Számítási modellek

3. előadás

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Melyik az „igazi”, melyiket válasszuk?

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Melyik az „igazi”, melyiket válasszuk?

Az 1930-as évek második felétől sorra születtek olyan tételek, melyek ezen modellek megegyező számítási erejét mondták ki.

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több biztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Melyik az „igazi”, melyiket válasszuk?

Az 1930-as évek második felétől sorra születtek olyan tételek, melyek ezen modellek megegyező számítási erejét mondták ki.
A későbbiek során számos további számítási modellről sikerült bebizonyítani, hogy számítási erejük a Turing gépekkel ekvivalens.
Például:

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több biztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Melyik az „igazi”, melyiket válasszuk?

Az 1930-as évek második felétől sorra születtek olyan tételek, melyek ezen modellek megegyező számítási erejét mondták ki.
A későbbiek során számos további számítási modellről sikerült bebizonyítani, hogy számítási erejük a Turing gépekkel ekvivalens.
Például:

- 0. típusú grammatika

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több biztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Melyik az „igazi”, melyiket válasszuk?

Az 1930-as évek második felétől sorra születtek olyan tételek, melyek ezen modellek megegyező számítási erejét mondták ki.
A későbbiek során számos további számítási modellről sikerült bebizonyítani, hogy számítási erejük a Turing gépekkel ekvivalens.
Például:

- 0. típusú grammatika
- veremautomata 2 vagy több veremmel

Az algoritmikus fogalmának modelljei

Az 1930-as évektől egyre nagyobb igény mutatkozott az algoritmus matematikai modelljének megalkotására. Egymástól függetlenül több bíztató kísérlet is született:

- Kurt Gödel: rekurzív függvények
- Alonso Church: λ-kalkulus
- Alan Turing: Turing gép

Melyik az „igazi”, melyiket válasszuk?

Az 1930-as évek második felétől sorra születtek olyan tételek, melyek ezen modellek megegyező számítási erejét mondták ki.
A későbbiek során számos további számítási modellről sikerült bebizonyítani, hogy számítási erejük a Turing gépekkel ekvivalens.
Például:

- 0. típusú grammatika
- veremautomata 2 vagy több veremmel
- C, Java, stb.

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

Már a 30-as években megfogalmazásra került a következő:

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

Már a 30-as években megfogalmazásra került a következő:

Church-Turing tézis

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

Már a 30-as években megfogalmazásra került a következő:

Church-Turing tézis

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

(illetve bármilyen, a Turing géppel azonos számítási erejű absztrakt modellben)

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

Már a 30-as években megfogalmazásra került a következő:

Church-Turing tézis

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

(illetve bármilyen, a Turing géppel azonos számítási erejű absztrakt modellben)

NEM TÉTEL!!!

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

Már a 30-as években megfogalmazásra került a következő:

Church-Turing tézis

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

(illetve bármilyen, a Turing géppel azonos számítási erejű absztrakt modellben)

NEM TÉTEL!!!

A Church-Turing tézis nem bizonyítható, hiszen nem egy formális matematikai állítás, az algoritmus intuitív fogalmát használja.

A Church-Turing tézis

Valójában nem ismerünk olyan algoritmikus rendszert, amelyről tudnánk, hogy erősebb a Turing gépnél, és a legtöbb algoritmikus rendszerre bizonyított, hogy gyengébb, vagy ekvivalens.

Már a 30-as években megfogalmazásra került a következő:

Church-Turing tézis

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

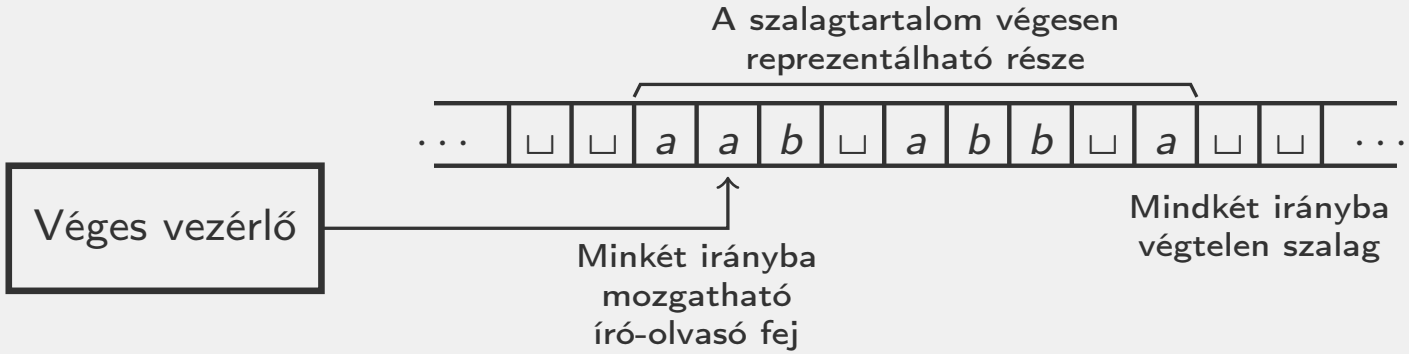
(illetve bármilyen, a Turing géppel azonos számítási erejű absztrakt modellben)

NEM TÉTEL!!!

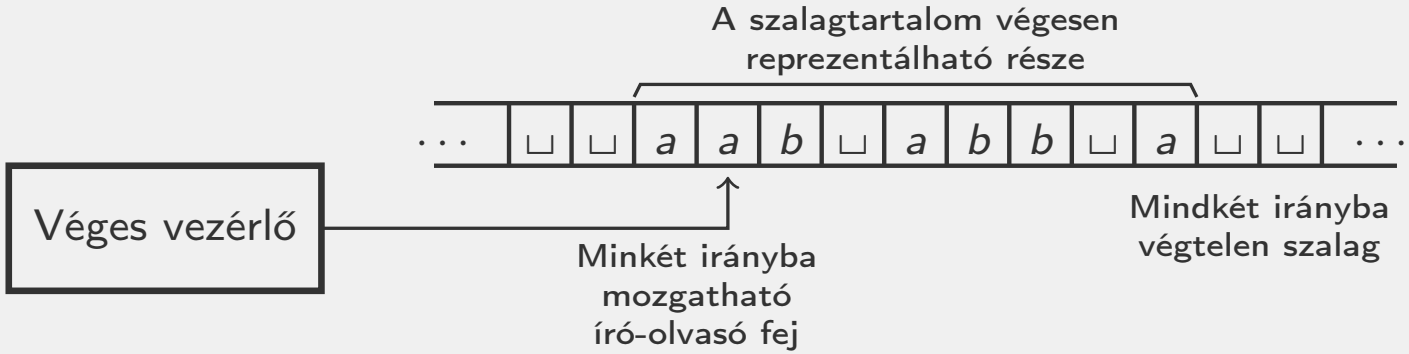
A Church-Turing tézis nem bizonyítható, hiszen nem egy formális matematikai állítás, az algoritmus intuitív fogalmát használja.

Ha elfogadjuk a tézis igazságát, a Turing gép (illetve bármely a Turing gépekkel ekvivalens modell) informálisan tekinthető az algoritmus matematikai modelljének.

Turing gépek – Informális kép

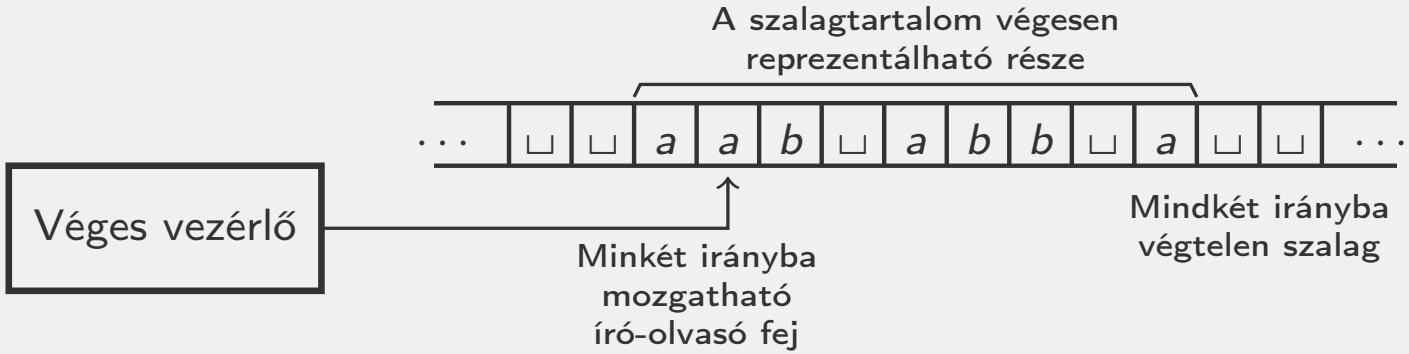


Turing gépek – Informális kép



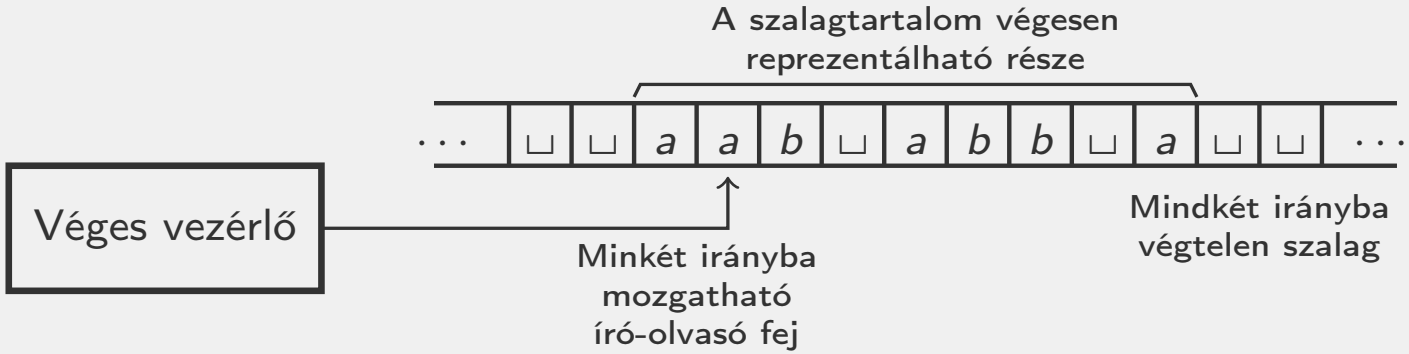
- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje

Turing gépek – Informális kép



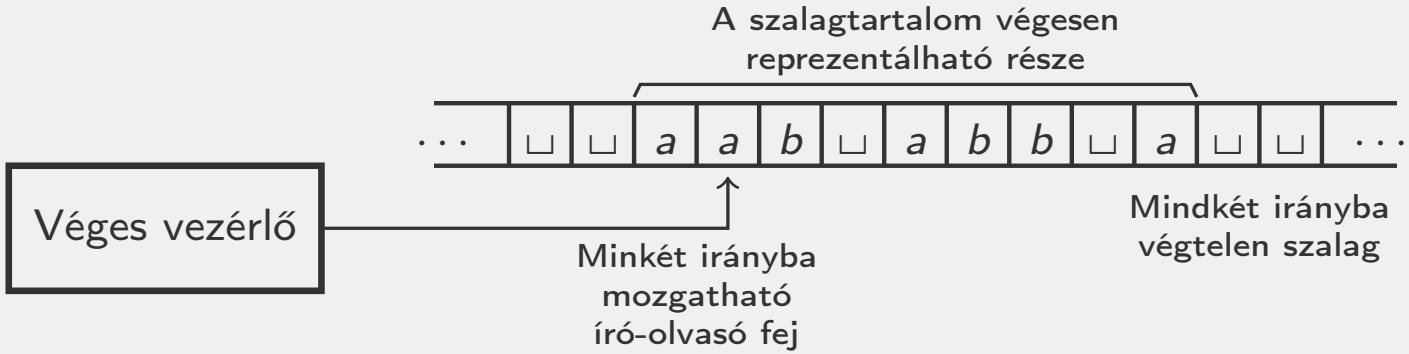
- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje
- a TG egyetlen programot hajt végre (de bármely inputra!!!), azaz tekinthető egy célszámítógépnek.

Turing gépek – Informális kép



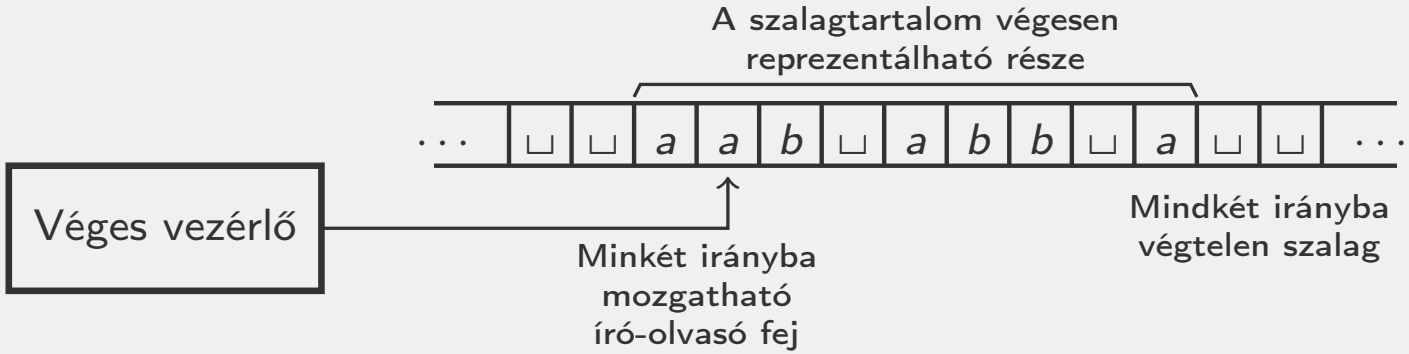
- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje
- a TG egyetlen programot hajt végre (de bármely inputra!!!), azaz tekinthető egy célszámítógépnek.
- informálisan a gép részei a vezérlőegység (véges sok állapottal), egy mindkét irányba végtelen szalag, és egy mindkét irányba lépni képes író-olvasó fej

Turing gépek – Informális kép



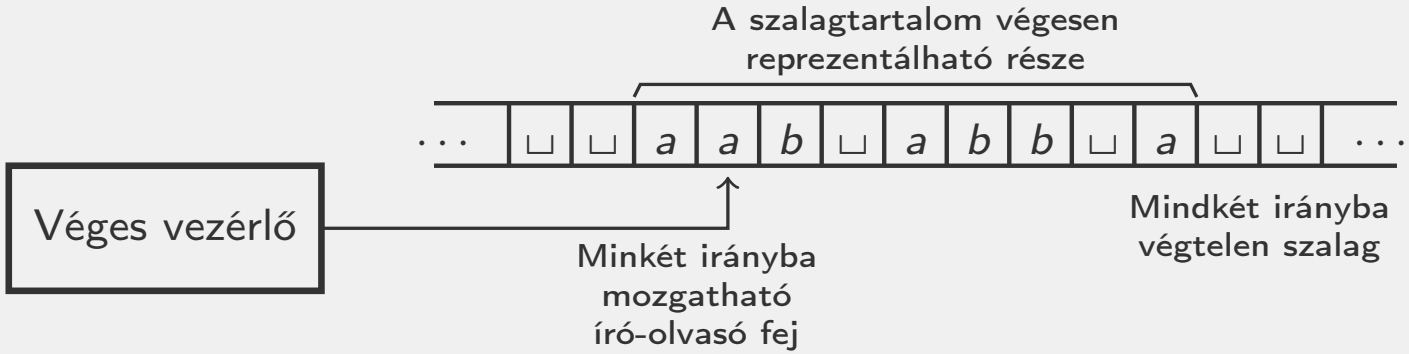
- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje
- a TG egyetlen programot hajt végre (de bármely inputra!!!), azaz tekinthető egy célszámítógépnek.
- informálisan a gép részei a vezérlőegység (véges sok állapottal), egy mindkét irányba végtelen szalag, és egy mindkét irányba lépni képes író-olvasó fej
- kezdetben egy input szó van a szalagon (ε esetén üres), a fej ennek első betűjéről indul, majd a szabályai szerint működik.

Turing gépek – Informális kép



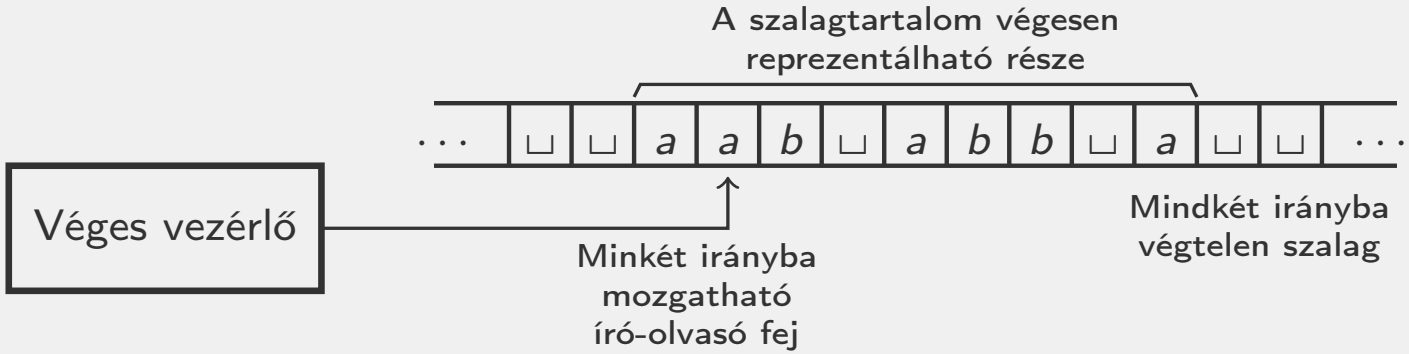
- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje
- a TG egyetlen programot hajt végre (de bármely inputra!!!), azaz tekinthető egy célszámítógépnek.
- informálisan a gép részei a vezérlőegység (véges sok állapottal), egy mindkét irányba végtelen szalag, és egy mindkét irányba lépni képes író-olvasó fej
- kezdetben egy input szó van a szalagon (ε esetén üres), a fej ennek első betűjéről indul, majd a szabályai szerint működik.

Turing gépek – Informális kép



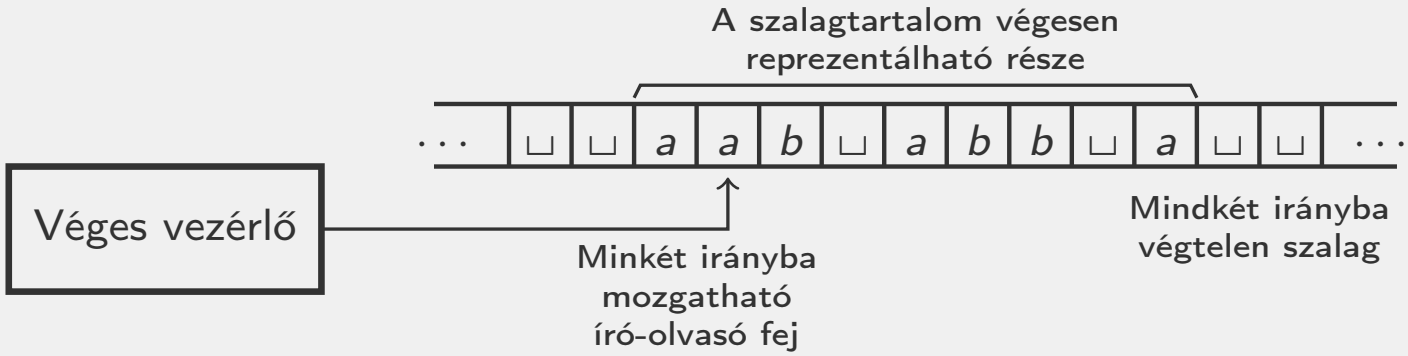
- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje
- a TG egyetlen programot hajt végre (de bármely inputra!!!), azaz tekinthető egy célszámítógépnek.
- informálisan a gép részei a vezérlőegység (véges sok állapottal), egy mindkét irányba végtelen szalag, és egy mindkét irányba lépni képes író-olvasó fej
- kezdetben egy input szó van a szalagon (ε esetén üres), a fej ennek első betűjéről indul, majd a szabályai szerint működik. Ha eljut az elfogadó állapotába elfogadja, ha eljut az elutasító állapotába elutasítja az inputot.

Turing gépek – Informális kép

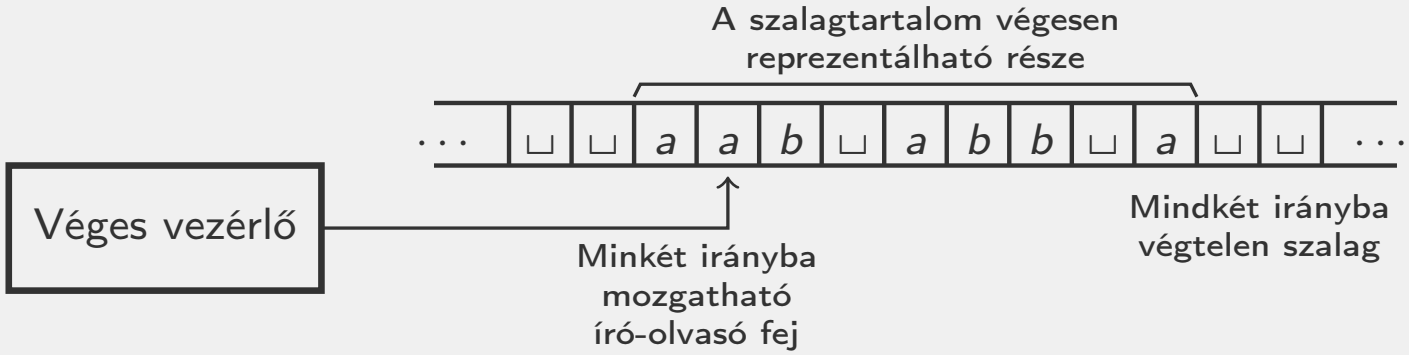


- a Turing gép (TG) az algoritmus egyik lehetséges modellje
- a TG egyetlen programot hajt végre (de bármely inputra!!!), azaz tekinthető egy célszámítógépnek.
- informálisan a gép részei a vezérlőegység (véges sok állapottal), egy mindkét irányba végtelen szalag, és egy mindkét irányba lépni képes író-olvasó fej
- kezdetben egy input szó van a szalagon (ε esetén üres), a fej ennek első betűjéről indul, majd a szabályai szerint működik. Ha eljut az elfogadó állapotába elfogadja, ha eljut az elutasító állapotába elutasítja az inputot. Van egy harmadik lehetőség is: nem jut el soha a fenti két állapotába, "végtelen ciklusba" kerül.

Turing gépek – Informális kép

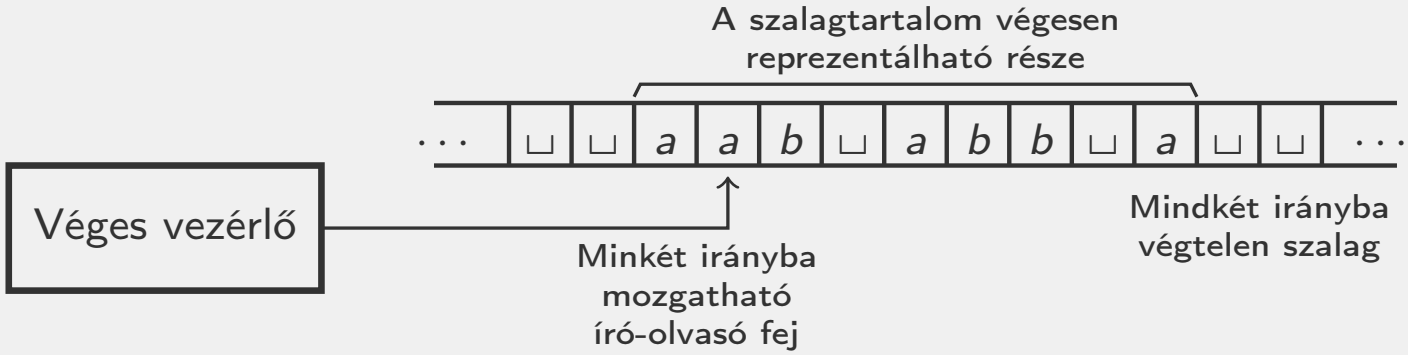


Turing gépek – Informális kép



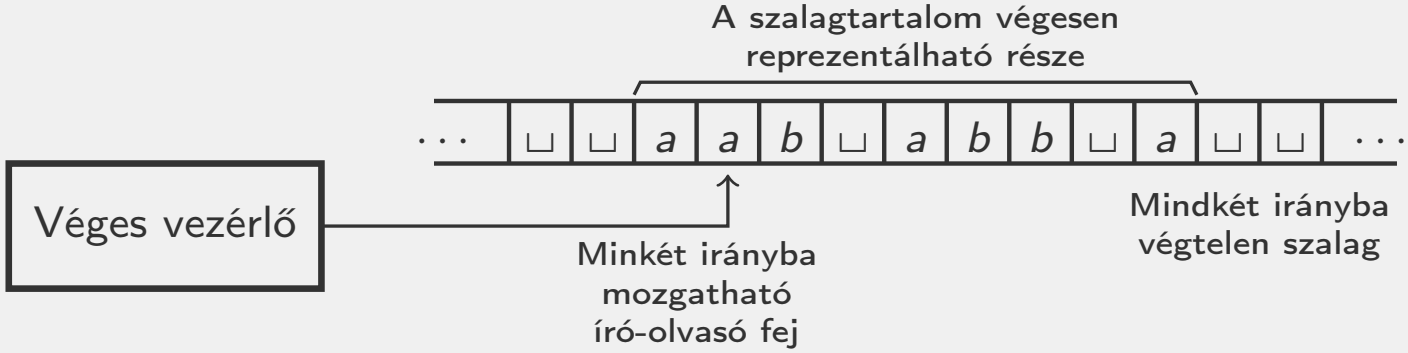
- a gép alapértelmezetten determinisztikus, minden (nem megállási) konfigurációnak van és egyértelmű a rákövetkezője.

