Bizonyítással kért tételek

1. A szuprémum elv.

Tétel

Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor H felső korlátjai között van legkisebb, azaz $\exists \min\{K \in \mathbb{R} | K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}$

Bizonyítás

Adott: $H \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. $A := H, B := \{K \in \mathbb{R} | K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}$. Ekkor Az $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset: \forall a \in A$ és $\forall K \in B: a \leq K \underset{\substack{\text{teljességi} \\ \text{axióma}}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in \mathbb{R}: a \leq \xi \leq K \ (\forall a \in A, \forall K \in B)$

A ξ a legkisebb felső korlát, ugyanis:

- $a \leq \xi: \forall a \in A$ (ξ felső korlát)
- Ha K felső korlát és $\xi \leq K$, akkor $\xi = \min\{K \in \mathbb{R} | K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}$. ■

2. Az Arkhimédész-tétel.

Tétel

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall a > 0: \exists n \in \mathbb{N}: b < na$

Bizonyítás

Indirekt: Tegyük fel, hogy $\exists a > 0$ és $\exists b > 0: \forall n \in \mathbb{N}: b \geq na$. Legyen $H := \{na | n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor $H \neq \emptyset$ és felülről korlátos (pl.: b egy felső korlát), emiatt $\exists \sup H =: \xi$. Mivel ξ a legkisebb felső korlátja H-nak, így $\xi - a$ nem felső korlát, azaz $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \xi - a < n_0 a \Longrightarrow \xi < (n_0 + 1)a$, ez pedig ellentmondás, mert a ξ felső korlát. ■

3. A Cantor-féle közösrész-tétel.

Tétel

Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$-re adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás

Legyen $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}, B := \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ és $a_n \leq b_m$ $(\forall n, m \in \mathbb{N})$, ugyanis:

1. Ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$;
2. Ha $n > m$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Így a teljességi axióma feltételei teljesülnek, emiatt pedig $\exists \xi \in \mathbb{R}: a_n \leq \xi \leq b_m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, ezért $a_n \leq \xi \leq b_n$, azaz $\xi \in [a_n, b_n]$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow$

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset. \blacksquare$$

4. Minden valós sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás

Az a_{n_0} az (a_n) sorozat csúcsa, ha $\forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n_0}$.

Két eset lehetséges:

1. (a_n)-nek végtelen sok csúcsa van. Ekkor $\exists n_0$ csúcs $\forall n \geq n_0 : a_{n_0} \geq a_n$.
   - $\exists n_1 > n_0 : a_{n_1}$ is csúcs: $\forall n \geq n_1 : (a_{n_0} \geq) a_{n_1} \geq a_n$
   - $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2}$ is csúcs: $\forall n \geq n_2 : (a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq) a_{n_2} \geq a_n$, és így tovább.

   $\Longrightarrow \exists a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots : a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \cdots \Longrightarrow \exists (a_{n_k}) \searrow$ részsorozat
2. (a_n)-nek véges sok csúcsa van. Ekkor: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n$ nem csúcs.

   $n := 0$:
   - a_{n_0} nem csúcs $\Longrightarrow \exists n_1 > n_0 : a_{n_0} < a_{n_1}$
   - a_{n_1} nem csúcs, $\Longrightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_1} < a_{n_2}$
   - a_{n_2} nem csúcs, $\Longrightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_2} < a_{n_3}$, és így tovább.

   $\Longrightarrow \exists a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots$, azaz $\Longrightarrow \exists (a_{n_k}) \nearrow$ részsorozat. ■

5. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel.
(A segédtétel bizonyítását is kérjük.)

Tétel

Tegyük fel, hogy (a_n) és (b_n) konvergensek és $\lim(a_n) = A, \exists \lim(b_n) = B$ és ha még $0 \notin \mathcal{R}_{(b_n)}$ és $B \neq 0 \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergens, és $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$.

Bizonyítás

Mivel $0 \notin \mathcal{R}_{(b_n)} \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ valóban sorozat.

Segédtétel:

Ha (b_n) konvergens, és $\lim(b_n) = B \neq 0$ és $\left(0 \notin \mathcal{R}_{(b_n)}\right)$, akkor $\left(\frac{1}{|b_n|}\right)$ sorozat korlátos.

