Inverziók száma

Adott számok egy $A[1..n]$ tömbje $1 \leq i < j \leq n$ esetén (i,j) az A tömb egy inverziója, ha $A[i] > A[j]$

Pl.: $[2, 5, 1, 3, 0]$

$2: 1, 0 \longrightarrow 2$

$5: 1, 3, 0 \longrightarrow 3$

$1: 0 \longrightarrow 1$

$3: 0 \longrightarrow 1$

$\sum 7$

$A[1..n]$ esetén legy I az inverziók száma

$$0 \leq I \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

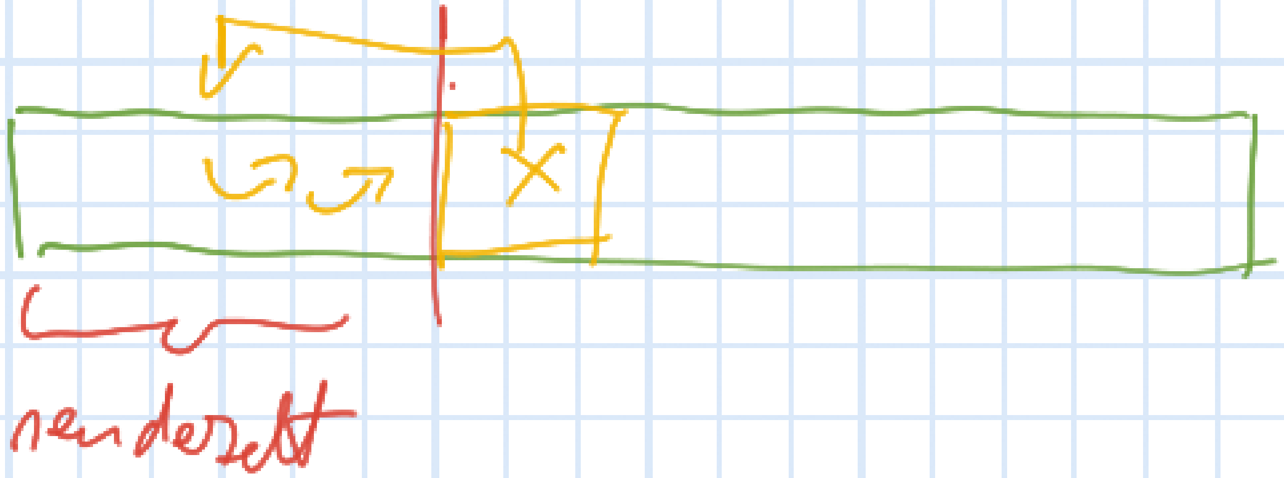
növekvően rendezett

csökkenően rendezett

Naiv m.o. beszúró rendezés alapján

Fenntart egy rendezett és egy rendezetlen résztömböt

- minden lépésben a rendezetlen rész első elemét elhelyezi a rendezettben



- Számoljuk meg, hogy hány jobbra mozgatás volt a rendezés során => inverziószám

Költség: „kicsi" I esetén $O(n)$

„nagy" I esetén $O(n^2)$

<u>Hatékonyabb m.o.:</u> oszd meg és uralkodj m.o.
merge sort átalakítása

- $A[1..n]$ tömböt két résztömbre osztjuk $A[1..q]$ és $A[q+1..n]$, ahol $q = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$
- Rekurzívan meghatározzuk a résztömbök inverzió számát
- Meghatározzuk (i', j') inverziókat, amelyekre $1 \le i' \le q < j' \le n$
  - összefésülés során
  - fontos, hogy $A[1..q]$ és $A[q+1..n]$ rendezett

- Tfh $A[p..q]$ résztömb $A[i']$ és $A[q+1..r]$ résztömb $A[j']$ elemét hasonlítjuk
  $(p \le i' \le q < j' \le r)$
  - tfh minden inverziót felderítettünk, melynek első eleme p és $i'-1$ közötti, második eleme $q+1$ és $j'-1$ közötti
    ↳ ha $A[i'] < A[j']$, mivel $A[j'] < A[j'+1] \dots < A[r]$
      ⇒ nem találunk inverziót
    ↳ ha $A[i'] > A[j']$, akkor $A[q] > \dots > A[i'+1] > A[i']$ miatt $(i', j'), (i'+1, j') \dots (q, j')$ eddig nem látott inverziók
      ⇒ $q - i' + 1$ db új inverzió

Költség: $O(n \log n)$

Maximális növekedés

Adott valós számok $A[1..n]$ tömbje. Adjunk algoritmust, amely meghatároz két olyan indexet $1 \le i \le j \le n$, melyekre $A[j] - A[i]$ maximális

- Oszd meg és uralkodj algoritmus
  - két résztömbre osztjuk A-t: $A[1..q]$ és $A[q+1..n]$
  - rekurzívan megoldjuk a problémát

    $A[1..q]$-ban $\rightarrow (i', j')$

    $A[q+1..n]$-ban $\rightarrow (i'', j'')$

(Ha a résztömb 1 elemű, akkor mindkét index u.a.)