Turing gépek – Informális kép



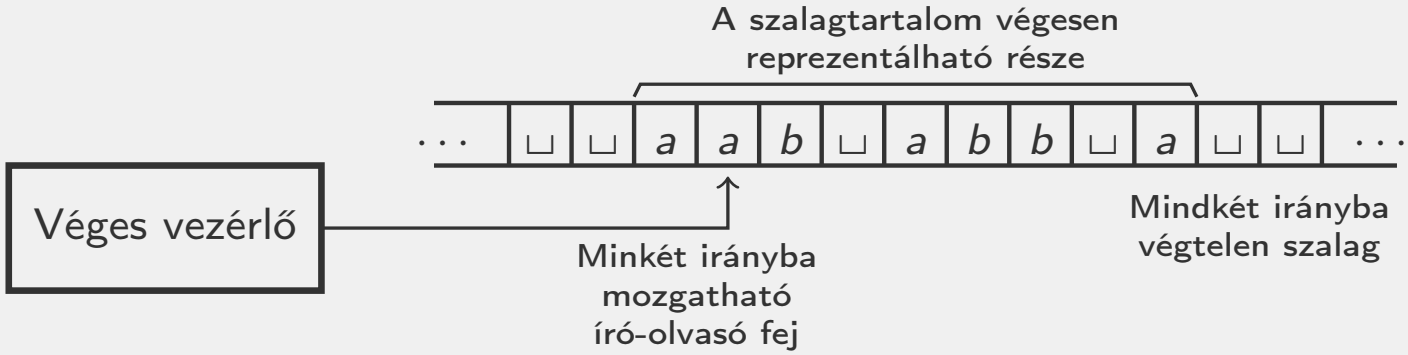
- a gép alapértelmezetten determinisztikus, minden (nem megállási) konfigurációnak van és egyértelmű a rákövetkezője.
- végtelen szalag: potenciálisan végtelen tár

Turing gépek – Informális kép



- a gép alapértelmezetten determinisztikus, minden (nem megállási) konfigurációnak van és egyértelmű a rákövetkezője.
- végtelen szalag: potenciálisan végtelen tár
- egy $\mathcal{P}$ probléma példányait egy megfelelő ábécé felett elkódolva a probléma „igen”-példányai egy $L(\mathcal{P})$ formális nyelvet alkotnak. $L(\mathcal{P})$ (és így a probléma maga is) algoritmikusan eldönthető, ha van olyan mindig terminálló Turing gép, mely pontosan $L(\mathcal{P})$ szavait fogadja el.

Turing gépek – Informális kép



- a gép alapértelmezetten determinisztikus, minden (nem megállási) konfigurációnak van és egyértelmű a rákövetkezője.
- végtelen szalag: potenciálisan végtelen tár
- egy $\mathcal{P}$ probléma példányait egy megfelelő ábécé felett elkódolva a probléma „igen”-példányai egy $L(\mathcal{P})$ formális nyelvet alkotnak. $L(\mathcal{P})$ (és így a probléma maga is) algoritmikusan eldönthető, ha van olyan mindig terminálló Turing gép, mely pontosan $L(\mathcal{P})$ szavait fogadja el.
- a Church-Turing tézis értelmében informálisan úgy gondolhatjuk, hogy éppen a TG-pel eldönthető problémák (nyelvek) az algoritmikusan eldönthető eldöntési problémák.

Turing gépek

Definíció

A **Turing gép** (továbbiakban röviden TG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_\mathrm{i}, q_\mathrm{n} \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$.
- $\delta : (Q \backslash \{q_\mathrm{i}, q_\mathrm{n}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény. δ értelmezési tartománya $(Q \backslash \{q_\mathrm{i}, q_\mathrm{n}\}) \times \Gamma$.

Turing gépek

Definíció

A **Turing gép** (továbbiakban röviden TG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_\text{i}, q_\text{n} \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$.
- $\delta : (Q \backslash \{q_\text{i}, q_\text{n}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény. δ értelmezési tartománya $(Q \backslash \{q_\text{i}, q_\text{n}\}) \times \Gamma$.

$\{L, S, R\}$ elemeire úgy gondolhatunk mint a TG lépéseinek irányaira (balra lépés, helyben maradás, jobbra lépés).

Turing gépek

Definíció

A **Turing gép** (továbbiakban röviden TG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_\mathrm{i}, q_\mathrm{n} \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$.
- $\delta : (Q \backslash \{q_\mathrm{i}, q_\mathrm{n}\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény. δ értelmezési tartománya $(Q \backslash \{q_\mathrm{i}, q_\mathrm{n}\}) \times \Gamma$.

$\{L, S, R\}$ elemeire úgy gondolhatunk mint a TG lépéseinek irányaira (balra lépés, helyben maradás, jobbra lépés).

Megjegyzés: Elég 2 irány, a helyben maradó lépések helyettesíthetők egy jobbra és egy balra lépéssel egy, csak erre az átmenetre használt új állapoton keresztül.

Turing gépek

Konfiguráció

A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Turing gépek

Konfiguráció

A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Definíció

A TG **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

Turing gépek

Konfiguráció

A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Definíció

A TG **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

Az uqv konfiguráció egy tömör leírás a TG aktuális helyzetéről, mely a gép további működése szempontjából minden releváns információt tartalmaz:

Turing gépek

Konfiguráció

A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Definíció

A TG **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

Az uqv konfiguráció egy tömör leírás a TG aktuális helyzetéről, mely a gép további működése szempontjából minden releváns információt tartalmaz: a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak $\sqcup$ van), a gép a q állapotban van és az író-olvasó fej a v szó első betűjén áll.

Turing gépek

Konfiguráció

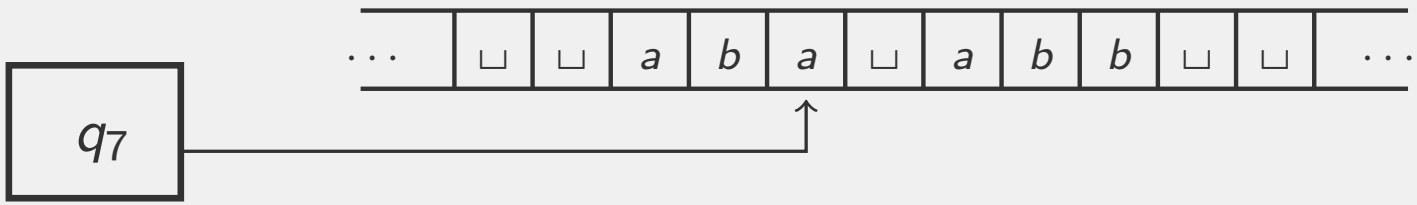
A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Definíció

A TG **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

Az uqv konfiguráció egy tömör leírás a TG aktuális helyzetéről, mely a gép további működése szempontjából minden releváns információt tartalmaz: a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak $\sqcup$ van), a gép a q állapotban van és az író-olvasó fej a v szó első betűjén áll.

Példa:



Turing gépek

Konfiguráció

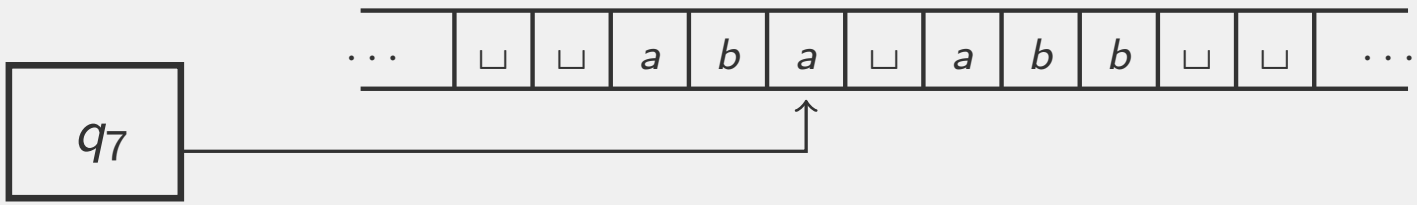
A TG működtetését a gép konfigurációival írhatjuk le.

Definíció

A TG **konfigurációja** egy uqv szó, ahol $q \in Q$ és $u, v \in \Gamma^*$, $v \neq \varepsilon$.

Az uqv konfiguráció egy tömör leírás a TG aktuális helyzetéről, mely a gép további működése szempontjából minden releváns információt tartalmaz: a szalag tartalma uv (uv előtt és után a szalagon már csak $\sqcup$ van), a gép a q állapotban van és az író-olvasó fej a v szó első betűjén áll.

Példa:



A fenti helyzetet az $abq_7a \sqcup abb$ konfigurációval írhatjuk le.

Turing gépek

Konfiguráció

Definíció

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0 u \sqcup$ szó. (Vagyis $q_0 u$, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0 \sqcup$, ha $u = \varepsilon$).

Turing gépek

Konfiguráció

Definíció

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0 u \sqcup$ szó. (Vagyis $q_0 u$, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0 \sqcup$, ha $u = \varepsilon$).

Elfogadó konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_i$.

Turing gépek

Konfiguráció

Definíció

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0 u \sqcup$ szó. (Vagyis $q_0 u$, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0 \sqcup$, ha $u = \varepsilon$).

Elfogadó konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{i}$.

Elutasító konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{n}$.

Turing gépek

Konfiguráció

Definíció

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0 u \sqcup$ szó. (Vagyis $q_0 u$, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0 \sqcup$, ha $u = \varepsilon$).

Elfogadó konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{i}$.

Elutasító konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{n}$.

Az elfogadó és elutasító konfigurációk közös neve **megállási konfiguráció**.

Turing gépek

Konfiguráció

Definíció

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0 u \sqcup$ szó. (Vagyis $q_0 u$, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0 \sqcup$, ha $u = \varepsilon$).

Elfogadó konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{i}$.

Elutasító konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{n}$.

Az elfogadó és elutasító konfigurációk közös neve **megállási konfiguráció**.

Két konfigurációt **azonosnak tekintünk**, ha csak balra/jobbra hozzáírt $\sqcup$-ekben térnek el egymástól.

Turing gépek

Konfiguráció

Definíció

A gép egy $u \in \Sigma^*$-beli szóhoz tartozó **kezdőkonfigurációja** a $q_0 u \sqcup$ szó. (Vagyis $q_0 u$, ha $u \neq \varepsilon$ és $q_0 \sqcup$, ha $u = \varepsilon$).

Elfogadó konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{i}$.

Elutasító konfigurációi azon konfigurációk, melyre $q = q_\mathrm{n}$.

Az elfogadó és elutasító konfigurációk közös neve **megállási konfiguráció**.

Két konfigurációt **azonosnak tekintünk**, ha csak balra/jobbra hozzáírt $\sqcup$-ekben térnek el egymástól.

Például a $\sqcup abq_2 \sqcup$ és a $abq_2 \sqcup \sqcup$ konfigurációk azonosak.

Turing gépek

Konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát.

Turing gépek

Konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát. Az M Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet relációját** az alábbiak szerint definiáljuk. (közvetlen v. egylépéses konfigurációátmenet)

Turing gépek

Konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát. Az M Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet relációját** az alábbiak szerint definiáljuk. (közvetlen v. egylépéses konfigurációátmenet)

Definíció

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

Turing gépek

Konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát. Az M Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet relációját** az alábbiak szerint definiáljuk. (közvetlen v. egylépéses konfigurációátmenet)

Definíció

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Turing gépek

Konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát. Az M Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet relációját** az alábbiak szerint definiáljuk. (közvetlen v. egylépéses konfigurációátmenet)

Definíció

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Példa: Tegyük fel, hogy $\delta(q_2, a) = (q_5, b, L)$ és $\delta(q_5, c) = (q_1, \sqcup, R)$. Legyen továbbá $C_1 = bcq_2a\sqcup b$, $C_2 = bq_5cb\sqcup b$, $C_3 = b\sqcup q_1b\sqcup b$.

Turing gépek

Konfigurácóátmenet

Jelölje C_M egy M TG-hez tartozó lehetséges konfigurációk halmazát. Az M Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **konfigurációátmenet relációját** az alábbiak szerint definiáljuk. (közvetlen v. egylépéses konfigurációátmenet)

Definíció

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Példa: Tegyük fel, hogy $\delta(q_2, a) = (q_5, b, L)$ és $\delta(q_5, c) = (q_1, \sqcup, R)$. Legyen továbbá $C_1 = bcq_2a\sqcup b$, $C_2 = bq_5cb\sqcup b$, $C_3 = b\sqcup q_1b\sqcup b$. Ekkor $C_1 \vdash C_2$ és $C_2 \vdash C_3$.

Turing gépek

Konfigurációátmenet, felismert nyelv

Az $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ többlépéses konfigurációátmenet reláció a $\vdash$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa: (folytatás) Legyen C_1, C_2, C_3 ugyanaz, mint a fenti példában. Mivel $C_1 \vdash C_2$ és $C_2 \vdash C_3$ is teljesült, ezért $C_1 \vdash^* C_1$, $C_1 \vdash^* C_2$, $C_1 \vdash^* C_3$ is fennállnak.

Turing gépek

Konfigurációátmenet, felismert nyelv

Az $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ többlépéses konfigurációátmenet reláció a $\vdash$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa: (folytatás) Legyen C_1, C_2, C_3 ugyanaz, mint a fenti példában. Mivel $C_1 \vdash C_2$ és $C_2 \vdash C_3$ is teljesült, ezért $C_1 \vdash^* C_1$, $C_1 \vdash^* C_2$, $C_1 \vdash^* C_3$ is fennállnak.

Definíció

Az M TG által **felismert nyelv**
$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y$ valamely $x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

Turing gépek

Konfigurációátmenet, felismert nyelv

Az $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$ többlépéses konfigurációátmenet reláció a $\vdash$ reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Példa: (folytatás) Legyen C_1, C_2, C_3 ugyanaz, mint a fenti példában. Mivel $C_1 \vdash C_2$ és $C_2 \vdash C_3$ is teljesült, ezért $C_1 \vdash^* C_1$, $C_1 \vdash^* C_2$, $C_1 \vdash^* C_3$ is fennállnak.

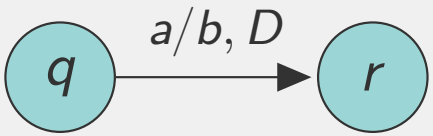
Definíció

Az M TG által **felismert nyelv**
$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y$ valamely $x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

Figyeljük meg, hogy $L(M)$ csak Σ feletti szavakat tartalmaz.

Turing gépek – Példa

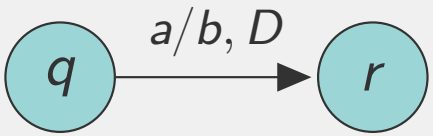
Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

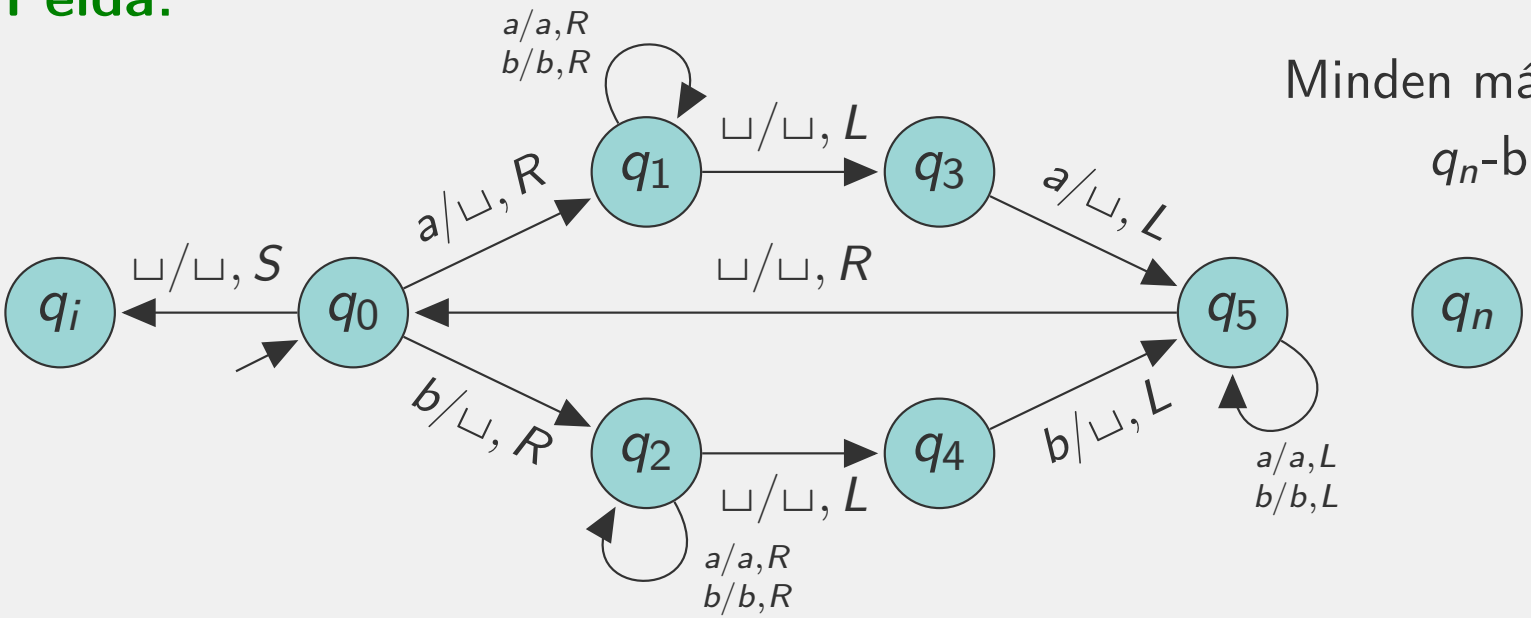
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

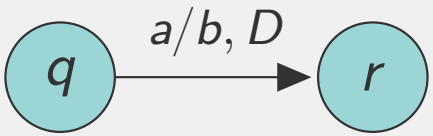
Példa:



Minden más átmenet
q_n-be megy

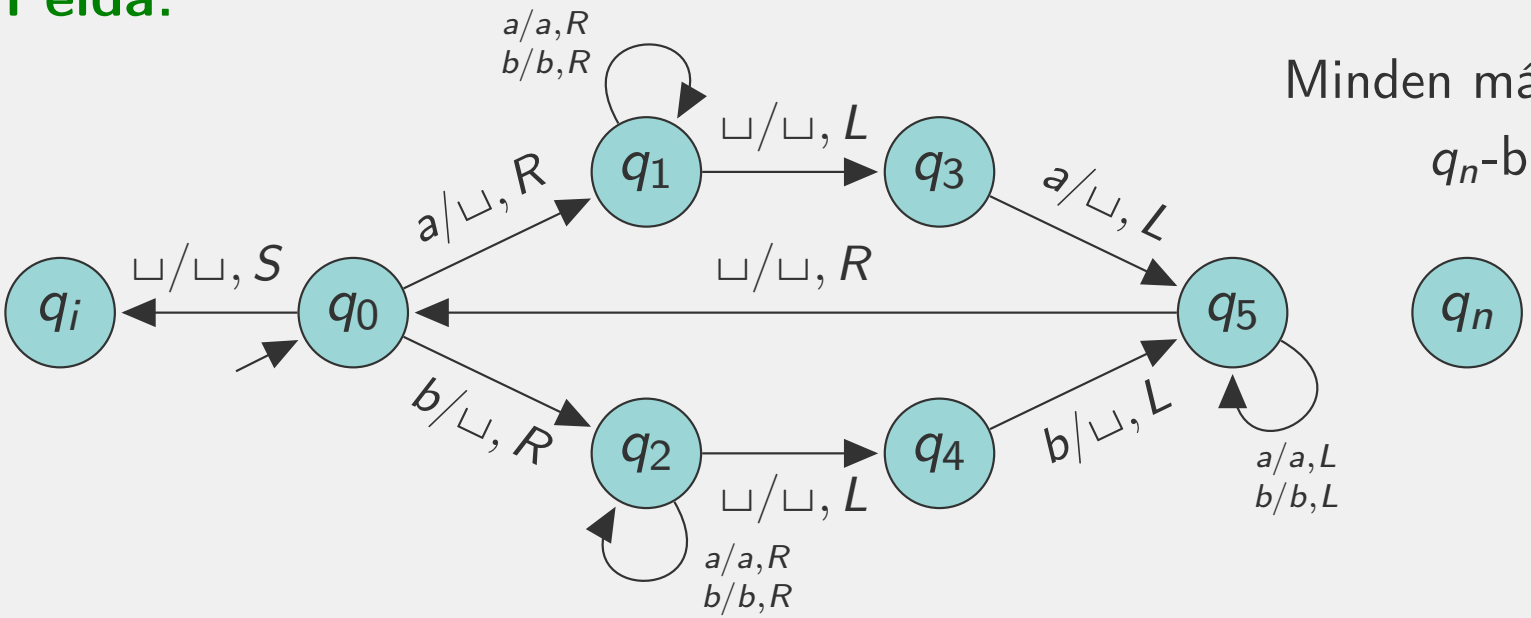
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:

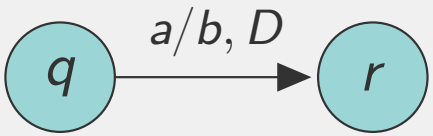


Minden más átmenet
q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

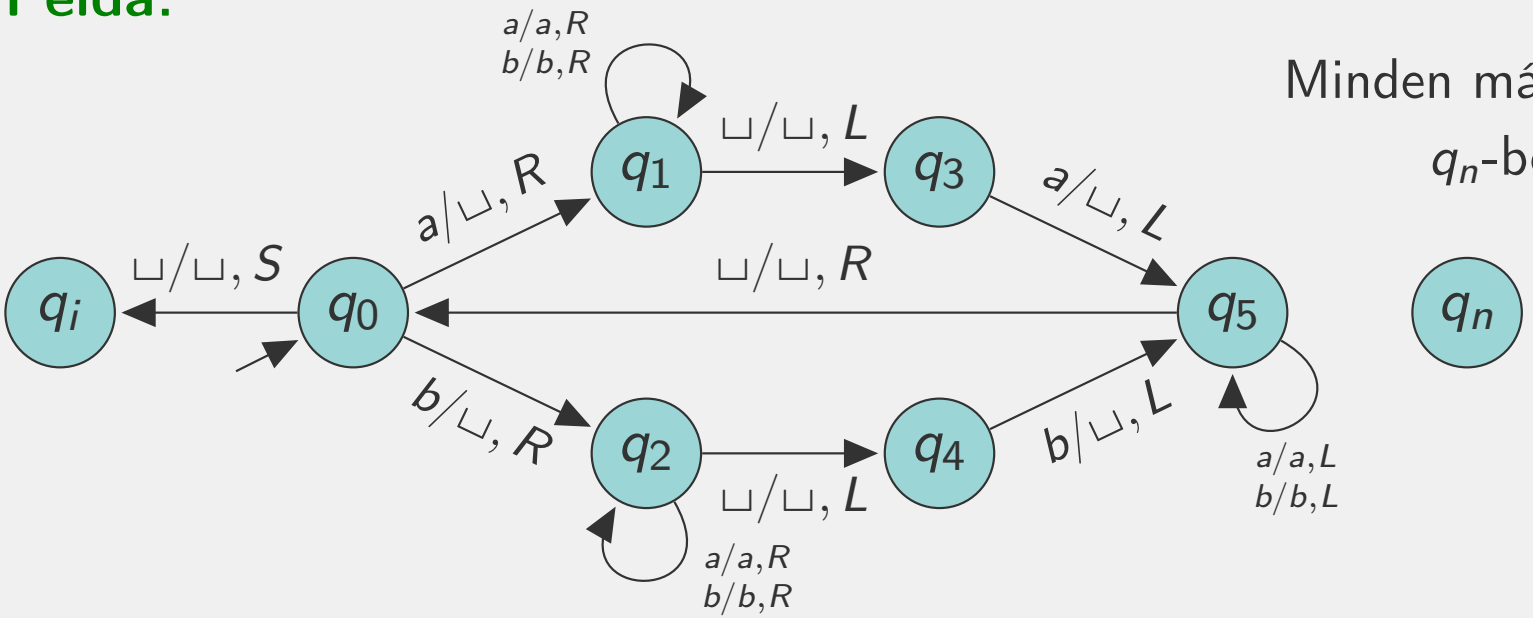
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