Segédtétel bizonyítása:

Legyen $B > 0$.

$\lim(b_n) = B \Longrightarrow \varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |b_n - B| < \frac{|B|}{2}$.

$$|b_n| \overset{\left(\substack{alsó \\ becslés}\right)}{=} |(b_n - B) + B| = |B - (B - b_n)| \overset{|a-b| \geq |a|-|b|}{\geq} |B| - |B - b_n| \geq |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq n_0 : \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|B|}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{|b_n|} \leq \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \dots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$

$\Longrightarrow \frac{1}{|b_n|}$ korlátos. ■

Tétel bizonyítása:

Igazoljuk, hogy $\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right)$ nullsorozat:

$$\forall n \in \mathbb{N}\text{-re } \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{a_n B - A b_n}{b_n B} \overset{\mp AB}{=} \frac{(a_n B - AB) + (BA - A b_n)}{b_n B} \leq$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\substack{\text{korlátos} \\ \text{(lsd. st.)}}} \cdot \underbrace{(a_n - A)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}} + \frac{A}{B} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(b_n - B)}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}}_{\text{nullsorozat}}$$

azaz $\lim\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right) = 0$, tehát $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$. ■

6. A közrefogási elv.

Tétel

$(a_n), (b_n), (c_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy:

- $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: a_n \leq b_n \leq c_n$;
- $\exists \lim(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}, \lim(c_n) \in \overline{\mathbb{R}}$ és $\lim(a_n) = \lim(c_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor $\exists \lim(b_n)$ és $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás

1. $A \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0: \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1: |a_n - A| < \varepsilon: A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_2: |c_n - A| < \varepsilon: A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon \end{cases}$

Legyen $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2, N\} \Longrightarrow \forall n \geq n_0: A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \Longrightarrow |b_n - A| < \varepsilon$
$\Longrightarrow \lim(b_n) = A$.

2. $A = +\infty: \lim(a_n) = +\infty$

$\forall \underline{P} \in \mathbb{R}: \exists n_1 \in \mathbb{N}:, \forall n \geq n_1: a_n > \underline{P}$

Legyen $n_0 \coloneqq \max\{n_1, N\} \Longrightarrow \forall n \geq n_0: b_n \geq a_n > \underline{P} \Longrightarrow \lim(b_n) = +\infty$.

3. $A = -\infty: \lim(c_n) = -\infty$

$\forall \underline{P} \in \mathbb{R}: \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1: c_n < \underline{P}$

1. Legyen $n_0 \coloneqq \max\{n_1, N\} \Longrightarrow \forall n \geq n_0: b_n \leq c_n < \underline{P} \Longrightarrow \lim(b_n) = -\infty$. ■

7. Monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételek.

Tétel

Minden monoton sorozatnak van határértéke.

1.
   a. Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor konvergens és $\lim(a_n) = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.
   b. Ha $(a_n) \searrow$ és alulról, akkor konvergens és $\lim(a_n) = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.
2.
   a. Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor $\lim(a_n) = +\infty$.
   b. Ha $(a_n) \searrow$ és alulról nem korlátos, akkor $\lim(a_n) = -\infty$.

Bizonyítás

1a. (a_n) felülről korlátos $\Longrightarrow \exists \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}\, A \in \mathbb{R}$ (véges!)

i. $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq A$

ii. $\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A$

De $(a_n) \nearrow \Longrightarrow \forall n \geq n_0: A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A \Longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon \Longrightarrow \lim(a_n) = A$.

(A másik hasonlóan igazolható)

2a. (a_n) felülről NEM korlátos $\Longrightarrow \forall \underline{P} \in \mathbb{R}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_{n_0} > \underline{P}$

De $(a_n) \nearrow \Longrightarrow \forall n \geq n_0: a_n \geq a_{n_0} > P \Longrightarrow \lim(a_n) = +\infty$.

(A másik hasonlóan igazolható) ■

8. A Cauchy-féle konvergencia kritérium.

Tétel

(a_n) konvergens $\Longleftrightarrow (a_n)$ Cauchy-sorozat.