– $A[1..n]$-ben a maximális növekedést adó (i,j) pár a következő lehet:

- ha $A[1..q]$-ban van $(i,j) = (i',j')$
- ha $A[q+1..n]$-ben van $(i,j) = (i'',j'')$
- különben $1 \leq i \leq q$ olyan, hogy $A[i]$ minimális és
  $q+1 \leq j \leq n$ olyan $A[j]$ maximális

A 3 eset közül azzal térünk vissza, ami a legnagyobb különbséget adta

- Költség: $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$

Legyen $n = 2^k$ és $c_1, c_2 > 0$ konstans

$$T(n) \le c_1 n + 2T(n/2) \le$$

$$\le c_1 n + 2(c_1 n + 2T(n/2^2)) = c_1 2n + 2^2 T(n/2^2)$$

$$\le c_1 2n + 2^2(c_1 n + 2T(n/2^3)) = c_1 3n + 2^3 T(n/2^3)$$

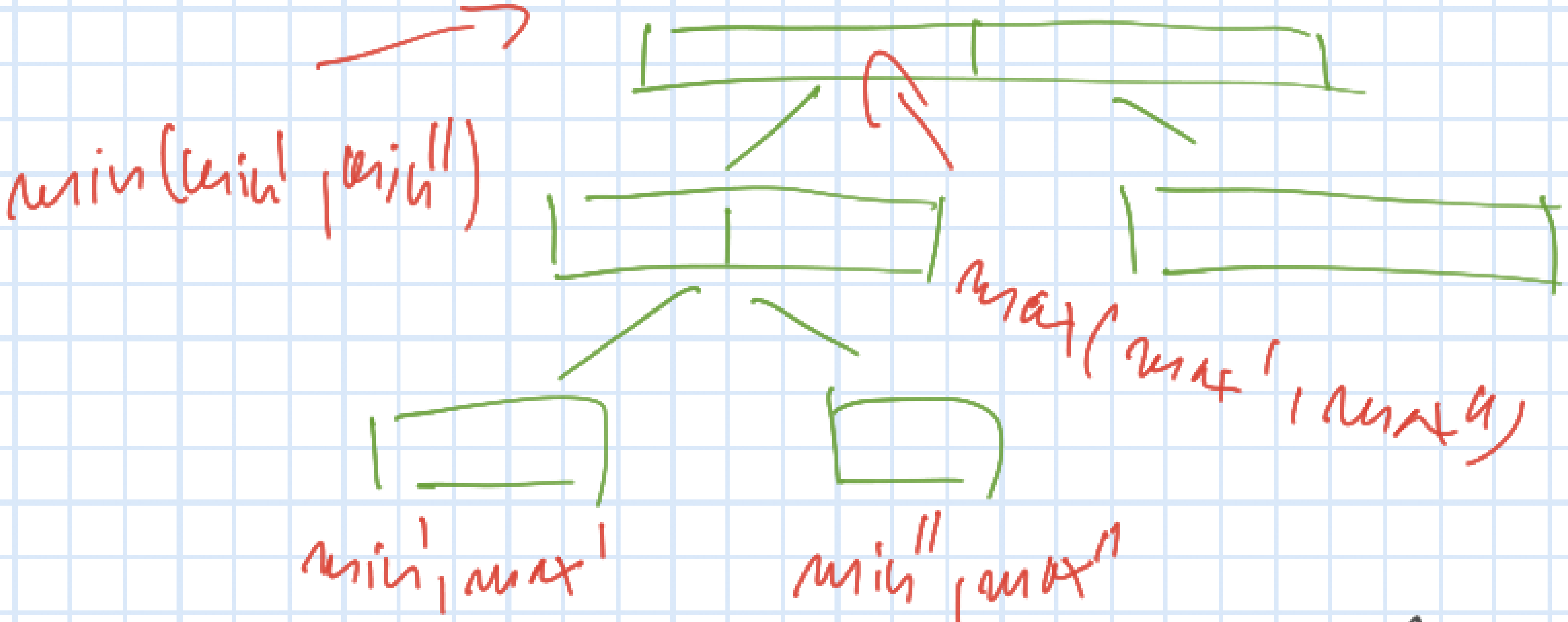
$$\le c_1 k n + 2^k T(n/2^k) = c_1 \log_2 n \, n + n T(1)$$

$$\le c_1 n \log n + c_2 n$$

$$T(n) = O(n \log n)$$

Javítás: minimum és maximum kiválasztás rekurzívan

- a rekurzív híváshoz nemcsak (i,j)-vel térünk vissza, hanem min és max indexel is



- a min és max kiválasztás $O(n)$ helyett $O(1)$ költségű

$$T(n) = 2T(n/2) + O(1) = O(n)$$