Metodi Matematici della Fisica

Istituzioni di Fisica Teorica

Lezione 4

Lezione 4

- Serie di Laurent
- Teorema dei residui
- Calcolo dei residui
- Lemma di Jordan e calcolo di integrali con il teorema dei residui
- Cenno funzioni polidrome

Esercizio 1

Calcolare lo sviluppo in serie delle seguenti funzioni intorno al punto z_0 ed il loro raggio di convergenza $\rho(z_0)$

1. $f(z) = \frac{1}{z}, \; z_0 = 1$
2. $f(z) = \frac{z}{z + \mathrm{i}}, \; z_0 = \mathrm{i}$
3. $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{1 - z}, \; z_0 = 0$
4. $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-i)}, \; z_0 = 0$

Esercizio 2

Calcolare lo sviluppo in serie delle seguenti funzioni intorno al punto z_0 e trovare l'intorno di z_0 dove lo sviluppo è valido.

1. $f(z) = \dfrac{1}{2z - z^2}, \;\; z_0 = 0$
2. $f(z) = \dfrac{1}{2z - z^2}, \;\; z_0 = 2$
3. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2 - 1}, \;\; z_0 = 1$
4. $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z - 1)^2}, \;\; z_0 = 1$
5. $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}, \;\; z_0 = 0$

Di che ordine sono i poli?

Esercizio 3

Determinare il tipo di singolarità in $\mathbb{C}$ delle seguenti funzioni

$$\frac{1}{(z-1)(z+\mathrm{i})}, \quad \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}, \quad \frac{\mathrm{e}^z - z}{z}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sin z}, \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \tan z \tag{2}$$

Esercizio 4

Calcolare il seguente integrale ($a \in \mathbb{R},\ a > 1$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

$[2\pi/\sqrt{a^2 - 1}]$

Esercizio 5

Calcolare il seguente integrale con il teorema dei residui

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$[\pi/\sqrt{2}]$

Esercizio 6

Calcolare il seguente integrale con il teorema dei residui

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^4}$$

$[\pi/4]$

Hint: può essere utile il contorno in figura e considerare che una variazione del lemma di Jordan si applica anche al quarto di circonferenza se la funzione da integrare tende a zero rapidamente