

Számítási modellek

8. előadás

Membránrendszerek

G. Paun 2000-ben vezette be a később róla elnevezett biológialag inspirált számítási modelljét, a P-rendszereket (membránrendszereket).

Az eukarióta sejtek sejtplazmája több, membránnal határolt sejtalkotót tartalmaz, így belső terekre, ún. régiókra különül. Általánosabban, a többsejtű organizmusok sejtek közötti tere is tekinthető régiónak. A membránok (bizonyos) kémiai molekulák számára átjárhatóak. Az egyes régiókban kémiai reakciók mehetnek végbe, melyek eredményéül kapott (bizonyos) molekulák a régiót határoló membránon áthaladhatnak.

Olyan absztrakt számítási modellt szeretnénk adni, amely alkalmas a molekulák által közvetített sejten belüli és sejtközi információáramlás folyamatának leírására, jobb megértésére.

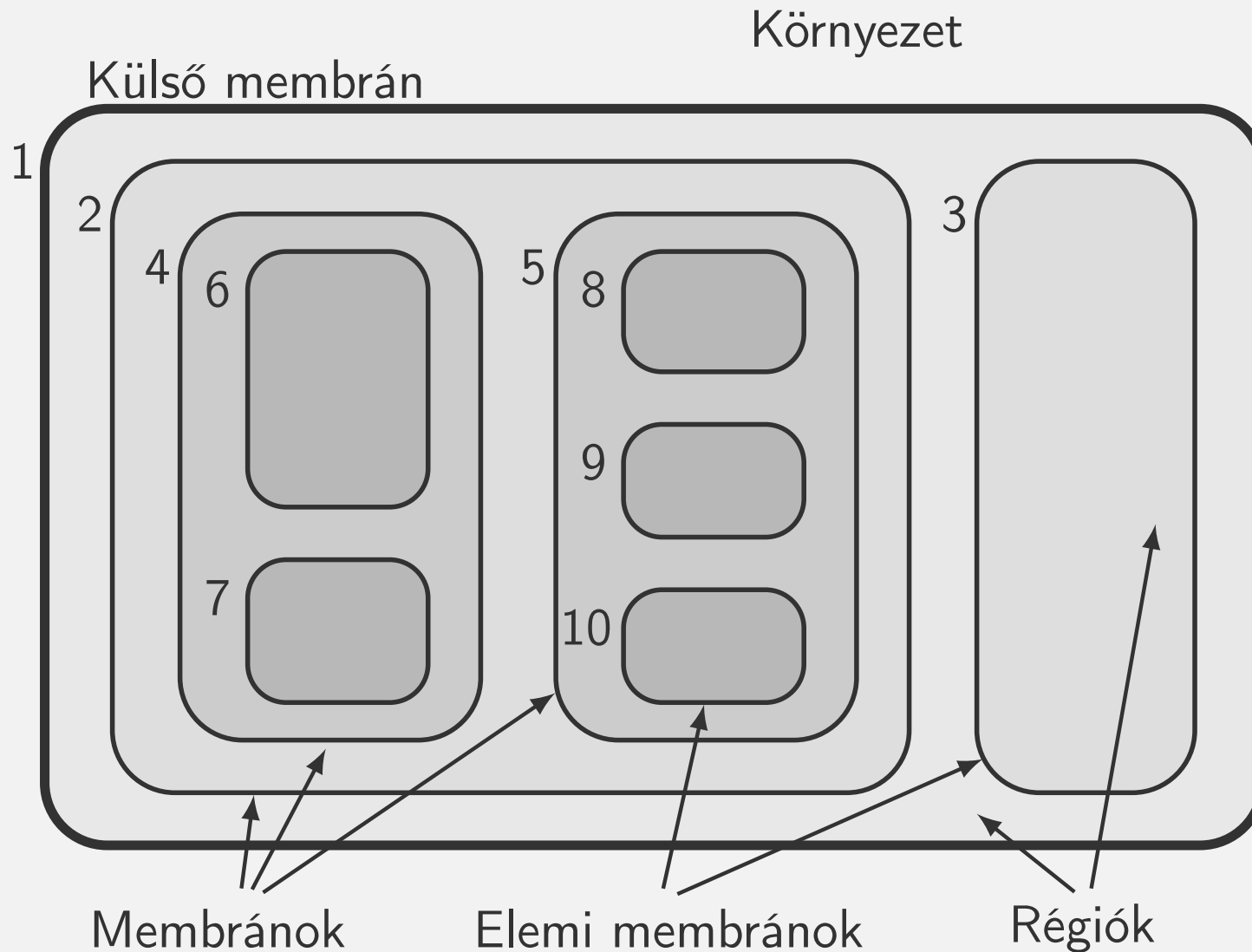
Modellünk ugyanakkor alkalmas lehet absztrakt (nem biokémiai) számítások hatékony elvégzésére is a modellben rejlő masszív párhuzamosság révén.

Membránrendszerek

A membránrendszerek tehát biokémiai folyamatok alapvető törvényszerűségeit szeretnénk modellezni. Ezek közül néhány:

- ▶ Az egyes kémiai reakciókhoz szükséges a reakció bemeneti molekuláinak kellő számú jelenléte a régióban.
- ▶ Ha a megfelelő mennyiségű nyersanyag rendelkezésre áll, a reakció (vagy ha több reakció lehetséges, ezek bármelyike) végbe is megy.
- ▶ Egyszerre több reakció (és/vagy egy reakció többször) is végbemehet ha van mindhez elegendő nyersanyag.
- ▶ Bizonyos reakciókhoz szükséges katalizátor molekulák jelenléte a régióban.
- ▶ A sejtmembránok feloldódhatnak, ilyenkor a régió tartalma az őt övező régióba kerül.
- ▶ Néha két reakció közül biokémiai okok miatt mindig az egyik hajtódik végre, holott az erőforrások mindkét reakcióhoz rendelkezésre állnának.

