Számítási modellek

12. előadás

Beszúró-törlő rendszerek

Definíció

Beszúró-törlő rendszernek (InsDel rendszernek) nevezzük a $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ rendezett 5-öst, ahol

- V egy ábécé,
- $T \subseteq V$ a terminális ábécé,
- $A \subseteq V^*$ véges nyelv (az axiómák halmaza),
- I a **beszúró szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$,
- D a **törlő szabályok** véges halmaza, elemei (u, α, v) rendezett 3-asok, ahol $u, \alpha, v \in V^*$.

$(u, \alpha, v) \in I$ beszúró szabály az $uv \to u\alpha v$ szabálynak felel meg. (α-t beszúrhatjuk az (u, v) környezetbe.)

$(u, \alpha, v) \in D$ törlő szabály az $u\alpha v \to uv$ szabálynak felel meg. (α-t törölhetjük az (u, v) környezetből.)

Motiváció – a DNS szerkesztése

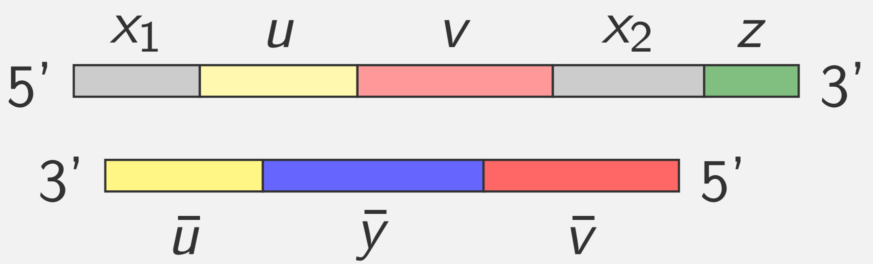
Az evolúció során is beszúródhat vagy törlődhet, általában egyszerre csak egyetlen szimbólum a DNS szekvenciából.

y beszúrása u és v közé hibás illesztéssel:

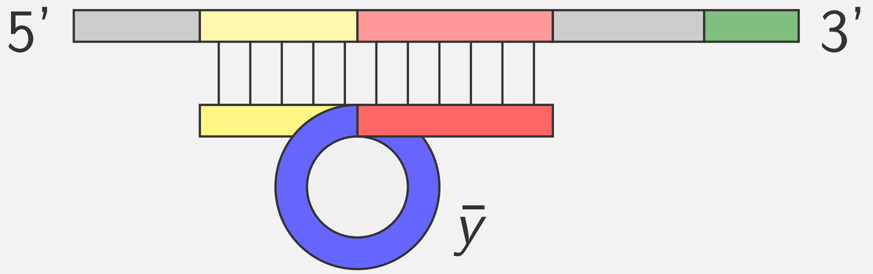
1. Egy kémcsőben $5' - x_1 u v x_2 z - 3'$-hez adjuk $3' - \bar{u}\bar{y}\bar{v} - 5'$-t.
2. Hő hatására $\bar{u}$ u-hoz, $\bar{v}$ v-hez tapad meghajlítva a $\bar{y}$-t.
3. Az első szál elvágása restrikciós enzimmel u és v között
4. A hiányzó komplemensekkel való dupla szállá történő kiegészítés a $\bar{z}$ primer és egy polimeráz hozzáadására.
5. A két szál szétválasztása olvasztás hatására.

Motiváció – a DNS szerkesztése

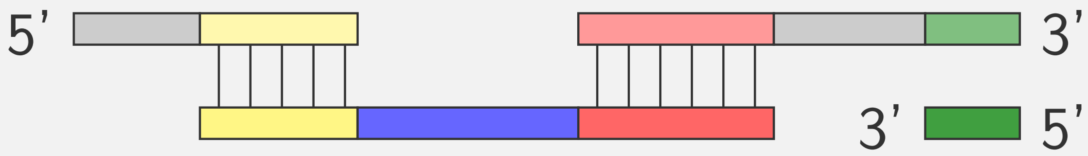
1. lépés:



