Numerikus módszerek 1.

8. előadás: Iterációs módszerek LER megoldására, Jacobi- és csillapított Jacobi-iteráció

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

1. Iterációs módszerekről általában
2. A Banach-féle fixponttétel
3. Speciális iterációs módszerek
4. Jacobi-iteráció
5. Csillapított Jacobi-iteráció
6. Matlab példák

1. Iterációs módszerekről általában
2. A Banach-féle fixponttétel
3. Speciális iterációs módszerek
4. Jacobi-iteráció
5. Csillapított Jacobi-iteráció
6. Matlab példák

Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = Bx + c,$$

ahol a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot *átmenet mátrixnak* nevezik és $c \in \mathbb{R}^n$,

majd ennek segítségével képezzük a következő (vektor)sorozatot, *iterációt*:

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{tetszőleges}), \qquad x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Példa

Egyszerűen számolhatók a következő sorozat elemei!

$$x^{(0)} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(k+1)} := \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot x^{(k)} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Kérdések: Mit tud ez a sorozat / iteráció? Konvergens? Milyen értelemben? Ha konvergens, mi a határértéke?
A választ majd a fixponttétel adja meg.

Eml.:

Definíció: vektorsorozat konvergenciája, határértéke

Az $\left(x^{(k)} | k \in \mathbb{N}\right) \subset \mathbb{R}^n$ vektorsorozat *konvergens* a $\|.\|$ vektornormában, ha $\exists\, x^* \in \mathbb{R}^n$, melyre

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, k > N : \left\| x^{(k)} - x^* \right\| < \varepsilon.$$

Ekkor a sorozat *határértéke* x^*, azaz $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$.

Mi köze ennek lineáris egyenletrendszerekhez?

Ha folytonos φ függvény és $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, akkor a folytonosságra vonatkozó átviteli elvből

$$\varphi(x^*) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = x^*.$$

A korábban megadott φ-vel $x^* = B \cdot x^* + c$.

Vagyis $(I - B) \cdot x^* = c$, azaz x^* az $(I - B) \cdot x = c$ LER megoldása.

Alkalmazzuk az $A = I - B,\ b = c,\ Ax = b$ jelölést...

Fordítva: Adott $Ax = b$ LER esetén keressünk vele ekvivalens $Bx + c = x$ egyenletet. Ebből felírhatunk egy iterációt:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c.$$

Hogyan írhatjuk át a megadott alakba?

Általában:

$$Ax = b, \qquad A = P + Q, \qquad (P + Q)x = b,$$

átrendezve:

$$Px = -Qx + b \quad \Longleftrightarrow \quad x = -P^{-1}Qx + P^{-1}b,$$

iterációs alakban írva:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-P^{-1}Q}_{B} \cdot x^{(k)} + \underbrace{P^{-1}b}_{c}.$$

1. Iterációs módszerekről általában
2. A Banach-féle fixponttétel
3. Speciális iterációs módszerek
4. Jacobi-iteráció
5. Csillapított Jacobi-iteráció
6. Matlab példák

Definíció: fixpont

Az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot (vektort) a $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha $x^* = \varphi(x^*)$.
Az $x = \varphi(x)$ egyenletet *fixpontegyenletnek* nevezzük.

Definíció: kontrakció

A $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *kontrakció*, ha $\exists\, q \in [0, 1)$, hogy

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|\,, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Megj.:

- kontrakció $\approx$ összehúzás
- q: kontrakciós együttható

Állítás

Ha $\|B\| < 1$, akkor a $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = B \cdot x + c$ leképezés kontrakció. (Az $\mathbb{R}^n$-en alkalmazott vektornormához illeszkedő mátrixnormát tekintve.)

Biz.:

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|(Bx + c) - (By + c)\| =$$
$$= \|Bx - By\| = \|B(x - y)\| \leq \underbrace{\|B\|}_{:=q<1} \cdot \|x - y\| \, .$$

Tétel: Banach-féle fixponttétel $\mathbb{R}^n$-re

Ha a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény kontrakció $\mathbb{R}^n$-en q kontrakciós együtthatóval, akkor

1. $\exists\, x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. a fixpont egyértelmű,
3. $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ esetén az $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}),\ (k \in \mathbb{N}_0)$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$,
4. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le q^k \cdot \left\|x^{(0)} - x^*\right\|$,
   - $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \dfrac{q^k}{1-q} \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$.