Bizonyítás

$\boxed{\Longrightarrow}$: Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A(\in \mathbb{R}$ véges$)$
$\Longrightarrow \forall\varepsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon$
Ha $n, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Longrightarrow$ (a_n) Cauchy-sorozat.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Tegyük fel, hogy (a_n) Cauchy-sorozat, azaz $\forall\varepsilon > 0 \colon \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon$

1. Áll.: (a_n) korlátos is.
   Valóban: (a_n) Cauchy-sorozat $\Longrightarrow \varepsilon = 1$-hez $\exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < 1 \Longrightarrow$
   $|a_n| = \left|a_n - a_{n_0} + a_{n_0}\right| \leq \left|a_n - a_{n_0}\right| + \left|a_{n_0}\right| < 1 + \left|a_{n_0}\right|$
   Viszont: $\forall n \in \mathbb{N} \colon |a_n| \leq \max\left\{1 + \left|a_{n_0}\right|, |a_0|, |a_1|, \dots, \left|a_{n_0}\right|\right\} \Longrightarrow (a_n)$ korlátos sorozat.
2. Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel $\Longrightarrow \exists\left(a_{n_k}\right)$ konvergens részsorozat.
   Legyen $\lim\left(a_{n_k}\right) = A \in \mathbb{R}$.
3. Igazoljuk, hogy $\lim(a_n) = A \colon |a_n - A| = \left|a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A\right| \leq \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - A\right|$
   Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített.
   - Mivel $a_{n_k} \to A \Longrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \colon \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon \colon \forall n \geq n_1$.
   - Mivel (a_n) Cauchy-sorozat $\Longrightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \colon \left|a_n - a_{n_k}\right| < \varepsilon \colon \forall n \geq n_2$.

   Így $\forall n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\} \colon |a_n - A| \leq \left|a_n - a_{n_k}\right| + \left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon \Longrightarrow \lim(a_n) = A$. ■

9. Pozitív szám m-edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével.

Tétel

$m = 2,3, \dots$ rögzített.

1. $\forall 0 < A \in \mathbb{R}$-hoz $\exists!\, \alpha > 0 \colon \alpha^m = A$.
2. Az $\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges} \\ a_{n+1} := \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \ (n = 0,1, \dots) \end{cases}$ sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = \alpha$.

Bizonyítás

A bizonyítás több lépésben történik:

1. lépés: (a_n) „jól definiált"; $a_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

2. lépés: egyértelműség (indirekt), $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow \alpha_1^m < \alpha_2^m$.

3. lépés: (a_n) konvergens.
Valóban: $(a_n) \searrow$, azaz $a_{n+1} \leq a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \underset{A \leq a_n^m \ (\forall n \in \mathbb{N})}{\overset{?}{\underset{\Updownarrow}{\leq}}} a_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

Ez viszont igaz, mert $a_n^m \overset{\text{TRÜKK}}{=} \left(\frac{\frac{A}{a_{n-1}^m} + \overbrace{a_{n-1} + \dots + a_{n-1}}^{(m-1)\text{ db}}}{m}\right)^m \geq \frac{A}{a_{n-1}^m} \cdot a_{n-1}^m = A \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (a_n) \searrow$ és alulról korlátos $\Longrightarrow$ konvergens.
$\lim(a_n) = \alpha$
Ekkor $\alpha \geq 0$ (ugyanis $a_n > 0$ $\forall n$), de $\alpha = 0$ nem lehet: $a_n^m \geq A > 0 \Longrightarrow \alpha > 0$

4. lépés: $\alpha^m = A$

$$\text{Valóban: } \underbrace{a_{n+1}}_{n \to +\infty} = \underbrace{\frac{1}{m}\left(\overbrace{\frac{A}{a_n^{m-1}}}^{\frac{A}{\alpha^{m-1}}} + \overbrace{(m-1)a_n}^{(m-1)a_n}\right)}_{n \to +\infty} \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right) \Longrightarrow \alpha^m = A. \ ■$$

10. A geometriai sor konvergenciája.

Tétel

Legyen $(q^n), q \in \mathbb{R}$

A $\sum(q^n)$ konvergens, $\Leftrightarrow |q| < 1$, és ekkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