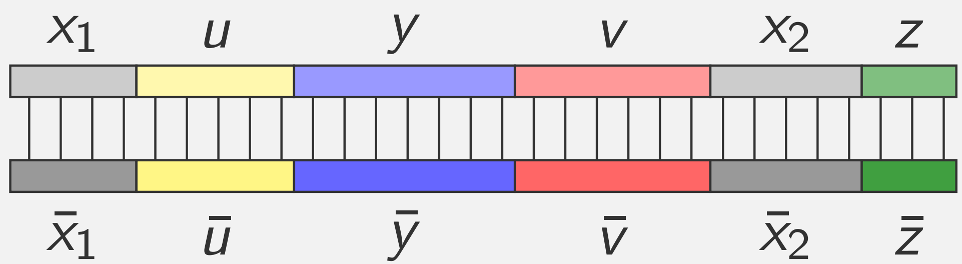
2. lépés:



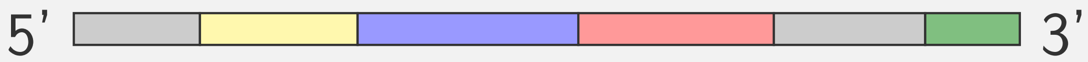
3. lépés:



4. lépés:



5. lépés:



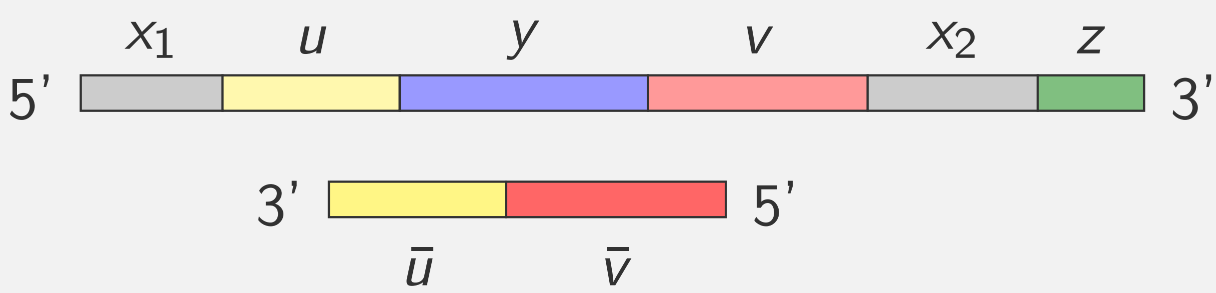
Motiváció – a DNS szerkesztése

y törlése u és v közül hibás illesztéssel:

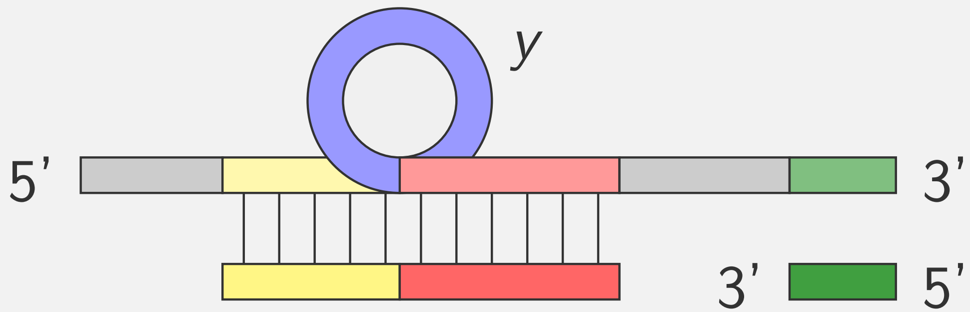
1. Egy kémcsőben $5' - x_1uyvx_2z - 3'$-hez adjuk $3' - \bar{u}\bar{v} - 5'$-t.
2. Hő hatására $\bar{u}$ u-hoz, $\bar{v}$ v-hez tapad meghajlítva y-t.
3. A $\bar{z}$ primer hozzáadására egy restrikciós emzim az első szálat elvágja u y illetve y és v között, azaz eltávolítja y-t, majd polimerizációval a hiányzó komplemensekkel való dupla szállá egészülnek ki.
4. A két szál szétválasztása olvasztás hatására.

