Capitolo 2

Alcune funzioni utili

2.1 Delta di Dirac

Definizione. Data una successione di funzioni $g_1(x), g_2(x), \ldots$, anche se non esiste $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$, ma esiste

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x) f(x) dx$$

rispetto a tutte le funzioni $f(x) \in \mathcal{F}$, ove $\mathcal{F}$ è una certa classe di funzioni, si dice che la successione $g_n(x)$ identifica una **distribuzione** $\gamma(x)$ rispetto a $\mathcal{F}$ nell'intervallo $[a, b]$, definita formalmente dall'identità

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x) f(x) dx = \int_a^b \gamma(x) f(x) dx$$

ovvero, con una scrittura formalmente impropria ma efficace

$$\gamma(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

L'oggetto $\gamma(x)$ così introdotto non può essere considerato una funzione in senso stretto. Ecco perché si preferisce indicarlo con il termine distribuzione.

Definizione. La distribuzione **delta di Dirac** $\delta(x)$ è definita dalla relazione

$$\forall f \quad : \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) f(x) dx = f(y)$$

In particolare per $f(x) = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2.1}$$

Si possono dare infinite definizioni della delta di Dirac come distribuzione. In particolare vale il seguente

Teorema. *Data una funzione continua e pari $D(x) = D(-x)$ che sia assolutamente integrabile e normalizzata a 1*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x)|dx < \infty \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} D(x)dx = 1$$

allora la successione $d_n(x) = nD(nx)$ definisce una distribuzione delta di Dirac

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x) = \delta(x)$$

Alcuni esempi pratici di successioni, definenti la delta di Dirac, che sono spesso usate sono

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2} \\
\delta(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 nx}{nx^2} \\
\delta(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-(nx)^2} \\
\delta(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}
\end{aligned}$$

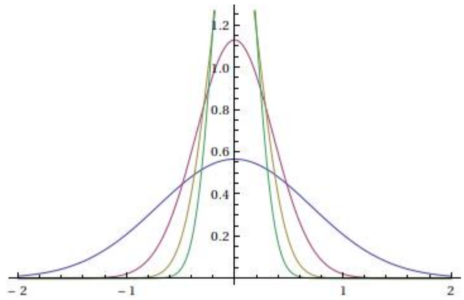

Figura 2.1: *Successione di gaussiane che genera la delta di Dirac*

Dall'ultima di queste relazioni si può anche ottenere una importantissima rappresentazione integrale per la delta di Dirac

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk}$$

nonché la seguente utilissima regola di somma

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} = \delta(x)} \tag{2.2}$$

La delta di Dirac ha importanti proprietà formali

$$
\begin{aligned}
\delta(x) &= \delta(-x) \\
\delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) \qquad a \in \mathbb{R} \\
\delta(x-y)f(x) &= \delta(x-y)f(y) \\
x\delta(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Infine, considerata una funzione $y(x)$ avente n zeri semplici x_i

$$\delta(y(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|y'(x_i)|}$$

da cui in particolare

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}$$

2.1.1 Funzione theta di Heaviside

Connessa alla delta di Dirac è la funzione **theta di Heaviside** o funzione gradino

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

che ha la delta come derivata

$$\frac{d\Theta}{dx} = \delta(x)$$

e quindi è la primitiva (in senso formale delle distribuzioni) della delta

$$\int \delta(x)dx = \Theta(x) + \text{cost.}$$

compatibilmente con la (2.1).

La Θ ha una utile rappresentazione integrale

$$\Theta(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k-i\epsilon}dk$$

2.1.2 Delta di Dirac multidimensionali

La delta di Dirac può essere agevolmente generalizzata a più dimensioni. Per esempio, in $\mathbb{R}^3$ si definisce la delta tridimensionale dipendente da un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ come

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

Ovviamente anche per la delta tridimensionale valgono le rappresentazioni di somma e integrale

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{n}=\mathbb{Z}^3}^{+\infty} e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k$$

dove $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ è un vettore di interi e $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$.

Più in generale in $\mathbb{R}^N$, detto $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)$

$$\delta(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^{N} \delta(x_n)$$

e valgono le rappresentazioni

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^N} e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^Nk$$

Ricordando la definizione del simbolo di Krönecker

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

per il quale

$$\sum_i c_i \delta_{i,j} = c_j$$

vediamo che la delta di Dirac può essere considerata come una generalizzazione del simbolo di Krönecker per indici che diventano continui, cioè invece di avere dei vettori $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ...)$, cioè collezioni di numeri etichettati da un indice discreto i, abbiamo delle funzioni $f(x)$, pensabili come collezioni di numeri etichettate da un parametro continuo x.

2.1.3 Derivate della delta di Dirac

La distribuzione *derivata della delta di Dirac* è definita come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-x')dx = -f'(x)$$

come si può vedere agevolmente calcolando la derivata della definizione della delta

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x-x')dx' = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\frac{d}{dx}\delta(x-x')dx'$$

Più in generale possiamo definire la derivata n-sima della delta attraverso la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x') = (-1)^n f^{(n)}(x)$$

dove col simbolo $f^{(n)}$ intendiamo la derivata n-sima.

2.2 Funzione Gamma di Eulero

Attorno alla prima metá del diciottesimo secolo si inizió a considerare il problema di trovare una funzione continua in grado di interpolare l'operazione di fattoriale ai numeri reali. Verso la fine degli anni '20 del 1700 il problema venne risolto da Eulero tramite l'introduzione di una delle funzioni speciali più utili dal punto di vista computazionale. Si tratta della *funzione di Eulero* o *funzione Gamma.*

Figura 2.2: *L. Euler (1707-1783)*

Dal punto di vista analitico la funzione Gamma gode di ottime proprietà: è monodroma, meromorfa e analitica in tutti i punti del piano complesso ad eccezione degli interi non positivi. Esistono molti modi equivalenti di scrivere la funzione Gamma; la rappresentazione più utile ai nostri scopi deriva da considerare il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

La prima cosa da osservare è che l'integrale è improprio e risulta ben definito all'infinito per ogni valore di z complesso, in quanto l'esponenziale decresce più velocemente di ogni potenza. In un intorno dell'origine, invece, l'integranda si comporta come

$$t^{z-1}e^{-t} = t^{z-1}(1 + O(t)) \sim t^{z-1} \qquad \text{per} \quad t \to 0$$

e risulta dunque integrabile se $\mathrm{Re}[z] > 0$. Possiamo quindi definire la funzione Gamma come

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt} \qquad \text{per} \quad \mathrm{Re}[z] > 0 \tag{2.3}$$

Per completezza, tra le molte definizioni alternative di questa funzione ricordiamo

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)\right] \qquad \text{(Euler, 1729)}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z\,(z+1)\cdots(z+n)} \qquad \text{(Gauss, 1812)}$$

valide per ogni numero complesso z, tranne gli interi non positivi.

2.2.1 Proprietà della funzione $\Gamma(z)$

La relazione più importante soddisfatta dalla funzione Gamma può essere ottenuta considerando

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z\,e^{-t}\,dt$$

ed integrando per parti

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^z\,e^{-t}\,dt &= \left[t^z(-e^{-t})\right]_0^\infty - \int_0^\infty z t^{z-1}\,(-e^{-t})\,dt = \\ &= z\int_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}\,dt = z\,\Gamma(z)\end{aligned}$$

quindi la funzione Gamma soddisfa, per ogni numero complesso z con $\mathrm{Re}[z] > 0$, la relazione

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)} \tag{2.4}$$

La relazione funzionale precedente può essere utilizzata per ricondurre la funzione Gamma al fattoriale, infatti considerando $z = n > 0, n \in \mathbb{N}$ e applicando ripetutamente la (2.4) otteniamo

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!\,\Gamma(1)\end{aligned}$$

ma siccome

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

abbiamo che per valori interi positivi essa si riduce al fattoriale

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \tag{2.5}$$

Si hanno quindi i valori particolari

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 0! = 1 \\
\Gamma(2) &= 1! = 1 \\
\Gamma(3) &= 2! = 2 \\
\Gamma(4) &= 3! = 6 \\
\Gamma(5) &= 4! = 24
\end{aligned}$$

Esempio 10. Per meglio cogliere l'utilità dal punto di vista del calcolo della funzione Gamma si può, ad esempio, considerare la quantità

$$I = \int_0^\infty p(x)\, e^{-ax}\, dx$$

con $a > 0$ e $p(x)$ polinomio di grado N arbitrario che quindi possiamo scrivere come

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k\, x^k$$

Il cambio di variabile $y = ax$ ci permette di riscrivere

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty p\left(\frac{y}{a}\right)\, e^{-y}\, \frac{dy}{a} = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{N} c_k \left(\frac{y}{a}\right)^k\, e^{-y}\, \frac{dy}{a} = \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{a^{k+1}} \int_0^\infty y^k e^{-y}\, dy = \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{a^{k+1}} \int_0^\infty y^{(k+1)-1} e^{-y}\, dy = \\
&= \sum_{k=0}^{N} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{a^{k+1}} = \sum_{k=0}^{N} c_k \frac{k!}{a^{k+1}}
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{N} c_k\, x^k \right) e^{-ax}\, dx = \sum_{k=0}^{N} c_k \frac{k!}{a^{k+1}}$$

che mostra come un integrale il cui calcolo esplicito richiederebbe l'impiego di numerose integrazioni per parti può essere ridotto al semplice calcolo di una sommatoria di fattoriali opportunamente pesati.

Un'altra classe di valori della funzione Gamma per i quali si può dare una forma facile da calcolare è costituita da numeri seminteri positivi, cioè del tipo $(2n+1)/2$ (con $n = 1, 2, \dots$). Utilizzando la relazione funzionale (2.4) si ha infatti

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2}\,\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right) = \\ &= \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

dove con il simbolo di *semifattoriale* si intende

$$\begin{aligned}(2n-1)!! &= (2n-1)(2n-3)...5\cdot 3\cdot 1 \\ (2n)!! &= (2n)(2n-2)...4\cdot 2 \\ 0!! &= 1\end{aligned}$$

che riduce il calcolo al valore di $\Gamma(1/2)$, cioè

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

passando alla nuova variabile $u^2 = t$ si ottiene l'integrale

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

in conclusione

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Alcuni valori notevoli sono riportati di seguito

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \approx 1.77245 \\
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886227 \\
\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 1.32934 \\
\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \approx 3.32335 \\
\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) &= \frac{7}{2}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \approx 11.6317
\end{aligned}$$

2.2.2 Comportamento asintotico

La definizione (2.3) può essere utilizzata, attraverso il metodo della *fase stazionaria*, per ottenere la famosa *approssimazione di Stirling* per $n!$, esplicitamente

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{2.6}$$

spesso utilizzata in teoria della probabilità e in meccanica statistica, ad esempio.

2.2.3 Relazione con la trasformata di Mellin

Riprendiamo la definizione (2.3) della funzione Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

passando alla nuova variabile definita da $t = au$, con $a > 0$, otteniamo

$$\Gamma(z) = a^z \int_0^\infty u^{z-1} e^{-au}\, du$$

che può essere riscritta come

$$\boxed{\frac{1}{a^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty u^{z-1} e^{-au}\, du} \tag{2.7}$$

quest'ultima espressione è nota come *trasformata di Mellin* di e^{-au} e risulta particolarmente comoda nel calcolo di alcune classi di integrali.

Esempio 11. Si considerino, a titolo di esempio, la famiglia di integrali

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \qquad \text{con} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

che risultano ben definiti per ogni n naturale. Utilizzando la trasformata di Mellin l'integranda può essere riscritta come

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty u^n \, e^{(1+x^2)u} \, du$$

quindi

$$I_n = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \int_0^\infty du \, u^n e^{(1+x^2)u}$$

invertendo l'ordine di integrazione

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty du \, u^n e^{-u} \int_0^\infty dx \, e^{-ux^2} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty du \, u^n e^{-u} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot n!} \int_0^\infty du \, u^{(n+1/2)-1} e^{-u} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{(2n-1)!!}{n!} \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è lecito solo per $n > 0$. La precedente espressione fornisce, per i primi valori di n, il risultato corretto

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot 0!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2^2} \frac{1!!}{1!} = \frac{\pi}{4} \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{\pi}{2^3} \frac{3!!}{2!} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

come può essere provato ricorrendo a tecniche di integrazione più elementari, sebbene più lunghe e meno eleganti.

2.2.4 Il simbolo di Pochhammer

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ possiamo definire il **simbolo di Pochhammer** come

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1)(a+2)...(a+n-1) & \text{per } n > 0 \\ 1 & \text{per } n = 0 \\ \frac{1}{(a-1)(a-2)...(a+n-1)} & \text{per } n < 0 \end{cases}$$

Esso ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (1)_n &= n! \\ (k)_n &= \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} \quad \text{per } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$