Függvények aszimptotikus viselkedése*

Vadász Péter

1 Fogalmak

Definíció 1.1. Aszimptotikusan pozitív függvény: Egy f függvény aszimptotikusan pozitív, ha $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N$ esetén $f(n) > 0$

Definíció 1.2. O, Ω, Θ Adott $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ aszimptotikusan pozitív függvények, definiáljuk a következő függvényhalmazokat:

- $O(g) = \{f | \exists c > 0 \wedge N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } f(n) \leq c * g(n)\}$

  f-nek g aszimptotikus felső korlátja (f legfeljebb olyan gyorsan nő, mint g), ha $f \in O(g)$

- $\Omega(g) = \{f | \exists c > 0 \wedge N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } c * g(n) \leq f(n)\}$

  f-nek g aszimptotikus alsó korlátja, ha $f \in \Omega(g)$

- $\Theta(g) = \{f | \exists c_1, c_2 > 0 \wedge N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)\}$

  f-nek g aszimptotikus éles korlátja, ha $f \in \Theta(g)$

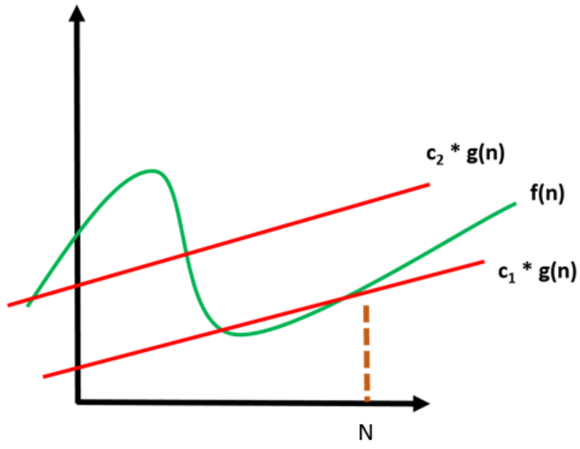
Definíció 1.3. Aszimptotikusan kisebb függvény: Adott $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények, ekkor f aszimptotikusan kisebb, mint g azaz $f \prec g \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Ha f, g aszimptotikusan pozitív akkor $f \prec g \iff f \in o(g)$, azaz $o(g) = \{f | f \prec g\}$

Definíció 1.4. Aszimptotikusan nagyobb függvény: Adott $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények, ekkor f aszimptotikusan nagyobb, mint g azaz $f \succ g \iff g \prec f$.

Ha f, g aszimptotikusan pozitív akkor $f \succ g \iff f \in \omega(g)$, azaz $\omega(g) = \{f | f \succ g\}$

*A jegyzet Veszprémi Anna, Dr Tichler Krisztián, Dr Ásványi Tibor anyagai alapján készült



Ábra 1.: $f \in \Theta(g)$

1.1 Tulajdonságok

Az alábbiakban legyenek f, g, h aszimptotikusan pozitív függvények!

- $\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$
- $o(g) \subset O(g) \setminus \Omega(g)$
- $\omega(g) \subset \Omega(g) \setminus O(g)$
- ha $f \in O(g)$ és $g \in O(h)$, akkor $f \in O(h)$ (tranzitivitás, Ω és Θ esetén is teljesül)
- $f \in \Theta(g) \iff g \in \Theta(f)$ (szimmetria)
- $f \in O(g) \iff g \in \Omega(f)$ (felcserélt szimmetria)
- $f \in O(f)$ és $f \in \Omega(f)$ és $f \in \Theta(f)$ (reflexivitás)
- ha $f, g \in O(h)$, akkor $f + g \in O(h)$ (Ω és Θ esetén is)
- $f + g \in \Theta(\max\{f, g\})$
- Ha $f \in O(h_1)$ és $g \in O(h_2)$, akkor $f * g \in O(h_1 * h_2)$

Tétel 1.1. Az f, g aszimptotikusan pozitív függvényekre:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \prec g \Rightarrow f \in o(g) \Rightarrow f \in O(g) \wedge f \notin \Omega(g)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \in \mathbb{P} \Rightarrow f \in \Theta(g)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f \succ g \Rightarrow f \in \omega(g) \Rightarrow f \in \Omega(g) \wedge f \notin O(g)$$

1.2 Konkrét függvények

- Ha $P(n) = a_k n^k + \cdots + a_0$ $(a_k > 0)$, akkor $P(n) \in O(n^k)$, illetve $P(n) \in \Theta(n^k)$
- Minden $P(n)$ polinomra és $c > 1$ konstansra $P(n) \in O(c^n)$, de $P(n) \notin \Omega(c^n)$
- Minden $c > d > 1$ konstansokra $d^n \in O(c^n)$, de $d^n \notin \Omega(c^n)$
- Minden $a, b > 1$ esetén $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ (1-nél nagyobb alapú logaritmus függvények aszimptotikusan egyenértékűek)
- $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$
- Ha $c, d \in \mathbb{R}$ és $c < d$, akkor $n^c \prec n^d$
- Ha $c \in \mathbb{P}_0$, akkor $c^n \prec n! \prec n^n$
- Ha $c \in \mathbb{P}$, akkor $\log n \prec n^c$
- Ha $c \in \mathbb{R}$ és $d \in \mathbb{P}$, akkor $n^c \log n \prec n^{c+d}$

