# Задача 7.1

In [1]:

```
%matplotlib inline
import scipy.stats as st
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import statsmodels.api as sm
```

Определим изначальные параметры для выборок и уровень доверия $\alpha$

In [2]:

```
theta = 10
par = (10,3)
alpha = 0.95
size = 100
```

# Равномерное распределение

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка из равномерного распределения $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Построим доверительный интервал уровня доверия $\alpha$

# Используя статистику $X$

Доверительный интервал $\theta \in \left( \frac{2X}{1+\epsilon}, \frac{2X}{1-\epsilon} \right)$ где $\epsilon = \sqrt{\frac{1}{3n(1-\alpha)}}$

In [3]:

```
def ConfidenceFunc1(x, alpha, mode):
    result = np.zeros(len(x)+1)
    for i in range(1, len(x)+1):
        if mode == "up":
            a = 2*np.mean(x[:i])
            b = (1 - np.sqrt(1/(3*len(x[:i]*(1-alpha)))))
            if b!=0:
                result[i] = a/b
        if mode == "down":
            a = 2*np.mean(x[:i])
            b = (1 + np.sqrt(1/(3*len(x[:i]*(1-alpha)))))
            if b!=0:
                result[i] = a/b
    return result
```

# Используя статистику $X_{(1)}$

Доверительный интервал $\theta \in \left( X_{(1)}, \frac{X_{(1)}}{1-\sqrt[n]{\alpha}} \right)$

In [4]:

```
def ConfidenceFunc2(x, alpha, mode):
    result = np.zeros(len(x)+1)
    for i in range(1, len(x)+1):
        if mode == "up":
            a = np.min(x[:i])
            b = 1 - (alpha**(1/len(x[:i])))
            if b!=0:
                result[i] = a/b
        if mode == "down":
            result[i] = np.min(x[:i])
    return result
```

## Используя статистику $X_{(n)}$

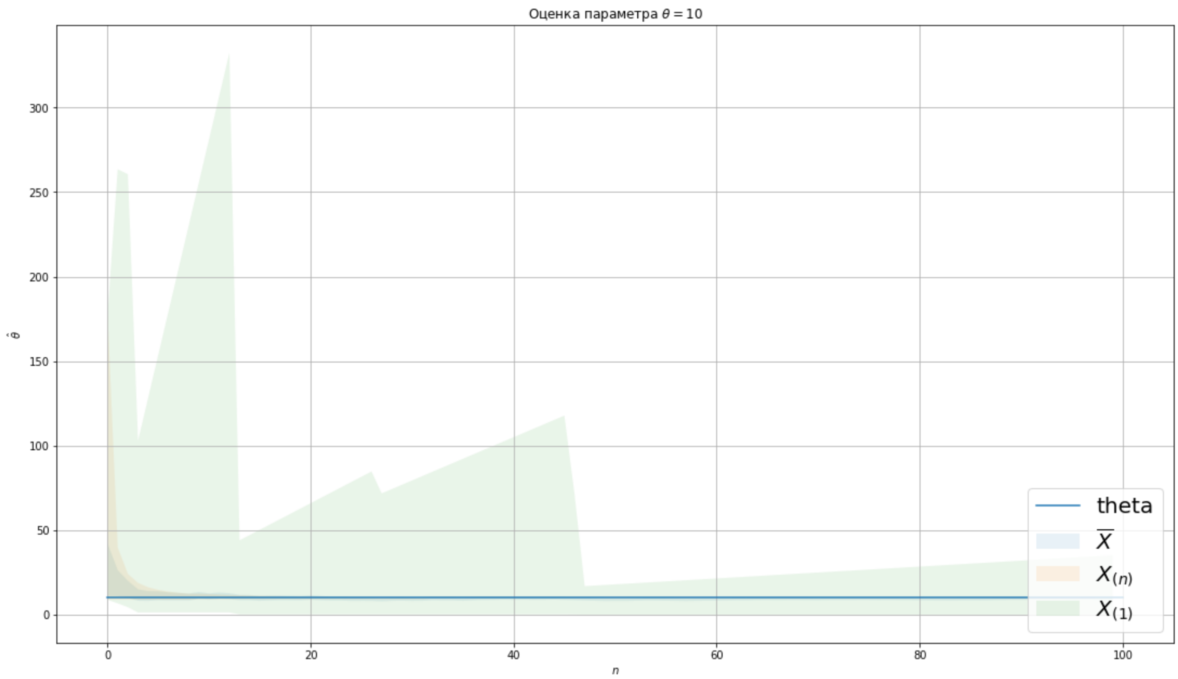
Доверительный интервал $\theta \in \left( X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \right)$

