

# Alapok

---

## 1. Az unió tulajdonságai

- $A \cup B = B \cup A$   $A \cup B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow A \cup B$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$   
 $(A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$   
 $x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow A \cup (B \cup C)$
- $A \cup A = A$   $A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow A$
- $A \cup \emptyset = A$   $A \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$   $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \checkmark$   
 $A \subseteq (A \cup B) \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)) \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \checkmark$

## 2. A metszet tulajdonságai

*bizonyítások hasonlóan mint az uniónál*

- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

## 3. Az unió és metszet disztributivitási tulajdonságai

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$   
 $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$   
 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  az előző alapján

## -4. Komplementer tulajdonságai

*A fenti bizonyításokhoz hasonlóan, csak fel kell írni kvantorokkal  $x$  az alaphalmaz / univerzum:*

- $\overline{\emptyset} = x$
- $\overline{\overline{x}} = x$
- $A \cup \overline{A} = x$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

## 5. Relációk kompozíciójának tulajdonságai

- **Kompozíció asszociatív:**  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$   
 $(R \circ S) \circ T \Leftrightarrow (x, w) \in (R \circ S) \circ T \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in T \wedge (y, w) \in (R \circ S) \Leftrightarrow$   
 $\exists y : (x, y) \in T \wedge \exists z : (y, z) \in S \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow$   
 $\exists z, \exists y : (x, y) \in T \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow$   
 $\exists z : (x, z) \in (S \circ T) \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow (x, w) \in R \circ (S \circ T) \Leftrightarrow$   
 $R \circ (S \circ T)$
- **Kompozíció inverze:**  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$   
 $(z, x) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (x, z) \in (R \circ S) \Leftrightarrow$   
 $\exists y : (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R \Leftrightarrow \exists y : (y, x) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow$   
 $S^{-1} \circ R^{-1}$

## ---6. Állítás, amely kimondja, hogy függvények kompozíciója is függvény

## 7. Állítás, amely kimondja, hogy injektív függvények kompozíciója is injektív

Ha  $f$  és  $g$  injektív, akkor  $f \circ g$  is injektív.

**Bizonyítás:**  $f$  injektív  $\Rightarrow x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$$x_1 \neq x_2 \xRightarrow{g \text{ injektív}} g(x_1) \neq g(x_2) \xRightarrow{f \text{ injektív}} f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)$$

## Komplex számok

---

## 8. Hányados kiszámítása algebrai alakban

Ha  $z, w \in \mathbb{C}$  és  $z = a + bi, w = c + di$  akkor  $\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

**Bizonyítás:**

$$\frac{z}{w} \Leftrightarrow \frac{a + bi}{c + di} \Leftrightarrow \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \Leftrightarrow \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 - d^2 \cdot i^2} \Leftrightarrow \frac{ac - adi + bci - adi^2}{c^2 + d^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \Leftrightarrow \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

## ---9. A konjugálás és abszolút érték tulajdonságai

Ha  $z, w \in \mathbb{C}$  és  $z = a + bi, w = c + di$ , akkor:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z| = \bar{z}$
- Háromszög egyenlőtlenség:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- Háromszög egyenlőtlenség:  $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
- ??

## 10. Szorzásra vonatkozó Moivre-azonosság

Ha  $r_1, r_2 \neq 0$  és  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , akkor  
 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

**Bizonyítás:**  $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow$   
 $r_1 \cdot r_2((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + (\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1)i) \Leftrightarrow$   
addíciós képletek  
 $\Leftrightarrow r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$