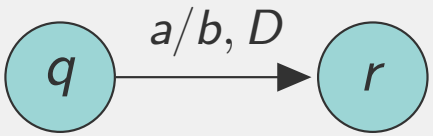
Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

q_0aba

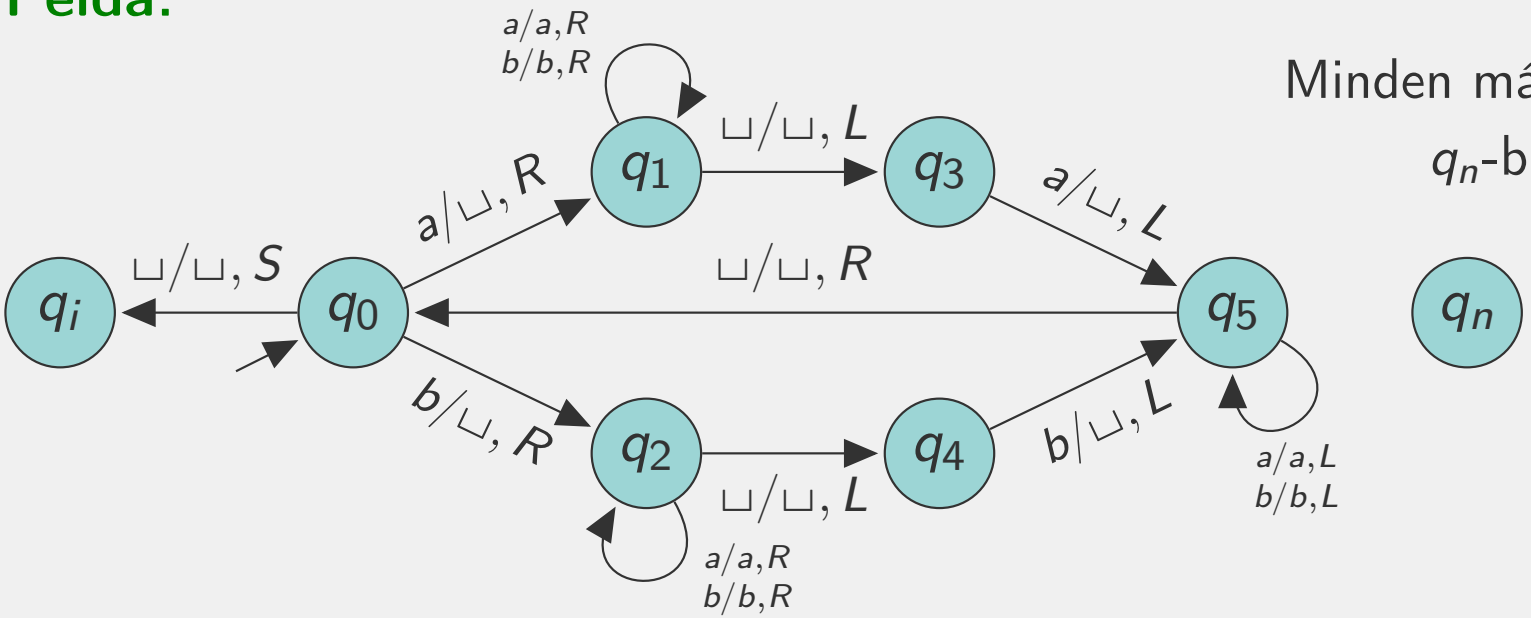
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



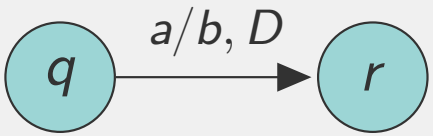
Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba$

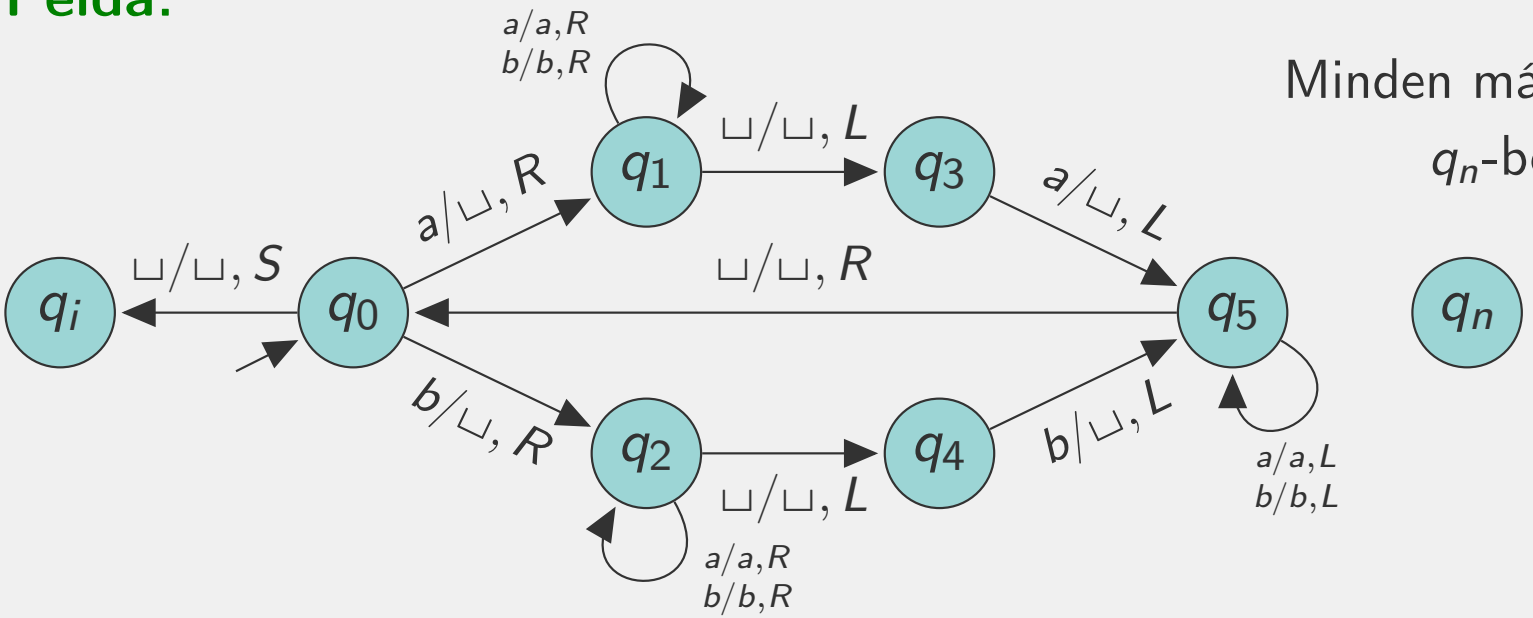
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



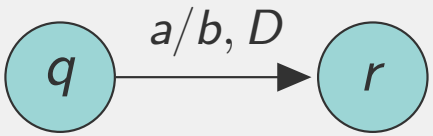
Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a$

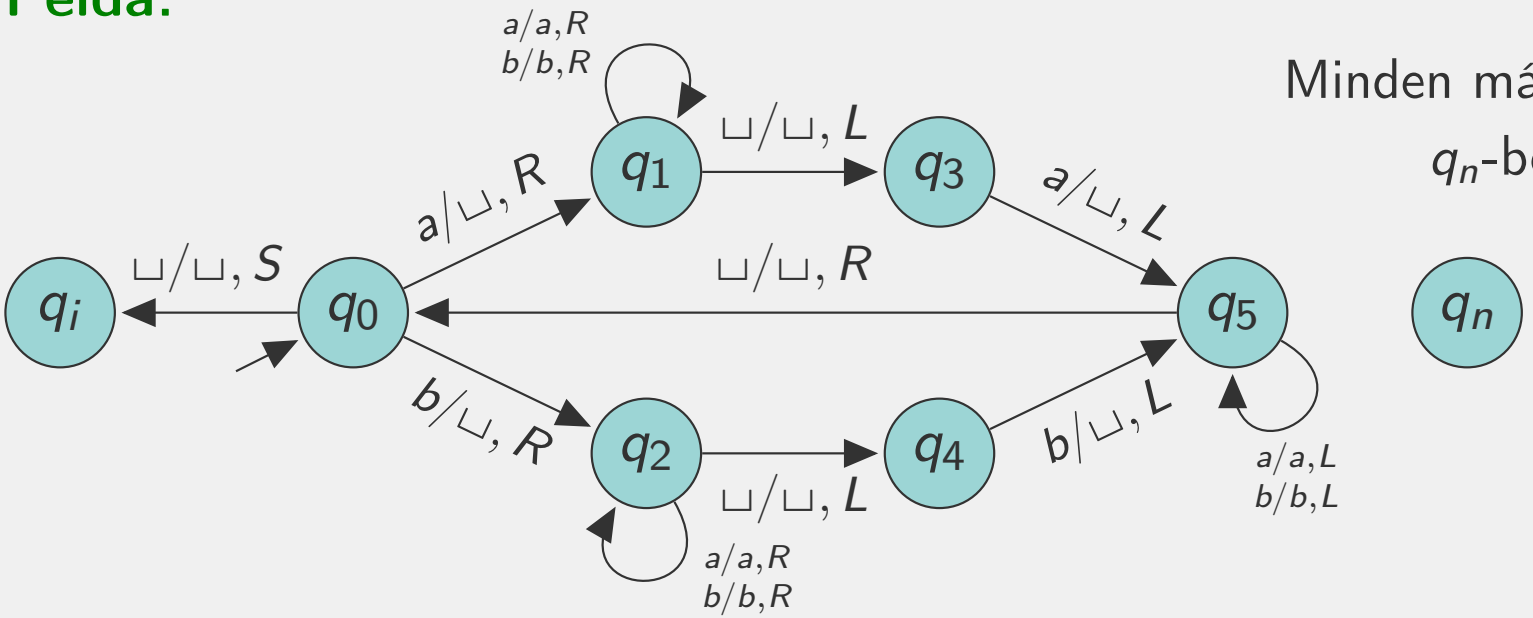
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



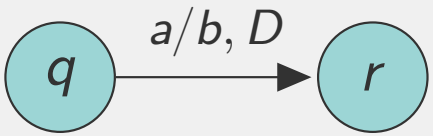
Minden más átmenet
q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup$

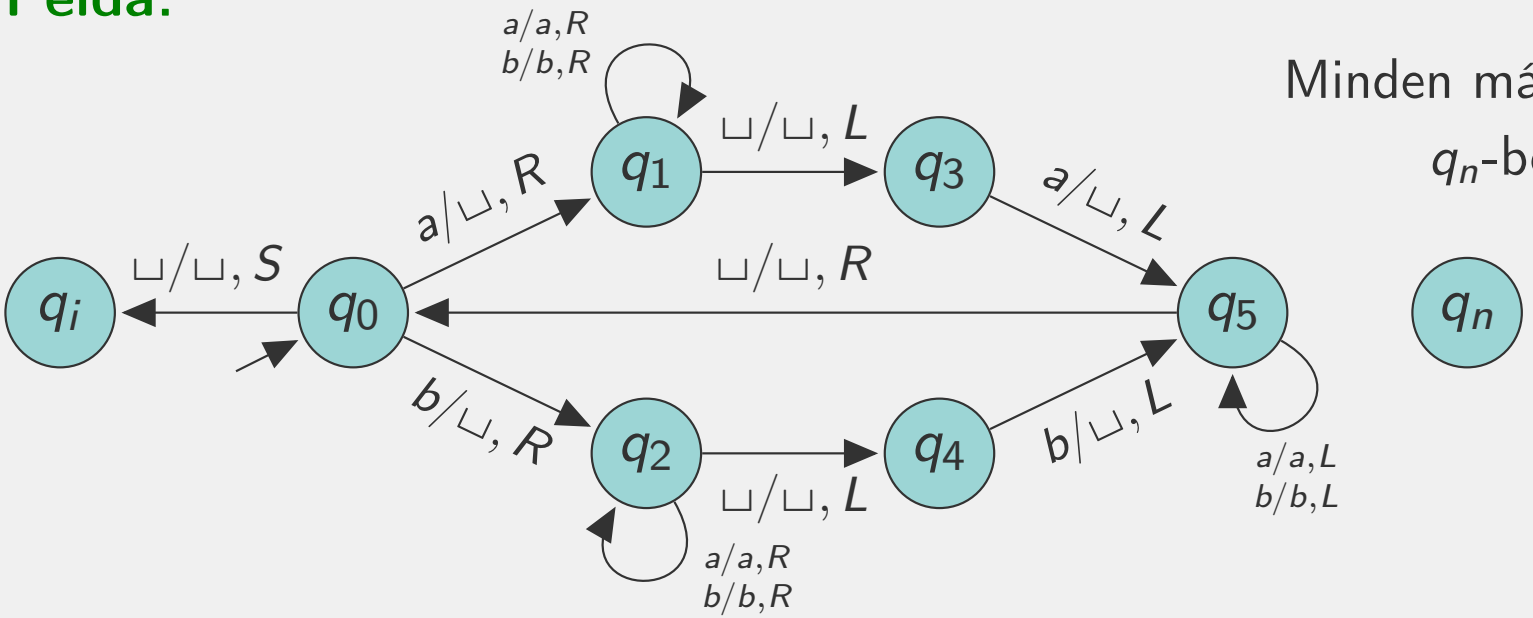
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



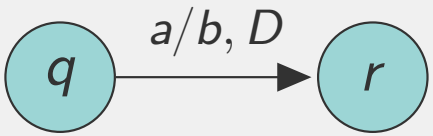
Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1␣ \vdash bq_3a$

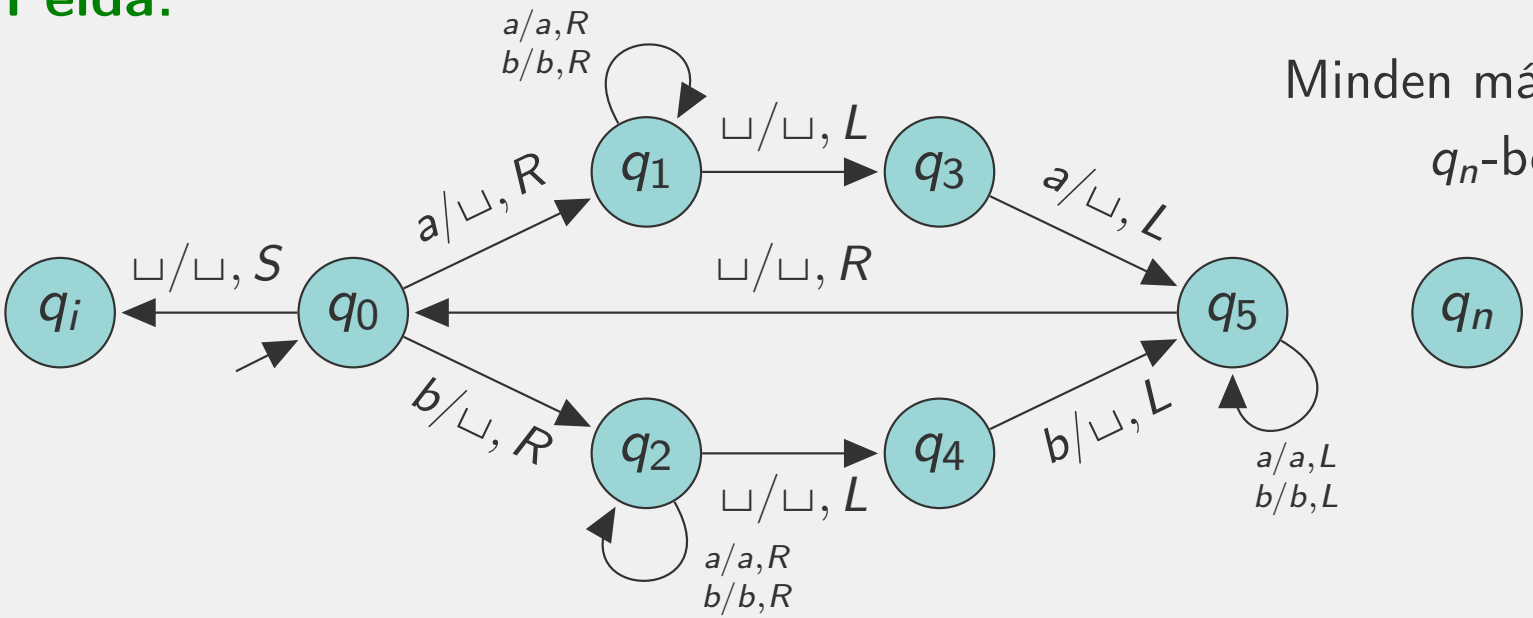
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



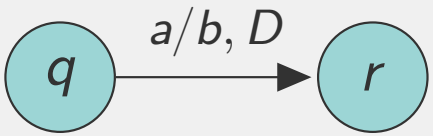
Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b$

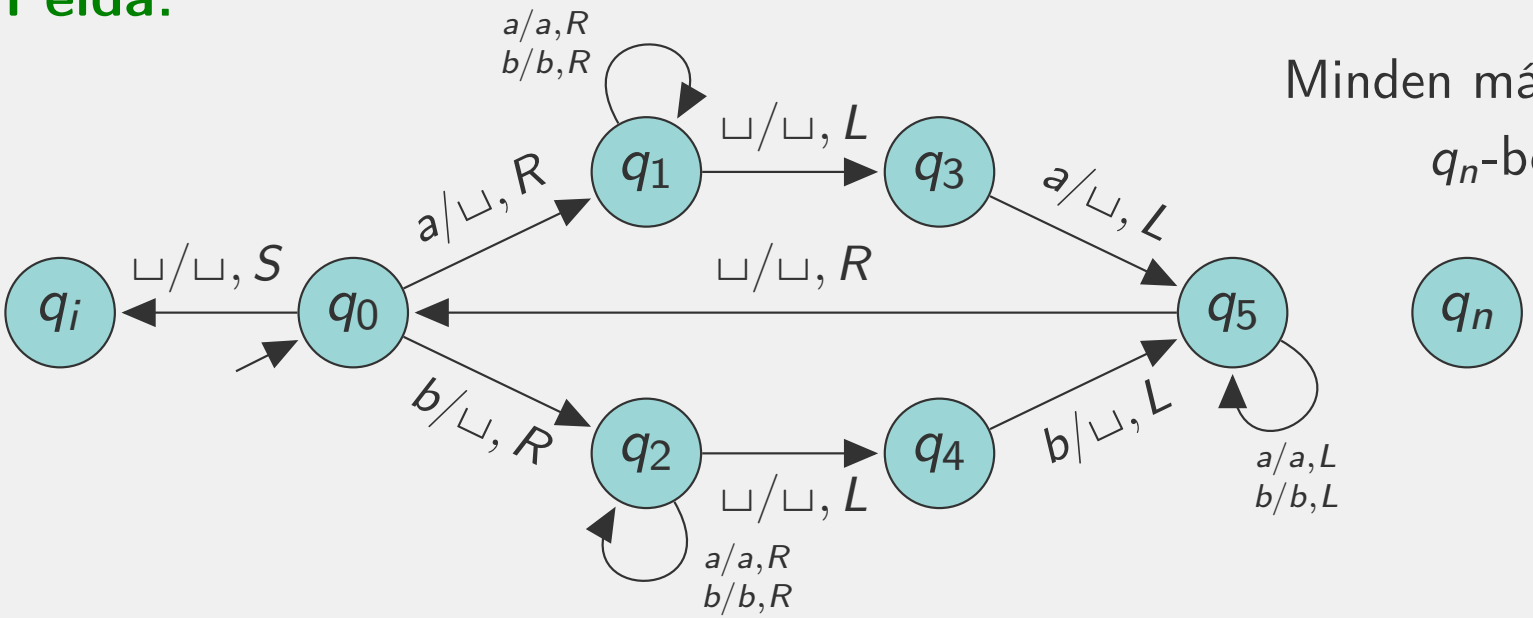
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



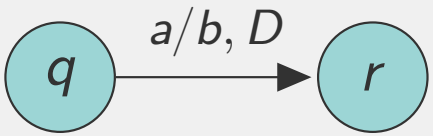
Minden más átmenet
q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5\sqcup b$

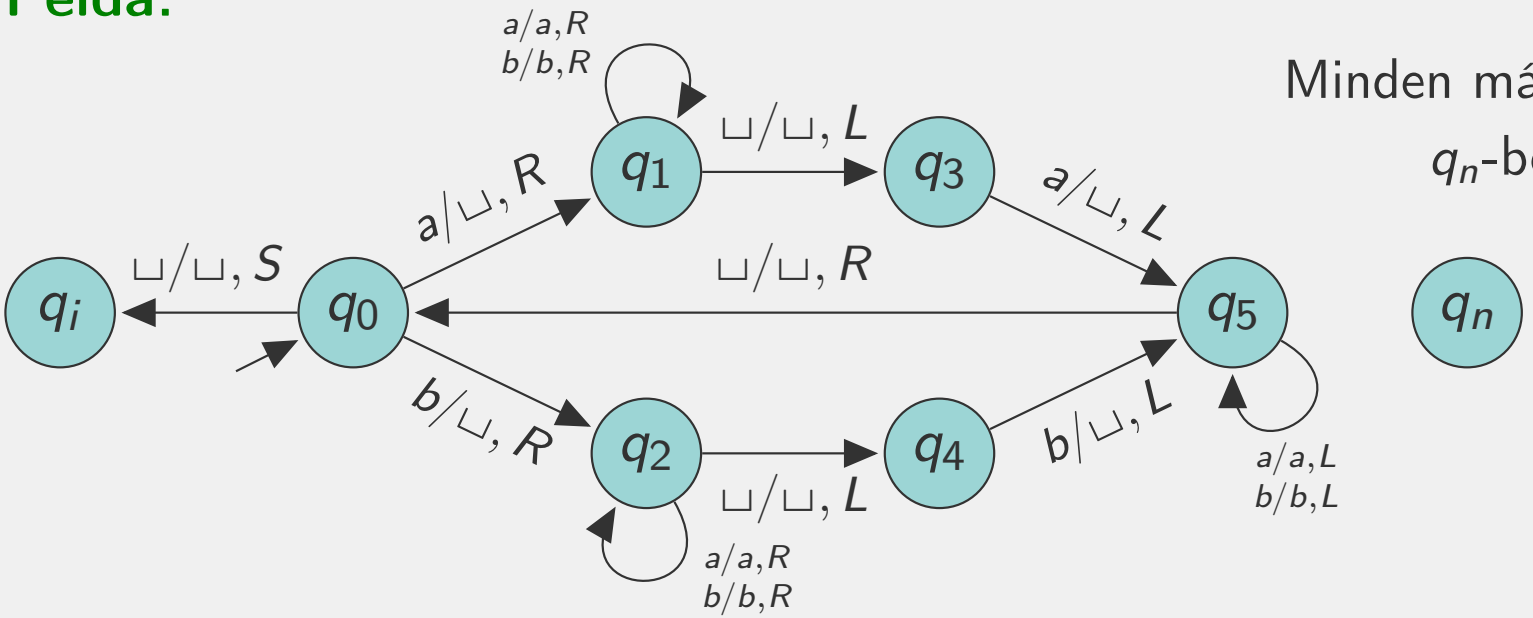
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



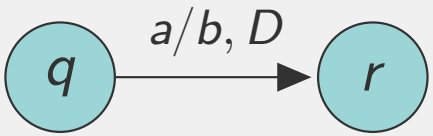
Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5\sqcup b \vdash q_0b$

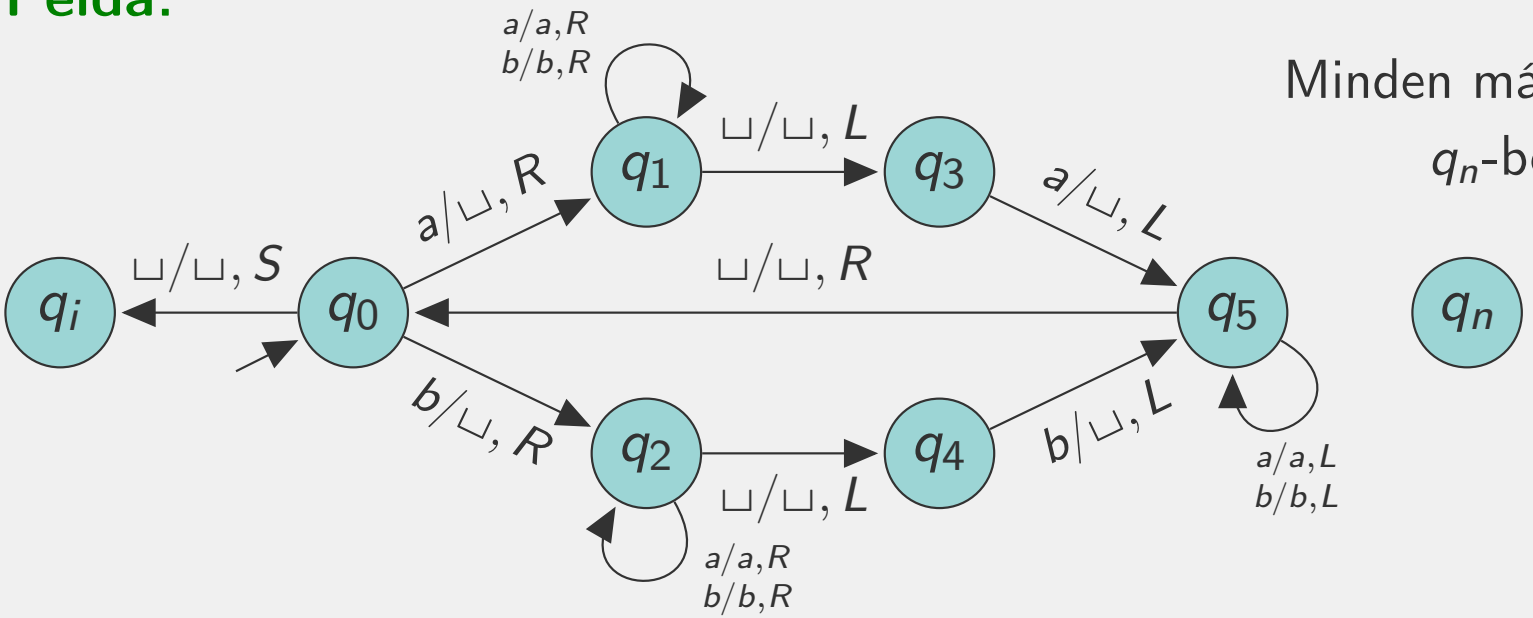
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



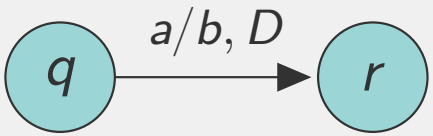
Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az aba input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5\sqcup b \vdash q_0b \vdash q_2\sqcup$