Hierarchikus membránstruktúra



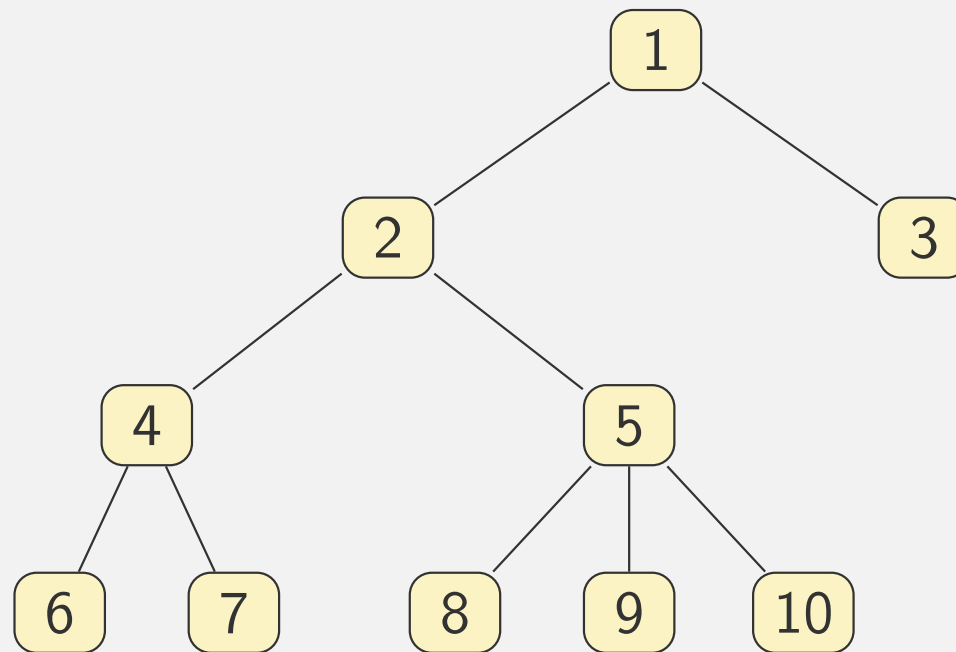
A membránstruktúra:

[1 [2 [4 [6]6 [7]7]4 [5 [8]8 [9]9 [10]10]5]2 [3]3]1 .

Hierarchikus membránstruktúra

Észrevétel: A régiókat azonosíthatjuk a legszűkebb őt tartalmazó membránnal. Így például ha azt mondjuk, hogy egy objektum a 4-es membránban van az úgy értendő, hogy abban a régióban, amit a 4-es membrán, és a 4-es membrán gyerek membránjai határolnak.

A membránok (régiók) hierarchiáját fa alakban is ábrázolhatjuk. Ekkor a levelek az elemi membránok (régiók).



$[1 [2 [4 [6]6 [7]7]4 [5 [8]8 [9]9 [10]10]5]2 [3]3]1 .$

Multihalmazok

Definíció

Legyen O egy ábécé. Elemeit **objektumoknak** nevezzük. Egy $M : O \rightarrow \mathbb{N}$ leképezést az objektumok egy **multihalmazának** nevezünk. Ha $a \in O$, akkor $M(a)$ az a objektum **multiplicitása**.

Egy multihalmaz üres, ha $\forall a \in O : M(a) = 0$. Egy M multihalmazt egy olyan w szóval reprezentálhatunk, melyre

$\forall a \in O : |w|_a = M(a)$. Az üres multihalmazt ε reprezentálja.

Észrevétel: $aaabab$ és a^4b^2 ugyanazt a multihalmazt reprezentálja.

Legyenek $M_1, M_2 : O \rightarrow \mathbb{N}$ két multihalmaz, azt mondjuk, hogy

$M_1 \subseteq M_2$, ha $\forall a \in O : M_1(a) \leq M_2(a)$. M_1 és M_2 uniója:

$\forall a \in O : (M_1 \cup M_2)(a) := M_1(a) + M_2(a)$. Ha $M_1 \subseteq M_2$, akkor M_1

és M_2 különbsége: $\forall a \in O : (M_2 - M_1)(a) := M_2(a) - M_1(a)$.

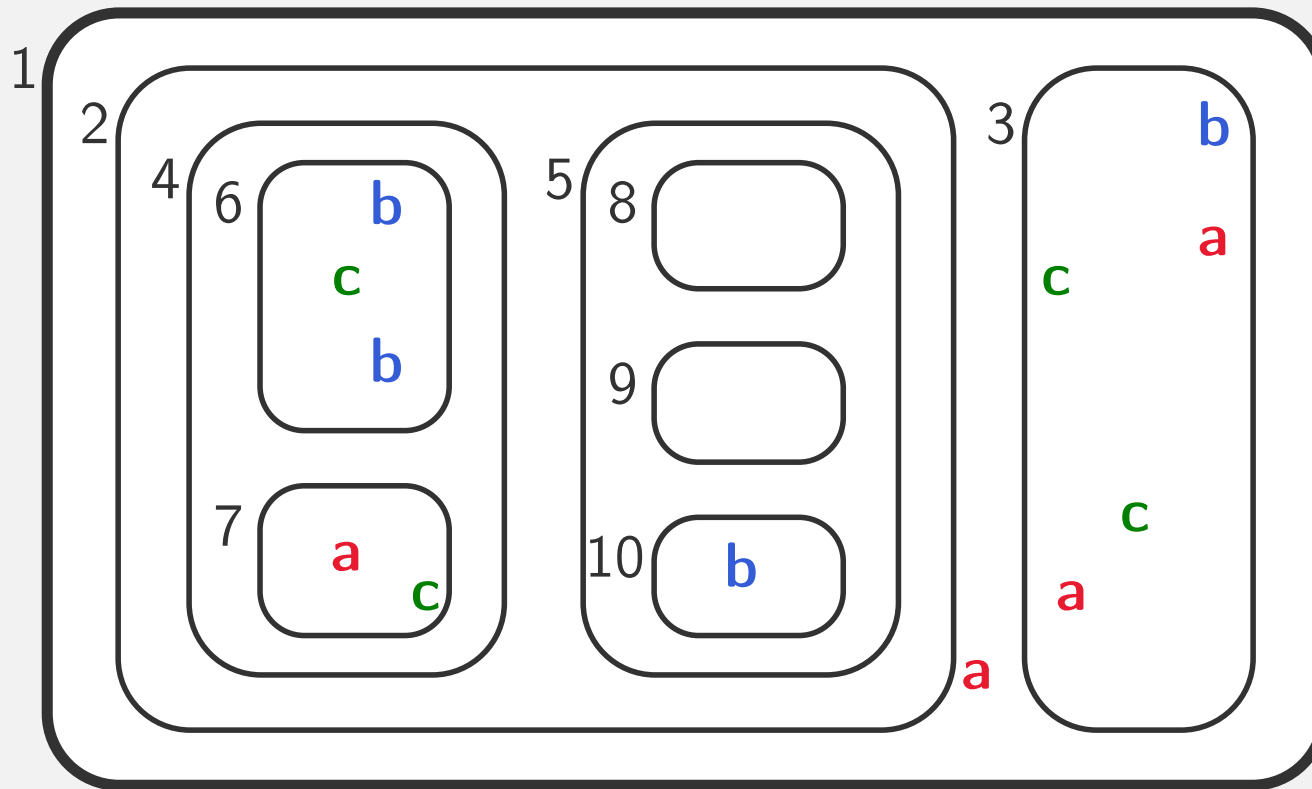
Példa: $b^4c^2 \subseteq a^3b^5c^3$, de $a^2b \not\subseteq ab^7c^3$.

