

Számítási modellek

12. előadás

Beszúró-törlő rendszerek

Definíció

Beszúró-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

Beszúró-törlő rendszerek

Definíció

Beszúró-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a

$\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- ▶ V egy ábécé,

Beszúró-törlő rendszerek

Definíció

Beszúró-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a

$\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- ▶ V egy ábécé,
- ▶ $T \subseteq V$ a terminális ábécé,

Beszúró-törlő rendszerek

Definíció

Beszúró-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a

$\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- ▶ V egy ábécé,
- ▶ $T \subseteq V$ a terminális ábécé,
- ▶ $A \subseteq V^*$ véges nyelv (az axiómák halmaza),

Beszúró-törlő rendszerek

Definíció

Beszúró-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a

$\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- ▶ V egy ábécé,
- ▶ $T \subseteq V$ a terminális ábécé,
- ▶ $A \subseteq V^*$ véges nyelv (az axiómák halmaza),
- ▶ I a **beszúró szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$,

Beszúró-törlő rendszerek

Definíció

Beszúró-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a

$\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- ▶ V egy ábécé,
- ▶ $T \subseteq V$ a terminális ábécé,
- ▶ $A \subseteq V^*$ véges nyelv (az axiómák halmaza),
- ▶ I a **beszúró szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$,
- ▶ D a **törlő szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$.

Beszűrő-törlő rendszerek

Definíció

Beszűrő-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- ▶ V egy ábécé,
- ▶ $T \subseteq V$ a terminális ábécé,
- ▶ $A \subseteq V^*$ véges nyelv (az axiómák halmaza),
- ▶ I a **beszűrő szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$,
- ▶ D a **törlő szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$.

$(u, \alpha, v) \in I$ beszűrő szabály az $uv \rightarrow u\alpha v$ szabálynak felel meg.
(α -t beszűrhetjük az (u, v) környezetbe.)

Beszűrő-törlő rendszerek

Definíció

Beszűrő-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- ▶ V egy ábécé,
- ▶ $T \subseteq V$ a terminális ábécé,
- ▶ $A \subseteq V^*$ véges nyelv (az axiómák halmaza),
- ▶ I a **beszűrő szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$,
- ▶ D a **törlő szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$.

$(u, \alpha, v) \in I$ beszűrő szabály az $uv \rightarrow u\alpha v$ szabálynak felel meg. (α -t beszűrhetjük az (u, v) környezetbe.)

$(u, \alpha, v) \in D$ törlő szabály az $u\alpha v \rightarrow uv$ szabálynak felel meg. (α -t törölhetjük az (u, v) környezetből.)

Motiváció – a DNS szerkesztése

Az evolúció során is beszűrődhet vagy törlődhet, általában egyszerre csak egyetlen szimbólum a DNS szekvenciából.

Motiváció – a DNS szerkesztése

Az evolúció során is beszűrődhet vagy törlődhet, általában egyszerre csak egyetlen szimbólum a DNS szekvenciából.

y beszúrása u és v közé hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{y} \bar{v} - 5'$ -t.

Motiváció – a DNS szerkesztése

Az evolúció során is beszűrődhet vagy törlődhet, általában egyszerre csak egyetlen szimbólum a DNS szekvenciából.

y beszúrása u és v közé hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{y} \bar{v} - 5'$ -t.
2. Hő hatására \bar{u} u -hoz, \bar{v} v -hez tapad meghajlítva a \bar{y} -t.

Motiváció – a DNS szerkesztése

Az evolúció során is beszűrődhet vagy törlődhet, általában egyszerre csak egyetlen szimbólum a DNS szekvenciából.

y beszúrása u és v közé hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{y} \bar{v} - 5'$ -t.
2. Hő hatására \bar{u} u -hoz, \bar{v} v -hez tapad meghajlítva a \bar{y} -t.
3. Az első szál elvágása restrikciós enzimmel u és v között

Motiváció – a DNS szerkesztése

Az evolúció során is beszűrődhet vagy törlődhet, általában egyszerre csak egyetlen szimbólum a DNS szekvenciából.

y beszúrása u és v közé hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{y} \bar{v} - 5'$ -t.
2. Hő hatására \bar{u} u -hoz, \bar{v} v -hez tapad meghajlítva a \bar{y} -t.
3. Az első szál elvágása **restrikciós enzim** u és v között
4. A hiányzó komplementekkel való dupla szállá történő kiegészítés a \bar{z} **primer és egy polimeráz** hozzáadására.

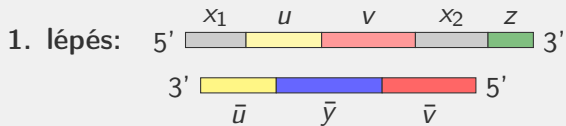
Motiváció – a DNS szerkesztése

Az evolúció során is beszűrődhet vagy törlődhet, általában egyszerre csak egyetlen szimbólum a DNS szekvenciából.

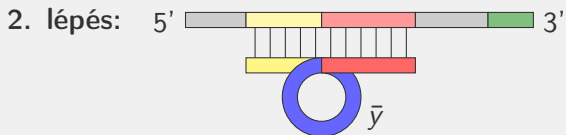
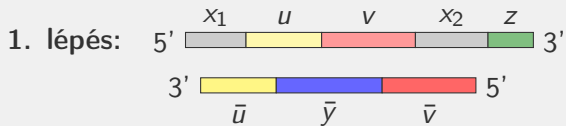
y beszúrása u és v közé hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{y} \bar{v} - 5'$ -t.
2. Hő hatására \bar{u} u -hoz, \bar{v} v -hez tapad meghajlítva a \bar{y} -t.
3. Az első szál elvágása **restrikciós enzim** u és v között
4. A hiányzó komplementekkel való dupla szállá történő kiegészítés a \bar{z} **primer és egy polimeráz** hozzáadására.
5. A két szál szétválasztása **olvasztás hatására**.

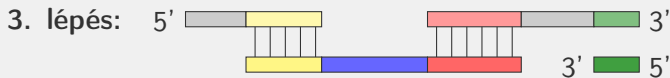
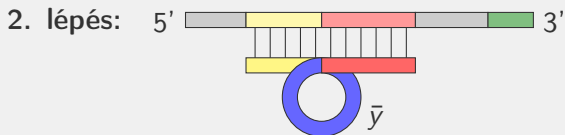
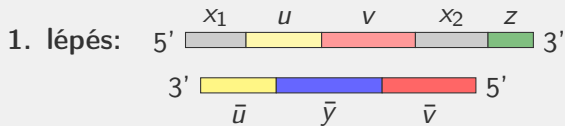
Motiváció – a DNS szerkesztése



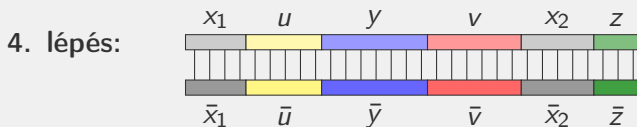
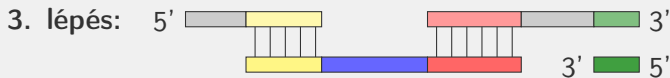
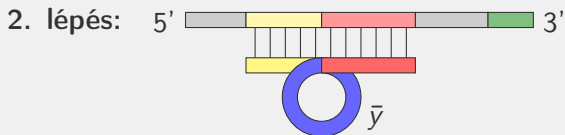
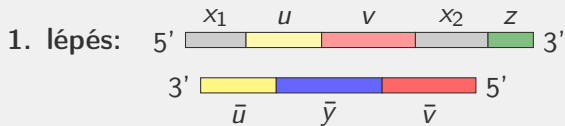
Motiváció – a DNS szerkesztése



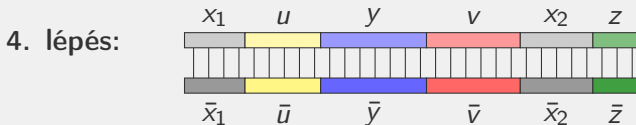
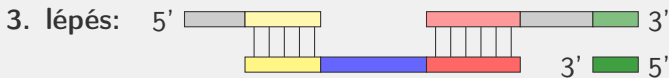
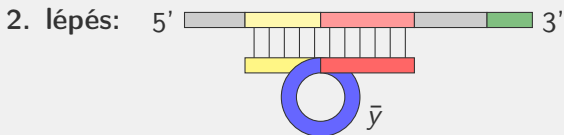
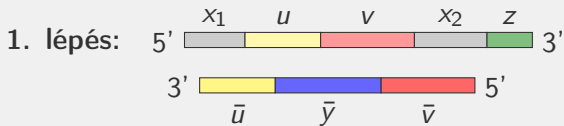
Motiváció – a DNS szerkesztése



Motiváció – a DNS szerkesztése



Motiváció – a DNS szerkesztése



Motiváció – a DNS szerkesztése

y törlése u és v közül hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u y v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{v} - 5'$ -t.

