Számításelmélet

8. előadás

előadó: Kolonits Gábor
kolomax@inf.elte.hu

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula tautológia-e,

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula tautológia-e,
- φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulákra $\varphi \sim_0 \psi$ fennáll-e,

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula tautológia-e,
- φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulákra $\varphi \sim_0 \psi$ fennáll-e,
- egy $\mathcal{F}$ véges ítéletkalkulusbeli formulahalmaz és egy φ formula esetén $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ fennáll-e.

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula tautológia-e,
- φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulákra $\varphi \sim_0 \psi$ fennáll-e,
- egy $\mathcal{F}$ véges ítéletkalkulusbeli formulahalmaz és egy φ formula esetén $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ fennáll-e.

Bizonyítás: Készítsük el az ítélettáblá(ka)t a szóban forgó formulá(k)ra és olvassuk le belőlük. $\square$

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula tautológia-e,
- φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulákra $\varphi \sim_0 \psi$ fennáll-e,
- egy $\mathcal{F}$ véges ítéletkalkulusbeli formulahalmaz és egy φ formula esetén $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ fennáll-e.

Bizonyítás: Készítsük el az ítélettáblá(ka)t a szóban forgó formulá(k)ra és olvassuk le belőlük. $\square$

Megjegyzés: A fenti algoritmikus kérdések eldönthetősége azon múlik, hogy véges sok interpretáció lehetséges, ezek egyesével megvizsgálhatóak.

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula tautológia-e,
- φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulákra $\varphi \sim_0 \psi$ fennáll-e,
- egy $\mathcal{F}$ véges ítéletkalkulusbeli formulahalmaz és egy φ formula esetén $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ fennáll-e.

Bizonyítás: Készítsük el az ítélettáblá(ka)t a szóban forgó formulá(k)ra és olvassuk le belőlük. $\square$

Megjegyzés: A fenti algoritmikus kérdések eldönthetősége azon múlik, hogy véges sok interpretáció lehetséges, ezek egyesével megvizsgálhatóak. Mivel n ítéletváltozó esetén az ítélettáblának 2^n, azaz exponenciális sora van, ez a „brute force” módszer persze nem hatékony.

Eldönthető problémák a nulladrendű logikában

Állítás: Eldönthetőek az ítéletkalkulus alábbi algoritmikus kérdései:

- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthető-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula kielégíthetetlen-e,
- egy φ ítéletkalkulusbeli formula tautológia-e,
- φ és ψ ítéletkalkulusbeli formulákra $\varphi \sim_0 \psi$ fennáll-e,
- egy $\mathcal{F}$ véges ítéletkalkulusbeli formulahalmaz és egy φ formula esetén $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ fennáll-e.

Bizonyítás: Készítsük el az ítélettáblá(ka)t a szóban forgó formulá(k)ra és olvassuk le belőlük. □

Megjegyzés: A fenti algoritmikus kérdések eldönthetősége azon múlik, hogy véges sok interpretáció lehetséges, ezek egyesével megvizsgálhatóak. Mivel n ítéletváltozó esetén az ítélettáblának 2^n, azaz exponenciális sora van, ez a „brute force" módszer persze nem hatékony. Ugyan ismeretesek az ítélettáblánál praktikusan jobb módszerek, azonban ezek mindegyike a legrosszabb esetben szintén exponenciális műveletigényű.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A következőkben belátjuk, hogy az elsőrendű logikában olyan alapvető kérdések, mint hogy egy formula logikailag igaz, kielégíthető, kielégíthetetlen, illetve hogy egy formula egy formulahalmaz logikai következménye-e (algoritmikusan) eldönthetetlen.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A következőkben belátjuk, hogy az elsőrendű logikában olyan alapvető kérdések, mint hogy egy formula logikailag igaz, kielégíthető, kielégíthetetlen, illetve hogy egy formula egy formulahalmaz logikai következménye-e (algoritmikusan) eldönthetetlen.

Definíció

$\textsc{ValidityPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ logikailag igaz elsőrendű formula}\}$.
$\textsc{UnsatPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ kielégíthetetlen elsőrendű formula}\}$.
$\textsc{SatPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ kielégíthető elsőrendű formula}\}$.
$\textsc{EqivPred} := \{\langle\varphi,\psi\rangle \mid \varphi,\psi \text{ elsőrendű formulák, melyekre } \varphi \sim \psi\}$.
$\textsc{ConsPred} := \{\langle\mathcal{F},\varphi\rangle \mid \mathcal{F} \text{ véges elsőrendű formulahalmaz, } \varphi \text{ elsőrendű formula}, \mathcal{F} \models \varphi\}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A következőkben belátjuk, hogy az elsőrendű logikában olyan alapvető kérdések, mint hogy egy formula logikailag igaz, kielégíthető, kielégíthetetlen, illetve hogy egy formula egy formulahalmaz logikai következménye-e (algoritmikusan) eldönthetetlen.

Definíció

$\textsc{ValidityPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ logikailag igaz elsőrendű formula$\}$.
$\textsc{UnsatPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen elsőrendű formula$\}$.
$\textsc{SatPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető elsőrendű formula$\}$.
$\textsc{EqivPred} := \{\langle\varphi, \psi\rangle \mid \varphi, \psi$ elsőrendű formulák, melyekre $\varphi \sim \psi\}$.
$\textsc{ConsPred} := \{\langle\mathcal{F}, \varphi\rangle \mid \mathcal{F}$ véges elsőrendű formulahalmaz, φ elsőrendű formula, $\mathcal{F} \models \varphi\}$.

Megjegyzés: Itt $\langle\varphi\rangle$ a φ formula egy $\{0, 1\}$ feletti kódolása.

