

Metodi Matematici della Fisica

per il corso di
Istituzioni di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Astronomia – Università di Bologna

Docente:

Francesco Ravanini



11 gennaio 2018

Indice

1	Funzioni complesse	4
1.1	Richiami sui numeri complessi	4
1.2	Funzioni di variabile complessa	10
1.3	Differenziabilità e olomorfismo	13
1.4	Integrali nel piano complesso	17
1.5	Teoremi di Cauchy e di Morera	21
1.6	Rappresentazione integrale di Cauchy	24
1.7	Serie di Taylor	26
1.8	Zeri e singolarità di una funzione	28
1.9	Serie di Laurent	29
1.10	Residui	32
1.11	Classificazione delle funzioni complesse	36
1.12	Calcolo di integrali, lemma di Jordan	37
1.13	Rapidi cenni sulle funzioni polidrome	39
2	Alcune funzioni utili	43
2.1	Delta di Dirac	43
2.1.1	Funzione theta di Heaviside	45
2.1.2	Delta di Dirac multidimensionali	46
2.1.3	Derivate della delta di Dirac	47
2.2	Funzione Gamma di Eulero	47
2.2.1	Proprietà della funzione $\Gamma(z)$	48
2.2.2	Comportamento asintotico	51
2.2.3	Relazione con la trasformata di Mellin	51
2.2.4	Il simbolo di Pochhammer	53
3	Spazi di Hilbert e operatori	54
3.1	Spazio vettoriale su \mathbb{C}	54

3.2	Spazio a prodotto interno	56
3.3	Spazio metrico	58
3.4	Spazi di Hilbert	59
3.5	Basi ortonormali	61
3.6	Operatori	63
3.7	Autovalori e autovettori	67
3.8	Matrici come rappresentazione di operatori	69
3.9	Operatori in spazi infinito dimensionali	73
4	Spazi funzionali e serie di Fourier	77
4.1	Funzioni a quadrato sommabile e spazio \mathbb{L}^2	77
4.2	Serie di Fourier in \mathbb{L}^2	79
4.3	Serie di Fourier trigonometriche	82
4.4	Trasformate di Fourier	83
5	Equazioni differenziali lineari ordinarie	87
5.1	Forma standard	87
5.2	Forma ridotta	89
5.3	Soluzioni linearmente indipendenti	90
5.4	Soluzioni attorno a punti regolari	91
5.5	Soluzioni attorno a punti singolari	92
5.5.1	Autovalori non coincidenti	93
5.5.2	Autovalori coincidenti	94
5.5.3	Punti fuchsiani	96
5.5.4	Punto all'infinito	100
6	Polinomi ortogonali	101
6.1	Generalità	101
6.2	Polinomi di Legendre	104
6.3	Funzioni associate ai polinomi di Legendre	106
6.4	Polinomi di Hermite	107
6.5	Polinomi di Laguerre	109

Capitolo 1

Funzioni complesse

1.1 Richiami sui numeri complessi

L'introduzione dei numeri complessi ha la sua origine nel problema di dare significato all'espressione $\sqrt{-1}$ che come noto non ha soluzione nel campo dei numeri reali \mathbb{R} . La proposta di vari studiosi di epoca rinascimentale, tra cui vari algebristi dell'Ateneo bolognese (Scipione del Ferro, Cardano) accanto al matematico modenese Tartaglia, fu quella di "inventare" un nuovo numero $i = \sqrt{-1}$, detto **unità immaginaria**, che ovviamente non appartiene a \mathbb{R} . L'insieme di tutti i numeri che sono combinazioni lineari di una **parte reale** x e una **parte immaginaria** y

$$z = x + iy$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ si dicono numeri complessi $z \in \mathbb{C}$. Spesso si usa la notazione

$$\operatorname{Re} z = x \quad , \quad \operatorname{Im} z = y$$

Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ la loro somma è definita come

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

e il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Somma e prodotto godono delle proprietà commutativa, associativa e distributiva. I numeri reali 0 e 1 giocano il ruolo di elementi neutri per somma e prodotto rispettivamente. L'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} forma perciò un campo. I numeri reali $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sono un sottocampo di \mathbb{C} .

