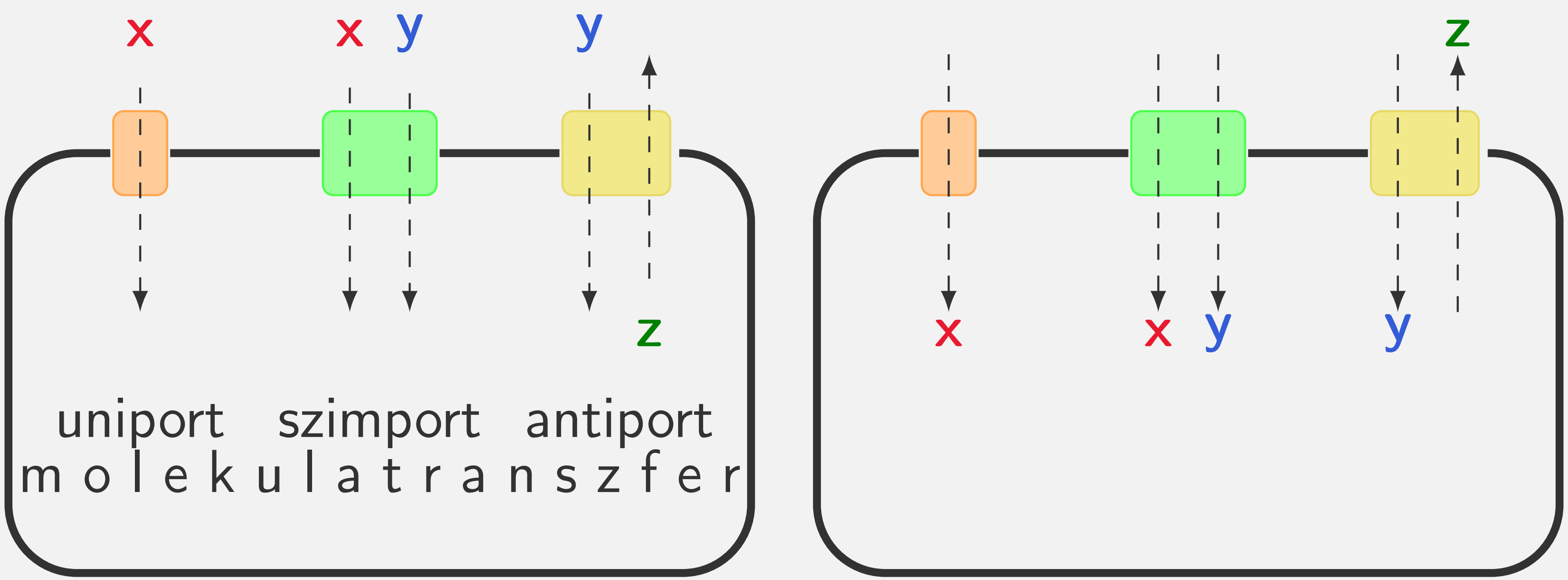
Számítási modellek

9. előadás

Szimport/antiport P-rendszerek

A szimport/antiport P-rendszer egy olyan bio-inspirált számítási modell, melyben az objektumok nem íródhatnak át, csak mozognak a hierarchikus membránstruktúra membránjai által elválasztott különböző régiók között.

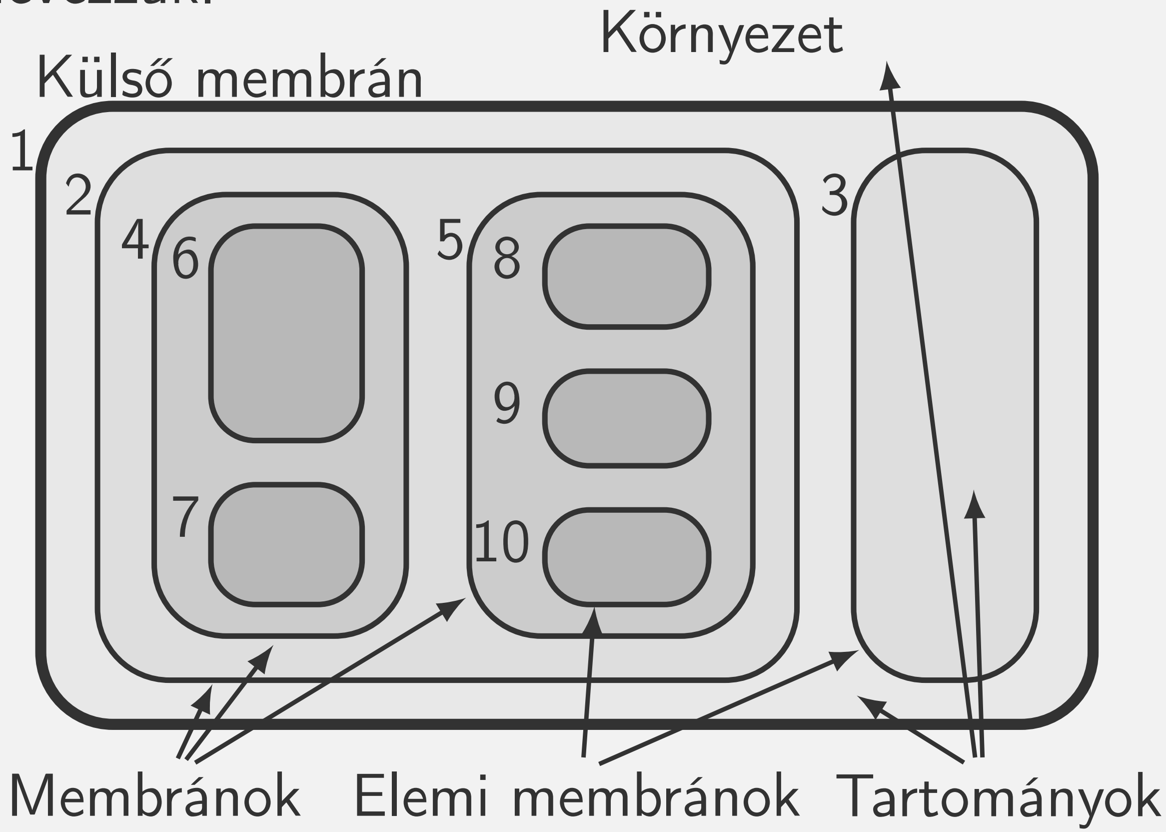
Motiváció: Egy élő sejt membránja gátolja a molekulák szabad mozgását. Ugyanakkor lehetőség van szállítóproteinek segítségével különféle fehérjetranszferekre. A különféle transzferek lehetnek uniport, szimport, antiport típusúak.