Biz.:

(a) A φ leképezés kontrakció voltából következik, hogy φ **folytonos** (sőt egyenletesen folytonos) is, ugyanis $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz válasszuk $\delta = \varepsilon / q$-t. Ekkor ha $\|x - y\| < \delta$, akkor

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q \cdot \|x - y\| < q \cdot \frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon.$$

(b) Belátjuk, hogy a tételben definiált $(x^{(k)})$ **Cauchy-sorozat,** így konvergens. Elsőként egymást követő tagok eltérését becsüljük:

$$\begin{aligned}\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| &= \left\|\varphi(x^{(k)}) - \varphi(x^{(k-1)})\right\| \leq \\ &\leq q \cdot \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \leq \\ &\leq \ldots \leq q^k \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.\end{aligned}$$

Biz. folyt.:

(c) Legyen $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, vizsgáljuk meg két m távolságra lévő tag különbségét! A háromszög-egyenlőtlenséget és a mértani sor összegképletét is felhasználva:

$$\begin{aligned}
\left\| x^{(k+m)} - x^{(k)} \right\| &= \left\| (x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}) + \ldots + (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \right\| \leq \\
&\leq \left\| x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)} \right\| + \ldots + \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leq \\
&\leq (q^{m+k-1} + \ldots + q^k) \cdot \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| = \\
&= q^k \cdot (q^{m-1} + \ldots + 1) \cdot \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| < \\
&< \frac{q^k}{1-q} \cdot \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| .
\end{aligned}$$

Mivel $k \to \infty$ esetén $(q^k) \to 0$, ezért $(x^{(k)})$ Cauchy-sorozat,

Biz. folyt.:

(d) Minden $\mathbb{R}^n$-beli Cauchy-sorozat konvergens, így $(x^{(k)})$ konvergens, $x^* := \lim(x^{(k)})$. φ folytonosságából az átviteli elv értelmében

$$\varphi(x^*) = \lim \varphi(x^{(k)}) = \lim x^{(k+1)} = x^*,$$

azaz x^* **fixpontja** φ-nek.

(e) Az **egyértelműség** belátásához indirekt tegyük fel, hogy létezik legalább két $x^* \neq x^{**}$ fixpont. Ekkor

$$\|x^* - x^{**}\| = \|\varphi(x^*) - \varphi(x^{**})\| \leq q \cdot \|x^* - x^{**}\|.$$

Átrendezve $\qquad \|x^* - x^{**}\| (1-q) \leq 0.$

Tehát $\|x^* - x^{**}\| = 0$, vagyis $x^* = x^{**}$ következik. Ellentmondás!

(f) A hibabecsléshez vizsgáljuk először a k-adik tag hibáját:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| = \left\|\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^*)\right\| \leq q \cdot \left\|x^{(k-1)} - x^*\right\| \leq \ldots \leq$$
$$\leq q^k \cdot \left\|x^{(0)} - x^*\right\|.$$

Valamint a korábbi képletben:

$$\left\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\right\| < \frac{q^k}{1-q} \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$$

$m \to \infty$ esetén felhasználva, hogy a vektornorma folytonos függvény

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \leq \frac{q^k}{1-q} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

$\square$

Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

Ha $\|B\| < 1$, az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció konvergens minden kezdőértékre.

Megj.: Attól még lehet konvergens valamely kezdőértékből indítva, ha $\|B\| \geq 1$.
(Nem szükséges feltétel.)

Lemma: spektrálsugár és az indukált normák kapcsolata

$$\varrho(B) = \inf \{\, \|B\| \ :\ \|.\| \text{ indukált mátrixnorma} \,\},$$

azaz $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists$ indukált $\|.\| : \|B\| < \varrho(B) + \varepsilon$.

Biz.: Nélkül.