A TG-ek kódolásánál látott módon a nem-kódokhoz hozzárendelhetjük pl. $\perp$-t, a konstans kielégíthetetlen formulát, így feltehető, hogy $\overline{\textsc{UnsatPred}} = \textsc{SatPred}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Tétel

$\textsc{ValidityPred} \notin \mathrm{R}$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Tétel

$\textsc{ValidityPred} \notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: L_{PMP}-t vezetjük vissza $\textsc{ValidityPred}$-re, korábbi tételünk alapján ebből a tétel állítása következik. Minden D dominókészlethez megadunk egy φ_D elsőrendű formulát, amelyre teljesül, hogy D-nek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\models \varphi_D$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Tétel

$\textsc{ValidityPred} \notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: L_{PMP}-t vezetjük vissza $\textsc{ValidityPred}$-re, korábbi tételünk alapján ebből a tétel állítása következik. Minden D dominókészlethez megadunk egy φ_D elsőrendű formulát, amelyre teljesül, hogy D-nek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\models \varphi_D$.

Legyen tehát $D = \left\{\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_k}{v_k}\right\}$ $(k \geqslant 1)$ egy $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ feletti dominókészlet.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Tétel

$\textsc{ValidityPred} \notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: L_{PMP}-t vezetjük vissza $\textsc{ValidityPred}$-re, korábbi tételünk alapján ebből a tétel állítása következik. Minden D dominókészlethez megadunk egy φ_D elsőrendű formulát, amelyre teljesül, hogy D-nek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\models \varphi_D$.

Legyen tehát $D = \left\{\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_k}{v_k}\right\}$ $(k \geqslant 1)$ egy $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ feletti dominókészlet.

Tekintsük azt az elsőrendű logikai nyelvet ahol
$\mathrm{Pred} = \{p\}, \mathrm{ar}(p) = 2, \mathrm{Func} = \{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\},$
$\mathrm{ar}(f_{a_i}) = 1 \ (\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n), \mathrm{Cnst} = \{c\}.$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Tétel

$\textsc{ValidityPred} \notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: L_{PMP}-t vezetjük vissza $\textsc{ValidityPred}$-re, korábbi tételünk alapján ebből a tétel állítása következik. Minden D dominókészlethez megadunk egy φ_D elsőrendű formulát, amelyre teljesül, hogy D-nek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\models \varphi_D$.

Legyen tehát $D = \left\{ \frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_k}{v_k} \right\}$ $(k \geqslant 1)$ egy $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ feletti dominókészlet.

Tekintsük azt az elsőrendű logikai nyelvet ahol
$\mathrm{Pred} = \{p\}, \mathrm{ar}(p) = 2, \mathrm{Func} = \{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\},$
$\mathrm{ar}(f_{a_i}) = 1\ (\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n), \mathrm{Cnst} = \{c\}.$

Jelölés: $f_{b_1 \cdots b_m}(t) := f_{b_1}(f_{b_2}(\cdots(f_{b_m}(t))\cdots))$ ahol $b_1 \ldots b_m \in \Sigma$, t pedig egy term.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$, ahol

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \to p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

$\varphi_3 = \exists z p(z, z)$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \to p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

$\varphi_3 = \exists z p(z, z)$.

Először tegyük fel, hogy φ_D logikailag igaz. Legyen I a következő interpretáció.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

$\varphi_3 = \exists z p(z, z)$.

Először tegyük fel, hogy φ_D logikailag igaz. Legyen I a következő interpretáció. (φ_D zárt formula, így igazságértéke csak az interpretációtól függ.)

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \to p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

$\varphi_3 = \exists z p(z, z)$.

Először tegyük fel, hogy φ_D logikailag igaz. Legyen I a következő interpretáció. (φ_D zárt formula, így igazságértéke csak az interpretációtól függ.)

I alaphalmaza legyen Σ^*. $f_{a_i}^I(u) := a_i u (1 \leqslant i \leqslant k, u \in \Sigma^*)$, $c^I := \varepsilon$, p interpretációja pedig az alábbi.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

$\varphi_3 = \exists z p(z, z)$.

Először tegyük fel, hogy φ_D logikailag igaz. Legyen I a következő interpretáció. (φ_D zárt formula, így igazságértéke csak az interpretációtól függ.)

I alaphalmaza legyen Σ^*. $f^I_{a_i}(u) := a_i u (1 \leqslant i \leqslant k, u \in \Sigma^*)$, $c^I := \varepsilon$, p interpretációja pedig az alábbi. Tetszőleges $u, v \in \Sigma^*$ esetén $p^I(u, v) :=$ igaz akkor és csak akkor, ha az alábbi feltétel teljesül:

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x, y) \to p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

$\varphi_3 = \exists z p(z, z)$.

Először tegyük fel, hogy φ_D logikailag igaz. Legyen I a következő interpretáció. (φ_D zárt formula, így igazságértéke csak az interpretációtól függ.)

I alaphalmaza legyen Σ^*. $f^I_{a_i}(u) := a_i u (1 \leqslant i \leqslant k, u \in \Sigma^*)$, $c^I := \varepsilon$, p interpretációja pedig az alábbi. Tetszőleges $u, v \in \Sigma^*$ esetén $p^I(u, v) :=$ igaz akkor és csak akkor, ha az alábbi feltétel teljesül:

$$\text{van olyan } m \geqslant 1 \text{ és } 1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k, \text{ hogy}$$
$$u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u \text{ és } v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v. \qquad (*)$$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Ekkor $\varphi_D := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$, ahol

$\varphi_1 = p(f_{u_1}(c), f_{v_1}(c)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(c), f_{v_k}(c))$,

$\varphi_2 = \forall x \forall y (p(x,y) \to p(f_{u_1}(x), f_{v_1}(y)) \wedge \cdots \wedge p(f_{u_k}(x), f_{v_k}(y)))$,

$\varphi_3 = \exists z p(z,z)$.

Először tegyük fel, hogy φ_D logikailag igaz. Legyen I a következő interpretáció. (φ_D zárt formula, így igazságértéke csak az interpretációtól függ.)

