Számítási modellek

7. előadás

A sejtautomata koncepciója

A sejtautomata egy természet inspirálta párhuzamos számítási modell, melyet alkalmazhatunk fizikai, kémiai, biológiai vagy közgazdasági természetes folyamatok modellezésére. Stanislaw Ulam és Neumann János vezették be a 40-es években. Jellemzői:

A sejtautomata koncepciója

A sejtautomata egy természet inspirálta párhuzamos számítási modell, melyet alkalmazhatunk fizikai, kémiai, biológiai vagy közgazdasági természetes folyamatok modellezésére. Stanislaw Ulam és Neumann János vezették be a 40-es években. Jellemzői:

- egy lokálisan uniform architektúra szerint egymással összeköttetésben levő automaták, ún. „sejtek” alkotják, bármely két sejtnek lokálisan ugyanolyan a szomszédsága (legtöbbször az automaták egy térkitöltő rács rácspontjaiban helyezkednek el),

A sejtautomata koncepciója

A sejtautomata egy természet inspirálta párhuzamos számítási modell, melyet alkalmazhatunk fizikai, kémiai, biológiai vagy közgazdasági természetes folyamatok modellezésére. Stanislaw Ulam és Neumann János vezették be a 40-es években. Jellemzői:

- egy lokálisan uniform architektúra szerint egymással összeköttetésben levő automaták, ún. „sejtek” alkotják, bármely két sejtnek lokálisan ugyanolyan a szomszédsága (legtöbbször az automaták egy térkitöltő rács rácspontjaiban helyezkednek el),
- a sejtek egyformák és egyszerű felépítésűek, egyetlen jellemzőjük az állapotuk,

A sejtautomata koncepciója

A sejtautomata egy természet inspirálta párhuzamos számítási modell, melyet alkalmazhatunk fizikai, kémiai, biológiai vagy közgazdasági természetes folyamatok modellezésére. Stanislaw Ulam és Neumann János vezették be a 40-es években. Jellemzői:

- egy lokálisan uniform architektúra szerint egymással összeköttetésben levő automaták, ún. „sejtek” alkotják, bármely két sejtnek lokálisan ugyanolyan a szomszédsága (legtöbbször az automaták egy térkitöltő rács rácspontjaiban helyezkednek el),
- a sejtek egyformák és egyszerű felépítésűek, egyetlen jellemzőjük az állapotuk,
- a sejtek csak a szomszédaikkal kommunikálnak, saját és szomszédaik aktuális állapota alapján frissítik az állapotukat,

A sejtautomata koncepciója

A sejtautomata egy természet inspirálta párhuzamos számítási modell, melyet alkalmazhatunk fizikai, kémiai, biológiai vagy közgazdasági természetes folyamatok modellezésére. Stanislaw Ulam és Neumann János vezették be a 40-es években. Jellemzői:

- egy lokálisan uniform architektúra szerint egymással összeköttetésben levő automaták, ún. „sejtek" alkotják, bármely két sejtnek lokálisan ugyanolyan a szomszédsága (legtöbbször az automaták egy térkitöltő rács rácspontjaiban helyezkednek el),
- a sejtek egyformák és egyszerű felépítésűek, egyetlen jellemzőjük az állapotuk,
- a sejtek csak a szomszédaikkal kommunikálnak, saját és szomszédaik aktuális állapota alapján frissítik az állapotukat,
- a gép szinkron módon, diszkrét időskálán működik.

A sejtautomata koncepciója

A sejtautomata egy természet inspirálta párhuzamos számítási modell, melyet alkalmazhatunk fizikai, kémiai, biológiai vagy közgazdasági természetes folyamatok modellezésére. Stanislaw Ulam és Neumann János vezették be a 40-es években. Jellemzői:

- egy lokálisan uniform architektúra szerint egymással összeköttetésben levő automaták, ún. „sejtek” alkotják, bármely két sejtnek lokálisan ugyanolyan a szomszédsága (legtöbbször az automaták egy térkitöltő rács rácspontjaiban helyezkednek el),
- a sejtek egyformák és egyszerű felépítésűek, egyetlen jellemzőjük az állapotuk,
- a sejtek csak a szomszédaikkal kommunikálnak, saját és szomszédaik aktuális állapota alapján frissítik az állapotukat,
- a gép szinkron módon, diszkrét időskálán működik.

Rengeteg érdekes anyag található interneten (Wikipedián, YouTubeon, Jarkko J Kari (Turku) honlapján, ...). (angolul: cellular automata)

Sejtautomata

Definíció

$A = \langle X, S, N, f \rangle$ rendezett négyes egy (homogén) **sejtautomata**, ahol

Sejtautomata

Definíció

$A = \langle X, S, N, f \rangle$ rendezett négyes egy (homogén) **sejtautomata**, ahol

- X egy vektortér végtelen részhalmaza, a **sejttér**, elemeit **sejteknek** nevezzük,

Sejtautomata

Definíció

$A = \langle X, S, N, f \rangle$ rendezett négyes egy (homogén) **sejtautomata**, ahol

- X egy vektortér végtelen részhalmaza, a **sejttér**, elemeit **sejteknek** nevezzük,
- S egy nemüres, véges halmaz, a **sejtállapotok** halmaza,

Sejtautomata

Definíció

$A = \langle X, S, N, f \rangle$ rendezett négyes egy (homogén) **sejtautomata**, ahol

- X egy vektortér végtelen részhalmaza, a **sejttér**, elemeit **sejteknek** nevezzük,
- S egy nemüres, véges halmaz, a **sejtállapotok** halmaza,
- $N = (\mathbf{n_1}, \dots, \mathbf{n_m})$ rendezett vektor m-es, a **szomszédságvektor**, úgy hogy $\forall \mathbf{x} \in X, 1 \leqslant i \leqslant m$ esetén $\mathbf{x} + \mathbf{n_i} \in X$

Sejtautomata

Definíció

$A = \langle X, S, N, f \rangle$ rendezett négyes egy (homogén) **sejtautomata**, ahol

- X egy vektortér végtelen részhalmaza, a **sejttér**, elemeit **sejteknek** nevezzük,
- S egy nemüres, véges halmaz, a **sejtállapotok** halmaza,
- $N = (\mathbf{n_1}, \dots, \mathbf{n_m})$ rendezett vektor m-es, a **szomszédságvektor**, úgy hogy $\forall \mathbf{x} \in X, 1 \leqslant i \leqslant m$ esetén $\mathbf{x} + \mathbf{n_i} \in X$
- $f : S^m \to S$ a **lokális frissítési szabály**

Sejtautomata

Definíció

$A = \langle X, S, N, f \rangle$ rendezett négyes egy (homogén) **sejtautomata**, ahol

- X egy vektortér végtelen részhalmaza, a **sejttér**, elemeit **sejteknek** nevezzük,
- S egy nemüres, véges halmaz, a **sejtállapotok** halmaza,
- $N = (\mathbf{n_1}, \ldots, \mathbf{n_m})$ rendezett vektor m-es, a **szomszédságvektor**, úgy hogy $\forall \mathbf{x} \in X, 1 \leqslant i \leqslant m$ esetén $\mathbf{x} + \mathbf{n_i} \in X$
- $f : S^m \to S$ a **lokális frissítési szabály**

- Legtöbbször a sejt aktuális állapotától is függ A új állapota, ilyenkor legyen $\mathbf{0} \in N$.

Sejtautomata

- Ha $X = \mathbb{Z}^d$ és $\mathbf{n_i} \in \mathbb{Z}^d$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ akkor a szomszédságvektorra vonatkozó feltétel automatikusan teljesül. Mivel ez egy gyakran előforduló sejttér, ilyenkor röviden $\langle d, S, N, f \rangle$-t fogunk írni.

Sejtautomata

- Ha $X = \mathbb{Z}^d$ és $\mathbf{n_i} \in \mathbb{Z}^d$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ akkor a szomszédságvektorra vonatkozó feltétel automatikusan teljesül. Mivel ez egy gyakran előforduló sejttér, ilyenkor röviden $\langle d, S, N, f \rangle$-t fogunk írni.
- Bár legtöbbször az $X = \mathbb{Z}^d$ esettel foglalkozunk, de elképzelhető más rács is. Például az euklideszi síkon egy hatszög- vagy háromszögrács, de tekinthetünk rácsokat a tóruszon, hiperbolikus síkon is.

Sejtautomata

- Ha $X = \mathbb{Z}^d$ és $\mathbf{n_i} \in \mathbb{Z}^d$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ akkor a szomszédságvektorra vonatkozó feltétel automatikusan teljesül. Mivel ez egy gyakran előforduló sejttér, ilyenkor röviden $\langle d, S, N, f \rangle$-t fogunk írni.
- Bár legtöbbször az $X = \mathbb{Z}^d$ esettel foglalkozunk, de elképzelhető más rács is. Például az euklideszi síkon egy hatszög- vagy háromszögrács, de tekinthetünk rácsokat a tóruszon, hiperbolikus síkon is.
- Az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy a sejtautomata **homogén**, ekkor ugyanis elég egyelten közös lokális frissítési szabályt megadni, amely alapján egy globális frissítést könnyen megadhatunk. A sejtautomata fogalma általánosítható **inhomogén** sejtterekre is, ekkor a lokális frissítési szabályok nem feltétlen egyformák minden sejtre. Ilyenkor persze az se szükséges, hogy a sejttér vektortér legyen, lehet egy tetszőleges gráf.

Sejtautomata

Definíció

Legyen $N = (\mathbf{n_1}, \ldots, \mathbf{n_m})$. Egy $\mathbf{x} \in X$ sejt **szomszédainak** halmaza $N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} + \mathbf{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$

Sejtautomata

Definíció

Legyen $N = (\mathbf{n_1}, \ldots, \mathbf{n_m})$. Egy $\mathbf{x} \in X$ sejt **szomszédainak** halmaza $N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} + \mathbf{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$

Definíció

Egy $c : X \to S$ leképezést **konfigurációnak** nevezünk.