$b^4c^2 \cup a^3b^5c^3 = a^3b^9c^5$.

$a^3b^5c^3 - b^4c^2 = a^3bc$, viszont $ab^7c^3 - a^2b$ nem értelmezett.

A membránrendszerek konfigurációi

Az egyes régiók objektumok multihalmazait tartalmazhatják.



Az ábrához tartozó konfiguráció:

$[_1 \text{ a } [_2 [_4 [_6 \text{ b b c }]_6 [_7 \text{ a c }]_7]_4 [_5 [_8]_8 [_9]_9 [_{10} \text{ b }]_{10}]_5]_2 [_3 \text{ a a b c c }]_3]_1$.

Alternatív reprezentáció: $(a, \varepsilon, a^2 b c^2, \varepsilon, \varepsilon, b^2 c, a c, \varepsilon, \varepsilon, b)$, ahol az i . komponens az i . membrán által határolt régió tartalma.

Evolúciós szabályok alkalmazása

Legyenek $\{1, \dots, m\}$ a régiók címkéi. Minden régióhoz tartoznak $u \rightarrow v$ alakú **evolúciós szabályok**, ahol $u \in O^+$ és $v \in (O \times \text{TAR})^*$, ahol $\text{TAR} = \{\text{here}, \text{out}\} \cup \{\text{in}_j \mid 1 \leq j \leq m\}$.

Egy $u \rightarrow v$ evolúciós szabályt akkor lehet alkalmazni, ha az u által reprezentált M_1 multihalmazra és a régió aktuális, M multihalmazzal adott tartalmára $M_1 \subseteq M$ teljesül. A szabály alkalmazása a következőt jelenti:

- ▶ Vegyük azt a konfigurációt, melyre a szabály régiójának tartalma $M - M_1$, a többi régió tartalma változatlan.
- ▶ v minden $(a, \text{tar}) \in O \times \text{TAR}$ betűjére adjuk egy a -t
 - $\text{tar} = \text{here}$ esetén a régióhoz,
 - $\text{tar} = \text{out}$ esetén a szülő régióhoz (ha gyökér: környezethez),
 - $\text{tar} = \text{in}_j$ esetén a j címkéjű gyerek régióhoz.

Előfordulhat, hogy in-nek nincs indexe, ilyenkor nemdeterminisztikusan választunk egy gyereket.

Evolúciós szabályok konfliktusai

Észrevétel: A környezetnek nincsenek szabályai, így a környezetbe kijutó objektumok a további számítások számára elvesznek.

Észrevétel: a szabályok párhuzamos alkalmazása csak akkor okozhat konfliktust, ha mindkét szabály ugyanahhoz a régióhoz tartozik és a szabályok baloldalának együttes kielégítéséhez nincs elég nyersanyag.

A maximális párhuzamosság elve:

Motiváció: ha egy kémiai reakció számára minden nyersanyag és környezeti feltétel adott, akkor az a reakció végbe is megy.

Membránrendszerekben a szabályokat mindig **maximális párhuzamossággal** kell alkalmazni, ez azt jelenti, hogy az egy ütemben végrehajtott szabályok multihalmaza egy tartalmazásra nézve maximális halmaz kell legyen, tehát ne legyen hozzáadható a végrehajtott szabályokhoz olyan további szabály, hogy ez a bővebb szabályhalmaz is konfliktusmentesen végrehajtható lett volna.