I alaphalmaza legyen Σ^*. $f^I_{a_i}(u) := a_i u (1 \leqslant i \leqslant k, u \in \Sigma^*)$, $c^I := \varepsilon$, p interpretációja pedig az alábbi. Tetszőleges $u, v \in \Sigma^*$ esetén $p^I(u,v) :=$ igaz akkor és csak akkor, ha az alábbi feltétel teljesül:

$$\text{van olyan } m \geqslant 1 \text{ és } 1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k, \text{ hogy} \\ u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u \text{ és } v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v. \qquad (*)$$

Vegyük észre, hogy a feltétel pontosan akkor teljesül, ha D néhány dominója egymás után tehető úgy hogy felül u, alul v olvasható.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_1$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \vDash \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra. Ekkor p^I definíciója szerint van olyan $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \dots i_m \leqslant k$, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u$ és $v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra. Ekkor p^I definíciója szerint van olyan $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u$ és $v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v$.

Ekkor nyilván minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra az $u_i u$ és $v_i v$ szavakra is teljesül a (*) feltétel (az $i, i_1, \ldots i_m$ index sorozat jó), tehát $p^I(u_i u, v_i v) =$ igaz.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra. Ekkor p^I definíciója szerint van olyan $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u$ és $v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v$.
Ekkor nyilván minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra az $u_i u$ és $v_i v$ szavakra is teljesül a (*) feltétel (az $i, i_1, \ldots i_m$ index sorozat jó), tehát $p^I(u_i u, v_i v) =$ igaz.

Mivel $|f_{u_i}(u)|^I = u_i u$ és $|f_{v_i}(v)|^I = v_i v$, ezért bármely $u, v \in \Sigma^*$-ra ha $p^I(u, v) =$ igaz, akkor
$p^I(|f_{u_1}(u)|^I, |f_{v_1}(v)|^I) \wedge \cdots \wedge p^I(|f_{u_k}(u)|^I, |f_{v_k}(v)|^I) =$ igaz.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra. Ekkor p^I definíciója szerint van olyan $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u$ és $v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v$.
Ekkor nyilván minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra az $u_i u$ és $v_i v$ szavakra is teljesül a (*) feltétel (az $i, i_1, \ldots i_m$ index sorozat jó), tehát $p^I(u_i u, v_i v) =$ igaz.

Mivel $|f_{u_i}(u)|^I = u_i u$ és $|f_{v_i}(v)|^I = v_i v$, ezért bármely $u, v \in \Sigma^*$-ra ha $p^I(u, v) =$ igaz, akkor
$p^I(|f_{u_1}(u)|^I, |f_{v_1}(v)|^I) \wedge \cdots \wedge p^I(|f_{u_k}(u)|^I, |f_{v_k}(v)|^I) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_2$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra. Ekkor p^I definíciója szerint van olyan $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u$ és $v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v$.
Ekkor nyilván minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra az $u_i u$ és $v_i v$ szavakra is teljesül a (*) feltétel (az $i, i_1, \ldots i_m$ index sorozat jó), tehát $p^I(u_i u, v_i v) =$ igaz.
Mivel $|f_{u_i}(u)|^I = u_i u$ és $|f_{v_i}(v)|^I = v_i v$, ezért bármely $u, v \in \Sigma^*$-ra ha $p^I(u, v) =$ igaz, akkor
$p^I(|f_{u_1}(u)|^I, |f_{v_1}(v)|^I) \wedge \cdots \wedge p^I(|f_{u_k}(u)|^I, |f_{v_k}(v)|^I) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_2$.

Mivel φ_D logikailag igaz, ezért $|\varphi_D|^I =$ igaz.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra. Ekkor p^I definíciója szerint van olyan $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \dots i_m \leqslant k$, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u$ és $v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v$.
Ekkor nyilván minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra az $u_i u$ és $v_i v$ szavakra is teljesül a (*) feltétel (az $i, i_1, \dots i_m$ index sorozat jó), tehát $p^I(u_i u, v_i v) =$ igaz.
Mivel $|f_{u_i}(u)|^I = u_i u$ és $|f_{v_i}(v)|^I = v_i v$, ezért bármely $u, v \in \Sigma^*$-ra ha $p^I(u, v) =$ igaz, akkor
$p^I(|f_{u_1}(u)|^I, |f_{v_1}(v)|^I) \wedge \dots \wedge p^I(|f_{u_k}(u)|^I, |f_{v_k}(v)|^I) =$ igaz. Tehát $I \models \varphi_2$.

Mivel φ_D logikailag igaz, ezért $|\varphi_D|^I =$ igaz. Mivel $|\varphi_1|^I =$ igaz és $|\varphi_2|^I =$ igaz, ezért ez csak úgy lehet hogy $|\varphi_3|^I =$ igaz.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A u hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyen látható, hogy minden $u \in \Sigma^*$ esetén $|f_u(c)|^I = u$. Így minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra $|f_{u_i}(c)|^I = u_i$ és $|f_{v_i}(c)|^I = v_i$ és így $p^I(u_i, v_i) =$ igaz. Tehát $I \vDash \varphi_1$.

Tegyük fel, hogy $p^I(u, v) =$ igaz valamely $u, v \in \Sigma^*$-ra. Ekkor p^I definíciója szerint van olyan $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = u$ és $v_{i_1} \cdots v_{i_m} = v$.
Ekkor nyilván minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra az $u_i u$ és $v_i v$ szavakra is teljesül a (*) feltétel (az $i, i_1, \ldots i_m$ index sorozat jó), tehát $p^I(u_i u, v_i v) =$ igaz.
Mivel $|f_{u_i}(u)|^I = u_i u$ és $|f_{v_i}(v)|^I = v_i v$, ezért bármely $u, v \in \Sigma^*$-ra ha $p^I(u, v) =$ igaz, akkor $p^I(|f_{u_1}(u)|^I, |f_{v_1}(v)|^I) \wedge \cdots \wedge p^I(|f_{u_k}(u)|^I, |f_{v_k}(v)|^I) =$ igaz. Tehát $I \vDash \varphi_2$.

