Istituzioni di Fisica Teorica

Esercizi – Problemi unidimensionali

Problema 1

Una particella di massa m è confinata in un segmento unidimensionale $0 \leq x \leq a$. Al tempo $t = 0$ la sua funzione d'onda normalizzata è data da

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left[1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right] \sin\frac{\pi x}{a}$$

1. Si determini la funzione d'onda $\Psi(x,t)$ e il valore di aspettazione dell'energia $\langle E(t) \rangle$ ad un tempo successivo t.

2. Come varia $\langle E(t) \rangle$ rispetto a $\langle E(0) \rangle$? Commentare la risposta dandone una giustificazione fisica alla luce di un noto teorema sui valori medi (quale?).

Problema 2

Una particella di massa m è confinata in un segmento unidimensionale $0 \leq x \leq a$. A tempi $t < 0$ essa si trova nello stato fondamentale. D'improvviso, a un tempo $t = 0$, le condizioni fisiche cambiano e la particella viene a trovarsi confinata in un segmento di lunghezza doppia $0 \leq x \leq 2a$.

1. Si scriva la funzione d'onda normalizzata $\Psi(x,t)$ dello stato fondamentale per $t < 0$.

2. Si discuta la forma della funzione d'onda $\Psi(x,0)$ esattamente a $t = 0$ e la si disegni sull'intervallo $[0, 2a]$. Si tratta di una funzione continua? e la sua derivata è continua o no (sempre all'istante $t = 0$)?

3. Si determini la probabilità che il sistema si trovi, immediatamente dopo che la buca è stata raddoppiata, ancora nello stato fondamentale (suggerimento: si faccia uso delle formule trigonometriche di prostaferesi per risolvere l'integrale).

Problema 3

Si calcoli il valor medio di e^x per un pacchetto gaussiano

$$\psi(x) = Ae^{-x^2/2}$$

(Suggerimento: in presenza di polinomi di secondo grado, si cerchi di "completare il quadrato").

Problema 4

Una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza L

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{per } x < 0,\ x > L \end{cases}$$

ha, al tempo $t = 0$, funzione d'onda

$$\Psi(x,0) = A \sin^3 \frac{\pi x}{L}$$

1. Si scriva la funzione d'onda normalizzata al tempo t.
2. Si trovi il valor medio $\langle x \rangle$ al tempo t

Formule utili

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

Autofunzioni

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3...$$

corrispondenti all'autovalore

$$E_n = n^2 \mathcal{E} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Formula trigonometrica di prostaferesi

$$2 \sin kx \sin nx = \cos(k-n)x - \cos(k+n)x$$

Integrale utile

$$\int_0^\pi x \cos qx \, dx = \frac{\pi^2}{2} \delta_{q,0} + \frac{1 - (-1)^q}{q^2}, \qquad q \in \mathbb{Z}$$

Problema 5

Un fascio di elettroni monocromatico, di energia $E = 0.1$ eV, incide perpendicolarmente sulla superficie di un metallo conduttore. Il potenziale interno del metallo può essere approssimato da un potenziale costante $V_0 = -8$eV. Si calcoli la probabilità di riflessione degli elettroni.

Problema 6

A un dato istante un sistema quantistico unidimensionale è rappresentato dal pacchetto gaussiano

$$\psi(x) = A e^{-3x^2}$$

Si normalizzi la funzione d'onda. Si trovino i valori medi degli operatori x^n con $n = 1, 2, 3, 4$ spiegando esplicitamente il metodo di calcolo degli integrali necessari. Si calcoli inoltre il valor medio $\langle \tanh^3 x \cdot \cos x \rangle$ sullo stesso stato.

Facoltativo aggiuntivo: si dia la formula generale di $\langle x^n \rangle$ per tutti gli n.

Formule utili

Integrale gaussiano

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$

Problema 7

Una particella di massa m si muove di moto unidimensionale in presenza di un potenziale a buca infinita di larghezza L

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{per } x < 0 \text{ e } x > L \end{cases}$$

e al tempo $t = 0$ è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \sin^3 \frac{\pi x}{L}$$

1. Si normalizzi questa funzione d'onda a $t = 0$.
2. Si scriva la funzione d'onda a $t \neq 0$. La normalizzazione di quest'ultima differirà da quella a $t = 0$?
3. Si calcoli $\langle E \rangle$ (in termini dell'energia dello stato fondamentale E_1) per questo stato a $t = 0$. Il calcolo a $t \neq 0$ darebbe un risultato diverso o uguale? perchè?

Formule utili

- Funzione d'onda degli stati stazionari della buca infinita

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

  di energia $E_n = E_1 n^2$

- Relazione trigonometrica utile

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

Problema 8

1. Si dimostri che in un sistema quantistico di hamiltoniana

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V(\vec{x})$$

   vale la relazione

$$[\vec{x}, H] = \frac{i\hbar}{m} \vec{p}$$

2. Si usi questo risultato per dimostrare che in ogni stato stazionario

$$\langle \vec{p} \rangle = 0$$

Problema 9

Un sistema quantistico unidimensionale di massa m è soggetto al potenziale (di Pöschl-Teller)

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{\cosh^2 x}$$

1. Si trovi il valore della costante β per cui lo stato

$$\psi(x) = (\tanh x + \beta) e^{ikx}$$

   è uno stato stazionario di questo sistema e ne si calcoli l'energia in funzione di k.

2. Studiando gli andamenti asintotici di $\psi(x)$ per $x \to \pm\infty$ si dica se essa rappresenta uno stato legato oppure uno stato asintoticamente libero, nel qual caso si mostri se esiste o meno riflessione da parte del potenziale.

Problema 10

Una particella vincolata a muoversi su un piano xy è confinata a muoversi liberamente all'interno di un'area quadrata di lato L, ovverosia è soggetta a un potenziale $V(x,y) = V(x) + V(y)$ con

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{per } x \leq 0 \text{ e } x \geq L \\ 0 & \text{per } 0 < x < L \end{cases}$$

e analoga definizione per $V(y)$.

1. Si trovino le funzioni d'onda $\Psi(x,y)$ degli stati stazionari e le corrispondenti energie.
2. Elencando le energie dei differenti livelli in ordine crescente, si calcolino i primi 7 livelli energetici, indicandone l'eventuale degenerazione.
3. **Facoltativo**: si illustri un semplice metodo grafico per stabilire quanti e quali stati esistono a un dato livello energetico e quindi per determinare visivamente l'ordine crescente dei livelli.

Suggerimenti e formule utili

Si usi il metodo di separazione delle variabili. Funzioni d'onda della buca infinita unidimensionale di larghezza L

$$\psi_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n_x}{L} x \qquad \text{con energia} \quad E_{n_x} = A n_x^2 \qquad \text{ove si è posto } A = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2L^2}$$

Problema 11

Un sistema quantistico unidimensionale di massa m è soggetto al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{per } x < 0 \\ -V_0 & \text{per } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{per } x > a \end{cases}$$

ove $V_0 > 0$. Si studino gli stati legati del sistema. In particolare, si forniscano:

1. i limiti superiore e inferiore per le energie degli stati legati, dettati dalla forma del potenziale;
2. l'espressione per le funzioni d'onda stazionarie (non normalizzate);
3. i valori delle energie degli stati stazionari in funzione dei parametri del problema m, V_0, a e delle soluzioni dell'equazione trascendente che ne determina l'esistenza.
4. Si discuta, in funzione del parametro $R = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a$, il numero di stati legati possibili.
5. In particolare si trovino le condizioni su V_0, a fissata massa m e larghezza a, sotto le quali non esiste alcuno stato legato.

Problema 12

A un preciso istante $t = 0$ un sistema unidimensionale ha come funzione d'onda

$$\psi(x) = A e^{-\frac{x^2}{2}} (2x - 1)$$

1. Si scriva la funzione d'onda normalizzata
2. Si calcoli il valor medio $\langle x \rangle$ e lo scarto quadratico medio Δx
3. Si calcoli il valor medio $\langle p \rangle$ e lo scarto quadratico medio Δp
4. Con i risultati così ottenuti si mostri che lo stato $\psi(x)$ rispetta il principio di indeterminazione

Formule utili e suggerimenti

Integrali gaussiani

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^4 dx &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}
\end{aligned}
$$

Suggerimento: si ricordi la risorsa dell'integrazione per parti.

Problema 13

Un sistema quantistico unidimensionale di massa m è soggetto al potenziale:

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \qquad \text{con} \qquad \alpha > 0\,.$$

Si derivi la forma degli stati legati e degli stati di scattering del sistema. Per questi ultimi si derivino anche i coefficienti di trasmissione e di riflessione.

Problema 14

Un sistema quantistico unidimensionale di massa m è soggetto al potenziale:

$$V(x) = -\alpha\,[\delta(x+a) + \delta(x-a)] \qquad \text{con} \qquad \alpha > 0 \qquad \text{e} \qquad a > 0\,.$$

Si derivi la forma degli stati legati del sistema.