Sejtautomata

Definíció

Legyen $N = (\mathbf{n_1}, \dots, \mathbf{n_m})$. Egy $\mathbf{x} \in X$ sejt **szomszédainak** halmaza $N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} + \mathbf{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$

Definíció

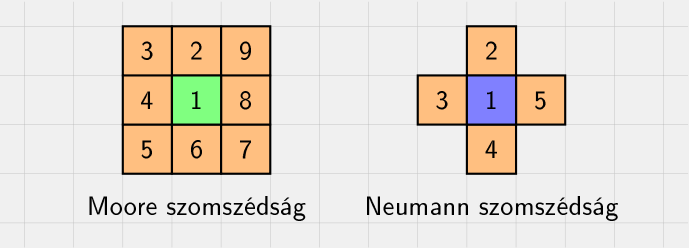
Egy $c : X \to S$ leképezést **konfigurációnak** nevezünk.

Definíció

Legyen $A = \langle X, S, N, f \rangle$ egy sejtautomata ahol $N = (\mathbf{n_1}, \dots, \mathbf{n_m})$. Ekkor definiálhatunk egy $G : S^X \to S^X$ **globális átmenetfüggvényt**. Legyen $c : X \to S$ egy konfiguráció és $\mathbf{x} \in X$ egy tetszőleges sejt. Ekkor

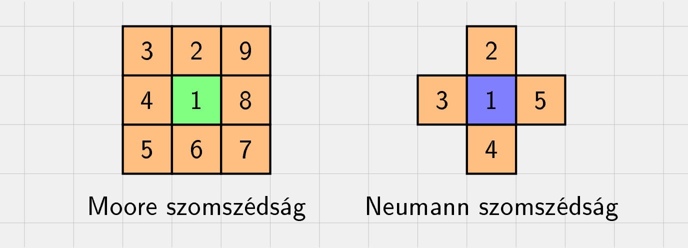
$$G(c)(\mathbf{x}) := f(c(\mathbf{x} + \mathbf{n_1}), \dots, c(\mathbf{x} + \mathbf{n_m})).$$

Neumann és Moore szomszédság



Ha $X = \mathbb{Z}^2$, akkor úgy gondolhatunk a sejtekre, mint a fenti ábra celláira. A zöld sejt Moore-szomszédai: 2-9, a kék sejt Neumann-szomszédai 2-5.

Neumann és Moore szomszédság



Ha $X = \mathbb{Z}^2$, akkor úgy gondolhatunk a sejtekre, mint a fenti ábra celláira. A zöld sejt Moore-szomszédai: 2-9, a kék sejt Neumann-szomszédai 2-5.

Egy sejt új állapota legtöbbször saját maga előző állapotától is függ, ezért a Moore- illetve Neumann szomszédságot így érdemes definiálni:

$$N_{\text{Moore}} = ((0,0),(0,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(1,-1),(1,0),(1,1)).$$

$$N_{\text{Neumann}} = ((0,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(1,0)).$$

Életjáték

Definíció(Conway)

Életjátéknak (game of life, Life, B3S23) nevezzük azt a $\mathrm{GOL} = \langle 2, \{0, 1\}, N_{\mathrm{Moore}}, f \rangle$ sejtautomatát, ahol

Életjáték

Definíció(Conway)

Életjátéknak (game of life, Life, B3S23) nevezzük azt a $\text{GOL} = \langle 2, \{0,1\}, N_{\text{Moore}}, f \rangle$ sejtautomatát, ahol

1. $f(1, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i \in \{2,3\}$

Életjáték

Definíció(Conway)

Életjátéknak (game of life, Life, B3S23) nevezzük azt a $\mathrm{GOL} = \langle 2, \{0,1\}, N_{\mathrm{Moore}}, f \rangle$ sejtautomatát, ahol

1. $f(1, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i \in \{2,3\}$
2. $f(0, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i = 3$

Életjáték

Definíció(Conway)

Életjátéknak (game of life, Life, B3S23) nevezzük azt a GOL $= \langle 2, \{0,1\}, N_{\text{Moore}}, f \rangle$ sejtautomatát, ahol

1. $f(1, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i \in \{2, 3\}$
2. $f(0, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i = 3$
3. $f(b_1, b_2, \ldots, b_9) = 0$, minden más esetben

Életjáték

Definíció(Conway)

Életjátéknak (game of life, Life, B3S23) nevezzük azt a GOL $= \langle 2, \{0,1\}, N_{\text{Moore}}, f \rangle$ sejtautomatát, ahol

1. $f(1, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i \in \{2,3\}$
2. $f(0, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i = 3$
3. $f(b_1, b_2, \ldots, b_9) = 0$, minden más esetben

Tehát egy élő sejt életben marad, ha 2 vagy 3 élő Moore-szomszédja van, minden más esetben elszigetelődés (0-1 szomszéd) vagy túlnépesedés (4-8 szomszéd) miatt meghal.

Életjáték

Definíció(Conway)

Életjátéknak (game of life, Life, B3S23) nevezzük azt a $\text{GOL} = \langle 2, \{0,1\}, N_{\text{Moore}}, f\rangle$ sejtautomatát, ahol

1. $f(1, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i \in \{2,3\}$
2. $f(0, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i = 3$
3. $f(b_1, b_2, \ldots, b_9) = 0$, minden más esetben

Tehát egy élő sejt életben marad, ha 2 vagy 3 élő Moore-szomszédja van, minden más esetben elszigetelődés (0-1 szomszéd) vagy túlnépesedés (4-8 szomszéd) miatt meghal.

Egy halott sejtből akkor és csak akkor lesz élő, ha pontosan 3 élő Moore-szomszédja van.

Életjáték

Definíció(Conway)

Életjátéknak (game of life, Life, B3S23) nevezzük azt a $GOL = \langle 2, \{0,1\}, N_{Moore}, f \rangle$ sejtautomatát, ahol

1. $f(1, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i \in \{2, 3\}$
2. $f(0, b_2, \ldots, b_9) = 1$, ha $\sum_{i=2}^{9} b_i = 3$
3. $f(b_1, b_2, \ldots, b_9) = 0$, minden más esetben

Tehát egy élő sejt életben marad, ha 2 vagy 3 élő Moore-szomszédja van, minden más esetben elszigetelődés (0-1 szomszéd) vagy túlnépesedés (4-8 szomszéd) miatt meghal.

Egy halott sejtből akkor és csak akkor lesz élő, ha pontosan 3 élő Moore-szomszédja van.

A B3S23 jelölésben a B=birth, S=stay alive, azaz a születéshez 3, az életben maradáshoz 2 vagy 3 Moore-szomszéd kell.

Életjáték – konfigurációtípusok

Definíció

Egy c konfiguráció **orbitja** az $orb(c) = c, G(c), G^2(c), \ldots$ sorozat.

- c **csendélet**, ha $G(c) = c$. A legkisebb csendélet egy 2x2-es blokk.

Életjáték – konfigurációtípusok

Definíció

Egy c konfiguráció **orbitja** az $orb(c) = c, G(c), G^2(c), \ldots$ sorozat.

- c **csendélet**, ha $G(c) = c$. A legkisebb csendélet egy 2x2-es blokk.
- c **oszcillátor**, ha $\exists i \geqslant 2$, hogy $G^i(c) = c$ (c időben periodikus). Példa: 3 egymás melletti élő sejt. Ez a legkisebb (2 periódusú) oszcillátor, neve Villogó.

Életjáték – konfigurációtípusok

Definíció

Egy c konfiguráció **orbitja** az $orb(c) = c, G(c), G^2(c), \ldots$ sorozat.

- c **csendélet**, ha $G(c) = c$. A legkisebb csendélet egy 2x2-es blokk.
- c **oszcillátor**, ha $\exists i \geqslant 2$, hogy $G^i(c) = c$ (c időben periodikus). Példa: 3 egymás melletti élő sejt. Ez a legkisebb (2 periódusú) oszcillátor, neve Villogó.
- c **űrhajó**, ha $\exists i \geqslant 1$, hogy $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid G^i(c)(\mathbf{x}) = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid c(\mathbf{x}) = 1\} + \mathbf{y}$ valamely $\mathbf{y} \in X$-re. A legkisebb méretű űrhajó neve Sikló.

Életjáték – konfigurációtípusok

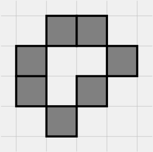
Definíció

Egy c konfiguráció **orbitja** az $orb(c) = c, G(c), G^2(c), \ldots$ sorozat.

- c **csendélet**, ha $G(c) = c$. A legkisebb csendélet egy 2x2-es blokk.
- c **oszcillátor**, ha $\exists i \geqslant 2$, hogy $G^i(c) = c$ (c időben periodikus). Példa: 3 egymás melletti élő sejt. Ez a legkisebb (2 periódusú) oszcillátor, neve Villogó.
- c **űrhajó**, ha $\exists i \geqslant 1$, hogy $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid G^i(c)(\mathbf{x}) = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid c(\mathbf{x}) = 1\} + \mathbf{y}$ valamely $\mathbf{y} \in X$-re. A legkisebb méretű űrhajó neve Sikló.
- c **ágyú**, ha $\exists \ell \geqslant 0, k \geqslant 1$ és c' űrhajó, hogy $\forall i \in \mathbb{N}$ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{(i+1)k+\ell}(c)(\mathbf{x}) = 1\} \supset \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{ik+\ell}(c)(\mathbf{x}) = 1\}$ és $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{(i+1)k+\ell}(c)(\mathbf{x}) = 1\} \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid G^{ik+\ell}(c)(\mathbf{x}) = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid c'(\mathbf{x}) = 1\} + \mathbf{y}_k$ valamely $\mathbf{y}_k \in X$-re.