In [5]:

```
def ConfidenceFunc3(x, alpha, mode):
    result = np.zeros(len(x)+1)
    for i in range(1, len(x)+1):
        if mode == "up":
            a = np.max(x[:i])
            b =  ((1-alpha)**(1/len(x[:i])))
            if b!=0:
                result[i] = a/b
        if mode == "down":
            result[i] = np.max(x[:i])
    return result
```

In [6]:

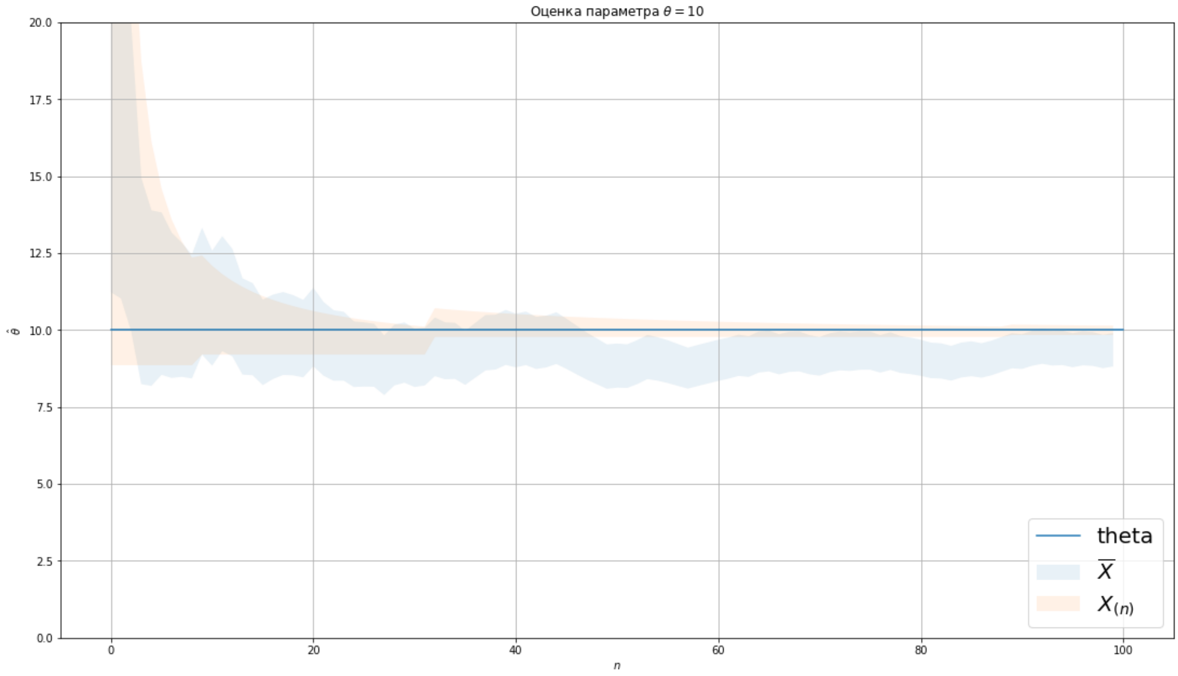
```
a = np.zeros(size)
sample = st.uniform.rvs(loc=0, scale=theta,size = size)

plt.plot(np.arange(size+1), theta*np.ones(size+1), label = r'theta')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFunc1(sample, alpha, "up")[1:], ConfidenceFunc1
                 label = r'$\overline{X}$')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFunc3(sample, alpha, "up")[1:], ConfidenceFunc3
                 label = r'$X_{(n)}$')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFunc2(sample, alpha, "up")[1:], ConfidenceFunc2
                 label = r'$X_{(1)}$')
plt.legend(fontsize=20, loc=4)
plt.title (r'Оценка параметра $\theta = 10$')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$\hat{\theta}$')
fig = plt.gcf()
plt.grid(True)
fig.set_size_inches(18.5, 10.5)
plt.show()
```




