9. előadás

2020. április 20.

Többváltozós függvények integráljai

Az egyváltozós analízisben hangsúlyoztuk, hogy a matematika alkalmazásának igen fontos fejezete az *integrálszámítás*. Bevezettük a határozott integrál (vagy Riemann-integrál) *fogalmát*, megismertük a legfontosabb *tulajdonságait* és bemutattuk számos gyakorlati *alkalmazását*.

A további előadásokon a Riemann-integrál többváltozós függvényekre való kiterjesztéséről lesz szó.

Az első fontos megjegyzésem az, hogy a valós-valós függvények körében megismert integrálfogalmat többféle módon *lehet* általánosítani. Sőt: különböző (pl. geometriai, fizikai és egyéb) problémák vizsgálata *szükségessé is tette* különböző integrálfogalmak bevezetését.

1. Geometriai problémaként vessük fel pl. egy kétváltozós függvény grafikonja alatti térrész térfogatának a problémáját. Ez vezet el $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvények *többszörös integráljának* a fogalmához.

2. Fizikai motivációként gondoljunk pl. az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényekkel leírható (gravitációs, elektromos vagy mágneses) erőterekre. Ezek vizsgálata tette szükségessé a következő két integrálfogalom bevezetését:
- A *vonalintegrál* segítségével pl. egy erőtérben adott görbe mentén végzett munkát lehet meghatározni.
- A *felületi integrál* alapvető fogalom pl. az áramlástanban.

A továbbiakban csak a többszörös integrálokról lesz szó.

Többszörös integrálok

Emlékeztetünk arra, hogy a Riemann-integrál bevezetésének a motivációjaként függvény grafikonja alatti tartomány területének a problémáját vetettük fel. Abból az Arkhimédész-óta ismert, egyébként elég természetes ötletből indultunk ki, hogy a szóban forgó (görbe vonallal határolt) síkidom területét téglalapok területeinek az összegével közelítsük. Ebből kiindulva több lépésen keresztül jutottunk el a *Riemann-integrálhatóság* fogalmához.

A címben jelzett integrálfogalom bevezetését hasonló geometriai, illetve fizikai problémák motiválják. Példaként tekintsünk egy kétváltozós, valós értékű pozitív függvényt, amelyik az egyszerűség végett például egy, a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapon van értelmezve.

A függvény grafikonja alatti térrész *térfogatát* téglatestek térfogatainak az összegével lehet közelíteni. Látni fogjuk, hogy az egyváltozós Riemann-integrál fogalmának bevezetésénél követett út szó szerint átvihető $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre, ezért a többszörös integrál értelmezése az egyváltozós Riemann-integrál definíciójának *közvetlen* általánosításaként adódik. Ezért célszerű felidézni a korábban megszerzett ismereteket (l. az `Emlékeztető a Riemann-integrálra` című segédanyagot).

- **A többszörös integrálok értelmezése $\mathbb{R}^n$-beli intervallumokon**

Először a legegyszerűbb $\mathbb{R}^n$-beli halmazokat, nevezetesen az *intervallumokat* definiáljuk.

A továbbiakban legyen $n \in \mathbb{N}$ egy adott természetes szám. Ekkor *n-dimenziós intervallumon* (vagy más szóval *n-dimenziós téglán*) az

$$I := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Descartes-szorzatot értjük, ahol $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Világos, hogy $n = 1$ esetén a „szokásos" (korlátos és zárt) $\mathbb{R}$-beli intervallumot, $n = 2$-re a koordináta-síkon a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapot, $n = 3$-ra pedig a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a koordináta-síkokkal párhuzamos oldallapú téglatestet kapjuk.

Az

$$|I| := \mu(I) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

számot az I intervallum *mértékének* nevezzük.

Tehát $n = 1$ esetén

$$|I| = b_1 - a_1$$

az $I \subset \mathbb{R}$ intervallum *hossza*, $n = 2$-re

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

az $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ téglalap területe, ha pedig $n = 3$, akkor

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$

az $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ téglatest *térfogata*.

