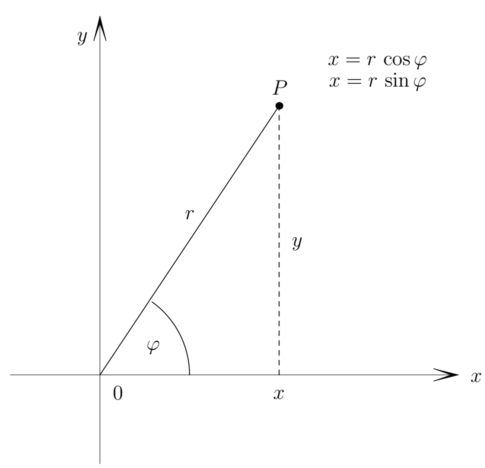
Motivációként induljunk ki abból, hogy egy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integrálját pl. egy körgyűrűcikken szeretnénk kiszámítani. Ez a halmaz nem normáltartomány, de *polárkoordináták* bevezetésével téglalapra transzformálhatjuk, és azon az integrálját már ki tudjuk számítani.

1. megjegyzés. (Polárkoordinára-rendszer.) Sok esetben a Descates-féle derékszögű koordinátarendszer helyett/mellett célszerű *polárkoordináta-rendszert* bevezetni a következő módon. Kiválasztunk a síkon egy rögzített O pontot (pólus) és egy ebből kiinduló félegyenest (polártengely). A pólustól különböző P pont *polárkoordinátáin* az (r,φ) számpárt értjük, ahol $r = \overline{OP}$ és φ az $\overrightarrow{OP}$ félegyenesnek a polártengellyel bezárt szöge.

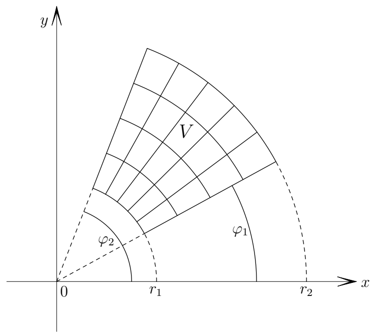
Világos, hogy r és φ egyértelműen meghatározza a P pont helyzetét, ezzel szemben a P pont csak r-et határozza meg egyértelműen, a φ szöget csak 2π egész számú többszörösétől eltekintve. Az O pont polárszöge határozatlan.

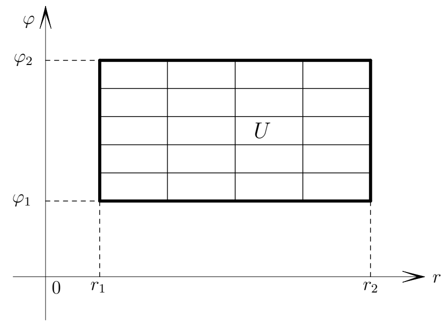
A vizsgálataink során gyakran egymás mellett használjuk a Descates-féle derékszögű és a polárkoordináta-rendszert. Ha a kétféle koordinátarendszer kezdőpontja, valamint a polártengely és az x tengely pozitív fele egybeesik, akkor a következő összefüggések állnak fenn az (x,y) derékszögű és az (r,φ) polárkoordináták között:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc}\cos\frac{x}{r}, \quad \varphi = \operatorname{arc}\sin\frac{y}{r}.$$



Polárkoordináta-transzformációval egy körgyűrűcikket téglalapba képezhetünk. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:





A szóban forgó leképezést tehát a következőképpen adhatjuk meg.

Legyen

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$g(r, \varphi) := \begin{bmatrix} g_1(r, \varphi) \\ g_2(r, \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \big((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Adott $0 < r_1 < r_2$, valamint $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ esetén tekintsük az

$$U := \big\{(r, \varphi) \bigm| r_1 < r < r_2,\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\big\}$$

téglalapot az (r, φ) síkon és a $V := g(U)$ körgyűrűcikket az (x, y) síkon. Világos, hogy a $g : U \to V$ függvény folytonosan deriváható U-n és

$$(**) \qquad \begin{aligned} \det g'(r, \varphi) &= \det \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(r, \varphi) & \partial_2 g_1(r, \varphi) \\ \partial_1 g_2(r, \varphi) & \partial_2 g_2(r, \varphi) \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{bmatrix} = r \neq 0 \quad \big(\forall\,(r, \varphi) \in U\big). \end{aligned}$$

Az inverzfüggvény-tétel szerint tehát a $g : U \to V$ függvény folytonosan deriválható bijekció, következésképpen g invertálható. Az (x, y) síkbeli V körgyűrűcikknek a g^{-1} inverz függvény által létesített képe az (r, φ) síkon az U téglalap.