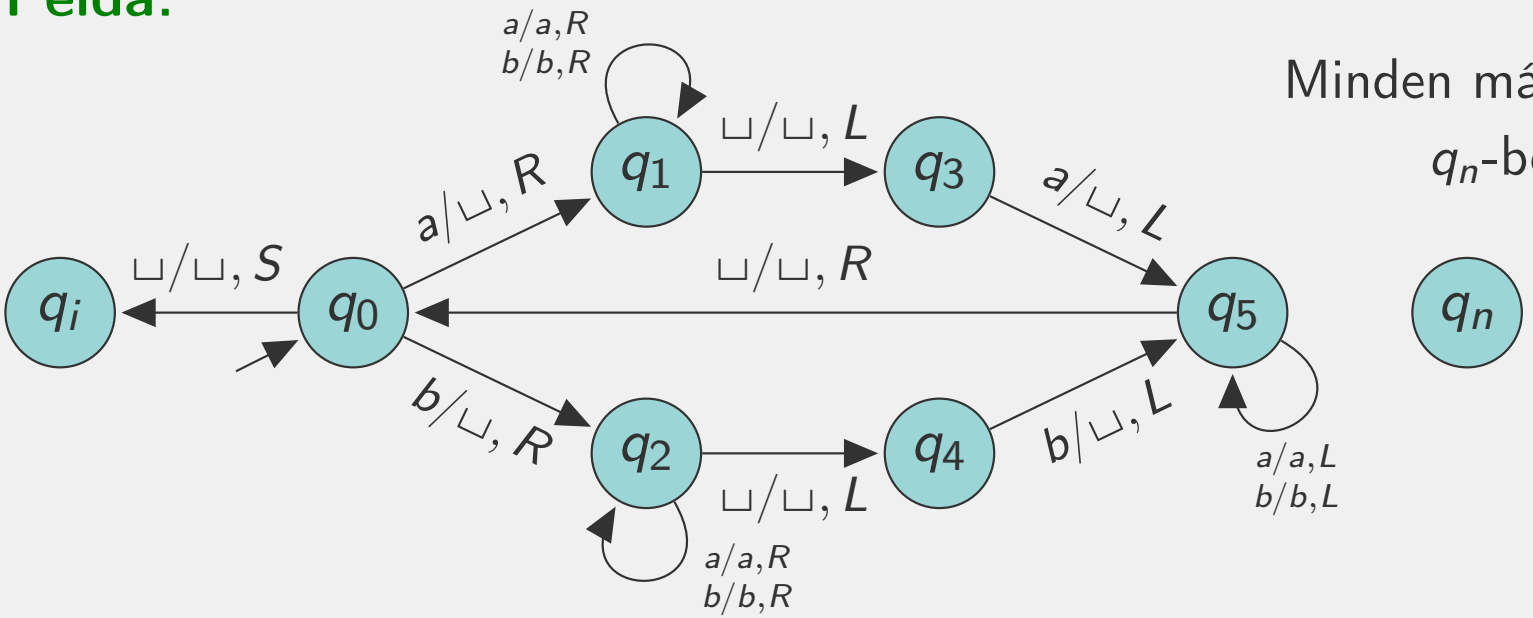
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



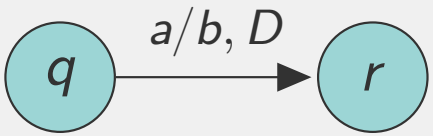
Minden más átmenet
q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5\sqcup b \vdash q_0b \vdash q_2\sqcup \vdash q_4\sqcup$

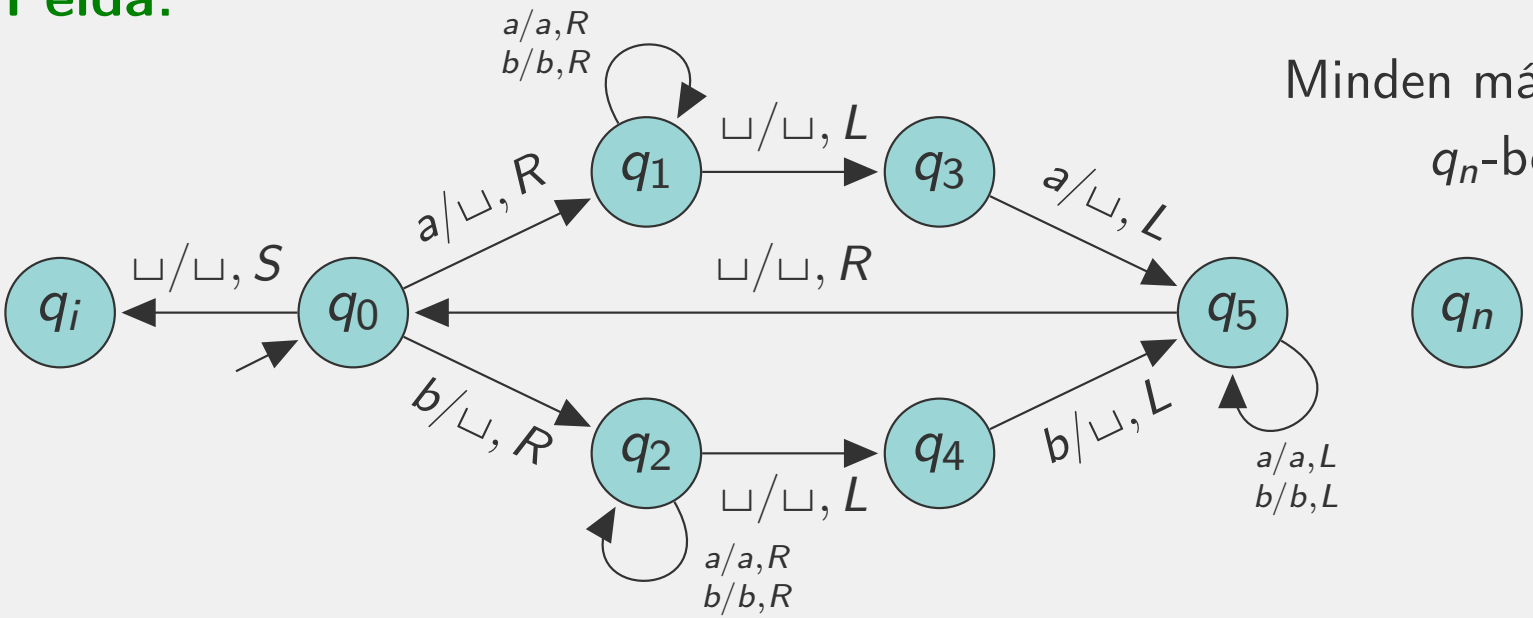
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



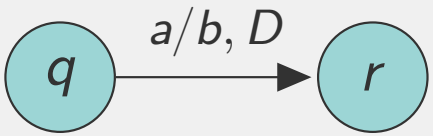
Minden más átmenet
q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5\sqcup b \vdash q_0b \vdash q_2\sqcup \vdash q_4\sqcup \vdash q_n\sqcup$

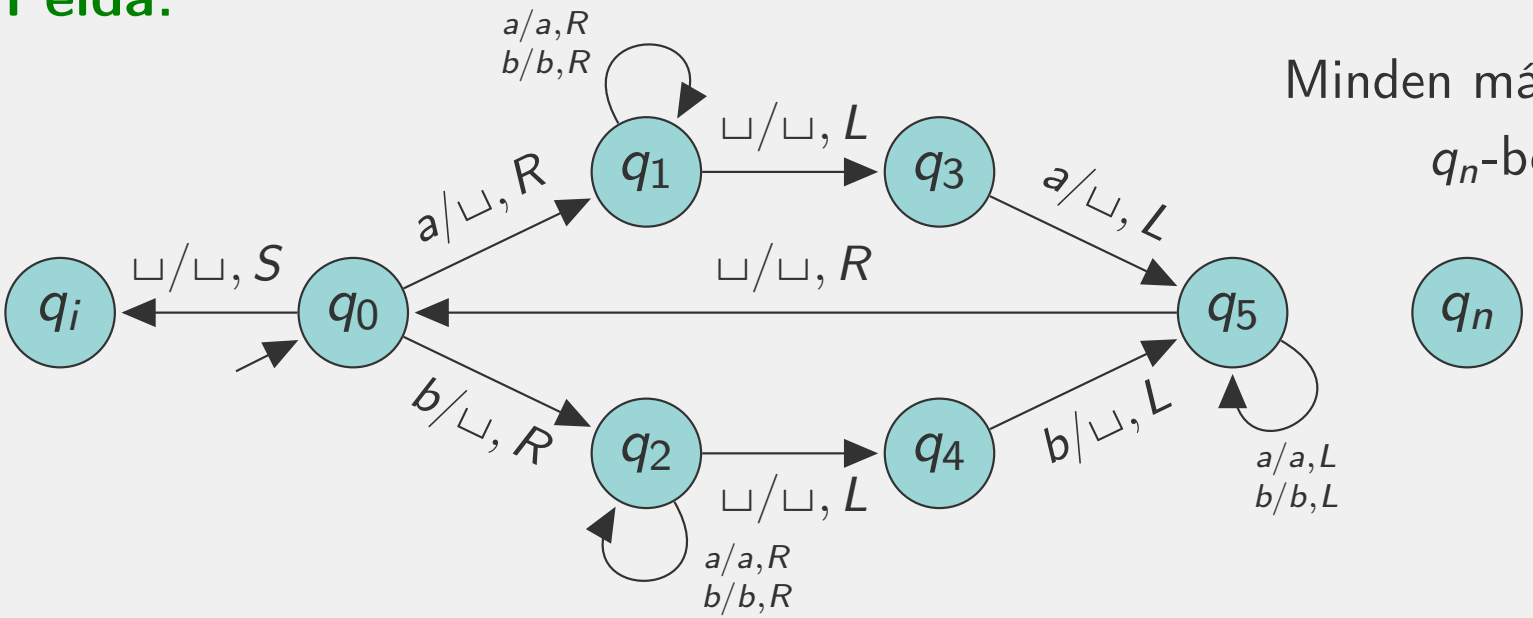
Turing gépek – Példa

Az **átmenetdiagram**:



megfelel a $\delta(q, a) = (r, b, D)$ átmenetnek
$(q, r \in Q, a, b \in \Gamma, D \in \{L, S, R\})$

Példa:



Minden más átmenet q_n-be megy

$L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Példa konfigurációátmenetek sorozatára az *aba* input esetén:

$q_0aba \vdash q_1ba \vdash bq_1a \vdash baq_1\sqcup \vdash bq_3a \vdash q_5b \vdash q_5\sqcup b \vdash q_0b \vdash q_2\sqcup \vdash q_4\sqcup \vdash q_n\sqcup$.

Turing gépek időigénye

Definíció

Az M Σ inputábécéjű TG **futási ideje** az $u \in \Sigma^*$ szóra a konfigurációátmenetek száma az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba.

Turing gépek időigénye

Definíció

Az M Σ inputábécéjű TG **futási ideje** az $u \in \Sigma^*$ szóra a konfigurációátmenetek száma az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba.

Vagyis a működés során megtett lépések száma. Ha a gép nem áll meg egy szóra, akkor a futási ideje erre a szóra ∞.

Turing gépek időigénye

Definíció

Az M Σ inputábécéjű TG **futási ideje** az $u \in \Sigma^*$ szóra a konfigurációátmenetek száma az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba.

Vagyis a működés során megtett lépések száma. Ha a gép nem áll meg egy szóra, akkor a futási ideje erre a szóra ∞.

Példa: Az előző példában a TG-ünk az *aba* inputra 10 lépésben jutott megállási konfigurációba, így *aba*-ra a futási idő 10.

Turing gépek időigénye

Definíció

Az M Σ inputábécéjű TG **futási ideje** az $u \in \Sigma^*$ szóra a konfigurációátmenetek száma az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba.

Vagyis a működés során megtett lépések száma. Ha a gép nem áll meg egy szóra, akkor a futási ideje erre a szóra ∞.

Példa: Az előző példában a TG-ünk az *aba* inputra 10 lépésben jutott megállási konfigurációba, így *aba*-ra a futási idő 10.

Definíció

Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az M Σ inputábécéjű TG $f(n)$ **időkorlátos** (vagy M $f(n)$ időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ szóra M futási ideje $\leqslant f(|u|)$.

Turing gépek időigénye

Definíció

Az M Σ inputábécéjű TG **futási ideje** az $u \in \Sigma^*$ szóra a konfigurációátmenetek száma az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba.

Vagyis a működés során megtett lépések száma. Ha a gép nem áll meg egy szóra, akkor a futási ideje erre a szóra ∞.

Példa: Az előző példában a TG-ünk az *aba* inputra 10 lépésben jutott megállási konfigurációba, így *aba*-ra a futási idő 10.

Definíció

Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az M Σ inputábécéjű TG $f(n)$ **időkorlátos** (vagy M $f(n)$ időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ szóra M futási ideje $\leqslant f(|u|)$.

Példa: Meggondolható, hogy az előző példában látott TG $O(n)$ iterációt végez iterációnként $O(n)$ lépéssel, így $O(n^2)$ időkorlátos.

Rekurzíve felsorolható és rekurzív nyelvek

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.

Rekurzíve felsorolható és rekurzív nyelvek

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M TG, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és $L(M) = L$.

Rekurzíve felsorolható és rekurzív nyelvek

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M TG, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és $L(M) = L$.

A Turing-felismerhető nyelveket **rekurzívan felsorolható**nak (vagy **parciálisan rekurzívnak**, vagy **félig eldönthetőnek**) az eldönthető nyelveket pedig **rekurzív**nak is nevezik.

Rekurzíve felsorolható és rekurzív nyelvek

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M TG, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és $L(M) = L$.

A Turing-felismerhető nyelveket **rekurzívan felsorolható**nak (vagy **parciálisan rekurzívnak**, vagy **félig eldönthetőnek**) az eldönthető nyelveket pedig **rekurzív**nak is nevezik.

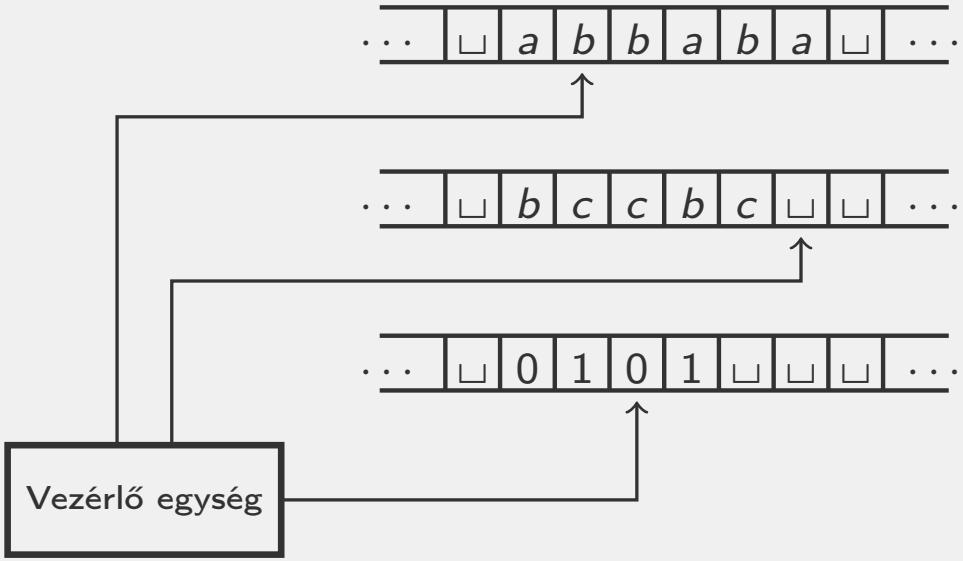
Definíció:

$\mathrm{RE} = \{L \mid L \text{ Turing-felismerhető}\}$,

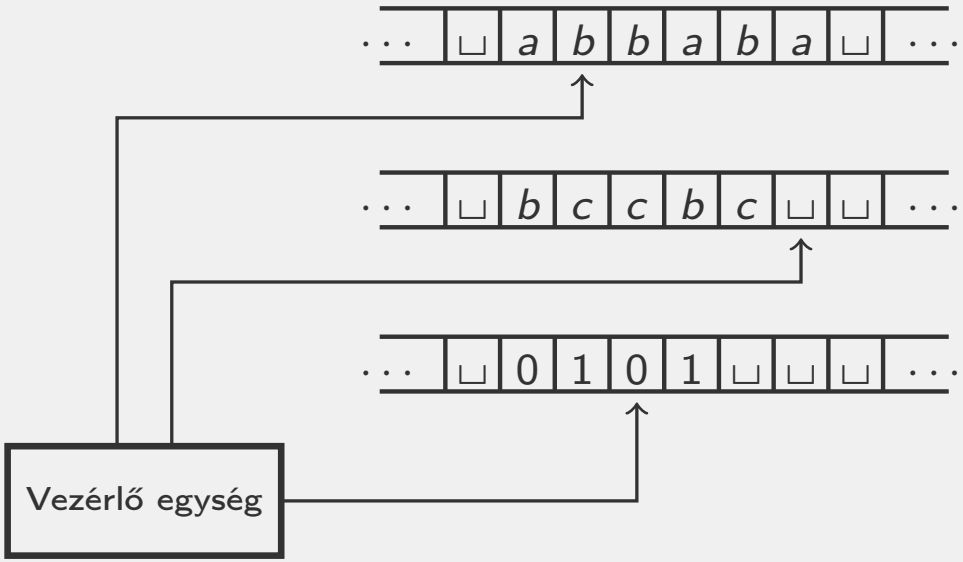
$\mathrm{R} = \{L \mid L \text{ eldönthető}\}$.

Nyilván $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{RE}$.

Többszalagos Turing gép – Informális kép

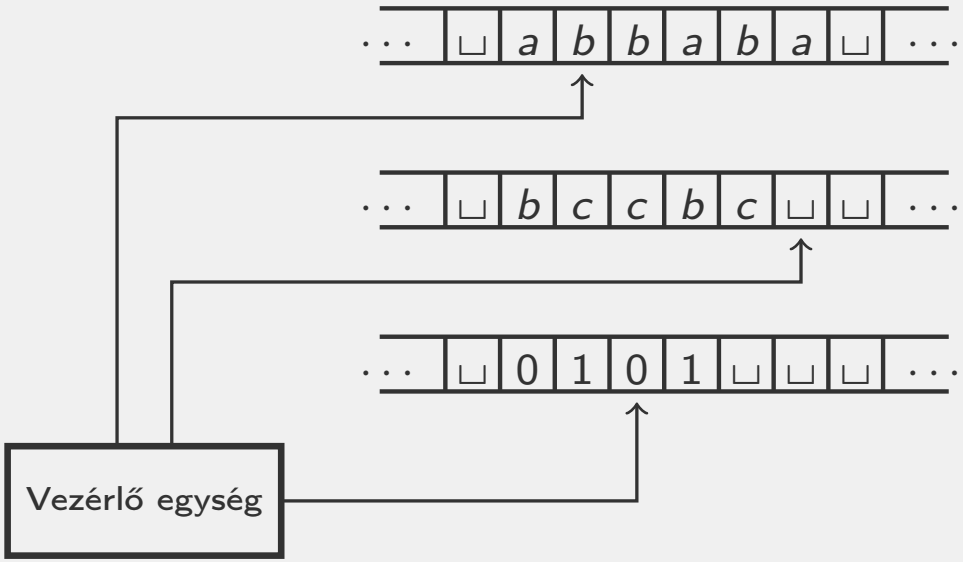


Többszalagos Turing gép – Informális kép



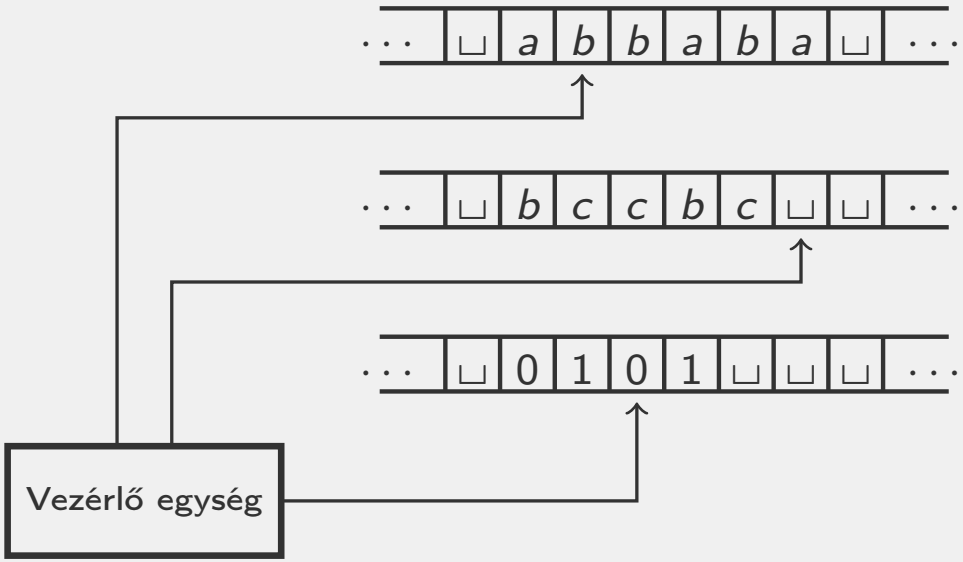
- Véges vezérlő egység, $k(\geqslant 1)$ darab kétirányba végtelen szalag, minden szalaghoz egy-egy saját író-olvasó fej.

Többszalagos Turing gép – Informális kép



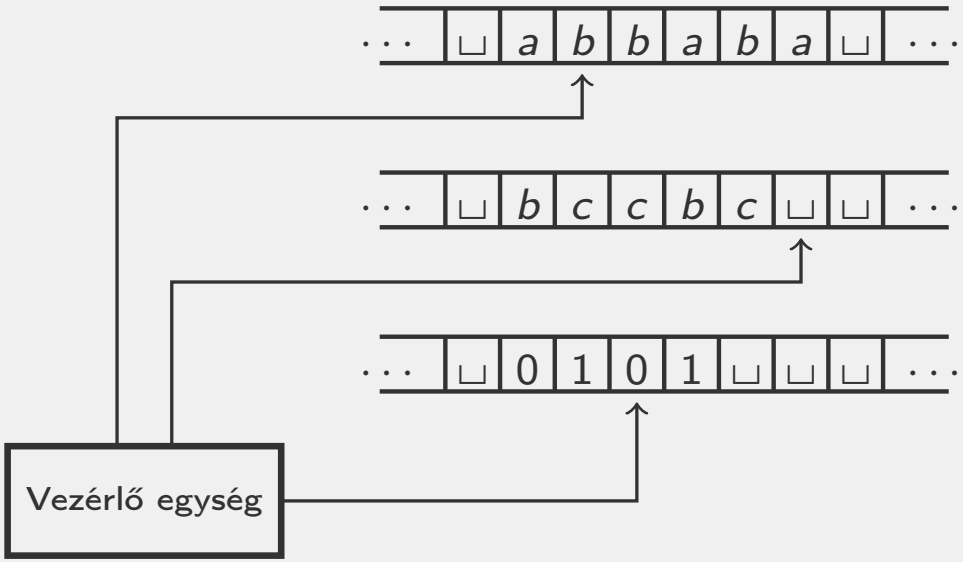
- Véges vezérlő egység, $k(\geqslant 1)$ darab kétirányba végtelen szalag, minden szalaghoz egy-egy saját író-olvasó fej.
- Egy ütem: Minden szalagról a fejek által mutatott betűk egyszerre történő beolvasása, átírása és a fejek léptetése egyszerre, de egymástól független irányokba.

Többszalagos Turing gép – Informális kép



- Véges vezérlő egység, $k(\geqslant 1)$ darab kétirányba végtelen szalag, minden szalaghoz egy-egy saját író-olvasó fej.
- Egy ütem: Minden szalagról a fejek által mutatott betűk egyszerre történő beolvasása, átírása és a fejek léptetése egyszerre, de egymástól független irányokba.
- Az egyszalagos géppel analóg elfogadás fogalom.

Többszalagos Turing gép – Informális kép



- Véges vezérlő egység, $k(\geqslant 1)$ darab kétirányba végtelen szalag, minden szalaghoz egy-egy saját író-olvasó fej.
- Egy ütem: Minden szalagról a fejek által mutatott betűk egyszerre történő beolvasása, átírása és a fejek léptetése egyszerre, de egymástól független irányokba.
- Az egyszalagos géppel analóg elfogadás fogalom.
- Az egyszalagos géppel analóg időigény fogalom (1 lépés = 1 ütem).

k-szalagos Turing gép

Definíció

Adott egy $k \geqslant 1$ egész szám. A **k-szalagos Turing gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$,
- $\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k$ az átmenet függvény.

δ az egész $(Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k$-n értelmezett függvény.

k-szalagos Turing gépek konfigurációi

Definíció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

k-szalagos Turing gépek konfigurációi

Definíció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Ez azt reprezentálja, hogy

- az aktuális állapot q és
- az i. szalag tartalma $u_i v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ és
- az i. fej v_i első betűjén áll $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

k-szalagos Turing gépek konfigurációi

Definíció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Ez azt reprezentálja, hogy

- az aktuális állapot q és
- az i. szalag tartalma $u_i v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ és
- az i. fej v_i első betűjén áll $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Definíció

Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfiguráció**: $u_i = \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $v_1 = u\sqcup$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$.

k-szalagos Turing gépek konfigurációi

Definíció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Ez azt reprezentálja, hogy

- az aktuális állapot q és
- az i. szalag tartalma $u_i v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ és
- az i. fej v_i első betűjén áll $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Definíció

Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfiguráció**: $u_i = \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $v_1 = u\sqcup$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$.