Emlékeztetünk arra, hogy egy korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum felosztásán olyan $\tau \subset [a, b]$ *véges* halmazt értettünk, amelyre $a, b \in \tau$, azaz

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b\},$$

ahol m egy adott természetes szám. Az intervallum felosztásainak a halmazát az $\mathcal{F}[a, b]$ szimbólummal jelöltük. A többdimenziós intervallum felosztásának az értelmezéséhez vegyük észre, hogy a feti osztópontokkal megadott felosztást az $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ intervallumok $(j = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ halmazaként is értelmezhetjük:

$$\tau = \{I_j = [x_j, x_{j+1}] \mid j = 0, 1, 2, \ldots, m-1\}.$$

Legyen ezek után egy $k = 1, 2, \ldots, n$ index esetén az $[a_k, b_k]$ intervallum egy felosztása

$$\tau_k = \big\{x_{k,0} = a_k < x_{k,1} < x_{k,2} < \cdots < x_{k,m_k} = b_k\big\} =$$
$$= \big\{I_{k,j} = [x_{k,j}, x_{k,j+1}] \;\big|\; j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\big\}.$$

(A felosztás tehát $m_k + 1$ osztópontot, illetve m_k intervallumot tartalmaz.) Ekkor az (1) n-dimenziós I intervallum egy *felosztásán* a

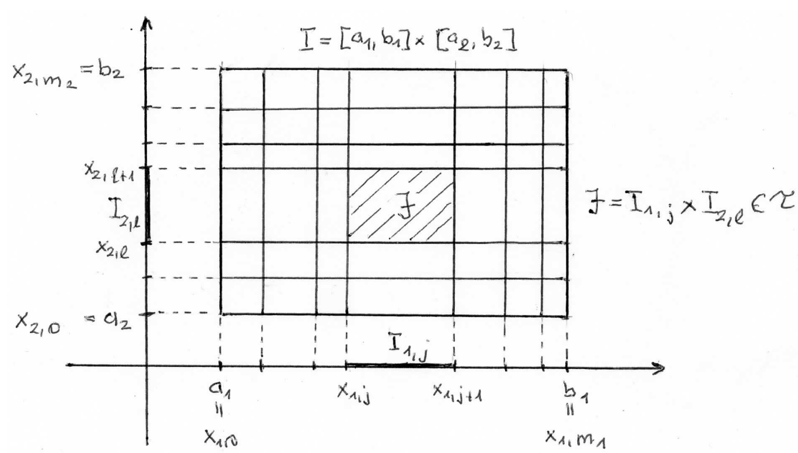
$$\tau := \tau_1 \times \tau_2 \times \cdots \times \tau_n \subset I$$

halmazt értjük, és az intervallum felosztásainak a halmazát a $\mathcal{F}(I)$ szimbólummal jelöljük. A τ halmaz elemei tehát az

$$I_{1,j_1} \times I_{2,j_2} \times \cdots \times I_{n,j_n}$$

n-dimenziós intervallumok, ahol $0 \le j_l \le m_j - 1$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$.

A fentieket az $n = 2$ esetben az alábbi ábra szemlélteti.



Egyszerűen igazolható, hogy

$$I = \bigcup_{J \in \tau} J, \qquad \mu(I) = \sum_{J \in \tau} \mu(J).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan értelmezzük az alsó-, illetve a felső közelítő összeg fogalmát. Legyen τ az n-dimenziós I intervallum egy felosztása és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \inf_{x \in J} f(x) \cdot \mu(J)$$

az f függvény τ felosztáshoz tartozó *alsó közelítő összege*,

$$S(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} \sup_{x \in J} f(x) \cdot \mu(J)$$

az f függvény τ felosztáshoz tartozó *felső közelítő összege*.

Mivel tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}(I)$ felosztás esetén

$$\inf_{x\in I} f(x)\cdot\mu(I) \le s(f,\tau) \le S(f,\tau) \le \sup_{x\in I} f(x)\cdot\mu(I),$$

ezért minden korlátos f függvényre az

$$\big\{s(f,\tau)\ \big|\ \tau\in\mathcal{F}(I)\big\} \quad \text{és az} \quad \big\{S(f,\tau)\ \big|\ \tau\in\mathcal{F}(I)\big\}$$

halmazok korlátosak.