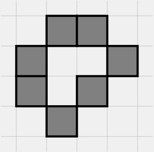
  (azaz periódikusan c' egy-egy eltoltjával nő a konfiguráció)

Életjáték – konfigurációtípusok

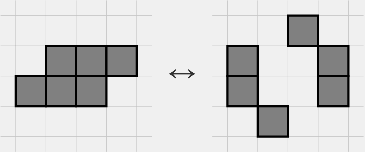


A Cipó nevű csendélet

Életjáték – konfigurációtípusok

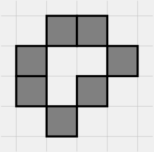


A Cipó nevű csendélet

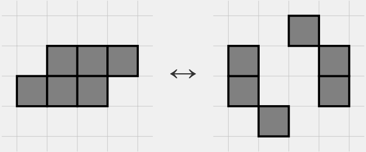


A Varangy nevű oszcillátor

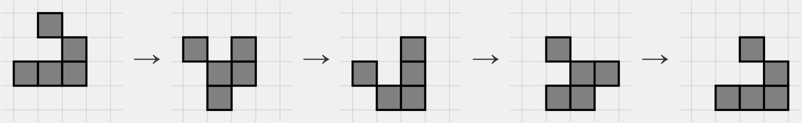
Életjáték – konfigurációtípusok



A Cipó nevű csendélet



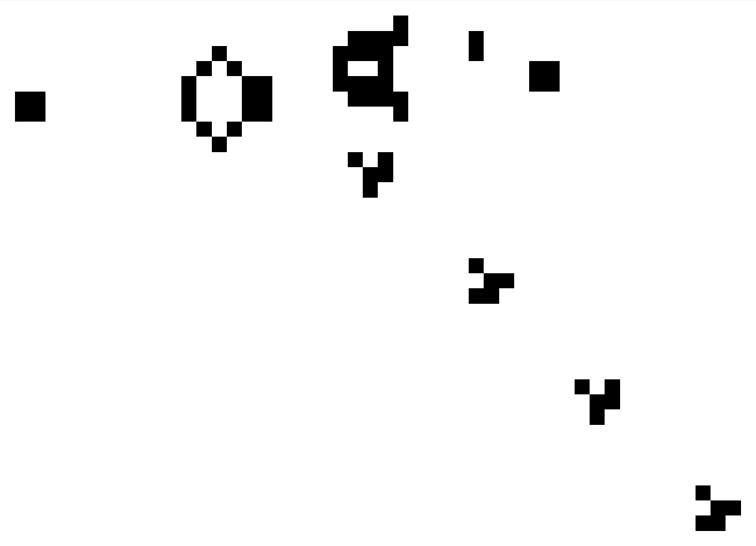
A Varangy nevű oszcillátor



A Sikló nevű űrhajó

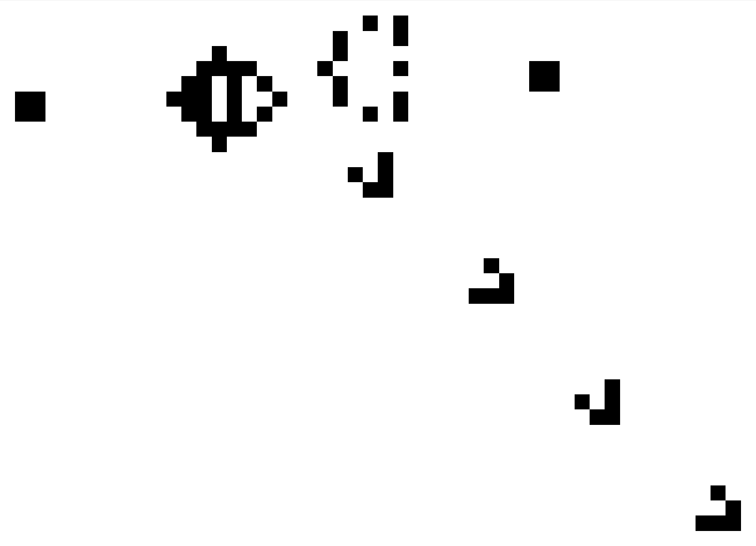
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



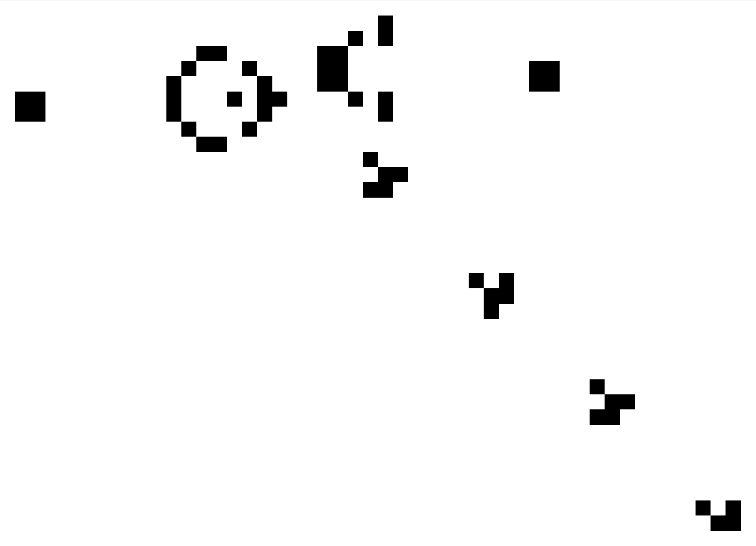
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



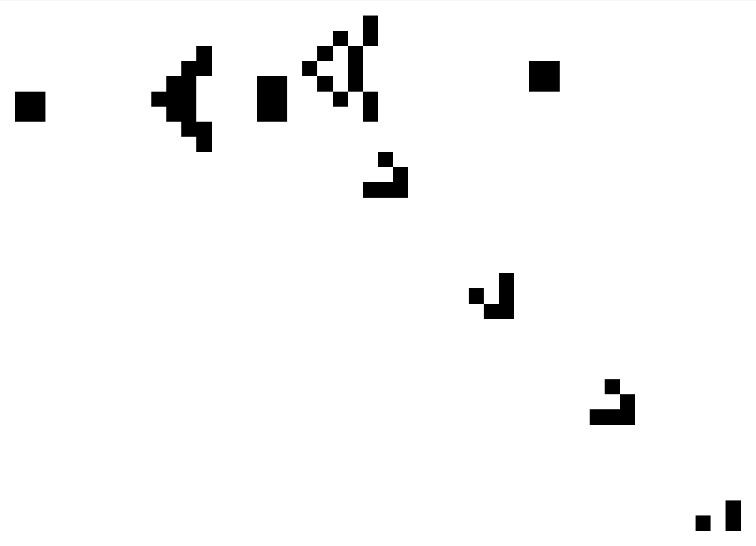
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



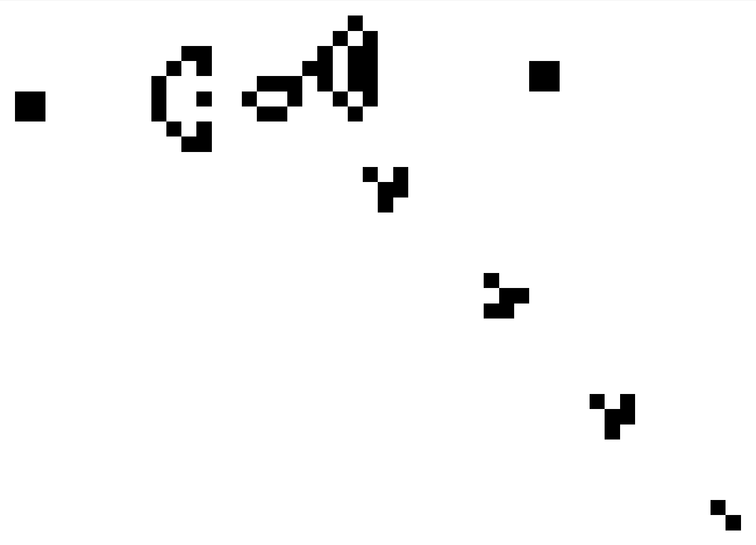
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



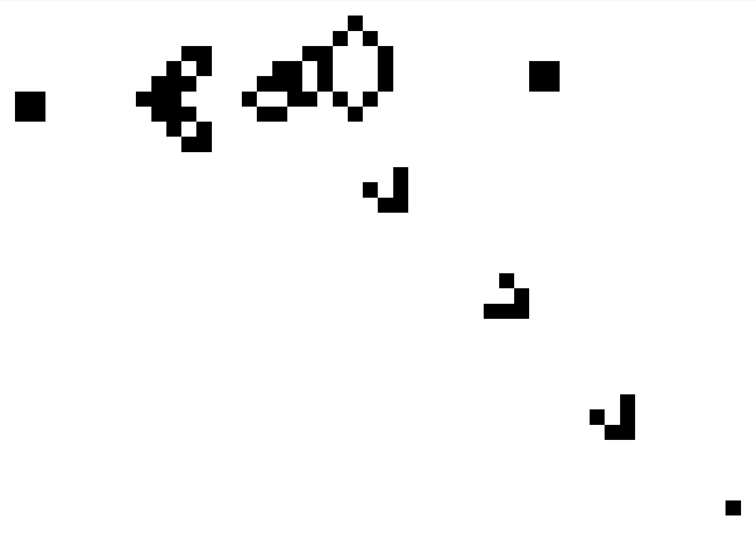
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

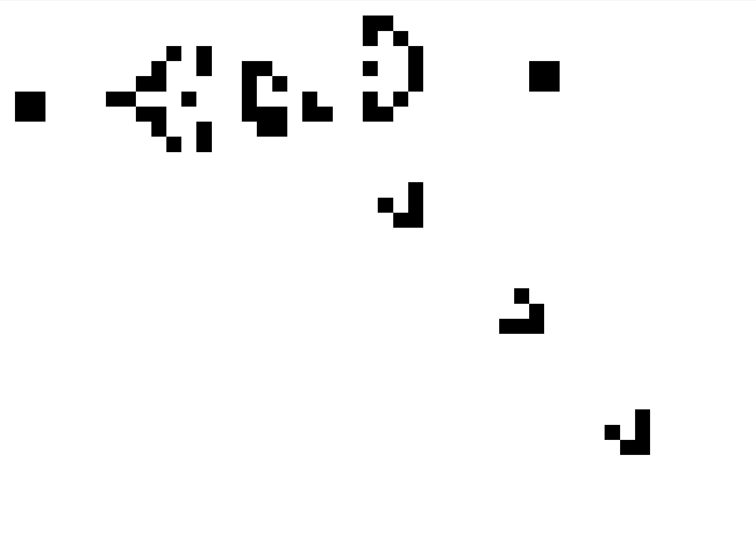
Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

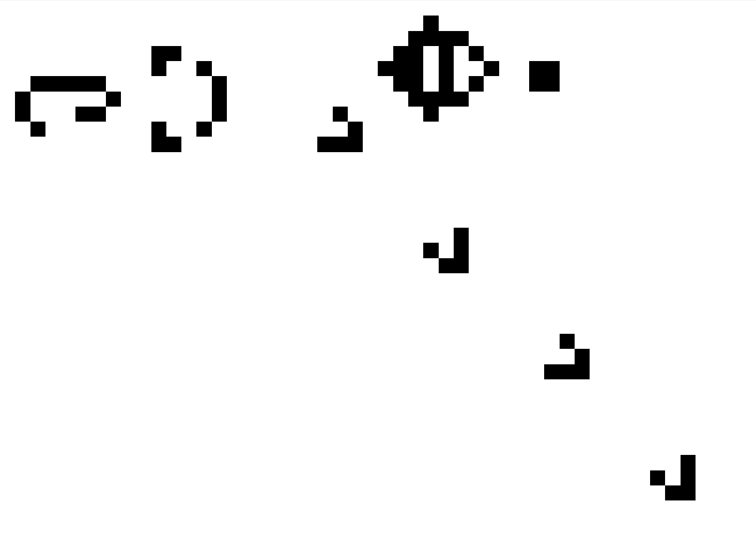
Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