Motiváció – a DNS szerkesztése

y törlése u és v közül hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u y v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{v} - 5'$ -t.
2. Hő hatására \bar{u} u -hoz, \bar{v} v -hez tapad meghajlítva y -t.

Motiváció – a DNS szerkesztése

y törlése u és v közül hibás illesztéssel:

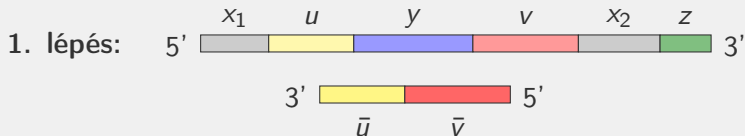
1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u y v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{v} - 5'$ -t.
2. Hő hatására \bar{u} u -hoz, \bar{v} v -hez tapad meghajlítva y -t.
3. A \bar{z} primer hozzáadására egy restrikciós emzim az első szálát elvágja u y illetve y és v között, azaz eltávolítja y -t, majd polimerizációval a hiányzó komplementensekkel való dupla szállá egészülnek ki.

Motiváció – a DNS szerkesztése

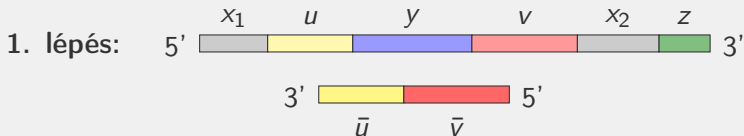
y törlése u és v közül hibás illesztéssel:

1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u y v x_2 z - 3'$ -hez adjuk $3' - \bar{u} \bar{v} - 5'$ -t.
2. Hő hatására \bar{u} u -hoz, \bar{v} v -hez tapad meghajlítva y -t.
3. A \bar{z} primer hozzáadására egy restrikciós emzim az első szálát elvágja u y illetve y és v között, azaz eltávolítja y -t, majd polimerizációval a hiányzó komplementekkel való dupla szállá egészülnek ki.
4. A két szál szétválasztása olvasztás hatására.

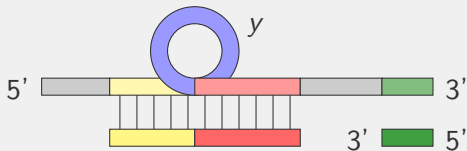
Motiváció – a DNS szerkesztése



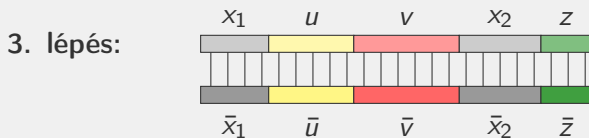
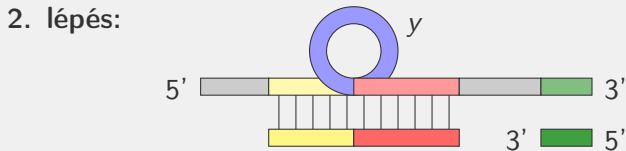
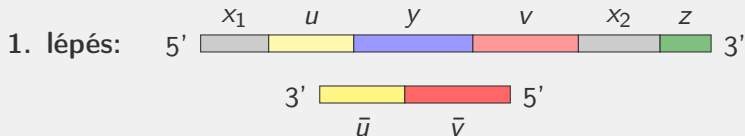
Motiváció – a DNS szerkesztése



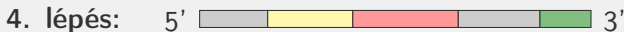
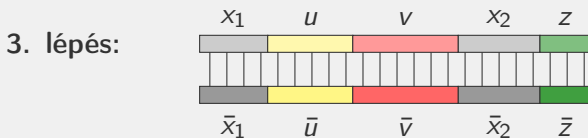
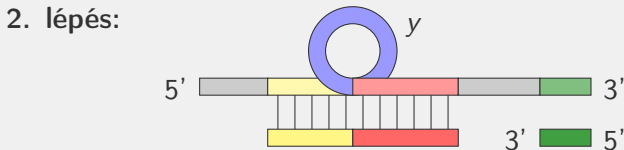
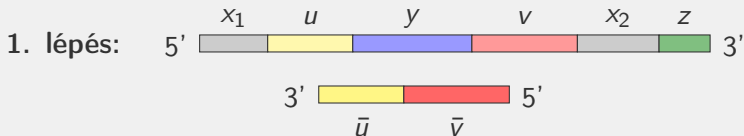
2. lépés:



Motiváció – a DNS szerkesztése



Motiváció – a DNS szerkesztése



Beszűrő-törlő rendszer által generált nyelv

Definíció

$x \Rightarrow_{\text{ins}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 u v x_2, y = x_1 u \alpha v x_2$
valamely $(u, \alpha, v) \in I$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$ -ra.

Beszűrő-törlő rendszer által generált nyelv

Definíció

$x \implies_{\text{ins}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 uvx_2, y = x_1 u\alpha vx_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in I$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$ -ra.

$x \implies_{\text{del}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 u\alpha vx_2, y = x_1 uvx_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in D$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$ -ra.

Beszűrő-törlő rendszer által generált nyelv

Definíció

$x \Longrightarrow_{\text{ins}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 uvx_2, y = x_1 u\alpha vx_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in I$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$ -ra.

$x \Longrightarrow_{\text{del}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 u\alpha vx_2, y = x_1 uvx_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in D$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$ -ra.

Ekkor a **közvetlen (egylépéses) levezetést** a következőképpen definiálhatjuk: $(x \Longrightarrow y) \stackrel{\text{def}}{\iff} (x \Longrightarrow_{\text{ins}} y) \vee (x \Longrightarrow_{\text{del}} y)$

Beszűrő-törlő rendszer által generált nyelv

Definíció

$x \Longrightarrow_{\text{ins}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 u v x_2, y = x_1 u \alpha v x_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in I$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$ -ra.

$x \Longrightarrow_{\text{del}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 u \alpha v x_2, y = x_1 u v x_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in D$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$ -ra.

Ekkor a **közvetlen (egylépéses) levezetést** a következőképpen definiálhatjuk: $(x \Longrightarrow y) \stackrel{\text{def}}{\iff} (x \Longrightarrow_{\text{ins}} y) \vee (x \Longrightarrow_{\text{del}} y)$

Definíció

Közvetett (többlépéses) levezetés: $a \Longrightarrow$ reflexív, tranzitív lezártja. Jelölése: \Longrightarrow^* .

Definíció

A $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszűrő-törlő rendszer által **generált nyelv:**
 $L(\gamma) = \{w \in T^* \mid x \Longrightarrow^* w \text{ valamely } x \in A\text{-ra}\}$

Beszűrő-törlő rendszer súlya

Egy besűrő-törlő rendszer komplexitásának mértéke lehet a besűrűható/törölhető sztringek maximális hossza, illetve a besűrű/törlő kontextusok maximális hossza.