1. definíció. *Az*

$$I_*(f) := \sup\big\{s(f,\tau\ \big|\ \tau\in\mathcal{F}(I)\big\}$$

valós számot az f függvény ***Darboux-féle alsó integráljának****, az*

$$I^*(f) := \inf\big\{S(f,\tau\ \big|\ \tau\in\mathcal{F}(I)\big\}$$

valós számot pedig az f függvény ***Darboux-féle felső integráljának*** *nevezzük.*
Akkor mondjuk, hogy a korlátos $f : I \to \mathbb{R}$ függvény ***Riemann-integrálható*** *(röviden* ***integrálható****) az I intervallumon (jelben $f \in R(I)$), ha $I_*(f) = I^*(f)$. A közös $I_*(f) = I^*(f)$ számot az f függvény I intervallumon vett* ***Riemann-integráljának*** *(röviden* ***integráljának****) nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\int_I f, \quad \int_I f(x)\,dx, \quad \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots\,dx_n.$$

Jegyezzük meg, hogy tetszőleges $f : I \to \mathbb{R}$ függvényre $I_*(f)$ és $I^*(f)$ létezik, mindegyik véges, továbbá bármely két $\tau,\sigma \in \mathcal{F}(I)$ felosztásra $s(f,\tau) \le S(f,\sigma)$, következésképpen

$$I_*(f) \le I^*(f).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan egyszerű példát lehet megadni olyan korlátos f függvényre, amelyre az $I_*(f) < I^*(f)$, ami azt jelenti, hogy a függvény *nem integrálható.*

1. példa. Legyen $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ és } y \text{ racionális,} \\ 1, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1$, ezért az f függvény *nem integrálható* a $[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ intervallumon.

A továbbiakban felsorolt állítások azt fejezik ki, hogy a Riemann-integrálhatóság, illetve maga a Riemann-integrál a többváltozós esetben is rendelkezik az egyváltozós esetben megismert tulajdonságokkal.

Először azt fogalmazzuk meg, hogy az említett fogalmak „érzéketlenek” a függvény *véges* halmazon való „viselkedésére”. Más szóval, ha egy Riemann-integrálható függvényt egy véges halmazon (tetszőlegesen) megváltoztatunk, akkor az így kapott „új” függvény is Riemann-integrálható lesz, és a (Riemann-)integrálja ugyanaz marad, mint a kiindulási függvényé. Tehát, ha egy intervallumon értelmezett két (valós) értékű függvény legfeljebb véges sok helyen különbözik egymástól, akkor vagy mindkettő integrálható (és ekkor az integráljuk megegyezik), vagy egyikük sem integrálható.

1. tétel. *Tekintsük az $I \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumon az $f, g : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvényeket. Tegyük fel, hogy az $A := \{x \in I \mid f(x) \neq g(x)\}$ halmaz véges. Ekkor*

(a) $f \in R(I) \iff g \in R(I)$,

(b) *ha* $f \in R(I)$, *akkor* $\int_I f = \int_I g$.

A következő tételben kiderül, hogy a folytonosság „erősebb” tulajdonság a Riemann-integrálhatóságnál.

2. tétel. *Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(I)$, azaz $C(I) \subset R(I)$.*

Az állítás megfordítása nem igaz. Az $n = 1$ esetben például az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényre $f \in R[0, 1]$, de $f \notin C[0, 1]$.

Megjegyzés. Ez a példa azt mutatja, hogy egy integrálható függvény „bőven” lehet nem folytonos. Az 1. tételt is figyelembe véve az is igaz, hogy egy folytonos függvényt véges sok helyen megváltoztatunk, akkor az így kapott (már nem folytonos) függvény integrálható. Másként fogalmazva: véges sok szakadási hellyel rendelkező függvények integrálhatók. Kérdés, hogy a szakadási helyek számát valamilyen értelemben lehet-e növeli úgy, hogy a függvény továbbra is integrálható maradjon.

Egy függvény Riemann-integrálhatósága lényegében azon múlik, hogy a függvény szakadási helyeinek a halmaza mennyire „kicsi”. Ezt az állítást önti precíz formába a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó *Lebesgue-féle kritérium*, amely szerint a Riemann-integrálhatóság azzal ekvivalens, hogy a függvény bizonyos értelemben „majdnem” folytonos.

Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor azt mondjuk, hogy az A halmaz *nullamértékű*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Pl. egyszerűen belátható: az $\mathbb{R}^n$ minden, legfeljebb megszámlálható részhalmaza nullamértékű. Sőt, ha $X_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ nullamértékű, akkor az $\cup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ is nullamértékű. Világos továbbá, hogy egy nullamértékű halmaz minden részhalmaza is nullamértékű.