Azaz, az input szó az első szalagon van, ennek az első betűjéről indul az első szalag feje. A többi szalag kezdetben üres.

k-szalagos Turing gépek megállási konfigurációi

Definíció

A $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ konfiguráció, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,

- **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$,

k-szalagos Turing gépek megállási konfigurációi

Definíció

A $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ konfiguráció, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,

- **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$,
- **elutasító konfiguráció**, ha $q = q_n$,

k-szalagos Turing gépek megállási konfigurációi

Definíció

A $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ konfiguráció, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,

- **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$,
- **elutasító konfiguráció**, ha $q = q_n$,
- **megállási konfiguráció**, ha $q = q_i$ vagy $q = q_n$.

k-szalagos TG-ek egylépéses konfigurációátmenete

Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

k-szalagos TG-ek egylépéses konfigurációátmenete

Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen A $C = (q, u_1, a_1 v_1, \ldots, u_k, a_k v_k)$ egy konfiguráció, ahol $a_i \in \Gamma$, $u_i, v_i \in \Gamma^*$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Legyen továbbá $\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$, ahol $q, r \in Q$, $b_i \in \Gamma, D_i \in \{L, S, R\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Ekkor $C \vdash (r, u_1', v_1', \ldots, u_k', v_k')$, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra

k-szalagos TG-ek egylépéses konfigurációátmenete

Definíció

Egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos Turing gép $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációját az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyen A $C = (q, u_1, a_1 v_1, \ldots, u_k, a_k v_k)$ egy konfiguráció, ahol $a_i \in \Gamma$, $u_i, v_i \in \Gamma^*$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Legyen továbbá $\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$, ahol $q, r \in Q$, $b_i \in \Gamma, D_i \in \{L, S, R\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Ekkor $C \vdash (r, u_1', v_1', \ldots, u_k', v_k')$, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant k$-ra

- ha $D_i = R$, akkor $u_i' = u_i b_i$ és $v_i' = v_i$, ha $v_i \neq \varepsilon$, különben $v_i' = \sqcup$,
- ha $D_i = S$, akkor $u_i' = u_i$ és $v_i' = b_i v_i$,
- ha $D_i = L$, akkor $u_i = u_i' c$ $(c \in \Gamma)$ és $v_i' = c b_i v_i$ ha $u_i \neq \varepsilon$, különben $u_i' = \varepsilon$ és $v_i' = \sqcup b_i v_i$.

k-szalagos TG-ek többlépéses konfigurációátmenete

Tehát egy szalagjára vetítve a többszalagos TG pont úgy működik, mint az egyszalagos TG.

k-szalagos TG-ek többlépéses konfigurációátmenete

Tehát egy szalagjára vetítve a többszalagos TG pont úgy működik, mint az egyszalagos TG.

Példa:

Legyen k=2 és $\delta(q, a_1, a_2) = (r, b_1, b_2, R, S)$ a TG egy átmenete. Ekkor $(q, u_1, a_1 v_1, u_2, a_2 v_2) \vdash (r, u_1 b_1, v_1', u_2, b_2 v_2)$, ahol $v_1' = v_1$, ha $v_1 \neq \varepsilon$, különben $v_1' = \sqcup$.

k-szalagos TG-ek többlépéses konfigurációátmenete

Tehát egy szalagjára vetítve a többszalagos TG pont úgy működik, mint az egyszalagos TG.

Példa:

Legyen k=2 és $\delta(q, a_1, a_2) = (r, b_1, b_2, R, S)$ a TG egy átmenete. Ekkor $(q, u_1, a_1 v_1, u_2, a_2 v_2) \vdash (r, u_1 b_1, v_1', u_2, b_2 v_2)$, ahol $v_1' = v_1$, ha $v_1 \neq \varepsilon$, különben $v_1' = \sqcup$.

Vegyük észre, hogy a fejek nem kell, hogy egyazon irányba lépjenek.

k-szalagos TG-ek többlépéses konfigurációátmenete

Tehát egy szalagjára vetítve a többszalagos TG pont úgy működik, mint az egyszalagos TG.

Példa:

Legyen k=2 és $\delta(q, a_1, a_2) = (r, b_1, b_2, R, S)$ a TG egy átmenete. Ekkor $(q, u_1, a_1 v_1, u_2, a_2 v_2) \vdash (r, u_1 b_1, v_1', u_2, b_2 v_2)$, ahol $v_1' = v_1$, ha $v_1 \neq \varepsilon$, különben $v_1' = \sqcup$.

Vegyük észre, hogy a fejek nem kell, hogy egyazon irányba lépjenek.

A k-szalagos TG-ek **többlépéses konfigurációátmenet** relációját ugyanúgy definiáljuk, mint az egyszalagos esetben.

k-szalagos TG-ek többlépéses konfigurációátmenete

Tehát egy szalagjára vetítve a többszalagos TG pont úgy működik, mint az egyszalagos TG.

Példa:

Legyen k=2 és $\delta(q, a_1, a_2) = (r, b_1, b_2, R, S)$ a TG egy átmenete. Ekkor $(q, u_1, a_1 v_1, u_2, a_2 v_2) \vdash (r, u_1 b_1, v_1', u_2, b_2 v_2)$, ahol $v_1' = v_1$, ha $v_1 \neq \varepsilon$, különben $v_1' = \sqcup$.

Vegyük észre, hogy a fejek nem kell, hogy egyazon irányba lépjenek.

A k-szalagos TG-ek **többlépéses konfigurációátmenet** relációját ugyanúgy definiáljuk, mint az egyszalagos esetben. Jelölés: $\vdash^*$.

k-szalagos TG – felismert nyelv, időigény

Definíció

$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos TG által felismert nyelv:
$L(M) = \{ u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),$
valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

k-szalagos TG – felismert nyelv, időigény

Definíció

$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos TG által felismert nyelv:
$L(M) = \{ u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),$
valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

Azaz, csakúgy mint az egyszalagos esetben, azon inputábécé feletti szavak halmaza, melyekkel (az első szalagján) a TG-et indítva az az elfogadó, q_i állapotában áll le.

k-szalagos TG – felismert nyelv, időigény

Definíció

$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos TG által felismert nyelv:
$L(M) = \{ u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),$
valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

Azaz, csakúgy mint az egyszalagos esetben, azon inputábécé feletti szavak halmaza, melyekkel (az első szalagján) a TG-et indítva az az elfogadó, q_i állapotában áll le.

- A k-szalagos TG-ek által **felismerhető** illetve **eldönthető** nyelvek fogalma szintén analóg az egyszalagos esettel.

k-szalagos TG – felismert nyelv, időigény

Definíció

$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos TG által felismert nyelv:
$L(M) = \{ u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),$
valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

Azaz, csakúgy mint az egyszalagos esetben, azon inputábécé feletti szavak halmaza, melyekkel (az első szalagján) a TG-et indítva az az elfogadó, q_i állapotában áll le.

- A k-szalagos TG-ek által **felismerhető** illetve **eldönthető** nyelvek fogalma szintén analóg az egyszalagos esettel.
- Egy k-szalagos Turing gép **futási ideje** egy u szóra a hozzá tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba megtett lépések száma.

k-szalagos TG – felismert nyelv, időigény

Definíció

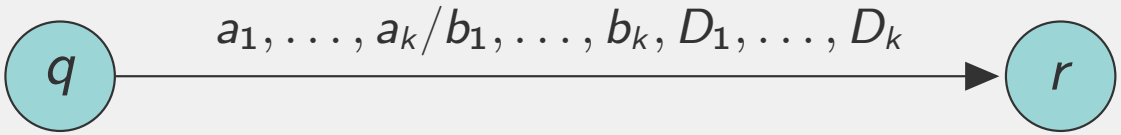
$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos TG által felismert nyelv:
$L(M) = \{ u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k),$
valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

Azaz, csakúgy mint az egyszalagos esetben, azon inputábécé feletti szavak halmaza, melyekkel (az első szalagján) a TG-et indítva az az elfogadó, q_i állapotában áll le.

- A k-szalagos TG-ek által **felismerhető** illetve **eldönthető** nyelvek fogalma szintén analóg az egyszalagos esettel.
- Egy k-szalagos Turing gép **futási ideje** egy u szóra a hozzá tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba megtett lépések száma.
- Az **időigény** definíciója megegyezik az egyszalagos esetnél tárgyalttal.

k-szalagos Turing gép – átmenetdiagram

A k-szalagos TG-ek **átmenetdiagramja** egy csúcs- és élcímkézett irányított gráf, melyre

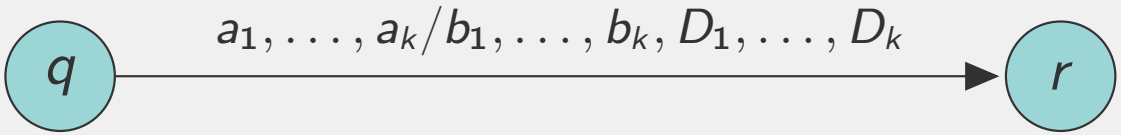


$$\iff \delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$$

$$(q, r \in Q, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \Gamma, D_1, \ldots, D_k \in \{L, S, R\})$$

k-szalagos Turing gép – átmenetdiagram

A k-szalagos TG-ek **átmenetdiagramja** egy csúcs- és élcímkézett irányított gráf, melyre

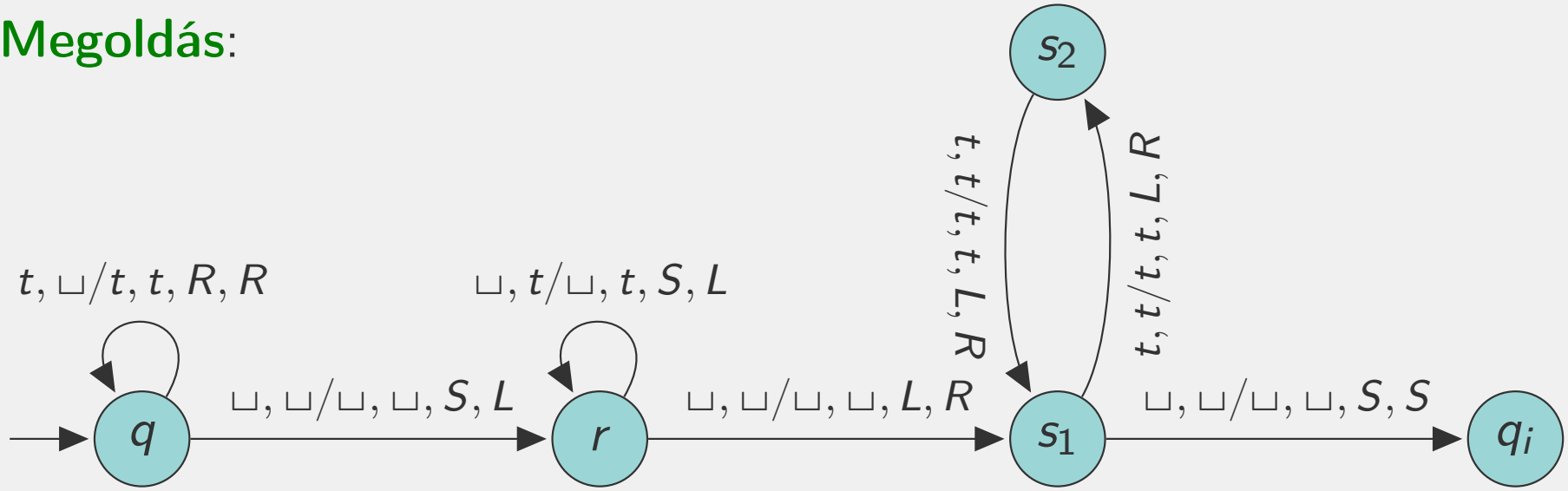


$$\iff \delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (r, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$$
$$(q, r \in Q, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \Gamma, D_1, \ldots, D_k \in \{L, S, R\})$$

Feladat: Készítsünk egy M kétszalagos Turing gépet, melyre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$!

k-szalagos Turing gép – példa

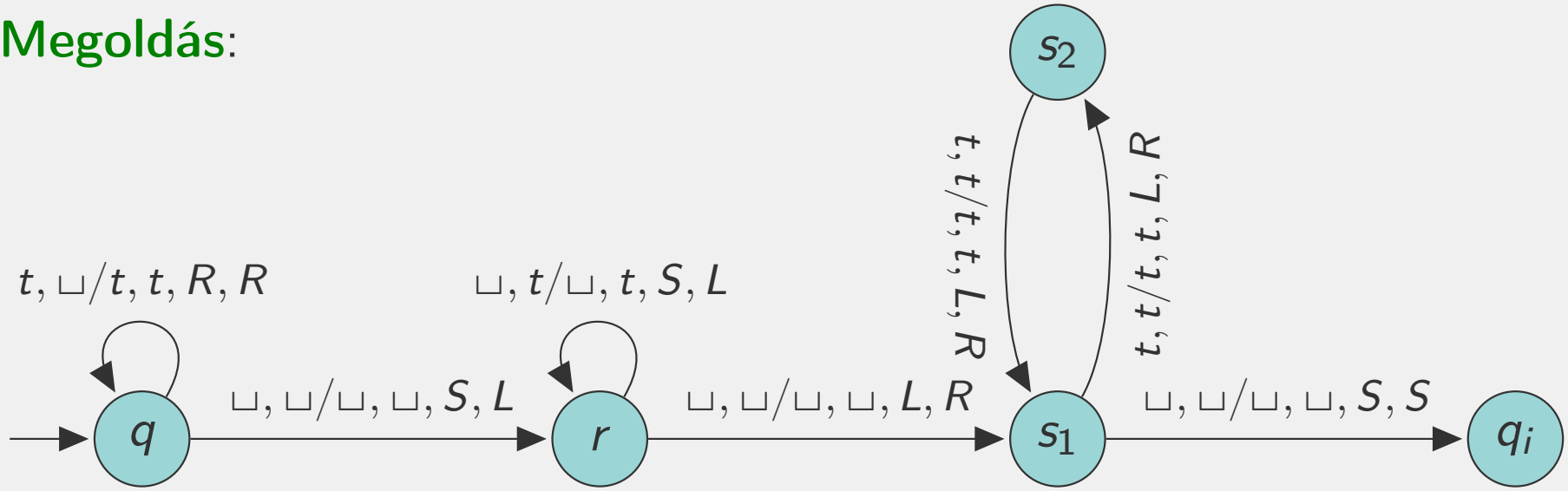
Megoldás:



$t \in \{a, b\}$ tetszőleges. A többi átmenet q_n-be megy.

k-szalagos Turing gép – példa

Megoldás:

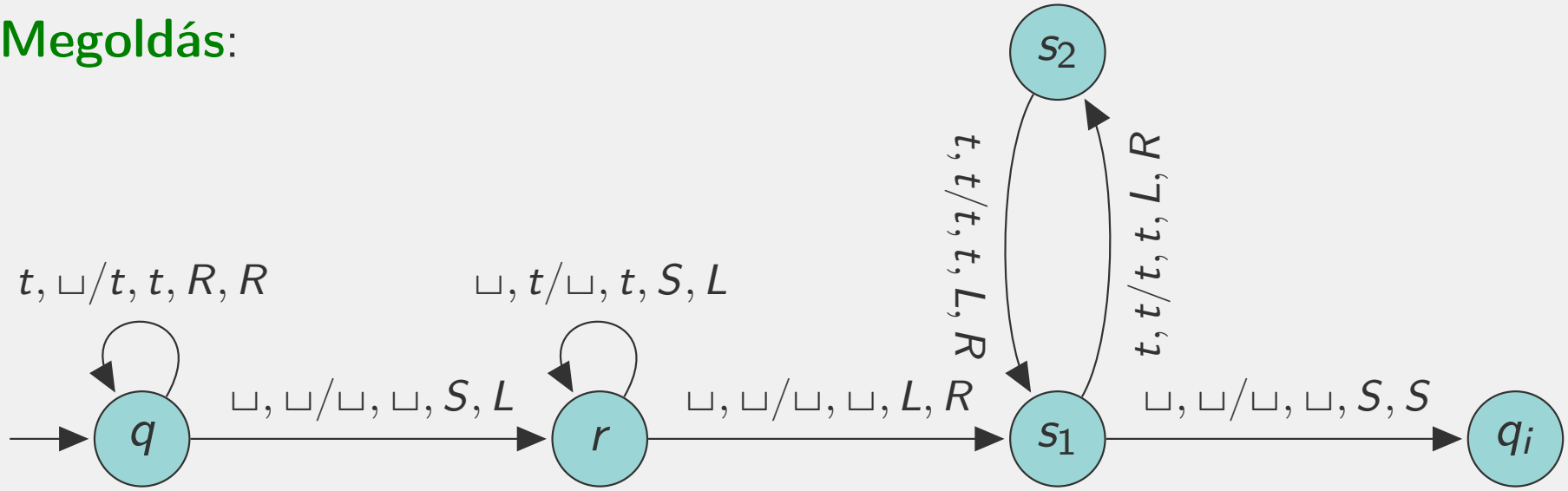


$t \in \{a, b\}$ tetszőleges. A többi átmenet q_n-be megy.

Például $(q, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, a, bba, a, \sqcup) \vdash (q, ab, ba, ab, \sqcup) \vdash$
$(q, abb, a, abb, \sqcup) \vdash (q, abba, \sqcup, abba, \sqcup) \vdash (r, abba, \sqcup, abb, a) \vdash$
$(r, abba, \sqcup, ab, ba) \vdash (r, abba, \sqcup, a, bba) \vdash (r, abba, \sqcup, \varepsilon, abba) \vdash$
$(r, abba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup abba) \vdash (s_1, abb, a, \varepsilon, abba) \vdash (s_2, ab, ba, a, bba) \vdash$
$(s_1, a, bba, ab, ba) \vdash (s_2, \varepsilon, abba, abb, a) \vdash$
$(s_1, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup) \vdash (q_i, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup)$

k-szalagos Turing gép – példa

Megoldás:



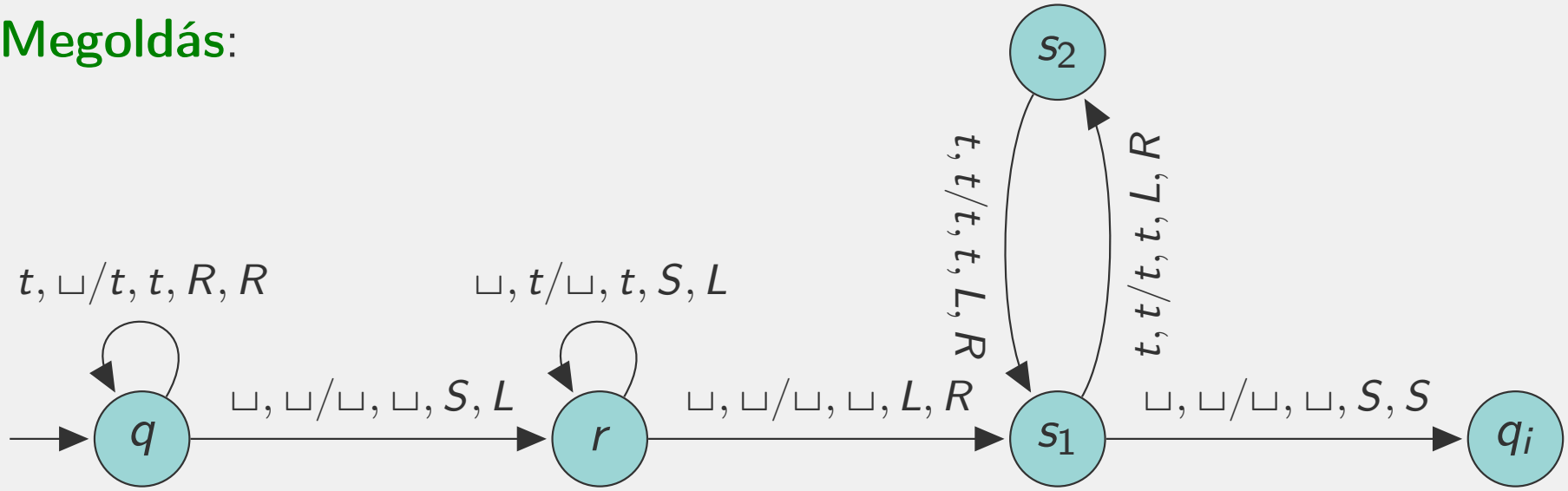
$t \in \{a, b\}$ tetszőleges. A többi átmenet q_n-be megy.

Például $(q, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, a, bba, a, \sqcup) \vdash (q, ab, ba, ab, \sqcup) \vdash$
$(q, abb, a, abb, \sqcup) \vdash (q, abba, \sqcup, abba, \sqcup) \vdash (r, abba, \sqcup, abb, a) \vdash$
$(r, abba, \sqcup, ab, ba) \vdash (r, abba, \sqcup, a, bba) \vdash (r, abba, \sqcup, \varepsilon, abba) \vdash$
$(r, abba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup abba) \vdash (s_1, abb, a, \varepsilon, abba) \vdash (s_2, ab, ba, a, bba) \vdash$
$(s_1, a, bba, ab, ba) \vdash (s_2, \varepsilon, abba, abb, a) \vdash$
$(s_1, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup) \vdash (q_i, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup)$

Mennyi a TG időigénye?

k-szalagos Turing gép – példa

Megoldás:



$t \in \{a, b\}$ tetszőleges. A többi átmenet q_n-be megy.

Például $(q, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, a, bba, a, \sqcup) \vdash (q, ab, ba, ab, \sqcup) \vdash$
$(q, abb, a, abb, \sqcup) \vdash (q, abba, \sqcup, abba, \sqcup) \vdash (r, abba, \sqcup, abb, a) \vdash$
$(r, abba, \sqcup, ab, ba) \vdash (r, abba, \sqcup, a, bba) \vdash (r, abba, \sqcup, \varepsilon, abba) \vdash$
$(r, abba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup abba) \vdash (s_1, abb, a, \varepsilon, abba) \vdash (s_2, ab, ba, a, bba) \vdash$
$(s_1, a, bba, ab, ba) \vdash (s_2, \varepsilon, abba, abb, a) \vdash$
$(s_1, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup) \vdash (q_i, \varepsilon, \sqcup abba, abba, \sqcup)$

Mennyi a TG időigénye? Ez egy $O(n)$ időkorlátos TG, mivel egy n hosszú inputra legfeljebb $3n + 3$ lépést tesz.

k-szalagos TG szimulálása egyszalagossal

Definíció

Két TG **ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

k-szalagos TG szimulálása egyszalagossal

Definíció

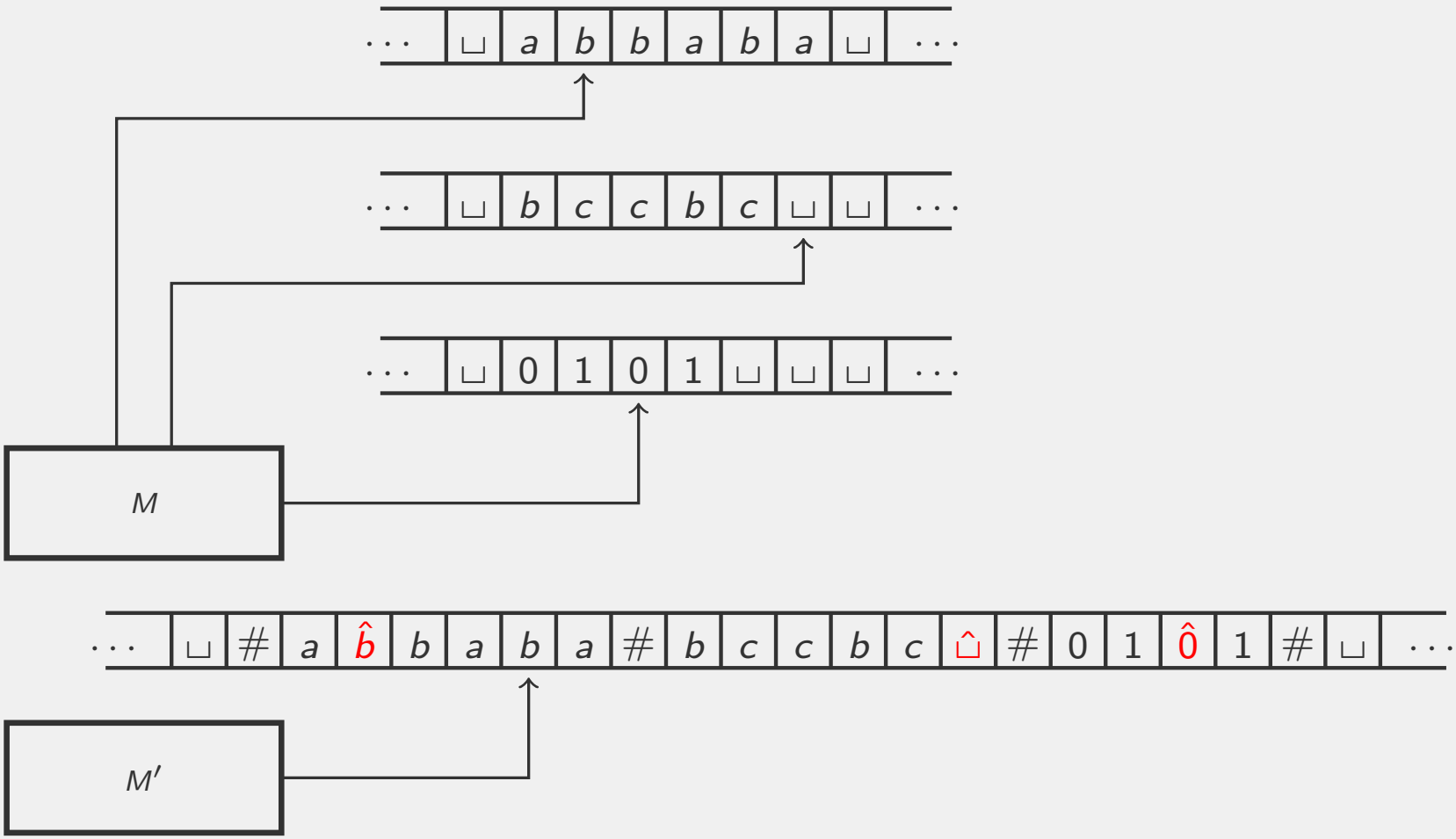
Két TG **ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

Tétel

Minden M k-szalagos Turing géphez megadható egy vele ekvivalens M' egyszalagos Turing gép. Továbbá, ha M legalább lineáris időigényű $f(n)$ időkorlátos gép (azaz $f(n) = \Omega(n)$), akkor M' $O(f(n)^2)$ időkorlátos.