Mivel φ_D logikailag igaz, ezért $|\varphi_D|^I =$ igaz. Mivel $|\varphi_1|^I =$ igaz és $|\varphi_2|^I =$ igaz, ezért ez csak úgy lehet hogy $|\varphi_3|^I =$ igaz. φ_3 I-ben viszont akkor és csak akkor igaz, ha D-nek van megoldása.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása és legyen $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy tetszőleges interpretáció.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása és legyen $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy tetszőleges interpretáció. Be kell látni, hogy $I \models \varphi_D$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása és legyen $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy tetszőleges interpretáció. Be kell látni, hogy $I \models \varphi_D$.

Ha $I \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, akkor $I \models \varphi_D$ fennáll az implikáció igazságértékének definíciója miatt.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása és legyen $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy tetszőleges interpretáció. Be kell látni, hogy $I \models \varphi_D$.

Ha $I \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, akkor $I \models \varphi_D$ fennáll az implikáció igazságértékének definíciója miatt. Feltehető tehát, hogy $I \models \varphi_1$ és $I \models \varphi_2$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása és legyen $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy tetszőleges interpretáció. Be kell látni, hogy $I \models \varphi_D$.

Ha $I \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, akkor $I \models \varphi_D$ fennáll az implikáció igazságértékének definíciója miatt. Feltehető tehát, hogy $I \models \varphi_1$ és $I \models \varphi_2$.

Legyen $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$ olyanok, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$ (ilyen létezik, mert D-nek van megoldása).

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása és legyen $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy tetszőleges interpretáció. Be kell látni, hogy $I \models \varphi_D$.

Ha $I \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, akkor $I \models \varphi_D$ fennáll az implikáció igazságértékének definíciója miatt. Feltehető tehát, hogy $I \models \varphi_1$ és $I \models \varphi_2$.

Legyen $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$ olyanok, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$ (ilyen létezik, mert D-nek van megoldása). $I \models \varphi_1$-ből $I \models p(f_{u_{i_m}}(c), f_{v_{i_m}}(c))$ adódik.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

A másik irány bizonyításához tegyük fel most, hogy D -nek van megoldása és legyen $I = \langle U, I_{\mathrm{Pred}}, I_{\mathrm{Func}}, I_{\mathrm{Cnst}} \rangle$ egy tetszőleges interpretáció. Be kell látni, hogy $I \models \varphi_D$.

Ha $I \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, akkor $I \models \varphi_D$ fennáll az implikáció igazságértékének definíciója miatt. Feltehető tehát, hogy $I \models \varphi_1$ és $I \models \varphi_2$.

Legyen $m \geqslant 1$ és $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant k$ olyanok, hogy $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$ (ilyen létezik, mert D-nek van megoldása). $I \models \varphi_1$-ből $I \models p(f_{u_{i_m}}(c), f_{v_{i_m}}(c))$ adódik.

Ebből $I \models \varphi_2$ miatt sorra (teljes indukcióval) adódik, hogy

$$\begin{gathered} I \models p(f_{u_{i_m}}(c), f_{v_{i_m}}(c)) \\ I \models p(f_{u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c), f_{v_{i_{m-1}} v_{i_m}}(c)) \\ \vdots \\ I \models p(f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c), f_{v_{i_1} \cdots v_{i_{m-1}} v_{i_m}}(c)) \end{gathered}$$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható,

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható, így $L_{\text{PMP}} \leqslant \textsc{ValidityPred}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható, így $L_{\mathrm{PMP}} \leqslant$ ValidityPred. A tétel állítása következik egy a visszavezetésről tanult tételből és abból, hogy $L_{\mathrm{PMP}} \notin \mathrm{R}$. $\square$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1}\cdots u_{i_m} = v_{i_1}\cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1}\cdots u_{i_{m-1}}u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w,w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható, így $L_{\text{PMP}} \leqslant$ ValidityPred. A tétel állítása következik egy a visszavezetésről tanult tételből és abból, hogy $L_{\text{PMP}} \notin \mathrm{R}$. $\square$.

Következmény

UnsatPred, SatPred, EquivPred, ConsPred $\notin \mathrm{R}$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható, így $L_{\mathrm{PMP}} \leqslant$ ValidityPred. A tétel állítása következik egy a visszavezetésről tanult tételből és abból, hogy $L_{\mathrm{PMP}} \notin \mathrm{R}$. $\square$.

Következmény

UnsatPred, SatPred, EquivPred, ConsPred $\notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: φ kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \models \neg\varphi$. Tehát az előző tétel alapján UnsatPred $\notin \mathrm{R}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható, így $L_{\text{PMP}} \leqslant$ ValidityPred. A tétel állítása következik egy a visszavezetésről tanult tételből és abból, hogy $L_{\text{PMP}} \notin \mathrm{R}$. $\square$.

Következmény

UnsatPred, SatPred, EquivPred, ConsPred $\notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: φ kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \models \neg\varphi$. Tehát az előző tétel alapján UnsatPred $\notin \mathrm{R}$.

Eldönthetetlen nyelv komplementere eldönthetetlen, tehát SatPred $\notin \mathrm{R}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \vDash \varphi_3$ és így $I \vDash \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható, így $L_{\text{PMP}} \leqslant$ ValidityPred. A tétel állítása következik egy a visszavezetésről tanult tételből és abból, hogy $L_{\text{PMP}} \notin \mathrm{R}$. $\square$.

Következmény

UnsatPred, SatPred, EquivPred, ConsPred $\notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: φ kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \vDash \neg\varphi$. Tehát az előző tétel alapján UnsatPred $\notin \mathrm{R}$.

Eldönthetetlen nyelv komplementere eldönthetetlen, tehát SatPred $\notin \mathrm{R}$.

φ kielégíthetetlen $\Longleftrightarrow \varphi \sim \bot$, így EquivPred $\notin \mathrm{R}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Mivel $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$, ezért a $w = |f_{u_{i_1} \cdots u_{i_{m-1}} u_{i_m}}(c)|^I$ U-beli elemre $p^I(w, w) =$ igaz teljesül.

Tehát $I \models \varphi_3$ és így $I \models \varphi_D$.
D alapján a φ_D formula nyilván kiszámítható, így $L_{\text{PMP}} \leqslant$ ValidityPred. A tétel állítása következik egy a visszavezetésről tanult tételből és abból, hogy $L_{\text{PMP}} \notin \mathrm{R}$. $\square$.

