Leghosszabb monoton növekvő részsorozat

Feladat: Szeretnénk megtalálni egy n elemű számsorozat leghosszabb monoton növekvő részsorozatát (LMR)

M.O.: v1

- Visszavezethető a leghosszabb közös részsorozatra
  - legyen a bemeneti tömb $T[1..n]$
  - másoljuk le $T'[1..n] \to$ ezt rendezzük (növekvőleg),
  - határozzuk meg T és T' egy leghosszabb közös részsorozatát

$\Downarrow$

az eredmény T LMR

- Költség:

másolás: $O(n)$, rendezés: $O(n \log n)$, LKR: összesen $\boxed{O(n^2)}$

Direkt DP m.o.

- Legyen T[1..n] a bemenet
- Ha egy T[j]-re végződő LMR utolsó előtti tagja T[i], akkor a sorozat T[i]-ig terjedő része LMR T[i]-re végződők közt
  - ha lenne T[i]-re végződő LMR között ennél hosszabb, akkor az eredeti T[i]-ig tartó szakaszát erre lecserélve, az eredetinél hosszabb LMR-t kapnánk (T[j]-re végződőt) ↯

(opt. részstruktúra tul.)

- jelölje $l[j]$ a $T[j]$-re végződő LMR elemszámának a maximumát $(0 \le j \le n)$
  - ha $j=0 \Rightarrow l[j]=0$
  - ha $1 \le j \le n$ és a $T[j]$-re végződő LMR utolsó előtti eleme $T[i]$, akkor az előzőek alapján $l[j] = 1 + l[i]$
    → ha nincs utolsó előtti elem, akkor $l[j] = 1$, ez akkor lehet, ha $T[j]$ kisebb az összes előtte lévő elemnél

$$l[j] := \begin{cases} 0, & \text{ha } j=0 \\ 1 + \max\{l[i] \mid 0 \le i \le j-1 \text{ és } T[i] \le T[j]\}, & \text{ha } j > 0 \end{cases}$$

→ legyen $T[0] = -\infty$

- a LMR hossza $L := \max\{l[j] \mid 1 \le j \le n\}$

— egy opt. m.o.

- $1 \leq j \leq n$ esetén $b[j]$ a $T[j]$-re végződő LNR utolsó előtti elemének indexe, B az utolsó elem indexe

— Költség: $\Theta(n^2)$

	0.								
→		$\boxed{1}$,	$\boxed{2}$,	$\boxed{5}$,	1,	3,	$\boxed{6}$,	2,	$\boxed{8}$
l	0	1	2	3	2	3	4,	3	5
b	—	0	1	2	1	2	3	2	6

$B = 8$

LNR: 1, 2, 5, 6, 8

Leghosszabb palindrom részsorozat

Egy $P[1..k]$ karakterláncot palindromnak nevezünk, ha balról jobbra és jobbról balra olvasva is ugyanaz, azaz

$$P[i] = P[k-i+1]$$

Pl.: ABBA, ABA

Feladat: adjunk hatékony algoritmust egy $S[1..n]$ karakterlánc leghosszabb palindrom részsorozatának (LPR) megtalálására

DP m. o.

- Opt. m. o. összetétele: legyen $S[1..n]$ karaktersorozat és $P[1..k]$ ennek egy LPR-a
  - ha $S[1] = S[n]$, akkor $P[1] = S[n] = P[k]$ és $P[2..k-1]$ egy LPR $S[2..n-1]$-nek
  - ha $S[1] \neq S[n]$ és $P[k] \neq S[n]$, akkor $P[1..k]$ LPR $S[1..n-1]$-nek
  - ha $S[1] \neq S[n]$ és $P[1] \neq S[1]$, akkor $P[1..k]$ LPR $S[2..n]$-nek $\Rightarrow$ opt. részstruktúra tul.

Biz.: jegyzet

– rekurzív m.o.:

- jelölje $l[i,j]$ az $S[i,j]$ karakterlánc LPR-nak a hosszát ($1 \le i \le j \le n$)
- ha $i=j \Rightarrow l[i,j]=1$
- ha $j=i+1 \Rightarrow$ ha $S[i]=S[j]$ esetén $l[i,j]=2$, egyébként 1

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & a & b & c & b & a & \dots & & \dots \\ & i & & & & j & & & \end{array}$$

$$l[i,j] = \begin{cases} l[i+1, j-1]+2, & \text{ha } S[i]=S[j] \\ \max\left(l[i+1,j], l[i, j-1]\right), & \text{ha } S[i] \ne S[j] \end{cases}$$

$l[1,n]$ opt. m.o. értéke

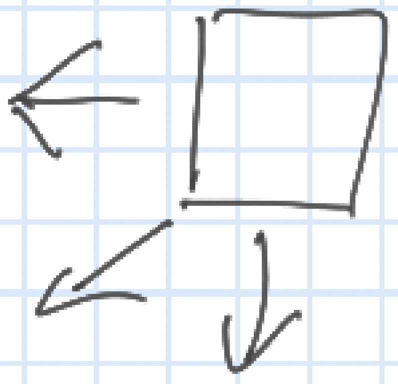
Költség: $O(n^2)$ cella, egy cella $O(1) \Rightarrow O(n^2)$ idő

② $j=i+1$

① $i=j$

egy opt. m.o.: jegyezzük fel, hogy honnan $l[i,j]$ értéke

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	B	A	D	C	D	C	A



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	↓1	↓3	↙5	←5	↓5	↓7	↓7	↙9
2		1	1	↙3	←3	↙3	↓5	↙7	←7	←7
3			1	1	↓1	↓3	↙5	←5	↙5	↓5
4				1	1	↙3	←3	↙3	↓3	↓5
5					1	1	↓1	↓3	↓3	↙5
6						1	1	↙3	↓3	↓3
7							1	1	↙3	←3
8								1	1	↓1
9									1	1
10										1