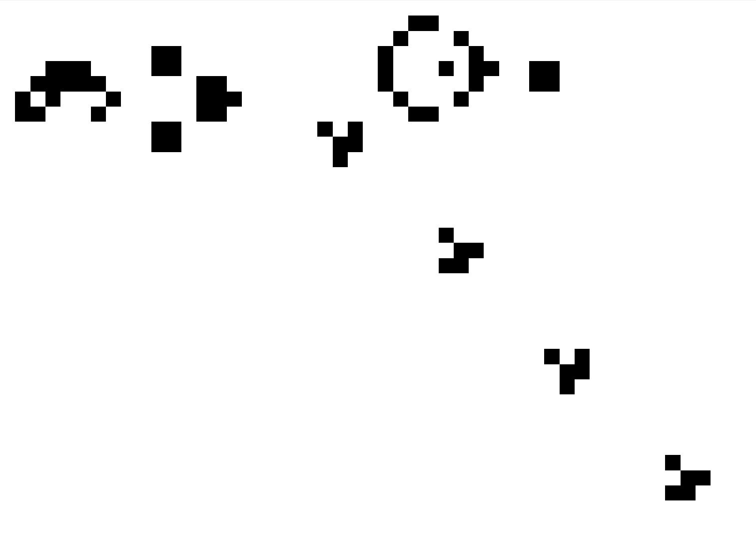
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

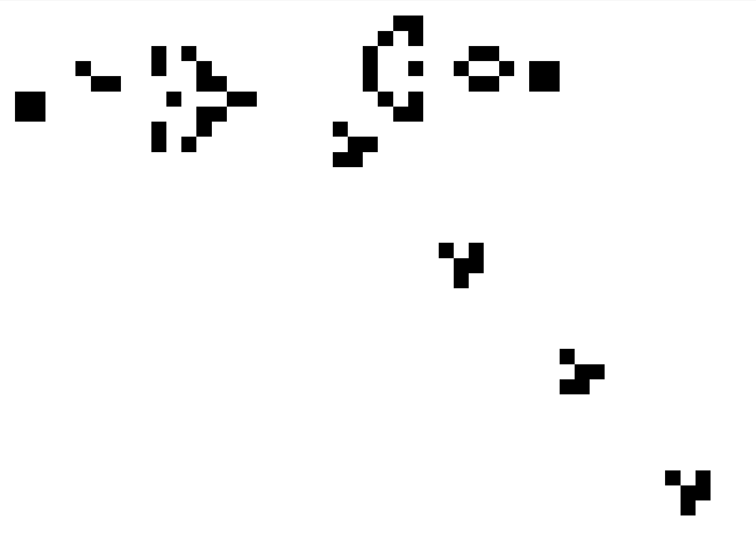


Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

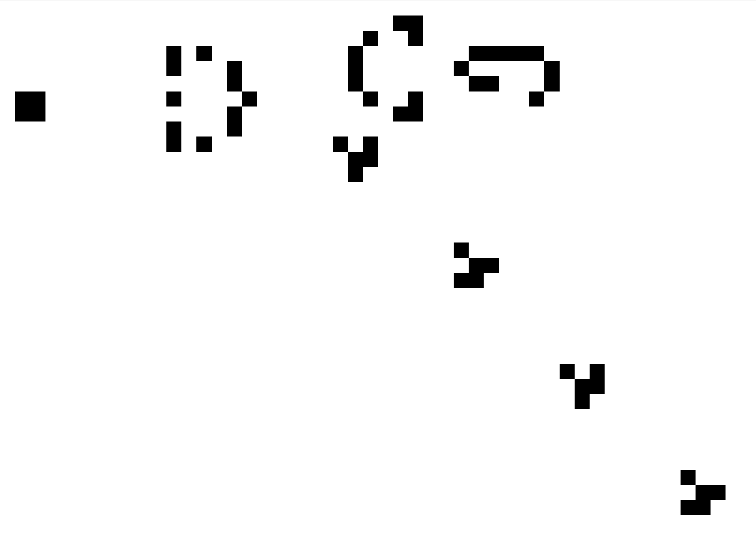


Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja

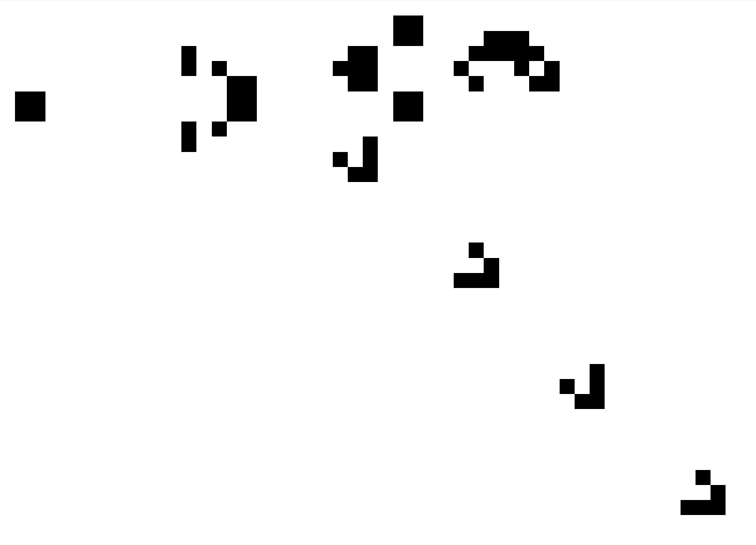
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



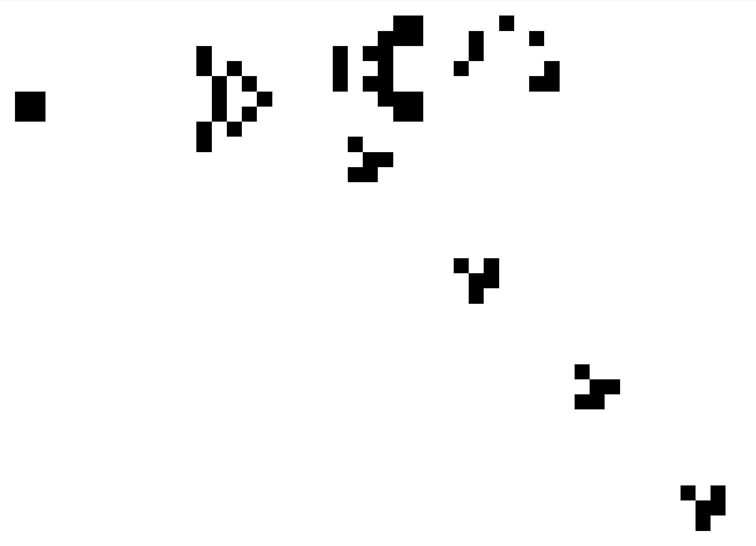
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



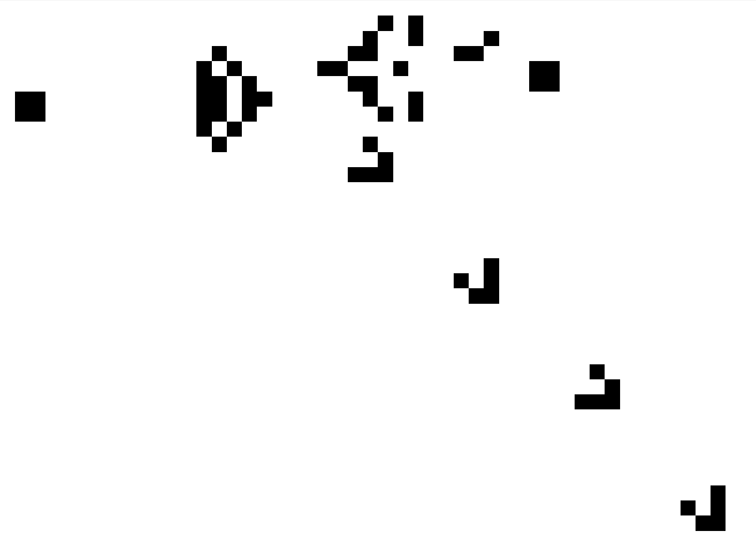
Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



Életjáték

Bill Gosper siklóágyúja



Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram megvizsgálta az $A = \langle 1, \{0, 1\}, (-1, 0, +1), f \rangle$ alakú sejtautomatákat.

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram megvizsgálta az $A = \langle 1, \{0,1\}, (-1,0,+1), f \rangle$ alakú sejtautomatákat.

$f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ függvényből 256 lehetőség van. Ezek megfeleltethetők azon 8 hosszúságú bitsorozatoknak, ahol az első bit $f(111)$, a második bit $f(110)$,..., a nyolcadik bit $f(000)$ Ezen a megfeleltetésnek megfelelő decimális számot a sejtautomata **Wolfram-kódjának** nevezzük. A megfelelő sejtautomatára a Wolfram-kódja alapján hivatkozunk (0-tól 255-ig).

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram megvizsgálta az $A = \langle 1, \{0,1\}, (-1,0,+1), f \rangle$ alakú sejtautomatákat.

$f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ függvényből 256 lehetőség van. Ezek megfeleltethetők azon 8 hosszúságú bitsorozatoknak, ahol az első bit $f(111)$, a második bit $f(110)$,…, a nyolcadik bit $f(000)$ Ezen a megfeleltetésnek megfelelő decimális számot a sejtautomata **Wolfram-kódjának** nevezzük. A megfelelő sejtautomatára a Wolfram-kódja alapján hivatkozunk (0-tól 255-ig).

Példa: Mik a 30-as számú egydimenziós, kétállapotú sejtautomata szabályai?

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram megvizsgálta az $A = \langle 1, \{0,1\}, (-1,0,+1), f \rangle$ alakú sejtautomatákat.

