

# Bizonyítással kért tételek az 1. zh-n

---

## 1. A szuprémum elv

### Tétel:

Legyen  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ , felülről korlátos. Ekkor  $A$ -nak van legkisebb felső korlátja, azaz  $\exists \min B$

### Bizonyítás:

Világos, hogy  $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$

$\Rightarrow$  (Teljességi axióma)  $\exists \xi \in \mathbb{R} : a \leq \xi \leq b \ (a \in A, b \in B)$

Vagyis,  $\forall a \in A : a \leq \xi \Rightarrow \xi$  felső korlátja  $A$ -nak  $\Rightarrow \xi \in B$

Ugyanakkor:  $\forall b \in B : \xi \leq b \Rightarrow \xi$  a legkisebb felső korlát

$\Rightarrow \xi = \min B$

## 2. Az Archimedes-tétel

### Tétel:

$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > b$

### Bizonyítás:

1. Ha  $b \leq 0$ , akkor világos, hogy  $b \leq 0 < a = a \cdot 1$ , ha  $n := 1$

$\Rightarrow n = 1$  jó választás

2. Feltehető, hogy  $b > 0$

Áll:  $\forall b > 0, \forall a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > b$

Indirekt:  $\exists b > 0, \exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N} : a \cdot n \leq b$

$A := \{a \cdot n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow b$  egy felső korlátja  $A$ -nak  $\Rightarrow \xi = \sup A$

$\Rightarrow \xi - a$  már nem felső korlát, azaz  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot n_0 > \xi$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot n_0 + a > \xi \Leftrightarrow a(n_0 + 1) > \xi$

Mivel  $n_0 \in \mathbb{N}$  és  $\mathbb{N}$  induktív  $\Rightarrow n_0 + 1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a(n_0 + 1) \in A \Rightarrow \xi$  nem felső korlát

Ellentmondás  $\Rightarrow \Leftarrow$

## 3. A Cantor-féle közösrész-tétel

### Tétel:

Legyen  $[a_n, b_n]$  korlátos és zárt intervallum, melyre:

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \ (n \in \mathbb{N})$

Ekkor:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [q_n, b_n] \neq \emptyset$

**Bizonyítás:**

$A := \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

$B := \{b_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

Ekkor:  $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$

Ha  $n \leq m : q_n \leq a_m \leq b_m$

Ha  $m < n : a_n \leq b_n \leq b_m$

$\Rightarrow$  (Teljességi axióma)  $\exists \xi \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_m$

Spec:  $n = m$ , ekkor:

$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi \leq b_n$

$\Rightarrow \xi \in [a_n, b_n] \ (n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

## 4. Minden sorozatnak van monoton részsorozata

**Tétel:**

Minden sorozatnak van monoton részsorozata

**Bizonyítás:**

1. A sorozatnak végtelen sok csúcsa van

$\exists a_{n_0}$  csúcs  $\Rightarrow \forall n \geq n_0 : a_{n_0} \geq a_n$

$\Rightarrow \exists n_1 > n_0$  és  $a_{n_1}$  csúcs  $\Rightarrow a_{n_0} \geq a_{n_1}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_1 : a_{n_1} \geq a_n$

$\Rightarrow \exists n_2 > n_1$  és  $a_{n_2}$  csúcs  $\Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2}$

$\Rightarrow \exists a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \dots$

2. A sorozatnak véges sok csúcsa van

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n$  nem csúcs

Legyen  $n_0 = N \Rightarrow a_{n_0}$  nem csúcs  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_1 \geq n_0 : a_{n_0} < a_{n_1} \Rightarrow a_{n_1}$  nem csúcs  $\Rightarrow$

$\Rightarrow n_2 \geq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2} \dots$

$\exists a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$

## 5. Konvergens sorozat határértéke egyértelmű

**Tétel:**

Az  $(a_n)$  konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

**Bizonyítás:**

Indirekt, Tfh:  $\exists A_1, A_2, A_1 \neq A_2$  határértékek

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \epsilon$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \epsilon$

Legyen  $n_0 = \max(n_1, n_2)$  :

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - A_1| < \epsilon \\ |a_n - A_2| < \epsilon$$

$$\text{Legyen } \epsilon < \frac{|A_1 - A_2|}{2} \Rightarrow$$

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_n + a_n - A_2| \leq |A_1 - a_n| + |a_n - A_2| < 2\epsilon < |A_1 - A_2|$$

Ellentmondás,  $|A_1 - A_2| \not< |A_1 - A_2|$

## 6. A konvergencia és a korlátosság kapcsolata

**Tétel:**

Ha  $a_n$  konvergens, akkor korlátos.

**Bizonyítás:**

Legyen  $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \epsilon = 1 \text{-re is } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}|, 1 + |A|), \quad (n \in \mathbb{N})$$

## 7. Műveletek nullsorozatokkal

**Tétel:**

Legyen  $(a_n), (b_n)$  nullsorozat. Ekkor:

1.  $(a_n + b_n)$  is nullsorozat.
2. Ha  $(c_n)$  korlátos, akkor  $(a_n \cdot c_n)$  is nullsorozat.
3.  $(a_n \cdot b_n)$  is nullsorozat.