Bizonyítás

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ ha } q \neq 1 \\ n+1, \text{ ha } q = 1 \end{cases}$$

(s_n) konvergens $\overset{q \neq 1}{\Longleftrightarrow}$ (q^{n+1}) konvergens $\Leftrightarrow |q| < 1$ és ekkor $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$

$$\Longrightarrow \lim(s_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \ \blacksquare$$

11. A Cauchy-felé gyökkritérium.

Tétel

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sorra $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor:

- Ha $0 \leq A < 1 \Rightarrow$ a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát $\sum a_n$ konvergens is;
- Ha $A > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergens;
- Ha $A = 1 \Rightarrow \sum a_n$ lehet konvergens, illetve divergens is.

Bizonyítás

$\boxed{\text{Tegyük fel, hogy } 0 \leq A < 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A \Longrightarrow q$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: 0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < q \Longrightarrow 0 < |a_n| < q^n \ (\forall n \geq n_0)$.

Mivel $0 < q < 1 \Longrightarrow \sum q^n$ konvergens $\xRightarrow[\text{krit.}]{\text{Majoráns}}$ $\sum|a_n|$ konvergens.

$\boxed{\text{Tegyük fel, hogy } A > 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A \Longrightarrow q$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \sqrt[n]{|a_n|} > q \Longrightarrow |a_n| > q^n \ (\forall n \geq n_0)$.

Mivel $q > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty \Longrightarrow (a_n)$ nem nullsorozat $\xRightarrow[\text{szüks. felt.}]{\text{A konvergencia}}$ $\sum a_n$ divergens.

$\boxed{\text{Tegyük fel, hogy } A = 1}$

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens; $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{n}}}}\right) = 1$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens; $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \ \blacksquare$

12. A D'Alembert-felé hányados-kritérium.

Tétel

Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sorra:

- $a_n \neq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$;
- $\exists \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor:

- $0 \leq A < 1 \Longrightarrow \sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;
- $A > 1 \Longrightarrow \sum a_n$ sor divergens;
- $A = 1 \Longrightarrow \sum a_n$ sor lehet konvergens, illetve divergens is.

Bizonyítás

$\boxed{\text{Tegyük fel, hogy } 0 \le A < 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A \Longrightarrow q$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge n_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$.

Legyen $n \ge n_0$.

$$|a_{n+1}| < q \cdot |a_n| \overset{\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|<q}{<} q^2|a_{n+1}| < \dots < q^{n+1-n_0}|a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0-1}} q^n$$

$\Longrightarrow |a_{n+1}| < c \cdot q^n$ ($\forall n \ge n_0$)

Mivel $0 \le q < 1 \Longrightarrow \sum_{n=n_0} q^n$ konvergens $\Longrightarrow \sum_{n=n_0}|a_n|$ konvergens $\Longrightarrow \sum|a_n|$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ konvergens.

$\boxed{\text{Tegyük fel, hogy } A > 1.}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A \Longrightarrow q$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge n_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q$.

Ha $n \ge n_0$: $|a_{n+1}| \ge q \cdot |a_n| > q^2 \cdot |a_{n-1}| > \dots > q^{n+1-n_0}|a_{n_0}|$

Mivel $q > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty \Longrightarrow \lim(|a_n|) = +\infty$, azaz (a_n) nem nullsorozat $\xRightarrow[\text{szüks. felt.}]{\text{A konvergencia}} \sum a_n$ divergens.

$\boxed{\text{Tegyük fel, hogy } A = 1.}$

- A $\sum \frac{1}{n}$ divergens, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$
- A $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, és $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 1$. ■

13. Leibniz-típusú sorok konvergenciája.

Tétel

Tegyük fel, hogy $\sum(-1)^{n+1}a_n$ Leibniz-típusú sor

Ekkor:

1. (Konvergencia)
   $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens $\Longleftrightarrow \lim(a_n) = 0$;
2. (Hibabecslés)
   Tegyük fel, hogy $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens és
   $$A := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n\,.$$
   Ekkor
   $$|A - s_n| = \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \le a_n (\forall n = 1,2,\dots)$$