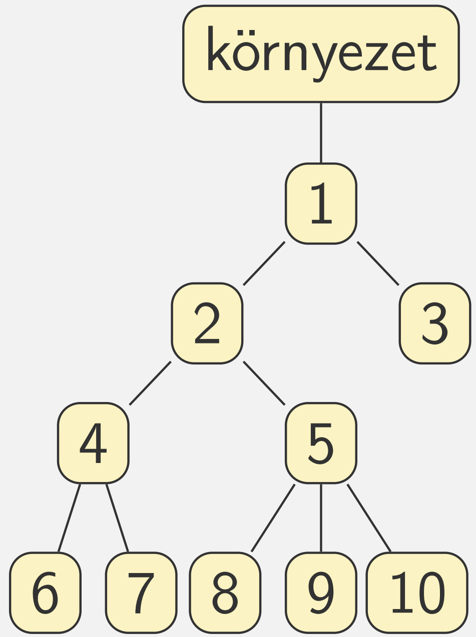


x, y, z molekulák

Szimport/antiport P-rendszerek – alapfogalmak

A **membránok** fa struktúrájú hierarchiát alkotnak. Egyrészt minden membránt – a **külső membrán** kivételével – egyetlen másik membrán által határolt **régió** vesz körül, másrészt őmaga több membránt is tartalmazhat. Amennyiben egyet se tartalmaz **elemi membránnak** nezezzük. A külső membránt a **környezet** veszi körül. A régiókat és a környezetet együtt **tartományoknak** nevezzük.





Szimport/antiport P-rendszerek – szabályok

Legyenek $x, y \in O^+$ multihalmazokat reprezentáló objektumokból álló sztringek. Az objektumok tartományok közötti mozgása az alábbi szabályok szerint történhet:

- (x, in): az x multihalmaz a membránt körülvevő tartományból a membrán által határolt tartományba mozog (szimport szabály). A szabály súlya $|x|$.
- (x, out): az x multihalmaz a membrán által határolt tartományból a membránt körülvevő tartományba mozog (szimport szabály). A szabály súlya $|x|$.
- $(x, \text{in}; y, \text{out})$: az x multihalmaz a membránt körülvevő tartományból a membrán által határolt tartományba, míg az y multihalmaz a membrán által határolt tartományból a membránt körülvevő tartományba mozog (antiport szabály). A szabály súlya $\max\{|x|, |y|\}$.

Megjegyzés: Az uniport molekulatranszferek leírhatók a szimport szabályok speciális eseteként. (x, in), ahol $|x| = 1$.

Szimport/antiport P-rendszerek

Definíció

A **szimport/antiport P-rendszer** egy rendezett
$\Pi = \langle O, \mu, E, \omega_1, \ldots, \omega_m, R_1, \ldots, R_m, i_o \rangle$ $(2m+4)$-es, ahol

- O egy ábécé (elemeit **objektumoknak** nevezzük).
- μ egy m membránból álló hierarchikus membránstruktúra. A membránok (és így a régiók is) $\{1, 2, \ldots, m\}$ elemeivel injektív módon vannak címkézve. m-et Π **fokának** nevezzük.
- $\omega_1, \ldots, \omega_m$ O feletti multihalmazokat reprezentáló sztringek, ezek rendre az $1, 2, \ldots, m$ címkéjű régióhoz vannak rendelve.
- $E \subseteq O$ a környezetben **korlátlanul** rendelkezésre álló objektumok halmaza.
- $R_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ μ i-edik membránjához rendelt szimport/antiport szabályok véges halmaza.
- $i_o \in \{1, 2, \ldots, m\}$ egy elemi membrán címkéje (**kimeneti membrán**)

Szimport/antiport P-rendszerek konfigurációi

Definíció

$(w_0, w_1, \ldots, w_m)$ a $\Pi = \langle O, \mu, E, \omega_1, \ldots, \omega_m, R_1, \ldots, R_m, i_o\rangle$ szimport/antiport rendszer **konfigurációja**, ahol $w_0 \in O^*$ a környezet $(O - E)$-beli objektumainak multihalmazát, $w_1, \ldots, w_m \in O^*$ pedig rendre az $1, \ldots, m$ régióbeli objektumok multihalmazait reprezezentáló sztringek.

$(w_0, w_1, \ldots, w_m)$ **kezdőkonfiguráció**, ha $w_0 = \varepsilon$ és $w_i = \omega_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

A szabályokat **maximálisan párhuzamos** módon kell alkalmazni. Ez pontosabban a következőket jelenti.

Szimport/antiport P-rendszer egylépéses konfigurációátmenete

Legyen M_i a w_i által reprezentált multihalmaz $(0 \leqslant i \leqslant m)$, M_0-hoz adjuk hozzá az E-beli objektumokat végtelen multiplicitással.

Egylépéses konfigurációátmenet: nemdeterminisztikusan válasszuk ki az alkalmazandó szabályok egy olyan véges $\mathcal{R}$ multihalmazát, amelyre a következő 2 feltétel teljesül.