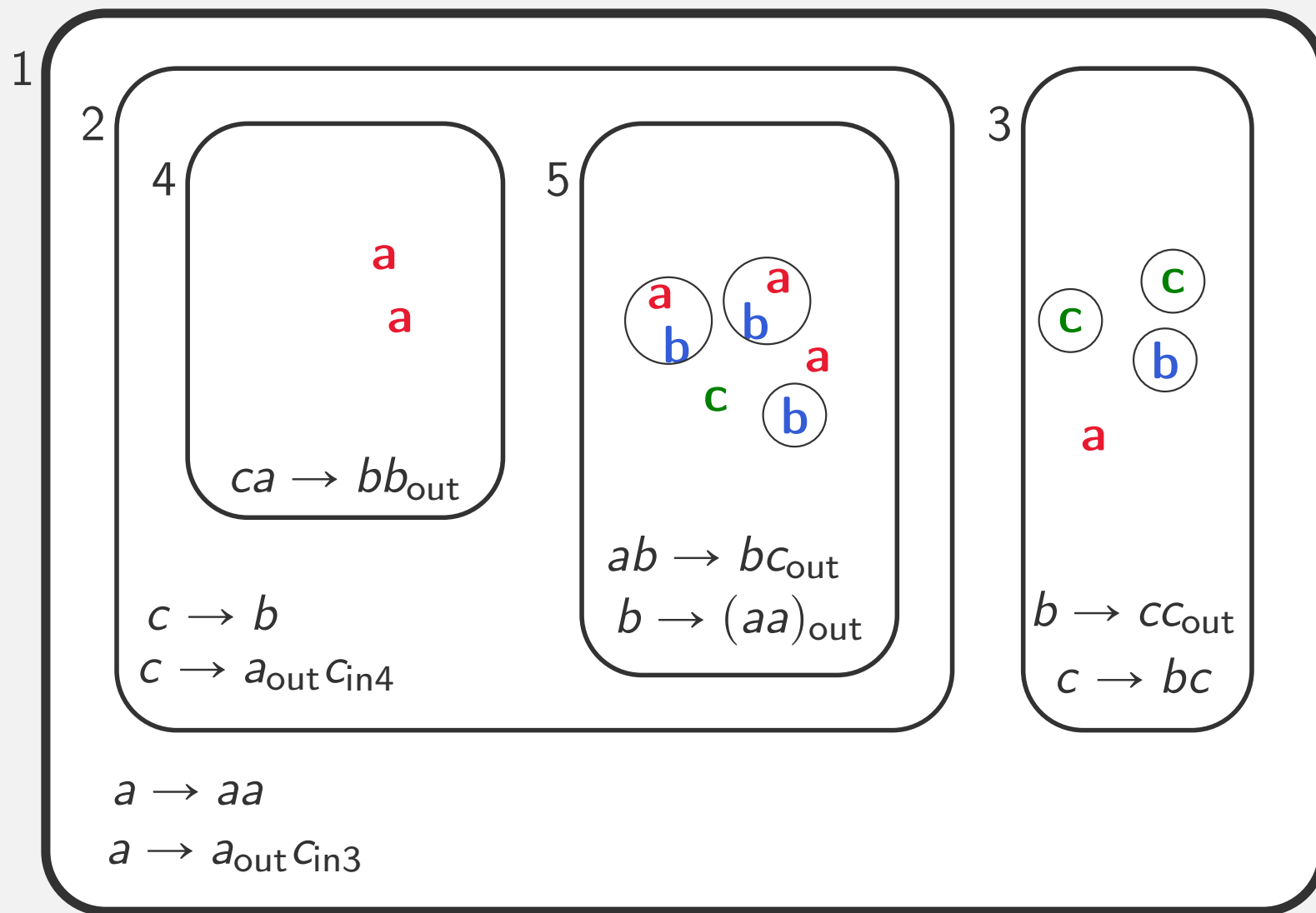
A maximális párhuzamosság elve

Az evolúció egy lépése alatt azt értjük, hogy minden régióban nemdeterminisztikusan kiválasztjuk az adott régióhoz tartozó szabályok egy olyan multihalmazát, hogy a szabálybaloldalak által reprezentált M_1, \dots, M_r multihalmazokra és a régió aktuális M multihalmazzal adott tartalmára a következő két feltétel teljesül:

- (1) $\bigcup_{i=1}^r M_i \subseteq M$, (azaz a kiválasztott szabálymultihalmaz baloldalainak együttes nyersanyagigénye kielégíthető)
- (2) ha M' a régió egy tetszőleges további szabályának baloldala által reprezentált multihalmaz, akkor $M' \not\subseteq M - \bigcup_{i=1}^r M_i$.
(Azaz a kiválasztott szabályokon felül további szabály nyersanyagigénye már nem elégíthető ki a régióból)

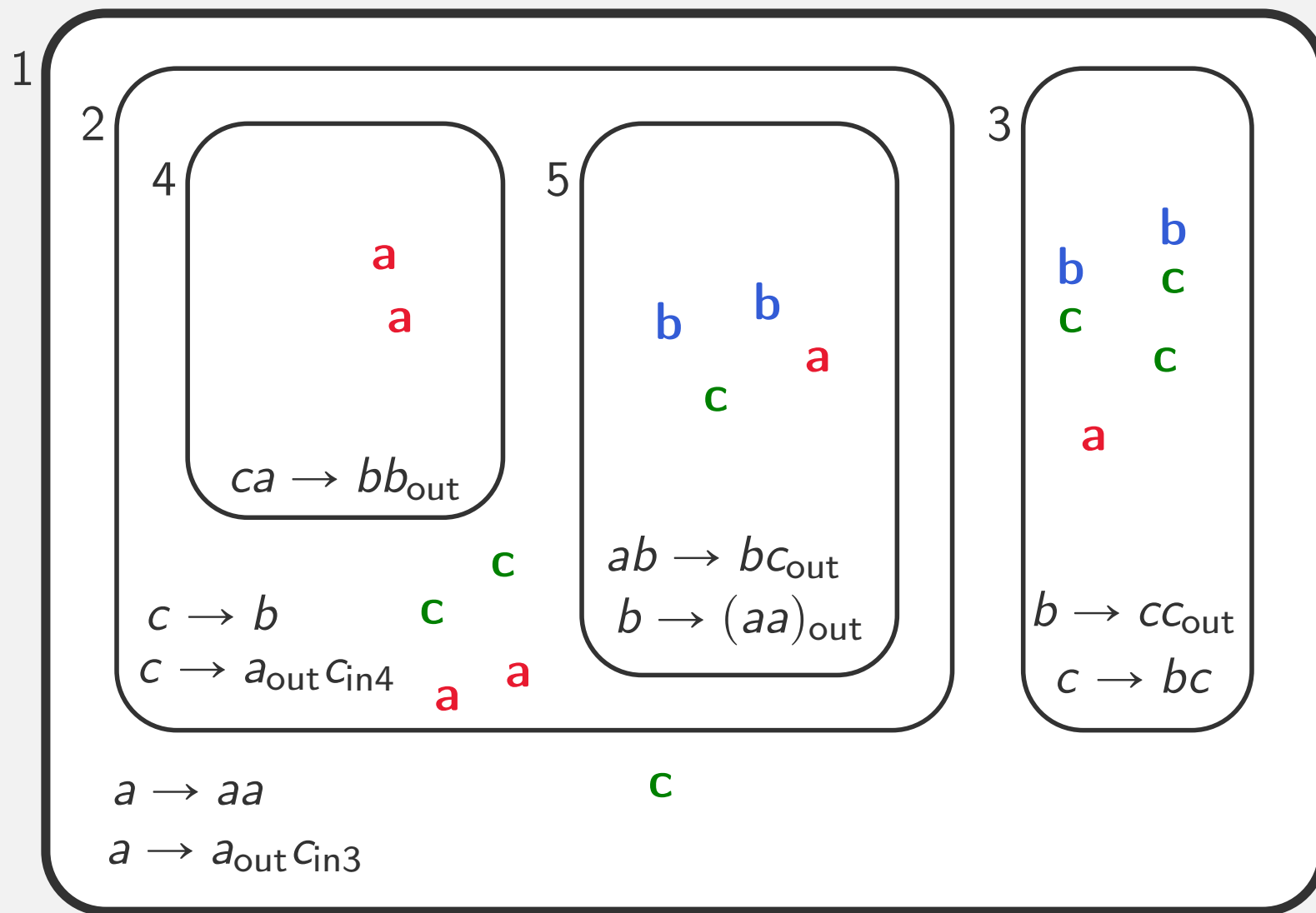
Ezek után minden kiválasztott szabály baloldalát kivonjuk a szabályhoz tartozó régióból, majd a szabályok jobboldalán szereplő objektumokat a szabályok utasítása szerinti régiókhoz hozzáadjuk.

