Legközelebbi pontpár

Adott $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ponthalmaz a síkon

$p_i=(x_i, y_i)$ és $p_j=(x_j, y_j)$ távolsága

$$\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$$

Adjunk algoritmust a legközelebbi pontpár meghatározására!

- Naív megoldás: vegyük az összes pontpárt és vegyük ezek közül a legkisebb távolságút

költség: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad T(n) = O(n^2)$

D&Q megoldás

- Minden rekurzív hívásnál átadásra kerülnek P egy Q részhalmazának pontjai
  - egy x koordináták szerint rendezett X tömbben
  - egy y ——〃—— Y tömbben
- Az algoritmus elején rendezzük a pontokat (nem minden rekurzív hívásnál)
- Rekurzív hívások
  - ha $|Q| \leq 3$ $\Rightarrow$ páronkénti vizsgálat
  - ha $|Q| > 3$ $\Rightarrow$ keresünk egy „ℓ" függőleges egyenest, ami azt Q_L-re és Q_R-re osztja

- $|Q_L| = \lceil |Q|/2 \rceil$ → Q_L minden pontja ℓ baloldalán van vagy illeszkedik ℓ-re
  $|Q_R| = \lfloor |Q|/2 \rfloor$ → Q_R minden pontja ℓ jobb oldalán van vagy illeszkedik ℓ-re

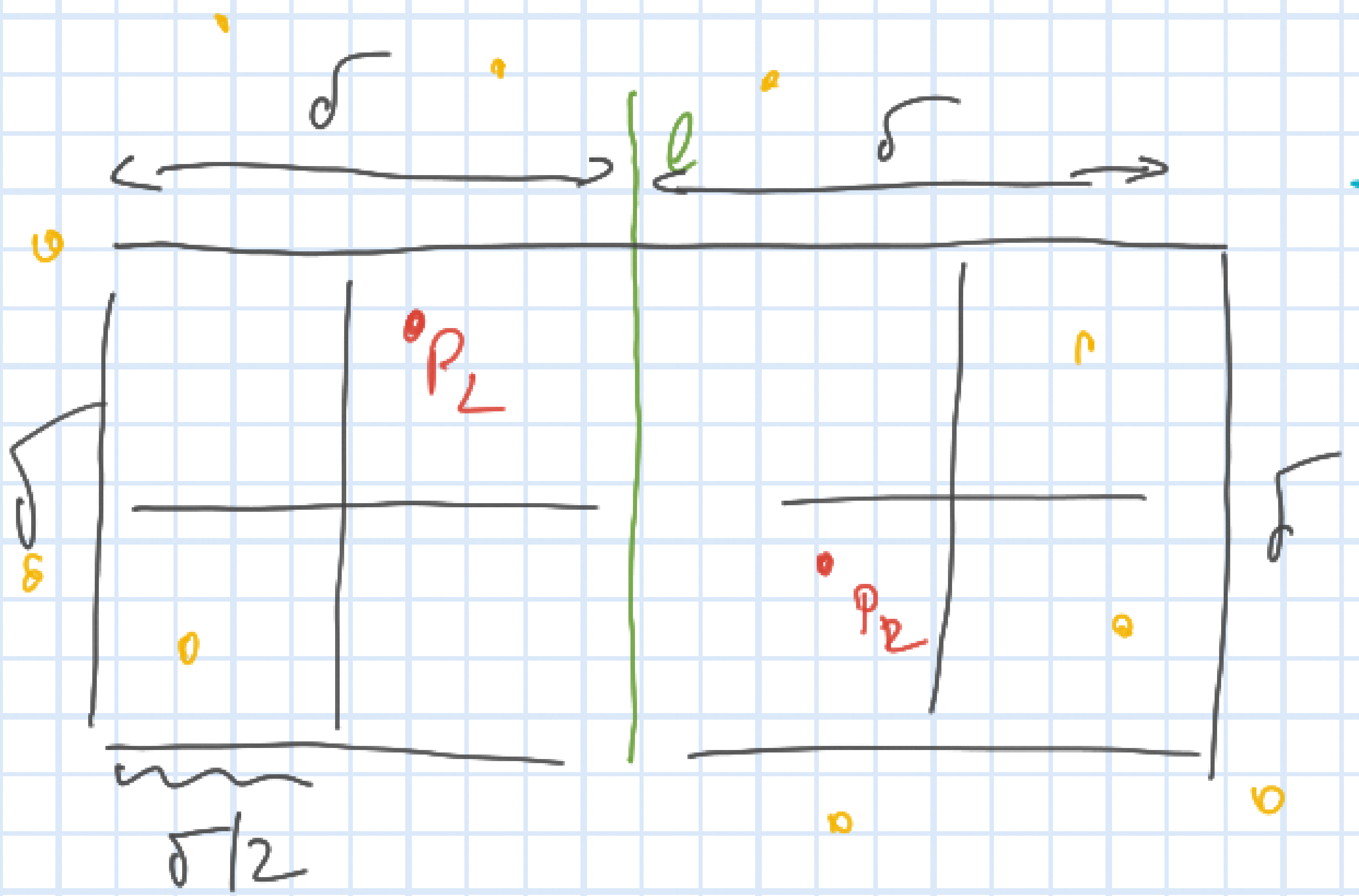
  → szétválogatjuk a pontokat X-ből, Y-ból X_L, X_R-be Y_L, Y_R-be