Motiváció – a DNS szerkesztése

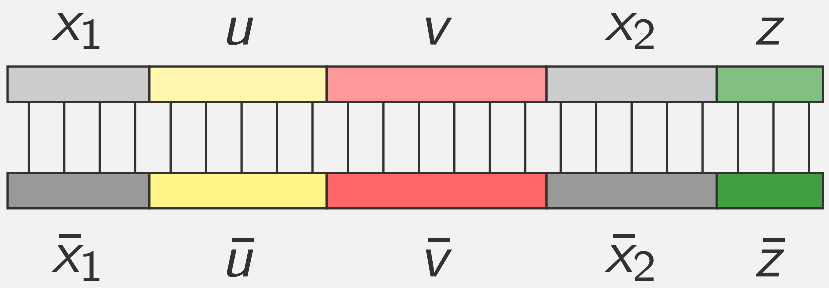
1. lépés:



2. lépés:



3. lépés:



4. lépés:

Beszúró-törlő rendszer által generált nyelv

Definíció

$x \Longrightarrow_{\text{ins}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 uvx_2, y = x_1 u\alpha vx_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in I$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$-ra.

$x \Longrightarrow_{\text{del}} y$ akkor és csak akkor, ha $x = x_1 u\alpha vx_2, y = x_1 uvx_2$ valamely $(u, \alpha, v) \in D$ -re és $x_1, x_2 \in V^*$-ra.

Ekkor a **közvetlen (egylépéses) levezetést** a következőképpen definiálhatjuk: $(x \Longrightarrow y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \Longrightarrow_{\text{ins}} y) \vee (x \Longrightarrow_{\text{del}} y)$

Definíció

Közvetett (többlépéses) levezetés: a $\Longrightarrow$ reflexív, tranzitív lezártja. Jelölése: $\Longrightarrow^*$.

Definíció

A $\gamma = \langle V, T, A, I, D\rangle$ beszúró-törlő rendszer által **generált nyelv**:
$L(\gamma) = \{w \in T^* \mid x \Longrightarrow^* w \text{ valamely } x \in A\text{-ra}\}$

Beszúró-törlő rendszer súlya

Egy beszúró-törlő rendszer komplexitásának mértéke lehet a beszúrható/törölhető sztringek maximális hossza, illetve a beszúró/törlő kontextusok maximális hossza.

Definíció

A $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszer **súlya** $(n, m; p, q)$, ahol

- $n = \max\{\, |\alpha| \,\big|\, (u, \alpha, v) \in I \,\}$,
- $m = \max\{\, |u| \,\big|\, (u, \alpha, v) \in I \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in I \,\}$,
- $p = \max\{\, |\alpha| \,\big|\, (u, \alpha, v) \in D \,\}$,
- $q = \max\{\, |u| \,\big|\, (u, \alpha, v) \in D \text{ vagy } (v, \alpha, u) \in D \,\}$,

γ **összsúlya** $n + m + p + q$.

1. **Példa** $\gamma_1 = \langle \{a, b\}, \{a, b\}, \{ab\}, \{(a, ab, b)\}, \emptyset \rangle$

$L(\gamma_1) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$.

Ez egy (2,1,0,0) súlyú (azaz 3 összsúlyú) rendszer.

Beszúró-törlő rendszer – példa

2. Példa $\gamma_2 =$
$\langle \{S, S', a, b\}, \{a, b\}, \{S\}, \{(\varepsilon, S'aSb, \varepsilon), (\varepsilon, S'ab, \varepsilon)\}, \{(\varepsilon, SS', \varepsilon)\} \rangle$

Állítás: Minden terminális szót eredményző mondatforma néhány szomszédos SS' pár elhagyásával a^nSb^n vagy a^nb^n alakú.

Az állítás bizonyítása: A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval. Tegyük fel, hogy egy szó n levezetési lépés után ilyen alakú.

Egy szomszédos SS' pár elhagyásával továbbra is ilyen alakú marad.