Konfigurációátmenet – példa



$(\varepsilon, \varepsilon, abc^2, a^2, a^3b^3c)$

Konfigurációátmenet – példa



$$(\varepsilon, \varepsilon, abc^2, a^2, a^3b^3c) \Rightarrow (c, a^2c^2, ab^2c^3, a^2, ab^2c)$$

P-rendszer (membránrendszer – alapmodell)

Definíció

Egy $\Pi = \langle O, \mu, \omega_1, \dots, \omega_m, R_1, \dots, R_m, i_o \rangle$ rendezett $(2m + 3)$ -ast **P-rendszernek** (membránrendszernek) nevezünk, ha

- ▶ O egy ábécé (elemeit **objektumoknak** nevezzük).
- ▶ μ egy m membránból álló hierarchikus membránstruktúra. A membránok (és így a régiók is) $\{1, 2, \dots, m\}$ elemeivel injektív módon vannak címkézve. m -et Π **fokának** nevezzük.
- ▶ $\omega_1, \dots, \omega_m$ O feletti multihalmazokat reprezentáló sztringek, ezek rendre az $1, 2, \dots, m$ címkéjű régióhoz vannak rendelve.
- ▶ $R_i, 1 \leq i \leq m$ μ i -edik membránjához rendelt O feletti **evolúciós szabályok** véges halmaza. A szabályok $u \rightarrow v$ alakúak, $u \in O^+$, $v \in (O \times \text{TAR})^*$, ahol $\text{TAR} = \{\text{here}, \text{out}\} \cup \{\text{in}_j \mid 1 \leq j \leq m\}$.
- ▶ $i_o \in \{1, 2, \dots, m\}$ egy elemi membrán címkéje (**kimeneti membrán**)

A P-rendszer konfigurációi

$C = (v_1, \dots, v_m)$ a $\Pi = \langle O, \mu, \omega_1, \dots, \omega_m, R_1, \dots, R_m, i_o \rangle$

P-rendszer **konfigurációja**, ha $v_i \in O^*$ és v_i az i -edik régióban lévő objektum-multihalmaz sztring reprezentációja.

C **kezdőkonfiguráció**, ha $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén $v_i = \omega_i$. (Az i -edik régió kezdeti tartalma az ω_i által reprezentált multihalmaz.)

Megállási konfiguráció: Olyan konfiguráció, melyre nem lehet már evolúciós szabályt alkalmazni.

(Egylépéses) **konfigurációátmenet:** $C_1 \Rightarrow_{\Pi} C_2$, ha C_1 -ből egy ütemben megkapható C_2 a korábban definiált maximális párhuzamos evolúciós átírással.

Megjegyzés: Mivel az átírás nemdeterminisztikus, ezért egy C_1 -hez több ilyen C_2 is létezhet.

A többlépéses **konfigurációátmenet** a szokásos módon definiáluk, a \Rightarrow_{Π} reláció \Rightarrow_{Π}^* -al jelölt reflexív tranzitív lezártjaként.

A P-rendszer számításának eredménye

A P-rendszer egy **számítása** alatt egy a kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba történő (többlépéses) konfigurációátmenet-sorozatot értünk.

Ha a P-rendszer megállási konfigurációba kerül a **számítás eredménye** a modell különféle változataiban lehet:

- ▶ a kimeneti régióban a megálláskor jelen lévő objektumok száma (**alapértelmezett**, mi is ezt tekintjük)
- ▶ a kimeneti régióban a megálláskor jelen lévő objektumok vektora. Ha például $O = \{a, b, c\}$ és 2 a , 5 b és 1 c jutott ki, akkor az eredmény $(2, 5, 1)$, míg az előbb 8 lett volna.
- ▶ a rendszert elhagyó objektumok száma
- ▶ a rendszert elhagyó objektumok vektora

A Π által **generált nyelv**: A számítások lehetséges eredményeinek a halmaza. Jelölés: $N(\Pi)$.

Alapértelmezett modellben tehát $N(\Pi) \subseteq \mathbb{N}$.

