Pénzérmés játék

Két személyes játék, pénzérmék vannak egy sorban:

$$\begin{array}{cccc} O & O \; \cdots\cdots & O & O \\ v_1 & v_2 & & v_{2n} \end{array}$$

Két játékos felváltva vesz el egy-egy érmét a sor valamelyik végéről. Az nyer akinél nagyobb összértékű érmék vannak.

- Kinek van nyerő (nem vesztő) stratégiája?
- A nyerő stratégiával rendelkező játékos nyereménye mennyi lehet max.?

(Feltéve, hogy az ellenfél is optimálisan játszik a saját szempontjából)

A kezdő játékosnak van nyerő (nem vesztő) stratégiája, kényszeríteni tudja a másik játékost, hogy

(A) mindig páros indexű érmét vegyen el

(B) mindig páratlan —||— ——

$$v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}$$

→ v_1-et elvéve először mindkét oldalon páros indexű érme marad és ez fenntartható végig

→ v_{2n}-et elvéve először mindkét oldalon páratlan indexű érme marad, és ez fenntartható végig

→ a kezdő az elején összehasonlítja $v_1 + v_3 + \dots + v_{2n-1}$ és $v_2 + v_4 + \dots + v_{2n}$ összegeket és ez alapján „irányítja" az ellenfelet

DP. m.o.

— rész problémák, optimális m.o. részszerkezete

- $R[i,j]$ legyen a $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ érmesorozat esetén a kezdő optimális stratégiájának meghatározása, ahol az érmék száma $j-i+1$ páros
- jelölje $M[i,j]$ az $R[i,j]$ optimális megoldásában a kezdő nyereményét
  - → ha $j=i+1$, akkor $M[i,j] = \max\{v_i, v_j\}$
  - → ha $j \geq i+3$, akkor a kezdő játékosnak 2 választása van
  - (A) elveszi v_i-t, ekkor a második elveszi v_{i+1}-et vagy v_j-t
    - ha v_{i+1}-et veszi le, akkor a kezdő nyereménye $v_i + M[i+2, j]$
    - ha v_j-t veszi le — " — $v_i + M[i+1, j-1]$,

A második azt választja, amivel kisebb a kezdő nyereménye.

(B) A kezdő elveszi v_j-t, akkor a második elveheti v_i-t vagy v_{j-1}-et

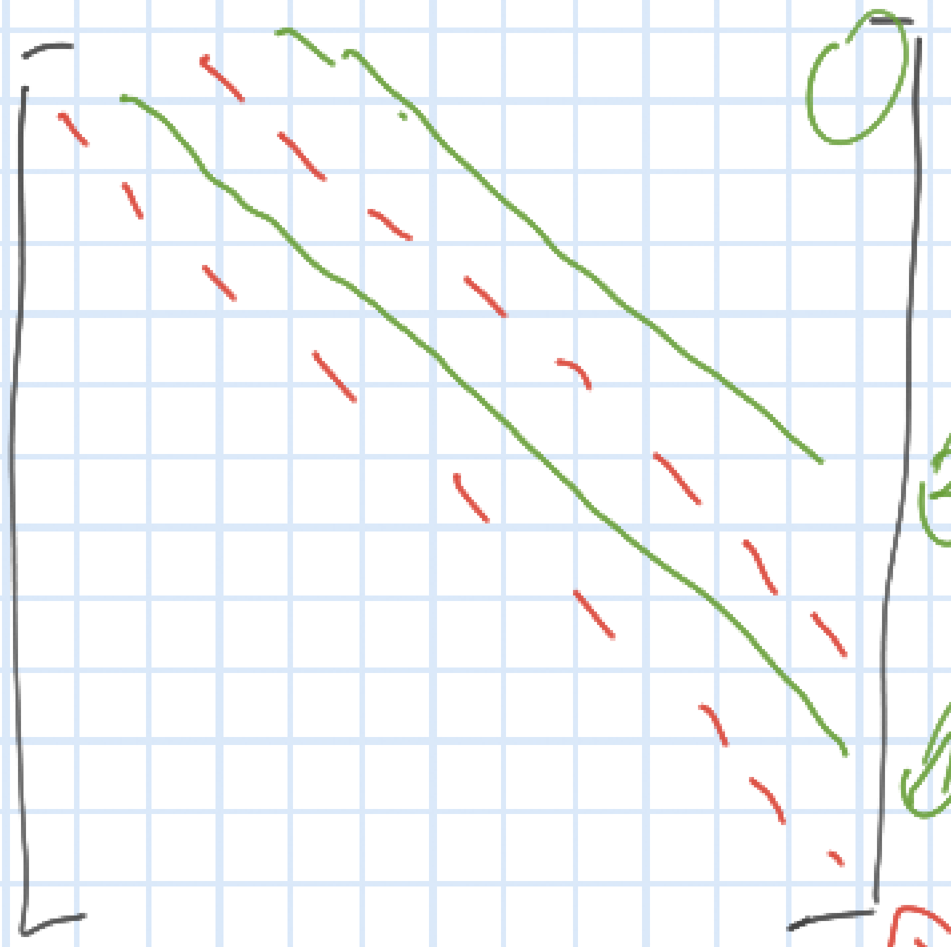
— ha v_i-t veszi el, akkor a kezdő nyereménye $v_j + M[i+1, j-1]$

— ha v_{j-1}-et veszi el, akkor —"— $v_j + M[i, j-2]$

Ezek alapján a kezdő dönt (A) és (B) között, úgy, hogy a kedvezőtlenebb válaszlépéssel is a legtöbbet nyerje

$$M[i,j] = \max \begin{cases} \min \begin{cases} v_i + M[i+2, j] \\ v_i + M[i+1, j-1] \end{cases} & \text{// A eset} \\ \min \begin{cases} v_j + M[i+1, j-1] \\ v_j + M[i, j-2] \end{cases} & \text{// B eset} \end{cases}$$

$M =$



0 ← max nyeremény értéke

2 $j = i+2$

1 $j = i+1$

a főátlót nem töltjük ki.