(1) Az $\mathcal{R}$-beli szabályok együttesen alkalmazhatók, azaz az $\mathcal{R}$-beli szabályokra egymás után elvégezhetők az alábbi multihalmaz-kivonások:

- ha $(y,\text{out}) \in R_i \cap \mathcal{R}$ vagy $(x, \text{in} ; y,\text{out}) \in R_i \cap \mathcal{R}$: vonjuk ki az y által reprezentált multihalmazt M_i-ből
- ha $(x,\text{in}) \in R_j \cap \mathcal{R}$ vagy $(x, \text{in} ; y,\text{out}) \in R_j \cap \mathcal{R}$ ahol j az i. tartomány μ szerinti egyik gyereke: vonjuk ki az x által reprezentált multihalmazt M_i-ből

  [álljon a környezet a hierarchia csúcsán és legyen a külső membrán által határolt régió az ő egyetlen gyereke]

Szimport/antiport P-rendszer egylépéses konfigurációátmenete

(2) $\mathcal{R}$ nem bővíthető egyetlen szabály hozzáadásával sem, azaz ha M_i' $(0 \leqslant i \leqslant m)$ az iménti kivonások után kapott multihalmazok, akkor

- ha $(y,\text{out}) \in R_i \setminus \mathcal{R}$ akkor az y által reprezentált multihalmaz nem vonható ki M_i'-ből
- ha $(x,\text{in}) \in R_j \setminus \mathcal{R}$ és j az i. tartomány μ szerinti egyik gyereke akkor az x által reprezentált multihalmaz nem vonható ki M_i'-ből
- ha $(x,\text{in};\ y,\ \text{out}) \in R_j \setminus \mathcal{R}$ és j az i. tartomány μ szerinti gyereke akkor vagy az x által reprezentált multihalmaz nem vonható ki M_i'-ből vagy az y által reprezentált multihalmaz nem vonható ki M_j'-ből

Szimport/antiport P-rendszer egylépéses konfigurációátmenete

Az egylépéses konfigurációátmenet eredménye.

- ha $(y,\text{out}) \in R_i \cap \mathcal{R}$ akkor az y által reprezentált multihalmazt uniózzuk hozzá az i. régiót közvetlenül tartalmazó tartományban lévő multihalmazhoz
- ha $(x,\text{in}) \in R_j \cap \mathcal{R}$ és j az i. tartomány μ szerinti gyereke akkor az x által reprezentált multihalmazt uniózzuk hozzá M'_j-höz
- ha $(x,\text{in}; y, \text{out}) \in R_j \cap \mathcal{R}$ és j az i. tartomány μ szerinti gyereke akkor az x által reprezentált multihalmazt uniózzuk hozzá M'_j-höz, míg az y által reprezentált multihalmazt uniózzuk hozzá M'_i-höz.

Észrevétel: Ha a külső membrán egy (x,in) szimport szabályára $x \in E^+$ teljesül, akkor nem választható ki a feltételeknek eleget tevő véges maximális szabály-multihalmaz. Tehát feltehető, hogy ilyen szabályok nincsenek.

Szimport/antiport P-rendszerek számításai

Többlépéses konfigurációátmenet: A egylépéses konfigurációátmenet reflexív, tranzitív lezártja.

Jelölés: $\Rightarrow_\Pi$ jelöli az egylépéses, $\Rightarrow_\Pi^*$ a többlépéses konfigurációátmenet relációt.

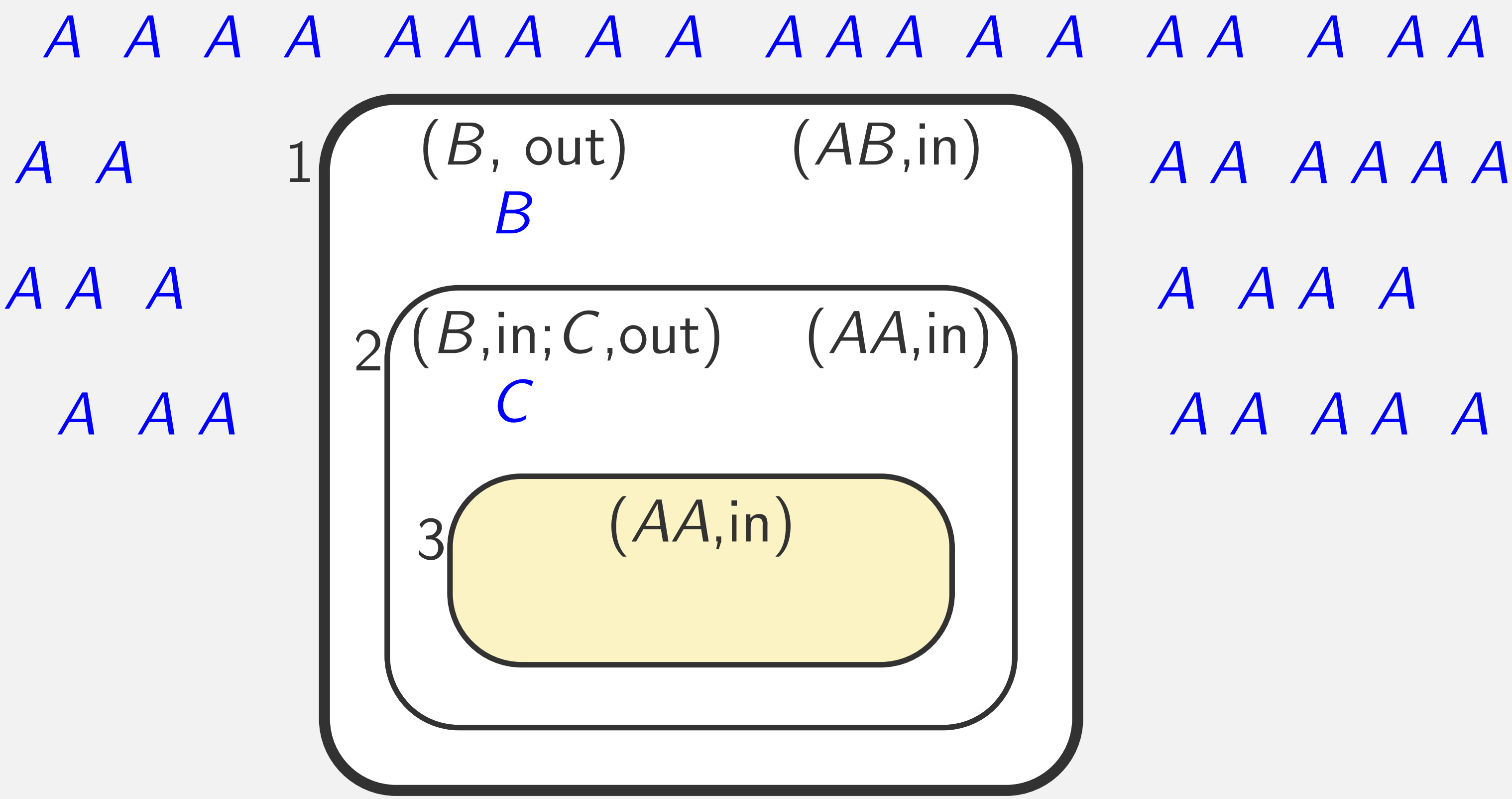
Megállási konfiguráció: olyan konfigurácó, amelyre további szabály nem alkalmazható.