Szabálytípusok

A szabályok kompaktabb reprezentációi:

Példa: $a^2b \rightarrow (a, \text{in})(a, \text{here})(b, \text{here})(b, \text{here})(a, \text{out})(c, \text{out})$
helyett:

$a^2b \rightarrow ab^2(a, \text{in})(ac, \text{out})$ vagy

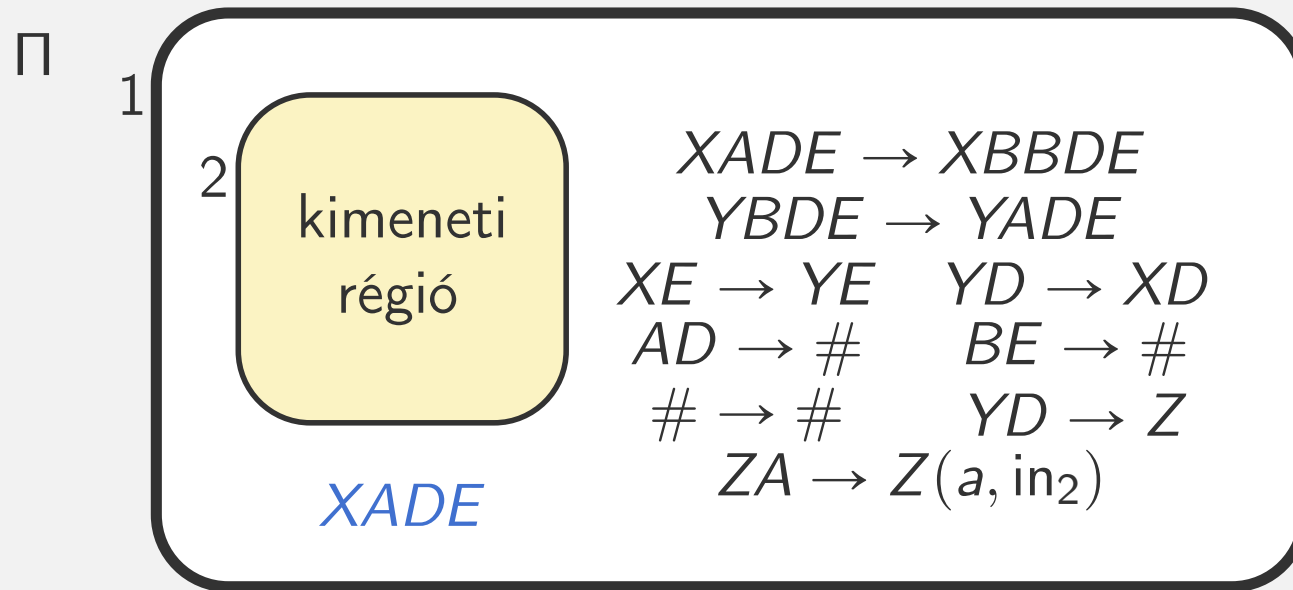
$a^2b \rightarrow ab^2a_{\text{in}}(ac)_{\text{out}}$

Definíció

Egy $u \rightarrow v$ szabály **súlya** alatt $|u|$ -t értjük.

Az 1 súlyú szabályokat **nemkooperatívaknak**, a legalább kettő súlyú szabályokat **kooperatívnak** hívjuk.

A P-rendszer számításának eredménye – példa



A 2-es membrán határolja a kimeneti régiót.

Az A -k megduplázása (kezdetben $m = 1$):

$$(XA^m DE, \varepsilon) \Rightarrow^* (XB^{2m} DE, \varepsilon) \Rightarrow (YB^{2m} DE, \varepsilon) \Rightarrow^* \\ (YA^{2m} DE, \varepsilon) \Rightarrow (XA^{2m} DE, \varepsilon)$$

a -k kiküldése a 2-es régióba:

$$(YA^{2m} DE, \varepsilon) \Rightarrow (ZA^{2m} E, \varepsilon) \Rightarrow^* (ZE, a^{2m}) \text{ (megállási konfiguráció)}$$

Tehát $N(\Pi) \supseteq \{2^n \mid n \geq 0\}$.

A P-rendszer számításának eredménye – példa

$\#$ egy „csapdajel”. Mivel $\#$ baloldalon egyedül a $\# \rightarrow \#$ szabályban szerepel, ezért $\#$ -et ha egyszer behozzuk nem tudunk tőle megszabadulni, ráadásul a $\# \rightarrow \#$ szabály végtelen ciklusba küldi a membránrendszert, ilyen számítás nem eredményezhet $N(\Pi)$ -beli szót.

Ha az $XA^mDE \rightarrow XB^{2^m}DE$ -re való átírásánál az $XE \rightarrow YE$ szabályt még A jelenléténekél alkalmaznánk, akkor a maximális párhuzamosság elve és az $AD \rightarrow \#$ szabály miatt keletkezne $\#$ objektum.

Ha az $YB^{2^m}DE \rightarrow YA^{2^m}DE$ -re való átírásánál az $YD \rightarrow Z$ szabályt még B jelenléténekél alkalmaznánk, akkor a maximális párhuzamosság elve és a $BE \rightarrow \#$ szabály miatt keletkezne $\#$ objektum.

Tehát csak teljes duplázási ütemek után tudjuk az a -kat úgy a 2-es membránba küldeni, hogy véget is érjen a számítás. Így $N(\Pi) \subseteq \{2^n \mid n \geq 0\}$, azaz Π a 2-hatványokat generálja.

Katalitikus P-rendszerek

Definíció

$\Pi = \langle O, K, \mu, \omega_1, \dots, \omega_m, R_1, \dots, R_m, i_o \rangle$ katalitikus P-rendszer ha

- ▶ $\emptyset \neq K \subset O$ az ún. *katalizátorok* halmaza
- ▶ $\Pi' := \langle O, \mu, \omega_1, \dots, \omega_m, R_1, \dots, R_m, i_o \rangle$ P-rendszer
- ▶ Π szabályainak alakja
 - (a) vagy $a \rightarrow v$ (*nemkooperatív szabályok*),
 - (b) vagy $ca \rightarrow cv$ (*katalitikus szabályok*),ahol $c \in K, a \in O \setminus K, v \in ((O \setminus K) \times \text{TAR})^*$.

A P-rendszerek számítási ereje

Definíció

$\text{NOP}_m(\alpha) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A = N(\Pi) \text{ valamely } \Pi \text{ } m\text{-edfokú P-rendszerre } \alpha \text{ típusú szabályokkal}\}.$

$\alpha=\text{ncoo}$: minden szabály nemkooperatív,

$\alpha=\text{cat}$: a P-rendszer katalitikus

$\alpha=\text{coo}$: kooperatív szabályok is megengedettek,

$$\text{NOP}_*(\alpha) := \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{NOP}_m(\alpha)$$

A P-rendszerek számítási ereje

Jelölés: Jelölje a NRE, NCS, illetve NCF azon $A \subseteq \mathbb{N}$ számhalmazok osztályát, melyre A rendre RE, CS illetve CF-beli.