$f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ függvényből 256 lehetőség van. Ezek megfeleltethetők azon 8 hosszúságú bitsorozatoknak, ahol az első bit $f(111)$, a második bit $f(110)$,. . ., a nyolcadik bit $f(000)$ Ezen a megfeleltetésnek megfelelő decimális számot a sejtautomata **Wolfram-kódjának** nevezzük. A megfelelő sejtautomatára a Wolfram-kódja alapján hivatkozunk (0-tól 255-ig).

Példa: Mik a 30-as számú egydimenziós, kétállapotú sejtautomata szabályai? Írjuk fel binárisan!

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	1	1	1	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram megvizsgálta az $A = \langle 1, \{0,1\}, (-1,0,+1), f \rangle$ alakú sejtautomatákat.

$f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ függvényből 256 lehetőség van. Ezek megfeleltethetők azon 8 hosszúságú bitsorozatoknak, ahol az első bit $f(111)$, a második bit $f(110), \ldots$, a nyolcadik bit $f(000)$ Ezen a megfeleltetésnek megfelelő decimális számot a sejtautomata **Wolfram-kódjának** nevezzük. A megfelelő sejtautomatára a Wolfram-kódja alapján hivatkozunk (0-tól 255-ig).

Példa: Mik a 30-as számú egydimenziós, kétállapotú sejtautomata szabályai? Írjuk fel binárisan!

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	1	1	1	0

Tehát például $f(0,1,1) = 1$, azaz ha egy élő sejt baloldali szomszédja halott, jobboldali élő, akkor a sejt életben marad.

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Tér-idő diagram

Az egydimenziós, kétállapotú sejtautomaták orbitját egy 2 dimenziós képpel, az ún. **tér-idő diagram** segítségével ábrázolhatjuk: a kép első sorában ábrázoljuk a c kezdőkonfigurációt, az i-edikben $G^i(c)$-t.

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Tér-idő diagram

Az egydimenziós, kétállapotú sejtautomaták orbitját egy 2 dimenziós képpel, az ún. **tér-idő diagram** segítségével ábrázolhatjuk: a kép első sorában ábrázoljuk a c kezdőkonfigurációt, az i-edikben $G^i(c)$-t.

Példa: 90-es szabály

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0

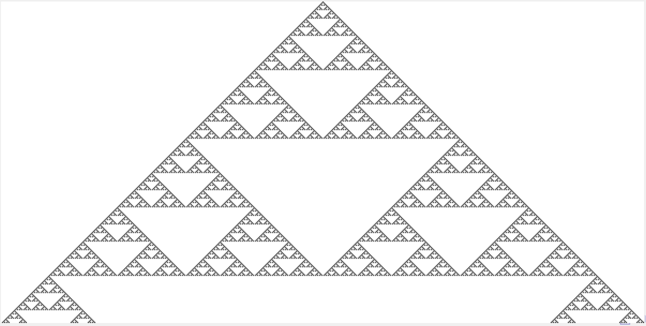
Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Tér-idő diagram

Az egydimenziós, kétállapotú sejtautomaták orbitját egy 2 dimenziós képpel, az ún. **tér-idő diagram** segítségével ábrázolhatjuk: a kép első sorában ábrázoljuk a c kezdőkonfigurációt, az i-edikben $G^i(c)$-t.

Példa: 90-es szabály

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0



Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram osztályozása

(W1) Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja egyazon konstans konfigurációban (minden sejt állapota ugyanaz) stabilizálódik.

Pl. 160	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	0	0	0	0	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram osztályozása

(W1) Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja egyazon konstans konfigurációban (minden sejt állapota ugyanaz) stabilizálódik.

Pl. 160	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	0	0	0	0	0

(W2) Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja periodikus.

Pl. 108	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	0	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram osztályozása

(W1) Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja egyazon konstans konfigurációban (minden sejt állapota ugyanaz) stabilizálódik.

Pl. 160	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	0	0	0	0	0

(W2) Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja periodikus.

Pl. 108	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	0	0

(W3) Majdnem minden kezdőkonfiguráció kaotikus, véletlenszerű viselkedéshez vezet.

Pl. 126	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	1	1	1	1	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Wolfram osztályozása

(W1) Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja egyazon konstans konfigurációban (minden sejt állapota ugyanaz) stabilizálódik.

Pl. 160	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	0	0	0	0	0

(W2) Majdnem minden kezdőkonfiguráció orbitja periodikus.

Pl. 108	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	0	0

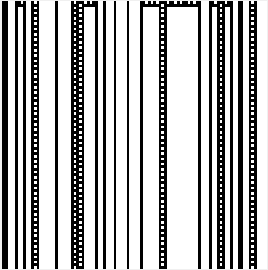
(W3) Majdnem minden kezdőkonfiguráció kaotikus, véletlenszerű viselkedéshez vezet.

Pl. 126	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	1	1	1	1	0

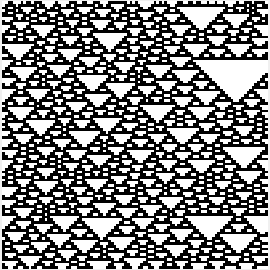
(W4) Lokális struktúrák alakulnak ki komplex kapcsolattal.

Pl. 110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

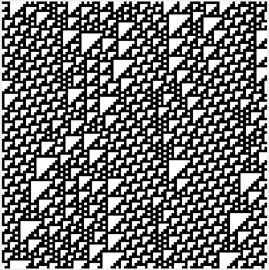
Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata



108-as (W2)



126-os (W3)



110-es (W4)

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

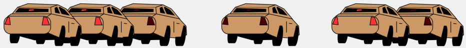
Példa: 184-es szabály

184	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	1	1	0	0	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

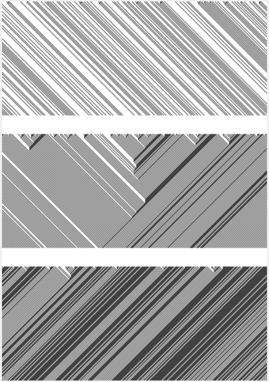
Példa: 184-es szabály

184	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	1	1	0	0	0



$\cdots$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $\cdots$

- **Közlekedés áramlása.**
  Az 1-esek autók, melyek akkor lépnek egyet jobbra, ha van előttük egy szabad hely (0). Meglepően jól modellezi a valóságot (folyamatos haladás, stop-go-stop-go, dugó).



25,50, illetve 75 százalékos autósűrűség

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Példa: 184-es szabály

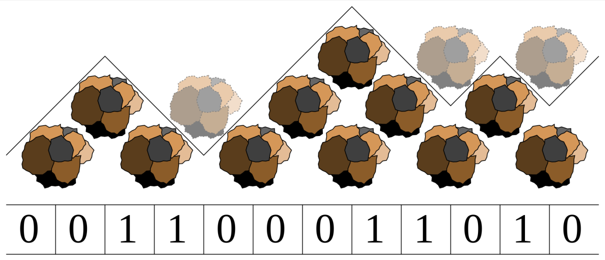
184	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	1	1	0	0	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Példa: 184-es szabály

184	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	1	1	0	0	0

- **Részecskék lerakódása szabálytalan felületre** Tekintsünk egy a gravitációval 45 fokos szöget bezáró rácsot. Egy felületet modellezhetünk úgy, hogy minden részecske alatt balra lent és jobbra lent részecske kell legyen. Ennek felülete egy +1 és -1 meredekségű darabokból álló határvonal. A következő iterációban 1-1 új részecske rakódik le a lokális minimum pontokban (10-k fölé)



Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Példa: 184-es szabály

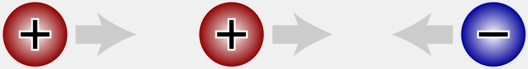
184	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	1	1	0	0	0

Egydimenziós, kétállapotú sejtautomata

Példa: 184-es szabály

184	111	110	101	100	011	010	001	000
	1	0	1	1	1	0	0	0

- **Ballisztikus kioltás.** A 00 minta egy balról jobbra haladó pozitív töltésű részecskét, míg az 11 minta ennek egy jobbról balra mozgó antirészecske párját reprezentálja. 01 és 10 a köztes térnek felel meg. Az ellentétes töltésű részecskepárok kioltják egymást.



0	0	1	0	0	1	0	1	1

001001011,
100100110,
010010101,
101001010.

Injektív/szürjektív/bijektív sejtautomata

Egy sejtautomata **injektív/szürjektív/bijektív**, ha G injektív/szürjektív/bijektív.

Injektív/szürjektív/bijektív sejtautomata

Egy sejtautomata **injektív/szürjektív/bijektív**, ha G injektív/szürjektív/bijektív.

Azaz egy sejtautomata bijektív, ha minden lehetséges c konfigurációjára teljesül, hogy pontosan egy olyan c' konfiguráció van, melyre $G(c') = c$.

Injektív/szürjektív/bijektív sejtautomata

Egy sejtautomata **injektív/szürjektív/bijektív**, ha G injektív/szürjektív/bijektív.

Azaz egy sejtautomata bijektív, ha minden lehetséges c konfigurációjára teljesül, hogy pontosan egy olyan c' konfiguráció van, melyre $G(c') = c$.

A $p \in S$ sejtállapot **nyugalmi** állapot, ha $f(p, \ldots p) = p$. Ha egy c konfigurációban véges sok sejt van a p nyugalmi állapottól különböző állapotban, akkor azt mondjuk, hogy c a sejtautomata egy **véges konfigurációja**.

Injektív/szürjektív/bijektív sejtautomata

Egy sejtautomata **injektív/szürjektív/bijektív**, ha G injektív/szürjektív/bijektív.

Azaz egy sejtautomata bijektív, ha minden lehetséges c konfigurációjára teljesül, hogy pontosan egy olyan c' konfiguráció van, melyre $G(c') = c$.

A $p \in S$ sejtállapot **nyugalmi** állapot, ha $f(p, \dots p) = p$. Ha egy c konfigurációban véges sok sejt van a p nyugalmi állapottól különböző állapotban, akkor azt mondjuk, hogy c a sejtautomata egy **véges konfigurációja**.

Észrevétel: Ha c véges, akkor $G(c)$ is az.

Injektív/szürjektív/bijektív sejtautomata

Egy sejtautomata **injektív/szürjektív/bijektív**, ha G injektív/szürjektív/bijektív.