Bizonyítás

1. Konvergencia

$\boxed{\Longrightarrow}$: $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens $\xrightarrow[\text{A konvergencia szüks. felt.}]{}$ $\lim((-1)^n a_n) = 0 \Longrightarrow \lim(a_n) = 0.$

$\boxed{\Longleftarrow}$: Tegyük fel, hogy $\sum(-1)^{n+1}a_n$ Leibniz-típusú sor és $\lim(a_n) = 0.$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \pm a_n$$

Igazoljuk:

i. $(s_{2n+1}) \searrow$

ii. $(s_{2n}) \nearrow$

i. $s_1 = a_1 \geq s_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} = a_1 - a_2 + a_3 = s_3 \geq s_3 - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_5 \geq \cdots \geq s_{2n+1}$

ii. $s_2 = a_1 - a_2 \leq s_2 + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_4 \leq s_4 + (a_5 - a_6) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 \leq \cdots \leq s_{2n}$

$s_2 \leq s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1 \qquad (\forall n = 1,2,\dots)$

$(s_{2n+1}), (s_{2n})$ konvergens.

Legyen: $\alpha \coloneqq \lim(s_{2n+1}), \beta \coloneqq \lim(s_{2n})$

de: $\underbrace{s_{2n}}_{\beta} = \underbrace{s_{2n-1}}_{\substack{(n\to+\infty) \\ \alpha}} - \underbrace{a_{2n}}_{0} (\forall n)$

$\Rightarrow \alpha = \beta$

2. Hibabecslés

$s_{2n} \leq \alpha = A \leq s_{2n+1} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow |s_{2n} - A| \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \leq a_{2n} (\forall n \in \mathbb{N})$

$|s_{2n} - A| \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$

$\Rightarrow |A - s_n| \leq a_n (\forall n \in \mathbb{N})$ ■

14. Számok tizedestört alakban való előállítása.

Tétel

Ha $\alpha \in [0,1]$, akkor : $\exists (a_n): \mathbb{N} \to \{0,1,\dots,9\}$:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Bizonyítás

Ötlet: 10 egyenlő intervallumra osztjuk

- 1. Lépés: $\exists a_1 \in \{0,1,\dots,9\}$: $\alpha \in I_1 \coloneqq \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right]$: $\frac{a_1}{10} \leq \alpha \leq \frac{a_1+1}{10}$;
- 2. Lépés: I_1-et 10 egyenlő intervallumra osztjuk.

  $\Rightarrow \exists a_2 \in \{0,1,\dots,9\}$: $\alpha \in I_2 \coloneqq \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}\right] \Rightarrow \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}$,

  ⋮ folytatva
- $\exists a_n \in \{0,1,\dots,9\}$: $\alpha \in I_n = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}\right]$, azaz

  $\underbrace{\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}}_{\coloneqq s_n} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}$

  $\Rightarrow s_n \leq \alpha \leq s_n + \frac{1}{10^n} (\forall n \in \mathbb{N})$

  $\Rightarrow |s_n - \alpha| \leq \frac{1}{10^n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$, azaz

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \ ■$$

15. Abszolút konvergens sorok szorzására vonatkozó Cauchy-tétel.

Tétel

Ha $\sum_{n=0} a_n$ és $\sum_{n=0} b_n$ sorok abszolút konvergensek. $\Longrightarrow$

a. A $\sum_{n=0} t_n$ Téglány-szorzat is abszolút konvergens;

b. A $\sum_{n=0} c_n$ Cauchy-szorzat is abszolút konvergens;

c. Az összes $a_i b_j$ $(i, j = 0,1,2, \ldots)$ szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett $\sum_{n=0} d_n$ sor is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Bizonyítás

$$\left.\begin{aligned} A_N &:= \sum_{n=0}^{N} |a_n| \xrightarrow[\mathrm{n}\to+\infty]{} A \in \mathbb{R} \\ B_N &:= \sum_{n=0}^{N} |b_n| \xrightarrow[\mathrm{n}\to+\infty]{} B \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{mert abszolút konvergensek}$$

Tekintsük a $\sum_{n=0} d_n$ sort, ahol $d_n = \sum a_i b_j$. (véges sok)

$$\sum_{n=0}^{N} |d_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{I} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{J} |b_n|\right) \leq A \cdot B \ (\forall N \in \mathbb{N})$$