Következmény

UnsatPred, SatPred, EquivPred, ConsPred $\notin \mathrm{R}$

Bizonyítás: φ kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \models \neg\varphi$. Tehát az előző tétel alapján UnsatPred $\notin \mathrm{R}$.

Eldönthetetlen nyelv komplementere eldönthetetlen, tehát SatPred $\notin \mathrm{R}$.

φ kielégíthetetlen $\iff \varphi \sim \perp$, így EquivPred $\notin \mathrm{R}$.

$\mathcal{F} \models \varphi \iff \mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen, így ConsPred $\notin \mathrm{R}$. $\square$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Megjegyzés: Van olyan parciális algoritmus, amely egy tetszőleges φ elsőrendű formulára pontosan akkor áll meg „igen” válasszal, ha φ kielégíthetetlen (ilyen például az elsőrendű logika rezolúciós algoritmusa).

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Megjegyzés: Van olyan parciális algoritmus, amely egy tetszőleges φ elsőrendű formulára pontosan akkor áll meg „igen” válasszal, ha φ kielégíthetetlen (ilyen például az elsőrendű logika rezolúciós algoritmusa).

Az elsőrendű rezolúció ismertetése meghaladja az előadás kereteit így bizonyítás nélkül kimondjuk a következőt:

Tétel

$\textsc{UnsatPred} \in \mathrm{RE}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Megjegyzés: Van olyan parciális algoritmus, amely egy tetszőleges φ elsőrendű formulára pontosan akkor áll meg „igen" válasszal, ha φ kielégíthetetlen (ilyen például az elsőrendű logika rezolúciós algoritmusa).

Az elsőrendű rezolúció ismertetése meghaladja az előadás kereteit így bizonyítás nélkül kimondjuk a következőt:

Tétel

$\textsc{UnsatPred} \in \mathsf{RE}$.

Következmény

$\textsc{SatPred} \notin \mathsf{RE}$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Megjegyzés: Van olyan parciális algoritmus, amely egy tetszőleges φ elsőrendű formulára pontosan akkor áll meg „igen” válasszal, ha φ kielégíthetetlen (ilyen például az elsőrendű logika rezolúciós algoritmusa).

Az elsőrendű rezolúció ismertetése meghaladja az előadás kereteit így bizonyítás nélkül kimondjuk a következőt:

Tétel

$\textsc{UnsatPred} \in \mathrm{RE}$.

Következmény

$\textsc{SatPred} \notin \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Korábbi tételünk volt hogy $L, \overline{L} \in \mathrm{RE} \Rightarrow L \in \mathrm{R}$.

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Megjegyzés: Van olyan parciális algoritmus, amely egy tetszőleges φ elsőrendű formulára pontosan akkor áll meg „igen” válasszal, ha φ kielégíthetetlen (ilyen például az elsőrendű logika rezolúciós algoritmusa).

Az elsőrendű rezolúció ismertetése meghaladja az előadás kereteit így bizonyítás nélkül kimondjuk a következőt:

Tétel

$\textsc{UnsatPred} \in \mathrm{RE}$.

Következmény

$\textsc{SatPred} \notin \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Korábbi tételünk volt hogy $L, \overline{L} \in \mathrm{RE} \Rightarrow L \in \mathrm{R}$.Mivel $\overline{\textsc{UnsatPred}} = \textsc{SatPred}$

Eldönthetetlen problémák az elsőrendű logikában

Megjegyzés: Van olyan parciális algoritmus, amely egy tetszőleges φ elsőrendű formulára pontosan akkor áll meg „igen” válasszal, ha φ kielégíthetetlen (ilyen például az elsőrendű logika rezolúciós algoritmusa).

Az elsőrendű rezolúció ismertetése meghaladja az előadás kereteit így bizonyítás nélkül kimondjuk a következőt:

Tétel

$\textsc{UnsatPred} \in \mathrm{RE}$.

Következmény

$\textsc{SatPred} \notin \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Korábbi tételünk volt hogy $L, \overline{L} \in \mathrm{RE} \Rightarrow L \in \mathrm{R}$. Mivel $\overline{\textsc{UnsatPred}} = \textsc{SatPred}$ és $\textsc{UnsatPred} \in \mathrm{RE} \setminus \mathrm{R}$, ezért $\textsc{SatPred} \notin \mathrm{RE}$. $\square$

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \to q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \to q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

Ha az 1. és a 3. szalag tartalma megegyezik a gép q_i-ben megáll. M ezt minden iteráció előtt ellenőrzi.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \rightarrow q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

Ha az 1. és a 3. szalag tartalma megegyezik a gép q_i-ben megáll. M ezt minden iteráció előtt ellenőrzi. Így $L(M) = L(G)$. $\square$

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \to q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

Ha az 1. és a 3. szalag tartalma megegyezik a gép q_i-ben megáll. M ezt minden iteráció előtt ellenőrzi. Így $L(M) = L(G)$. $\square$

Következmény: Egy korábbi tételünk alapján persze determinisztikus TG is megadható G-hez.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ determinisztikus TG-hez megadható egy $L(M)$-et generáló G grammatika.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ determinisztikus TG-hez megadható egy $L(M)$-et generáló G grammatika.