Azaz egy sejtautomata bijektív, ha minden lehetséges c konfigurációjára teljesül, hogy pontosan egy olyan c' konfiguráció van, melyre $G(c') = c$.

A $p \in S$ sejtállapot **nyugalmi** állapot, ha $f(p, \dots p) = p$. Ha egy c konfigurációban véges sok sejt van a p nyugalmi állapottól különböző állapotban, akkor azt mondjuk, hogy c a sejtautomata egy **véges konfigurációja**.

Észrevétel: Ha c véges, akkor $G(c)$ is az.

Ha ugyanis c-nek k nyugalmitól különböző állapota van, akkor $G(c)$-nek legfeljebb $k|N|$.

Injektív/szürjektív/bijektív sejtautomata

Egy sejtautomata **injektív/szürjektív/bijektív**, ha G injektív/szürjektív/bijektív.

Azaz egy sejtautomata bijektív, ha minden lehetséges c konfigurációjára teljesül, hogy pontosan egy olyan c' konfiguráció van, melyre $G(c') = c$.

A $p \in S$ sejtállapot **nyugalmi** állapot, ha $f(p, \ldots p) = p$. Ha egy c konfigurációban véges sok sejt van a p nyugalmi állapottól különböző állapotban, akkor azt mondjuk, hogy c a sejtautomata egy **véges konfigurációja**.

Észrevétel: Ha c véges, akkor $G(c)$ is az.

Ha ugyanis c-nek k nyugalmitól különböző állapota van, akkor $G(c)$-nek legfeljebb $k|N|$.

Jelölje G_F G-nek a **véges** konfigurációkra való megszorítását.

Reverzibilis sejtautomata

Definíció

Az G globális átmenetfüggvényű sejtautomatát **reverzibilisnek** nevezzük, ha van inverze, azaz egy olyan F globális átmenetfüggvényű sejtautomata, amelyre $F \circ G = G \circ F = id$.

Reverzibilis sejtautomata

Definíció

Az G globális átmenetfüggvényű sejtautomatát **reverzibilisnek** nevezzük, ha van inverze, azaz egy olyan F globális átmenetfüggvényű sejtautomata, amelyre $F \circ G = G \circ F = id$.

Példa: 1 dimenziós sejtautomata 9 állapottal

Reverzibilis sejtautomata

Definíció

Az G globális átmenetfüggvényű sejtautomatát **reverzibilisnek** nevezzük, ha van inverze, azaz egy olyan F globális átmenetfüggvényű sejtautomata, amelyre $F \circ G = G \circ F = id$.

Példa: 1 dimenziós sejtautomata 9 állapottal

Észrevétel: Ha egy sejtautomata revervibilis akkor nyilván bijektív. A fordított állítás nem nyilvánvaló.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Példa:

110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Példa:

110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

Minden 01010-t tartalmazó c konfiguráció édenkert.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Példa:

110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

Minden 01010-t tartalmazó c konfiguráció édenkert. Indirekt, tegyük fel, hogy van olyan c', hogy $G(c') = c$.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Példa:

110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

Minden 01010-t tartalmazó c konfiguráció édenkert. Indirekt, tegyük fel, hogy van olyan c', hogy $G(c') = c$. Tekintsük a középső 0-t, három eset van aszerint, hogy mi c'-ben ennek a sejtnek a szomszédsága.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Példa:

110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

Minden 01010-t tartalmazó c konfiguráció édenkert. Indirekt, tegyük fel, hogy van olyan c', hogy $G(c') = c$. Tekintsük a középső 0-t, három eset van aszerint, hogy mi c'-ben ennek a sejtnek a szomszédsága. (1) 000, ekkor az előző egyes szomszédsága c'-ben $*00$, ami nem lehet.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Példa:

110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

Minden 01010-t tartalmazó c konfiguráció édenkert. Indirekt, tegyük fel, hogy van olyan c', hogy $G(c') = c$. Tekintsük a középső 0-t, három eset van aszerint, hogy mi c'-ben ennek a sejtnek a szomszédsága. (1) 000, ekkor az előző egyes szomszédsága c'-ben $*00$, ami nem lehet. (2) 111, ekkor az előző 1-es miatt c'-ben ez előtt 0 áll, de akkor a minta első 0-ja $*01$-ből lett, ami nem lehet.

Édenkert

Definíció

Egy sejtautomata valamely konfigurációját **édenkert** konfigurációnak nevezzük, ha nincs megelőzője.

Azaz édenkert csak kezdőkonfigurációként fordulhat elő.

Példa:

110	111	110	101	100	011	010	001	000
	0	1	1	0	1	1	1	0

Minden 01010-t tartalmazó c konfiguráció édenkert. Indirekt, tegyük fel, hogy van olyan c', hogy $G(c') = c$. Tekintsük a középső 0-t, három eset van aszerint, hogy mi c'-ben ennek a sejtnek a szomszédsága. (1) 000, ekkor az előző egyes szomszédsága c'-ben $*00$, ami nem lehet. (2) 111, ekkor az előző 1-es miatt c'-ben ez előtt 0 áll, de akkor a minta első 0-ja $*01$-ből lett, ami nem lehet. (3) 100, ekkor a következő 1-es miatt c'-ben 100 után 1-es áll, de akkor a minta utolsó 0-ja $01*$-ból lett, ami nem lehet.

Édenkert

Definíció

Egy véges mintát **árvának** nevezzük, ha minden őt tartalmazó konfiguráció édenkert.

Édenkert

Definíció

Egy véges mintát **árvának** nevezzük, ha minden őt tartalmazó konfiguráció édenkert.

Tehát a fentiek szerint 01010 árva a 110-es szabályú egydimenziós, kétállapotú sejtautomatában.

Édenkert

Definíció

Egy véges mintát **árvának** nevezzük, ha minden őt tartalmazó konfiguráció édenkert.

Tehát a fentiek szerint 01010 árva a 110-es szabályú egydimenziós, kétállapotú sejtautomatában.

Tétel

Bármely édenkert tartalmaz árvát.

Édenkert

Definíció

Egy véges mintát **árvának** nevezzük, ha minden őt tartalmazó konfiguráció édenkert.

Tehát a fentiek szerint 01010 árva a 110-es szabályú egydimenziós, kétállapotú sejtautomatában.

Tétel

Bármely édenkert tartalmaz árvát.

(nem bizonyítjuk)

Édenkert tétel

Édenkert tétel (Moore (1962), Myhill (1963))

Legyen $A = \langle X, S, N, f \rangle$ egy sejtautomata, ahol X euklideszi tér. Ekkor G szürjektív akkor és csak akkor, ha G_F injektív.

Édenkert tétel

Édenkert tétel (Moore (1962), Myhill (1963))

Legyen $A = \langle X, S, N, f \rangle$ egy sejtautomata, ahol X euklideszi tér. Ekkor G szürjektív akkor és csak akkor, ha G_F injektív.

Azaz akkor és csak akkor van árva (édenkert), ha van két véges konfiguráció, melynek ugyanaz a képe. Az ilyen párokat **ikreknek** nevezzük.

Édenkert tétel

Édenkert tétel (Moore (1962), Myhill (1963))

Legyen $A = \langle X, S, N, f \rangle$ egy sejtautomata, ahol X euklideszi tér. Ekkor G szürjektív akkor és csak akkor, ha G_F injektív.

Azaz akkor és csak akkor van árva (édenkert), ha van két véges konfiguráció, melynek ugyanaz a képe. Az ilyen párokat **ikreknek** nevezzük.

Bizonyítás (vázlat): Legyen $|S| = s$. Csak az euklideszi síkon bizonyítjuk.

Édenkert tétel

Édenkert tétel (Moore (1962), Myhill (1963))

Legyen $A = \langle X, S, N, f \rangle$ egy sejtautomata, ahol X euklideszi tér. Ekkor G szürjektív akkor és csak akkor, ha G_F injektív.

Azaz akkor és csak akkor van árva (édenkert), ha van két véges konfiguráció, melynek ugyanaz a képe. Az ilyen párokat **ikreknek** nevezzük.

Bizonyítás (vázlat): Legyen $|S| = s$. Csak az euklideszi síkon bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy vannak P és Q ikrek és tegyük fel, hogy befoglalhatók egy-egy $n \times n$-es négyzetbe. Tegyük fel továbbá, hogy X elemei szomszédságának legfeljebb n a sugara.

Édenkert tétel

Tekintsünk most egy nagy, $mn \times mn$-es négyzetet. A megelőző konfiguráció egy legfeljebb $(m+2)n \times (m+2)n$-es területének lehet hatása ezen sejtek állapotára. Ez $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$-es cellára osztható.

Édenkert tétel

Tekintsünk most egy nagy, $mn \times mn$-es négyzetet. A megelőző konfiguráció egy legfeljebb $(m+2)n \times (m+2)n$-es területének lehet hatása ezen sejtek állapotára. Ez $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$-es cellára osztható.

Mivel léteznek ikrek, ezen $n \times n$-es részek $s^{n \times n}$ lehetséges konfigurációja közül legalább 2-nek ugyanaz a hatása. Így legfeljebb $(s^{n \times n} - 1)^{(m+2)(m+2)}$ különböző kép állhat elő a lehetséges $s^{mn \times mn}$ közül.

Édenkert tétel

Tekintsünk most egy nagy, $mn \times mn$-es négyzetet. A megelőző konfiguráció egy legfeljebb $(m+2)n \times (m+2)n$-es területének lehet hatása ezen sejtek állapotára. Ez $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$-es cellára osztható.

Mivel léteznek ikrek, ezen $n \times n$-es részek $s^{n \times n}$ lehetséges konfigurációja közül legalább 2-nek ugyanaz a hatása. Így legfeljebb $(s^{n \times n} - 1)^{(m+2)(m+2)}$ különböző kép állhat elő a lehetséges $s^{mn \times mn}$ közül.

Utóbbi a nagyobb szám, ha m elég nagy, mivel $\log(s^{n^2})m^2 > \log(s^{n^2} - 1)(m^2 + 4m + 4)$ teljesül, ha m elég nagy.

Édenkert tétel

Tekintsünk most egy nagy, $mn \times mn$-es négyzetet. A megelőző konfiguráció egy legfeljebb $(m+2)n \times (m+2)n$-es területének lehet hatása ezen sejtek állapotára. Ez $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$-es cellára osztható.