Beszűrő-törlő rendszer súlya

Egy beszűrő-törlő rendszer komplexitásának mértéke lehet a beszűrhető/törölhető sztringek maximális hossza, illetve a beszűrő/törlő kontextusok maximális hossza.

Definíció

A $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszűrő-törlő rendszer **súlya** $(n, m; p, q)$, ahol

- ▶ $n = \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in I \},$
- ▶ $m = \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in I \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in I \},$
- ▶ $p = \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in D \},$
- ▶ $q = \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in D \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in D \},$

γ **összsúlya** $n + m + p + q$.

Beszűrő-törlő rendszer súlya

Egy beszűrő-törlő rendszer komplexitásának mértéke lehet a beszűrhető/törölhető sztringek maximális hossza, illetve a beszűrő/törlő kontextusok maximális hossza.

Definíció

A $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszűrő-törlő rendszer **súlya** $(n, m; p, q)$, ahol

- ▶ $n = \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in I \},$
- ▶ $m = \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in I \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in I \},$
- ▶ $p = \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in D \},$
- ▶ $q = \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in D \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in D \},$

γ **összsúlya** $n + m + p + q$.

1. Példa $\gamma_1 = \langle \{a, b\}, \{a, b\}, \{ab\}, \{(a, ab, b)\}, \emptyset \rangle$

Beszűrő-törlő rendszer súlya

Egy beszűrő-törlő rendszer komplexitásának mértéke lehet a beszűrhető/törölhető sztringek maximális hossza, illetve a beszűrő/törlő kontextusok maximális hossza.

Definíció

A $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszűrő-törlő rendszer **súlya** $(n, m; p, q)$, ahol

- ▶ $n = \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in I \},$
- ▶ $m = \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in I \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in I \},$
- ▶ $p = \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in D \},$
- ▶ $q = \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in D \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in D \},$

γ **összsúlya** $n + m + p + q$.

1. Példa $\gamma_1 = \langle \{a, b\}, \{a, b\}, \{ab\}, \{(a, ab, b)\}, \emptyset \rangle$

$$L(\gamma_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}.$$

Ez egy (2,1,0,0) súlyú (azaz 3 összsúlyú) rendszer.

Beszűrő-törlő rendszer – példa

2. Példa $\gamma_2 =$

$$\langle \{S, S', a, b\}, \{a, b\}, \{S\}, \{(\varepsilon, S' a S b, \varepsilon), (\varepsilon, S' a b, \varepsilon)\}, \{(\varepsilon, S S', \varepsilon)\} \rangle$$

Beszűrő-törlő rendszer – példa

2. Példa $\gamma_2 =$

$\langle \{S, S', a, b\}, \{a, b\}, \{S\}, \{(\varepsilon, S' a S b, \varepsilon), (\varepsilon, S' a b, \varepsilon)\}, \{(\varepsilon, S S', \varepsilon)\} \rangle$

Állítás: Minden terminális szót eredményező mondatforma néhány szomszédos SS' pár elhagyásával $a^n S b^n$ vagy $a^n b^n$ alakú.

Az állítás bizonyítása: A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval. Tegyük fel, hogy egy szó n levezetési lépés után ilyen alakú.

Egy szomszédos SS' pár elhagyásával továbbra is ilyen alakú marad.

Beszúró-törölő rendszer – példa

2. Példa $\gamma_2 =$

$\langle \{S, S', a, b\}, \{a, b\}, \{S\}, \{(\varepsilon, S' a S b, \varepsilon), (\varepsilon, S' a b, \varepsilon)\}, \{(\varepsilon, S S', \varepsilon)\} \rangle$

Állítás: Minden terminális szót eredményező mondatforma néhány szomszédos SS' pár elhagyásával $a^n S b^n$ vagy $a^n b^n$ alakú.

Az állítás bizonyítása: A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval. Tegyük fel, hogy egy szó n levezetési lépés után ilyen alakú.

Egy szomszédos SS' pár elhagyásával továbbra is ilyen alakú marad.

A beszúró szabályok S' -vel kezdődnek. Terminális után (vagy a szó legelejére) nem történhet beszúrás, mivel akkor a további levezetés során a most beszúrt S' előtt közvetlenül mindig egy terminális állna (vagy semmi se), így nem lehetne törölni a szóból.

Beszűrő-törlő rendszer – példa

S' után közvetlenül azért nem szűrhatunk be, mert bármely két S között van legalább egy terminális (minden S beszúrásakor mögé és elé is terminális kerül), és így bár az előtte lévő S' később esetleg törölhető egy S -sel együtt, de minden további S -et (a később beszúrandókat is beleértve) legalább egy terminális választaná el a most beszúrt S' -től.

Beszűrő-törölő rendszer – példa

S' után közvetlenül azért nem szűrhatunk be, mert bármely két S között van legalább egy terminális (minden S beszúrásakor mögé és elé is terminális kerül), és így bár az előtte lévő S' később esetleg törölhető egy S -sel együtt, de minden további S -et (a később beszúrandókat is beleértve) legalább egy terminális választaná el a most beszúrt S' -től.

Így csak közvetlenül S után történhetnek beszúrások. Ekkor viszont az indukciós feltevés alapján a szavak alakja továbbra is az állítás szerinti lesz. Ezzel az állítást beláttuk.

Beszűrő-törlő rendszer – példa

S' után közvetlenül azért nem szűrhatunk be, mert bármely két S között van legalább egy terminális (minden S beszúrásakor mögé és elé is terminális kerül), és így bár az előtte lévő S' később esetleg törölhető egy S -sel együtt, de minden további S -et (a később beszúrandókat is beleértve) legalább egy terminális választaná el a most beszúrt S' -től.

Így csak közvetlenül S után történhetnek beszúrások. Ekkor viszont az indukciós feltevés alapján a szavak alakja továbbra is az állítás szerinti lesz. Ezzel az állítást beláttuk.

Tehát $L(\gamma_2) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

Ez egy $(4,0,2,0)$ súlyú (azaz 6 összsúlyú) rendszer.

Beszűrő-törlő nyelvcsaládok

Definíció

$\text{INS}_n^m \text{DEL}_p^q := \{ L \mid L \text{ generálható } (n', m'; p', q') \text{ súlyú beszűrő-törlő rendszerrel, ahol } n' \leq n, m' \leq m, p' \leq p, q' \leq q \}$

Beszúró-törlő nyelvcsaládok

Definíció

$INS_n^m DEL_p^q := \{ L \mid L \text{ generálható } (n', m'; p', q') \text{ súlyú beszúró-törlő rendszerrel, ahol } n' \leq n, m' \leq m, p' \leq p, q' \leq q \}$

Ha az n, m, p, q paraméterek közül valamelyik nem korlátozott, akkor a megfelelő paraméter helyére *-t írunk.

Beszűrő-törlő nyelvcsaládok

Definíció

$INS_n^m DEL_p^q := \{ L \mid L \text{ generálható } (n', m'; p', q') \text{ súlyú beszűrő-törlő rendszerrel, ahol } n' \leq n, m' \leq m, p' \leq p, q' \leq q \}$

Ha az n, m, p, q paraméterek közül valamelyik nem korlátozott, akkor a megfelelő paraméter helyére *-t írunk.

Tehát az összes beszűrő-törlő rendszer családját $INS_*^* DEL_*^*$ jelöli.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_*^0 \text{DEL}_*^0 = \text{RE}$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_*^0 \text{DEL}_*^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás:

Minden RE-beli nyelv generálható 0-típusú grammatikával. Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges 0-típusú grammatika.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_*^0 \text{DEL}_*^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás:

Minden RE-beli nyelv generálható 0-típusú grammatikával. Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges 0-típusú grammatika.

Minden P -beli szabály $R : u \rightarrow v$ alakú, ahol R a szabály egyedi címkéje. Jelölje M a címkék halmazát. Feltehető, hogy M és $N \cup T$ diszjunkt halmazok.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_*^0 \text{DEL}_*^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás:

Minden RE-beli nyelv generálható 0-típusú grammatikával. Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges 0-típusú grammatika.