Bizonyítás: G mondatformái M konfigurációit fogják kódolni. A G grammatika éppen fordítottan fog haladni. Nemdeterminisztikusan előállít egy elfogadó konfigurációt, majd ebből megpróbál egy kezdőkonfigurációt levezetni.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Legyen $G = \langle (\Gamma \setminus \Sigma) \cup Q \cup \{S, A, \rhd, \lhd\}, \Sigma, P, S \rangle$.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Legyen $G = \langle (\Gamma \backslash \Sigma) \cup Q \cup \{S, A, \rhd, \lhd\}, \Sigma, P, S \rangle$.
P szabályai:

1. $S \rightarrow \rhd A q_i A \lhd$
2. $A \rightarrow aA \,|\, \varepsilon$ $\qquad (\forall a \in \Gamma)$
3. $bq' \rightarrow qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, R)$
4. $q'b \rightarrow qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, S)$
5. $q'cb \rightarrow cqa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, L)$ $\qquad (\forall c \in \Gamma)$
6. $\sqcup \lhd \rightarrow \lhd$, $\lhd \rightarrow \varepsilon$, $\rhd \sqcup \rightarrow \rhd$, $\rhd q_0 \rightarrow \varepsilon$

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

Legyen $G = \langle (\Gamma \backslash \Sigma) \cup Q \cup \{S, A, \rhd, \lhd\}, \Sigma, P, S \rangle$.
P szabályai:

1. $S \to \rhd A q_i A \lhd$
2. $A \to aA \mid \varepsilon$ $\quad (\forall a \in \Gamma)$
3. $bq' \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, R)$
4. $q'b \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, S)$
5. $q'cb \to cqa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, L)$ $\quad (\forall c \in \Gamma)$
6. $\sqcup \lhd \to \lhd$, $\lhd \to \varepsilon$, $\rhd \sqcup \to \rhd$, $\rhd q_0 \to \varepsilon$

1-2. generálunk egy tetszőleges elfogadó konfigurációt

3-5. a konfigurációátmeneteket fordított irányban szimuláljuk. Pl. ha $\alpha cqa\beta \vdash \alpha q'cb\beta$ egy $\delta(q, a) = (q', b, L)$ szabály szerint, akkor most a grammatikában az 5-ös pont szerint $q'cb$ íródhat át cqa-ra.

6. Ha a mondatformánk egy kezdőkonfiguráció (esetleg néhány extra $\sqcup$-el), akkor ezek takarítják el a már felesleges jeleket.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ ($p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*$) akkor és csak akkor ha $\rhd \sqcup^{i'} u'qv' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ $(p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*)$ akkor és csak akkor ha $\rhd\sqcup^{i'}u'qv'\sqcup^{j'}\lhd \Rightarrow^* \rhd\sqcup^{i}upv\sqcup^{j}\lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$n = 0$-ra nyilvánvaló.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ ($p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*$) akkor és csak akkor ha $\rhd \sqcup^{i'} u'qv' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$n = 0$-ra nyilvánvaló. n-ről $n+1$-re nézzük meg a jobbralépés példáján.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ ($p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*$) akkor és csak akkor ha $\rhd \sqcup^{i'} u'qv' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$n = 0$-ra nyilvánvaló. n-ről $n+1$-re nézzük meg a jobbralépés példáján. Ha $upv \vdash^* u'qav' \vdash u'brv''$ valamely $a, b \in \Gamma, r \in Q$-ra ahol $v'' = v'$ ha $v' \neq \varepsilon$, $v'' = \sqcup$ különben, akkor $\rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re az indukciós feltevés miatt

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ ($p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*$) akkor és csak akkor ha $\rhd \sqcup^{i'} u'qv' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$n = 0$-ra nyilvánvaló. n-ről $n+1$-re nézzük meg a jobbralépés példáján. Ha $upv \vdash^* u'qav' \vdash u'brv''$ valamely $a, b \in \Gamma, r \in Q$-ra ahol $v'' = v'$ ha $v' \neq \varepsilon$, $v'' = \sqcup$ különben, akkor $\rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re az indukciós feltevés miatt és $\rhd \sqcup^{i'} u'brv'' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow \rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd$ mivel $bs \to qa \in P$.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ ($p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*$) akkor és csak akkor ha $\rhd \sqcup^{i'} u'qv' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$n = 0$-ra nyilvánvaló. n-ről $n+1$-re nézzük meg a jobbralépés példáján. Ha $upv \vdash^* u'qav' \vdash u'brv''$ valamely $a, b \in \Gamma, r \in Q$-ra ahol $v'' = v'$ ha $v' \neq \varepsilon$, $v'' = \sqcup$ különben, akkor $\rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re az indukciós feltevés miatt és $\rhd \sqcup^{i'} u'brv'' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow \rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd$ mivel $bs \rightarrow qa \in P$. Tehát $\rhd \sqcup^{i'} u'brv'' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$, azaz a jobbralépéssel végződő $n+1$ hosszú konfigurációátmenetekre is igaz az állítás.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ ($p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*$) akkor és csak akkor ha $\rhd \sqcup^{i'} u'qv' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$n = 0$-ra nyilvánvaló. n-ről $n+1$-re nézzük meg a jobbralépés példáján. Ha $upv \vdash^* u'qav' \vdash u'brv''$ valamely $a, b \in \Gamma, r \in Q$-ra ahol $v'' = v'$ ha $v' \neq \varepsilon$, $v'' = \sqcup$ különben, akkor $\rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re az indukciós feltevés miatt és $\rhd \sqcup^{i'} u'brv'' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow \rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd$ mivel $bs \rightarrow qa \in P$. Tehát $\rhd \sqcup^{i'} u'brv'' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$, azaz a jobbralépéssel végződő $n+1$ hosszú konfigurációátmenetekre is igaz az állítás. Hasonlóan megy a bizonyítás az S és L irányokra illetve az állítás megfordítására.

$\mathcal{L}_0$ és RE kapcsolata

A konfigurációátmenet hosszára (n) vonatkozó indukcióval könnyen megmutatható, hogy

$upv \vdash^* u'qv'$ ($p, q \in Q, u, u', v, v' \in \Gamma^*$) akkor és csak akkor ha $\rhd \sqcup^{i'} u'qv' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re.

$n = 0$-ra nyilvánvaló. n-ről $n+1$-re nézzük meg a jobbralépés példáján. Ha $upv \vdash^* u'qav' \vdash u'brv''$ valamely $a, b \in \Gamma, r \in Q$-ra ahol $v'' = v'$ ha $v' \neq \varepsilon$, $v'' = \sqcup$ különben, akkor $\rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$ valamely $i, i', j, j' \in \mathbb{N}$-re az indukciós feltevés miatt és $\rhd \sqcup^{i'} u'brv'' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow \rhd \sqcup^{i'} u'qav' \sqcup^{j'} \lhd$ mivel $bs \rightarrow qa \in P$. Tehát $\rhd \sqcup^{i'} u'brv'' \sqcup^{j'} \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} upv \sqcup^{j} \lhd$, azaz a jobbralépéssel végződő $n+1$ hosszú konfigurációátmenetekre is igaz az állítás. Hasonlóan megy a bizonyítás az S és L irányokra illetve az állítás megfordítására.