- Egy optimális megoldás: $M[i,j]$ számítása során feljegyezzük, hogy a bal vagy jobb oldalról kellett-e a pénzérmét elvenni.
- Költség: $O(n^2)$ cella, 1 cella $O(1)$ $\Rightarrow O(n^2)$

Visszajáró pénz

Adott pénzmennyiséget kell kifizetni a lehető legkevesebb érme felhasználásával. Adott címletű érmékből tetszőleges sok áll rendelkezésünkre.

Feladat: tervezzünk mohó algoritmust, amely megoldja a problémát abban az esetben, amikor a felhasználható érmék: 1, 5, 10, 25 címletűek!

Algoritmus

- Legyen a kifizetendő mennyiség: $\boxed{n}$
  - 25-ös címletű érmék száma: $[n/25]$
    → kifizetendő ezután: $n' = n - 25[n/25]$
  - 10-es címletű érmék száma: $[n'/10]$
    → kifizetendő ezután: $n'' = n' - 10[n'/10]$
  - 5-ös címletű érmék száma: $[n''/5]$
    → kifizetendő ezután: $n''' = n'' - 5[n''/5]$
  - 1-es címletű érmék száma: n'''

— Másképp fogalmazva: kifizetendő mennyiség $\boxed{n}$

- ha $n=0 \Rightarrow$ az optimális m.o. 0 érméből áll
- ha $n>0 \Rightarrow$ keressük meg azt a legnagyobb $\boxed{c}$ címletet, amely kisebb vagy egyenlő, mint n
  → adjunk ki egy c címletű érmét, majd rekurzívan oldjuk meg azt a problémát, amikor a kifizetendő mennyiség $n-c$

Helyesség

(1)

- tekintsünk egy legkevesebb érmét felhasználó megoldást arra a feladatra, amikor a kifizetendő mennyiség $\boxed{n}$
- legyen a megoldásban használt érmék száma $\boxed{s}$
- ha elhagyunk egy $\boxed{c}$ címletű érmét, akkor a maradék $s-1$ db érme optimális megoldása annak a feladatnak, amikor a kifizetendő mennyiség $n-c$

  ↳ ha ez az $n-c$ mennyiség kifizethető lenne kevesebb, mint $s-1$ érmével, akkor ezt kiegészítve az elhagyott c címletű érmével is kevesebb, mint $s-1$ érmével kifizethető ↯

(2) Megmutatjuk, hogy ha a kifizetendő pénzmennyiség $\boxed{n}$ és a címletek közül $\boxed{c}$ a legnagyobb olyan, amelyre $c \leq n$, akkor az adott pénzmennyiség kifizethető a lehető legkevesebb számú érmével úgy is, hogy az érmék között van c címletű

Tekintsük a feladat egy optimális megoldását, ha ebben szerepel c, akkor OK, ezért t.f.h. nincs. 4 eset lehetséges

→ ha $1 \leq n < 5 \Rightarrow c = 1$, ha feltételünk szerint az optimális megoldás nem tartalmaz 1-es címletű érmét, az lehetetlen

→ ha $5 \leq n < 10 \Rightarrow c = 5$, ha feltételünk szerint az opt. m.o. nem tartalmaz 5-ös címletű érmét, akkor csak 1-es lehet, de pl.: 5db 1-est 1db 5-ösre cserélve kevesebb érméből álló megoldást kapunk ↯

→ ha $10 \leq n < 25 \Rightarrow c = 10$, akkor az opt. m.o. a feltételünk szerint nem tartalmaz 10-es érmét. Ekkor az 1-es és 5-ös címletű érmék között vannak olyanok, amelyek összege 10
$\Rightarrow$ ezeket egy 10-es címletű érmére cserélve kevesebb érméből álló megoldást kapunk ↯

→ ha $n \geq 25$ és az opt. m.o. nem tartalmaz 25-ös érmét

- ha tartalmaz 3db 10-es érmét, akkor ezeket 1db 25-ösre és 1db 5-ösre cserélve kevesebb érméből álló megoldást kapunk
- ha legfeljebb 2 db 10-es címletű érmét tartalmaz, akkor 1-es 5-ös és 10-es címletű érmék között vannak olyanok, amelyek összege 25, ezeket 1db 25-ös érmére cserélve egy kevesebb érméből álló megoldást kapunk ↯

(1) és (2) állításokat felhasználva a következő adódik.

Költség

- első változat: $O(1)$
- második változat: $O(k)$, k a ki fizetendő szükséges érmék minimális száma, de $k \leq n$ $\Rightarrow T(n) = O(n)$