Többszalagos TG szimulálása egyszalagossal

A szimuláció alapötlete:



A szalagok tartalmát #-ekkel elválasztva eltárolhatjuk M' egyetlen szalagján, a fejek helyzetét ^-al megjelölve.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

Egyirányban végtelen szalagos TG: Bal oldalon zárt a TG szalagja, a fej nem tud "leesni", ha a legbaloldalibb cellán balra lépés az utsítás, akkor a fej helyben marad.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

Egyirányban végtelen szalagos TG: Bal oldalon zárt a TG szalagja, a fej nem tud "leesni", ha a legbaloldalibb cellán balra lépés az utsítás, akkor a fej helyben marad.

Tétel

Minden egyszalagos M TG-hez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' TG.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

Egyirányban végtelen szalagos TG: Bal oldalon zárt a TG szalagja, a fej nem tud "leesni", ha a legbaloldalibb cellán balra lépés az utsítás, akkor a fej helyben marad.

Tétel

Minden egyszalagos M TG-hez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' TG.

A bizonyítás ötlete, hogy először egy kétszalagos egyirányban végtelen szalagos géppel szimulálunk egy egyszalagos kétirányban végtelen szalagost (az első szalagon tárolva a kezdőpozíciótól jobbra levő tartalmat, a másodikon pedig a balra lévő tartalom tükörképét). Majd a kétszalagos egyirányban végtelen szalagos gépet szimuláljuk egy ugyanilyen egyszalagossal.

Turing-gép egy irányban végtelen szalaggal

Egyirányban végtelen szalagos TG: Bal oldalon zárt a TG szalagja, a fej nem tud "leesni", ha a legbaloldalibb cellán balra lépés az utsítás, akkor a fej helyben marad.

Tétel

Minden egyszalagos M TG-hez van vele ekvivalens egyirányban végtelen szalagos M'' TG.

A bizonyítás ötlete, hogy először egy kétszalagos egyirányban végtelen szalagos géppel szimulálunk egy egyszalagos kétirányban végtelen szalagost (az első szalagon tárolva a kezdőpozíciótól jobbra levő tartalmat, a másodikon pedig a balra lévő tartalom tükörképét). Majd a kétszalagos egyirányban végtelen szalagos gépet szimuláljuk egy ugyanilyen egyszalagossal.

Megjegyzés: Nyilvánvalóan a másik irány is igaz.

Nemdeterminisztikus Turing gép

Definíció

Az (egyszalagos) **nemdeterminisztikus Turing gép** (NTG) csak átmenetfüggvényében különbözik a determinisztikustól.
$\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})$.

Nemdeterminisztikus Turing gép

Definíció

Az (egyszalagos) **nemdeterminisztikus Turing gép** (NTG) csak átmenetfüggvényében különbözik a determinisztikustól.
$\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})$.

Azaz míg a **determinisztikus** esetben a δ átmenetfüggvény minden egyes $(Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma$-beli párhoz **pontosan egy**, addig egy **nemdeterminisztikus** TG **akárhány** (pl. 0,1,5,100) darab $Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$-beli rendezett hármast rendelhet hozzá.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

egylépéses konfigurációátmenet

A konfiguráció fogalma azonos, jelölje most is C_M az M gép lehetséges konfigurációinak halmazát.A $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációt a következőképpen definiáljuk.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

egylépéses konfigurációátmenet

A konfiguráció fogalma azonos, jelölje most is C_M az M gép lehetséges konfigurációinak halmazát.A $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációt a következőképpen definiáljuk.

Definíció

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

egylépéses konfigurációátmenet

A konfiguráció fogalma azonos, jelölje most is C_M az M gép lehetséges konfigurációinak halmazát.A $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációt a következőképpen definiáljuk.

Definíció

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $(r, b, R) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $(r, b, S) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $(r, b, L) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

egylépéses konfigurációátmenet

A konfiguráció fogalma azonos, jelölje most is C_M az M gép lehetséges konfigurációinak halmazát.A $\vdash \subseteq C_M \times C_M$ **egylépéses konfigurációátmenet** relációt a következőképpen definiáljuk.

Definíció

Legyen $uqav$ egy konfiguráció, ahol $a \in \Gamma$, $u, v \in \Gamma^*$.

- Ha $(r, b, R) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash ubrv'$, ahol $v' = v$, ha $v \neq \varepsilon$, különben $v' = \sqcup$,
- ha $(r, b, S) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash urbv$,
- ha $(r, b, L) \in \delta(q, a)$, akkor $uqav \vdash u'rcbv$, ahol $c \in \Gamma$ és $u'c = u$, ha $u \neq \varepsilon$, különben $u' = u$ és $c = \sqcup$.

Míg a **determinisztikus** esetben minden nem-megállási C konfigurációhoz **pontosan egy** C' konfiguráció létezett, melyre $C \vdash C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet (de véges sok, hiszen $|Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}|$ véges).

Nemdeterminisztikus Turing-gép

többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív tranzitív lezártja, jelölése $\vdash^*$.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív tranzitív lezártja, jelölése $\vdash^*$.

Legyen C egy konfiguráció. Míg a **determinisztikus** esetben **legfeljebb egy** C' megállási konfiguráció létezhetett, melyre $C \vdash^* C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív tranzitív lezártja, jelölése $\vdash^*$.

Legyen C egy konfiguráció. Míg a **determinisztikus** esetben **legfeljebb egy** C' megállási konfiguráció létezhetett, melyre $C \vdash^* C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet.

Definíció

Az M NTG által felismert nyelv
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív tranzitív lezártja, jelölése $\vdash^*$.

Legyen C egy konfiguráció. Míg a **determinisztikus** esetben **legfeljebb egy** C' megállási konfiguráció létezhetett, melyre $C \vdash^* C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet.

Definíció

Az M NTG által felismert nyelv
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

$\vdash^*$ fogalmának módosulása miatt a felismert nyelv fogalma is módosult.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

többlépéses konfigurációátmenet, felismert nyelv

Többlépéses konfigurációátmenet: $\vdash$ reflexív tranzitív lezártja, jelölése $\vdash^*$.

Legyen C egy konfiguráció. Míg a **determinisztikus** esetben **legfeljebb egy** C' megállási konfiguráció létezhetett, melyre $C \vdash^* C'$, addig a **nemdeterminisztikus** esetben **több** ilyen is létezhet.

Definíció

Az M NTG által felismert nyelv
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

$\vdash^*$ fogalmának módosulása miatt a felismert nyelv fogalma is módosult. Egy NTG-re úgy gondolhatunk, hogy **több számítása is lehet egyazon szóra**. Akkor fogad el egy szót, ha az adott szóra **legalább egy számítása q_i-ben ér véget**.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Definíció

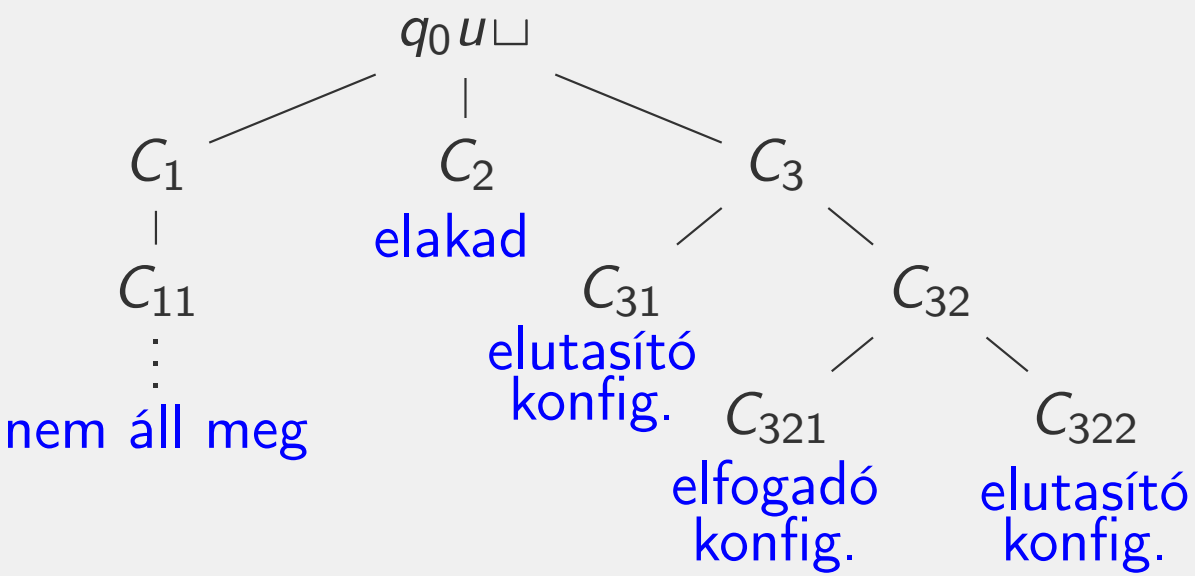
Egy M TG egy $u \in \Sigma^*$ inputjához tartozó **nemdeterminisztikus számítási fája** egy gyökeres fa, melynek csúcsai M konfigurációival címkézettek. $q_0 u \sqcup$ a gyökér címkéje. Ha C egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Definíció

Egy M TG egy $u \in \Sigma^*$ inputjához tartozó **nemdeterminisztikus számítási fája** egy gyökeres fa, melynek csúcsai M konfigurációival címkézettek. $q_0 u \sqcup$ a gyökér címkéje. Ha C egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.

Példa:

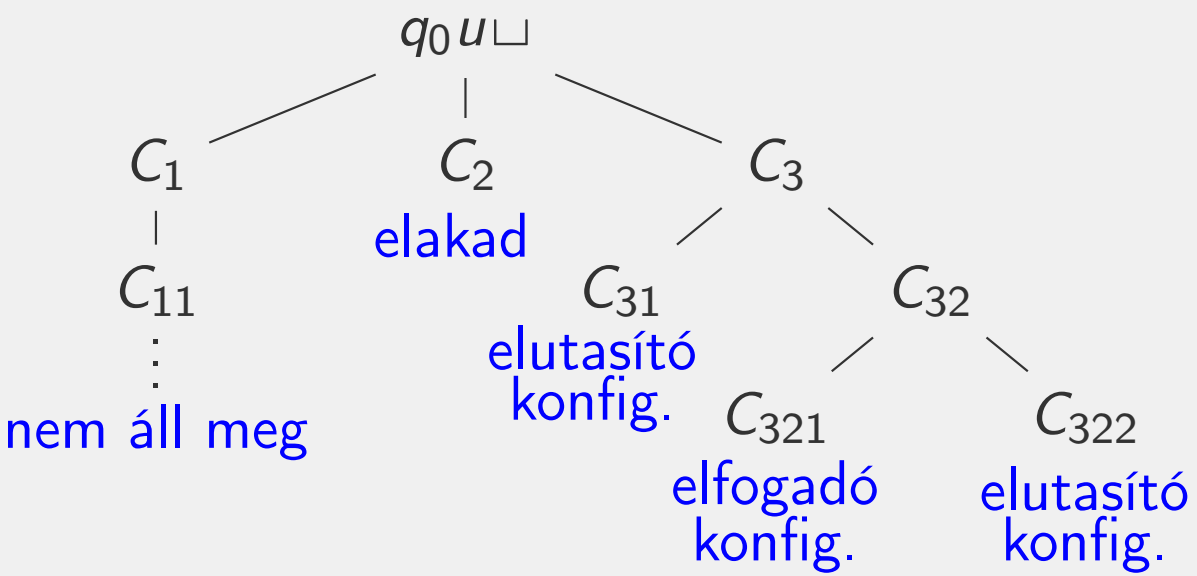


Nemdeterminisztikus Turing-gép

Definíció

Egy M TG egy $u \in \Sigma^*$ inputjához tartozó **nemdeterminisztikus számítási fája** egy gyökeres fa, melynek csúcsai M konfigurációival címkézettek. $q_0 u \sqcup$ a gyökér címkéje. Ha C egy csúcs címkéje, akkor $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ gyereke van és ezek címkéi éppen $\{C' \mid C \vdash C'\}$ elemei.

Példa:



M elfogadja u-t, hiszen a $q_0 u \sqcup \vdash C_3 \vdash C_{32} \vdash C_{321}$ számítása elfogadó konfigurációba visz. **Egyetlen** elfogadó számítás is elég!

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, elakadóak (ha olyan C-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \varnothing$), illetve végtelenek.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, elakadóak (ha olyan C-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \varnothing$), illetve végtelenek.

Észrevétel: $u \in L(M) \Leftrightarrow$ az u-hoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fának van olyan levele, ami elfogadó konfiguráció.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, elakadóak (ha olyan C-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \varnothing$), illetve végtelenek.

Észrevétel: $u \in L(M) \Leftrightarrow$ az u-hoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fának van olyan levele, ami elfogadó konfiguráció.

Definíció

Az M NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri továbbá minden $u \in \Sigma^*$ input szóhoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fa véges és a fa minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, elakadóak (ha olyan C-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \varnothing$), illetve végtelenek.

Észrevétel: $u \in L(M) \Leftrightarrow$ az u-hoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fának van olyan levele, ami elfogadó konfiguráció.

Definíció

Az M NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri továbbá minden $u \in \Sigma^*$ input szóhoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fa véges és a fa minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

Definíció

Az M NTG $f(n)$ **időkorlátos** (időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ n hosszú szóra u számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Tehát adott inputra több számítás is lehetséges, ezek lehetnek elfogadóak, elutasítóak, elakadóak (ha olyan C-be jut, melyre $\{C' \mid C \vdash C'\} = \varnothing$), illetve végtelenek.

Észrevétel: $u \in L(M) \Leftrightarrow$ az u-hoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fának van olyan levele, ami elfogadó konfiguráció.

Definíció

Az M NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri továbbá minden $u \in \Sigma^*$ input szóhoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fa véges és a fa minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

Definíció

Az M NTG $f(n)$ **időkorlátos** (időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ n hosszú szóra u számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

Megjegyzés: a nemdeterminisztikus Turing-gép definíciója értelemszerűen kiterjeszthető k-szalagos gépekre is, így beszélhetünk k-szalagos nemdeterminisztikus Turing-gépekről is.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

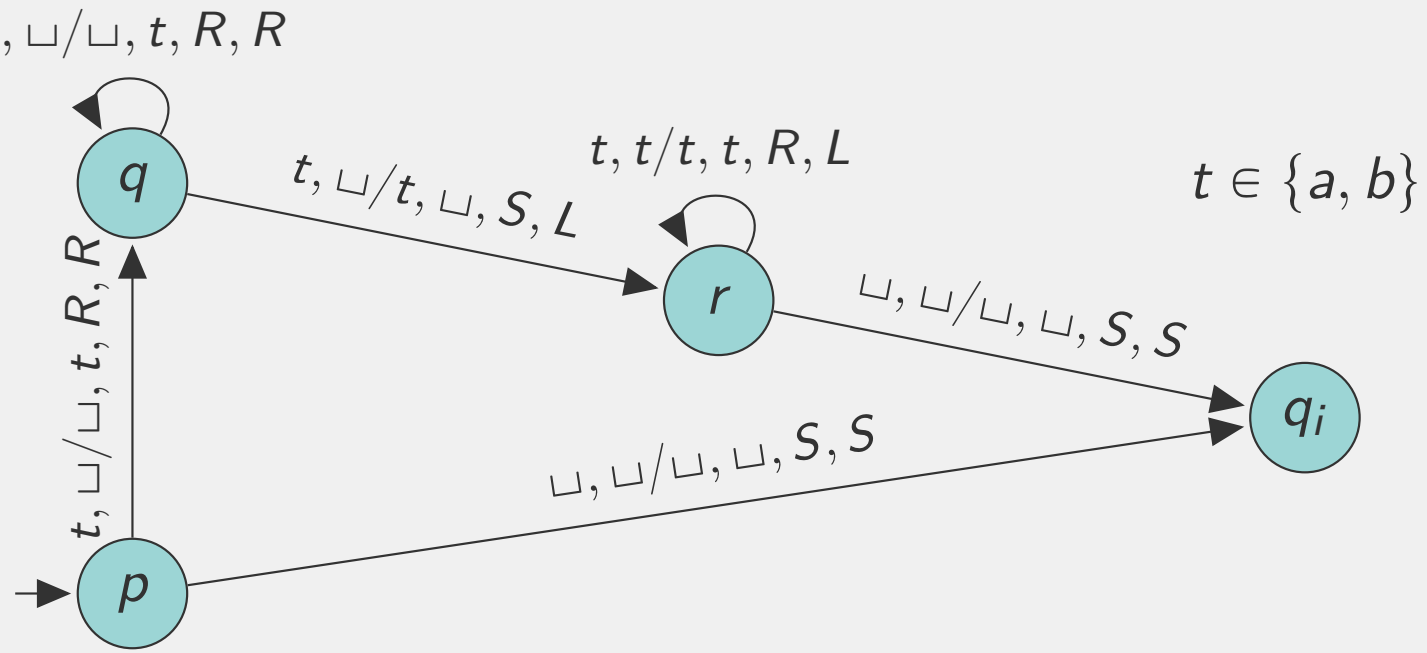
Példa

Az alábbi M nemdeterminisztikus Turing-gépre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Példa

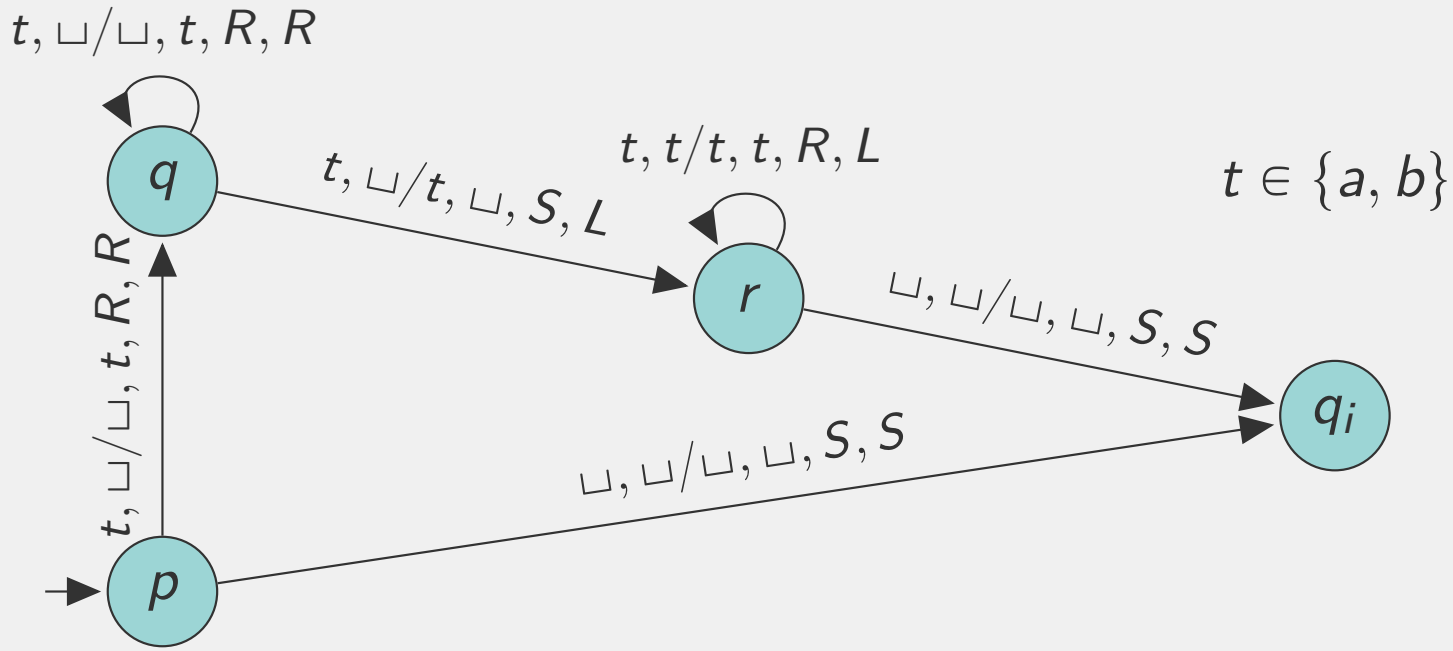
Az alábbi M nemdeterminisztikus Turing-gépre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$.



Nemdeterminisztikus Turing-gép

Példa

Az alábbi M nemdeterminisztikus Turing-gépre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

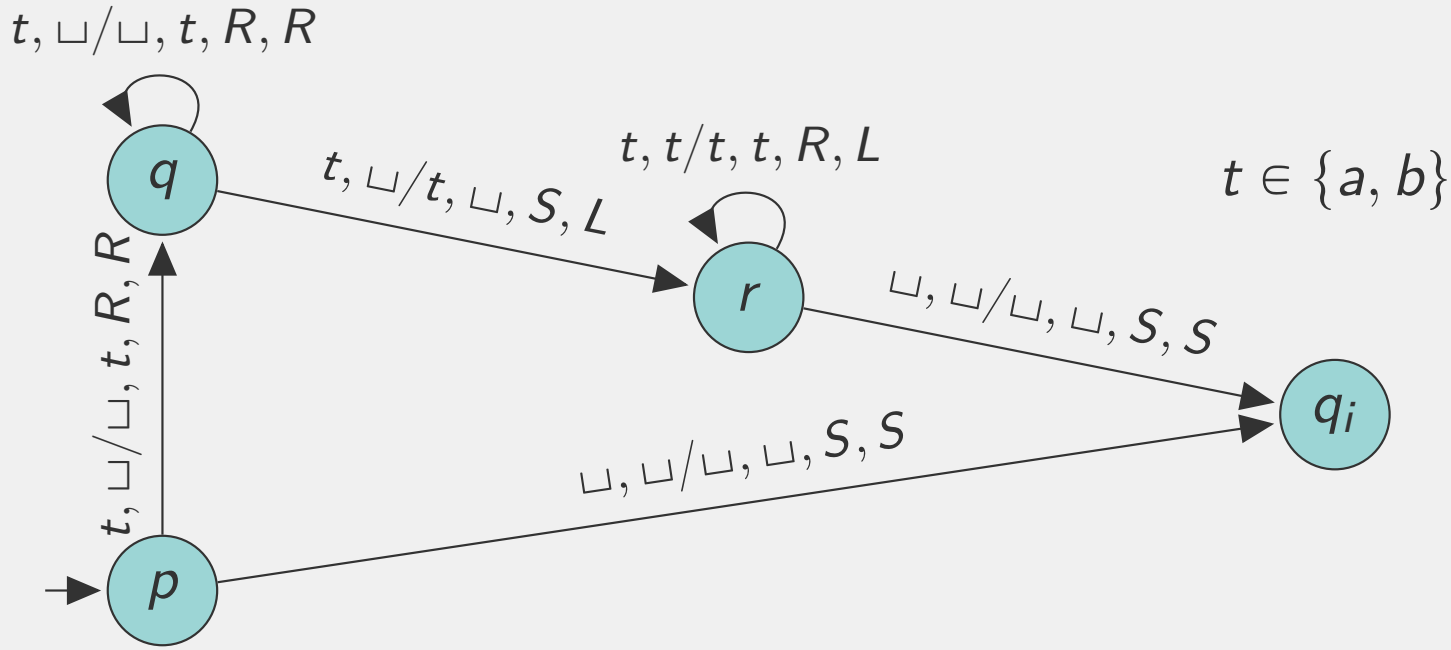


$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, bba, \varepsilon, a) \vdash$
$(q_n, \varepsilon, bba, \varepsilon, a)$

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Példa

Az alábbi M nemdeterminisztikus Turing-gépre $L(M) = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$.



$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (r, \varepsilon, bba, \varepsilon, a) \vdash$
$(q_n, \varepsilon, bba, \varepsilon, a)$

$(p, \varepsilon, abba, \varepsilon, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, bba, a, \sqcup) \vdash (q, \varepsilon, ba, ab, \sqcup) \vdash$
$(r, \varepsilon, ba, a, b) \vdash (r, b, a, \varepsilon, ab) \vdash (r, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab) \vdash$
$(q_i, ba, \sqcup, \varepsilon, \sqcup ab)$

NTG szimulálása TG-pel

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG.

A szimuláció alapötlete: Egy w bemenetre járja be M' az M gép w-hez tartozó nemdeterminisztikus számítási fájának csúcsait szélességi bejárással.

NTG szimulálása TG-pel

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG.

A szimuláció alapötlete: Egy w bemenetre járja be M' az M gép w-hez tartozó nemdeterminisztikus számítási fájának csúcsait szélességi bejárással.

Minden csúcs megfeleltethető egy a gyökértől az adott csúcsig tartó parciális számításnak.

NTG szimulálása TG-pel

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG.

A szimuláció alapötlete: Egy w bemenetre járja be M' az M gép w-hez tartozó nemdeterminisztikus számítási fájának csúcsait szélességi bejárással.

Minden csúcs megfeleltethető egy a gyökértől az adott csúcsig tartó parciális számításnak.

Ha a csúcsnak megfelelő számítás nem ért még véget vagy pedig egy elutasító számításnak felel meg, akkor vegyük a szélességi bejárás szerinti következő csúcsot.

NTG szimulálása TG-pel

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG.

A szimuláció alapötlete: Egy w bemenetre járja be M' az M gép w-hez tartozó nemdeterminisztikus számítási fájának csúcsait szélességi bejárással.

Minden csúcs megfeleltethető egy a gyökértől az adott csúcsig tartó parciális számításnak.

Ha a csúcsnak megfelelő számítás nem ért még véget vagy pedig egy elutasító számításnak felel meg, akkor vegyük a szélességi bejárás szerinti következő csúcsot.

Amennyiben a csúcs egy elfogadó számításnak felel meg M' fogadja el w-t.

NTG szimulálása TG-pel

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ idejű NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ idejű M' determinisztikus TG.

A szimuláció alapötlete: Egy w bemenetre járja be M' az M gép w-hez tartozó nemdeterminisztikus számítási fájának csúcsait szélességi bejárással.

Minden csúcs megfeleltethető egy a gyökértől az adott csúcsig tartó parciális számításnak.