A beszúró szabályok S'-vel kezdődnek. Terminális után (vagy a szó legelejére) nem történhet beszúrás, mivel akkor a további levezetés során a most beszúrt S' előtt közvetlenül mindig egy terminális állna (vagy semmi se), így nem lehetne törölni a szóból.

Beszúró-törlő rendszer – példa

S' után közvetlenül azért nem szúrhatunk be, mert bármely két S között van legalább egy terminális (minden S beszúrásakor mögé és elé is terminális kerül), és így bár az előtte lévő S' később esetleg törölhető egy S-sel együtt, de minden további S-et (a később beszúrandókat is beleértve) legalább egy terminális választaná el a most beszúrt S'-től.

Így csak közvetlenül S után történhetnek beszúrások. Ekkor viszont az indukciós feltevés alapján a szavak alakja továbbra is az állítás szerinti lesz. Ezzel az állítást beláttuk.

Tehát $L(\gamma_2) = \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$.

Ez egy (4,0,2,0) súlyú (azaz 6 összsúlyú) rendszer.

Beszúró-törlő nyelvcsaládok

Definíció

$$\mathrm{INS}_n^m\mathrm{DEL}_p^q := \{\, L \mid L \text{ generálható } (n', m'; p', q') \text{ súlyú beszúró-törlő rendszerrel, ahol } n' \leqslant n, m' \leqslant m, p' \leqslant p, q' \leqslant q \,\}$$

Ha az n, m, p, q paraméterek közül valamelyik nem korlátozott, akkor a megfelelő paraméter helyére $*$-t írunk.

Tehát az összes beszúró-törlő rendszer családját $\mathrm{INS}_*^*\mathrm{DEL}_*^*$ jelöli.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$\mathrm{INS}_*^0\mathrm{DEL}_*^0 = \mathrm{RE}$

Bizonyítás:
Minden RE-beli nyelv generálható 0-típusú grammatikával. Legyen $G = \langle N, T, P, S \rangle$ egy tetszőleges 0-típusú grammatika.

Minden P-beli szabály $R : u \to v$ alakú, ahol R a szabály egyedi címkéje. Jelölje M a címkék halmazát. Feltehető, hogy M és $N \cup T$ diszjunkt halmazok.

Definiáljuk az alábbi $\gamma = \langle N \cup T \cup M, T, \{S\}, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszert, ahol
$I = \{(\varepsilon, vR, \varepsilon) \,|\, R : u \to v \in P, R \in M, u, v \in (N \cup T)^*\}$ és
$D = \{(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \,|\, R : u \to v \in P, R \in M, u, v \in (N \cup T)^*\}$.

A $(\varepsilon, vR, \varepsilon)$ és $(\varepsilon, Ru, \varepsilon)$ szabálypárt **M-kapcsolatban állónak** nevezzük.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

$L(G) \subseteq L(\gamma)$.

Az az $R : u \to v$ szabályt használó G-beli $x_1 u x_2 \Longrightarrow x_1 v x_2$ derivációs lépés γ-ban a $x_1 u x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 v R u x_2$ beszúró és a $x_1 v R u x_2 \Longrightarrow_{\text{del}} x_1 v x_2$ törlő lépésekkel szimulálható.

$L(G) \supseteq L(\gamma)$

Állítás: Ha γ-ban $S \Longrightarrow^* \omega \in T^*$, akkor ω-nak van olyan γ-beli levezetése is, ahol minden $n \geqslant 1$-re a $2n-1$-edik és $2n$-edik lépésben alkalmazott szabály M-kapcsolatban áll.

Az állítás bizonyítása:

Legyen $\delta : S \Longrightarrow \omega_1 \Longrightarrow \omega_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \omega_{2k} = \omega$ γ-beli levezetés.

Minden δ-ban megjelenő $R \in M$ címke törlődik is később. Ez alapján párosíthatunk minden alkalmazott beszúró szabályt egy vele M kapcsolatban lévő későbbi törlő szabállyal. Így éppen k darab egymással M-kapcsolatban álló szabálypárt kapunk.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Azt mondjuk, hogy ilyen pár **illeszkedik egymáshoz**, ha δ-ban közvetlenül egymást követi az alkalmazásuk.