Minden P -beli szabály $R : u \rightarrow v$ alakú, ahol R a szabály egyedi címkéje. Jelölje M a címkék halmazát. Feltehető, hogy M és $N \cup T$ diszjunkt halmazok.

Definiáljuk az alábbi $\gamma = \langle N \cup T \cup M, T, \{S\}, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszert, ahol

$I = \{(\varepsilon, vR, \varepsilon) \mid R : u \rightarrow v \in P, R \in M, u, v \in (N \cup T)^*\}$ és

$D = \{(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \mid R : u \rightarrow v \in P, R \in M, u, v \in (N \cup T)^*\}.$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}^0_*\text{DEL}^0_* = \text{RE}$$

Bizonyítás:

Minden RE-beli nyelv generálható 0-típusú grammatikával. Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges 0-típusú grammatika.

Minden P -beli szabály $R : u \rightarrow v$ alakú, ahol R a szabály egyedi címkéje. Jelölje M a címkék halmazát. Feltehető, hogy M és $N \cup T$ diszjunkt halmazok.

Definiáljuk az alábbi $\gamma = \langle N \cup T \cup M, T, \{S\}, I, D \rangle$ beszűrő-törlő rendszert, ahol

$I = \{(\varepsilon, vR, \varepsilon) \mid R : u \rightarrow v \in P, R \in M, u, v \in (N \cup T)^*\}$ és

$D = \{(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \mid R : u \rightarrow v \in P, R \in M, u, v \in (N \cup T)^*\}$.

A $(\varepsilon, vR, \varepsilon)$ és $(\varepsilon, Ru, \varepsilon)$ szabáлыпárt **M -kapcsolatban állónak** nevezzük.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

$$L(G) \subseteq L(\gamma).$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

$$L(G) \subseteq L(\gamma).$$

Az az $R : u \rightarrow v$ szabályt használó G -beli $x_1ux_2 \implies x_1vx_2$ derivációs lépés γ -ban a $x_1ux_2 \implies_{\text{ins}} x_1vRux_2$ beszúró és a $x_1vRux_2 \implies_{\text{del}} x_1vx_2$ törlő lépésekkel szimulálható.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

$$L(G) \subseteq L(\gamma).$$

Az az $R : u \rightarrow v$ szabályt használó G -beli $x_1 u x_2 \implies x_1 v x_2$ derivációs lépés γ -ban a $x_1 u x_2 \implies_{\text{ins}} x_1 v R u x_2$ beszúró és a $x_1 v R u x_2 \implies_{\text{del}} x_1 v x_2$ törlő lépésekkel szimulálható.

$$L(G) \supseteq L(\gamma)$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

$$L(G) \subseteq L(\gamma).$$

Az az $R : u \rightarrow v$ szabályt használó G -beli $x_1ux_2 \implies x_1vx_2$ derivációs lépés γ -ban a $x_1ux_2 \implies_{\text{ins}} x_1vRux_2$ beszúró és a $x_1vRux_2 \implies_{\text{del}} x_1vx_2$ törlő lépésekkel szimulálható.

$$L(G) \supseteq L(\gamma)$$

Állítás: Ha γ -ban $S \implies^* \omega \in T^*$, akkor ω -nak van olyan γ -beli levezetése is, ahol minden $n \geq 1$ -re a $2n - 1$ -edik és $2n$ -edik lépésben alkalmazott szabály M -kapcsolatban áll.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

$$L(G) \subseteq L(\gamma).$$

Az az $R : u \rightarrow v$ szabályt használó G -beli $x_1 u x_2 \implies x_1 v x_2$ derivációs lépés γ -ban a $x_1 u x_2 \implies_{\text{ins}} x_1 v R u x_2$ beszúró és a $x_1 v R u x_2 \implies_{\text{del}} x_1 v x_2$ törlő lépésekkel szimulálható.

$$L(G) \supseteq L(\gamma)$$

Állítás: Ha γ -ban $S \implies^* \omega \in T^*$, akkor ω -nak van olyan γ -beli levezetése is, ahol minden $n \geq 1$ -re a $2n - 1$ -edik és $2n$ -edik lépésben alkalmazott szabály M -kapcsolatban áll.

Az állítás bizonyítása:

Legyen $\delta : S \implies \omega_1 \implies \omega_2 \implies \dots \implies \omega_{2k} = \omega$ γ -beli levezetés.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

$$L(G) \subseteq L(\gamma).$$

Az az $R : u \rightarrow v$ szabályt használó G -beli $x_1 u x_2 \implies x_1 v x_2$ derivációs lépés γ -ban a $x_1 u x_2 \implies_{\text{ins}} x_1 v R u x_2$ beszűrő és a $x_1 v R u x_2 \implies_{\text{del}} x_1 v x_2$ törlő lépésekkel szimulálható.

$$L(G) \supseteq L(\gamma)$$

Állítás: Ha γ -ban $S \implies^* \omega \in T^*$, akkor ω -nak van olyan γ -beli levezetése is, ahol minden $n \geq 1$ -re a $2n - 1$ -edik és $2n$ -edik lépésben alkalmazott szabály M -kapcsolatban áll.

Az állítás bizonyítása:

Legyen $\delta : S \implies \omega_1 \implies \omega_2 \implies \dots \implies \omega_{2k} = \omega$ γ -beli levezetés.

Minden δ -ban megjelenő $R \in M$ címke törlődik is később. Ez alapján párosíthatunk minden alkalmazott beszűrő szabályt egy vele M kapcsolatban lévő későbbi törlő szabállyal. Így éppen k darab egymással M -kapcsolatban álló szabáлыпárt kapunk.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Azt mondjuk, hogy ilyen pár **illeszkedik egymáshoz**, ha δ -ban közvetlenül egymást követi az alkalmazásuk.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Azt mondjuk, hogy ilyen pár **illeszkedik egymáshoz**, ha δ -ban közvetlenül egymást követi az alkalmazásuk.

Tegyük fel, hogy a párajaink között $0 < m \leq k$ darab egymáshoz nem illeszkedő pár van.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Azt mondjuk, hogy ilyen pár **illeszkedik egymáshoz**, ha δ -ban közvetlenül egymást követi az alkalmazásuk.

Tegyük fel, hogy a párajaink között $0 < m \leq k$ darab egymáshoz nem illeszkedő pár van.

Legyen $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ egy ilyen pár.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Azt mondjuk, hogy ilyen pár **illeszkedik egymáshoz**, ha δ -ban közvetlenül egymást követi az alkalmazásuk.

Tegyük fel, hogy a párajaink között $0 < m \leq k$ darab egymáshoz nem illeszkedő pár van.

Legyen $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ egy ilyen pár. Ekkor

$$\delta : S \Longrightarrow^* z_1 z_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} z_1 vRz_2 \Longrightarrow^+ y_1 Ruy_2 \Longrightarrow_{\text{del}} y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega$$

valamely $z_1, z_2, y_1, y_2 \in (N \cup T \cup M)^*$ -ra.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Azt mondjuk, hogy ilyen pár **illeszkedik egymáshoz**, ha δ -ban közvetlenül egymást követi az alkalmazásuk.

Tegyük fel, hogy a párjaink között $0 < m \leq k$ darab egymáshoz nem illeszkedő pár van.

Legyen $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ egy ilyen pár. Ekkor

$$\delta : S \Longrightarrow^* z_1 z_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} z_1 v R z_2 \Longrightarrow^+ y_1 R u y_2 \Longrightarrow_{\text{del}} y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega$$

valamely $z_1, z_2, y_1, y_2 \in (N \cup T \cup M)^*$ -ra.