I: max i-nek a $d_0, d_1, \ldots, d_N$-ben

J: max j-nek a $d_0, d_1, \ldots, d_N$-ben

$\Longrightarrow \sum_{n=0} d_n$ abszolút konvergens

Tehát $\sum_{n=0} t_n$, $\sum_{n=0} c_n$ is abszolút konvergens, viszont

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n \overset{!!}{=} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

és $\sum_{n=0} t_n$ abszolút konvergens $\Longrightarrow$ tetszőleges módon átrendezhető, csoportosítható az összeg megváltoztatása nélkül.

A $\sum_{n=0} d_n$ és a $\sum_{n=0} c_n$ megkapható $\sum_{n=0} t_n$-ből alkalmas csoportosítással, átrendezéssel. ■

16. Hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel. (A segédtétel bizonyítását is kérjük.)

Tétel

Tetszőleges $\sum \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor konvergenciahalmazára a következő 3 eset egyike teljesül:

a. $\exists!\, 0 < R < +\infty$: a hatványsor:
   - $\forall x$: $|x-a| < R$: abszolút konvergens.
   - $\forall x$: $|x-a| > R$: divergens.

b. A hatványsor csak az $x = a$-ban konvergens Legyen ekkor $R := 0$.

c. A hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergens. Legyen ekkor $R := +\infty$, R a hatványsor konvergenciasugara.

Bizonyítás

Feltehető, hogy $a = 0$, azaz elég tekinteni

$$\sum_{n=0} \alpha_n x^n \ (x \in \mathbb{R})$$

sort, mert $a \neq 0$ esetén $y := x - a$-val $\sum_{n=0} \alpha_n y^n$

Segédtétel:

Tegyük fel, hogy $\sum_{n=0} \alpha_n x^n$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ pontban.
Ekkor $\forall x\colon |x| < |x_0|$ esetén $\sum_{n=0} \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.

Segédtétel bizonyítása:

$\sum_{n=0} \alpha_n x_0^n$ konvergens. $\underset{\substack{\text{A konvergencia} \\ \text{szüks. felt.}}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n x_0^n) = 0$

$\Longrightarrow \alpha_n x_0^n$ korlátos, azaz $\exists M > 0\colon |\alpha_n x_0^n| \leq M \ (\forall n \ \in \mathbb{N})$.

Legyen $|x| < |x_0|$. Ekkor $|\alpha_n x_n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

Mivel $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Longrightarrow \sum M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ konvergens $\underset{\substack{\text{majoráns} \\ \text{kritérium}}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0} |\alpha_n x^n|$ is konvergens, azaz $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. ■

A tétel bizonyítása:

Tekintsük a $\sum_{n=0} \alpha_n x^n$ hatványsort. Ez az $x = 0$-ban konvergens
$\Longrightarrow 0 \in \mathrm{KH}(\sum_{n=0} \alpha_n x^n)$, azaz $\mathrm{KH}(\sum_{n=0} \alpha_n x^n) \neq \emptyset$
$\Longrightarrow \exists \sup \mathrm{KH}(\sum_{n=0} \alpha_n x^n) =: R \in \overline{\mathbb{R}}$, sőt $R \geq 0$.

A következő 3 eset lehetséges:

a. $0 < R < +\infty$:
Legyen $|x| < R$
A szuprémum definíciójából $\Longrightarrow \exists x_0,\ |x| < x_0$ és $\sum_{n=0} \alpha_n x_0^n$ konvergens
$\underset{\text{ST}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0} \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.
Legyen $|x| > R \Longrightarrow \exists x_0\colon R < x_0 < |x|$ és $\sum \alpha_n x_0^n$ divergens $\Longrightarrow \sum_{n=0} \alpha_n x^n$ sor is divergens. (Ha konvergens lenne, $\underset{\text{ST}}{\Longrightarrow} \sum \alpha_n x_0^n \ (\sum \alpha_n x^n)$ is konvergens)
Az ilyen R egyértelmű!

