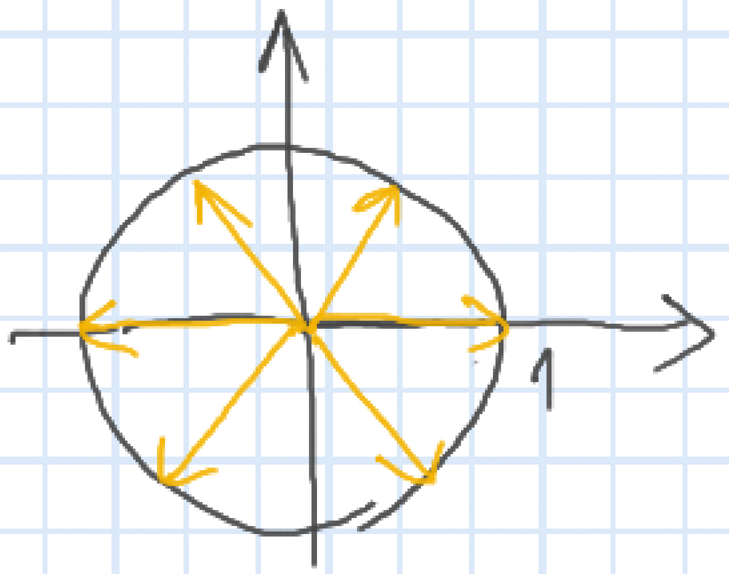
2021 október 5.

## Polinomok gyors szorzása

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $n$ kettőhatvány

A $2n$-edik komplex egységgyökök: $x^{2n} - 1 = 0$ polinom gyökei




komplex számsík

6. komplex egységgyökök → 6 db

2n-edik komplex egységgyökök

$$\omega_{j,2n} = e^{2\pi i j/2n} \qquad j = 1, 2, \dots, 2n$$

( exponenciális alak )

Algoritmus (ismét)

① kiértékeljük az $A(x)$ és $B(x)$ polinomokat a $2n$-edik komplex egységgyökökön

(2) Kiszámoljuk a $C(x) = A(x)B(x)$ szorzat helyettesítési értékeit a $2n$-edik komplex egységgyökökön (ez könnyű)

(3) Meghatározzuk $C(x)$ együtthatóit a $2n$-edik komplex egységgyökökön vett helyettesítési értékeiből (gyors Fourier transzformált)

1. Oszd meg és uralkodj módon számolunk

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$A(x)$ felírható

$$A(x) = A_{ps}(x^2) + x A_{ptl}(x^2)$$

alakban ahol

$$A_{ps}(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \dots + a_{n-2} x^{(n-2)/2}$$

$$A_{ptl}(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{(n-2)/2}$$

A 2n-edik komplex egységgyökökön most

$$A(\omega_{j,2n}) = A_{ps}(\omega_{j,2n}^2) + \omega_{j,2n} A_{ptl}(\omega_{j,2n}^2)$$

$$(1 \le j \le 2n)$$

De $\omega_{j,2n}^2 = \left(e^{2\pi i j/2n}\right)^2 = e^{2\pi i j/n}$ egy n-edik komplex egységgyök, így az $(n-1)$-edfokú $A(x)$ polinom helyettesítési értékei-nek kiszámítását a 2n-edik komplex egységgyökökön visszavezettük két feladatra fokszámú polinom helyettesítési értékeinek kiszámítására az $n$-edik komplex egység-gyökökön.

Ha $T(n)$ jelöli az $A(x)$-re vonatkozó számítás költségét, akkor

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

$$\Rightarrow \quad T(n) = O(n \log n)$$

$B(x)$ számítása ugyanígy

2. ez $O(n)$ költség

3. $C(x)$ együtthatóit számoljuk ki a $2n$-edik komplex egységgyökökön vett helyettesítési értékekből.