A Π szimport/antiport rendszer egy (termináló) **számítása** egy többlépéses konfigurációátmenet sorozat a kezdőkonfigurációból valamely megállási konfigurációba.

A Π szimport/antiport rendszer egy számításának **eredménye** bármely megállási konfiguráció esetén az i_o kimeneti membránban lévő objektumok száma. (*Alternatív eredményszámítás:* az objektumok (objektumtípus szerinti) számvektora.)

A Π által **generált nyelv** a lehetséges termináló számítások eredményeinek $N(\Pi)$ halmaza. Nyilván $N(\Pi) \subseteq \mathbb{N}$.

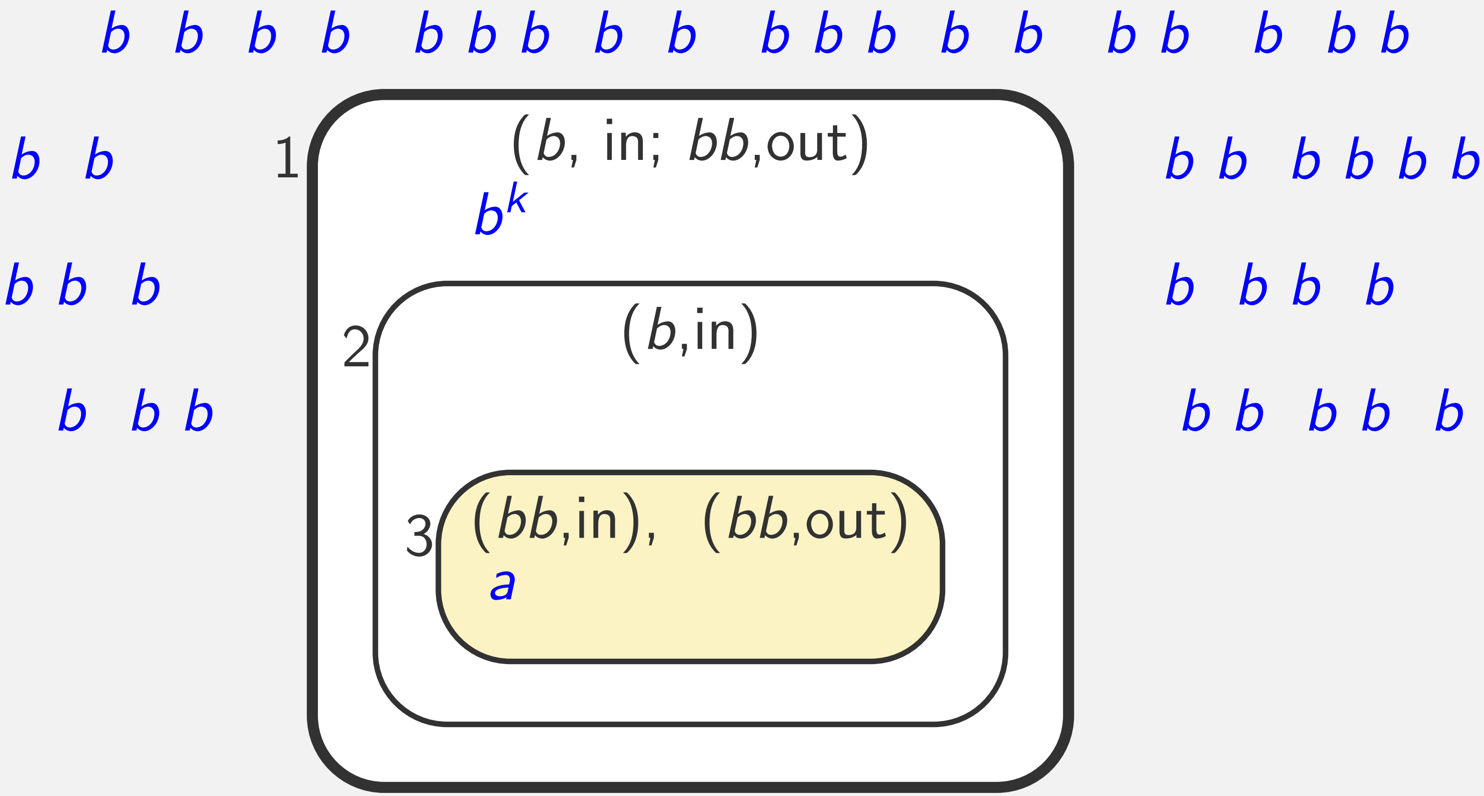
Szimport/antiport P-rendszer – 1. példa



Egy lehetséges számítás:

$(\varepsilon, B, C, \varepsilon) \vdash (B, \varepsilon, C, \varepsilon) \vdash (\varepsilon, AB, C, \varepsilon) \vdash (B, A, C, \varepsilon) \vdash$
$(\varepsilon, AAB, C, \varepsilon) \vdash (B, \varepsilon, AAC, \varepsilon) \vdash (\varepsilon, AB, C, AA) \vdash$
$(B, A, C, AA) \vdash (\varepsilon, AAB, C, AA) \vdash (\varepsilon, C, AAB, AA) \vdash$
$(\varepsilon, C, B, AAAA)$
$N(\Pi) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Szimport/antiport P-rendszer – 2. példa



Példa: $(\varepsilon, b^{12}, \varepsilon, a) \vdash (\varepsilon, b^6, \varepsilon, a) \vdash (\varepsilon, b^3, \varepsilon, a) \vdash (\varepsilon, b, b, a) \vdash$ $(\varepsilon, \varepsilon, b^2, a) \vdash (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ab^2) \vdash (\varepsilon, \varepsilon, b^2, a) \vdash \ldots$ (nem áll meg)

Pontosan akkor van leálló számítás, ha k 2-hatvány. Más k-ra a maximális párhuzamosság elve miatt legalább két b mindig bekerül a 2-es membránba, ezek ki-be fognak közlekedni a 3-as membránon.

$N(\Pi) = \{1\}$, ha k 2-hatvány, $N(\Pi) = \emptyset$, ha k nem 2-hatvány.

Szimport/antiport P-rendszerek foka és súlya

A **szimport/antiport rendszer foka** a régióinak száma.

A **szimport/antiport rendszer súlya** a rendszerben szereplő szimport és antiport szabályok maximális súlyai által adott számpár.

Példa: Az előző példa egy (2,1) súlyú 3-adfokú rendszer.

Ha a rendszer nem tartalmaz szimport illetve antiport szabályt, akkor a megfelelő maximumot 0-nak értelmezzük.

$\mathrm{NOP}_m(\mathrm{sym}\ p, \mathrm{anti}\ q)$ jelöli a természetes számok azon halmazainak családját, amelyeket egy legfeljebb m-edfokú $(m \geqslant 1)$ legfeljebb p súlyú szimport és legfeljebb q súlyú antiport szabályokat használó szimport/antiport P-rendszer generál.

Ha az m, p, q paraméterek valamelyike nem korlátos, akkor a megfelelő paraméter helyére $*$-ot írunk.

Szimport/antiport P-rendszerek univerzalitása

NFIN:=$\{S \subseteq \mathbb{N} \mid S$ véges$\}$.

Tétel

$\mathrm{NOP}_1(\mathrm{sym}\ 1,\ \mathrm{anti}\ 1) \subseteq \mathrm{NFIN}$

Tétel

$\mathrm{NOP}_1(\mathrm{sym}\ 2,\ \mathrm{anti}\ 0) \subseteq \mathrm{NFIN}$

Tétel (Frisco, Hoogeboom,2004)

$\mathrm{NOP}_1(\mathrm{sym}\ 1,\ \mathrm{anti}\ 2) = \mathrm{NRE}$

Tétel (Frisco, Hoogeboom,2004)

$\mathrm{NOP}_3(\mathrm{sym}\ 2,\ \mathrm{anti}\ 0) = \mathrm{NRE}$

Tétel (Martín-Vide, A. Păun, Gh. Păun, 2002)

$\mathrm{NOP}_2(\mathrm{sym}\ 3,\ \mathrm{anti}\ 0) = \mathrm{NRE}$

Szimport/antiport P-rendszerek univerzalitása

NRE':=$\{S\setminus\{0\} \mid S \in$ NRE$\}$

Tétel (Freund, A. Păun, 2002)

NOP_3(sym 0, anti 2)=NRE'.

Megjegyzés: Egyedül antiport szabályokkal nem kapható meg a 0, kivéve ha a kimeneti membránnak nincs szabálya, de akkor meg csak a 0 kapható meg.

Tétel (Vaszil Gy., 2004)

NOP_3(sym 1, anti 1)=NRE

(ezeket a tételeket nem bizonyítjuk)

Aktív membránrendszerek szabályai

Ebben a számítási modellben a membránoknak lehet egy $\alpha \in \{+, 0, -\}$ **töltése**. A h. membrán α töltöttségét $[_h\ ]_h^\alpha$ jelöli, a semleges, 0 töltést gyakran nem írjuk ki. A szabályok típusai a következők ($a, b \in V, v \in V^*, \alpha, \alpha_1, \ldots \in \{+, 0, -\}, h, h_1, \ldots$ membráncímkék)

(a) $[_h\, a \to v\,]_h^\alpha$

Membránon belüli evolúciós szabály. Nincs hatása a membránra.

(b) $a\, [_h\ ]_h^{\alpha_1} \to [_h\, b\,]_h^{\alpha_2}$

Befelé irányuló kommunikációs szabály. Objektum bevitele a h. membránon át, megváltozhat maga az objektum illetve a membrán töltése, a membrán címkéje változatlan.

(c) $[_h\, a\,]_h^{\alpha_1} \to [_h\ ]_h^{\alpha_2}\, b$

Kifelé irányuló kommunikációs szabály. Objektum kivitele a h. membránon át, megváltozhat maga az objektum illetve a membrán töltése, a membrán címkéje változatlan.

Aktív membránrendszerek szabályai

(d) $[_h\, a\,]_h^{\alpha} \to b$

Feloldó szabály. Az objektummal való reakció következtében a membrán feloldódhat, ilyenkor a reakció hatására esetleg megváltozott objektum minden egyéb feloldott membránbeli objektummal a szülő membránba kerül.

(e) $[_h\, a\,]_h^{\alpha_1} \to [_h\, b\,]_h^{\alpha_2} [_h\, c\,]_h^{\alpha_3}$

Elemi membránok kettéosztására vonatkozó szabály. Az objektummal való reakció eredményeképpen a membrán két membránná válik szét, a membránok címkéi nem változnak, a polarizációjuk viszont módosulhat.

A membrán minden más objektuma 1-1 példányban átmásolódik az új membránokba. (A szabályban specifikált objektumot lehetőleg új objektumokkal helyettesítjük a két új membránban.)