A Riemann-integrálhatóság *Lebesgue-kritériuma.* *Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és legyen az f szakadási helyeinek a halmaza*

$$\mathcal{A}_f := \left\{x \in I \;\middle|\; f \notin C\{x\}\right\}.$$

Ekkor az f Riemann-integrálhatósága, azaz $f \in R(I)$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű.

Az integrálás és bizonyos függvényműveletek kapcsolatára vonatkozik az alábbi állítás.

3. tétel. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ *intervallum, és tegyük fel, hogy* $f, g \in R(I)$. *Ekkor*

1^o *minden* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\alpha f + \beta g \in R(I) \quad \textit{és} \quad \int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g,$$

2^o $f \cdot g \in R(I)$,

3^o *ha valamilyen* $m > 0$ *állandóval fennáll az*

$$|g(x)| \geq m > 0 \quad (x \in I)$$

egyenlőtlenség, akkor az $\frac{f}{g}$ *függvény is integrálható az* I *intervallumon.*

A többváltozós Riemann-integrál is rendelkezik az egydimenziós esetben megismert monotonitási tulajdonsággal. Ezt fejezi ki az alábbi állítás.

4. tétel. *Tegyük fel, hogy* $f \in R(I)$. *Ekkor*

(a) $|f| \in R(I)$, *és* $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$;

(b) *ha* $g \in R(I)$, *és* $f(x) \leq g(x)$ $(x \in I)$, *akkor* $\int_I f \leq \int_I g$.

• A többszörös integrálok értelmezése $\mathbb{R}^n$-beli korlátos halmazokon

Az integrálhatóság fogalma egyszerűen kiterjeszthető *tetszőleges* korlátos $H \subset \mathbb{R}^n$-beli halmazokon értelmezett *korlátos* függvényekre. Legyen H egy ilyen halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ egy adott korlátos függvény. Ekkor van olyan n-dimenziós $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum, amelyre $H \subset I$. Terjesszük ki az f függvény értelmezését az I intervallumra a következőképpen:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{ha } x \in I \setminus H. \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény *(Riemann)-integrálható a* H *halmazon* (jelben $f \in R(H)$), ha az $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ függvény integrálható az I intervallumon. Ekkor legyen

$$\int_H f := \int_I \tilde{f}.$$

Egyszerűen belátható, hogy ez az értelmezés *független* a H-t tartalmazó intervallum megválasztásától.

• **A kettős integrálok geometriai jelentései**

Az $n = 2$ esetben a többszörös integrált *kettős integrálnak* nevezzük. Ha a korlátos $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény integrálható a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor az integrálját a korábbi jelöléseinket kissé módosítva a

$$\iint_H f \quad \text{vagy az} \quad \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$$

szimbólumok valamelyikével fogjuk jelölni.

Az egyváltozós esetben már definiáltuk *síkidom területét*. Ezt kettős integrálokkal a következőképpen értelmezhetjük.

2. definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ egy korlátos halmaz és $f(x,y) := 1$ $\big((x,y) \in H\big)$. Azt mondjuk, hogy a H síkidomnak* ***van területe****, ha $f \in R(H)$, és ekkor H* ***területét*** *a*

$$t(H) := \iint_H f = \iint_H 1\,dx\,dy$$

kettős intergállal értelmezzük.

Megjegyzés. A síkidom területére megadott két definícó ekvivalens. Számos esetben bizonyos síkidomok területét könnyebb kiszámolni kettős integrállal, mint egyváltozós integrállal.

Most arra emlékeztetünk, hogy az egyváltozós analízisben már értelmeztük *forgástest térfogatát*, és annak kiszámolására egy képletet is megismertünk.

Kettős integrálok alsó- és a felső közelítő összegeinek geometriai jelentése alapján kézenfekvő bizonyos „térrészek” (pl. kétváltozós függvény grafikonja alatti tartományok) térfogatának az alábbi értelmezése.

3. definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ nemnegatív korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy a*

$$T := \big\{(x,y,z) \;\big|\; (x,y) \in H, \quad 0 \le z \le f(x,y)\big\} \subset \mathbb{R}^3$$

„térrésznek” (hengerszerű testnek) ***van térfogata****, ha $f \in R(H)$. Ekkor a*

$$V(T) := \iint_H f = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$$

kettős integrált a T test ***térfogatának*** *nevezzük.*