Ha a csúcsnak megfelelő számítás nem ért még véget vagy pedig egy elutasító számításnak felel meg, akkor vegyük a szélességi bejárás szerinti következő csúcsot.

Amennyiben a csúcs egy elfogadó számításnak felel meg M' fogadja el w-t.

Időigény: A legfeljebb n hosszúságú, a fa gyökeréből induló utak összhossza n-nek exponenciális függvénye.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Következmények:

1. Egy nyelv Turing-felismerhető, akkor és csak akkor, ha valamely nemdeterminisztikus Turing-gép felismeri.

Nemdeterminisztikus Turing-gép

Következmények:

1. Egy nyelv Turing-felismerhető, akkor és csak akkor, ha valamely nemdeterminisztikus Turing-gép felismeri.
2. Egy nyelv eldönthető, akkor és csak akkor, ha van azt eldöntő nemdeterminisztikus Turing-gép.

Turing-ekvivalens számítási modellek

Most bemutatunk néhány olyan számítási modellt, amelyeknek a számítási ereje megegyezik a Turing gépek számítási erejével.

Turing-ekvivalens számítási modellek

Most bemutatunk néhány olyan számítási modellt, amelyeknek a számítási ereje megegyezik a Turing gépek számítási erejével.

Ezen modellek Turing-ekvivalenciája a Church-Turing tézis alátámasztásául szolgálnak és így egyúttal, ha a Church-Turing tézist igaznak gondoljuk, az algoritmus fogalmának alternatív matematikai modelljeit adhatják.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \to q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \to q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

Ha az 1. és a 3. szalag tartalma megegyezik a gép q_i-ben megáll. M ezt minden iteráció előtt ellenőrzi.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \to q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

Ha az 1. és a 3. szalag tartalma megegyezik a gép q_i-ben megáll. M ezt minden iteráció előtt ellenőrzi. Így $L(M) = L(G)$. □

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Bizonyítás: Legyen M-nek 3 szalagja, az első a TG bemenetét, a második a G grammatika szabályait tartalmazza. Ezeket a működés során csak olvassuk.

A harmadik szalagon mindig egy α mondatforma áll (kezdetben G kezdőszimbóluma).

A Turing gép nemdeterminisztikusan választ egy $p \to q$ szabályt és α-ban egy pozíciót. Ha az adott pozícióban éppen p kezdődik, azaz $\alpha = xpy$, akkor p-t q-ra cseréli, az új mondatforma xqy lesz.

Ha az 1. és a 3. szalag tartalma megegyezik a gép q_i-ben megáll. M ezt minden iteráció előtt ellenőrzi. Így $L(M) = L(G)$. □

Következmény: Előző tételünk alapján determinisztikus TG is adható.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ determinisztikus TG-hez megadható egy $L(M)$-et generáló G grammatika.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ determinisztikus TG-hez megadható egy $L(M)$-et generáló G grammatika.

Bizonyítás: G mondatformái M konfigurációit fogják kódolni. A G grammatika éppen fordítottan fog haladni. Nemdeterminisztikusan előállít egy elfogadó konfigurációt, majd ebből megpróbál egy kezdőkonfigurációt levezetni.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ determinisztikus TG-hez megadható egy $L(M)$-et generáló G grammatika.

Bizonyítás: G mondatformái M konfigurációit fogják kódolni. A G grammatika éppen fordítottan fog haladni. Nemdeterminisztikusan előállít egy elfogadó konfigurációt, majd ebből megpróbál egy kezdőkonfigurációt levezetni.

Legyen $G = \langle (\Gamma \backslash \Sigma) \cup Q \cup \{S, A, \rhd, \lhd\}, \Sigma, P, S \rangle$.

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ determinisztikus TG-hez megadható egy $L(M)$-et generáló G grammatika.

Bizonyítás: G mondatformái M konfigurációit fogják kódolni. A G grammatika éppen fordítottan fog haladni. Nemdeterminisztikusan előállít egy elfogadó konfigurációt, majd ebből megpróbál egy kezdőkonfigurációt levezetni.

Legyen $G = \langle (\Gamma \backslash \Sigma) \cup Q \cup \{S, A, \rhd, \lhd\}, \Sigma, P, S \rangle$.
P szabályai:

1. $S \to \rhd A q_i A \lhd$
2. $A \to aA \mid \varepsilon$ $\qquad (\forall a \in \Gamma)$
3. $bq' \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, R)$
4. $q'b \to qa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, S)$
5. $q'cb \to cqa$, ha $\delta(q, a) = (q', b, L)$ $\qquad (\forall c \in \Gamma)$
6. $\sqcup \lhd \to \lhd$, $\quad \lhd \to \varepsilon$, $\quad \rhd \sqcup \to \rhd$, $\quad \rhd q_0 \to \varepsilon$

0-típusú grammatikák és a TG-ek kapcsolata

1. $S \to \rhd A q_i A \lhd$
2. $A \to aA \mid \varepsilon$ $\qquad (\forall a \in \Gamma)$
3. $bq' \to qa$, ha $\delta(q,a) = (q', b, R)$
4. $q'b \to qa$, ha $\delta(q,a) = (q', b, S)$
5. $q'cb \to cqa$, ha $\delta(q,a) = (q', b, L)$ $\qquad (\forall c \in \Gamma)$
6. $\sqcup \lhd \to \lhd$, $\lhd \to \varepsilon$, $\rhd \sqcup \to \rhd$, $\rhd q_0 \to \varepsilon$

1-2. generálunk egy tetszőleges elfogadó konfigurációt

3-5. a konfigurációátmeneteket fordított irányban szimuláljuk. Pl. ha $\alpha cqa\beta \vdash \alpha q'cb\beta$ egy $\delta(q,a) = (q', b, L)$ szabály szerint, akkor most a grammatikában az 5-ös pont szerint $q'cb$ íródhat át cqa-ra.

6. Ha a mondatformánk egy kezdőkonfiguráció (esetleg néhány extra $\sqcup$-el), akkor ezek takarítják el a már felesleges jeleket.
A levezetés hosszára vonatkozó indukcióval megmutatható, hogy

$q_0 w \vdash^* \alpha q_i \beta$ a.cs.a. $S \Rightarrow^* \rhd \alpha q_i \beta \lhd \Rightarrow^* \rhd \sqcup^i q_0 w \sqcup^j \lhd \Rightarrow^* w$. $\square$

Többvermű gépek

Többvermű gépek

- Egy k-vermű gép egy determinisztikus veremautomata k veremmel.

Többvermű gépek

- Egy k-vermű gép egy determinisztikus veremautomata k veremmel.
- Az inputszót a veremautomatához hasonlóan kapja. Van egy véges vezérlőegysége, amely egy véges halmazból veszi fel az állapotát.

Többvermű gépek

- Egy k-vermű gép egy determinisztikus veremautomata k veremmel.
- Az inputszót a veremautomatához hasonlóan kapja. Van egy véges vezérlőegysége, amely egy véges halmazból veszi fel az állapotát.
- Adott egy minden verem számára közös veremábécé.

Többvermű gépek

- Egy k-vermű gép egy determinisztikus veremautomata k veremmel.
- Az inputszót a veremautomatához hasonlóan kapja. Van egy véges vezérlőegysége, amely egy véges halmazból veszi fel az állapotát.
- Adott egy minden verem számára közös veremábécé.
- A többvermű gép átmenete függ: (1) a vezérlőegység állapotától, (2) az olvasott inputszimbólumtól (3) az egyes vermek tetején lévő veremszimbólumtól.

Többvermű gépek

- A többvermű gép egy állapot-átmenet során: (1) állapotot vált, (2) az egyes vermek tetején lévő legfelső veremszimbólumot valahány (a 0-t is beleértve) veremszimbólum sorozatával helyettesíti, amely általában különböző az egyes vermek esetében.

Többvermű gépek

- A többvermű gép egy állapot-átmenet során: (1) állapotot vált, (2) az egyes vermek tetején lévő legfelső veremszimbólumot valahány (a 0-t is beleértve) veremszimbólum sorozatával helyettesíti, amely általában különböző az egyes vermek esetében.
- Egy tipikus konfiguráció- (állapot-)átmenet: $\delta(q, a, X_1, \ldots, X_k) = (p, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$.

  q állapotban X_i szimbólum hatására az i-dik verem tetején, $i = 1, \ldots, k$, az automata az a inputszimbólumot (vagy valamilyen inputszimbólum, vagy ε) feldolgozza az inputból, p állapotba megy és X_i szimbólumot az i-edik verem tetején γ_i-re cseréli, minden $i = 1, \ldots, k$-ra).

Többvermű gépek

- A többvermű gép egy állapot-átmenet során: (1) állapotot vált, (2) az egyes vermek tetején lévő legfelső veremszimbólumot valahány (a 0-t is beleértve) veremszimbólum sorozatával helyettesíti, amely általában különböző az egyes vermek esetében.
- Egy tipikus konfiguráció- (állapot-)átmenet: $\delta(q, a, X_1, \ldots, X_k) = (p, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$.

  q állapotban X_i szimbólum hatására az i-dik verem tetején, $i = 1, \ldots, k$, az automata az a inputszimbólumot (vagy valamilyen inputszimbólum, vagy ε) feldolgozza az inputból, p állapotba megy és X_i szimbólumot az i-edik verem tetején γ_i-re cseréli, minden $i = 1, \ldots, k$-ra).
- A többvermű gép a végállapotába jutva fogadja el az egyes szavakat.

A többvermű gépek számítási ereje

Feltesszük, hogy az input végén (nem része annak) van egy $ speciális szimbólum, amelyet **végjelzőnek (endmarker)** is hívunk. A végjelző jelzi az input összes betűjének a feldolgozását.

A többvermű gépek számítási ereje

Feltesszük, hogy az input végén (nem része annak) van egy \$ speciális szimbólum, amelyet **végjelzőnek (endmarker)** is hívunk. A végjelző jelzi az input összes betűjének a feldolgozását.

Jelölje $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}}$ a k-veremmel felismerható nyelvek osztályát. Nyilvánvalóan

A többvermű gépek számítási ereje

Feltesszük, hogy az input végén (nem része annak) van egy \$ speciális szimbólum, amelyet **végjelzőnek (endmarker)** is hívunk. A végjelző jelzi az input összes betűjének a feldolgozását.

Jelölje $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}}$ a k-veremmel felismerható nyelvek osztályát. Nyilvánvalóan

$$\mathcal{L}_{0\mathrm{V}} \subseteq \mathcal{L}_{1\mathrm{V}} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}_{k\mathrm{V}} \subseteq \mathcal{L}_{(k+1)\mathrm{V}} \subseteq \cdots$$

A többvermű gépek számítási ereje

Feltesszük, hogy az input végén (nem része annak) van egy \$ speciális szimbólum, amelyet **végjelzőnek (endmarker)** is hívunk. A végjelző jelzi az input összes betűjének a feldolgozását.

Jelölje $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}}$ a k-veremmel felismerható nyelvek osztályát. Nyilvánvalóan

$$\mathcal{L}_{0\mathrm{V}} \subseteq \mathcal{L}_{1\mathrm{V}} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}_{k\mathrm{V}} \subseteq \mathcal{L}_{(k+1)\mathrm{V}} \subseteq \cdots$$

Mivel a 0-vermek a véges automaták és az 1-vermek a determinisztikus veremautomaták, ezért

A többvermű gépek számítási ereje

Feltesszük, hogy az input végén (nem része annak) van egy \$ speciális szimbólum, amelyet **végjelzőnek (endmarker)** is hívunk. A végjelző jelzi az input összes betűjének a feldolgozását.

Jelölje $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}}$ a k-veremmel felismerható nyelvek osztályát. Nyilvánvalóan

$$\mathcal{L}_{0\mathrm{V}} \subseteq \mathcal{L}_{1\mathrm{V}} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}_{k\mathrm{V}} \subseteq \mathcal{L}_{(k+1)\mathrm{V}} \subseteq \cdots$$

Mivel a 0-vermek a véges automaták és az 1-vermek a determinisztikus veremautomaták, ezért

$$\mathcal{L}_{0\mathrm{V}} = \mathcal{L}_3, \quad \mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_{1\mathrm{V}} \subset \mathcal{L}_2.$$

A többvermű gépek számítási ereje

Állítás

Minden $k \in \mathbb{N}$-re $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{RE}$

A többvermű gépek számítási ereje

Állítás

Minden $k \in \mathbb{N}$-re $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Könnyű szimulálni egy k-vermet egy $(k+1)$-szalagos TG-pel: az első szalagon tároljuk a bemenetet, a többin pedig az egyes vermek tartalmát. Ha egy lépésben k darab betűt írunk valamelyik verembe, azt k lépésben, betűnként szimulálhatjuk.

A többvermű gépek számítási ereje

Állítás

Minden $k \in \mathbb{N}$-re $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Könnyű szimulálni egy k-vermet egy $(k+1)$-szalagos TG-pel: az első szalagon tároljuk a bemenetet, a többin pedig az egyes vermek tartalmát. Ha egy lépésben k darab betűt írunk valamelyik verembe, azt k lépésben, betűnként szimulálhatjuk.

Tétel

$\mathrm{RE} \subseteq \mathcal{L}_{2\mathrm{V}}$.

A többvermű gépek számítási ereje

Állítás

Minden $k \in \mathbb{N}$-re $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Könnyű szimulálni egy k-vermet egy $(k+1)$-szalagos TG-pel: az első szalagon tároljuk a bemenetet, a többin pedig az egyes vermek tartalmát. Ha egy lépésben k darab betűt írunk valamelyik verembe, azt k lépésben, betűnként szimulálhatjuk.

Tétel

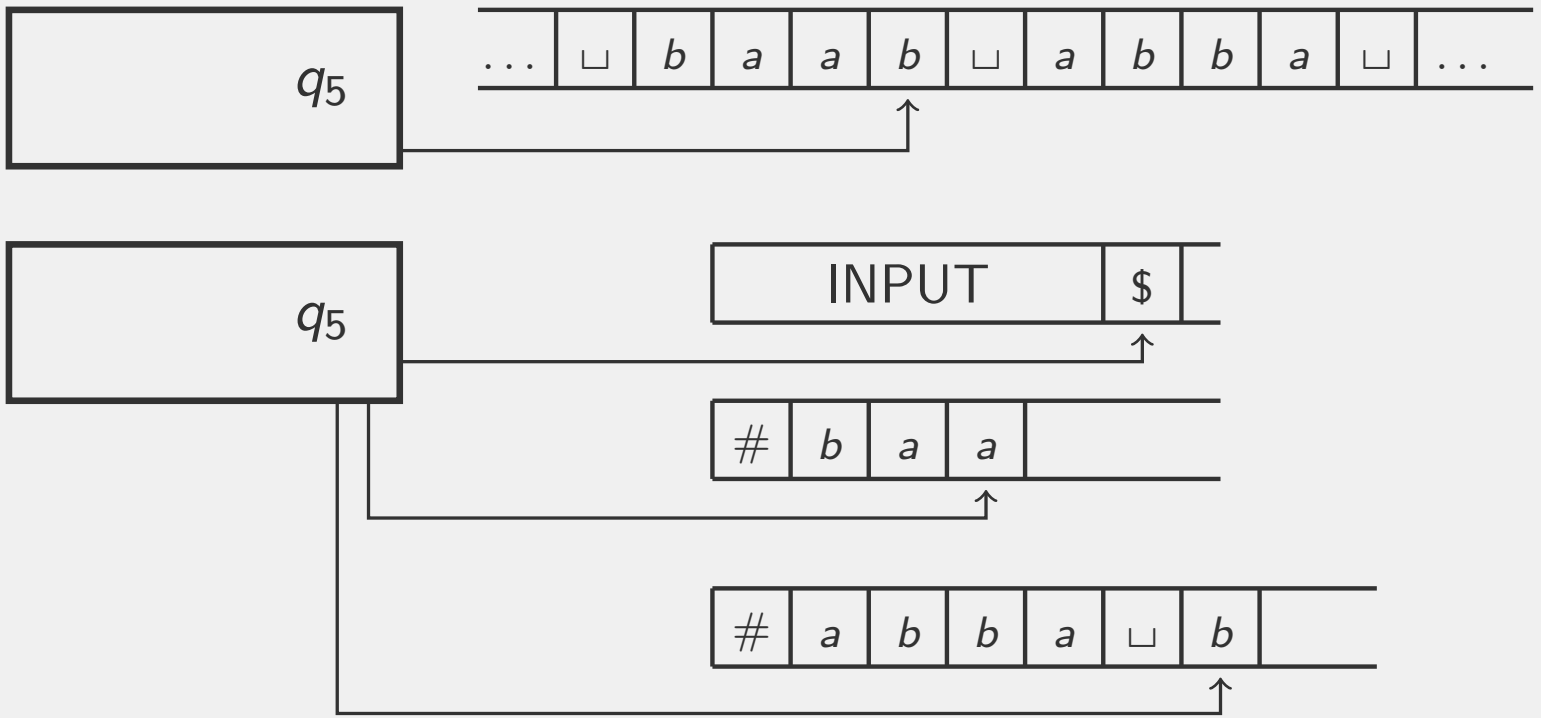
$\mathrm{RE} \subseteq \mathcal{L}_{2\mathrm{V}}$.

Következmény

Minden $k \geqslant 2$-re $\mathcal{L}_{k\mathrm{V}} = \mathrm{RE}$.

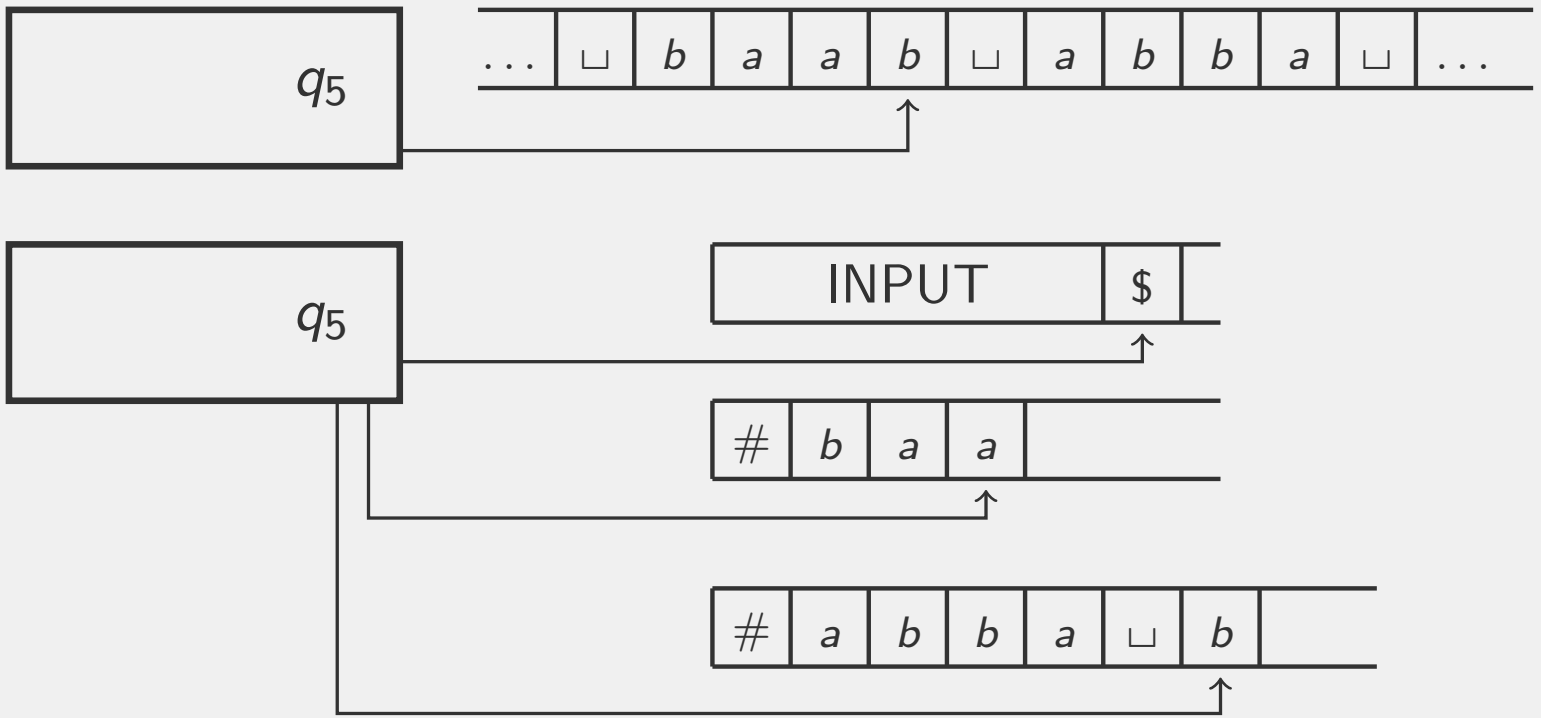
A többvermű gépek számítási ereje

A tétel bizonyítása:



A többvermű gépek számítási ereje

A tétel bizonyítása:



Ötlet: Az egyik verem az író-olvasó fejtől balra, a másik az attól jobbra lévő szimbólumokat tárolja.

A többvermű gépek számítási ereje

- Kezdetben S vermei a $\#$ veremalja szimbólummal indulnak (Feltehető, hogy $\#$ nem eleme M szalagábécéjének.). $\#$ -t csak a verem aljának jelzésére használjuk.

A többvermű gépek számítási ereje

- Kezdetben S vermei a # veremalja szimbólummal indulnak (Feltehető, hogy # nem eleme M szalagábécéjének.). # -t csak a verem aljának jelzésére használjuk.
- Tegyük fel, hogy S bemenetén ott van a w szó. Másolja S a w szót az első vermébe és fejezze be a másolást, ha az input végét jelző $-t olvasta.

A többvermű gépek számítási ereje

- Kezdetben S vermei a $\#$ veremalja szimbólummal indulnak (Feltehető, hogy $\#$ nem eleme M szalagábécéjének.). $\#$ -t csak a verem aljának jelzésére használjuk.
- Tegyük fel, hogy S bemenetén ott van a w szó. Másolja S a w szót az első vermébe és fejezze be a másolást, ha az input végét jelző \$-t olvasta.
- S egyesével kiveszi a szimbólumokat az első veréből és belerakja az összeset a másodikba. (ε-átmenetekkel, innentől minden átmenet ilyen.) Ekkor az első verem üres lesz, a második fogja w -t tartalmazni, w első betűje lesz a verem tetején.

A többvermű gépek számítási ereje

- Kezdetben S vermei a $\#$ veremalja szimbólummal indulnak (Feltehető, hogy $\#$ nem eleme M szalagábécéjének.). $\#$ -t csak a verem aljának jelzésére használjuk.
- Tegyük fel, hogy S bemenetén ott van a w szó. Másolja S a w szót az első vermébe és fejezze be a másolást, ha az input végét jelző \$-t olvasta.
- S egyesével kiveszi a szimbólumokat az első veréből és belerakja az összeset a másodikba. (ε-átmenetekkel, innentől minden átmenet ilyen.) Ekkor az első verem üres lesz, a második fogja w -t tartalmazni, w első betűje lesz a verem tetején.
- S az M kezdőállapotának megfeleltetett állapotába lép.

A többvermű gépek számítási ereje

S M egy átmenetét a következőképpen szimulálja:

- Feltehető, hogy S ismeri M állapotát, amelyet jelöljünk q-val. Ehhez S-ben M minden állapotához legyen egy saját állapot a véges vezérlőegységében.

A többvermű gépek számítási ereje

S M egy átmenetét a következőképpen szimulálja:

- Feltehető, hogy S ismeri M állapotát, amelyet jelöljünk q-val. Ehhez S-ben M minden állapotához legyen egy saját állapot a véges vezérlőegységében.
- S ismeri az M író-olvasó által éppen pásztázott X szimbólumot is: ez S második vermének a legfelső szimbóluma. Kivételt képez az az eset, amikor a második verem csak a veremalja szimbólumot tartalmazza, ilyenkor M épp egy üres szimbólumra ért.

A többvermű gépek számítási ereje

S M egy átmenetét a következőképpen szimulálja:

- Feltehető, hogy S ismeri M állapotát, amelyet jelöljünk q-val. Ehhez S-ben M minden állapotához legyen egy saját állapot a véges vezérlőegységében.
- S ismeri az M író-olvasó által éppen pásztázott X szimbólumot is: ez S második vermének a legfelső szimbóluma. Kivételt képez az az eset, amikor a második verem csak a veremalja szimbólumot tartalmazza, ilyenkor M épp egy üres szimbólumra ért.
- Tehát S ismeri M következő átmenetét. S vezérlőegysége M következő állapotának megfelelően kerül a saját, ennek megfelelő állapotába.

A többvermű gépek számítási ereje

1. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **jobbra mozog**, akkor S Y-t az első vermébe rakja, ami azt fejezi ki, hogy Y az M író-olvasó fejétől balra van, X -t pedig kivesszük S második veremének tetejéről. Előfordulhat az alábbi két kivételes eset.

A többvermű gépek számítási ereje

1. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **jobbra mozog**, akkor S Y-t az első vermébe rakja, ami azt fejezi ki, hogy Y az M író-olvasó fejétől balra van, X -t pedig kivesszük S második veremének tetejéről. Előfordulhat az alábbi két kivételes eset.

- Ha a második verem csak a #-t tartalmazza (azaz $X = \sqcup$), akkor a második verem tartalma nem változik. (Hiszen M újabb üres cella felé mozdul jobbra.)

A többvermű gépek számítási ereje

1. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **jobbra mozog**, akkor S Y-t az első vermébe rakja, ami azt fejezi ki, hogy Y az M író-olvasó fejétől balra van, X -t pedig kivesszük S második veremének tetejéről. Előfordulhat az alábbi két kivételes eset.

- Ha a második verem csak a #-t tartalmazza (azaz $X = \sqcup$), akkor a második verem tartalma nem változik. (Hiszen M újabb üres cella felé mozdul jobbra.)
- Ha $Y = \sqcup$ ÉS az első verem tetején # áll, akkor az első verem tartalma változatlan marad. (M író-olvasó fejétől balra továbbra is minden cella üres.)

