Numerikus módszerek 2B.

4. előadás: Hermite-interpoláció

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2020. október 1.

Tartalomjegyzék

1 Az Hermite-interpoláció alapfeladata

2 Hibaformula

3 Speciális esetek

4 Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Tartalomjegyzék

1. Az Hermite-interpoláció alapfeladata
2. Hibaformula
3. Speciális esetek
4. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Definíció: Az interpoláció alapfeladata

1. Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_k \in [a; b]$ különböző alappontok,
2. $m_0, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ multiplicitás értékek és
3. $y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \ldots, y_k^{(j)} \in \mathbb{R}$ függvény- és derivált értékek $(j = 0, \ldots, m_i - 1)$,
4. $m := \sum_{i=0}^{k} m_i - 1$.
5. Olyan $H_m \in P_m$ polinomot keresünk, melyre

$$H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *Hermite-interpolációs polinomnak* nevezzük.

Megj.: Adott $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén $y_i^{(0)} = f(x_i)$,

$$y_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i) \ (i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

Tétel: Az Hermite-interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists! \; H_m \in P_m : \quad H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k;\; j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

Biz.: Határozatlan együtthatók módszerével, LER megoldása.

Megj.: Ha a függvény- és deriváltértékek hiányosan adottak, akkor hiányos (lakunáris vagy "lyukas") interpolációról beszélünk, mely általában nem oldható meg vagy nem egyértelmű.

Tartalomjegyzék

1. Az Hermite-interpoláció alapfeladata
2. Hibaformula
3. Speciális esetek
4. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \dots, x_k$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{m+1}[a; b]$.

Ekkor

1. $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

2. Hibabecslés

$$|f(x) - H_m(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \cdot |\Omega_m(x)|,$$

$$M_{m+1} := \|f^{(m+1)}\|_\infty, \quad \Omega_m(x) := \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i}.$$

1. Az Hermite-interpoláció alapfeladata
2. Hibaformula
3. Speciális esetek
4. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Az Hermite-interpoláció speciális esetei:

1. $\forall\, m_i = 1$: Lagrange-interpoláció
2. $\forall\, m_i = 2$: Fejér–Hermite-interpoláció, $m = 2k + 1$.
3. **Állítás:** Legyen $\forall\, m_i = 2$ és $f \in C[a; b]$ tetszőleges, ekkor a

$$H_m(x_i) = f(x_i),\ H'_m(x_i) = 0$$

feltételekkel definiált Hermite polinomokra, ahol az $x_i,\ (i = 0, \dots, k)$ alappontok a Csebisev gyökök:

$$\lim_{m \to +\infty} \|f - H_m\|_\infty = 0$$

.

4. $k = 0, m_0 = m + 1$: m-edfokú Taylor-polinom.

1. Az Hermite-interpoláció alapfeladata
2. Hibaformula
3. Speciális esetek
4. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Eml.: Azonos alappontok esetén az osztott differencia határátmenettel definiálható:

$$f[x_i, x_i] := \lim_{x \to x_i} f[x_i, x] = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i)$$

Több azonos alappont esetén ugyanígy járunk el.

Definíció: Osztott differenciák azonos alappontok esetén

1. Az *elsőrendű osztott differenciák*:

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

2. A *k-adrendű osztott differenciák*:

$$f[\underbrace{x_i}_{0.}, \underbrace{x_i}_{1.}, \ldots, \underbrace{x_i}_{k.}] := \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}, \quad (i = 0, 1, \ldots, m_k - 1).$$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Az Hermite-interpolációs polinom felírásának menete:

1. Osztott differencia táblázatot készítünk, melyben minden alappontot annyiszor veszünk fel, amennyi a multiplicitása.
2. A 2. oszlopba beírjuk a függvényértékeket.
3. Az azonos alappontokhoz tartozó osztott differenciák helyére beírjuk a megfelelő derivált értékeket.
4. A táblázat többi részét hagyományos módon számoljuk.
5. A főátlóbeli elemek segítségével a szokásos módon felírjuk a Newton-alakot. A Newton-bázisban az alappontokat sorba vesszük.

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Példa: $m_0 = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ esetén az osztott differencia táblázat:

x_0	$\mathbf{f(x_0)}$					
x_0	$f(x_0)$	$\mathbf{f'(x_0)}$				
x_0	$f(x_0)$	$\mathbf{f'(x_0)}$	$\mathbf{f''(x_0)/2}$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$	$\cdots$		
x_1	$f(x_1)$	$\mathbf{f'(x_1)}$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$\cdots$	$\cdots$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$\cdots$	$\cdots$	$f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_2]$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja:

$$H_5(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 +$$

$$+ f[x_0, x_0, x_0, x_1] \cdot (x - x_0)^3 + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1] \cdot (x - x_0)^3 (x - x_1) +$$

$$+ f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_2] \cdot (x - x_0)^3 (x - x_1)^2.$$