Ez azt jelenti, hogy δ az alábbi részekből áll:

- (1) $S \Longrightarrow^* z_1 z_2$,
- (2) $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ alkalmazása
- (3) $z_1 v \Longrightarrow^* y_1$, // szabályalkalmazások R -en nem nyúlhatnak át
- (4) $z_2 \Longrightarrow^* u y_2$, // az illeszkedő párok egyazon oldalon vannak
- (5) $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ alkalmazása
- (6) $y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega$.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ezeket (1), (4), (2), (5), (3), (6) sorrendben átrendezve

$$(1) \quad S \Longrightarrow^* z_1 z_2,$$

$$(4) \quad z_2 \Longrightarrow^* u y_2,$$

$$(2) \quad (\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I \text{ alkalmazása}$$

$$(5) \quad (\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D \text{ alkalmazása}$$

$$(3) \quad z_1 v \Longrightarrow^* y_1,$$

$$(6) \quad y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega.$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ezeket (1), (4), (2), (5), (3), (6) sorrendben átrendezve

$$(1) S \Longrightarrow^* z_1 z_2,$$

$$(4) z_2 \Longrightarrow^* u y_2,$$

$$(2) (\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I \text{ alkalmazása}$$

$$(5) (\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D \text{ alkalmazása}$$

$$(3) z_1 v \Longrightarrow^* y_1,$$

$$(6) y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega.$$

ω alábbi levezetését kapjuk:

$$\delta' : S \Rightarrow^* z_1 z_2 \Rightarrow^* z_1 u y_2 \Rightarrow_{\text{ins}} z_1 v R u y_2 \Rightarrow_{\text{del}} z_1 v y_2 \Rightarrow^* y_1 y_2 \Rightarrow^* \omega.$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ezeket (1), (4), (2), (5), (3), (6) sorrendben átrendezve

$$(1) S \Longrightarrow^* z_1 z_2,$$

$$(4) z_2 \Longrightarrow^* u y_2,$$

$$(2) (\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I \text{ alkalmazása}$$

$$(5) (\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D \text{ alkalmazása}$$

$$(3) z_1 v \Longrightarrow^* y_1,$$

$$(6) y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega.$$

ω alábbi levezetését kapjuk:

$$\delta' : S \Rightarrow^* z_1 z_2 \Rightarrow^* z_1 u y_2 \Rightarrow_{\text{ins}} z_1 v R u y_2 \Rightarrow_{\text{del}} z_1 v y_2 \Rightarrow^* y_1 y_2 \Rightarrow^* \omega.$$

Ezáltal illeszkedő párok nem válhattak szét, ezért így már csak legfeljebb $m - 1$ nem illeszkedő szabálpárunk maradt.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ezeket (1), (4), (2), (5), (3), (6) sorrendben átrendezve

$$(1) S \Longrightarrow^* z_1 z_2,$$

$$(4) z_2 \Longrightarrow^* u y_2,$$

$$(2) (\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I \text{ alkalmazása}$$

$$(5) (\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D \text{ alkalmazása}$$

$$(3) z_1 v \Longrightarrow^* y_1,$$

$$(6) y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega.$$

ω alábbi levezetését kapjuk:

$$\delta' : S \Rightarrow^* z_1 z_2 \Rightarrow^* z_1 u y_2 \Rightarrow_{\text{ins}} z_1 v R u y_2 \Rightarrow_{\text{del}} z_1 v y_2 \Rightarrow^* y_1 y_2 \Rightarrow^* \omega.$$

Ezáltal illeszkedő párok nem válhattak szét, ezért így már csak legfeljebb $m - 1$ nem illeszkedő szabálpárunk maradt.

Tehát a nem illeszkedő szabálpárok száma 0-ra csökkenthető, ezzel az állítást bizonyítottuk.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ezeket (1), (4), (2), (5), (3), (6) sorrendben átrendezve

$$(1) S \Rightarrow^* z_1 z_2,$$

$$(4) z_2 \Rightarrow^* u y_2,$$

$$(2) (\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I \text{ alkalmazása}$$

$$(5) (\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D \text{ alkalmazása}$$

$$(3) z_1 v \Rightarrow^* y_1,$$

$$(6) y_1 y_2 \Rightarrow^* \omega.$$

ω alábbi levezetését kapjuk:

$$\delta' : S \Rightarrow^* z_1 z_2 \Rightarrow^* z_1 u y_2 \Rightarrow_{\text{ins}} z_1 v R u y_2 \Rightarrow_{\text{del}} z_1 v y_2 \Rightarrow^* y_1 y_2 \Rightarrow^* \omega.$$

Ezáltal illeszkedő párok nem válhattak szét, ezért így már csak legfeljebb $m - 1$ nem illeszkedő szabálpárunk maradt.

Tehát a nem illeszkedő szabálpárok száma 0-ra csökkenthető, ezzel az állítást bizonyítottuk. Két egymást követő derivációs lépés γ -ban, amely M -kapcsolatban álló szabályokat használ megfelel egy G -beli levezetési lépésnek, így ω G -ben is generálható.

CF InsDel rendszer – példa

Példa: Legyen $G = \langle \{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$ az $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ nyelvet generáló grammatika a következő szabályrendszerrel

$$R_1 : S \rightarrow aSX,$$

$$R_2 : S \rightarrow aY,$$

$$R_3 : YX \rightarrow bYc,$$

$$R_4 : cX \rightarrow Xc,$$

$$R_5 : Y \rightarrow bc.$$

CF InsDel rendszer – példa

Példa: Legyen $G = \langle \{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$ az $L = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 1\}$ nyelvet generáló grammatika a következő szabályrendszerrel

$$R_1 : S \rightarrow aSX,$$

$$R_2 : S \rightarrow aY,$$

$$R_3 : YX \rightarrow bYc,$$

$$R_4 : cX \rightarrow Xc,$$

$$R_5 : Y \rightarrow bc.$$

A megfelelő $\gamma = \langle V, \{a, b, c\}, \{S\}, I, D \rangle$ beszűrő-törlő rendszer, ahol $V = \{S, X, Y, a, b, c, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$:

I -beli szabályok	D -beli szabályok
$(\varepsilon, aSXR_1, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_1S, \varepsilon)$
$(\varepsilon, aYR_2, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_2S, \varepsilon)$
$(\varepsilon, bYcR_3, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_3YX, \varepsilon)$
$(\varepsilon, XcR_4, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_4cX, \varepsilon)$
$(\varepsilon, bcR_5, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_5Y, \varepsilon)$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Következmény (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0 \text{DEL}_3^0 = \text{RE}$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Következmény (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0 \text{DEL}_3^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás:

Ismeretes, hogy minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ nulladik típusú grammatika **0-adik típusú Kuroda normálformára** hozható. A normálforma alakja:

$A \rightarrow a, A \rightarrow BC, A \rightarrow \varepsilon, AB \rightarrow CD$, ahol $A, B, C, D \in N$ és $a \in T$.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Következmény (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0\text{DEL}_3^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás:

Ismeretes, hogy minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ nulladik típusú grammatika **0-adik típusú Kuroda normálformára** hozható. A normálforma alakja:

$A \rightarrow a, A \rightarrow BC, A \rightarrow \varepsilon, AB \rightarrow CD$, ahol $A, B, C, D \in N$ és $a \in T$.

Minden szabály mindkét oldalának hossza legfeljebb 2, így a Tétel bizonyításában szereplő konstrukció szerint a beszűrő-törlő szabályok középső α komponensére $|\alpha| \leq 3$ adódik. □

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Egy élesebb tétel a következő:

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0 \text{DEL}_2^0 = \text{RE}$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Egy élesebb tétel a következő:

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0 \text{DEL}_2^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy 0-típusú

Kuroda-normálformában adott grammatika, ahol P szabályai M elemeivel injektív módon vannak címkézve és $M \cap (N \cup T) = \emptyset$.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Egy élesebb tétel a következő:

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0 \text{DEL}_2^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy 0-típusú

Kuroda-normálformában adott grammatika, ahol P szabályai M elemeivel injektív módon vannak címkézve és $M \cap (N \cup T) = \emptyset$.