Построим график без доверительного интервала от статистики $X_{(1)}$

In [7]:

```
plt.plot(np.arange(size+1), theta*np.ones(size+1), label = r'theta')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFunc1(sample, alpha, "up")[1:], ConfidenceFunc1
                 label = r'$\overline{X}$')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFunc3(sample, alpha, "up")[1:], ConfidenceFunc3
                 label = r'$X_{(n)}$')
plt.legend(fontsize=20, loc=4)
plt.title (r'Оценка параметра $\theta = 10$')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$\hat{\theta}$')
fig = plt.gcf()
plt.grid(True)
fig.set_size_inches(18.5, 10.5)
plt.ylim(0,20)
plt.show()
```




Оценим вероятность попадания истинного значения $\theta$ в доверительный интервал

In [8]:

```
p100 = np.zeros(3)
Q = 100
for i in range(Q):
        temp_sample = st.uniform.rvs(loc=0, scale=theta,size = size)
        if theta <= ConfidenceFunc1(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= ConfidenceF
            p100[0] += 1
        if theta <= ConfidenceFunc2(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= ConfidenceF
            p100[1] += 1
        if theta <= ConfidenceFunc3(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= ConfidenceF
            p100[2] += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'Используя статистику (1) p = ',int(100*(p100[0]/Q)), "%")
print(r'Используя статистику (2) p = ',int(100*(p100[1]/Q)), "%")
print(r'Используя статистику (3) p = ',int(100*(p100[2]/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 100
Используя статистику (1) p =  67 %
Используя статистику (2) p =  95 %
Используя статистику (3) p =  98 %
```

Оценим вероятность попадания для $n = 1000$ выборок

In [9]:

```
p100 = np.zeros(3)
Q = 1000
for i in range(Q):
        temp_sample = st.uniform.rvs(loc=0, scale=theta,size = size)
        if theta <= ConfidenceFunc1(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= ConfidenceF
            p100[0] += 1
        if theta <= ConfidenceFunc2(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= ConfidenceF
            p100[1] += 1
        if theta <= ConfidenceFunc3(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= ConfidenceF
            p100[2] += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'Используя статистику (1) p = ',int(100*(p100[0]/Q)), "%")
print(r'Используя статистику (2) p = ',int(100*(p100[1]/Q)), "%")
print(r'Используя статистику (3) p = ',int(100*(p100[2]/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 1000
Используя статистику (1) p =  69 %
Используя статистику (2) p =  94 %
Используя статистику (3) p =  94 %
```

# Вывод

Уровень доверия выполнился у ДИ по статистике $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$, но в случае ДИ $X_{(1)}$ он не состоятельный и наименнее информативен по сравнению с остальными так как при росте $n$ ширина итервала только растет. Наиболее информативным является ДИ по статистике $X_{(n)}$ так как его ширина очень мала с ростом $n$ и есть требуемый уровень доверия.

# Распределение Коши со сдвигом

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка из распределения Коши со сдвигом $\theta$. Построим доверительный интервал уровня доверия $\alpha$

