Mátrix szorzás folytatás....

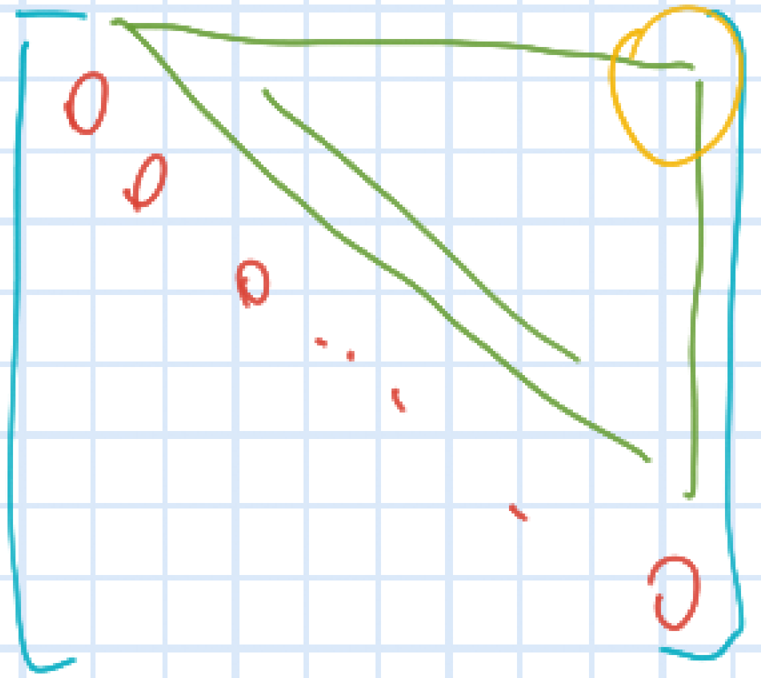
– rekurzív megoldás

- $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ optimális zárójelezésének keresésekor $(1 \leq i \leq j \leq n)$ legyen $m[i,j]$ az $A_{i..j}$ szorzat kiszámításához szükséges szorzások száma
- ha $i=j \Rightarrow m[i,i]=0 \quad \forall\, i=1,2,\ldots n$-re (főátló)
- ha $i<j$, tfh az optimális zárójelezés A_k és A_{k+1} között „vág" ekkor $m[i,j]$ $A_{i..k}$ és $A_{k+1..j}$ mátrixok kiszámításának minimális költsége + a 2 mátrix szorzásának költsége

$$m[i,j] = \underbrace{m[i,k]}_{p_{i-1} \times p_k} + \underbrace{m[k+1,j]}_{p_k \times p_j} + p_{i-1} \cdot p_j \cdot p_k$$

- $k = i, i+1, \ldots, j-1$ lehet csak, ezért végig nézzük és a „legjobbat" választjuk

$$m[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{ha } i=j \\ \min\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}\cdot p_j\cdot p_k \mid i \le k \le j-1\}, & \text{ha } i<j \end{cases}$$



optimális megoldás (teljes feladatra) $m[1,n]$

$$T(n) = O(n^3)$$

– egy optimális megoldás

- jelölje $s[i,j]$ azt k indexet, ahol $A_iA_{i+1}\dots A_j$ szorzatot az optimális zárójelezés kettévágja, azaz

$$m[i,j] = m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} \cdot p_j \cdot p_k$$

- s felhasználásával rekonstruálható az opt. zárójelezés

$s[1,n]$ azt a k indexet tartalmazza, ami $A_1A_2\dots A_n$ szorzatot kettévágja

$$A_{1..s[1,n]}\, A_{s[1,n]+1..n}$$

$$A_{1..s[1,s[1,n]]} \quad \dots$$

Feladat: $(A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6)$

$A_1: 25 \times 30$

$A_2: 30 \times 10$

$A_3: 10 \times 5$

$A_4: 5 \times 10$

$A_5: 10 \times 15$

$A_6: 15 \times 20$

m

	1	2	3	4	5	6
1	0	7500	5750	6500	7875	10000
2		0	1500	3000	4500	6750
3			0	500	1500	3250
4				0	750	2250
5					0	3000
6						0

s

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	3	3	3
2			2	3	3	3
3				3	3	3
4					4	5
5						5
6						