Mivel léteznek ikrek, ezen $n \times n$-es részek $s^{n \times n}$ lehetséges konfigurációja közül legalább 2-nek ugyanaz a hatása. Így legfeljebb $(s^{n \times n} - 1)^{(m+2)(m+2)}$ különböző kép állhat elő a lehetséges $s^{mn \times mn}$ közül.

Utóbbi a nagyobb szám, ha m elég nagy, mivel $\log(s^{n^2})m^2 > \log(s^{n^2} - 1)(m^2 + 4m + 4)$ teljesül, ha m elég nagy.

Tehát van olyan minta az $mn \times mn$-es négyzet lehetséges kitöltései közül, amely nem áll elő képként, azaz van legfeljebb $mn \times mn$ méretű árva.

Édenkert tétel

Fordítva, tegyük fel, hogy létezik egy R árva. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre R befoglalható egy $n \times n$-es négyzetbe.

Édenkert tétel

Fordítva, tegyük fel, hogy létezik egy R árva. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre R befoglalható egy $n \times n$-es négyzetbe.

Tekintsük az egy nagy, $mn \times mn$-es négyzetbe foglalható véges konfigurációkat. Ezen konfigurációk következő generációja egy $(m+2)n \times (m+2)n$-es négyzetbe foglalható, melyet osszunk fel $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$-es négyzetre.

Édenkert tétel

Fordítva, tegyük fel, hogy létezik egy R árva. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre R befoglalható egy $n \times n$-es négyzetbe.

Tekintsük az egy nagy, $mn \times mn$-es négyzetbe foglalható véges konfigurációkat. Ezen konfigurációk következő generációja egy $(m+2)n \times (m+2)n$-es négyzetbe foglalható, melyet osszunk fel $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$-es négyzetre.

Mivel egyik ilyenben se kaphatjuk R-et, ezért a potenciálisan $s^{mn \times mn}$ konfigurációnak legfeljebb $(s^{n \times n} - 1)^{(m+2)(m+2)}$ fajta képe lehet. Az előző számítás miatt a skatulyelv szerint van két konfiguráció, amelyeknek ugyanaz a képe, azaz vannak ikrek. $\square$

Édenkert tétel

Fordítva, tegyük fel, hogy létezik egy R árva. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre R befoglalható egy $n \times n$-es négyzetbe.

Tekintsük az egy nagy, $mn \times mn$-es négyzetbe foglalható véges konfigurációkat. Ezen konfigurációk következő generációja egy $(m+2)n \times (m+2)n$-es négyzetbe foglalható, melyet osszunk fel $(m+2) \times (m+2)$ darab $n \times n$-es négyzetre.

Mivel egyik ilyenben se kaphatjuk R-et, ezért a potenciálisan $s^{mn \times mn}$ konfigurációnak legfeljebb $(s^{n \times n} - 1)^{(m+2)(m+2)}$ fajta képe lehet. Az előző számítás miatt a skatulyelv szerint van két konfiguráció, amelyeknek ugyanaz a képe, azaz vannak ikrek. $\square$

Megjegyzés: Azt, hogy X euklideszi tér ott használtuk ki, hogy egy nagy térfogatú kockának a felszíne hozzá képest aszimptotikusan kisebb nagyságrendű sejtet tartalmaz (síkban: terület/kerület). Van olyan sejtatomata pl. a hiperbolikus síkon (ami nem euklideszi tér), amelynek van édenkertje, de nincsenek ikrei és olyan is, amelynek vannak ikrei, de nincs édenkertje.

Édenkert tétel

Következmény

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G.

- Ha A injektív sejtautomata, akkor szürjektív is.

Édenkert tétel

Következmény

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G.

- Ha A injektív sejtautomata, akkor szürjektív is.
- Ekvivalens az, hogy A injektív és az, hogy A bijektív.

Édenkert tétel

Következmény

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G.

- Ha A injektív sejtautomata, akkor szürjektív is.
- Ekvivalens az, hogy A injektív és az, hogy A bijektív.

Édenkert tétel

Következmény

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G.

- Ha A injektív sejtautomata, akkor szürjektív is.
- Ekvivalens az, hogy A injektív és az, hogy A bijektív.

Bizonyítás: Ha G injektív, akkor G_F is, tehát az Éden-tétel miatt szürjektív is. Minden bijektív leképezés szürjektív. $\square$

Tétel

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G. Ekkor

$\boxed{G \text{ injektív} \Leftrightarrow G \text{ bijektív} \Leftrightarrow G \text{ reverzibilis}} \Longrightarrow$

Édenkert tétel

Következmény

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G.

- Ha A injektív sejtautomata, akkor szürjektív is.
- Ekvivalens az, hogy A injektív és az, hogy A bijektív.

Bizonyítás: Ha G injektív, akkor G_F is, tehát az Éden-tétel miatt szürjektív is. Minden bijektív leképezés szürjektív. □

Tétel

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G. Ekkor

$$\boxed{G \text{ injektív} \Leftrightarrow G \text{ bijektív} \Leftrightarrow G \text{ reverzibilis}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{G_F \text{ szürjektív} \Leftrightarrow G_F \text{ bijektív}} \Longrightarrow \boxed{G \text{ szürjektív} \Leftrightarrow G_F \text{ injektív}}$$

Édenkert tétel

Következmény

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G.

- Ha A injektív sejtautomata, akkor szürjektív is.
- Ekvivalens az, hogy A injektív és az, hogy A bijektív.

Bizonyítás: Ha G injektív, akkor G_F is, tehát az Éden-tétel miatt szürjektív is. Minden bijektív leképezés szürjektív. $\square$

Tétel

Legyen az A sejtautomata sejttere euklideszi tér és globális átmenetfüggvénye G. Ekkor

$$\boxed{G \text{ injektív} \Leftrightarrow G \text{ bijektív} \Leftrightarrow G \text{ reverzibilis}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{G_F \text{ szürjektív} \Leftrightarrow G_F \text{ bijektív}} \Longrightarrow \boxed{G \text{ szürjektív} \Leftrightarrow G_F \text{ injektív}}$$

(nem bizonyítjuk)

Édenkert tétel

Például GOL-re alkalmazható az édenkert tétel.

Édenkert tétel

Például GOL-re alkalmazható az édenkert tétel. Egy csupa halott cellából és egy egyetlen élő sejtből álló konfiguráció könnyen láthatóan iker.

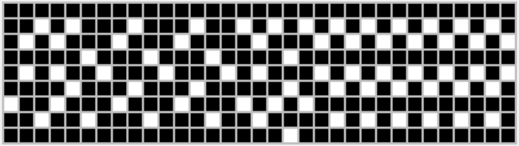
Édenkert tétel

Például GOL-re alkalmazható az édenkert tétel. Egy csupa halott cellából és egy egyetlen élő sejtből álló konfiguráció könnyen láthatóan iker. Ekkor az édenkert-tétel szerint létezik édenkert.

Édenkert tétel

Például GOL-re alkalmazható az édenkert tétel. Egy csupa halott cellából és egy egyetlen élő sejtből álló konfiguráció könnyen láthatóan iker. Ekkor az édenkert-tétel szerint létezik édenkert. GOL-ben azonban nincs kis méretű édenkert.

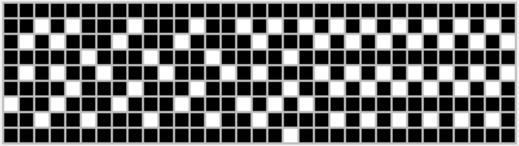
R. Banks konstrukciója:



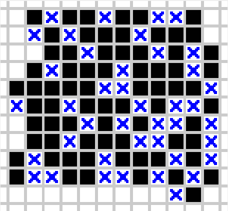
Édenkert tétel

Például GOL-re alkalmazható az édenkert tétel. Egy csupa halott cellából és egy egyetlen élő sejtből álló konfiguráció könnyen láthatóan iker. Ekkor az édenkert-tétel szerint létezik édenkert. GOL-ben azonban nincs kis méretű édenkert.

R. Banks konstrukciója:



A. Flammenkamp árvája: (kék x: kötelezően halott)



Sejtautomaták számítási ereje

Sejtautomata, mint nyelvanalizáló eszköz:

Definíció

Legyen $A = \langle 1, S, (-1, 0, +1), f \rangle$ egy egydimenziós sejtautomata, $T \subset S$, $F \subset S \setminus T$ továbbá $\sqcup \in S \setminus (T \cup F)$ az A nyugalmi állapota. A **felismeri** az $L \subseteq T^*$ nyelvet, ha $w \in L$ akkor és csak akkor ha az automatát w-vel indítva (értsd: egymás utáni celláin w olvasható, minden más cella nyugalmi állapotában van) a w első betűjének megfelelő cella F-beli állapotba jut.

Sejtautomaták számítási ereje

Sejtautomata, mint nyelvanalizáló eszköz:

Definíció

Legyen $A = \langle 1, S, (-1, 0, +1), f \rangle$ egy egydimenziós sejtautomata, $T \subset S$, $F \subset S \setminus T$ továbbá $\sqcup \in S \setminus (T \cup F)$ az A nyugalmi állapota. A **felismeri** az $L \subseteq T^*$ nyelvet, ha $w \in L$ akkor és csak akkor ha az automatát w-vel indítva (értsd: egymás utáni celláin w olvasható, minden más cella nyugalmi állapotában van) a w első betűjének megfelelő cella F-beli állapotba jut.

Tétel

Legyen adott egy M Turing gép n állapottal és m-elemű szalagábécével. Ekkor van olyan egydimenziós sejtautomata, ami

- háromelemű szomszédsággal és $(m+1)n$ állapottal
- háromelemű szomszédsággal és $m+n+2$ állapottal
- hatelemű szomszédsággal és $\max\{n, m\} + 1$ állapottal

szimulálni tudja M-et.

Sejtautomaták számítási ereje

Bizonyítás (csak az első):
Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy TG. Megkonstruálunk egy $A = \langle 1, \Gamma \cup Q \times \Gamma, (-1, 0, +1), f \rangle$ egydimenziós sejtautomatát, ami ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint M.

Sejtautomaták számítási ereje

Bizonyítás (csak az első):
Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy TG. Megkonstruálunk egy $A = \langle 1, \Gamma \cup Q \times \Gamma, (-1, 0, +1), f \rangle$ egydimenziós sejtautomatát, ami ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint M.

Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor

$$f((q, a), x, y) := (r, x) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
$$f(x, (q, a), y) := b \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$

Sejtautomaták számítási ereje

Bizonyítás (csak az első):
Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy TG. Megkonstruálunk egy $A = \langle 1, \Gamma \cup Q \times \Gamma, (-1, 0, +1), f \rangle$ egydimenziós sejtautomatát, ami ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint M.

Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor

$$f((q, a), x, y) := (r, x) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
$$f(x, (q, a), y) := b \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$

Ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor

$$f(x, (q, a), y) := (r, b) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$

Sejtautomaták számítási ereje

Bizonyítás (csak az első):
Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy TG. Megkonstruálunk egy $A = \langle 1, \Gamma \cup Q \times \Gamma, (-1, 0, +1), f \rangle$ egydimenziós sejtautomatát, ami ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint M.

Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor
$$f((q,a), x, y) := (r, x) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
$$f(x, (q,a), y) := b \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
Ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor
$$f(x, (q,a), y) := (r, b) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
Ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor
$$f(x, y, (q,a)) := (r, y) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
$$f(x, (q,a), y) := b \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$

Sejtautomaták számítási ereje

Bizonyítás (csak az első):
Legyen $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ egy TG. Megkonstruálunk egy $A = \langle 1, \Gamma \cup Q \times \Gamma, (-1, 0, +1), f \rangle$ egydimenziós sejtautomatát, ami ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint M.

Ha $\delta(q, a) = (r, b, R)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor

$$f((q, a), x, y) := (r, x) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
$$f(x, (q, a), y) := b \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$

Ha $\delta(q, a) = (r, b, S)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor

$$f(x, (q, a), y) := (r, b) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$

Ha $\delta(q, a) = (r, b, L)$, valamely $q, r \in Q, a, b \in \Gamma$-ra, akkor

$$f(x, y, (q, a)) := (r, y) \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$
$$f(x, (q, a), y) := b \quad (\forall x, y \in \Gamma)$$

Minden egyéb esetben $(x, y, z \in \Gamma \cup Q \times \Gamma)$

$$f(x, y, z) := y.$$

Sejtautomaták számítási ereje

$T = \Sigma$ és $F = \{q_i\} \times \Gamma$ választással könnyen látható, hogy A-nak éppen az $L(M)$-beli szavakra tartalmaz az orbitja F-beli állapotot.

Ennek a kezdőcellába másolása és a többi cella nyugalmi állapotba vitele technikai részletkérdés, amit itt nem részletezünk. $\square$

Sejtautomaták számítási ereje

$T = \Sigma$ és $F = \{q_i\} \times \Gamma$ választással könnyen látható, hogy A-nak éppen az $L(M)$-beli szavakra tartalmaz az orbitja F-beli állapotot.

Ennek a kezdőcellába másolása és a többi cella nyugalmi állapotba vitele technikai részletkérdés, amit itt nem részletezünk. $\square$

Tétel

Tegyük fel, hogy az A egydimenziós sejtautomata által felismert nyelv L. Ekkor készíthető olyan M TG, amelyre $L(M) = L$.

Sejtautomaták számítási ereje

$T = \Sigma$ és $F = \{q_i\} \times \Gamma$ választással könnyen látható, hogy A-nak éppen az $L(M)$-beli szavakra tartalmaz az orbitja F-beli állapotot.

Ennek a kezdőcellába másolása és a többi cella nyugalmi állapotba vitele technikai részletkérdés, amit itt nem részletezünk. $\square$

Tétel

Tegyük fel, hogy az A egydimenziós sejtautomata által felismert nyelv L. Ekkor készíthető olyan M TG, amelyre $L(M) = L$.

Ennek a bizonyítása egyszerű és természetes, amit a hallgatóságra bízok.

Sejtautomaták számítási ereje

$T = \Sigma$ és $F = \{q_i\} \times \Gamma$ választással könnyen látható, hogy A-nak éppen az $L(M)$-beli szavakra tartalmaz az orbitja F-beli állapotot.

Ennek a kezdőcellába másolása és a többi cella nyugalmi állapotba vitele technikai részletkérdés, amit itt nem részletezünk. $\square$

Tétel

Tegyük fel, hogy az A egydimenziós sejtautomata által felismert nyelv L. Ekkor készíthető olyan M TG, amelyre $L(M) = L$.

Ennek a bizonyítása egyszerű és természetes, amit a hallgatóságra bízok.

Megjegyzés: Több dimenziós sejtautomaták Turing-univerzalitása szintén bizonyítható.

Életjáték – eldönthetetlen problémák

Végül bizonyítás nélkül megemlítünk néhány algoritmikus probléma megoldhatóságával kapcsolatos eredményt.

Életjáték – eldönthetetlen problémák

Végül bizonyítás nélkül megemlítünk néhány algoritmikus probléma megoldhatóságával kapcsolatos eredményt.

Az Univerzális Turing gép szimulálható az Életjátékban.

Életjáték – eldönthetetlen problémák

Végül bizonyítás nélkül megemlítünk néhány algoritmikus probléma megoldhatóságával kapcsolatos eredményt.

Az Univerzális Turing gép szimulálható az Életjátékban.

Tétel

Minden $\langle M, w\rangle$ (Turing gép,szó) párhoz megkonstruálható egy olyan $c_{\langle M,w\rangle}$ kezdőkonfiguráció GOL-ben, melyre $c_{\langle M,w\rangle}$ kihal $\Leftrightarrow\ w \in L(M)$.

Életjáték – eldönthetetlen problémák

Végül bizonyítás nélkül megemlítünk néhány algoritmikus probléma megoldhatóságával kapcsolatos eredményt.

Az Univerzális Turing gép szimulálható az Életjátékban.

Tétel

Minden $\langle M, w\rangle$ (Turing gép,szó) párhoz megkonstruálható egy olyan $c_{\langle M,w\rangle}$ kezdőkonfiguráció GOL-ben, melyre $c_{\langle M,w\rangle}$ kihal $\Leftrightarrow$ $w \in L(M)$.

Tétel

Adott egy c és egy c' konfiguráció GOL-ben. Eldönthetetlen, hogy létezik-e olyan $i \geqslant 0$, hogy $c' = G^i(c)$.

Életjáték – eldönthetetlen problémák

Végül bizonyítás nélkül megemlítünk néhány algoritmikus probléma megoldhatóságával kapcsolatos eredményt.

Az Univerzális Turing gép szimulálható az Életjátékban.

Tétel

Minden $\langle M, w\rangle$ (Turing gép,szó) párhoz megkonstruálható egy olyan $c_{\langle M,w\rangle}$ kezdőkonfiguráció GOL-ben, melyre $c_{\langle M,w\rangle}$ kihal $\Leftrightarrow \; w \in L(M)$.

Tétel

Adott egy c és egy c' konfiguráció GOL-ben. Eldönthetetlen, hogy létezik-e olyan $i \geqslant 0$, hogy $c' = G^i(c)$.

Tétel

Eldönthetetlen, hogy GOL egy véges mintája kihal-e.

További eldönthetetlen problémák

Tétel (M. Cook, 2004)

A 110-es Wolfram kódú egydimenziós kétálllapotú sejtautomata univerzális, azaz bármely kiszámítható függvény kiszámítható vele.

További eldönthetetlen problémák

Tétel (M. Cook, 2004)

A 110-es Wolfram kódú egydimenziós kétálllapotú sejtautomata univerzális, azaz bármely kiszámítható függvény kiszámítható vele.

Tétel

(1) Eldönthető, hogy egy egydimenziós sejtautomata injektív-e.
(2) Eldönthető, hogy egy egydimenziós sejtautomata szürjektív-e.

További eldönthetetlen problémák

Tétel (M. Cook, 2004)

A 110-es Wolfram kódú egydimenziós kétálllapotú sejtautomata univerzális, azaz bármely kiszámítható függvény kiszámítható vele.

Tétel

(1) Eldönthető, hogy egy egydimenziós sejtautomata injektív-e.
(2) Eldönthető, hogy egy egydimenziós sejtautomata szürjektív-e.

Tétel

(1) Eldönthetetlen, hogy egy kétdimenziós sejtautomata injektív-e.
(2) Eldönthetetlen, hogy egy kétdimenziós sejtautomata szürjektív-e.
(3) Egy kétdimenziós sejtautomata injektivitása rekurzíve felsorolható.
(4) Egy kétdimenziós sejtautomata nem-szürjektivitása rekurzíve felsorolható.

További eldönthetetlen problémák

Egy konfiguráció **nyugalmi**, ha minden sejt nyugalmi állapotban van. Egy sejtautomata **nilpotens**, ha minden kezdőkonfigurációra nyugalmi konfigurációba jut.

További eldönthetetlen problémák

Egy konfiguráció **nyugalmi**, ha minden sejt nyugalmi állapotban van. Egy sejtautomata **nilpotens**, ha minden kezdőkonfigurációra nyugalmi konfigurációba jut.

Tétel

(1) Eldönthetetlen, hogy egy egydimenziós sejtautomata nilpotens-e.
(2) Eldönthetetlen, hogy egy kétdimenziós sejtautomata nilpotens-e.
(3) Rekurzíve felsorolható, hogy egy egydimenziós sejtautomata nilpotens-e.
(4) Rekurzíve felsorolható, hogy egy kétdimenziós sejtautomata nilpotens-e.

További eldönthetetlen problémák

Tétel

(1) Eldönthetetlen, hogy egy kétdimenziós sejtautomata reverzibilis-e.
(2) Rekurzíve felsorolható, hogy egy kétdimenziós sejtautomata reverzibilis-e.

További eldönthetetlen problémák

Tétel

(1) Eldönthetetlen, hogy egy kétdimenziós sejtautomata reverzibilis-e.
(2) Rekurzíve felsorolható, hogy egy kétdimenziós sejtautomata reverzibilis-e.

Egy G globális átmenetfüggvényű sejtautomata **periodikus**, ha minden kezdőkonfigurációra G időben periodikus.

További eldönthetetlen problémák

Tétel

(1) Eldönthetetlen, hogy egy kétdimenziós sejtautomata reverzibilis-e.
(2) Rekurzíve felsorolható, hogy egy kétdimenziós sejtautomata reverzibilis-e.

Egy G globális átmenetfüggvényű sejtautomata **periodikus**, ha minden kezdőkonfigurációra G időben periodikus.

Tétel

(1) Eldönthetetlen, hogy egy kétdimenziós sejtautomata periodikus-e.
(2) Eldönthetetlen, hogy egy egydimenziós sejtautomata periodikus-e.