b. $R = 0$:
A $\sum \alpha_n x^n$ sor konvergens $x = 0$-ban és divergens $\forall |x| > 0$ esetén, ugyanis ha $|x| > 0$ rögzített $\Longrightarrow \exists x_0\colon 0 < x_0 < |x|$ és $\sum_{n=0} \alpha_n x_0^n$ divergens $\Longrightarrow \sum_{n=0} \alpha_n x^n$ is divergens.

c. $R = +\infty$:
Ekkor a $\sum_{n=0} \alpha_n x^n$ sor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.
Ugyanis, ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges $\Longrightarrow \exists x_0\colon |x| < |x_0|$ és $\sum_{n=0} \alpha_n x_0^n$ konvergens $\underset{\text{ST}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0} \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. ■

17. Függvény határértékre vonatkozó átviteli elv.

Tétel

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor

$\lim\limits_a f = A \in \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow (*)\colon \forall (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

Bizonyítás

$\boxed{\Longrightarrow}$: Tegyük fel, hogy $\lim_a f = A \in \overline{\mathbb{R}}$, azaz

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0, \forall x \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in k_\varepsilon(A)$

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ tetszőleges sorozat.

Ekkor $\delta > a$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in k_\delta(a) \setminus \{a\}$

Tehát $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(x_n) \in k_\varepsilon(A)$, azaz $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Indirekt

Tegyük fel, hogy $(*)$ teljesül, de $\lim_a f \neq A$.

Ekkor $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in (k_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \notin k_\varepsilon(A)$.

Legyen: $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\dots), x_n$

Ekkor: $: \exists x_n \in \mathcal{D}_f \cap \left(k_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\}\right), f(x_n) \in k_\delta(a)$ $(\forall n = 1,2,\dots)$

Mivel: $x_n \in k_{\frac{1}{n}}(a)$ $(n = 1,2,\dots) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = q, x_n \neq a$

Tehát: $\exists (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ és $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq A$, ez pedig ellentmondás. ■

18. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

Tétel

$$\left.\begin{array}{r}\text{Legyen } a, b \in \mathbb{R} : a < b \\ \text{Tegyük fel, hogy } f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ folytonos } [a, b]\text{-n}\end{array}\right\} f \text{ korlátos } [a, b]\text{-n.}$$

Bizonyítás

f korlátos $[a, b]$-n, ha $\exists K > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq K$.

Indirekt: Tegyük fel, hogy f nem korlátos $[a, b]$-n, azaz $\forall K > 0 : \exists x \in [a, b] : |f(x)| > K$.

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \Longrightarrow \big(f(x_n)\big)$ sorozat nem korlátos. $(*)$

Mivel $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat, ezért:

Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\Longrightarrow \exists \big(x_{n_k}\big)$ konvergens részsorozata.

Legyen $\alpha \coloneqq \lim\big(x_{n_k}\big)$

Ekkor $\alpha \in [a, b]$

$\exists K(\alpha) : K(\alpha) \cap [a, b] \neq 0$

De $\alpha \coloneqq \lim\big(x_{n_k}\big) \Longrightarrow K(\alpha)$-hoz $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0 : x_{n_k} \in K(\alpha)$ és $x_{n_k} \in [a, b]$, ez ellentmondás.

Az f folytonos $[a, b]$-n $\Longrightarrow f \in C\{\alpha\} \xRightarrow[\text{átviteli elv}]{} \lim\big(x_{n_k}\big) = \alpha \Longrightarrow \lim\Big(f\big(x_{n_k}\big)\Big) = f(\alpha)$

$\Longrightarrow f\big(x_{n_k}\big)$ sorozat korlátos, ez ellentmond $(*)$-nak. ■

19. A Weierstrass-tétel.

Tétel

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n $\Longrightarrow f$-nek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz $\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ $(x \in [a, b])$

Bizonyítás

$f \in C[a,b] \Longrightarrow f$ korlátos. Ezért:

- $\exists \sup\{f(x) | x \in [a,b]\} =: M < +\infty$ (véges)
- $\exists \inf\{f(x) | x \in [a,b]\} =: m < +\infty \ (m > -\infty)$ (véges)