A konstruált beszűrő-törlő rendszer a következő:

$$\gamma = \langle N \cup \{A' \mid A \in N\} \cup T \cup M \cup \{R', R'' \mid R \in M\}, T, \{S\}, I, D \rangle.$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Egy élesebb tétel a következő:

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0 \text{DEL}_2^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy 0-típusú

Kuroda-normálformában adott grammatika, ahol P szabályai M elemeivel injektív módon vannak címkézve és $M \cap (N \cup T) = \emptyset$.

A konstruált beszűrő-törlő rendszer a következő:

$$\gamma = \langle N \cup \{A' \mid A \in N\} \cup T \cup M \cup \{R', R'' \mid R \in M\}, T, \{S\}, I, D \rangle.$$

Minden $R : u \rightarrow v \in P$ környezetfüggetlen szabályra hozzáadunk γ -hoz egy $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ beszűrő és egy $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ törlő szabályt.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Egy élesebb tétel a következő:

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_3^0 \text{DEL}_2^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy 0-típusú Kuroda-normálformában adott grammatika, ahol P szabályai M elemeivel injektív módon vannak címkézve és $M \cap (N \cup T) = \emptyset$.

A konstruált beszűrő-törlő rendszer a következő:

$$\gamma = \langle N \cup \{A' \mid A \in N\} \cup T \cup M \cup \{R', R'' \mid R \in M\}, T, \{S\}, I, D \rangle.$$

Minden $R : u \rightarrow v \in P$ környezetfüggetlen szabályra hozzáadunk γ -hoz egy $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ beszűrő és egy $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ törlő szabályt.

Az $R : AB \rightarrow CD \in P$ nem környezetfüggetlen szabályra adjuk hozzá γ -hoz a $(\varepsilon, CDR', \varepsilon), (\varepsilon, R''B'A', \varepsilon) \in I$ és a $(\varepsilon, A'A, \varepsilon), (\varepsilon, B'B, \varepsilon), (\varepsilon, R'R'', \varepsilon) \in D$ szabályokat.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$$L(G) \subseteq L(\gamma):$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$$L(G) \subseteq L(\gamma):$$

G környezetfüggetlen szabályai γ -ban hasonlóképpen szimulálhatók, mint ahogy azt az előző Tételben csináltuk.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$$L(G) \subseteq L(\gamma):$$

G környezetfüggetlen szabályai γ -ban hasonlóképpen szimulálhatók, mint ahogy azt az előző Tételben csináltuk.

Az $R : AB \rightarrow CD$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni:

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$$L(G) \subseteq L(\gamma):$$

G környezetfüggetlen szabályai γ -ban hasonlóképpen szimulálhatók, mint ahogy azt az előző Tételben csináltuk.

Az $R : AB \rightarrow CD$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni:

$$x_1 ABx_2 \xRightarrow{\text{ins}} x_1 CDR' ABx_2 \xRightarrow{\text{ins}} x_1 CDR' R'' B' A' ABx_2 \xRightarrow{\text{del}}^3 x_1 CDx_2.$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$$L(G) \subseteq L(\gamma):$$

G környezetfüggetlen szabályai γ -ban hasonlóképpen szimulálhatók, mint ahogy azt az előző Tételben csináltuk.

Az $R : AB \rightarrow CD$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni:

$$x_1 ABx_2 \xRightarrow{\text{ins}} x_1 CDR' ABx_2 \xRightarrow{\text{ins}} x_1 CDR' R'' B' A' ABx_2 \xRightarrow{\text{del}}^3 x_1 CDx_2.$$

$$L(G) \supseteq L(\gamma):$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$$L(G) \subseteq L(\gamma):$$

G környezetfüggetlen szabályai γ -ban hasonlóképpen szimulálhatók, mint ahogy azt az előző Tételben csináltuk.

Az $R : AB \rightarrow CD$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni:

$$x_1 ABx_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 CDR' ABx_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 CDR' R'' B' A' ABx_2 \Longrightarrow_{\text{del}}^3 x_1 CDx_2.$$

$$L(G) \supseteq L(\gamma):$$

Az előző tételben látottakhoz hasonlóan bármely γ -beli deriváció, amely nem egymást követő M -kapcsolatban álló szabályokból áll, átrendezhető úgy, hogy olyan ekvivalens derivációt kapjunk, amelyben az egymást követő lépések összeillenek.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$$L(G) \subseteq L(\gamma):$$

G környezetfüggetlen szabályai γ -ban hasonlóképpen szimulálhatók, mint ahogy azt az előző Tételben csináltuk.

Az $R : AB \rightarrow CD$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni:

$$x_1 ABx_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 CDR' ABx_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 CDR' R'' B' A' ABx_2 \Longrightarrow_{\text{del}}^3 x_1 CDx_2.$$

$$L(G) \supseteq L(\gamma):$$

Az előző tételben látottakhoz hasonlóan bármely γ -beli deriváció, amely nem egymást követő M -kapcsolatban álló szabályokból áll, átrendezhető úgy, hogy olyan ekvivalens derivációt kapjunk, amelyben az egymást követő lépések összeillenek.

Ezt most nem részletezzük.



CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_2^0 \text{DEL}_3^0 = \text{RE}$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_2^0 \text{DEL}_3^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás: Minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ nulladik típusú grammatika az alábbi normálformára is hozható. A normálforma alakja:

$A \rightarrow a, A \rightarrow BC, A \rightarrow \varepsilon, AB \rightarrow \varepsilon$, ahol $A, B, C, D \in N$ és $a \in T$.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_2^0 \text{DEL}_3^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás: Minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ nulladik típusú grammatika az alábbi normálformára is hozható. A normálforma alakja:

$A \rightarrow a, A \rightarrow BC, A \rightarrow \varepsilon, AB \rightarrow \varepsilon$, ahol $A, B, C, D \in N$ és $a \in T$.

Világos, hiszen egy $AB \rightarrow CD$ alakú szabály ($A, B, C, D \in N$) az alábbi 3 szabállyal szimulálható:

$A \rightarrow CD_R, D_R \rightarrow DX_B, X_B B \rightarrow \varepsilon$, ahol D_R, X_B új egyedi nemterminálisok.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$$\text{INS}_2^0 \text{DEL}_3^0 = \text{RE}$$

Bizonyítás: Minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ nulladik típusú grammatika az alábbi normálformára is hozható. A normálforma alakja:

$A \rightarrow a, A \rightarrow BC, A \rightarrow \varepsilon, AB \rightarrow \varepsilon$, ahol $A, B, C, D \in N$ és $a \in T$.

Világos, hiszen egy $AB \rightarrow CD$ alakú szabály ($A, B, C, D \in N$) az alábbi 3 szabállyal szimulálható:

$A \rightarrow CD_R, D_R \rightarrow DX_B, X_B B \rightarrow \varepsilon$, ahol D_R, X_B új egyedi nemterminálisok.