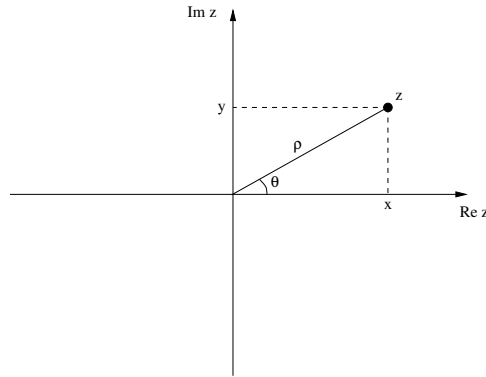


Figura 1.1: Piano complesso

Dato un numero complesso $z = x + iy$, definiamo suo **complesso coniugato** il numero

$$z^* = x - iy$$

e si ha

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2} \quad , \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}$$

Talvolta si usa la notazione \bar{z} al posto di z^* . Il prodotto

$$zz^* = x^2 + y^2$$

risulta essere sempre un numero reale positivo. Alla sua radice quadrata

$$\sqrt{zz^*} = |z|$$

viene dato il nome di **modulo** del numero z (e ovviamente $|z^*| = |z|$)

E' facile verificare che il modulo gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| & \text{distributività del prodotto} \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| & \text{disuguaglianza triangolare} \end{cases}$$

Così come i numeri reali possono essere rappresentati dai punti su una retta, i numeri complessi, che sono in corrispondenza 1:1 con coppie di numeri reali, possono essere rappresentati come punti su un piano, detto piano complesso o piano di Gauss, in cui il numero z corrisponderà al punto di ascissa $\operatorname{Re} z$ e ordinata $\operatorname{Im} z$.

Possiamo quindi considerare le parti reale e immaginaria come le coordinate cartesiane del punto rappresentante il numero complesso. E' questa la **forma cartesiana** del numero complesso. Un punto in un piano può però essere descritto anche

da coordinate polari e ciò porta alla rappresentazione polare dei numeri complessi in termini di una coordinata radiale ρ e di una coordinata angolare θ . Esse saranno legate alle coordinate cartesiane x, y da

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta \stackrel{\text{def}}{=} \arg z = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{modulo di } z \\ \text{argomento (o fase) di } z \end{array}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto il numero complesso z può essere scritto come

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$$

Si noti che il numero complesso di argomento $\arg z = \theta + 2k\pi$ per qualunque $k \in \mathbb{Z}$ coincide, per la periodicità di seno e coseno, con il numero complesso z . La scelta $-\pi < \arg z \leq \pi$ (o talvolta $0 \leq \arg z < 2\pi$) è detta determinazione *principale* dell'argomento.

Ricordando le espansioni in serie (in campo reale) di seno e coseno

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \\ \sin \theta &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

entrambe convergenti su tutto \mathbb{R} , e ricordando che $(-1)^k = i^{2k}$, possiamo calcolare

$$\cos \theta + i \sin \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}$$

e quindi vale la fondamentale identità, detta **formula di Eulero**

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta} \quad (1.1)$$

da cui discende che ogni numero complesso può essere rappresentato nella **forma polare**

$$z = \rho e^{i\theta} = |z| e^{i \arg z}$$

Il suo complesso coniugato sarà $z^* = \rho e^{-i\theta} = |z| e^{-i \arg z}$.

Si noti che, se $\theta \in \mathbb{R}$

$$|e^{i\theta}| = 1$$

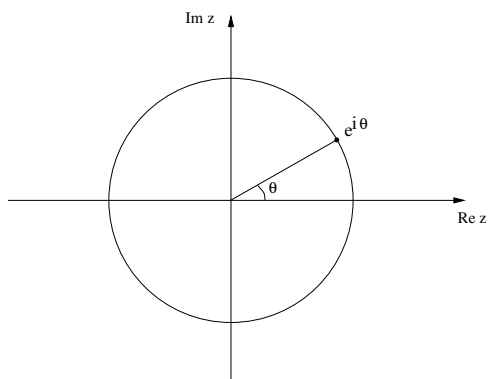


Figura 1.2: Cerchio unitario

Infatti

$$|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

Mentre la forma cartesiana $z = x + iy$ è più utile per fare addizioni e sottrazioni di numeri complessi, la forma polare è più agevole per moltiplicare o dividere

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

Esempio 1. Si esprima il seguente numero complesso in forma cartesiana e polare

$$(1 + i)^8$$

Soluzione - Conviene passare alla forma polare per calcolare l'elevazione a potenza

$$z = 1 + i = |z| e^{i \arg z}$$

e cioè, visto che $\operatorname{Re} z = 1 = \operatorname{Im} z$,

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Quindi

$$z = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

In questa forma l'elevazione a potenza diventa semplice da calcolare

$$z^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i \frac{\pi}{4} 8} = 16 e^{2\pi i} = 16$$

poiché $e^{2\pi i} = 1$.