Tegyük fel, hogy a párjaink között $0 < m \leqslant k$ darab egymáshoz nem illeszkedő pár van.

Legyen $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ egy ilyen pár. Ekkor

$\delta : S \Longrightarrow^* z_1 z_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} z_1 vRz_2 \Longrightarrow^+ y_1 Ruy_2 \Longrightarrow_{\text{del}} y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega$

valamely $z_1, z_2, y_1, y_2 \in (N \cup T \cup M)^*$-ra.

Ez azt jelenti, hogy δ az alábbi részekből áll:

(1) $S \Longrightarrow^* z_1 z_2$,
(2) $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ alkalmazása
(3) $z_1 v \Longrightarrow^* y_1$, // szabályalkalmazások R-en nem nyúlhatnak át
(4) $z_2 \Longrightarrow^* uy_2$, // az illeszkedő párok egyazon oldalon vannak
(5) $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ alkalmazása
(6) $y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega$.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ezeket (1), (4), (2), (5), (3), (6) sorrendben átrendezve

(1) $S \Longrightarrow^* z_1 z_2$,

(4) $z_2 \Longrightarrow^* u y_2$,

(2) $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ alkalmazása

(5) $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ alkalmazása

(3) $z_1 v \Longrightarrow^* y_1$,

(6) $y_1 y_2 \Longrightarrow^* \omega$.

ω alábbi levezetését kapjuk:

$\delta' : S \Rightarrow^* z_1 z_2 \Rightarrow^* z_1 u y_2 \Rightarrow_{\text{ins}} z_1 vRu y_2 \Rightarrow_{\text{del}} z_1 v y_2 \Rightarrow^* y_1 y_2 \Rightarrow^* \omega.$

Ezáltal illeszkedő párok nem válhattak szét, ezért így már csak legfeljebb $m - 1$ nem illeszkedő szabálypárunk maradt.

Tehát a nem illeszkedő szabálypárok száma 0-ra csökkenthető, ezzel az állítást bizonyítottuk. Két egymást követő derivációs lépés γ-ban, amely M-kapcsolatban álló szabályokat használ megfelel egy G-beli levezetési lépésnek, így ω G-ben is generálható. $\square$

CF InsDel rendszer – példa

Példa: Legyen $G = \langle \{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$ az $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geqslant 1\}$ nyelvet generáló grammatika a következő szabályrendszerrel

$R_1 : S \to aSX$,
$R_2 : S \to aY$,
$R_3 : YX \to bYc$,
$R_4 : cX \to Xc$,
$R_5 : Y \to bc$.

A megfelelő $\gamma = \langle V, \{a, b, c\}, \{S\}, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszer, ahol $V = \{S, X, Y, a, b, c, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$:

I-beli szabályok	D-beli szabályok
$(\varepsilon, aSXR_1, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_1S, \varepsilon)$
$(\varepsilon, aYR_2, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_2S, \varepsilon)$
$(\varepsilon, bYcR_3, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_3YX, \varepsilon)$
$(\varepsilon, XcR_4, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_4cX, \varepsilon)$
$(\varepsilon, bcR_5, \varepsilon)$	$(\varepsilon, R_5Y, \varepsilon)$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Következmény (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$\mathrm{INS}_3^0\mathrm{DEL}_3^0 = \mathrm{RE}$

Bizonyítás:
Ismeretes, hogy minden $G = \langle N, T, P, S \rangle$ nulladik típusú grammatika **0-adik típusú Kuroda normálformára** hozható. A normálforma alakja:
$A \rightarrow a, A \rightarrow BC, A \rightarrow \varepsilon, AB \rightarrow CD$, ahol $A, B, C, D \in N$ és $a \in T$.

Minden szabály mindkét oldalának hossza legfeljebb 2, így a Tétel bizonyításában szereplő konstrukció szerint a beszúró-törlő szabályok középső α komponensére $|\alpha| \leqslant 3$ adódik. $\square$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Egy élesebb tétel a következő:

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$\mathrm{INS}_3^0\mathrm{DEL}_2^0 = \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, T, P, S\rangle$ egy 0-típusú Kuroda-normálformában adott grammatika, ahol P szabályai M elemeivel injektív módon vannak címkézve és $M \cap (N \cup T) = \emptyset$.