Konstruálunk egy $\gamma = \langle N \cup \{A' \mid A \in N\} \cup T \cup M, T, \{S\}, I, D \rangle$ (2,0;3,0) súlyú beszűrő-törlő rendszert a következőképpen:

CF InsDel rendszerek számítási ereje

- ▶ Minden $u \rightarrow \varepsilon \in P$ szabályhoz legyen $(\varepsilon, u, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $R : A \rightarrow a \in P$ esetén legyen $(\varepsilon, aR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, RA, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $A \rightarrow BC$ szabály esetén legyen $(\varepsilon, BB', \varepsilon) \in I$, $(\varepsilon, CC', \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, C'B'A, \varepsilon) \in D$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

- ▶ Minden $u \rightarrow \varepsilon \in P$ szabályhoz legyen $(\varepsilon, u, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $R : A \rightarrow a \in P$ esetén legyen $(\varepsilon, aR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, RA, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $A \rightarrow BC$ szabály esetén legyen $(\varepsilon, BB', \varepsilon) \in I$, $(\varepsilon, CC', \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, C'B'A, \varepsilon) \in D$

Az $R : A \rightarrow BC$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni (a többi szabályra a szimuláció nyilvánvaló):

$$x_1 A x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 B B' A x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 B C C' B' A x_2 \Longrightarrow_{\text{del}} x_1 B C x_2$$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

- ▶ Minden $u \rightarrow \varepsilon \in P$ szabályhoz legyen $(\varepsilon, u, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $R : A \rightarrow a \in P$ esetén legyen $(\varepsilon, aR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, RA, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $A \rightarrow BC$ szabály esetén legyen $(\varepsilon, BB', \varepsilon) \in I$, $(\varepsilon, CC', \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, C'B'A, \varepsilon) \in D$

Az $R : A \rightarrow BC$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni (a többi szabályra a szimuláció nyilvánvaló):

$$x_1 A x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 B B' A x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 B C C' B' A x_2 \Longrightarrow_{\text{del}} x_1 B C x_2$$

Ez bizonyítja az $L(G) \subseteq L(\gamma)$ tartalmazást.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

- ▶ Minden $u \rightarrow \varepsilon \in P$ szabályhoz legyen $(\varepsilon, u, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $R : A \rightarrow a \in P$ esetén legyen $(\varepsilon, aR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, RA, \varepsilon) \in D$
- ▶ Minden $A \rightarrow BC$ szabály esetén legyen $(\varepsilon, BB', \varepsilon) \in I$, $(\varepsilon, CC', \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, C'B'A, \varepsilon) \in D$

Az $R : A \rightarrow BC$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni (a többi szabályra a szimuláció nyilvánvaló):

$$x_1 A x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 B B' A x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 B C C' B' A x_2 \Longrightarrow_{\text{del}} x_1 B C x_2$$

Ez bizonyítja az $L(G) \subseteq L(\gamma)$ tartalmazást.

A fordított irányú tartalmazás hasonlóan igazolható, mint az előző bizonyításokban, bebizonyítható, hogy a nem illeszkedő szabálypárok száma 0-ra csökkenthető. □

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Lemma (Verlan, 2005)

Minden $(2,0;2,0)$ súlyú $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszerhez megadható egy vele ekvivalens $(2,0;0,0)$ súlyú $\gamma' = \langle T', T', A', I', \emptyset \rangle$ beszúró-törlő rendszer.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Lemma (Verlan, 2005)

Minden $(2,0;2,0)$ súlyú $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszerhez megadható egy vele ekvivalens $(2,0;0,0)$ súlyú $\gamma' = \langle T', T', A', I', \emptyset \rangle$ beszúró-törlő rendszer.

A lemmát nem bizonyítjuk. A bizonyítása többlépcsős, először megmutatható, hogy $A = \{\varepsilon\}$ esetén a nemterminálisok kiküszöbölhetők, majd ez belátható tetszőleges axiómarendszerre is, végül a törlő szabályokat is ki lehet váltani.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Lemma (Verlan, 2005)

Minden $(2,0;2,0)$ súlyú $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszerhez megadható egy vele ekvivalens $(2,0;0,0)$ súlyú $\gamma' = \langle T', T', A', I', \emptyset \rangle$ beszúró-törlő rendszer.

A lemmát nem bizonyítjuk. A bizonyítása többlépcsős, először megmutatható, hogy $A = \{\varepsilon\}$ esetén a nemterminálisok kiküszöbölhetők, majd ez belátható tetszőleges axiómarendszerre is, végül a törlő szabályokat is ki lehet váltani.

Tétel (Verlan, 2005)

1. $\text{INS}_2^0\text{DEL}_2^0 \subseteq \text{CF}$
2. $\text{REG} \not\subseteq \text{INS}_2^0\text{DEL}_2^0$
3. $\text{INS}_2^0\text{DEL}_2^0 \not\subseteq \text{REG}$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Bizonyítás:

1. A lemma szerint minden γ egy $(2,0;2,0)$ súlyú InsDel rendszerhez $\exists \gamma' = \langle T, T, A, I, \emptyset \rangle$ γ -val ekvivalens $(2,0;0,0)$ súlyú InsDel rendszer. Legyen a $G = \langle \{S, Z\}, T, P_A \cup P_I \cup \{Z \rightarrow \varepsilon\}, S \rangle$ CF grammatika a következő:

$$P_A = \{ S \rightarrow Za_1Za_2Z \cdots Za_nZ \mid a_1a_2 \cdots a_n \in A \}$$

$$P_I = \{ Z \rightarrow ZaZbZ \mid ab \in I \} \cup \{ Z \rightarrow ZaZ \mid a \in I \}.$$

Ekkor könnyen látható, hogy $L(G) = L(\gamma')$.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Bizonyítás:

1. A lemma szerint minden γ egy $(2,0;2,0)$ súlyú InsDel rendszerhez $\exists \gamma' = \langle T, T, A, I, \emptyset \rangle$ γ -val ekvivalens $(2,0;0,0)$ súlyú InsDel rendszer. Legyen a $G = \langle \{S, Z\}, T, P_A \cup P_I \cup \{Z \rightarrow \varepsilon\}, S \rangle$ CF grammatika a következő:

$$P_A = \{ S \rightarrow Za_1Za_2Z \cdots Za_nZ \mid a_1a_2 \cdots a_n \in A \}$$

$$P_I = \{ Z \rightarrow ZaZbZ \mid ab \in I \} \cup \{ Z \rightarrow ZaZ \mid a \in I \}.$$

Ekkor könnyen látható, hogy $L(G) = L(\gamma')$.

2. $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ nem generálható $(2,0;2,0)$ súlyú InsDel rendszerrel. Valóban, tegyük fel, hogy $\gamma' = \langle T, T, A, I, \emptyset \rangle$ InsDel rendszer generálja (a lemma szerint ilyen is van).

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Bizonyítás:

1. A lemma szerint minden γ egy $(2,0;2,0)$ súlyú InsDel rendszerhez $\exists \gamma' = \langle T, T, A, I, \emptyset \rangle$ γ -val ekvivalens $(2,0;0,0)$ súlyú InsDel rendszer. Legyen a $G = \langle \{S, Z\}, T, P_A \cup P_I \cup \{Z \rightarrow \varepsilon\}, S \rangle$ CF grammatika a következő:

$$P_A = \{ S \rightarrow Za_1Za_2Z \cdots Za_nZ \mid a_1a_2 \cdots a_n \in A \}$$

$$P_I = \{ Z \rightarrow ZaZbZ \mid ab \in I \} \cup \{ Z \rightarrow ZaZ \mid a \in I \}.$$

Ekkor könnyen látható, hogy $L(G) = L(\gamma')$.

2. $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ nem generálható $(2,0;2,0)$ súlyú InsDel rendszerrel. Valóban, tegyük fel, hogy $\gamma' = \langle T, T, A, I, \emptyset \rangle$ InsDel rendszer generálja (a lemma szerint ilyen is van). $I \neq \emptyset$, különben nem tudnánk egy végtelen nyelvet generálni. Legyen $(\varepsilon, \alpha, \varepsilon) \in I$ és $w \in L$ tetszőleges olyan szó, mely mindkét betűt tartalmazza, ekkor $\alpha^i w \alpha^i \in L (i \geq 0)$, de ez nem lehet.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

3. Tekintsük a $G_n = \langle \{S\}, T_n, P_n, S \rangle$ grammatika által generált $D_n := L(G_n)$ nyelvet, ahol $T_n = \{a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n\}$ és $P_n = \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S \rightarrow a_i S a'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

3. Tekintsük a $G_n = \langle \{S\}, T_n, P_n, S \rangle$ grammatika által generált $D_n := L(G_n)$ nyelvet, ahol $T_n = \{a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n\}$ és $P_n = \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S \rightarrow a_i S a'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

D_n a helyes zárójelezések nyelve n zárójelpártípussal. Ezt a nyelvet szokás Dyck-nyelvnek is nevezni.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

3. Tekintsük a $G_n = \langle \{S\}, T_n, P_n, S \rangle$ grammatika által generált $D_n := L(G_n)$ nyelvet, ahol $T_n = \{a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n\}$ és $P_n = \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S \rightarrow a_i S a'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

D_n a helyes zárójelezések nyelve n zárójelpártípussal. Ezt a nyelvet szokás Dyck-nyelvnek is nevezni.