$m[1,2] = 25 \cdot 30 \cdot 10 = 7500$

$m[2,3] = 30 \cdot 10 \cdot 5 = 1500$

$m[3,4] = 10 \cdot 5 \cdot 10 = 500$

$m[4,5] = 5 \cdot 10 \cdot 15 = 750$

$m[5,6] = 10 \cdot 15 \cdot 20 = 3000$

$\underbrace{p_{i-1} \cdot p_k \cdot p_j}_{3750}$

$k \in [1..2]$

$$m[1,3] = \min \begin{cases} \underbrace{m[1,1]}_{0} + \underbrace{m[2,3]}_{1500} + 25 \cdot 30 \cdot 5 = \underline{5250} \\ m[1,2] + m[3,3] + 25 \cdot 10 \cdot 5 = 8750 \end{cases}$$

$k \in [2..3]$

$$m[2,4] = \min \begin{cases} \overbrace{m[2,2]}^{0} + \overbrace{m[3,4]}^{500} + \overbrace{30 \cdot 10 \cdot 10}^{3000} = 3500 \\ \underbrace{m[2,3]}_{1500} + \underbrace{m[4,4]}_{0} + \underbrace{30 \cdot 5 \cdot 10}_{1500} = \boxed{3000} \end{cases}$$

$k \in [3..4]$

$$m[3,5] = \min \begin{cases} \overbrace{m[3,3]}^{0} + \overbrace{m[4,5]}^{750} + \overbrace{10 \cdot 5 \cdot 15}^{750} = \boxed{1500} \\ \underbrace{m[3,4]}_{500} + \underbrace{m[5,5]}_{0} + \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 15}_{1500} = 2000 \end{cases}$$

$k \in [4..5]$

$$m[4,6] = \min \begin{cases} \overbrace{m[4,4]}^{0} + \overbrace{m[5,6]}^{3000} + \overbrace{5 \cdot 10 \cdot 20}^{1000} = 4000 \\ \underbrace{m[4,5]}_{750} + \underbrace{m[6,6]}_{0} + \underbrace{5 \cdot 15 \cdot 20}_{1500} = \boxed{2250} \end{cases}$$

$k \in [1..3]$

$$m[1,4] = \min \begin{cases} \overbrace{m[1,1]}^{0} + m[2,4] + \overbrace{25 \cdot 30 \cdot 10}^{7500} = 10500 \\ m[1,2] + m[3,4] + 25 \cdot 10 \cdot 10 = 10500 \\ m[1,3] + \underbrace{m[4,4]}_{0} + 25 \cdot 5 \cdot 10 = \boxed{6500} \end{cases}$$

$k \in [2..4]$

$$m[2,5] = \min \begin{cases} m[2,2] + m[3,5] + 30 \cdot 10 \cdot 15 = 6000 \\ m[2,3] + m[4,5] + 30 \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{4500} \\ m[2,4] + m[5,5] + 30 \cdot 10 \cdot 15 = 7500 \end{cases}$$

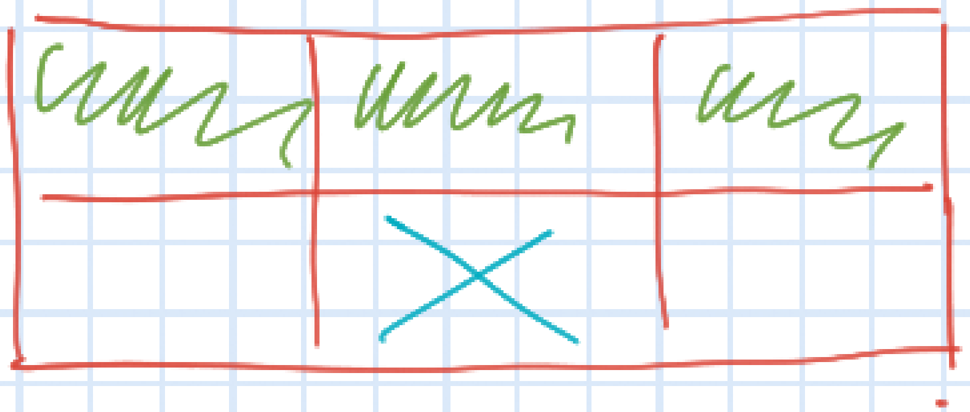
. . . .

Sakktábla

Adott egy n×n-es sakktábla és egy figura, amelyet a tábla alsó sorából a felső sorba kell eljuttatni, úgy, hogy minden mezőről csak az alábbi 3 mező egyikére léphetünk:

- a pillanatnyi mező feletti mezőre
- a pillanatnyi mező feletti mezőtől 1-et balra
- a pillanatnyi mező feletti mezőtől 1-et jobbra

} ne ugorjunk le a tábláról !!



Ha egy x mezőről y mezőre lépünk (szabályosan), akkor $f(x,y)$ pontot kapunk.