A konstruált beszúró-törlő rendszer a következő:
$\gamma = \langle N \cup \{A' \mid A \in N\} \cup T \cup M \cup \{R', R'' \mid R \in M\}, T, \{S\}, I, D\rangle$.

Minden $R : u \to v \in P$ környezetfüggetlen szabályra hozzáadunk γ-hoz egy $(\varepsilon, vR, \varepsilon) \in I$ beszúró és egy $(\varepsilon, Ru, \varepsilon) \in D$ törlő szabályt.

Az $R : AB \to CD \in P$ nem környezetfüggetlen szabályra adjuk hozzá γ-hoz a $(\varepsilon, CDR', \varepsilon), (\varepsilon, R''B'A', \varepsilon) \in I$ és a $(\varepsilon, A'A, \varepsilon), (\varepsilon, B'B, \varepsilon), (\varepsilon, R'R'', \varepsilon) \in D$ szabályokat.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezek a szabályok **M-kapcsolatban** állnak.

$L(G) \subseteq L(\gamma)$:

G környezetfüggetlen szabályai γ-ban hasonlóképpen szimulálhatók, mint ahogy azt az előző Tételben csináltuk.

Az $R : AB \to CD$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni:

$x_1 AB x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 CDR' AB x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 CDR' R'' B' A' AB x_2 \Longrightarrow^{3}_{\text{del}} x_1 CD x_2$.

$L(G) \supseteq L(\gamma)$:

Az előző tételben látottakhoz hasonlóan bármely γ-beli deriváció, amely nem egymást követő M-kapcsolatban álló szabályokból áll, átrendezhető úgy, hogy olyan ekvivalens derivációt kapjunk, amelyben az egymást követő lépések összeillenek.

Ezt most nem részletezzük. $\square$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Tétel (Margenstern-Paun-Rogozhind-Verlan, 2005)

$\mathrm{INS}_2^0\mathrm{DEL}_3^0 = \mathrm{RE}$

Bizonyítás: Minden $G = \langle N, T, P, S\rangle$ nulladik típusú grammatika az alábbi normálformára is hozható. A normálforma alakja:

$A \to a, A \to BC, A \to \varepsilon, AB \to \varepsilon$, ahol $A, B, C, D \in N$ és $a \in T$.

Világos, hiszen egy $AB \to CD$ alakú szabály $(A, B, C, D \in N)$ az alábbi 3 szabállyal szimulálható:
$A \to CD_R, D_R \to DX_B, X_B B \to \varepsilon$, ahol D_R, X_B új egyedi nemterminálisok.
Konstruálunk egy $\gamma = \langle N \cup \{A' \mid A \in N\} \cup T \cup M, T, \{S\}, I, D\rangle$ (2,0;3,0) súlyú beszúró-törlő rendszert a következőképpen:

CF InsDel rendszerek számítási ereje

- Minden $u \to \varepsilon \in P$ szabályhoz legyen $(\varepsilon, u, \varepsilon) \in D$
- Minden $R : A \to a \in P$ esetén legyen $(\varepsilon, aR, \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, RA, \varepsilon) \in D$
- Minden $A \to BC$ szabály esetén legyen $(\varepsilon, BB', \varepsilon) \in I$, $(\varepsilon, CC', \varepsilon) \in I$ és $(\varepsilon, C'B'A, \varepsilon) \in D$

Az $R : A \to BC$ szabályt a következőképpen lehet szimulálni (a többi szabályra a szimuláció nyilvánvaló):

$$x_1 A x_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 BB'Ax_2 \Longrightarrow_{\text{ins}} x_1 BCC'B'Ax_2 \Longrightarrow_{\text{del}} x_1 BCx_2$$

Ez bizonyítja az $L(G) \subseteq L(\gamma)$ tartalmazást.