- Rekurzívan keressük a legkisebb pontpárt $\underbrace{(X_L, Y_L)}_{Q_L}$-ben és $\underbrace{(X_R, Y_R)}_{Q_R}$-ben

- Legyen a min. távolság Q_L-ben δ_L Q_R-ben δ_R
  legyen $\delta := \min(\delta_L, \delta_R)$

– A megoldás vagy az egyik rekurzív hívás által adott δ távolságú páros, vagy egy olyan, melynek egyik pontja $P_L \in Q_L$, $P_R \in Q_R$

- kérdés: ezek között van-e δ kisebb távolságú
- ha olyan pár van $\Rightarrow$ egyik pontja sem lehet δ-nál távolabb ℓ-től
- kiválogatjuk Y-ból ℓ-től legfeljebb δ távolságú pontokat $\Rightarrow$ Y'-be
- $\forall p \in Y'$-re keressük azokat az Y'-beli pontokat, melyek távolsága $\leq \delta$



Költség: $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

$\Downarrow$

$O(n \log n)$

- legfeljebb 7 pontot kell vizsgálni
- ezek az l-re szimmetrikus $\delta \times 2\delta$ méretű téglalapban vannak
- egy „kis négyzetben" nem lehet 1-nél több pont Y'-ből

átló: $\frac{\delta}{2} \cdot \sqrt{2} = \delta \frac{\sqrt{2}}{2} < \delta$ ↯ Q_L-ben és Q_R-ben a min. táv δ

- $\forall p \in Y'$ pontra elég a rákövetkező 7 pontot vizsgálni
  - legyen az így kapott min δ', ha $\delta' < \delta \Rightarrow$ akkor Q-ba a min δ'

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Fibo(n)

$n \leq 1$	
return n	return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)

Fibo(4)

Fibo(3) + Fibo(2)

Fibo(2) + Fibo(1)   Fibo(1)   Fibo(0)

Fibo(1) + Fibo(0)

n

$T(n) = O(2^n)$

$Space = O(n)$

fibo(n)

fibo := [0, 1]

i := 2 .. n

fib[i] := fib[i-1] + fib[i-2]

return fibo[n]

$T(n) = O(n)$

Space $O(n)$

Mátrixok szorzása

Adott n db mátrix: $A_1, A_2, \dots, A_n$

Szeretnénk kiszámítani az $\boxed{A_1 A_2 \cdots A_n}$ szorzatot

A mátrixok szorzása asszociatív, bármilyen zárójelezés ugyanazt az eredményt adja

Pl.: $A_1(A_2 A_3) = (A_1 A_2)A_3$

A zárójelezés módja befolyásolja a kiértékelés költségét

Feladat: A_i mátrix $p_{i-1} \times p_i$, keressük $A_1 A_2 \cdots A_n$ szorzat azon zárójelezését, amely minimalizálja a szorzat kiszámításához szükséges skalár (elemi) szorzások számát.

Példa: $A_1 : 10 \times 100$

$A_2 : 100 \times 5$

$A_3 : 5 \times 50$

$A_1 A_2 A_3$ szorzat kiszámítása

- $(A_1 A_2) A_3$ szerint: $\underbrace{A_1 A_2}_{X}$ $10 \cdot 5 \cdot 100 = 5000$ szorzás

  $X A_3$ $10 \cdot 50 \cdot 5 = 2500$ szorzás

  $\Sigma\ 7500$

- $A_1 (A_2 A_3)$ szerint: $\underbrace{A_2 A_3}_{X}$: $100 \cdot 50 \cdot 5 = 25000$

  $A_1 X$: $100 \cdot 50 \cdot 10 = 50000$

  $\Sigma\ 75000$

Naiv m.o.: összes zárójelezés megvizsgálása, exponenciálisan sok

DP m.o.

- Optimális zárójelezés szerkezete
  - Vegyük $A_i A_{i+1} \dots A_j$ szorzatot, ennek eredménye $A_{i..j}$
  - Ha $i < j$, akkor az optimális zárójelezés $A_i A_{i+1} \cdots A_j$-t 2 részre vágja A_k és A_{k+1} között $i \leq k < j$
  - kiszámítjuk $A_{i..k}$ és $A_{k+1..j}$-t majd ezeket összeszorozva $A_{i..j}$-t
  - költség: $A_{i..k}$, $A_{k+1..j}$ költsége + kettejük összeszorzásának költsége

- észrevétel: $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ optimális zárójelezésében $A_i A_{i+1} \cdots A_k$ és $A_{k+1} \cdots A_j$ szorzatok zárójelezése is optimális
  - ha pl.: $A_i A_{i+1} \cdots A_k$ szorzatnak lenne kisebb költségű zárójelezése akkor $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ optimális zárójelezésében azt elsőnek(?) kisebb költségűre cserélve $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ kisebb költségű zárójelezését kapnánk ↯

OPTIMÁLIS RÉSZSTRUKTÚRA TULAJDONSÁG