Tehát $q_0 w \vdash^* \alpha q_i \beta$ valamely $\alpha, \beta \in \Gamma^*$-ra akkor és csak akkor, ha $S \Rightarrow^* \rhd \alpha q_i \beta \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^{i} q_0 w \sqcup^{j} \lhd \Rightarrow^* w$. $\square$

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Definíció

A **lineárisan korlátolt automata** (LKA) olyan **nemdeterminisztikus** TG, melynek Σ bemeneti ábécéje két speciális szimbólumot tartalmaz $\rhd$-et (baloldali végejel/endmarker) és $\lhd$-et (jobboldali végejel/endmarkert). Ezen felül

- a bemenetek $\rhd(\Sigma \backslash \{\rhd, \lhd\})^* \lhd$-beliek,
- $\rhd$ és $\lhd$ nem írhatók felül
- $\rhd$-tól balra illetve $\lhd$-től jobbra nem állhat a fej.
- a fej kezdőpozíciója a $\rhd$ tartalmú cella jobb-szomszédja

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Definíció

A **lineárisan korlátolt automata** (LKA) olyan **nemdeterminisztikus** TG, melynek Σ bemeneti ábécéje két speciális szimbólumot tartalmaz $\rhd$-et (baloldali végejel/endmarker) és $\lhd$-et (jobboldali végejel/endmarkert). Ezen felül

- a bemenetek $\rhd(\Sigma\setminus\{\rhd,\lhd\})^*\lhd$-beliek,
- $\rhd$ és $\lhd$ nem írhatók felül
- $\rhd$-tól balra illetve $\lhd$-től jobbra nem állhat a fej.
- a fej kezdőpozíciója a $\rhd$ tartalmú cella jobb-szomszédja

Magyarán az LKA egy korlátos munkaterülettel rendelkező NTG.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Definíció

A lineárisan korlátolt automata (LKA) olyan nemdeterminisztikus TG, melynek Σ bemeneti ábécéje két speciális szimbólumot tartalmaz $\rhd$-et (baloldali végejel/endmarker) és $\lhd$-et (jobboldali végejel/endmarkert). Ezen felül

- a bemenetek $\rhd(\Sigma \backslash \{\rhd, \lhd\})^* \lhd$-beliek,
- $\rhd$ és $\lhd$ nem írhatók felül
- $\rhd$-tól balra illetve $\lhd$-től jobbra nem állhat a fej.
- a fej kezdőpozíciója a $\rhd$ tartalmú cella jobb-szomszédja

Magyarán az LKA egy korlátos munkaterülettel rendelkező NTG.

Megjegyzés: Nevét egy vele ekvivalens modellről kapta, amelyben a rendelkezésre álló tár az input hosszának konstansszorosa (lineáris függvénye). (Megmutatható, hogy egy konstans szorzó a megengedett munkaterület méretére nem növeli meg a gép számítási erejét.)

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

(1) Minden G 1-es típusú grammatikához megadható egy A LKA, melyre $L(A) = L(G)$.

(2) Minden A LKA-hoz megadható egy G 1-es típusú grammatika, melyre $L(G) = L(A)$.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

(1) Minden G 1-es típusú grammatikához megadható egy A LKA, melyre $L(A) = L(G)$.

(2) Minden A LKA-hoz megadható egy G 1-es típusú grammatika, melyre $L(G) = L(A)$.

Bizonyítás (vázlat):

(1) Az előző előtti tételben láttuk, hogy minden 0. típusú grammatikához lehet konstruálni $L(G)$-t felismerő NTG-t.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

(1) Minden G 1-es típusú grammatikához megadható egy A LKA, melyre $L(A) = L(G)$.

(2) Minden A LKA-hoz megadható egy G 1-es típusú grammatika, melyre $L(G) = L(A)$.

Bizonyítás (vázlat):

(1) Az előző előtti tételben láttuk, hogy minden 0. típusú grammatikához lehet konstruálni $L(G)$-t felismerő NTG-t.
A konstrukció a 3. szalagján nemdeterminisztikusan szimulált egy G-beli levezetést, az iterációk végén ellenőrizte, hogy a 3. szalagon lévő mondatforma megegyezik-e az első szalagon lévő u inputtal.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

(1) Minden G 1-es típusú grammatikához megadható egy A LKA, melyre $L(A) = L(G)$.

(2) Minden A LKA-hoz megadható egy G 1-es típusú grammatika, melyre $L(G) = L(A)$.

Bizonyítás (vázlat):

(1) Az előző előtti tételben láttuk, hogy minden 0. típusú grammatikához lehet konstruálni $L(G)$-t felismerő NTG-t.
A konstrukció a 3. szalagján nemdeterminisztikusan szimulált egy G-beli levezetést, az iterációk végén ellenőrizte, hogy a 3. szalagon lévő mondatforma megegyezik-e az első szalagon lévő u inputtal.

Amennyiben G 1-es típusú, azaz hossz-nemcsökkentőek a szabályai, akkor a 3. szalagon lévő mondatforma hossza nem haladhatja meg $|u|$-t, így ez az NTG egy LKA.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

(2) Ha az előző bizonyításban konstruált grammatika szabályai hossz-nemcsökkentőek lennének, akkor ez megfelelő is lenne.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

(2) Ha az előző bizonyításban konstruált grammatika szabályai hossz-nemcsökkentőek lennének, akkor ez megfelelő is lenne.

Azonban a hosszcsökkentő szabályok kiküszöbölhetőek:

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

(2) Ha az előző bizonyításban konstruált grammatika szabályai hossz-nemcsökkentőek lennének, akkor ez megfelelő is lenne.