Megjegyzés: Néha elemi membránok d-felé ($d \geqslant 2$) osztódására vonatkozó szabályokat is megengedünk.

Aktív membránrendszerek szabályai

(f) $[_h \; [_{h_1}]_{h_1}^{+} \cdots [_{h_k}]_{h_k}^{+} \; [_{h_{k+1}}]_{h_{k+1}}^{-} \cdots [_{h_\ell}]_{h_\ell}^{-} \;]_h^{\alpha_1} \rightarrow$

$$[_h \; [_{h_1}]_{h_1}^{\alpha} \cdots [_{h_k}]_{h_k}^{\alpha} \;]_h^{\alpha_2} \quad [_h \; [_{h_{k+1}}]_{h_{k+1}}^{\beta} \cdots [_{h_\ell}]_{h_\ell}^{\beta} \;]_h^{\alpha_3}$$

$(0 < k < \ell, \alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{+, 0, -\}, h, h_1, \ldots, h_\ell \in H.)$

Nem elemi membránok polarizáció alapján történő kettéosztására vonatkozó szabály.

A szabály alkalmazása: h-ban lehetnek $[_{h_{\ell+1}}]_{h_{\ell+1}}^{0} \cdots [_{h_n}]_{h_n}^{0}$ további 0 polaritású membránok és objektumok, ilyenkor ezek az osztódásnál **mindkét** új membránba bekerülnek.

Az ellentétes polarizációjú membránok két új membránba kerülnek, polarizációjuk megváltozhat. Ellentétes polarizációjú membránokat **(f)** típusú szabály alkalmazásával lehet elkülöníteni.

Észrevétel: Vegyük észre, hogy ebben a számítási modellben a membránstruktúra nem állandó és a membránok címkéi nem egyediek (lásd **(e)** és **(f)**), előfordulhat, hogy egy adott szabályt az aktuális membránstruktúra több pontján is alkalmazni lehet.

Aktív membránrendszerek

Definíció

Aktív P rendszernek nevezzük a $\Pi = \langle V, H, \mu, \omega_1, \ldots, \omega_m, R\rangle$ $(m \geqslant 1)$ konstrukciót, ahol

- V objektumok nemüres, véges halmaza, a rendszer ábécéje;
- H a membránok címkéinek véges halmaza;
- μ a membránstruktúra, amely m membránból áll, ahol a membránok $1, 2, \ldots, m$ elemeivel nem feltétlenül injektív módon vannak címkézve; feltesszük, hogy μ minden membránja semleges polarizációjú (töltésű);
- $\omega_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, olyan V feletti sztringek, amelyek objektumokból álló multihalmazokat reprezentálnak és μ m darab régiójához vannak rendelve;
- R a fenti (a)-(f) típusú szabályokból álló szabályrendszer.

Aktív P-rendszerek – maximális párhuzamosság

A szabályok alkalmazása nemdeterminisztikus módon maximálisan párhuzamos működési módban történik, melyet a következőképpen értelmezünk:

Minden egyes membrán és minden egyes objektum konfigurációátmenetenként **csak egyetlen** szabályban vehet részt.

Tehát membránon belül az objektumok szokásos módon, maximális párhuzamossággal evolválódnak az **(a)** típusú szabályok szerint, ezen szabályok alkalmazásával ugyanis nem halad át egyetlen objektum sem membránon.

Minden egyes membrán a **(b)-(f)** típusú szabályok közül összesen csak egyszer lehet érintett.

Egy ilyen egylépéses konfigurációátmenetben a kijelölt szabályok végrehajtását az **(a)** típusú evolúciós szabályokkal kell kezdeni. Ez a feloldódó membránok miatt fontos. Bottom-up végrehajtás van, a membránhierarchiában a levelektől a gyökérig.

Aktív P-rendszerek – maximális párhuzamosság

Nem létezhet olyan szabály, melyet az adott lépésben alkalmazott szabály-multihalmazhoz hozzávéve a fentieket nem sértő szabály-multihalmazt kapnánk. Azaz, ha további objektumok tudnának még membránon belül evolválódni, vagy egy újabb membránnal történhetne (b)-(f) típusú lépés, akkor annak végre is kell hajtódnia.

Amikor egy membrán feloldódik, akkor a megszűnő membrán szabályai nem öröklődnek a szülő membránra. Az R szabályrendszer a működés során nem változik.

A legkülső membrán se osztódni, se feloldódni nem tud, de töltése lehet.

Aktív P-rendszerek – maximális párhuzamosság

1. Példa: A h membránon belül három a objektum van, ezek közül kettő az $[_h a \to b]_h^0$ szabállyal előbb b-vé evolválódhatnak, majd ugyanezen lépésben a $[_h\, a\,]_h^0 \to c$ szabállyal a h membrán még feloldódhat (a két b és a c a szülő membránba kerül), vagy a $[_h\, a\,]_h^0 \to [_h\, b\,]_h^0 [_h\, c\,]_h^0$ szabállyal kettéosztódhat (az egyik példányban három b, a másik példányban két b és egy c lesz).

2. példa: Egy h címkéjű membránban egyetlen a objektum van. Az $[_h a \to b]_h^0$ és $[_h\, b\,]_h^0 \to [_h\,]_h^+ c$ szabályokkal csak 2 lépésben lehet kivinni a végül c-vé alakuló objektumot (az objektumok és membránok szabályokhoz rendelése a lépések elején történik).

3. példa: A h címkéjű membránokra 4 szabály vonatkozik: $[_h a \to b]_h^0$, $[_h\, b\,]_h^0 \to [_h\,]_h^+ c$, $a\, [_h\,]_h^0 \to [_h\, b\,]_h^-$ és $[_h\, a\,]_h^0 \to c$. Megfelelő mennyiségű és fajtájú objektum rendelkezésre állása esetén egy h címkéjű membránra az első (akár több példányban) a másik 3 közül legfeljebb az egyikkel alkalmazható együtt. A második 3 szabály közül semmelyik 2 nem alkalmazható egyszerre ugyanazon membránra ugyanazon lépésben.