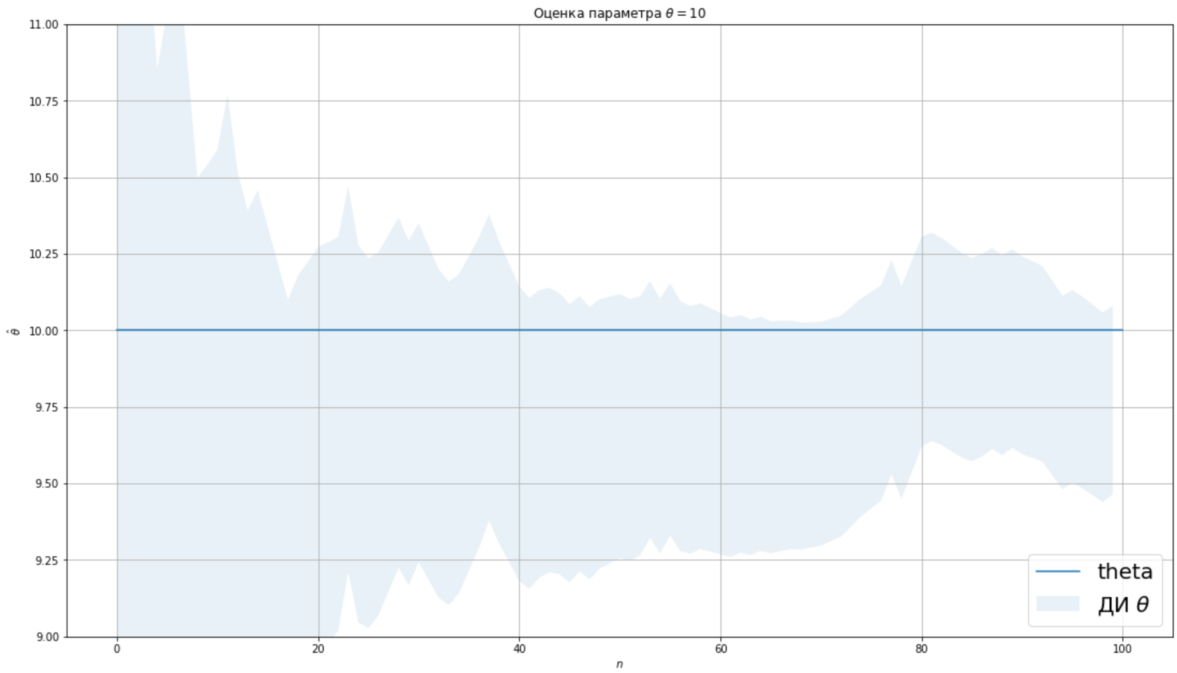
Асимтотический доверительный интервал $\theta \in \left(\hat{\mu} - u_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}, \hat{\mu} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$, где $\hat{\mu}$ - выборочная медиана , а $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ это $1 - \frac{\alpha}{2}$-квантиль и $u_{1+\frac{\alpha}{2}}$ $1 + \frac{\alpha}{2}$-квантиль стандартного нормального распределения

In [10]:

```
def ConfidenceFuncCauchy(x, alpha, mode):
    result = np.zeros(len(x)+1)
    for i in range(1, len(x)+1):
        mediana = np.median(x[:i])
        u1 = st.norm.ppf((1 + alpha)/2)
        u2 = st.norm.ppf((1 - alpha)/2)
        if mode == "up":
            result[i] = mediana - (u2*math.pi)/(2*np.sqrt(len(x[:i])))
        if mode == "down":
            result[i] = mediana - (u1*math.pi)/(2*np.sqrt(len(x[:i])))
    return result
```

In [11]:

```
a = np.zeros(size)
sample = st.cauchy.rvs(loc=theta, size = size)

plt.plot(np.arange(size+1), theta*np.ones(size+1), label = r'theta')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFuncCauchy(sample, alpha, "up")[1:],  Confidenc
                label = r'ДИ $\theta$')
plt.legend(fontsize=20, loc=4)
plt.title (r'Оценка параметра $\theta = 10$')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$\hat{\theta}$')
fig = plt.gcf()
plt.grid(True)
fig.set_size_inches(18.5, 10.5)
plt.ylim(9, 11)
plt.show()
```




In [12]:

```
pc100 = 0
Q = 100
for i in range(Q):
        temp_sample = st.cauchy.rvs(loc=theta, size = size)
        if theta <= ConfidenceFuncCauchy(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= Confic
            pc100 += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'p = ',int(100*(pc100/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 100
p =  96 %
```

In [13]:

```
pc100 = 0
Q = 1000
for i in range(Q):
        temp_sample = st.cauchy.rvs(loc=theta, size = size)
        if theta <= ConfidenceFuncCauchy(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= Confid
            pc100 += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'p = ',int(100*(pc100/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 1000
p =  93 %
```

# Вывод

Уровень доверия выполнился и так это асимтотический доверительный интервал, то с ростом N - число элементов выборки, уровень доверия стремится к $\alpha$. Что мы и наблюдаем на графике.