A többvermű gépek számítási ereje

1. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **jobbra mozog**, akkor S Y-t az első vermébe rakja, ami azt fejezi ki, hogy Y az M író-olvasó fejétől balra van, X -t pedig kivesszük S második veremének tetejéről. Előfordulhat az alábbi két kivételes eset.

- Ha a második verem csak a #-t tartalmazza (azaz $X = \sqcup$), akkor a második verem tartalma nem változik. (Hiszen M újabb üres cella felé mozdul jobbra.)
- Ha $Y = \sqcup$ ÉS az első verem tetején # áll, akkor az első verem tartalma változatlan marad. (M író-olvasó fejétől balra továbbra is minden cella üres.)

2. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **nem mozog**, akkor S Y-ra cseréli X -t a második verem tetején.

A többvermű gépek számítási ereje

3. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **balra mozog**, akkor S az első verem legfelső szimbólumát, nevezzük Z -nek, eltávolítja a verem tetejéről, és X -et YZ -vel helyettesíti a második veremben (Z lesz legfelül.). Ez azt jelenti, hogy ami egy pozícióval az író-olvasó fejétől balra volt, most az író-olvasó fej alatt lesz.

A többvermű gépek számítási ereje

3. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **balra mozog**, akkor S az első verem legfelső szimbólumát, nevezzük Z -nek, eltávolítja a verem tetejéről, és X -et YZ -vel helyettesíti a második veremben (Z lesz legfelül.). Ez azt jelenti, hogy ami egy pozícióval az író-olvasó fejétől balra volt, most az író-olvasó fej alatt lesz.

- Kivételt képez az az eset, amikor Z a veremalja szimbólum. Ekkor S X-et $Y\sqcup$-re cseréli a második veremben (azaz $\sqcup$ kerül a második verem tetejére), az elsőből pedig nem távolít el semmit.

A többvermű gépek számítási ereje

3. eset:

Ha M az X szimbólumot Y -nal helyettesíti és a fej **balra mozog**, akkor S az első verem legfelső szimbólumát, nevezzük Z -nek, eltávolítja a verem tetejéről, és X -et YZ -vel helyettesíti a második veremben (Z lesz legfelül.). Ez azt jelenti, hogy ami egy pozícióval az író-olvasó fejétől balra volt, most az író-olvasó fej alatt lesz.

- Kivételt képez az az eset, amikor Z a veremalja szimbólum. Ekkor S X-et $Y\sqcup$-re cseréli a második veremben (azaz $\sqcup$ kerül a második verem tetejére), az elsőből pedig nem távolít el semmit.

Ezen felül S természetesen M állapotváltozásait lekövetve aktualizálja az állapotát.

S elfogad, ha M új állapota elfogadó, egyébként S M következő lépésének szimulálásával folytatja működését. □

Számláló gépek

A **számláló gépek (counter machines)** olyan matematikai gépek, amelyek véges sok (de előre rögzített számú) **regiszterrel** rendelkeznek, amelyek korlát nélküli méretű természetes számokat tárolhatnak.

Számláló gépek

A **számláló gépek (counter machines)** olyan matematikai gépek, amelyek véges sok (de előre rögzített számú) **regiszterrel** rendelkeznek, amelyek korlát nélküli méretű természetes számokat tárolhatnak. A számláló gépek tipikusan egy nagyon limitált **utasításkészlettel** működtethetők. Ezen utasításkészlet 1-2 aritmetikai továbbá 1-2 vezérlő utasításból áll.

Számláló gépek

A **számláló gépek (counter machines)** olyan matematikai gépek, amelyek véges sok (de előre rögzített számú) **regiszterrel** rendelkeznek, amelyek korlát nélküli méretű természetes számokat tárolhatnak. A számláló gépek tipikusan egy nagyon limitált **utasításkészlettel** működtethetők. Ezen utasításkészlet 1-2 aritmetikai továbbá 1-2 vezérlő utasításból áll.

A számláló gépek a **regiszter gépek** legegyszerűbb, speciális esete. Később találkozni fogunk majd a RAM-géppel is, amelyik szintén speciális regiszter gép, a számláló gép olyan általánosítása, ahol indirekt címzésű utasítások is rendelkezésre állnak.

Számláló gépek

A számláló gépek egy lehetséges reprezentációja egy szekvenciális programkód, ahol a programsorok címkézettek.

Számláló gépek

A számláló gépek egy lehetséges reprezentációja egy szekvenciális programkód, ahol a programsorok címkézettek.

Az utasításkészlet alapján többfajta számláló gép ismeretes. Mi **Marvin Minsky** egy 1967-es modelljét tekintjük, ahol mindössze 3 utasítás létezik:

Számláló gépek

A számláló gépek egy lehetséges reprezentációja egy szekvenciális programkód, ahol a programsorok címkézettek.

Az utasításkészlet alapján többfajta számláló gép ismeretes. Mi **Marvin Minsky** egy 1967-es modelljét tekintjük, ahol mindössze 3 utasítás létezik:

- INC(r): 1-gyel növeli az r regiszter értékét

Számláló gépek

A számláló gépek egy lehetséges reprezentációja egy szekvenciális programkód, ahol a programsorok címkézettek.

Az utasításkészlet alapján többfajta számláló gép ismeretes. Mi **Marvin Minsky** egy 1967-es modelljét tekintjük, ahol mindössze 3 utasítás létezik:

- INC(r): 1-gyel növeli az r regiszter értékét
- DEC(r): 1-gyel csökkenti az r regiszter értékét

Számláló gépek

A számláló gépek egy lehetséges reprezentációja egy szekvenciális programkód, ahol a programsorok címkézettek.

Az utasításkészlet alapján többfajta számláló gép ismeretes. Mi **Marvin Minsky** egy 1967-es modelljét tekintjük, ahol mindössze 3 utasítás létezik:

- INC(r): 1-gyel növeli az r regiszter értékét
- DEC(r): 1-gyel csökkenti az r regiszter értékét
- IF r regiszter értéke $= 0$ THEN GOTO z: ha a regiszter értéke 0, akkor a z címkéjű utasításra ugrik, különben a következő utasítással folytatja.

Számláló gépek

A számláló gépek egy lehetséges reprezentációja egy szekvenciális programkód, ahol a programsorok címkézettek.

Az utasításkészlet alapján többfajta számláló gép ismeretes. Mi **Marvin Minsky** egy 1967-es modelljét tekintjük, ahol mindössze 3 utasítás létezik:

- INC(r): 1-gyel növeli az r regiszter értékét
- DEC(r): 1-gyel csökkenti az r regiszter értékét
- IF r regiszter értéke $= 0$ THEN GOTO z: ha a regiszter értéke 0, akkor a z címkéjű utasításra ugrik, különben a következő utasítással folytatja.

Matematikai gépként is reprezentálhatjuk. Ilyenkor a gép következő állapota függ az aktuális állapotától, az inputszimbólumtól, valamint attól, hogy valamely számlálója nulla-e vagy sem. Egy állapot-átmenet során a gép megváltoztathatja állapotát továbbá hozzáadhat vagy kivonhat 1-et bármely számlálójából, feltéve, hogy az nem 0-val egyenlő.

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Definíció

A **számláló gép** (counter machine) egy korlátozott többvermű gép a következő megszorításokkal:

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Definíció

A **számláló gép** (counter machine) egy korlátozott többvermű gép a következő megszorításokkal:

- Csak kétfajta veremszimbólum létezik: Z_0 (veremalja szimbólum) és X.

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Definíció

A **számláló gép** (counter machine) egy korlátozott többvermű gép a következő megszorításokkal:

- Csak kétfajta veremszimbólum létezik: Z_0 (veremalja szimbólum) és X.
- Kezdetben egyetlen Z_0 van minden veremben.

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Definíció

A **számláló gép** (counter machine) egy korlátozott többvermű gép a következő megszorításokkal:

- Csak kétfajta veremszimbólum létezik: Z_0 (veremalja szimbólum) és X.
- Kezdetben egyetlen Z_0 van minden veremben.
- Z_0 -t csak Z_0X^i alakú szó helyettesítheti valamely $i \geqslant 0$-ra.

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Definíció

A **számláló gép** (counter machine) egy korlátozott többvermű gép a következő megszorításokkal:

- Csak kétfajta veremszimbólum létezik: Z_0 (veremalja szimbólum) és X.
- Kezdetben egyetlen Z_0 van minden veremben.
- Z_0 -t csak Z_0X^i alakú szó helyettesítheti valamely $i \geqslant 0$-ra.
- X -t csak X^i helyettesítheti valamely $i \geqslant 0$-ra.

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Definíció

A **számláló gép** (counter machine) egy korlátozott többvermű gép a következő megszorításokkal:

- Csak kétfajta veremszimbólum létezik: Z_0 (veremalja szimbólum) és X.
- Kezdetben egyetlen Z_0 van minden veremben.
- Z_0 -t csak Z_0X^i alakú szó helyettesítheti valamely $i \geqslant 0$-ra.
- X -t csak X^i helyettesítheti valamely $i \geqslant 0$-ra.

Ez azt jelenti, hogy Z_0-ból legfeljebb 1 lehet minden egyes veremben mégpedig a verem alján. Z_0-n kívül csak X-ek lehetnek a vermekben.

Számláló gépek k-verem reprezentációja

Egy lehetséges (valamivel általánosabb) gépként történő reprezentáció:

Definíció

A **számláló gép** (counter machine) egy korlátozott többvermű gép a következő megszorításokkal:

- Csak kétfajta veremszimbólum létezik: Z_0 (veremalja szimbólum) és X.
- Kezdetben egyetlen Z_0 van minden veremben.
- Z_0 -t csak Z_0X^i alakú szó helyettesítheti valamely $i \geqslant 0$-ra.
- X -t csak X^i helyettesítheti valamely $i \geqslant 0$-ra.

Ez azt jelenti, hogy Z_0-ból legfeljebb 1 lehet minden egyes veremben mégpedig a verem alján. Z_0-n kívül csak X-ek lehetnek a vermekben.

Így egy számláló 0 voltát úgy ellenőrizhetjük, hogy megnézzük Z_0 vagy X van-e a verem tetején.

A számláló gépek számítási ereje

Észrevételek:

- A számláló gép által elfogadott bármely nyelv rekurzívan felsorolható. Ez következik abból, az előző tételünkből, hogy többvermes gépeket lehet TG-pel szimulálni.

A számláló gépek számítási ereje

Észrevételek:

- A számláló gép által elfogadott bármely nyelv rekurzívan felsorolható. Ez következik abból, az előző tételünkből, hogy többvermes gépeket lehet TG-pel szimulálni.
- Az egyszámlálós gép által elfogadott bármely nyelv környezetfüggetlen. A számlálót tekinthetjük úgy, mint egy vermet. Következésképpen a számlálógép speciális esete az egyvermű gépnek, a veremautomatának.

A számláló gépek számítási ereje

Észrevételek:

- A számláló gép által elfogadott bármely nyelv rekurzívan felsorolható. Ez következik abból, az előző tételünkből, hogy többvermes gépeket lehet TG-pel szimulálni.
- Az egyszámlálós gép által elfogadott bármely nyelv környezetfüggetlen. A számlálót tekinthetjük úgy, mint egy vermet. Következésképpen a számlálógép speciális esete az egyvermű gépnek, a veremautomatának.

Tétel

Minden rekurzívan felsorolható nyelv felismerhető egy 3 számlálóval rendelkező számláló géppel.

A számláló gépek számítási ereje

Bizonyítás:

Elegendő egy tetszőleges 2-vermet 3-számlálós géppel szimulálni.

A számláló gépek számítási ereje

Bizonyítás:

Elegendő egy tetszőleges 2-vermet 3-számlálós géppel szimulálni.

Tegyük fel, hogy a kétvermű gép (közös) veremábécéje $r-1$ elemű. Ezen szimbólumokat azonosíthatjuk 1 és $r-1$ közötti számjegyekkel, az $u = X_n \cdots X_1$ szóval leírt veremtartalmat (a verem tetején u utolsó betűje áll) pedig tekinthető egy r-es számrendszerbeli alakban felírt számnak. Azaz a verem tartalma (amelynek a teteje u utolsó betűje) dekódolhatóan reprezentálható egy $X_n r^{n-1} + X_{n-1} r^{n-2} + \cdots + X_2 r + X_1$ természetes számmal.

A számláló gépek számítási ereje

Bizonyítás:
Elegendő egy tetszőleges 2-vermet 3-számlálós géppel szimulálni.

Tegyük fel, hogy a kétvermű gép (közös) veremábécéje $r-1$ elemű. Ezen szimbólumokat azonosíthatjuk 1 és $r-1$ közötti számjegyekkel, az $u = X_n \cdots X_1$ szóval leírt veremtartalmat (a verem tetején u utolsó betűje áll) pedig tekinthető egy r-es számrendszerbeli alakban felírt számnak. Azaz a verem tartalma (amelynek a teteje u utolsó betűje) dekódolhatóan reprezentálható egy $X_n r^{n-1} + X_{n-1} r^{n-2} + \cdots + X_2 r + X_1$ természetes számmal.

Az első két számláló tárolja tehát a két verem tartalmát, egy-egy természetes számként. A harmadik számláló egy segédszámláló. Arra szolgál, hogy a két másik számlálót igazítsa, amennyiben ez szükséges, pl. ha valamelyik számlálót r -rel szeretnénk osztani vagy szorozni.

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

(1) a legfelső elem eltávolítása (pop),

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

(1) a legfelső elem eltávolítása (pop),

(2) a legfelső elem átírása

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

(1) a legfelső elem eltávolítása (pop),

(2) a legfelső elem átírása

(3) egy elemnek a verembe történő helyezése (push).

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

(1) a legfelső elem eltávolítása (pop),

(2) a legfelső elem átírása

(3) egy elemnek a verembe történő helyezése (push).

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

(1) a legfelső elem eltávolítása (pop),

(2) a legfelső elem átírása

(3) egy elemnek a verembe történő helyezése (push).

A k-verem műveletei ezen alapműveletek kompozíciói, így elegendő ezeket számlálógéppel szimulálni.

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

(1) a legfelső elem eltávolítása (pop),

(2) a legfelső elem átírása

(3) egy elemnek a verembe történő helyezése (push).

A k-verem műveletei ezen alapműveletek kompozíciói, így elegendő ezeket számlálógéppel szimulálni.

Például, ha a legfelső X szimbólumot k darab szimbólumból álló szóval szeretnénk helyettesíteni, akkor ezt a műveletet k részre bonthatjuk, X helyettesítésére és $k-1$ darab push műveletre.

A számláló gépek számítási ereje

A vermen végrehajtható három alapművelet a következő:

(1) a legfelső elem eltávolítása (pop),

(2) a legfelső elem átírása

(3) egy elemnek a verembe történő helyezése (push).

A k-verem műveletei ezen alapműveletek kompozíciói, így elegendő ezeket számlálógéppel szimulálni.

Például, ha a legfelső X szimbólumot k darab szimbólumból álló szóval szeretnénk helyettesíteni, akkor ezt a műveletet k részre bonthatjuk, X helyettesítésére és $k-1$ darab push műveletre.

Ezen alapműveletek végrehajtását a számláló segítségével a következőképpen oldhatjuk meg:

A számláló gépek számítási ereje

(1): pop művelet

A legfelső elemnek a veremből való eltávolítása megfelel a neki megfelelő számláló i értékének $\lfloor i/r \rfloor$ -rel való helyettesítésének és a maradék (X_1) eldobásának. Kezdjünk el 1-eket kivonni ebből a számlálóból. A 0 kezdeti értékű harmadik számlálóhoz minden r. kivonás után adjunk hozzá 1-et. Amikor a csökkenő számláló értéke 0 lesz, akkor a harmadik számlálóé éppen $\lfloor i/r \rfloor$. Ezután ismételten növeljük az eredeti számlálót 1-gyel és a harmadikat csökkentsük 1-gyel, amíg a harmadik számláló újra 0 nem lesz. Ekkor az a számláló, amelyik i-t tárolta előzőleg, $\lfloor i/r \rfloor$ lesz.

A számláló gépek számítási ereje

(1): pop művelet

A legfelső elemnek a veremből való eltávolítása megfelel a neki megfelelő számláló i értékének $\lfloor i/r \rfloor$ -rel való helyettesítésének és a maradék (X_1) eldobásának. Kezdjünk el 1-eket kivonni ebből a számlálóból. A 0 kezdeti értékű harmadik számlálóhoz minden r. kivonás után adjunk hozzá 1-et. Amikor a csökkenő számláló értéke 0 lesz, akkor a harmadik számlálóé éppen $\lfloor i/r \rfloor$. Ezután ismételten növeljük az eredeti számlálót 1-gyel és a harmadikat csökkentsük 1-gyel, amíg a harmadik számláló újra 0 nem lesz. Ekkor az a számláló, amelyik i-t tárolta előzőleg, $\lfloor i/r \rfloor$ lesz.

(2): a tetőelem megváltoztatása

Ahhoz, hogy X -et Y -ra cseréljük a verem tetején, amelyet i reprezentál a számoló gépnél, növelni vagy csökkenteni kell i-t egy r -nél nem nagyobb értékkel. Ha $Y > X$ akkor i-t $Y - X$ -szel növeljük. Ha $Y < X$, akkor i-t $X - Y$ -nal csökkentjük.

A számláló gépek számítási ereje

(3) push művelet

Ahhoz, hogy X -et azon verembe helyezzük, amely eredetileg i-t tartalmazza, i-t $ir + X$ -szel kell helyettesíteni. Először r -rel szorzunk. Ehhez folyamatosan csökkentjük i-t 1-gyel, és növeljük a harmadik számlálót (amely 0-ról indul) r -rel. Amikor az eredeti számláló értéke 0 lesz, akkor a harmadik számlálóé ir. A harmadik számlálót visszamásoljuk az eredetibe (lépésenként eggyel növelve az eredeti, és eggyel csökkentve a harmadik számláló értékét). Ekkor a harmadik számláló értéke újra 0 lesz. Végül az eredeti számlálót X -szel megnöveljük.

A számláló gépek számítási ereje

(3) push művelet

Ahhoz, hogy X -et azon verembe helyezzük, amely eredetileg i-t tartalmazza, i-t $ir + X$ -szel kell helyettesíteni. Először r -rel szorzunk. Ehhez folyamatosan csökkentjük i-t 1-gyel, és növeljük a harmadik számlálót (amely 0-ról indul) r -rel. Amikor az eredeti számláló értéke 0 lesz, akkor a harmadik számlálóé ir. A harmadik számlálót visszamásoljuk az eredetibe (lépésenként eggyel növelve az eredeti, és eggyel csökkentve a harmadik számláló értékét). Ekkor a harmadik számláló értéke újra 0 lesz. Végül az eredeti számlálót X -szel megnöveljük.

Inicializálás:

A konstrukció befejezéséhez szükséges még a számlálók inicializálása a vermek kezdeti állapotának szimulálásához, amikor még csak a kezdőszimbólumot tartalmazzák a vermek. Ez a lépés megoldható úgy, hogy a két számlálót valamilyen 1 és $r - 1$ közötti értékkel növeljük, amely megfelel a kezdőszimbólumnak. □

A számláló gépek számítási ereje

Tétel

Minden rekurzívan felsorolható nyelv elfogadható kétszámlálós géppel.

A számláló gépek számítási ereje

Tétel

Minden rekurzívan felsorolható nyelv elfogadható kétszámlálós géppel.

Bizonyítás:

Elegendő annak bizonyítása, hogyan szimuláljunk három számlálót kettővel. Az ötlet az, hogy a három számlálót egy egész számmal fogjuk reprezentálni. Jelöljük a három szóbanforgó számlálót i-vel, j-vel és k-val és legyen a választott egész szám $m = 2^i 3^j 5^k$.

A számláló gépek számítási ereje

Tétel

Minden rekurzívan felsorolható nyelv elfogadható kétszámlálós géppel.

Bizonyítás:

Elegendő annak bizonyítása, hogyan szimuláljunk három számlálót kettővel. Az ötlet az, hogy a három számlálót egy egész számmal fogjuk reprezentálni. Jelöljük a három szóbanforgó számlálót i-vel, j-vel és k-val és legyen a választott egész szám $m = 2^i 3^j 5^k$.

Az egyik számláló ezt a számot fogja tárolni, míg egy másik szorozni vagy osztani fogja m-et valamelyik előbbi prímszámmal (2-vel, 3-mal, 5-tel).

A számláló gépek számítási ereje

Tétel

Minden rekurzívan felsorolható nyelv elfogadható kétszámlálós géppel.

Bizonyítás:

Elegendő annak bizonyítása, hogyan szimuláljunk három számlálót kettővel. Az ötlet az, hogy a három számlálót egy egész számmal fogjuk reprezentálni. Jelöljük a három szóbanforgó számlálót i-vel, j-vel és k-val és legyen a választott egész szám $m = 2^i 3^j 5^k$.

Az egyik számláló ezt a számot fogja tárolni, míg egy másik szorozni vagy osztani fogja m-et valamelyik előbbi prímszámmal (2-vel, 3-mal, 5-tel).

A háromszámlálós gép szimulálása a következőképpen történik:

A számláló gépek számítási ereje

(1) Növeljük 1-gyel i-t, j-t vagy k-t.

i 1-gyel való növeléséhez, szorozzuk m-et 2-vel. Az előbb láttuk, hogyan kell egy számot valamely r konstanssal megszorozni egy második számlálót (most a másodikat) használva. Hasonlóan, j növeléséhez, szorozzuk m-et 3-mal, k növeléséhez pedig 5-tel.

A számláló gépek számítási ereje

(1) Növeljük 1-gyel i-t, j-t vagy k-t.

i 1-gyel való növeléséhez, szorozzuk m-et 2-vel. Az előbb láttuk, hogyan kell egy számot valamely r konstanssal megszorozni egy második számlálót (most a másodikat) használva. Hasonlóan, j növeléséhez, szorozzuk m-et 3-mal, k növeléséhez pedig 5-tel.

(2) i, j vagy k valamelyike 0-val egyenlő-e?

Ahhoz, hogy megmondjuk, hogy $i = 0$-e, meg kell határoznunk, hogy vajon m osztható-e 2-vel. Másoljuk m-et a második számlálóba egyesével és használjuk a számlálógép állapotát annak megjegyzésére, hogy m-et páros vagy páratlan sokszor csökkentettük-e. Ha m-et páratlan sokszor csökkentettük, mikor 0-vá válik, akkor $i = 0$. Ekkor m-et visszaállítjuk a második számláló tartalmának az elsőbe másolásával. Hasonlóan tesztelhetjük, hogy $j = 0$-e (m osztható-e 3-mal), illetve, hogy $k = 0$-e (m osztható-e 5-tel).

A számláló gépek számítási ereje

(3) Csökkentsük 1-gyel i-t, j-t vagy k-t.

i, j illetve k csökkentéséhez osszuk m-et rendre 2-vel, 3-mal vagy 5-tel. Láttuk korábban hogyan kell az osztást végrehajtani egy második számlálót használva. Ha nem 0 az osztás maradéka, akkor elfogadás nélkül terminálunk mivel a számláló értéke 0 volt. Amennyiben sikerült maradék nélkül osztani, akkor éppen a megfelelő számláló 1-gyel való csökkentését szimuláltuk. □

A számláló gépek számítási ereje

(3) Csökkentsük 1-gyel i-t, j-t vagy k-t.

i, j illetve k csökkentéséhez osszuk m-et rendre 2-vel, 3-mal vagy 5-tel. Láttuk korábban hogyan kell az osztást végrehajtani egy második számlálót használva. Ha nem 0 az osztás maradéka, akkor elfogadás nélkül terminálunk mivel a számláló értéke 0 volt. Amennyiben sikerült maradék nélkül osztani, akkor éppen a megfelelő számláló 1-gyel való csökkentését szimuláltuk. □

Miért pont 2,3,5? Gondoljuk meg, miért fontos prímek (általánosabban: relatív prímek) használata!

A számláló gépek számítási ereje

(3) Csökkentsük 1-gyel i-t, j-t vagy k-t.

i, j illetve k csökkentéséhez osszuk m-et rendre 2-vel, 3-mal vagy 5-tel. Láttuk korábban hogyan kell az osztást végrehajtani egy második számlálót használva. Ha nem 0 az osztás maradéka, akkor elfogadás nélkül terminálunk mivel a számláló értéke 0 volt. Amennyiben sikerült maradék nélkül osztani, akkor éppen a megfelelő számláló 1-gyel való csökkentését szimuláltuk. □

Miért pont 2,3,5? Gondoljuk meg, miért fontos prímek (általánosabban: relatív prímek) használata!

Összegzés a számláló gépekről:

- A k számlálós számláló gépek számítási ereje $k \geqslant 2$-re megegyezik a TG-ek számítási erejével.

A számláló gépek számítási ereje

(3) Csökkentsük 1-gyel i-t, j-t vagy k-t.

i, j illetve k csökkentéséhez osszuk m-et rendre 2-vel, 3-mal vagy 5-tel. Láttuk korábban hogyan kell az osztást végrehajtani egy második számlálót használva. Ha nem 0 az osztás maradéka, akkor elfogadás nélkül terminálunk mivel a számláló értéke 0 volt. Amennyiben sikerült maradék nélkül osztani, akkor éppen a megfelelő számláló 1-gyel való csökkentését szimuláltuk. □

Miért pont 2,3,5? Gondoljuk meg, miért fontos prímek (általánosabban: relatív prímek) használata!

Összegzés a számláló gépekről:

- A k számlálós számláló gépek számítási ereje $k \geqslant 2$-re megegyezik a TG-ek számítási erejével.
- Az egyetlen számlálóval rendelkező számláló gépek CF egy valódi részhalmazát alkotják. Például $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ felismerhető 1 számlálós géppel, de $\{a^n b^k a^k b^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ nem.