Azonban a hosszcsökkentő szabályok kiküszöbölhetőek:

- az elfogadó konfiguráció generálásakor használtuk az $A \to \varepsilon$ szabályt. Mivel itt valójában S-ből egy hosszabb szót építünk fel, ennek a szabálynak az alkalmazása könnyen megkerülhető (az egyszerűség miatt szerepelt),

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

(2) Ha az előző bizonyításban konstruált grammatika szabályai hossz-nemcsökkentőek lennének, akkor ez megfelelő is lenne.

Azonban a hosszcsökkentő szabályok kiküszöbölhetőek:

- az elfogadó konfiguráció generálásakor használtuk az $A \to \varepsilon$ szabályt. Mivel itt valójában S-ből egy hosszabb szót építünk fel, ennek a szabálynak az alkalmazása könnyen megkerülhető (az egyszerűség miatt szerepelt),
- $\rhd$, $\lhd$, q_0-t eltüntető szabályok. Mindegyiket csak egyszer használjuk levezetésenként. $(N \cup T) \times (N \cup T)$-beli jeleknek a nemterminálisokhoz való hozzáadásával ezek használata elkerülhető (példa: az $AB \to C$ hosszcsökkentő szabályt $(A, B) \to C$-vel helyettesíthetjük),

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

(2) Ha az előző bizonyításban konstruált grammatika szabályai hossz-nemcsökkentőek lennének, akkor ez megfelelő is lenne.

Azonban a hosszcsökkentő szabályok kiküszöbölhetőek:

- az elfogadó konfiguráció generálásakor használtuk az $A \to \varepsilon$ szabályt. Mivel itt valójában S-ből egy hosszabb szót építünk fel, ennek a szabálynak az alkalmazása könnyen megkerülhető (az egyszerűség miatt szerepelt),
- $\rhd$, $\lhd$, q_0-t eltüntető szabályok. Mindegyiket csak egyszer használjuk levezetésenként. $(N \cup T) \times (N \cup T)$-beli jeleknek a nemterminálisokhoz való hozzáadásával ezek használata elkerülhető (példa: az $AB \to C$ hosszcsökkentő szabályt $(A, B) \to C$-vel helyettesíthetjük),
- a lineáris korlátoltság miatt M konfigurációi egy adott u inputra nem lehetnek hosszabbak, mint az u-hoz tartozó kezdőkonfiguráció hossza, így nincs szükség $\sqcup$-eket eltüntető szabályokra. $\square$

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

Ha A LKA, akkor $L(A)$ eldönthető.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

Ha A LKA, akkor $L(A)$ eldönthető.

Bizonyítás: A lineáris korlátoltság miatt A lehetséges konfigurációinak száma egy u bemenetre legfeljebb $m(u) = |Q| \cdot |u| \cdot |\Gamma|^{|u|}$, ahol Q az A állapothalmaza és Γ a szalagábécéje. Ha A-nak van elfogadó számítása, akkor van legfeljebb $m(u)$ hosszú számítása is (a számítások két azonos konfiguráció közötti része kihagyható).

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

Ha A LKA, akkor $L(A)$ eldönthető.

Bizonyítás: A lineáris korlátoltság miatt A lehetséges konfigurációinak száma egy u bemenetre legfeljebb $m(u) = |Q| \cdot |u| \cdot |\Gamma|^{|u|}$, ahol Q az A állapothalmaza és Γ a szalagábécéje. Ha A-nak van elfogadó számítása, akkor van legfeljebb $m(u)$ hosszú számítása is (a számítások két azonos konfiguráció közötti része kihagyható).

Működjön az M Turing gép pontosan úgy, mint A, de minden u bemenetre számolja a lépéseit $m(u)$-ig. Ekkor állítsuk le M-et q_n-ben. Nyilván $L(M) = L(A)$ és M minden bemenetre megáll. $\square$

Következmény

$\mathcal{L}_1 \subseteq R$.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

$\mathcal{L}_1 \subset$ R.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

$\mathcal{L}_1 \subset \mathrm{R}$.

Az előző következmény alapján $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathrm{R}$.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

$\mathcal{L}_1 \subset \mathrm{R}$.

Az előző következmény alapján $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathrm{R}$.

Legyen $L_{\text{LKA-átló}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ LKA és } \langle M \rangle \notin L(M)\}$.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

$\mathcal{L}_1 \subset \mathrm{R}$.

Az előző következmény alapján $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathrm{R}$.

Legyen $L_{\text{LKA-átló}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ LKA és } \langle M \rangle \notin L(M)\}$.

A Cantor-féle átlós módszerrel megmutatható, hogy $L_{\text{LKA-átló}} \in \mathrm{R} \setminus \mathcal{L}_1$. Ezt nem bizonyítjuk.

$\mathcal{L}_1$ és R kapcsolata

Tétel

$\mathcal{L}_1 \subset \mathrm{R}$.

Az előző következmény alapján $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathrm{R}$.

Legyen $L_{\text{LKA-átló}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ LKA és } \langle M \rangle \notin L(M)\}$.

A Cantor-féle átlós módszerrel megmutatható, hogy $L_{\text{LKA-átló}} \in \mathrm{R} \setminus \mathcal{L}_1$. Ezt nem bizonyítjuk.

Tehát az algoritmikus és a Chomsky nyelvosztályok kapcsolata így foglalható össze:

Következmény

$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathrm{R} \subset \mathcal{L}_0 = \mathrm{RE}$.

R,RE és a Chomsky nyelvosztályok – Összefoglaló

Az alábbi táblázatban adott sorban minden nyelvleíró eszköz egyforma erejű és erősebb a korábbi sorokban felsoroltaknál.

$\mathcal{L}_3$	3-típusú grammatika determinisztikus véges automata nemdeterminisztikus véges automata reguláris kifejezés
	determinisztikus veremautomata
$\mathcal{L}_2$	2-típusú grammatika verematomata
$\mathcal{L}_1$	1-típusú grammatika lineárisan korlátolt automata
R	minden inputra megálló Turing gép
RE $=$ $\mathcal{L}_0$	Turing gép nemdeterminisztikus Turing gép 0-típusú grammatika