2021. október 12.

1. ZH : egy hét múlva előadásidőben
október 19. $16^{00} - 17^{30}$
Bolyai előadó (nominálban)
mindenkinek személyesen (A/B héttől
függetlenül)
5 feladat → 60 pont

Dinamikus programozás

Még mindig mátrixok szorzása ☺

Ki szeretnénk számolni az $A_1 A_2 \cdots A_n$ szorzatot, ahol $A_1 \in \mathbb{R}^{p_0 \times p_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_2}$, …, $A_n \in \mathbb{R}^{p_{n-1} \times p_n}$ (összeszorozhatók)

A szorzat független a zárójelezéstől (a szorzások sorrendje), viszont az elemi szorzások száma nem!

Keressük azt a zárójelezést, ahol az elemi szorzások száma a lehető legkisebb!

Itt az egyszerűség kedvéért a szorzást a szokásos módon végezzük

→ $p \times q$ és $q \times r$ dimenziós mátrixok szorzatának kiszámolása pqr elemi szorzás

<u>Megjegyzés</u>:

Nagyon sokféle zárójelezés van $\left[\Omega\left(4^n / n^{3/2}\right)\right]$

így az összes eset kipróbálása nem jön szóba

Megoldás → dinamikus programozás

(1) Határozzuk meg a részfeladatokat!

(2) Milyen összefüggés van a részfeladatok megoldása és az eredeti feladat megoldása között

→ optimális részstruktúra tulajdonság

3 Az optimális részstruktúra tulajdonságot alapul véve rekurzív módon felírjuk az összefüggést a részfeladatok megoldása és az eredeti feladat megoldása között

4 A rekurzív összefüggés felhasználásával alulról felfelé építkezéssel, egy táblázatot kitöltve megoldjuk a feladatot

[5 Időnként külön vesszük az optimális

megoldás megkonstruálását]

Visszatérve a mátrixok szorzására

1. Részproblémák

$R[i,j] \rightarrow A_i A_{i+1} \cdots A_j$ szorzat

optimális zárójelezésének meghatározása $(1 \leq i \leq j \leq n)$

2. Optimális részstruktúra tulajdonság

Tekintsük $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ egy optimális zárójelezését. Tegyük fel, hogy itt az utolsó művelet az $A_i A_{i+1} \cdots A_k$ és $A_{k+1} \cdots A_j$ sorzatok összeszorzása ($i \le k \le j-1$)

Ekkor az optimális zárójelezés "megszorítása" $A_i A_{i+1} \cdots A_k$-ra és $A_{k+1} \cdots A_j$-re azok egy-egy optimális zárójelezése lesz. Miért?

Ez egyszerű: ha lenne $A_i A_{i+1} \cdots A_k$-nál egy kisebb költséget adó zárójelezése, akkor erre cserélve $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ megfelelő részét egy az optimálisnál kisebb költséget adó zárójelezéséhez jutnánk $A_i A_{i+1} \cdots A_j$-nek, ellentmondás

$\longrightarrow$ CUT & PASTE

③ Rekurzió

Legyen $m[i,j]$ az $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ szorzat optimális zárójelezésénél az elemi szorzások száma

Ha $i=j$, akkor triviálisan $m[i,j]=0$

Megnyugtatásul (bár nem mindig itt),

ha $j=i+1$, akkor még mindig triviálisan

$m[i,j] = p_{i-1} p_i p_{i+1}$ ($A_i A_{i+1}$ "sima" szorzás)

Általában, ha $i<j$, továbbá az utolsó szorzás $A_i \cdots A_k$ és $A_{k+1} \cdots A_j$ között történik, akkor

$$m[i,j] = m[i,k] + m[k+1,j] + \underbrace{p_{i-1}p_k p_j}_{\text{utolsó szorzás}}$$

