# Istituzioni di Fisica Teorica

# Esercizi – Oscillatore armonico

## Problema 1

L'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico si può scrivere in forma adimensionale (in cui cioè si è posto $\hbar = m = \omega = 1$) come

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) = a^\dagger a + \frac{1}{2}$$

con

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)\,, \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip)$$

ed equazione agli autovalori per l'energia

$$\hat{H}|n\rangle = \varepsilon_n |n\rangle\,, \qquad \varepsilon_n = n + \frac{1}{2}$$

1. Un particolare stato $|\psi\rangle$ è descritto, a un tempo $t = 0$, da una funzione d'onda (non normalizzata) data da
$$\psi(x, 0) = A\left(2x^3 - 3x\right) e^{-x^2/2}$$
Si verifichi che $\psi$ è una autofunzione di $H$: $\psi = \psi_n$ e $|\psi\rangle = |n\rangle$ e si determini $n$ e $\varepsilon_n$. Si normalizzi $\psi_n$.

2. Si scriva una rappresentazione degli operatori $a$ e $a^\dagger$ nello spazio delle coordinate. Si trovino le altre due autofunzioni normalizzate di energia più vicina a quella di $\psi_n$ e si verifichi che possono essere ottenute per applicazione di $a$ e $a^\dagger$ rispettivamente.

### Formule utili

- Autofunzioni (non normalizzate) dell'oscillatore armonico adimensionalizzato
$$\psi_n(x) = A_n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$
con $H_n$ polinomi di Hermite.

- Ortogonalità dei polinomi di Hermite
$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = h_n \delta_{n,m} \qquad \text{con} \quad h_n = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

- Formula di ricorrenza dei polinomi di Hermite
$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$
$$H_0 = 1 \qquad , \qquad H_1 = 2x$$

## Problema 2

Usando il metodo di separazione delle variabili e assumendo come noti i risultati relativi all'oscillatore armonico unidimensionale, si quantizzi l'oscillatore armonico bidimensionale in coordinate cartesiane (con uguale frequenza lungo entrambi gli assi cartesiani). Per semplicità di calcolo si assuma $m = \hbar = \omega = 1$ (oscillatore adimensionalizzato).

1. Si scriva la funzione d'onda normalizzata di uno stato stazionario generico. Da quanti numeri quantici essa dipende?

2. Si scriva una formula per i livelli di energia in funzione di un singolo numero intero $N$ e si calcoli la degenerazione del livello $N$.

### Formule utili

Autofunzioni normalizzate e livelli energetici dell'oscillatore armonico adimensionalizzato

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad , \qquad E_n = n + \frac{1}{2}$$

con $H_n$ polinomi di Hermite.

## Problema 3

Un oscillatore armonico unidimensionale in cui si è posto $m = \hbar = \omega = 1$, quindi di Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$$

si trova a $t = 0$ in uno stato quantistico rappresentabile dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = Ax^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Determinare la funzione d'onda $\Psi(x, t)$ ai tempi successivi $t$ e il valor medio dell'energia del sistema.

### Formule utili

- Integrali gaussiani:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ \frac{(n-1)!!}{(2a)^{n/2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

- Autofunzioni dell'oscillatore armonico

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

- Polinomi di Hermite

$$H_0 = 1\,, \quad H_1 = 2x\,, \quad H_2 = 4x^2 - 2\,, \quad ...$$

## Problema 4

Un oscillatore armonico quantisitico di massa $m$ e costante elastica $k = m\omega^2$ si trova nello stato fondamentale. Si calcoli la probabilità di trovarlo al di fuori della zona permessa classicamente.

### Suggerimenti e formule utili

- La massima elongazione dell'oscillatore classico si ottiene quando tutta l'energia è sotto forma potenziale.
- Definizione della funzione errore $\mathrm{erf}(x)$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-y^2} dy$$

  da cui $\mathrm{erf}(0) = 0$ e $\mathrm{erf}(+\infty) = 1$. Un valore utile per il problema è $\mathrm{erf}(1) = 0.84$. Il consueto integrale gaussiano $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è dato da $\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(+\infty)$

- Funzioni d'onda stazionarie dell'oscillatore armonico

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right)$$

## Problema 5

Un sistema quantistico unidimensionale di massa $m$ è sottoposto al seguente potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

1. Si trovino le autofunzioni stazionarie dell'hamiltoniana.
2. Si trovino i corrispondenti livelli energetici e in particolare l'energia dello stato fondamentale.

### Formule utili

- Autofunzioni stazionarie dell'oscillatore armonico quantistico unidimensionale

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \quad \text{di energia} \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

- Parità dei polinomi di Hermite: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

## Problema 6

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e frequenza angolare $\omega$ si trova nello stato fondamentale. Improvvisamente, viene fatta agire una forza costante $F$ diretta lungo l'asse delle $x$. Trovare le formule esatte per:

1. il livello energetico e la funzione d'onda dello stato fondamentale dopo l'introduzione della forza $F$;
2. la probabilità di trovare l'oscillatore ancora nello stato fondamentale.

### Formule utili

Autofunzioni dell'oscillatore armonico

$$\phi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}{\sqrt{2^n n! \lambda \sqrt{\pi}}} H_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \text{con} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad \text{ed} \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2...$$

e $H_n(x)$ $n$-esimo polinomio di Hermite. Integrale gaussiano

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\lambda^2}} dx = \lambda\sqrt{\pi}$$