**Bizonyítás:**

$$1. (a_n) \text{ nullsor} \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$(b_n) \text{ nullsor} \Leftrightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = \max(n_1, n_2), \forall n \geq n_0 :$$

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

$$\Rightarrow (a_n + b_n) \text{ nullsor}$$

$$2. (c_n) \text{ korlátos} \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n : |c_n| \leq K$$

$$(a_n) \text{ nullsor} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| < \frac{\epsilon}{K}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :$$

$$|a_n \cdot c_n| < \frac{\epsilon}{K} \cdot K = \epsilon$$

$$3. (b_n) \text{ nullsor} \Rightarrow (b_n) \text{ konvergens} \Rightarrow (b_n) \text{ korlátos}$$

$$(a_n) \text{ nullsor} \stackrel{2. \text{ miatt}}{\Rightarrow} (a_n \cdot c_n) \text{ nullsor}$$

## 8. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

**Tétel:**

Legyen  $(a_n), (b_n)$  konvergens és  $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$ . Ekkor:  
 $(a_n \cdot b_n)$  konvergens és  $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

**Bizonyítás:**

$$\begin{aligned}
 |a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n b_n - A \cdot b_n + A \cdot b_n - AB| \leq \\
 &\leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| = \underbrace{|b_n|}_{\text{konvergens}} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{\text{nullsor}} + \underbrace{|A|}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{\text{nullsor}} \\
 &\qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{korlátos}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{nullsor}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{nullsor}}
 \end{aligned}$$

**9. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel****Tétel:**

Legyen  $(a_n), (b_n)$  konvergens,  $b_n \neq 0$  és  $A := \lim(a_n), B := \lim(b_n)$  és  $B \neq 0$ .  
 Ekkor:

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ konvergens és } \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$$

**Bizonyítás:**

$$\begin{aligned}
 \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - Ab_n}{b_n B}\right| = \frac{|a_n B - AB + AB - Ab_n|}{|b_n B|} \leq \\
 &\leq \underbrace{\frac{|B|}{|b_n||B|}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{\text{nullsor}} + \underbrace{\frac{|A|}{|b_n||B|}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{\text{nullsor}} \\
 &\qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{nullsor}} \\
 &\Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) \text{ nullsor} \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}
 \end{aligned}$$

**10. A közrefogási elv****Tétel:**

Tfh:  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$   
 Ha  $\lim a_n = \lim c_n$ , akkor  $\lim b_n = \lim a_n$

**Bizonyítás:**

$$\lim a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}
 1. \ A \in \mathbb{R} &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : A - \epsilon < a_n < A + \epsilon \\
 &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_2, \forall n \geq n_2 : A - \epsilon < c_n < A + \epsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Legyen } n_0 &= \max(n_1, n_2, N) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : A - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \epsilon \\
 &\Rightarrow \lim b_n = A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \ A = \infty : \lim a_n = \infty &\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : a_n > P \\
 \text{De } b_n &\geq a_n, \forall n \geq N \Rightarrow \\
 \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 &= \max(n_1, N), \forall n \geq n_0 : b_n \geq a_n > P \\
 &\Rightarrow \lim b_n = \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \ A = -\infty \\
 \text{Ugyan úgy mint } a + \infty, \text{ csak } p\text{-vel és } a_n \geq P \text{ helyett } c_n \leq p
 \end{aligned}$$

## 11. Monoton növekvő sorozatok határértéke (véges és végtelen eset)

**Tétel:**

1. Ha  $(a_n)$  monoton nő és korlátos, akkor konvergens és  
 $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
2. Ha  $(a_n)$  monoton nő és nem korlátos, akkor  $\lim a_n = \infty$

**Bizonyítás:**

1.  $(a_n)$  korlátos  $\Rightarrow \exists \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$   
 $\Rightarrow a_n \leq \xi, \forall n$  és  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq \xi \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \xi - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi$   
 $= |a_n - \xi| < \epsilon$   
 $\Rightarrow \lim a_n = \xi$
- $(a_n)$  nem korlátos  $\Rightarrow (a_n)$  felülről nem korlátos  
 $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n > P \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n_0} > P \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \lim a_n = \infty$

## 12. A Cauchy-féle konvergencia kritérium sorozatokra

**Tétel:**

$(a_n)$  konvergens  $\Leftrightarrow (a_n)$  Cauchy

**Bizonyítás:**

$(\Rightarrow)$  bizonyítása:

Tfh:  $(a_n)$  konvergens. Megmutatjuk, hogy  $(a_n)$  Cauchy

$A := \lim(a_n), \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$

Legyen  $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N$  Ekkor:

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon$$

Tehát  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$

$\Rightarrow (a_n)$  Cauchy

$(\Leftarrow)$  bizonyítása:

Tfh:  $(a_n)$  Cauchy. Megmutatjuk, hogy  $(a_n)$  korlátos.