# Распределение Пуассона

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка из пуассоновского распределения $\theta$. Построим доверительный интервал уровня доверия $\alpha$

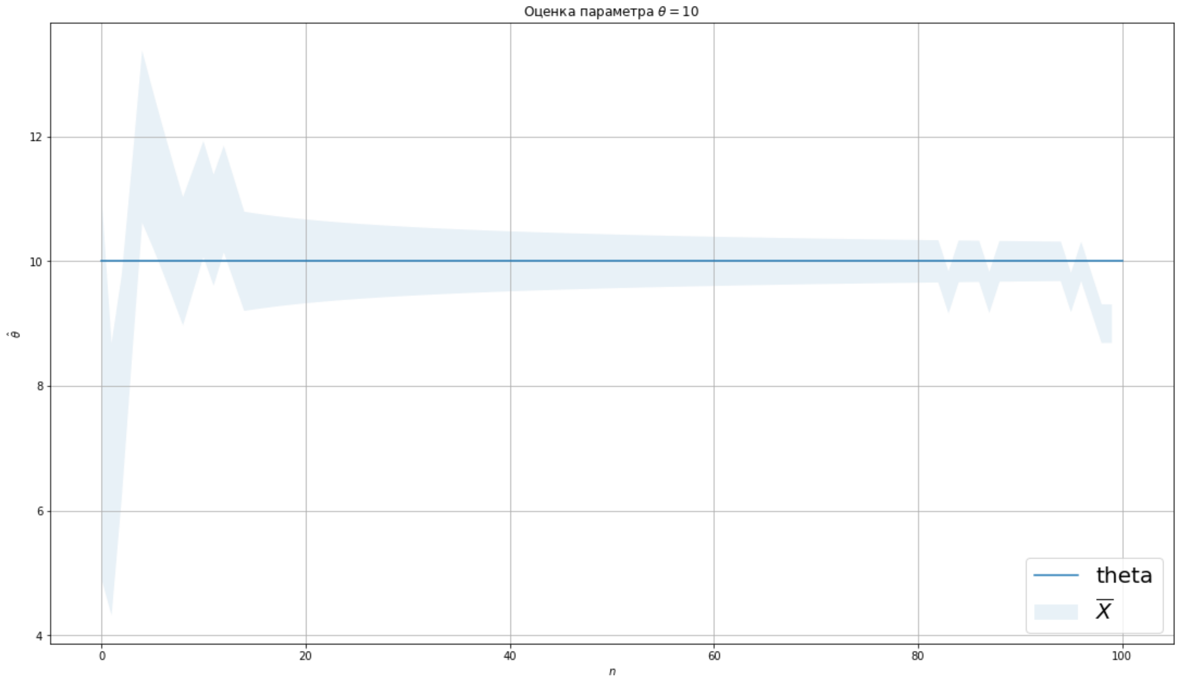
Доверительный интервал $\theta \in \left(X - u_{\frac{1-\alpha}{2}}\sqrt{\frac{X}{n}},\ X - u_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{X}{n}}\right)$, где $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ - это $1 - \frac{\alpha}{2}$-квантиль и $u_{1+\frac{\alpha}{2}}$
$1 + \frac{\alpha}{2}$-квантиль стандартного нормального распределения

In [14]:

```
def ConfidenceFuncPois(x, alpha, mode):
    result = np.zeros(len(x)+1)
    for i in range(1, len(x)+1):
        u1 = st.norm.ppf((1 + alpha)/2, loc=0, scale=1)
        u2 = st.norm.ppf((1 - alpha)/2, loc=0, scale=1)
        if mode == "up":
            result[i] = np.mean(x[:i]) - u2*np.sqrt(np.mean(x[:i])/len(x[:i]))
        if mode == "down":
            result[i] = np.mean(x[:i]) - u1*np.sqrt(np.mean(x[:i])/len(x[:i]))
    return result
```