Aktív membránrendszerek konfigurációi

Definíció

$(\mu, w_1, \ldots, w_r)$ a $\Pi = \langle V, T, H, \mu, \omega_1, \ldots, \omega_m, R \rangle$ aktív P-rendszer **konfigurációja**, ahol μ az aktuális membránstruktúra r membránnal, $w_1, \ldots, w_r \in O^*$ pedig rendre az egyes membránok által határolt régiókban levő objektumok multihalmazát reprezezentáló sztring.

Definíció

$(\mu, w_1, \ldots, w_m)$ **kezdőkonfiguráció**, ha μ a kezdeti membránstruktúra és $w_i = \omega_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Definíció

Az **egylépéses konfigurációátmenet** relációt a fent ismertetettek alapján definiáljuk. Egy a kezdőkonfigurációból induló konfigurációátmenet sorozatot Π egy **számításnak** nevezzük.

Aktív membránrendszerek által generált nyelv

Definíció

Egy számítás **megállási konfigurációba** jutott, ha a számítás nem folytatható (nem alkalmazható további szabály).

Definíció

Π egy termináló számításának eredménye a megállásig környezetbe jutott szimbólumok száma. A Π által **generált nyelv** az így generált számok halmaza, melyet $N(\Pi)$-vel jelölünk.

Alternatívák:

- a környezetbe jutott objektumok típusonkénti vektora
- figyelembe vesszük a környezetbe jutás sorrendjét, így generálhatunk sztringeket is
- megkülönböztethetünk terminális objektumokat és csak ezeket számoljuk

Aktív membránrendszerek számítási ereje

NOP_m(aktív, **(a)**, **(b)**, **(c)**) jelöli a természetes számok halmazainak családját, amelyek $N(\Pi)$ alakúak és amelyeket egy legfeljebb m-edfokú ($m \geqslant 1$) aktív membránrendszer generál, a következő szabályokat használva: **(a)** objektumok evolúciós szabályai, **(b)** befelé irányuló kommunikációs szabályok és **(c)** kifelé irányuló kommunikációs szabályok.

Általában **(a)**, **(b)**, **(c)** helyett a megengedett szabálytípusok listája áll.

Az aktív membránrendszerek is Turing univerzálisak:

Tétel

NOP_3 (aktív, **(a)**, **(b)**, **(c)**) $=$ NRE

SAT lineáris időben

Tétel

A SAT probléma a változók és a klózok számának függvényében lineáris időben megoldható aktív P-rendszerrel a következő típusú szabályokat használva: **(a)** objektumok evolúciós szabályai, **(b)** (befelé irányuló) kommunikációs szabályok, **(c)** (kifelé irányuló) kommunikációs szabályok és **(e)** elemi membránok osztódását leíró szabályok (csak 2 részre osztódás).

Bizonyítás: Tekintsük az $\varphi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ n ítéletváltozót tartalmazó KNF-et, ahol $C_i = L_{i,1} \vee \cdots \vee L_{i,p_i}$ és $L_{i,j} \in \{X_k, \neg X_k \,|\, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant p_i)$.

Lineáris időben készítünk egy $O(n+m)$ lépésszámú $\Pi = \langle V, \{1,2\}, [_1[_2]_2^0]_1^0, \varepsilon, a_1 \cdots a_n d_0, R\rangle$ aktív P-rendszert, ahol

$$V = \{a_i t_i, f_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{r_i \,|\, 0 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{c_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant m+1\} \cup \{d_i \,|\, 0 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{\text{yes}\}$$

SAT lineáris időben

R szabályai:

(1) $[_2\, a_i\,]_2^0 \to [_2\, t_i\,]_2^0 [_2\, f_i\,]_2^0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$

(2) $[_2\, d_k \to d_{k+1}\,]_2^0\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2.$

(3) $[_2\, d_{n-1} \to d_n c_1\,]_2^0\,.$

(4) $[_2\, d_n\,]_2^0 \to [_2\,]_2^+ d_n.$

(5) $[_2\, t_i \to r_{j_1} \cdots r_{j_{k(i)}}]_2^+$, ha az X_i literált épp a $C_{j_1}, \ldots C_{j_{k(i)}}$ klózok tartalmazzák ($1 \leqslant i \leqslant n$).

(6) $[_2\, f_i \to r_{j_1} \cdots r_{j_{k(i)}}]_2^+$, ha a $\neg X_i$ literált épp a $C_{j_1}, \ldots C_{j_{k(i)}}$ klózok tartalmazzák ($1 \leqslant i \leqslant n$).

(7) $[_2\, r_1]_2^+ \to [_2\,]_2^- r_1\,.$

(8) $[_2\, c_i \to c_{i+1}]_2^-, \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$

(9) $[_2\, r_k \to r_{k-1}]_2^-, \quad (1 \leqslant k \leqslant m).$

(10) $r_1\, [_2\,]_2^- \to [_2\, r_0\,]_2^+$

(11) $[_2 c_{m+1}]_2^+ \to [_2\,]_2^+$ yes.

(12) $[_1$ yes $]_1^0 \to [_1\,]_1^0$ yes.

SAT lineáris időben

Belátjuk, hogy Π akkor és csak akkor küld legalább egy „yes”-t a környezetbe, ha φ kielégíthető.

d_i és c_i számlálók, az indexük révén történik a lépések számlálása.

(1)-(4): n lépésben létrejön 2^n membrán, minden változókiértékeléshez egy, d_i-nek az i indexe azt mutaja, hogy hány változó kapott értéket. Ha $i = n$, akkor egy c_1 is bekerül a membránokba.
Példa: ha $n = 2$, akkor a következőt kapjuk:
$[_1[_2 t_1 t_2 d_2 c_1]_2[_2 t_1 f_2 d_2 c_1]_2[_2 f_1 t_2 d_2 c_1]_2[_2 f_1 f_2 d_2 c_1]_2]_1$.
Ezek után d_n kikerül a 2-es membránokból és a polaritásuk $+$ lesz.