Mivel  $(a_n)$  Cauchy, ezért  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m, n \geq N : |a_n - a_m| < 1$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n| \leq K := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

$\Rightarrow (a_n)$  korlátos

$\Rightarrow$  (ld.: Bolzano - Weierstrass):  $\exists (a_{n_k})$  konvergens részsorozat és

$$A := \lim(a_{n_k})$$

Megmutatjuk, hogy  $(a_n)$  is konvergens és  $\lim(a_n) = A$

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$$

Mivel  $(a_n)$  Cauchy:  $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n, n_k \in \mathbb{N}, n, n_k \geq N_0 : |a_n - a_{n_k}| < \epsilon$

Mivel  $\lim(a_{n_k}) = A$  ezért  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n_k \in \mathbb{N}, n_k \geq N_1 : |a_{n_k} - A| < \epsilon$

Tehát:  $\forall \epsilon > 0, \exists N := \max\{N_0, N_1\} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - A| < 2 \cdot \epsilon$   
 $\Rightarrow (a_n)$  konvergens és  $\lim(a_n) = A$

### 13. A geometriai sorozat határértékére vonatkozó tétel

**Tétel:**

Legyen  $q \in \mathbb{R}$ . Ekkor:

$$\lim(q^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

**Bizonyítás:**

Ha  $q = 1$ ,  $q = 0$ ,  $q = -1$  akkor triviális.

Tfh:  $q > 1$ . Ekkor  $\exists h \in \mathbb{R}, h > 0 : q = 1 + h$

$$\Rightarrow q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \geq n \cdot h \rightarrow +\infty$$

Tfh:  $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ , azaz  $0 < |q| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + h \Rightarrow \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + h)^n \geq$$

$$\geq 1 + nh \geq n \cdot h \Rightarrow 0 \leq |q|^n \leq \frac{1}{nh} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim(|q|^n) = 0 \text{ és } \lim(q^n) = 0$$

Tfh:  $q < -1$ , akkor  $q^2 > 1$ . Ekkor:

- $q^{2n} = (q^2)^n \rightarrow +\infty$
- $q^{2n+1} = q(q^2)^n \rightarrow -\infty$

$$\Rightarrow \nexists \lim(q^n)$$

### 14. Az $(\sqrt[n]{a})$ és az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat határértéke

**Tétel:**

$$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, : \lim(\sqrt[n]{a}) = 1$$

**Bizonyítás:**

Ha  $a = 1$  ✓

Tfh:  $a > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{a} > 1$

$$\Rightarrow \exists h_n > 0 : \sqrt[n]{a} = 1 + h_n$$

$$\Rightarrow a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n \leq \frac{a - 1}{n} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim(h_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim(1 + h_n) = \lim(1) + \lim(h_n) = 1 \checkmark$$

*nullsor*

Tfh:  $0 < a < 1$ , akkor  $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \rightarrow 1$

$$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a}) = \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}\right) \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \checkmark$$

**Tétel:**

$$\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$$

**Bizonyítás:**

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \text{ ahol } h_n > 0, (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow n = (1 + h_n)^n \stackrel{\text{binomiális}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} h_n^j \stackrel{j \geq 2}{\geq} \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot h_n^2$$

$$\Rightarrow 0 < h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \lim(h_n) = 0 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{n}) = \lim(1 + h_n) = 1 \checkmark$$

## 15. Pozitív szám $m$ -edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével

**Tétel:**

Legyen  $2 \leq m \in \mathbb{N}$ , Ekkor:

$$1. \forall A > 0, \exists! \alpha > 0 : \alpha^n = A$$

$$2. \forall a_0 > 0, a_{n+1} := \frac{1}{m} \left( \frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Az így definiált sorozat konvergens és  $\lim(a_n) = \alpha$

**Bizonyítás:**

$a_n > 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), (ld.: Teljes indukció)

$\Rightarrow (a_n)$  alulról korlátos, ill.:

$$a_{n+1} = \left( \frac{\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n}{m} \right)^m \stackrel{\text{számtani-mértani}}{\geq} \frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_n}_{(m-1)\text{db}} = A \quad (n \in \mathbb{N})$$

Azaz:  $a_1 \geq A, a_2 \geq A, a_3 \geq A, \dots$

Mutassuk meg, hogy az  $(a_{n+1})$  elshiftelt sorozat monoton fogyó, azaz

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 1$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{m} \left( \frac{A}{a_{n+1}^{m-1}} + (m-1)a_{n+1} \right) = \frac{1}{m} \left( \frac{A}{a_{n+1}^m} + (m-1) \right) =$$

$$= \frac{1}{m} \left( \frac{A - a_{n+1}^m}{a_{n+1}^m} + m \right) = \frac{A - a_{n+1}^m}{m \cdot a_{n+1}^m} + 1 \stackrel{\leq 0}{\Rightarrow} \leq 1, \text{ monoton fogyó}$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}) \text{ korlátos és monoton fogyó} \Rightarrow \text{konvergens} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \lim(a_{n+1}) = \alpha$$