Észrevételek:

- ▶ $\text{NOP}_m(\alpha) \subseteq \text{NOP}_{m+1}(\alpha)$, minden $\alpha \in \{\text{coo}, \text{ncoo}, \text{cat}\}$ -ra és $m \geq 1$ -re.
- ▶ $\text{NOP}_m(\text{ncoo}) \subseteq \text{NOP}_m(\text{cat}) \subseteq \text{NOP}_m(\text{coo})$, minden $m \geq 1$ -re.
- ▶ $\text{NOP}_*(\text{ncoo}) \subseteq \text{NOP}_*(\text{cat}) \subseteq \text{NOP}_*(\text{coo})$.
- ▶ $\text{NOP}_*(\text{coo}) \subseteq \text{NRE}$.

A P-rendszerek számítási ereje

Tétel

$\text{NOP}_m(\alpha) = \text{NOP}_*(\alpha)$ minden $\alpha \in \{\text{coo}, \text{ncoo}, \text{cat}\}$ -ra és $m \geq 2$ -re.

Bizonyítás: (vázlat)

Legyen $\Pi = \langle O, \mu, \omega_1, \dots, \omega_m, R_1, \dots, R_m, i_o \rangle$, ahol $R_i = \{r_{i,1}, \dots, r_{i,t_i}\}$ és ha $\alpha = \text{cat}$, akkor K a katalizátorok halmaza.

Konstruálunk egy $\Pi' = \langle O', [1 [i_o] i_o]_1, \omega, \omega_{i_o}, \bigcup_{i=1, i \neq i_o}^m R'_i, R'_{i_o}, i_o \rangle$ 2-fokú P-rendszert (ha $\alpha = \text{cat}$, akkor K' katalizátor halmazzal), melyre $N(\Pi') = N(\Pi)$.

$$O' := O \cup \{a_i \mid a \in O, 1 \leq i \leq m\}$$

$$K' = K \cup \{c_i \mid c \in K, 1 \leq i \leq m\}. \text{ (Katalitikus rendszer esetén.)}$$

$h_i : O^* \rightarrow (O')^*$ homomorfizmus, melyre $h_i(a) := a_i$ ($a \in O, 1 \leq i \leq m$).

$$\omega := h_1(\omega_1) \cdots h_{i_o-1}(\omega_{i_o-1}) \omega_{i_o} h_{i_o+1}(\omega_{i_o+1}) \cdots h_m(\omega_m).$$

A P-rendszerek számítási ereje

$i \neq i_o$ -ra $R'_i = \{r'_{i,j} : h_i(u) \rightarrow v' \mid r_{i,j} : u \rightarrow v \in R_i, 1 \leq j \leq t_i\}$, ahol v' -t úgy kapjuk, hogy minden v -beli

- ▶ (b, here) -t b_i -vel helyettesítünk,
- ▶ (b, out) -ot b_j -vel helyettesítjük, ahol j közvetlenül tartalmazza i -t,
- ▶ (b, in_s) -t b_s -sel helyettesítjük, ha $s \neq i_o$,
- ▶ (b, in_{i_o}) változatlan.

$R'_{i_o} = \{r'_{i_o,j} : u \rightarrow v' \mid r_{i_o,j} : u \rightarrow v \in R_{i_o}, 1 \leq j \leq t_{i_o}\}$, ahol v' -t úgy kapjuk, hogy minden v -beli

- ▶ (b, here) változatlan,
- ▶ (b, out) -ot (b_j, out) -tal helyettesítjük, ahol j i_o szülő membránja.

Meggondolható, hogy $N(\Pi') = N(\Pi)$ és nemkooperatív rendszer képe nemkooperatív, katalitikus képe katalitikus.

A P-rendszerek számítási ereje

Tétel

$\text{NOP}_*(\text{ncoo}) = \text{NOP}_m(\text{ncoo}) = \text{NCF}$, minden $m \geq 1$ -re.

Tétel

$\text{NOP}_*(\text{coo}) = \text{NOP}_m(\text{coo}) = \text{NRE}$, minden $m \geq 1$ -re.

(Bizonyítások nélkül.)

Feloldódás

Megengedünk a szabályok között $u \rightarrow v\delta$ alakú szabályokat, ahol $u \rightarrow v$ evolúciós szabály és δ egy speciális szimbólum. Egy evolúciós lépés két részből áll. Először az esetleges δ -kat nem figyelembe véve a szokásos evolúciós lépés (a kiválasztott szabályokkal és objektumokkal) végrehajtódik. Ezután, ha egy vagy több alkalmazott szabályban szerepel a δ , akkor ezen szabályokhoz tartozó membránok feloldódnak. Ilyenkor a határolt régió tartalma (**objektumok és membránok igen, a szabályok nem!**) a membránt közvetlenül tartalmazó (szülő) régióba kerül.

Ilyenkor i_o nem feltétlenül kell elemi membrán legyen.
A külső membrán (skin) sosem oldódhat fel.

A konfigurációk első komponense legyen az aktuális membránstruktúra (mivel ez változhat). Példa: $([{}_1[{}_4]_4]_1, a^2b, ca)$

Alternatív jelölés: maradjon az eredeti rendezett m -es, ahol m a P-rendszer foka. Az eredeti membránstruktúra hiányzó membránjai helyére írjunk egy speciális szimbólumot, például δ -t.

Feloldásos P-rendszerek számítási ereje

Jelölje $\text{NOP}_m(\alpha, \delta)$ a természetes számok halmazainak családját, amelyeket egy legfeljebb m -edfokú ($m \geq 1$) feloldással kiegészített P-rendszer generál, $\alpha \in \{coo, cat, ncoo\}$ típusú szabályokat használva.

A feloldással kiegészített P-rendszernek megnő a számítási ereje a nemkooperatív esetben.