A fordított irányú tartalmazás hasonlóan igazolható, mint az előző bizonyításokban, bebizonyítható, hogy a nem illeszkedő szabálypárok száma 0-ra csökkenthető. $\square$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Lemma (Verlan, 2005)

Minden (2,0;2,0) súlyú $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszerhez megadható egy vele ekvivalens (2,0;0,0) súlyú $\gamma' = \langle T', T', A', I', \emptyset \rangle$ beszúró-törlő rendszer.

A lemmát nem bizonyítjuk. A bizonyítása többlépcsős, először megmutatható, hogy $A = \{\varepsilon\}$ esetén a nemterminálisok kiküszöbölhetők, majd ez belátható tetszőleges axiómarendszerre is, végül a törlő szabályokat is ki lehet váltani.

Tétel (Verlan, 2005)

1. $\mathrm{INS}_2^0\mathrm{DEL}_2^0 \subseteq \mathrm{CF}$
2. $\mathrm{REG} \nsubseteq \mathrm{INS}_2^0\mathrm{DEL}_2^0$
3. $\mathrm{INS}_2^0\mathrm{DEL}_2^0 \nsubseteq \mathrm{REG}$

CF InsDel rendszerek számítási ereje

Bizonyítás:

1. A lemma szerint minden γ egy (2,0;2,0) súlyú InsDel rendszerhez $\exists\ \gamma' = \langle T, T, A, I, \emptyset \rangle$ γ-val ekvivalens (2,0;0,0) súlyú InsDel rendszer. Legyen a $G = \langle \{S, Z\}, T, P_A \cup P_I \cup \{Z \to \varepsilon\}, S \rangle$ CF grammatika a következő:

$$P_A = \{\, S \to Za_1Za_2Z \cdots Za_nZ \mid a_1a_2 \cdots a_n \in A \,\}$$

$$P_I = \{\, Z \to ZaZbZ \mid ab \in I \,\} \cup \{\, Z \to ZaZ \mid a \in I \,\}.$$

Ekkor könnyen látható, hogy $L(G) = L(\gamma')$.

2. $L = \{a^n b^m \mid n, m \geqslant 0\}$ nem generálható (2,0;2,0) súlyú InsDel rendszerrel. Valóban, tegyük fel, hogy $\gamma' = \langle T, T, A, I, \emptyset \rangle$ InsDel rendszer generálja (a lemma szerint ilyen is van). $I \neq \emptyset$, különben nem tudnánk egy végtelen nyelvet generálni. Legyen $(\varepsilon, \alpha, \varepsilon) \in I$ és $w \in L$ tetszőleges olyan szó, mely mindkét betűt tartalmazza, ekkor $\alpha^i w \alpha^i \in L (i \geqslant 0)$, de ez nem lehet.

CF InsDel rendszerek számítási ereje

3. Tekintsük a $G_n = \langle \{S\}, T_n, P_n, S \rangle$ grammatika által generált $D_n := L(G_n)$ nyelvet, ahol $T_n = \{a_1, a_1', \ldots, a_n, a_n'\}$ és $P_n = \{S \to SS, S \to \varepsilon\} \cup \{S \to a_i S a_i' \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

D_n a helyes zárójelezések nyelve n zárójelpártípussal. Ezt a nyelvet szokás Dyck-nyelvnek is nevezni.

Ismert, de könnyen be látható például a Myhill-Nerode tétellel vagy a reguláris nyelvek pumpálási lemmájával (kis Bar-Hillel lemma), hogy D_n nem reguláris.

Viszont a $\gamma_n = \langle T_n, T_n, \{\varepsilon\}, \{(\varepsilon, a_i a_i', \varepsilon) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}, \emptyset \rangle$ beszúró-törlő rendszer D_n-t generálja. $\square$