Példa aszimptotikusan pozitív függvények nagyságrendjére
$\log n \prec \sqrt{n} \prec n \prec n \log n \prec n^2 \prec n^2 \log n \prec n^3 \prec 2^n \prec n!$

2 Feladatok

1. feladat: Adjunk meg olyan f és g aszimptotikusan pozitív függvényt, melyekre $f \in O(g) \wedge f \notin \Omega(g)$

Legyen $f(n) = 3n + 2$, $g(n) = 2n^2 + 3$

Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek O definíciójának feltételei

$3n + 2 \leq 4n^2 + 6 = 2 * g(n)$. A definíció szerint $c = 2, n \geq N = 1$ választással nyilván $f \in O(g)$.

Ezután ellenőrizzük, hogy $f \notin \Omega(g)$:

Feltételezve, hogy $f \in \Omega(g)$, $g \in O(f)$ is teljesül. Akkor pedig van olyan $c > 0$ konstans, hogy elég nagy n értékekre

$$2n^2 + 3 \leq c * (3n + 2), \text{ azaz } \frac{2n^2 + 3}{3n + 2} \leq c$$

Számítsuk ki az egyenlőtlenség baloldalán lévő tört határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3}{3n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{n^2}{n} + \frac{3}{n}}{3\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n + \frac{3}{n} \to \infty + 0}{3 + \frac{2}{n} \to 3 + 0} = \infty$$

Azt látjuk, hogy a tört nem korlátos (∞ a határértéke), tehát nem lehet kisebb-egyenlő c-nél, ami azt jelenti, hogy $f \notin \Omega(g)$

Megjegyzés: a határérték kiszámolásakor figyelembe vettük, hogy $\frac{polinom}{polinom}$ alakú törtünk van, ebben az esetben a határérték kiszámításához célszerű a nevezőben található polinom domináns tagjával osztani a teljes kifejezést.

2. feladat: Igazoljuk O tranzitivitását!

Legyenek $f, g, h : \mathbb{N} \to R_0^+$ függvények:

$$f \in O(g) : \exists c_1 > 0, N_1 \in \mathbb{N} \text{ hogy } \forall n \geq N_1 \text{ esetén } f(n) \leq c_1 * g(n)$$

$$g \in O(h) : \exists c_2 > 0, N_2 \in \mathbb{N} \text{ hogy } \forall n \geq N_2 \text{ esetén } g(n) \leq c_2 * h(n)$$

A fentiek miatt:

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \text{ esetén } f(n) \leq c_1 * g(n) \leq c_1 * c_2 * h(n)$$

Mivel $c_1, c_2 > 0 \Rightarrow c_1 * c_2 > 0$, azaz $f \in O(h)$

3. feladat: Hasonlítsuk össze a következő függvényeket! Hogyan viszonyulnak egymáshoz aszimptotikusan?

$f(n) = 5 * 2^n + n^3$

$g(n) = 3^n + 2n$

Azt sejtjük, hogy $f \prec g$, ennek igazolásához számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 * 2^n + n^3}{3^n + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 * (\frac{2}{3})^n + \frac{n^3}{3^n} \to 0 + 0}{1 + 2\frac{n}{3^n} \to 1 + 0} = 0$$

A határéték 0, tehát az **1.1 tétel** értelmében $f \prec g$, azaz (figyelembe véve, hogy f és g [aszimptotikusan] pozitív függvények) $f \in o(g) \subset O(g) \setminus \Omega(g)$

Megjegyzés: a határérték kiszámításakor a korábbiakhoz hasonlóan a nevezőben található legnagyobb hatványalapú taggal oszottunk le.

4. feladat: Igazoljuk, a következő állításokat!

1. $P(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ $(a_k > 0)$ esetén $P(n) \in \Theta(n^k)$
2. Ha $c > d > 1$, akkor $d^n \in O(c^n)$
3. Minden $a, b > 1$ esetén $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$

1.
$$\frac{P(n)}{n^k} = \frac{a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0}{n^k} = a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_0\frac{1}{n^k} \to a_k$$

   Mivel $(a_k > 0)$ az **1.1 tétel** szerint $P(n) \in \Theta(n^k)$

2. ha $c > d > 1$, akkor:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{d^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{c}{d})^n = \infty$$

   Így a **1.1 tétel** alapján $d^n \in O(c^n) \setminus \Omega(c^n)$

3. Áttérés a alapú logaritmusra:
$$\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}$$
$$\log_a n = \log_a b * \log_b n$$

   Az utóbbi kifejezésben $\log_a b$ konstans, tehát $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$

5. feladat: Igazoljuk Θ szimmetriáját!