Esempio 2. Si calcolino le radici quarte dell'unità, sia in forma polare che cartesiana

$$\sqrt[4]{1}$$

Soluzione - Essendo $1 = |1|e^{i \arg 1} = e^{2\pi ki}$ in forma polare, la radice quarta sarà

$$\sqrt[4]{1} = e^{\frac{\pi k}{2}i} = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$$

Per la periodicità di seno e coseno vi sono 4 numeri complessi distinti che sono radici quarte dell'unità, rispettivamente per $k = 0, 1, 2, 3$

$$1, i, -1, -i$$

Esercizio 1. Si esprimano i seguenti numeri complessi in forma cartesiana e polare

$$1. (2 + 3i)^3 \quad [-46 + 9i = 13\sqrt{13}e^{i(\pi - \arctan \frac{9}{46})}]$$

$$2. \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right)^{40} \quad [1]$$

$$3. (3 + i)^4 \quad [28 + 96i = 100e^{i \arctan \frac{24}{7}}]$$

Esercizio 2. Calcolare le radici n -ime nel piano complesso dei seguenti numeri, esprimendole sia in coordinate polari che cartesiane

$$1. \sqrt[4]{-1} \quad [\{e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}, k = 0, 1, 2, 3\} = \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i\}]$$

$$2. \sqrt[6]{1} \quad [\{e^{k\pi i/3}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1\}]$$

$$3. \sqrt[3]{8} \quad [\{2e^{\frac{2k\pi i}{3}}, k = 0, 1, 2\} = \{2, -1 \pm \sqrt{3}i\}]$$

Invertendo la (1.1) si ottengono le importanti relazioni

$$\boxed{\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

da cui è possibile poi dedurre la **formula di de Moivre**

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

utile per calcolare seni e coseni dei multipli di un angolo. Più in generale, l'espansione binomiale

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

applicata alla formula di de Moivre ci permette di stabilire utili formule per seni e coseni di multipli interi di un angolo (v. Esercizi). Invertendo queste relazioni otteniamo anche le formule per le potenze di seni e coseni in termini di angoli multipli.

Esempio 3. Per esempio, per $n = 2$

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$$

perciò prendendo separatamente la parte reale e quella immaginaria

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Invertendo si ha anche

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta &= \frac{1}{2}(\cos 2\vartheta + 1) \\ \sin^2 \vartheta &= 1 - \cos^2 \vartheta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta) \end{aligned}$$

come ben noto.

Esercizio 3. Si calcoli, usando la formula di De Moivre e gli opportuni sviluppi binomiali, $\sin nx$ e $\cos nx$ in funzione di potenze di $\sin x$ e $\cos x$ per $n = 3, 4, 5, 6$.

Risultati -

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ \sin 4\theta &= \cos \theta (4 \sin \theta - 8 \sin^3 \theta) \\ \sin 5\theta &= 5 \sin \theta - 20 \sin^3 \theta + 16 \sin^5 \theta \\ \sin 6\theta &= \cos \theta (6 \sin \theta - 32 \sin^3 \theta + 32 \sin^5 \theta) \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \cos 4\theta &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 \\ \cos 5\theta &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \\ \cos 6\theta &= 32 \cos^6 \theta - 48 \cos^4 \theta + 18 \cos^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si invertano le formule dell'esercizio 3 per esprimere $\sin^n x$ e $\cos^n x$ in funzione di seni e coseni di angoli multipli di x .

Risultati -

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x) \\ \sin^4 \theta &= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3) \\ \sin^5 \theta &= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x) \\ \sin^6 \theta &= \frac{1}{32}(\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10) \\ \cos^3 x &= \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x + 3 \cos x) \\ \cos^4 \theta &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) \\ \cos^5 \theta &= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x) \\ \cos^6 \theta &= \frac{1}{32}(\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10)\end{aligned}$$

Il modulo permette di definire il concetto di distanza in \mathbb{C}

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Con la distanza si può definire il concetto di limite, di convergenza di una successione o di una serie e di punto interno o esterno ad un insieme.