Következmény $\mathrm{INS}_2^0\mathrm{DEL}_2^0 \subset$ CF

CF InsDel rendszerek számítási ereje

No	súly	$(n, m; p, q)$	ereje	hivatkozás
1	6	(3, 0; 3, 0)	RE	Margenstern et al, 2005
2	5	(1, 2; 1, 1)	RE	Kari et al, 1997
3	5	(1, 2; 2, 0)	RE	Kari et al, 1997
4	5	(2, 1; 2, 0)	RE	Kari et al, 1997
5	5	(1, 1; 1, 2)	RE	Takahara-Yokomori, 2003
6	5	(2, 1; 1, 1)	RE	Takahara-Yokomori, 2003
7	5	(2, 0; 3, 0)	RE	Margenstern et al, 2005
8	5	(3, 0; 2, 0)	RE	Margenstern et al, 2005
9	4	(1, 1; 2, 0)	RE	Paun et al, 1998
10	4	(1, 1; 1, 1)	RE	Takahara-Yokomori, 2003
11	4	(2, 0; 2, 0)	$\subset$CF	Verlan, 2005
12	$m+1$	(m, 0; 1, 0)	$\subset$CF	Verlan, 2005
13	$p+1$	(1, 0; p, 0)	$\subset$REG	Verlan, 2005

Mivel 4-súlyúra többféle eredmény is van érdemes a súly fogalmát finomítani.

Beszúró-törlő rendszerek súlya

Definíció

Legyen $\gamma = \langle V, T, A, I, D \rangle$ beszúró-törlő rendszer

$$
\begin{aligned}
n &:= \max \left\{ |\alpha| \,\middle|\, (u, \alpha, v) \in I \right\}, \\
m &:= \max \left\{ |u| \,\middle|\, (u, \alpha, v) \in I \right\}, \\
m' &:= \max \left\{ |v| \,\middle|\, (u, \alpha, v) \in I \right\}, \\
p &:= \max \left\{ |\alpha| \,\middle|\, (u, \alpha, v) \in D \right\}, \\
q &:= \max \left\{ |u| \,\middle|\, (u, \alpha, v) \in D \right\}, \\
q' &:= \max \left\{ |v| \,\middle|\, (u, \alpha, v) \in D \right\}.
\end{aligned}
$$

A beszúró-törlő rendszer **módosított súlya** az $(n, m, m'; p, q, q')$ vektorral adható meg, **módosított összsúlya** $n + m + m' + p + q + q'$.

Beszúró-törlő rendszerek súlya

Az új súlyozással az eredmények:

No	súly	$(n, m; p, q)$	ereje	új súly	$(n, m, m'; p, q, q')$
1	6	(3, 0; 3, 0)	RE	6	(3, 0, 0; 3, 0, 0)
2	5	(1, 2; 1, 1)	RE	8	(1, 2, 2; 1, 1, 1)
3	5	(1, 2; 2, 0)	RE	7	(1, 2, 2; 2, 0, 0)
4	5	(2, 1; 2, 0)	RE	6	(2, 1, 1; 2, 0, 0)
5	5	(1, 1; 1, 2)	RE	8	(1, 1, 1; 1, 2, 2)
6	5	(2, 1; 1, 1)	RE	7	(2, 1, 1; 1, 1, 1)
7	5	(2, 0; 3, 0)	RE	5	(2, 0, 0; 3, 0, 0)
8	5	(3, 0; 2, 0)	RE	5	(3, 0, 0; 2, 0, 0)
9	4	(1, 1; 2, 0)	RE	5	(1, 1, 1; 2, 0, 0)
10	4	(1, 1; 1, 1)	RE	6	(1, 1, 1; 1, 1, 1)
11	4	(2, 0; 2, 0)	$\subset$CF	4	(2, 0, 0; 2, 0, 0)

InsDel rendszerek számítási ereje

További eredmények:

No	súly	$(n, m, m'; p, q, q')$	ereje	hivatkozás
14	5	(2, 0, 0; 1, 1, 1)	RE	Krassovitskiy et al., 2008
15	6	(1, 1, 0; 1, 1, 2)	RE	Krassovitskiy et al., 2008
16	6	(1, 1, 0; 2, 0, 2)	RE	Matveevici et al., 2007
17	5	(2, 0, 0; 2, 0, 1)	RE	Krassovitskiy et al., 2008
18	5	(1, 1, 0; 1, 1, 1)	$\not\supset$REG	Krassovitskiy et al., 2008