Tétel

$$\text{NCF} = \text{NOP}_*(ncoo) \subset \text{NOP}_2(ncoo, \delta) \subseteq \text{NOP}_*(ncoo, \delta) \subset \text{NCS}.$$

(Bizonyítás nélkül.)

P-rendszer prioritással

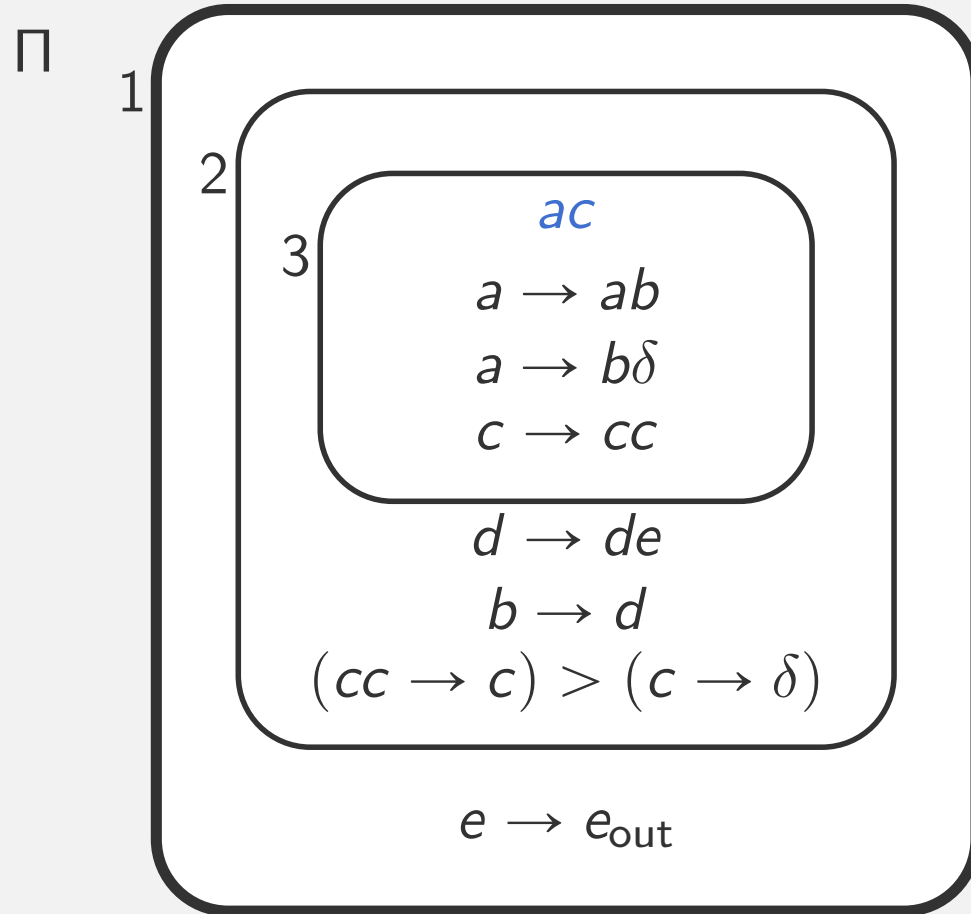
Definíció

$\Pi = \langle O, \mu, \omega_1, \dots, \omega_m, (R_1, \varrho_1), \dots, (R_m, \varrho_m), i_o \rangle$ egy **P-rendszer prioritással**, ha $\langle O, \mu, \omega_1, \dots, \omega_m, R_1, \dots, R_m, i_o \rangle$ P-rendszer és ϱ_i részbenrendezés R_i -n ($1 \leq i \leq m$).

Megjegyzés: Mivel az egyes részbenrendezéseknek nincs egymásra közvetlen hatása, használhatjuk a közös $<$ jelet. Azaz $(r_1, r_2) \in \varrho_i$, helyett írhatunk $r_1 < r_2$ -t.

A szabályok alkalmazása: Ha $r_1 < r_2$ akkor az r_1 szabály csak abban az esetben alkalmazható, ha r_2 már nem. (Egy objektumot csak akkor lehet az r_1 szabályhoz rendelni, ha r_2 -höz már nem.)

P-rendszer feloldódással és prioritással– példa



Négyzetszámokat
a környezetbe
generáló P-rendszer
 $N(\Pi) = \{n^2 \mid n \geq 1\}$

$(\varepsilon, \varepsilon, ac) \Rightarrow (\varepsilon, \varepsilon, abc^2) \Rightarrow (\varepsilon, b^2c^4, \delta) \Rightarrow (\varepsilon, d^2c^2, \delta) \Rightarrow$
 $(\varepsilon, d^2e^2c, \delta) \Rightarrow (d^2e^4, \delta, \delta) \Rightarrow (d^2, \delta, \delta)$, környezetbe: 4 objektum.

$(\varepsilon, \varepsilon, ac) \Rightarrow (\varepsilon, \varepsilon, abc^2) \Rightarrow (\varepsilon, \varepsilon, ab^2c^4) \Rightarrow (\varepsilon, b^3c^8, \delta) \Rightarrow$
 $(\varepsilon, d^3c^4, \delta) \Rightarrow (\varepsilon, d^3e^3c^2, \delta) \Rightarrow (\varepsilon, d^3e^6c, \delta) \Rightarrow (d^3e^9, \delta, \delta) \Rightarrow$
 (d^3, δ, δ) , környezetbe: 9 objektum.

Prioritásos P-rendszerek számítási ereje

Jelölje $\text{NOP}_m(\alpha, \text{pri})$ a természetes számok halmazainak családját, amelyeket egy legfeljebb m -edfokú ($m \geq 1$) prioritással kiegészített P-rendszer generál, $\alpha \in \{\text{coo}, \text{cat}, \text{ncoo}\}$ típusú szabályokat használva.

Ha a prioritásos szabályok mellett feloldódás is megengedett, akkor $\text{NOP}_m(\alpha, \delta, \text{pri})$ jelöli az ilyen P-rendszerekkel generálható természetes szám halmazok családját.

Tétel

$$\text{NOP}_2(\text{cat}, \text{pri}) = \text{NRE}.$$

(Bizonyítás nélkül.)