<u>Feladat</u>: egy olyan út megtalálása, amely mentén a lehető legtöbb pont gyűjthető be. Az alsó sor bármelyik mezőjéről indulhatunk és a felső sor bármely mezőjére érkezhetünk

- Optimális megoldás szerkezete
  - $1 \le i \le j \le n$ esetén legyen (i,j) a sakktábla i-edik sorának j-edik oszlopában lévő mező
  - tekintsük (i,j)-n végződő utak közül egy olyat, amely a lehető legtöbb pontot hozza, legyen ez az út P
  - ha $i > 1$, akkor P-n $(i-1, j')$ mezőről érkezünk (i,j)-re $j' \in \{j-1, j, j+1\}$
  - Vegyük P-nek $(i-1,j')$-ig terjedő P' szakaszát, állítás: P' $(i-1,j')$-n végződő utak közül optimális
    - → ha ez nem igaz, akkor P'', ami optimálisabb, mint P'
  - → ha P-n P'-t P''-re cseréljük, akkor P-nél optimálisabb utat találtunk ↯

– rekurzív megoldás: $1 \le i \le j \le n$ esetén $d[i,j]$ az (i,j)-n végződő utak mentén gyűjthető maximális pontot

- $d[1,j] = 0$, minden $1 \le i \le n$ esetén
- ha $i > 1$

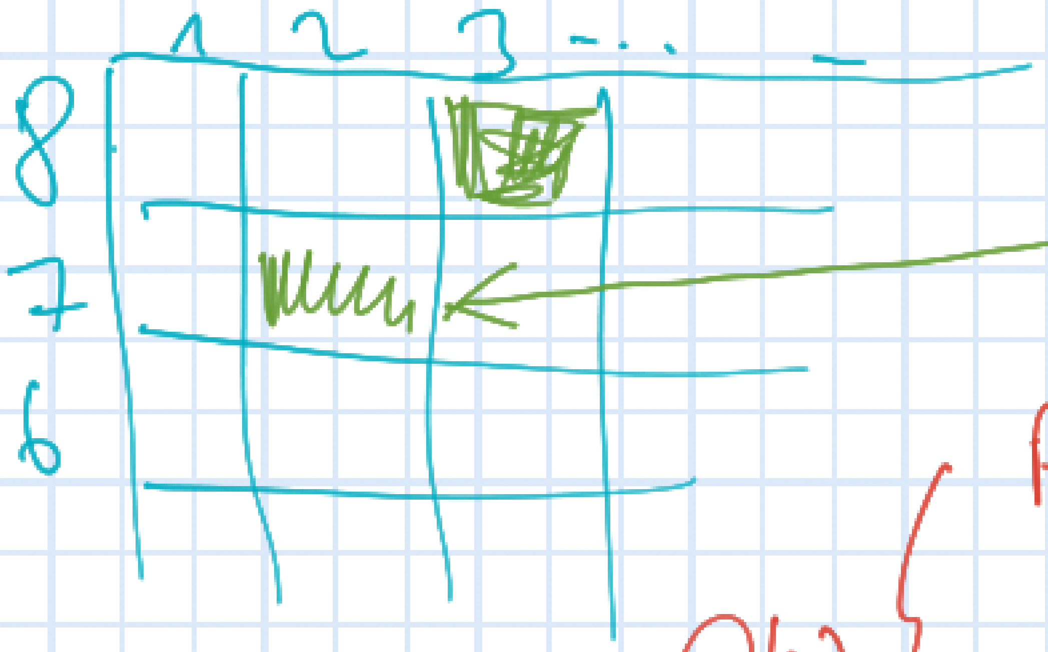
$$d[i,j] = \max \begin{cases} d[i-1,j-1] + f((i-1,j-1),(i,j)), \text{ ha } j > 1 \\ d[i-1,j] + f((i-1,j),(i,j)) \\ d[i-1,j+1] + f((i-1,j+1),(i,j)), \text{ ha } j < n \end{cases}$$

Az egész táblán begyűjthető pontok maximuma:

$$\max\{d[n,j] \mid 1 \le j \le n\}$$

– egy optimális megoldás

- minden $2 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq n$ esetén legyen $w[i,j]$ az (i,j) mezőn végződő legtöbb pontot hozó úton az utolsó előtti mező oszlopa



$w[8,3]=2$

maximális cella az adott sorban

$$O(n)\begin{cases} \text{printPath}(w,(i,j)) \\ \quad \text{if } i>1 \text{ then printPath}(w, i-1, w[i,j]) \\ \quad \text{print}(i,j) \end{cases}$$

– Költség: $O(n^2)$