Egy probléma van: nem ismerjük k-t

Megoldás: kipróbáljuk az összeset

$\rightarrow k = i, i+1, \ldots, j-1$

és a legkisebb értéket adót választjuk

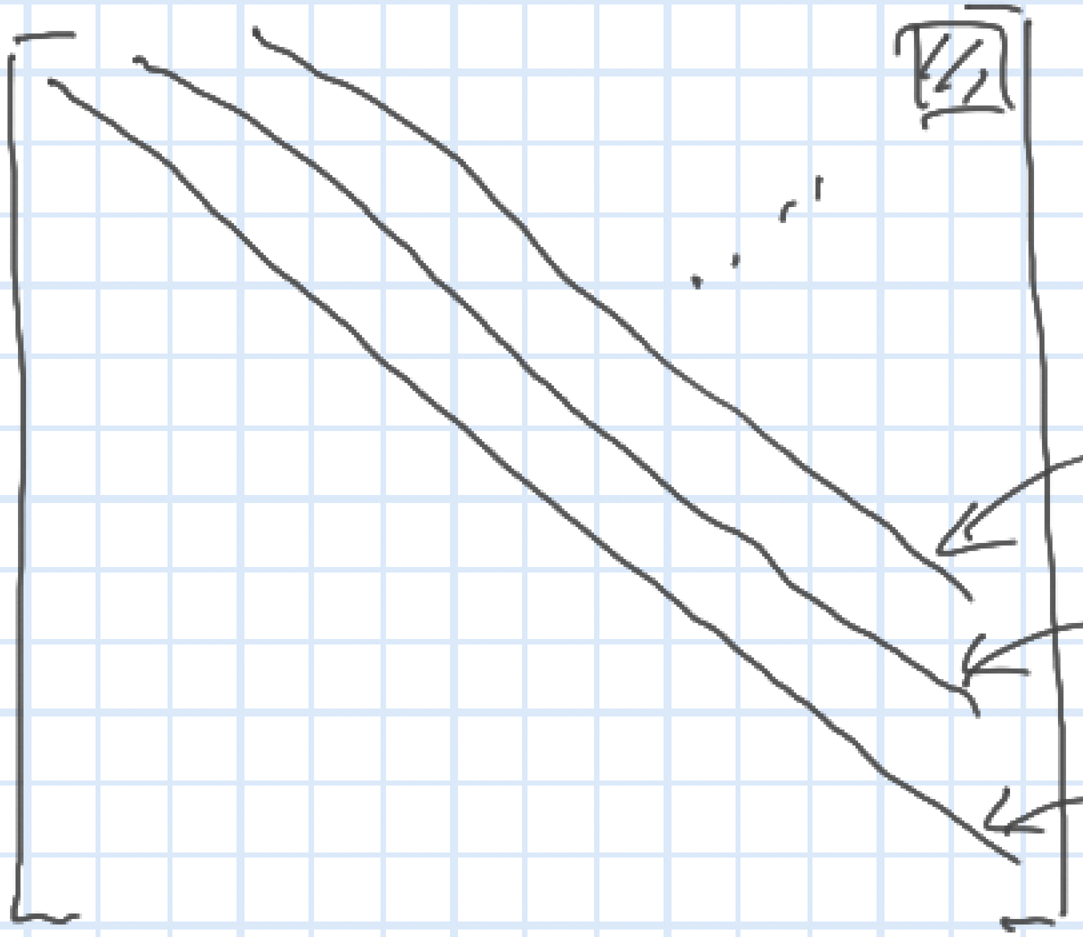
Egyben:

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{ha } i=j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{ m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \} & \text{különben} \end{cases}$$

4 számolás

$m[1,n]$

$m =$



ez az eredeti feladat megoldása

$j=i+2$ ez a harmadik

$j=i+1$ ez a második

$j=i$, tiszta nulla, ezzel kezdünk

Fontos: $m[i,j]$ számolásakor rendelkezésre áll már az összes $m[i,k]$ és $m[k+1,j]$

Költség $O(n^3)$

$O(n^2)$ cella, cellánként $O(n)$ számolás

5 egy optimális zárójelezés meghatározása

$m[i,j]$ számolásakor feljegyezzük, hogy melyik k adta a minimális értéket

$\rightarrow s[i,j]$

$s[i,j]$-ből egy optimális zárójelezés rekurzívan rekonstruálható

$$(A_1 \;\cdots\; A_{s[1,n]})(A_{s[1,n]+1} \;\cdots\; A_n)$$

(vö. legrövidebb út)