(5)-(6) után minden változókiértékelés membránja pontosan azon klózok r_i jelét tartalmazza, melyeket igazra értékel. Minden i-re r_i annyi példányban lesz jelen ahány literált igazzá tesz C_i-ben.

φ akkor és csak akkor kielégíthető, ha valamelyik membránban az összes r_i-ből van legalább egy példány.

SAT lineáris időben

(7)-(10): ellenőrzi a membránokra, hogy minden r_i benne van-e:

- Azok a membránok, amelyekben nincsen benne minden egyes r_i-nek legalább egy példánya előbb-utóbb blokkolódni fog (+ lesz a polaritása, és nem fog r_1-et tartalmazni).
- A még szóba jöhető membránok mindegyikéből pontosan 1 darab r_1 kerül ki az 1-es membránba.
- Ekkor minden r_i indexe eggyel csökken (így az i. lépésben az eredeti r_i-k jelenlétét ellenőrizzük). Lenullázza a többlet r_1 -ek indexét. c_i indexe eggyel nő.
- Mivel épp annyi negatív polaritású membrán van, mint r_1 az 1-es membránban, ezért ezek visszakerülnek a 2-es membránokba r_0-ként, újra $+$-ra állítva a polaritást.

(11)-(12): Ha a c számláló $m+1$-hez ér valamelyik 2-es membránban, az azt jelent, hogy minden r_i benne volt a membránban, a membránhoz tartozó interpretáció kielégíti φ-t. Ekkor a rendszer kiküld egy "yes" üzenetet a környezetbe.

Összesen lineáris, $n+2m+4$ iteráció van. □

Hamilton út lineáris időben

Tétel

A Hamilton-út probléma a gráf csúcsai számának függvényében lineáris időben megoldható aktív P-rendszerrel a következő típusú szabályokat használva: **(a)** objektumok evolúciós szabályai, **(b)** (befelé irányuló) kommunikációs szabályok, **(c)** (kifelé irányuló) kommunikációs szabályok és **(e)** elemi membránok osztódását leíró szabályok (többfelé osztódás is).

Bizonyítás: Legyen $G = (N, E)$ irányított gráf, ahol $n \geqslant 2$, és $N = \{1, 2, \ldots n\}$.
Konstruálunk egy $\Pi = (V, H, \mu, \varepsilon, dd_0, R)$, P-rendszert aktív membránokkal, ahol

$$V = \{a_i, b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{r_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n+1\} \cup \{c_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n+1\} \cup \{d_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 2n\} \cup \{d, \text{yes}\},$$

$H = \{1, 2\}$, $\mu = [_1\, [_2\,]_2^0\,]_1^0$, és R a követketkező szabályokat tartalmazza:

Hamilton út lineáris időben

(1) $[_2 d]_2^0 \to [_2 a_1]_2^0 \cdots [_2 a_n]_2^0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$

(2) $[_2 d_k \to d_{k+1}]_2^0, \quad (0 \leqslant k \leqslant 2n-2).$

(3) $[_2 d_{2n-1} \to d_{2n} c_1]_2^0,$

(4) $[_2 d_{2n}]_2^0 \to [_2\ ]_2^+ d_{2n}.$

(5) $[_2 a_i \to r_i b_i]_2^0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$

(6) $[_2 b_i]_2^0 \to [_2 a_{j_1}]_2^0 \cdots [_2 a_{j_k}]_2^0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j_1, \ldots, j_k \leqslant n),$
úgy, hogy éppen $(i, j_1), \ldots, (i, j_k)$ az i-ből kiinduló E-beli élek.

(7) $[_2 r_1]_2^+ \to [_2\ ]_2^- r_1$.

(8) $[_2 c_i \to c_{i+1}]_2^-, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$

(9) $[_2 r_i \to r_{i-1}]_2^-, \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$

(10) $r_1 [_2\ ]_2^- \to [_2 r_0]_2^+$

(11) $[_2 c_{n+1}]_2^+ \to [_2\ ]_2^+$ yes.

(12) $[_1$ yes $]_1^0 \to [_1\ ]_1^0$ yes.

Hamilton út lineáris időben

A d_i és c_i objektumok számlálók, a számítás végességét garantálják. Minden 2-es címkéjű objektumban a számítás során pontosan egy található belőlük és szinkronban számolnak.

Az (1)-es szabály létrehoz n darab 2-es membránt. Az a_i és b_i objektumok az i. csúcsot reprezentálják. Ha a_i b_i-re változik, akkor a következő ütemben i-ből kiinduló éleket keresünk.

Az alapötlet az, hogy (5)-(6) segítségével n hosszú sétákat állítunk elő minden lehetséges módon. Minden sétához tartozni fog egy saját 2-es membrán. Az r_i objektumok a séta korábbi csúcsai.

Hamilton út lineáris időben

Például ha $2 \to 3 \to 2 \to 5 \to 3$ egy séta és $n = 5$, akkor lesz olyan 2-es membrán, mely sorra a
$dd_0, a_2d_1, r_2b_2d_2, r_2a_3d_3, r_2r_3b_3d_4, r_2r_3a_2d_5, r_2^2r_3b_2d_6, \ldots r_2^2r_3^2r_5b_3d_{10}c_1$
által reprezentált objektum multihalmazt tartalmazza. A következő lépésben lesz a membrán polaritása $+$. Ezzel leáll a séta hosszabbítása és jön az ellenőrző fázis.

Végül a (7)-(12) szabályok a SAT-nál látott módon ellenőrzik, hogy van-e olyan 2-es membrán, amelyik mindegyik r_i-t tartalmazza. Ha van, akkor egy „yes" üzenetet kap a környezet legfeljebb $4n + 3$ ütem után. $\square$

Megjegyzés: Ha membránokat akárhány helyett csak 2 részre osztó szabályokat használhatunk, akkor a konstrukció módosítása $O(n^2)$ lépésben dönti el a Hamilton út problémát.