Ha $f \in \Theta(g)$, akkor $\exists c_1, c_2 > 0$ és $N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N : c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$
Ekkor azonban:

$$\forall n \geq N : \frac{1}{c_2} * f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} * f(n)$$

6. feladat: Adottak a következő függvények. Rendezzük őket aszimptotikusan növekvő sorrendbe, határozzuk meg az egyes függvének nagyságrendjét is!

$log_3(n!)$, $n^{1.01} + 3\sqrt{n}$, $n^{0.03} + 2\ln n$, $(\frac{2}{3})^n$, $100n^{100} + 3^n$, $3^n + 2^n$, $4\log_{17}(n+5)$, $n!$, $n^{3/2}$

Függvény	Nagyságrend	Sorszám
$log_3(n!)$	$\Theta(n \log n)$	4
$n^{1.01} + 3\sqrt{n}$	$\Theta(n^{1.01})$	5
$n^{0.03} + 2\ln n$	$\Theta(n^{0.03})$	3
$(\frac{2}{3})^n$	$\Theta(\frac{2}{3})^n$	1
$100n^{100} + 3^n$	$\Theta(3^n)$	7-8
$3^n + 2^n$	$\Theta(3^n)$	7-8
$4\log_{17}(n+5)$	$\Theta(\log(n))$	2
$n!$	$\Theta(n!)$	9
$n^{3/2}$	$\Theta(n^{3/2})$	6

7. feladat: Adottak a következő függvények. Rendezzük őket aszimptotikusan növekvő sorrendbe, határozzuk meg az egyes függvének nagyságrendjét is!

$n^4 - 1$, $n\ln(n+1)$, $\log_{10} 2^n$, $(n+1)\log_2 n$, $100n^2 + 2n$, $5\sqrt{n} - 100$, $5n^{1/3} + \ln n$

Függvény	Nagyságrend	Sorszám
$n^4 - 1$	$\Theta(n^4)$	7
$n\ln(n+1)$	$\Theta(n \log n)$	4-5
$\log_{10} 2^n = n\log_{10} 2$	$\Theta(n)$	3
$(n+1)\log_2 n$	$\Theta(n \log n)$	4-5
$100n^2 + 2n$	$\Theta(n^2)$	6
$5\sqrt{n} - 100$	$\Theta(\sqrt{n})$	2
$5n^{1/3} + \ln n$	$\Theta(n^{1/3})$	1

8. feladat: Adottak a következő algoritmusok és ezek költsége. Számítsuk ki, hogy különféle inputméretek esetén nagyságrendileg mennyi ideig tartana az algoritmusok futása, ha a számítógépünk processzorának órajele $4GHz$.

- Bináris keresés: $\Theta(\log n)$
- Prímszámteszt: $\Theta(\sqrt{n})$

- Maximumkiválasztás (rendezetlen tömb esetén): $\Theta(n)$
- Összefésülő rendezés: $\Theta(n \log n)$
- Buborékrendezés: $\Theta(n^2)$
- Floyd-Warshall algoritmus, CYK algoritmus: $\Theta(n^3)$
- Hanoi tornyai: $\Theta(2^n)$
- Utazóügynök probléma megoldása brute-force módszerrel: $\Theta(n!)$

Ha a processzor órajele $4GHz$ az azt jelenti, hogy egy másodperc alatt $4 * 10^9$ művelet elvégzésére képes. A Θ jelölésben elrejtett konstans szorzókat a számításokban 1-nek tekintjük.

input	$\log n$ (ns)	$\sqrt{n}$ (ns)	n (μs)	$n \log n$ (μs)	n^2 (ms)	n^3 (s)	2^n (év)	$n!$ (év)
10	0.83	0.79	0.0025	0.0083	0.000025	0.25 (μs)	0.26 (μs)	0.91 (ms)
100	1.66	2.5	0.025	0.17	0.0025	0.00025	$1.01{*}10^{13}$	$7.84{*}10^{140}$
1000	2.49	7.9	0.25	2.49	0.25	0.25	$8.52{*}10^{283}$	$3.2{*}10^{2549}$
10^6	4.98	250	250	4982	250000	$2.5{*}10^8$	-	-

Látható, hogy legtöbb esetben már 1000 elemre domináns az aszimptotikus nagyságrend alapján kijövő érték a Θ jelölésben elrejtett esetleges nagyobb konstans szorzóhoz képest. Egymillió elemnél pedig már mindenütt olyan nagy a nagyobb/kisebb nagyságrendek hányadosa, ami nehezen lenne ellensúlyozható kedvezőbb konstans szorzókkal.