1.2 Funzioni di variabile complessa

Si consideri un sottoinsieme $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$. Una funzione complessa è una legge che associa un numero $w \in \mathbb{C}$ a un numero $z \in \mathcal{M}$

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad w = f(z) \quad \text{univoca (a un sol valore o **monodroma**)}$$

Se poniamo $z = x + iy$ e $w = u + iv$ cioè

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

f può essere vista come un caso particolare di funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 . Pertanto i concetti di limite e di continuità sono ereditati dai corrispondenti concetti per funzioni $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

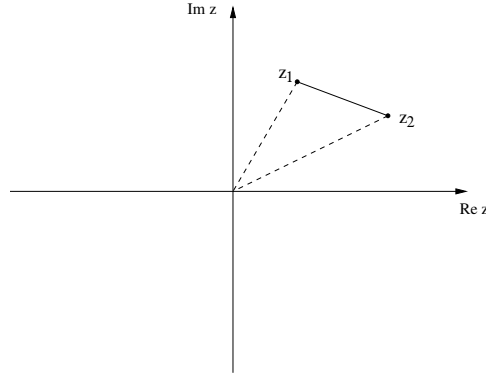


Figura 1.3: Distanza di due punti z_1 e z_2 in \mathbb{C}

Definizione. Un numero $A \in \mathbb{C}$ è detto *limite* di f per z che tende ad $a \in \mathbb{C}$ e si scrive

$$A = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

se per ogni intorno U_A di A piccolo a piacere esiste un intorno U_a di a tale che $\forall z \in U_a \Rightarrow f(z) \in U_A$, ovvero per $\forall \varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) $\exists \delta > 0$ tale che

$$0 < |z - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - A| < \varepsilon$$

Ovviamente

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re} A \\ \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im} A \end{cases}$$

Definizione. Una funzione $f(z)$ è *continua* in a se

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

Le funzioni complesse di variabile complessa si definiscono generalizzando il caso reale il corrispondente sviluppo in serie di potenze. Per avere funzioni complesse ben definite è necessario provare che tali serie siano convergenti in un opportuno dominio (disco in \mathbb{C}).

Può essere dimostrato nel piano complesso, come già nell'insieme dei reali, un criterio di convergenza di Cauchy.

Teorema. *La successione delle ridotte di una serie è convergente se*

$$|S_N(z) - S_M(z)| < \varepsilon$$

Esempio 4. La funzione esponenziale è definita sull'asse reale come

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Per analogia, nel piano complesso la definiremo come

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

purché la serie sia convergente $\forall z \in \mathbb{C}$, ovvero sia la successione delle ridotte

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} w \in \mathbb{C}$$

Allora diremo che $e^z = w$. Applicando il criterio di convergenza di Cauchy

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} - \sum_{m=0}^M \frac{z^m}{m!} \right| = \left| \sum_{n=M+1}^N \frac{z^n}{n!} \right|$$

per la disuguaglianza triangolare

$$\left| \sum_{n=M+1}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=M+1}^N \frac{|z|^n}{n!} < \varepsilon$$

poiché l'ultima espressione è una serie reale convergente su tutto \mathbb{R} . Abbiamo così dimostrato che la serie esponenziale è convergente su tutto \mathbb{C} , divergendo solo per $z \rightarrow \infty$. Pertanto la funzione esponenziale è definita e non ha singolarità in tutto \mathbb{C} . In generale la convergenza in \mathbb{R}^n (e quindi in particolare in $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$) si dimostra sempre riconducendosi alla convergenza in \mathbb{R} .

Si noti che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

e quindi

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y \quad , \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$$

da cui anche

$$|e^z| = \sqrt{(\operatorname{Re} e^z)^2 + (\operatorname{Im} e^z)^2} = e^x$$

Poiché e^x non si annulla mai in tutto \mathbb{R} , così pure è per $|e^z|$. Essendo 0 l'unico numero complesso di modulo 0, ne concludiamo che la funzione esponenziale non ha zeri in tutto \mathbb{C} .

Esempio 5. Seno e coseno complessi

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \cos z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Queste serie sono convergenti per $\forall z \in \mathbb{C}$. Possiamo generalizzare la formula di Eulero

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(attenzione: ora $z \in \mathbb{C}$ e quindi non si tratta necessariamente di un numero di modulo 1). Invertendo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Gli zeri di $\sin z$ sono tutti reali: $z_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, mentre quelli di $\cos z$ sono locati in $z_k = (k + \frac{1}{2})\pi$.

Esercizio 5. Si verifichi che

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Perciò tutte le proprietà del seno e coseno reali si estendono anche al piano complesso.

Esercizio 6. Seno e coseno iperbolici complessi. Definiti

$$\sinh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

si mostri che valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \sinh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -i \sin iz \\ \cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos iz \end{aligned}$$

Si determinino gli zeri di $\sinh z$ e di $\cosh z$ [Risposta: $z_k = k\pi i$ e $z_k = (k + \frac{1}{2})\pi i$ rispettivamente]

1.3 Differenziabilità e olomorfismo

Dato che una funzione in \mathbb{C} è un caso particolare delle funzioni $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, per definire un concetto di differenziabilità in \mathbb{C} ci rifaremo a quello in \mathbb{R}^2 .

Definizione. Differenziabilità in \mathbb{R}^2 – Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^2 e sia $f(x, y)$ definita su Ω . Allora si dice che f è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ se esiste una forma lineare $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ detta *differenziale*, tale che

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (1.2)$$

con $\omega(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ per $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \alpha \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \beta$$

e scriveremo

$$df|_{x_0, y_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} dy$$

Nel caso complesso si deve però soddisfare una ulteriore richiesta, e cioè che Δx e Δy devono essere combinati nella forma $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, il che ci porta all'introduzione di un nuovo concetto

Definizione. Olomorfismo – Una funzione f definita su un aperto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in $z_0 \in \mathcal{D}$ se f è differenziabile in z_0 , cioè esiste $\gamma \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \gamma\Delta z + \omega(\Delta z)|\Delta z| \quad (1.3)$$

con $\omega(\Delta z) \rightarrow 0$ per $\Delta z \rightarrow 0$. Paragonando la (1.3) con la (1.2) si ottiene

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \gamma\Delta z = \gamma\Delta x + i\gamma\Delta y \quad \implies \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = i\gamma \end{cases}$$

Se f è differenziabile in z_0 allora esiste la derivata di f in z_0

$$\gamma = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \equiv \frac{df}{dz} \Big|_{z_0}$$

z_0 è un punto regolare della funzione $f(z)$. Infine, f è detta olomorfa in $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ se è olomorfa in $\forall z_0 \in \mathcal{D}$. In tal caso, \mathcal{D} è detto dominio di olomorfismo della funzione $f(z)$. I punti non appartenenti al dominio \mathcal{D} si dicono singularità di $f(z)$.

Da questa discussione appare chiaro che ci sono condizioni aggiuntive, rispetto al puro caso \mathbb{R}^2 perché esista la derivata di f in z_0 . Infatti α e β non sono indipendenti, ma $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} = \gamma$ e $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = i\gamma$, ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Ora se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

e la (1.4) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

da cui le condizioni di olomorfismo di Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1.5)$$

Cerchiamo di capire meglio queste condizioni effettuando il seguente cambiamento di variabili $(x, y) \rightarrow (z, \bar{z})$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

da cui, usando la (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Quindi f è olomorfa se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ e perciò può dipendere solo da z e non da \bar{z} .

In particolare, $f(z) = \bar{z}$ e $f(z) = |z|$ non sono funzioni olomorfe.

Date due funzioni $f(z)$, olomorfa in un dominio \mathcal{F} e $g(z)$, olomorfa in un dominio \mathcal{G} , si possono provare facilmente, utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann, i seguenti fatti:

1. la loro somma $S(z) = f(z) + g(z)$ è olomorfa in $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$
2. il loro prodotto $P(z) = f(z)g(z)$ è olomorfo in $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$
3. il dominio di $P(z)$ può essere in alcuni casi più grande di $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ (si pensi per esempio alle funzioni $f(z) = 1/z$ e $g(z) = z$)

4. se $f(z)$ è olomorfa in \mathcal{F} , allora $\frac{1}{f(z)}$ è olomorfa in $\mathcal{F} \setminus \mathcal{Z}$, dove \mathcal{Z} è l'insieme degli zeri di $f(z)$

Esempio 6. Si mostri che la funzione

$$f(z) = z^2$$

è olomorfa in \mathbb{C} e se ne calcoli la derivata prima.

Soluzione - Scriviamo $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Allora

$$f(z) = z^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

e quindi

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

e verifichiamo che le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Si ha allora univocamente

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2(x + iy) = 2z$$

Esercizio 7. Si provino le seguenti affermazioni.

1. Si provi l'olomorfismo della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

in ogni punto $z \in \mathbb{C}$ tranne $z = 0$ e se ne calcoli la derivata prima.

2. Si mostri che le funzioni $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{Z}$ sono olomorfe in tutto \mathbb{C} se $n \geq 0$ e in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ se $n < 0$.

3. Si mostri che anche nel piano complesso vale la regola di derivazione delle potenze

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

4. Si mostri che le funzioni

$$f(z) = \sin z, \quad g(z) = \cos z, \quad h(z) = e^z$$

sono funzioni olomorfe per $z \in \mathbb{C}$ e se ne calcoli la derivata prima.

5. Sfruttando le regole su somma e prodotto di funzioni olomorfe, si mostri che anche le funzioni

$$\tan z, \quad \cot z, \quad \sinh z, \quad \cosh z, \quad \tanh z, \quad \coth z$$

sono olomorfe e per ognuna ne si descriva in dettaglio il dominio di olomorfismo.

6. Si mostri che la funzione $f(z) = z^*$ non è olomorfa

1.4 Integrali nel piano complesso

Passiamo ora al concetto di integrabilità lungo una curva.

Definizione. Curva. Si definisce curva una applicazione continua

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$$

in cui $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono gli estremi di un segmento $[\alpha, \beta]$ della retta reale parametrizzata da $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

I punti $a = \gamma(\alpha)$ e $b = \gamma(\beta)$ sono detti *estremi* della curva. La curva è detta *chiusa* se $a = b$.

1. Una curva è detta di *Jordan* se $\gamma :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{C}$ è biiettiva. Si noti l'esclusione degli estremi. Ciò permette in questa definizione di evitare i nodi, ma permette comunque che $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ e cioè che la curva sia chiusa.
2. Una curva è *regolare* (o differenziabile) se esiste $\gamma'(t)$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, cioè posso disegnare la retta tangente per tutti i punti di γ .
3. Una curva che sia composta dall'unione di più curve regolari, ma che nei punti di unione non è regolare, si dice *regolare a tratti*.
4. Una curva è *rettificabile* (cioè si può rendere equivalente a un segmento in \mathbb{R}) se esiste $\gamma'(t)$ quasi ovunque e $\gamma'(t)$ è assolutamente integrabile, cioè

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt < \infty$$

La lunghezza della curva γ sarà allora definita da

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

Il “quasi ovunque” nella definizione di curva rettificabile significa che anche curve regolari a tratti sono rettificabili.

Definizione. Un dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ è un insieme di punti di \mathbb{C} tale che

1. \mathcal{D} è aperto

2. \mathcal{D} è connesso per archi, cioè per qualunque coppia di punti $a, b \in \mathcal{D}$, a e b possono essere collegati da una curva γ tale che $\gamma(\alpha) = a$ e $\gamma(\beta) = b$, con $\gamma(t) \in \mathcal{D}$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ (cioè tutti i punti della curva γ sono in \mathcal{D}).

Definizione. Un insieme \mathcal{M} è detto connesso se non può essere ripartito in due parti non vuote, cioè $\nexists \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \neq \emptyset$ tali che $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ con $\bar{\mathcal{N}}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{N}_1 \cap \bar{\mathcal{N}}_2 = \emptyset$ (ove con $\bar{\mathcal{N}}$ si indica la chiusura di \mathcal{N} : $\bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \cup \partial\mathcal{N}$).

Ogni insieme connesso per archi è connesso. Viceversa un insieme connesso è sicuramente connesso per archi solo se è aperto.

Definizione. Un dominio \mathcal{D} è semplicemente connesso se il suo bordo $\partial\mathcal{D}$ è connesso. In caso contrario, cioè se il bordo $\partial\mathcal{D}$ non è connesso, il dominio \mathcal{D} si dice molteplimente connesso.

Sia $f(z)$ una funzione in \mathbb{C} di z e γ una curva regolare (o regolare a tratti)

$$\gamma(t) \equiv z(t) = x(t) + iy(t)$$

continua per $t \in [\alpha, \beta]$ e tale che $\gamma(\alpha) \equiv z(\alpha) = a$ e $\gamma(\beta) \equiv z(\beta) = b$. Suddividiamo l'arco (a, b) in n intervalli introducendo $n + 1$ punti sulla curva

$$z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = b$$

Per ogni arco (z_{k-1}, z_k) scegliamo un punto ξ_k e valutiamo la somma

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

Prendiamo poi il limite $n \rightarrow \infty$ con la condizione che $|z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0$ per tutti i k . Se questo limite esiste in maniera indipendente dai punti z_k e ξ_k è detto **integrale di contorno** di $f(z)$ lungo la curva γ e viene indicato con

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Si noti che $\int_a^b f(z) dz$ sarebbe una notazione imprecisa dato che l'integrale dipende dalla curva γ e non solo dai suoi estremi a e b .

Se $a = b$ e γ è una curva chiusa, si scrive

$$I = \oint_{\gamma} f(z) dz$$

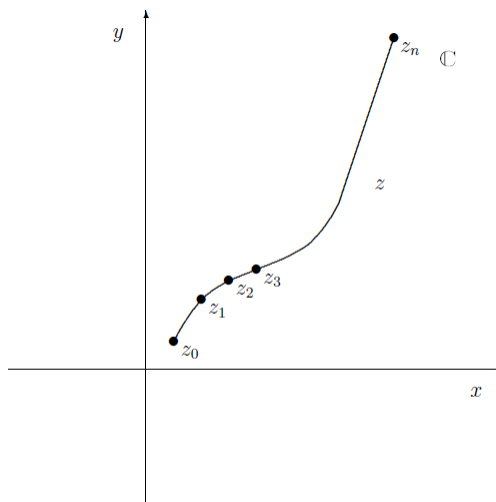


Figura 1.4: Integrazione lungo una curva

Per convenzione si prende come positivo il verso di percorrenza antiorario.

Riportiamo l'integrale di contorno ad ordinari integrali in \mathbb{R} . Poniamo

$$f = u + iv \quad \text{e} \quad z = x + iy$$

Allora

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Gli integrali di contorno godono di alcune proprietà fondamentali, simili a quelle degli integrali ordinari:

1. Linearità

$$\int_{\gamma} A f(z) dz = A \int_{\gamma} f(z) dz \quad , \quad \int_{\gamma} \{f(z) + g(z)\} dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$$

2. Somma dei contorni

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

3. Se γ è percorsa in un certo verso, sia γ^- la stessa curva, ma percorsa in senso opposto. Allora

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

4. Integrazione per parti

$$\int_{\gamma} \frac{df}{dz} g(z) dz = f(z)g(z) \Big|_{z=a}^{z=b} - \int_{\gamma} f(z) \frac{dg}{dz} dz$$

5. Disuguaglianza di Darboux

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma)$$

dove $M = \max |f(z)|$ per $z \in \gamma$ e $\ell(\gamma)$ è la lunghezza della curva γ .

Ora, se la curva è parametrizzata da $t \in [\alpha, \beta]$ e $x = x(t)$, $y = y(t)$ e inoltre

$$dx = \frac{dx}{dt} dt, \quad dy = \frac{dy}{dt} dt$$

allora

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left[u(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \left[v(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt$$

ovvero

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt$$

Se $\gamma \subseteq \mathcal{D}$ con \mathcal{D} dominio in \mathbb{C} e $f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$ in \mathbb{R} (il che implica che $F(z)$ è olomorfa in \mathcal{D}) allora $F(z)$ è detta primitiva di $f(z)$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dF(z(t))}{dt} dt \\ &= F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto il teorema fondamentale del calcolo integrale:

Teorema. *L'integrale di contorno dipende soltanto dai punti estremi a e b se esiste una primitiva della funzione integranda per $\forall z \in \gamma$.*

1.5 Teoremi di Cauchy e di Morera

Una generica $f(z)$ non ammette una primitiva univoca in $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ e perciò il suo integrale dipende dalla curva γ . Tuttavia funzioni analitiche ammettono primitive univoche all'interno di domini semplicemente connessi, perciò i loro integrali dipendono solo dagli estremi delle curve di integrazione.

