Numerikus módszerek 2B.

1–2. előadás: Interpoláció polinomokkal

Dr. Bozsik József

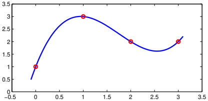
ELTE IK

2020. szeptember 10–27.

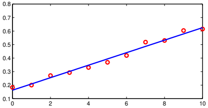
Tartalomjegyzék

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy egy költségesen számolható függvény helyett egyszerűbbel dolgozzunk. Az egyszerűbb függvény általában polinom, mely hatékonyan kiértékelhető.

- Olyan egyszerűbb függvényt keresünk, amely illeszkedik adott pontokra $\rightarrow$ ez az **interpolációs feladat**.



- Olyan egyszerűbb függvényt keresünk, amely közel van a mérési eredményekhez. A mérés hibája miatt nem cél a pontos illeszkedés $\rightarrow$ ez az **approximációs feladat**.



Az interpoláció alkalmazási területei:

1. Numerikus integrálás alapja.
2. Diff.egyenletek numerikus módszereinél a többlépéses módszerek konstrukciójának alapja.
3. Grafika: függvények ábrázolása számítógépen.
4. Képfeldolgozásnál: nagyításnál, forgatásnál.
5. Meteorológiai állapothatározók megállapításánál.
6. Térinformatikai rendszereknél digitális terepmodelleknél.

Definíció: Az interpoláció alapfeladata

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a;b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk, melyre

$$p_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *interpolációs polinomnak* nevezzük. P_n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza.

Megj.: Ha adott az $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény, amit közelíteni szeretnénk, akkor $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Tétel: Az interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists! \;\; p_n \in P_n : \quad p_n(x_i) = y_i, \;\; (i = 0, 1, \ldots, n)$$

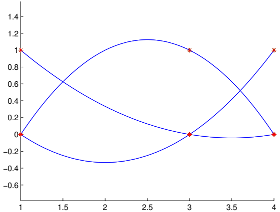
Biz.: Táblán a határozatlan együtthatók módszerével, LER megoldásával.

Megj.: A LER megoldást a gyakorlatban sosem használjuk, mert a Vandermonde-mátrix rosszul kondícionált. A hatványfüggvény rendszer $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ helyett más bázisokat fogunk használni az előállításhoz.

Definíció: Lagrange-alappolinomok

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott *Lagrange-alappolinomok* a következők:

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1 \ldots, n).$$



Tétel: A Lagrange-alappolinomok tulajdonságai

1.
$$\ell_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

2.
$$\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}, \quad \text{ahol} \quad \omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

3.
$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \equiv p_n(x)$$

L_n-t az interpolációs polinom *Lagrange-alakjának* nevezzük.

Biz.: Egyszerűen meggondolható.

Tartalomjegyzék

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{n+1}[a; b]$.

1. Ekkor $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

2. A hibabecslés

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|, \quad M_{n+1} := \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Biz.: Táblán a Rolle-tétel többszöri alkalmazásával.

Definíció: Osztott differenciák

Az $x_0, x_1, \dots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott

- *elsőrendű osztott differenciák* a következők:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

- A *k-adrendű osztott differenciákat* rekurzívan definiáljuk:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i},$$

$$k = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots n-k.$$

- Ha a 0-adrendű osztott differenciákat $f[x_i] := f(x_i)$-vel definiáljuk, akkor az elsőrendű osztott differenciát is a rekurzióval számolhatjuk.

Az osztott differenciákat táblázatba rendezve szokás kiszámolni:

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

Definíció: Newton-féle bázis

Az interpolációs polinom felírásához a következő bázisra lesz szükségünk:

$$1,\ (x-x_0),\ (x-x_0)(x-x_1),\ \dots,\ \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i).$$

Tétel: Az osztott differenciák tulajdonságai

1. $$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)}$$

2. Ha σ a $(0, 1, \dots, k)$ értékek egy permutációja, akkor

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

Biz.: Az 1. állítás teljes indukcióval bizonyítható, a 2. állítás ebből egyszerűen következik.

Tétel: Newton-alak

$$N_n(x) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot \omega_{k-1}(x) \equiv L_n(x)$$

N_n-t az interpolációs polinom *Newton-alakjának* nevezzük.
A rekurzív formula új x_{n+1} alappont hozzávétele esetén:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \cdot \omega_n(x).$$

Biz.: Alakítsuk át a Lagrange-alakot:

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{k=1}^{n} (L_k(x) - L_{k-1}(x)),$$

ahol L_k az $x_0, x_1, \dots, x_k$ alappontokra felírt Lagrange-alak.

- $L_0(x) = \text{konstans} = f(x_0)$
- $L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0, \ \ (j = 0, 1, \dots, k-1)$
- Tehát $L_k - L_{k-1}$ legfeljebb k-adfokú polinom és k db gyöke van, így alakja

  $$(L_k - L_{k-1})(x) = c_k \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) = c_k\, \omega_{k-1}(x).$$

-

  $$(L_k - L_{k-1})(x_k) = f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = c_k\, \omega_{k-1}(x_k) \quad | : \omega_{k-1}(x_k)$$

- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \frac{L_{k-1}(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} = c_k$$
- Felhasználva, hogy
  $L_{k-1}(x_k) = \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \cdot \underbrace{\frac{\omega_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)}}_{=\ell_j(x_k)}$,
- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)} = c_k.$$
- De $\omega_{k-1}(x_k) = \omega'_k(x_k)$ és
- $(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j) = -(x_j - x_k)\,\omega'_{k-1}(x_j) = -\omega'_k(x_j)$.
- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{-\omega'_k(x_j)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)} = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = c_k$$