In [15]:

```
a = np.zeros(size)
sample = st.poisson.rvs(mu = theta, size = size)

plt.plot(np.arange(size+1), theta*np.ones(size+1), label = r'theta')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFuncCauchy(sample, alpha, "up")[1:],  Confidenc
                 label = r'$\overline{X}$')
plt.legend(fontsize=20, loc=4)
plt.title (r'Оценка параметра $\theta = 10$')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$\hat{\theta}$')
fig = plt.gcf()
plt.grid(True)
fig.set_size_inches(18.5, 10.5)

plt.show()
```




In [16]:

```
pp100 = 0
Q = 100
for i in range(Q):
        temp_sample = st.poisson.rvs(mu = theta, size = size)
        if theta <= ConfidenceFuncPois(temp_sample, alpha, "up")[100] and theta >= Confider
            pp100 += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'p = ',int(100*(pp100/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 100
p =  96 %
```

# Вывод

Уровень доверия выполнился. На графике видим, что доверительный интервал является асимтотическим и при больших $n$ стягивается к истинному параметру.

# Гамма распределение

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка из гамма распределения $(\theta, \lambda)$. Построим доверительный интервал уровня доверия $\alpha$

Считая, что $\lambda$ известно

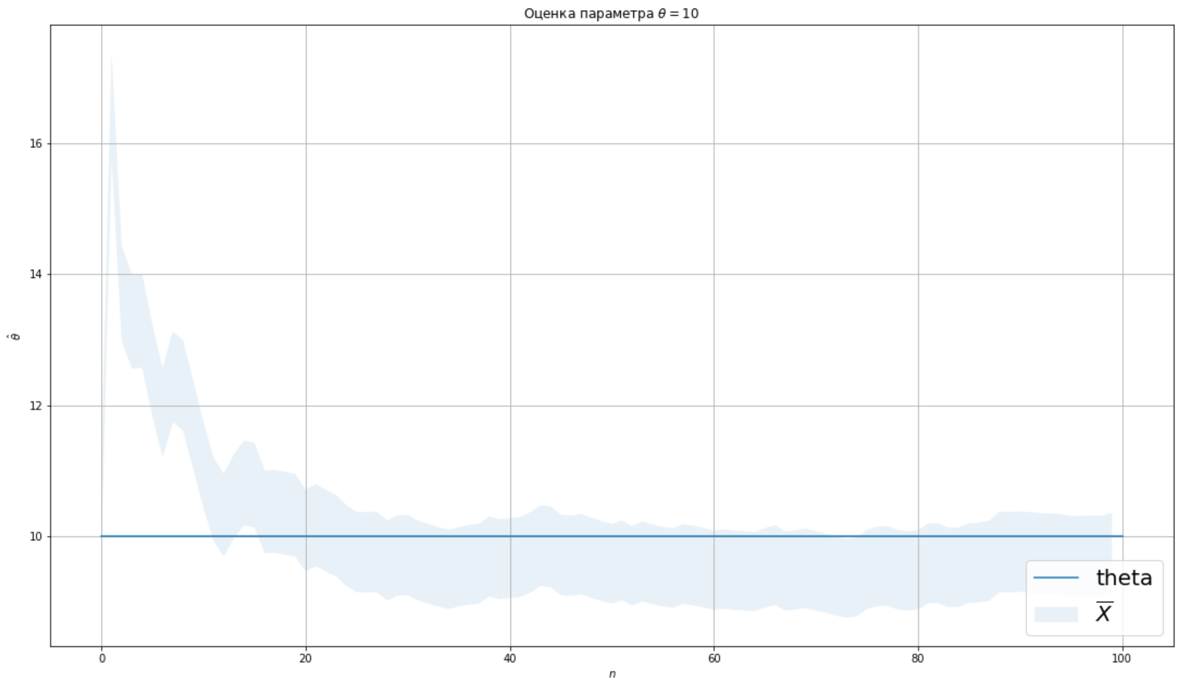
$\theta \in \left( \frac{1}{\lambda} \cdot (X - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\frac{X}{\lambda n}}),\ \frac{1}{\lambda} \cdot (X - u_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{\frac{X}{\lambda n}}) \right)$ где $u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ - $\frac{1+\alpha}{2}$ - квантиль стандартного нормального распределения

