Írja le a hatványsor definícióját.

A $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett $\sum \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$ végtelen sort a középpontú, (α_n) együtthatós hatványsornak nevezzük.

Fogalmazza meg a Cauchy Hadamard-tételt.

Tekintsük a $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort, és tfh.: $\exists lim(\sqrt[n]{|\alpha_n|}) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor:

$$R := \begin{Bmatrix} \frac{1}{A}, & ha\ 0 < A < +\infty \\ 0, & ha\ A = +\infty \\ +\infty, & ha\ A = 0 \end{Bmatrix}$$

a hatványsor konvergenciasugara. Ez azt jelenti, hogy:

1. Ha $0 < R < +\infty$, akkor a hatványsor $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, ha $|x-a| < R$ és divergens, ha $|x-a| > R$
2. Ha $R = 0$, akkor a hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens.
3. Ha $R = +\infty$, akkor a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens.

Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.

$$\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum.

$$\sum_{n=0} \frac{x^n}{n^2}$$

Definiálja a sin függvényt.

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Definiálja a cos függvényt.

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$