(ezek egyértelműen meghatározzák $C(x)$-et)

## Gyors Fourier transzformált

Egy legfeljebb $(2n-1)$-edfokú

$$C(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{2n-1} x^{2n-1}$$

polinom együtthatóinak meghatározása a $C(\omega_{j,2n})$ értékekből $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$

Bevezetünk egy

$$D(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_{2n-1} x^{2n-1}$$

polinomot, ahol $d_s = C(\omega_{s,2n})$

$0 \le s \le 2n-1$

Kiszámoljuk $D(x)$ helyettesítési értékeit a $2n$-edik komplex egységgyökökön:

A játék arra megy ki, hogy ezek az értékek éppen a $C(x)$ együtthatóinak a $2n$-szeresei!

$$D(\omega_{j,2n}) = \sum_{s=0}^{2n-1} C(\omega_{s,2n})\, \omega_{j,2n}^{s}$$

$$= \sum_{s=0}^{2n-1} \left( \sum_{t=0}^{2n-1} c_t\, \omega_{s,2n}^{t} \right) \omega_{j,2n}^{s}$$

"kettős összegzésben a sorrend felcserélhető"

$$= \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \left( \sum_{s=0}^{2n-1} \underbrace{\omega_{s,2n}^{t}\, \omega_{j,2n}^{s}} \right) \qquad (H.F.)$$

$$\left(e^{2\pi i s/2n}\right)^t \left(e^{2\pi i j/2n}\right)^s$$

$$e^{2\pi i st/2n} \cdot e^{2\pi i js/2n}$$

$$e^{2\pi i s(t+j)/2n}$$

$$\left(e^{2\pi i (t+j)/2n}\right)^s$$

$$= \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \sum_{s=0}^{2n-1} \omega_{t+j,2n}^{s}$$

Ez a belső összeg "cseles"

Egy pillanatra $\omega$-ként gondolva $\omega_{t+j,2n}$-re

a belső összeg

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{2n-1}$$

De

$$(\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{2n-1}) = \omega^{2n} - 1$$

Itt a jobb oldal 0, hiszen $\omega$ egy $2n$-edik komplex egységgyök

Így a bal oldal is 0. Azonban $\omega - 1$ csak $\omega = 1$ esetén 0, ezért minden más $2n$-edik komplex egységgyökre

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{2n-1} = 0$$

Ennélfogva

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{2n-1} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega \neq 1 \\ 2n & \text{ha } \omega = 1 \end{cases}$$

Így a $D(\omega_{j,2n})$ formulában

$$\sum_{s=0}^{2n-1} \omega_{t+j,2n}^{s} = \begin{cases} 0 & \text{minden más esetben} \\ 2n & \text{ha } \omega_{t+j,2n} = 1 \end{cases}$$

Mikor lesz $\omega_{t+j,2n} = 1$ ? Nyilván ha $t+j$ többszöröse $2n$-nek, vagyis $t = 2n-j$

Így

$$D(\omega_{j,2n}) = \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \left( \sum_{s=0}^{2n-1} \omega_{t+j,2n}^{s} \right) = 2n\, c_{2n-j}$$

következésképpen $\quad c_{2n-j} = \frac{1}{2n} D(\omega_{j,2n})$

Így $C(x)$ együtthatói megkaphatók $D(x)$ helyettesítési értékeiből a $2n$-edik komplex egységgyökökön.

Ezek a helyettesítési értékek ① -ben leírt módon $O(n \log n)$ költséggel számolhatók

<u>Összköltség</u>: $O(n \log n)$

# Dinamikus programozás

általános algoritmustervezési módszer

→ optimalizálási feladatok megoldására elsősorban

emlékeztet az oszd meg és uralkodj módszerre

→ az eredeti feladatot részproblémákra bontjuk és a részproblémák optimális megoldásaiból kombinálják össze az eredeti feladat optimális megoldását

Két különbség

A Oszd meg és uralkodj módszer

→ felülről lefelé rekurzívan

Dinamikus programozás

→ alulról felfelé

(B) oszd meg és uralkodj
→ független részproblémák

dinamikus programozás
→ átfedő részproblémák

## Dinamikus programozás

alulról felfelé "építjük fel" a megoldást
először az egyszerűbbet oldjuk meg, majd
ezek felhasználásával a bonyolultabbakat,

és így tovább

"Programozás"

→ táblázatban jegyezzük fel a részproblémák megoldását, innen olvassuk ki ha újra találkozunk valamelyikkel.

Két hét múlva ZH → Bolyai → Mindenki