In [17]:

```
def ConfidenceFuncGamma(x, alpha, beta, mode):
    result = np.zeros(len(x)+1)
    for i in range(1, len(x)+1):
        u1 = st.norm.ppf((1 + alpha)/2)
        u2 = st.norm.ppf((1 - alpha)/2)
        if mode == "up":
            result[i] =  (1/beta)*(np.mean(x[:i]) - u2*np.sqrt(np.mean(x[:i])/(1/beta*len(x
        if mode == "down":
            result[i] =  (1/beta)*(np.mean(x[:i]) - u1*np.sqrt(np.mean(x[:i])/(1/beta*len(x
    return result
```

In [18]:

```
a = np.zeros(size)
sample = st.gamma.rvs(par[0], scale = par[1], size = 100)

plt.plot(np.arange(size+1), par[0]*np.ones(size+1), label = r'theta')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFuncGamma(sample, alpha, par[1], "up")[1:],  Cc
                label = r'$\overline{X}$')
plt.legend(fontsize=20, loc=4)
plt.title (r'Оценка параметра $\theta = 10$')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$\hat{\theta}$')
fig = plt.gcf()
plt.grid(True)
fig.set_size_inches(18.5, 10.5)

plt.show()
```




In [19]:

```
pg100 = 0
Q = 100
for i in range(Q):
        temp_sample = st.gamma.rvs(par[0], scale = par[1], size = 100)
        if theta <= ConfidenceFuncGamma(temp_sample, alpha, par[1], "up")[100] and theta >=
            pg100 += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'При известонм параметре лямбда: p = ',int(100*(pg100/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 100
При известонм параметре лямбда: p =  98 %
```