Igazoljuk: Létezik abszolút max. hely, azaz $\exists \alpha \in [a,b]: f(\alpha) = M$

sup. def. $\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \exists y_n \in \mathcal{R}_f: M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$. Viszont $y_n \in \mathcal{R}_f \Longrightarrow \exists x_n \in [a,b]: f(x_n) = y_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ Az $(x_n): \mathbb{N} \to [a,b]$ sorozat korlátos $\xRightarrow[\substack{\text{Bolzano-}\\ \text{Weierstrass}\\ \text{kiv. tétel}}]{} \exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\alpha := \lim(x_{n_k})$

Ekkor $\alpha \in [a,b]$ (indirekt módon igazolható)

$f \in C[a,b] \xRightarrow[\text{átviteli elv}]{} \lim(x_{n_k}) = \alpha$ miatt $\lim\limits_{n_k \to +\infty} \underset{\substack{\| \\ y_{n_k}}}{f(x_{n_k})} = f(\alpha)$

Mivel $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = y_{n_k} \leq M \ (\forall n_k)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n_k \to +\infty} y_{n_k} = M \Longrightarrow M = f(\alpha)$.

Abszolút min. helyre hasonló a bizonyítás. ■

20. A Bolzano-tétel.

Tétel

$$\left.\begin{array}{l} \text{Legyen } -\infty < a < b < +\infty. \text{ Tegyük fel, hogy } f: [a,b] \to \mathbb{R}: \\ \quad \bullet \ \text{folytonos } [a,b]\text{-n,} \\ \quad \bullet \ f(a) \cdot f(b) < 0 \\ \text{(a két végpontban } f \text{ különböző előjelű)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b): f(\xi) = 0.$$

Bizonyítás

(Bolzano-féle felezési eljárással)

Tegyük fel, hogy $f(a) < 0, f(b) > 0$

Legyen $[x_0, y_0] := [a,b]$

Megfelezzük $[a,b]$-t:

Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) := 0$ ✓
2. $f(z_0) > 0$ esetén: $[x_1, y_1] = [a, z_0]$
3. $f(z_0) < 0$ esetén: $[x_1, y_1] = [z_0, b]$

$\}$ $[x_1, y_1]$-et megfelezve is 3 eset lehetséges!
⋮ az eljárást folytatjuk.

Vagy véges sok lépésben kapunk ξ-t

$$f(\xi) = 0$$

vagy nem. Ez utóbbi esetben:

$\exists [x_n, y_n] \ (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat.

i. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \ (n \in \mathbb{N})$;

ii. $f(x_n) < 0; f(y_n) > 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$

iii. $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n} \ (\forall n \in \mathbb{N})$

Cantor-féle közösrész tétel $\Longrightarrow$

$$\exists \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n] \in [a,b]$$

$x_n \nearrow \xi \qquad y_n \searrow \xi$

f folytonos $[a,b]$-n $\Longrightarrow f \in C\{\xi\} \xRightarrow[\text{átviteli elv}]{} \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\xi) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n)$

ii. $\Longrightarrow \forall n$:

$$\begin{array}{cc} f(x_n) < 0 & f(y_n) > 0 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \leq 0 & \lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) \geq 0 \end{array}$$

Tehát $f(\xi) \leq 0$ és $f(\xi) \geq 0 \Longrightarrow f(\xi) = 0$ ■

Bizonyítással kért tételek

1. A szuprémum elv.
2. Az Arkhimédész-tétel.
3. A Cantor-féle közösrész-tétel.
4. Minden valós sorozatnak van monoton részsorozata.
5. Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel.
   (A segédtétel bizonyítását is kérjük.)
6. A közrefogási elv.
7. Monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételek.
8. A Cauchy-féle konvergencia kritérium.
9. Pozitív szám m-edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével.
10. A geometriai sor konvergenciája.
11. A Cauchy-felé gyökkritérium.
12. A D'Alembert-felé hányados-kritérium.
13. Leibniz-típusú sorok konvergenciája.
14. Számok tizedestört alakban való előállítása.
15. Abszolút konvergens sorok szorzására vonatkozó Cauchy-tétel.
16. Hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel. (A segédtétel bizonyítását is kérjük.)
17. Függvény határértékre vonatkozó átviteli elv.
18. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.
19. A Weierstrass-tétel.
20. A Bolzano-tétel.