2021. szeptember 21.

Oszd meg és uralkodj algoritmusok

már ismerünk ilyet: összefésüléses rendezés

① a feladatot hasonló, csak kisebb méretű részfeladatokra bontjuk

② a részfeladatokat rekurzívan megoldjuk (ha a részfeladat elég kicsi, akkor közvetlenül oldjuk meg)

③ a részfeladatok megoldásait kombinálva előállítjuk az eredeti feladat megoldását

Mátrixok szorzása

(kiderült, hogy szoros kapcsolatban van a lineáris egyenletrendszer megoldásával, ez a fő motiváció)

Emlékeztető

Ha A és B kompatibilis mátrixok, vagyis A-nak annyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek; A mondjuk $p \times q$, B pedig $q \times r$-es mátrix, akkor $C = AB$ szorzatuk egy olyan $p \times r$-es mátrix, melynek i-dik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében A i-edik sorának

és B j-edik oszlopának skaláris szorza-
ta áll:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1r} \\ \vdots & & \\ b_{q1} & & b_{qr} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pr} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{iq} b_{qj}$$

Ez a szorzás $\Theta(pqr)$ elemi szorzást és $\Theta(pqr)$ elemi összeadással jár.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy A és B is négyzetes $\rightarrow$ $n \times n$-esek (akkor persze C is ilyen) továbbá n = kettőhatvány

A és B összeszorzásának költsége a szokásos algoritmusnál $\Theta(n^3)$ elemi szorzás és $\Theta(n^3)$ összeadás.

Van-e ennél hatékonyabb? Valami Oszd meg és uralkodj?

Első nekifutás:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] \qquad C = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right]$$

IH mindenki $n/2 \times n/2$ -es

$A_{11}, \dots, A_{22}, B_{11}, \dots, B_{22}, C_{11}, \dots, C_{22}$

Vegyük észre

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$
$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$
$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$
$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

„Ezzel a feladatot visszavezettük nyolc $n/2 \times n/2$-es mátrixszorzásra"

Jelölje $S(n)$ az elemi összeadások és $M(n)$ az elemi szorzások számát az $n \times n$-es esetben.

$$M(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1 \\ 8M(n/2) & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n=1 \\ 8S(n/2) + 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{ha } n>1 \end{cases}$$

zárt képlet ?

Mester tétel

(zárt képlet bizonyos rekurziókhoz)

Legyen $T(n)$ a nem negatív egészek halmazán értelmezett függvény, $a \geq 1$

és $b > 1$ állandók, valamint $f(n)$ pozitív függvény

Ha $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$ rekurzió teljesül, akkor

① ha $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ valamely $\varepsilon > 0$ esetén, akkor $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

② ha $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, akkor $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

③ ha $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ valamely $\varepsilon > 0$ esetén **ÉS** a $f(n/b) \leq c f(n)$ valamely $c < 1$ állandóval elég nagy n-ekre, akkor $T(n) = \Theta(f(n))$

Nem bizonyítjuk, bár annyira nem lenne nehéz. Fontosabb megjegyezni, hogy nem fedi le az összes "érdekes" esetet:

Pl. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$ NEM ③

Visszatérve a mátrix szorzáshoz

$$S(n) = 8\ S(n/2) + n^2$$

$a = 8 \quad b = 2 \qquad f(n) = n^2$

$$n^{\log_2 8} = n^3$$

$f(n) = O(n^{3-\varepsilon})$ pl $\varepsilon = 1/2$ jó

① eset $\Rightarrow$ $S(n) = \Theta(n^3)$

$$M(n) = 8\,M(n/2)$$

$a = 8 \quad b = 2 \quad f(n) = 0$

$f(n) = O(n^{3-\varepsilon})$ pl $\varepsilon = 1/2$ ismét

1 eset $M(n) = \Theta(n^3)$

Az egyszerű oszd meg és uralkodj algoritmussal semmit nem nyertünk (igazából vesztettünk, sokkal bonyolultabb)

Strassen megálmodta, hogy $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ kiszámításához 8 helyett 7 $n/2 \times n/2$-es szorzás is elég!

Így a rekurzív képlet:

$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 1 \\ 7S(n/2) + 18(n/2)^2 & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

$$M(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1 \\ 7M(n/2) \end{cases}$$

Mester tételből

$$S(n) = \Theta\left(n^{\log_2 7}\right) = \Theta\left(n^{2.81}\right)$$

$$M(n) = \Theta\left(n^{\log_2 7}\right) = \Theta\left(n^{2.81}\right)$$

Nagy kihívás a pontos nagyságrend!

Rekord $O\left(n^{2.373}\right)$