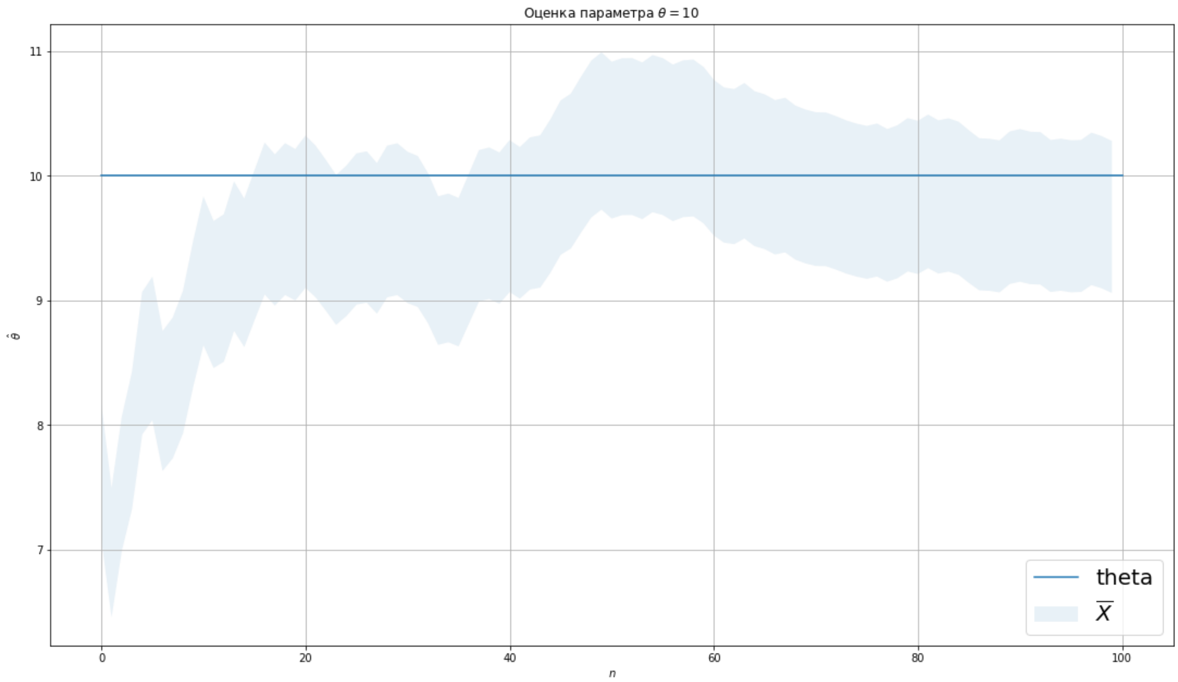
# Вывод

Уровень доверия выполнился В данном случае интервал является точным асимптотическим доверительным интервалом уровня $\alpha = 0.95$ для параметра $\theta$. Наблюдаем, что при увеличении размера выборки интервал сужается к истинному значению параметра(т.к. он асимптотический ДИ)

Считая, что $\lambda$ неизвестно, подставим вместо $\lambda$ ее асимтотически нормальную оценку. То есть $\hat{\lambda} = \frac{S^2}{X}$, где $S^2$ выборочная дисперсия.

In [20]:

```
a = np.zeros(size)
sample = st.gamma.rvs(par[0], scale = par[1], size = 100)
beta = st.moment(sample, 2)/(np.mean(sample))
plt.plot(np.arange(size+1), par[0]*np.ones(size+1), label = r'theta')
plt.fill_between(np.arange(size), ConfidenceFuncGamma(sample, alpha,beta, "up")[1:],  Confi
                 label = r'$\overline{X}$')
plt.legend(fontsize=20, loc=4)
plt.title (r'Оценка параметра $\theta = 10$')
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$\hat{\theta}$')
fig = plt.gcf()
plt.grid(True)
fig.set_size_inches(18.5, 10.5)

plt.show()
```



In [21]:

```
pg100 = 0
Q = 100
for i in range(Q):
        temp_sample = st.gamma.rvs(par[0], scale = par[1], size = 100)
        beta = st.moment(temp_sample, 2)/(np.mean(temp_sample))
        if theta <= ConfidenceFuncGamma(temp_sample, alpha, beta, "up")[100] and theta >= C
            pg100 += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'p = ',int(100*(pg100/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 100
p =  27 %
```

В случае неизвестно $\lambda$ доверительный интервал зависит от выборки, так как по этой выборке строится оценка $\lambda$ И так как выборка не сильно большого размера, вероятность попадания истинного значения параметра в доверительный интервал меняется при различных генерациях выборки. Поэтому разумнее в этом случае увеличить количество выборок для определения этой вероятности.

In [22]:

```
pg100 = 0
Q = 1000
for i in range(Q):
        temp_sample = st.gamma.rvs(par[0], scale = par[1], size = 100)
        beta = st.moment(temp_sample, 2)/(np.mean(temp_sample))
        if theta <= ConfidenceFuncGamma(temp_sample, alpha, beta, "up")[100] and theta >= C
            pg100 += 1
print("Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал п
print(r'p = ',int(100*(pg100/Q)), "%")
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный ин
тервал при n = 1000
p =  33 %
```

# Вывод

Таким образом доверительные интервалы очень полезный и наглядный метод, который показывает с какой точностью наш параметр лежит в определеннх границах, но как мы увидели не все доверительные интервалы могут быть информативны даже если они с высокой точностью(например когда ДИ был по статистика $X_{(1)}$ ). Также мы убедились, что в асимтотических доверительных интервалах при увеличении размера выборки интервал сужается к истинному значению параметра.Также мы построили доверительный интервал для первого параметра, оценив второй параметр, что дало относительно неплохую оценку(в смысле абсолютного отклонения от истинного значения параметра) но в таком случае оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверительный интервал значительно меньше, чем в случае известного второго параметра, так как влиет асимтотическая оценка $\lambda$ которую мы подставили.

In [ ]: