# Alapok

## 1. Az unió tulajdonságai

- $A \cup B = B \cup A$ $A \cup B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow A \cup B$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

  $(A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$
  $x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow A \cup (B \cup C)$
- $A \cup A = A$ $A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow A$
- $A \cup \emptyset = A$ $A \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$ ✓
  $A \subseteq (A \cup B) \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)) \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$ ✓

## 2. A metszet tulajdonságai

*bizonyítások hasonlóan mint az uniónál*

- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

## 3. Az unió és metszet disztributivitási tulajdonságai

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$
  $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$
  $\Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *az előző alapján*

## 4. Komplementer tulajdonságai

*A fenti bizonyításokhoz hasonlóan, csak fel kell írni kvantorokkal* $x$ az alaphalmaz / univerzum:

- $\overline{\emptyset} = x$
- $\overline{x} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = x$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

## 5. Relációk kompozíciójának tulajdonságai

- **Kompozíció asszociatív:** $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
  $(R \circ S) \circ T \Leftrightarrow (x, w) \in (R \circ S) \circ T \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in T \wedge (y, w) \in (R \circ S) \Leftrightarrow$
  $\exists y : (x, y) \in T \wedge \exists z : (y, z) \in S \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow$
  $\exists z, \exists y : (x, y) \in T \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow$
  $\exists z : (x, z) \in (S \circ T) \wedge (z, w) \in R \Leftrightarrow (x, w) \in R \circ (S \circ T) \Leftrightarrow$
  $R \circ (S \circ T)$
- **Kompozíció inverze:** $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
  $(z, x) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (x, z) \in (R \circ S) \Leftrightarrow$
  $\exists y : (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R \Leftrightarrow \exists y : (y, x) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow$
  $S^{-1} \circ R^{-1}$

## 6. Állítás, amely kimondja, hogy függvények kompozíciója is függvény

Ha $f$ és $g$ függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.

**Bizonyítás:** Legyen $(x, y) \in g \circ f, (x, y') \in g \circ f$ : Mivel $\exists z : (x, z) \in f, (z, y) \in g, \exists z' : (x, z') \in f, (z', y') \in g$
$f$ függvény: $z = z'$, mivel $g$ függvény: $y = y'$

## 7. Állítás, amely kimondja, hogy injektív függvények kompozíciója is injektív

Ha $f$ és $g$ injektív, akkor $f \circ g$ is injektív.

**Bizonyítás:** $f$ injektív $\Rightarrow x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
$x_1 \neq x_2 \overset{g \text{ injektív}}{\Rightarrow} g(x_1) \neq g(x_2) \overset{f \text{ injektív}}{\Rightarrow} f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)$

# Komplex számok

---

## 8. Hányados kiszámítása algebrai alakban

Ha $z, w \in \mathbb{C}$ és $z = a + bi, w = c + di$ akkor $\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$

**Bizonyítás:**
$$\frac{z}{w} \Leftrightarrow \frac{a+bi}{c+di} \Leftrightarrow \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \Leftrightarrow \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2-d^2\cdot i^2} \Leftrightarrow \frac{ac-adi+bci-adi^2}{c^2+d^2} \Leftrightarrow \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \Leftrightarrow \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

## 9. A konjugálás és abszolút érték tulajdonságai

Ha $z, w \in \mathbb{C}$ és $z = a + bi, w = c + di$, akkor:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- Ha $z \neq 0 : \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z| = \overline{z}$
- Háromszög egyenlőtlenség: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|0| = 0, \text{és} z \neq 0$ esetén $|z| > 0$
- $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2 \cdot Im(z)$

## 10. Szorzásra vonatkozó Moivre-azonosság

Ha $r_1, r_2 \neq 0$ és $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

**Bizonyítás:** $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow$
$r_1 \cdot r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1)i) \Leftrightarrow$
$\overset{\text{addíciós képletek}}{\Leftrightarrow} r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$