Metodi Matematici della Fisica

Istituzioni di Fisica Teorica

Lezione 1

Metodi - Lezione 1

- Forma polare dei numeri complessi: $z = \rho(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$
- $\arg(z) = \{\phi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ("funzione" polidroma)
- $\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) \cap [-\pi, \pi)$ (funzione monodroma)
- $\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ (identità di Eulero)
- $(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = \cos n\phi + \mathrm{i}\sin n\phi$ (Formule di de Moivre)
- Funzioni elementari: $\exp(z), \sin(z), \cos(z), \tan(z)$
- Condizioni di Cauchy-Riemann e def di funzione olomorfa

Condizioni di Cauchy-Riemann

- Criterio: Una funzione $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ è differenziabile se tutte le derivate parziali di u e v sono continue e inoltre soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

- Def: Una funzione $f(z)$ è *olomorfa* in z se è differenziabile in un intorno di z

Caratterizzazione funzioni differenziabili

- Se una funzione complessa $f(z)$ è differenziabile allora soddisfa anche

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \tag{4}$$

L'equazione (4) è utile per controllare quando una funzione non è differenziabile

Esercizi Lezione 1

Esercizio - Valore assoluto

Dimostrare che $|zw| = |z||w|$

Hint: Dalla definizione di modulo: se X è un numero complesso allora $|X| = \sqrt{\overline{X}X} \dots$

Esercizio - Forma polare 1

Dimostrare che se $z \neq 0$ allora esistono $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\phi \in \mathbb{R}$ tali che

$$z = \rho \left(\cos \phi + \mathrm{i} \sin \phi\right)$$

Hint: Partite da $z = a + \mathrm{i}b$ e ricordando che $|z| \neq 0$, potete definire $1/|z| \ldots$

Esercizio - Forma polare 2

- Calcolare $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2019}$;
- Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana (i.e. $\operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z$) e polare (i.e. $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i} \operatorname{Arg} z}$):

$$(2+3\mathrm{i})^3; \qquad (3+\mathrm{i})^4.$$

Può tornare utile:

$n=0$:					1				
$n=1$:				1		1			
$n=2$:			1		2		1		
$n=3$:		1		3		3		1	
$n=4$:	1		4		6		4		1

Esercizio - Piano complesso

Determinare l'insieme dei punti del piano complesso definiti dalle relazioni

- $|z - 3\mathrm{i}| < 2$;
- $\operatorname{Re} \dfrac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} = 0$;
- $\operatorname{Im} \dfrac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} = 0$.

Hint: scrivere $z = x + \mathrm{i}y \ldots$

Esercizio - Formula di de Moivre

Usare la formula di de Moivre per calcolare $\cos 2\theta$ e $\sin 2\theta$.

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = (\cos n\phi + \mathrm{i}\sin n\phi)$$

Hint: Uguagliare parte reale e immaginaria. . .

Esercizio - Radici dell'unità

Calcolare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano:

$$z^4 = 1$$

Hint: scrivere $z = \rho \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \, \mathrm{Arg}(z)}$ e $1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n}$ per n intero...

Esercizio - Funzioni trigonometriche

Vale anche per le funzioni trigonometriche complesse il fatto che

$$|\sin z| \leq 1 \qquad |\cos z| \leq 1?$$

Hint: scrivere $\sin$ e $\cos$ in funzione di e^z e poi sostituire $z = x + \mathrm{i}y \ldots$

Esercizio - Funzioni olomorfe 1

Provare che la funzione $f(z) = z^2$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ e se ne calcoli la derivata prima.

Hint: scrivere $f(z)$ come $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)\ldots$

Esercizio - Funzioni olomorfe 2

- Provare che la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e se ne calcoli la derivata prima.
- Provare che le funzioni trigonometriche $\sin z, \cos z$ e quelle iperboliche definite da (notate niente i)

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} \tag{5}$$

  sono olomorfe
- Sia f olomorfa. Dimostrare che se $f(z)$ assume solo valori reali allora f è costante.
  Hint: Se f assume solo valori reali allora $f(z) = u(x, y)\dots$