Tétel: iteráció konvergenciájának ekvivalens feltétele

Az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció akkor és csak akkor konvergens minden kezdőértékre, ha

$$\varrho(B) < 1.$$

Biz.:

- $\Leftarrow$: Az előző Lemma alapján trivi.
- $\Rightarrow$: Indirekt tegyük fel, hogy $\varrho(B) \geq 1$, azaz $\exists\, |\lambda| \geq 1$ sajátérték, és legyen $x^{(0)}$ olyan, hogy $x^{(0)} - x^*(\neq 0)$ kezdeti hiba a B λ-hoz tartozó sajátvektora legyen.

Ekkor:

$$B(x^{(0)} - x^*) = \lambda(x^{(0)} - x^*)$$
$$B^2(x^{(0)} - x^*) = \lambda^2(x^{(0)} - x^*) \quad \Rightarrow \dots$$
$$B^k(x^{(0)} - x^*) = \lambda^k(x^{(0)} - x^*) \; (k \in \mathbb{N})$$
$$x^{(k)} - x^* = (Bx^{(k-1)} + c) - (Bx^* + c) = B(x^{(k-1)} - x^*) =$$
$$= B^k(x^{(0)} - x^*) = \lambda^k(x^{(0)} - x^*)$$
$$\left\| x^{(k)} - x^* \right\| = |\lambda|^k \cdot \underbrace{\left\| x^{(0)} - x^* \right\|}_{\text{konst.}} \not\to 0 \quad (k \to \infty)$$

Ellentmondásra jutottunk. $\square$

Megj.: Az iteráció futtatása során nem áll rendelkezésünkre kontrakciós együttható, annak kiszámítása elméleti feladat. Ehelyett ún. tapasztalati kontrakciós együtthatóval dolgozunk.

1. Láttuk a fixponttétel bizonyításában, hogy $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le q \cdot \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$, innen

$$q^{(k)} \approx \frac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|}$$

   a k. lépésbeli tapasztalati kontrakciós együtthatónk.

2. Ennek ismeretében a hibabecslés alakja:

$$\left\|x^{(k)} - x^{*}\right\| \le \frac{q^{(k)}}{1 - q^{(k)}} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

   Tehát menet közben ellenőrizni tudjuk, hogy elegendő-e a pontosság.

3. Ha $|q^{(k)}| > 1$ az első néhány lépés után, akkor leállíthatjuk az iterációt divergencia miatt.
4. Vannak esetek, amikor a $(q^{(k)})$ sorozat nem monoton, ekkor érdemes $q^{(k)}$ helyett a $q \approx \sqrt{q^{(k)}q^{(k-1)}}$ mértani középpel dolgozni.
5. A fenti segítséggel „inteligens" iterációs módszer programot írhatunk, mely a sorozat elemeiből a hibabecslést elő tudja állítani és divergencia esetén sem számol feleslegesen sokat.

Példa

Mit állíthatunk a következő iteráció konvergenciájáról?

$$x^{(k+1)} := \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot x^{(k)} + \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 32.4 \\ \sqrt{\pi} \end{bmatrix}, \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel $\|B\|_1 = \frac{3}{5} = q$ a kontrakciós együttható, ezért az iteráció bármely $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ kezdőértékre konvergens. Hibabecslést az 1-es vektornormában írhatnánk fel.

1 Iterációs módszerekről általában

2 A Banach-féle fixponttétel

3 Speciális iterációs módszerek

4 Jacobi-iteráció

5 Csillapított Jacobi-iteráció

6 Matlab példák

Tekintsük az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, majd írjuk fel annak mátrixát

$$A = L + D + U$$

alakban, ahol L alsó háromszögmátrix, D diagonális mátrix, U pedig felső háromszögmátrix, méghozzá

- $l_{ij} = a_{ij} \quad (i < j)$,
- $d_{ij} = a_{ij} \quad (i = j)$,
- $u_{ij} = a_{ij} \quad (i > j)$.

Az elemek L, D, U mátrixokba pakolásáról van szó. A továbbiakban tegyük fel, hogy A diagonális elemei nem nullák. Ha mégis az lenne, cseréljük meg a LER-ben a sorokat, hogy teljesítse a feltételt.

Példa:

Példa $A = L + D + U$ felbontásra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Megj.: Semmi köze az LU-felbontáshoz.

Tartalomjegyzék

1. Iterációs módszerekről általában
2. A Banach-féle fixponttétel
3. Speciális iterációs módszerek
4. Jacobi-iteráció
5. Csillapított Jacobi-iteráció
6. Matlab példák

Jacobi-iteráció

Átalakítás:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L+D+U)x &= b \\ Dx &= -(L+U)x + b \\ x &= -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: Jacobi-iteráció

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_J} \cdot x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{c_J} = B_J \cdot x^{(k)} + c_J$$

Eml.:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\cdot x^{(k)} + D^{-1}b$$

Írjuk fel koordinátánként (komponensenként)!

Állítás: a Jacobi-iteráció komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Biz.: Házi feladat meggondolni. Egyszerű. $\square$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\cdot x^{(k)} + D^{-1}b = D^{-1}\Big((D-A)\cdot x^{(k)} + b\Big) =$$
$$= x^{(k)} + D^{-1}\Big(-Ax^{(k)} + b\Big) = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := D^{-1}r^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Algoritmus: Jacobi-iteráció

$$
\begin{aligned}
r^{(0)} &:= b - Ax^{(0)} \\
k = 1, \ldots, \text{ leállásig} & \\
s^{(k)} &:= D^{-1} r^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad Ds^{(k)} = r^{(k)} \text{ LER} \\
x^{(k+1)} &:= x^{(k)} + s^{(k)} \\
r^{(k+1)} &:= r^{(k)} - As^{(k)}
\end{aligned}
$$

Megj.: Látjuk, hogy $x^{(k+1)} - x^{(k)} = s^{(k)}$, vagyis a tapasztalati kontrakciós együtthatók számításához lépésenként egy norma értéket és egy osztást kell elvégezni.

Tétel

Ha A szig. diag. dom. a soraira, akkor az $Ax = b$ LER-re felírt Jacobi-iteráció konvergens bármely $x^{(0)}$ esetén.

Biz.: Írjuk fel a B_J mátrix elemeit: $b_{ii} = 0$ és $i \neq j$-re $b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$.

$$\|B_J\|_\infty = \left\|-D^{-1}(L+U)\right\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

Ha A szig. diag. dom. a soraira, akkor

$$\forall\, i: \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

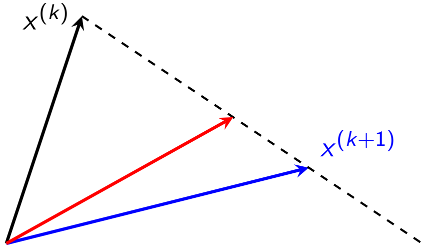
Tehát minden összeg egynél kisebb, így a maximumuk is, ezzel az elégséges feltétel miatt a konvergencia teljesül.

$$\|B_J\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

1. Iterációs módszerekről általában
2. A Banach-féle fixponttétel
3. Speciális iterációs módszerek
4. Jacobi-iteráció
5. Csillapított Jacobi-iteráció
6. Matlab példák

A *csillapítás* avagy *tompítás* alapötlete:

$$x_J^{(k+1)} \quad \text{helyett} \quad (1-\omega)\cdot x^{(k)} + \omega\cdot x_J^{(k+1)}$$



Megj.:

- alulrelaxálás ($0 < \omega < 1$), túlrelaxálás ($\omega > 1$)
- $\omega = 1$ az eredeti módszert adja

Csillapított Jacobi-iteráció

Induljunk a Jacobi-módszerből és a „helyben hagyásból”:

$$\begin{array}{rcll} x & = & -D^{-1}(L+U)\cdot x + D^{-1}b & \quad / \cdot \omega \\ x & = & x & \quad / \cdot (1-\omega) \end{array}$$

A kettő súlyozott összege:

$$x = \big[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\big] \cdot x + \omega D^{-1}b$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: csillapított Jacobi-iteráció ω paraméterrel – $J(\omega)$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{\Big[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\Big]}_{B_{J(\omega)}} \cdot x^{(k)} + \underbrace{\omega D^{-1}b}_{c_{J(\omega)}}$$

Írjuk fel koordinátánként!

Állítás: $J(\omega)$ komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\cdot x_i^{(k)} + \omega\cdot x_{i,J}^{(k+1)},$$

ahol $x_{i,J}^{(k+1)}$ a hagyományos Jacobi-módszer ($J = J(1)$) által adott, azaz

$$x_{i,J}^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} - b_i\right).$$

Biz.: Házi feladat meggondolni. Nem nehéz. □

Csillapított Jacobi-iteráció

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (1-\omega)x^{(k)} - \omega D^{-1}(L+U)\cdot x^{(k)} + \omega D^{-1}b = \\ &= (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1}\left((D-A)\cdot x^{(k)} + b\right) = \\ &= (1-\omega)x^{(k)} + \omega x^{(k)} + \omega D^{-1}\left(-Ax^{(k)} + b\right) = \\ &= x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)} \end{aligned}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := \omega D^{-1} r^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Algoritmus: csillapított Jacobi-iteráció $J(\omega)$

$$
\begin{aligned}
r^{(0)} &:= b - Ax^{(0)} \\
k = 1, \ldots, \text{ leállásig} & \\
s^{(k)} &:= \omega D^{-1} r^{(k)} \qquad \Leftrightarrow \qquad Ds^{(k)} = \omega r^{(k)} \ \text{ LER} \\
x^{(k+1)} &:= x^{(k)} + s^{(k)} \\
r^{(k+1)} &:= r^{(k)} - As^{(k)}
\end{aligned}
$$

Megj.: Látjuk, hogy $x^{(k+1)} - x^{(k)} = s^{(k)}$, vagyis a tapasztalati kontrakciós együtthatók számításához lépésenként egy norma értéket és egy osztást kell elvégezni.

Tétel a csillapított Jacobi-iteráció ($J(\omega)$) konvergenciája

Ha az $Ax = b$ LER-re a Jacobi-iteráció konvergens minden kezdőértékre, akkor $0 < \omega < 1$-re a csillapított Jacobi-iteráció is az.

Biz.: $J(\omega)$ iteráció esetén az átmenet mátrix $(1-\omega)I + \omega B_J$.
Először belátjuk, hogy a $B_{J(\omega)}$ mátrix μ_i sajátértékeire teljesül, hogy

$$\mu_i = (1-\omega) + \omega\lambda_i,$$

ahol λ_i-k a B_J sajátértékei. A két mátrix sajátvektorai (v_i-k) azonosak.

$$\begin{aligned} B_{J(\omega)} v_i &= ((1-\omega)I + \omega B_J)v_i = (1-\omega)v_i + \omega\lambda_i v_i = \\ &= \underbrace{((1-\omega) + \omega\lambda_i)}_{\mu_i} v_i = \mu_i v_i \quad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Biz. folyt: A bizonyításban a konvergenciára vonatkozó szükséges és elégséges feltételt használjuk. Belátjuk, hogy

$$\varrho(B_J) < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \omega < 1: \ \varrho(B_{J(\omega)}) < 1.$$

$\varrho(B_J) < 1$-ből következik, hogy minden i-re $|\lambda_i| < 1$.

Felhasználjuk, hogy $0 < \omega < 1$ és becsüljük $\mu_i = (1-\omega) + \omega\lambda_i$-t:

$$|\mu_i| \le (1-\omega) + \omega\,|\lambda_i| < (1-\omega) + \omega = 1 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ha minden i-re $|\mu_i| < 1$ teljesül, akkor $\varrho(B_{J(\omega)}) < 1$, vagyis a csillapított iteráció minden kezdőértékre konvergens. $\square$

1 Iterációs módszerekről általában

2 A Banach-féle fixponttétel

3 Speciális iterációs módszerek

4 Jacobi-iteráció

5 Csillapított Jacobi-iteráció

6 Matlab példák

Példák Matlab-ban

1. Példa iterációra, konvergens vektorsorozat számítására.
2. Konvergens és divergens iterációk tulajdonságainak szemléltetése $n = 2, 3$ dimenzióban.
3. A tapasztalati kontrakciós együtthatók szemléltetése a csillapított Jacobi iteráció esetén.

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

1. Példa:

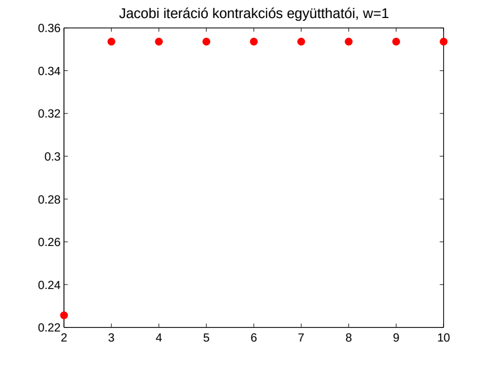
A LER alakja $Ax = b$, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \;\; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vizsgáljuk a csillapított Jacobi iteráció tapasztalati kontrakciós együtthatóit $\omega = 1, 0.8, 0.6, 1.2, 1.8, -0.1$ esetén!

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

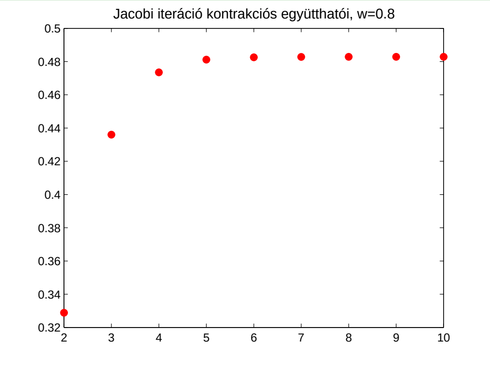
1. Példa:



$q \approx 0.3536$

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

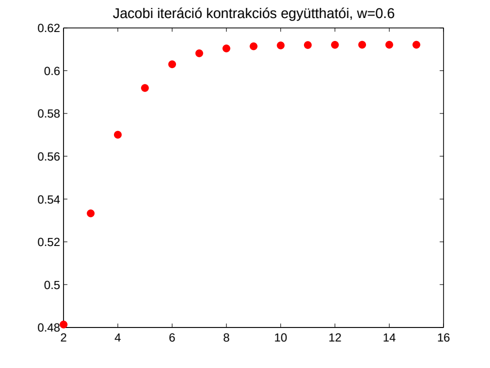
1. Példa:



$q \approx 0.4828$

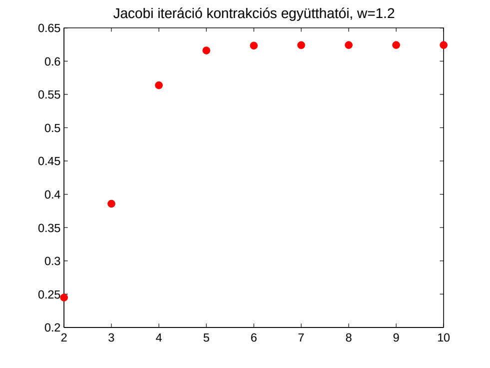
Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

1. Példa:



$q \approx 0.6118$

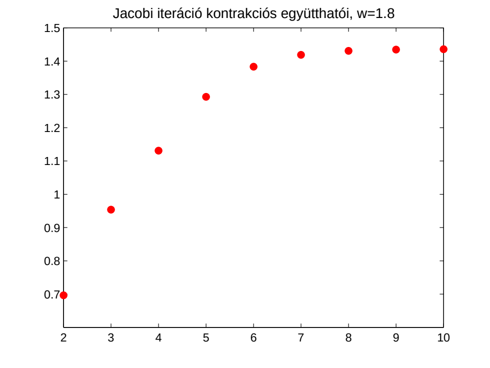
1. Példa:



$q \approx 0.6243$

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

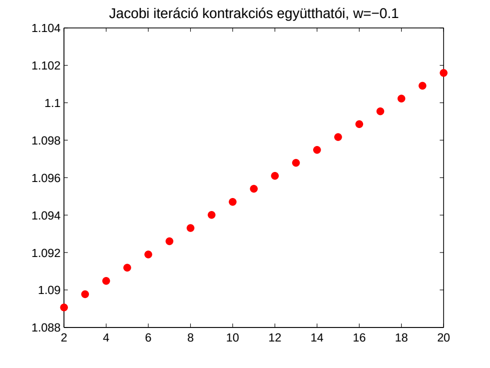
1. Példa:



$q > 1$, divergens sorozat

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

1. Példa:



$q > 1$, divergens sorozat