Ismert, de könnyen be látható például a Myhill-Nerode tétellel vagy a reguláris nyelvek pumpálási lemmájával (kis Bar-Hillel lemma), hogy D_n nem reguláris.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

3. Tekintsük a $G_n = \langle \{S\}, T_n, P_n, S \rangle$ grammatika által generált $D_n := L(G_n)$ nyelvet, ahol $T_n = \{a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n\}$ és $P_n = \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S \rightarrow a_i S a'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

D_n a helyes zárójelezések nyelve n zárójelpártípussal. Ezt a nyelvet szokás Dyck-nyelvnek is nevezni.

Ismert, de könnyen be látható például a Myhill-Nerode tétellel vagy a reguláris nyelvek pumpálási lemmájával (kis Bar-Hillel lemma), hogy D_n nem reguláris.

Viszont a $\gamma_n = \langle T_n, T_n, \{\varepsilon\}, \{(\varepsilon, a_i a'_i, \varepsilon) \mid 1 \leq i \leq n\}, \emptyset \rangle$ beszűrő-törlő rendszer D_n -t generálja.

□

CF InsDel rendszerek számítási ereje

3. Tekintsük a $G_n = \langle \{S\}, T_n, P_n, S \rangle$ grammatika által generált $D_n := L(G_n)$ nyelvet, ahol $T_n = \{a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n\}$ és $P_n = \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S \rightarrow a_i S a'_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

D_n a helyes zárójelezések nyelve n zárójelpártípussal. Ezt a nyelvet szokás Dyck-nyelvnek is nevezni.

Ismert, de könnyen be látható például a Myhill-Nerode tétellel vagy a reguláris nyelvek pumpálási lemmájával (kis Bar-Hillel lemma), hogy D_n nem reguláris.

Viszont a $\gamma_n = \langle T_n, T_n, \{\varepsilon\}, \{(\varepsilon, a_i a'_i, \varepsilon) \mid 1 \leq i \leq n\}, \emptyset \rangle$ beszűrő-törlő rendszer D_n -t generálja.

□

Következmény $INS_2^0 DEL_2^0 \subset CF$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

No	súly	$(n, m; p, q)$	ereje	hivatkozás
1	6	$(3, 0; 3, 0)$	RE	Margenstern et al, 2005
2	5	$(1, 2; 1, 1)$	RE	Kari et al, 1997
3	5	$(1, 2; 2, 0)$	RE	Kari et al, 1997
4	5	$(2, 1; 2, 0)$	RE	Kari et al, 1997
5	5	$(1, 1; 1, 2)$	RE	Takahara-Yokomori, 2003
6	5	$(2, 1; 1, 1)$	RE	Takahara-Yokomori, 2003
7	5	$(2, 0; 3, 0)$	RE	Margenstern et al, 2005
8	5	$(3, 0; 2, 0)$	RE	Margenstern et al, 2005
9	4	$(1, 1; 2, 0)$	RE	Paun et al, 1998
10	4	$(1, 1; 1, 1)$	RE	Takahara-Yokomori, 2003
11	4	$(2, 0; 2, 0)$	\subset CF	Verlan, 2005
12	$m + 1$	$(m, 0; 1, 0)$	\subset CF	Verlan, 2005
13	$p + 1$	$(1, 0; p, 0)$	\subset REG	Verlan, 2005

CF InsDel rendszerek számítási ereje

No	súly	$(n, m; p, q)$	ereje	hivatkozás
1	6	$(3, 0; 3, 0)$	RE	Margenstern et al, 2005
2	5	$(1, 2; 1, 1)$	RE	Kari et al, 1997
3	5	$(1, 2; 2, 0)$	RE	Kari et al, 1997
4	5	$(2, 1; 2, 0)$	RE	Kari et al, 1997
5	5	$(1, 1; 1, 2)$	RE	Takahara-Yokomori, 2003
6	5	$(2, 1; 1, 1)$	RE	Takahara-Yokomori, 2003
7	5	$(2, 0; 3, 0)$	RE	Margenstern et al, 2005
8	5	$(3, 0; 2, 0)$	RE	Margenstern et al, 2005
9	4	$(1, 1; 2, 0)$	RE	Paun et al, 1998
10	4	$(1, 1; 1, 1)$	RE	Takahara-Yokomori, 2003
11	4	$(2, 0; 2, 0)$	\subset CF	Verlan, 2005
12	$m + 1$	$(m, 0; 1, 0)$	\subset CF	Verlan, 2005
13	$p + 1$	$(1, 0; p, 0)$	\subset REG	Verlan, 2005

Mivel 4-súlyúra többféle eredmény is van érdemes a súly fogalmát finomítani.

Beszúró-törlő rendszerek súlya

Definíció

Legyen $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszer

$$n := \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in I \},$$

$$m := \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in I \},$$

$$m' := \max \{ |v| \mid (u, \alpha, v) \in I \},$$

$$p := \max \{ |\alpha| \mid (u, \alpha, v) \in D \},$$

$$q := \max \{ |u| \mid (u, \alpha, v) \in D \},$$

$$q' := \max \{ |v| \mid (u, \alpha, v) \in D \}.$$

A beszúró-törlő rendszer **módosított súlya** az $(n, m, m'; p, q, q')$ vektorral adható meg, **módosított összsúlya**

$$n + m + m' + p + q + q'.$$

Beszűrő-törlő rendszerek súlya

Az új súlyozással az eredmények:

No	súly	$(n, m; p, q)$	ereje	új súly	$(n, m, m'; p, q, q')$
1	6	$(3, 0; 3, 0)$	RE	6	$(3, 0, 0; 3, 0, 0)$
2	5	$(1, 2; 1, 1)$	RE	8	$(1, 2, 2; 1, 1, 1)$
3	5	$(1, 2; 2, 0)$	RE	7	$(1, 2, 2; 2, 0, 0)$
4	5	$(2, 1; 2, 0)$	RE	6	$(2, 1, 1; 2, 0, 0)$
5	5	$(1, 1; 1, 2)$	RE	8	$(1, 1, 1; 1, 2, 2)$
6	5	$(2, 1; 1, 1)$	RE	7	$(2, 1, 1; 1, 1, 1)$
7	5	$(2, 0; 3, 0)$	RE	5	$(2, 0, 0; 3, 0, 0)$
8	5	$(3, 0; 2, 0)$	RE	5	$(3, 0, 0; 2, 0, 0)$
9	4	$(1, 1; 2, 0)$	RE	5	$(1, 1, 1; 2, 0, 0)$
10	4	$(1, 1; 1, 1)$	RE	6	$(1, 1, 1; 1, 1, 1)$
11	4	$(2, 0; 2, 0)$	\subset CF	4	$(2, 0, 0; 2, 0, 0)$

InsDel rendszerek számítási ereje

További eredmények:

No	súly	$(n, m, m'; p, q, q')$	ereje	hivatkozás
14	5	$(2, 0, 0; 1, 1, 1)$	RE	Krassovitskiy et al., 2008
15	6	$(1, 1, 0; 1, 1, 2)$	RE	Krassovitskiy et al., 2008
16	6	$(1, 1, 0; 2, 0, 2)$	RE	Matveevici et al., 2007
17	5	$(2, 0, 0; 2, 0, 1)$	RE	Krassovitskiy et al., 2008
18	5	$(1, 1, 0; 1, 1, 1)$	\nexists REG	Krassovitskiy et al., 2008