Kérdés. Hogyan változik az $\iint_V f(x, y)\,dx\,dy$ kettős integrál, ha abban a „régi" (x, y) változók helyett az „új" (r, φ) változókat vezetjük be az $(x, y) := (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$ képletekkel?

A következő tételben kettős integrálok *általános* transzformációjára vonatkozó alapvető eredményt fogalmazzuk meg.

1. tétel. (Integráltranszformáció.)

Tegyük fel, hogy a valós értékű $f(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in V)$ függvény Riemann-integrálható a korlátos $V \subset \mathbb{R}^2$ halmazon, azaz $f \in R(V)$.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ egy adott korlátos és nyílt halmaz, $g : U \to \mathbb{R}^2$ egy adott függvény és $V := g(U) \subset \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy a $g(\mathbf{t})$ $(\mathbf{t} \in U)$ függvény folytonosan deriválható U-n és $\det g'(\mathbf{t}) \neq 0$ $(\forall\,\mathbf{t} \in U)$, így $g : U \to V$ egy folytonosan deriválható bijekció, következésképpen invertálható.

Ekkor az $\mathbf{x} = g(\mathbf{t})$ *helyettesítéssel a következő állítás teljesül:*

$$(IT) \qquad \iint\limits_V f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \iint\limits_U f\big(g(\mathbf{t})\big) \cdot \big|\det g'(\mathbf{t})\big|\, d\mathbf{t}.$$

2. megjegyzés. Ez a képlet a feltételeknek eleget tevő *tetszőleges* g függvényre igaz. Az alkalmazásására két okból is szükség lehet. Egyrészt, ha V olyan tartomány, amelyen az integrált csak „körülményesen" lehet kiszámolni, akkor *kereshetünk* olyan g-t, amely már egy „egyszerűbb" halmazon van értelmezve, ezért a jobb oldali integrált könnyebb kiszámolni. Másrészt előfordulhat az is, hogy sikerül olyan g függvényt *találni*, amelyre $f \circ g \cdot |\det g'|$ egyszerűbb, mint f.

3. megjegyzés. Az (IT) képletet részletesebben a következő alakban írhatjuk fel.

Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományát, vagyis a V halmazt, az (x, y) koordinátákkal jelölt derékszögű koordináta-rendszerben tekintjük, és a helyettesítési értékeit így jelöljük:

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y) \quad (\mathbf{x} = (x, y) \in V).$$

A $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény értelmezési tartományát, vagyis az U halmazt, az (u, v) koordinátákkal jelölt derékszögű koordináta-rendszerben tekintjük, és a helyettesítési értékeit így jelöljük:

$$g(\mathbf{t}) = g\big(g_1(\mathbf{t}), g_2(\mathbf{t})\big), \quad \text{illetve} \quad g(u, v) = \big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \quad (\mathbf{t} = (u, v) \in U).$$

Mivel $g \in C^1(U)$, ezért g Jacobi-mátrixa:

$$g'(\mathbf{t}) = g'(u, v) = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(u, v) & \partial_2 g_1(u, v) \\ \partial_1 g_2(u, v) & \partial_2 g_2(u, v) \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a jelölésekkel az (IT) képletre azt kapjuk, hogy:

$$(ITR) \qquad \begin{aligned} &\iint\limits_V f(x, y)\, dx\, dy = \\ &= \iint\limits_U f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \cdot \left|\det \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(u, v) & \partial_2 g_1(u, v) \\ \partial_1 g_2(u, v) & \partial_2 g_2(u, v) \end{bmatrix}\right| du\, dv. \end{aligned}$$

Érdemes megjegyezni a fenti tétel polárkoordináta-transzformációra vonatkozó speciális esetét.

2. tétel. (Polárkoordinátás helyettesítés.)

Legyen $U \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ *egy adott korlátos és nyílt halmaz,*

$$g(r, \varphi) := \begin{bmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \big((r, \varphi) \in U\big).$$

Ekkor $g(U) =: V \subset \mathbb{R}^2$ *korlátos és nyílt halmaz.*

Ha a korlátos $f : V \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható V-n (azaz $f \in R(V)$), akkor

$$(P) \qquad \iint_V f(x,y)\,dx\,dy = \iint_U f\big(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi\big)\cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Valóban, a $g : U \to V$ függvény folytonosan deriválható bijekció, mert $\det g'(r,\varphi) = r \neq 0$ $\big(\forall\,(u,v) \in U\big)$ (l. a $(**)$ képletet). Így a (P) állítás (ITR) közvetlen következménye.

4. megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti tételben az U halmaz valamelyik tengelyre vonatkozó *normáltartomány* is lehet, és ezeken a halmazokon a jobb oldalon szereplő kettős integrált már ki tudjuk számolni.