Teorema. (di Cauchy) – *Sia $f(z)$ olomorfa in un dominio \mathcal{D} aperto e semplicemente connesso. Se $\gamma \subseteq \mathcal{D}$ è una curva chiusa semplice e regolare a tratti, allora*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Dimostrazione. Sia S la superficie delimitata dalla curva chiusa γ . Dalla (1.6), usando il teorema di Gauss¹

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \iint_S dx dy \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \iint_S dx dy \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Ma le relazioni di olomorfismo di Cauchy-Riemann (1.5) hanno come immediata conseguenza che

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

□

Il teorema di Cauchy è fondamentale nello sviluppo della teoria dell'integrazione nel piano complesso. Una sua immediata conseguenza è che l'integrale tra due punti z_1 e z_2 di una funzione olomorfa $f(z)$ è indipendente dalla curva congiungente i due punti, purché essa sia tutta interna al dominio di olomorfismo di f . Infatti, pensando la curva chiusa γ come l'unione di due curve aperte γ_1 e γ_2 che connettono i punti z_1 e z_2

$$0 = \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{z_1, \gamma_1}^{z_2} f(z) + \int_{z_2, \gamma_2}^{z_1} f(z) = \int_{z_1, \gamma_1}^{z_2} f(z) - \int_{z_1, \gamma_2}^{z_2} f(z)$$

da cui

$$\int_{z_1, \gamma_1}^{z_2} f(z) = \int_{z_1, \gamma_2}^{z_2} f(z)$$

¹Ricordiamo che per funzioni in \mathbb{R}^2 vale il ben noto teorema di Gauss

$$\oint_{\gamma} f(x, y) dx = - \iint_S \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \iint_S \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$$

Si tenga a mente però il fondamentale requisito che entrambe le curve devono essere comprese nel dominio di olomorfismo. Finché si rimane in tale dominio, si può arbitrariamente deformare ogni cammino di integrazione tra due punti, se la funzione integranda è olomorfa.

Le cose cambiano drasticamente se la curva chiusa γ racchiude punti in cui la funzione non è olomorfa, per esempio punti singolari della funzione stessa.

Se l'integrale di una funzione analitica non dipende dal cammino ma solo dagli estremi della curva su cui è definito, allora la primitiva $F(z)$, come abbiamo visto, è univocamente definita. Essa è perciò una funzione olomorfa, come facilmente dimostrabile scrivendo

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz' = U(x, y) + iV(x, y)$$

con $z' = x' + iy'$ e

$$U = \int_{z_0}^z [u(x', y') dx' - v(x', y') dy'] \quad , \quad V = \int_{z_0}^z [v(x', y') dx' + u(x', y') dy']$$

Derivando queste relazioni si ottiene che per ogni $z \in \mathcal{D}$ valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= u & , & & \frac{\partial U}{\partial y} &= -v \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= v & , & & \frac{\partial V}{\partial y} &= u \end{aligned} \tag{1.7}$$

e perciò F soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.

L'inverso del teorema di Cauchy è noto come teorema di Morera.

Teorema. (di Morera) – *Se l'integrale di una funzione continua $f(z)$ si annulla*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni curva chiusa $\gamma \subseteq \mathcal{D}$, allora $f(z)$ è olomorfa in \mathcal{D} .

Dimostrazione. Se l'integrale di $f(z)$ lungo una qualsiasi curva chiusa di \mathcal{D} è nullo, allora l'integrale tra due qualsiasi punti z_0 e z di \mathcal{D} è indipendente dal cammino. Posto quindi

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

valgono le relazioni (1.7). Derivandole si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e cioè le condizioni di Cauchy-Riemann per $\forall z \in \mathcal{D}$. Perciò $f(z)$ è olomorfa in \mathcal{D} . \square

Una immediata conseguenza di questa dimostrazione è che

Corollario. *La derivata di una funzione olomorfa in \mathcal{D} è anch'essa olomorfa in \mathcal{D} .*

Le funzioni olomorfe sono tutte differenziabili un numero infinito di volte, cioè sono funzioni *liscie*.

Esempio 7. Calcoliamo

$$I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

con γ curva chiusa che racchiude $z = 0$.

Soluzione - In $z = 0$ la funzione integranda è singolare, quindi non possiamo concludere che l'integrale sia nullo per il teorema di Cauchy. Tale teorema però ci assicura che qualunque curva chiusa, grande o piccola che sia, che racchiuda $z = 0$ darà un valore equivalente dell'integrale, poiché stiamo deformando una curva di integrazione nel dominio di olomorfismo e quindi questa operazione dà contributo nullo.

Dunque possiamo considerare γ per comodità come un cerchio di raggio $\rho = \text{cost.}$ centrato nell'origine. Rappresentiamo z in coordinate polari

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \implies \quad dz = i\rho e^{i\theta} d\theta = iz d\theta$$

e dunque

$$I = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Più in generale

$$\boxed{\oint_{\gamma_w} \frac{dz}{z - w} = 2\pi i}$$

ove γ_w è una qualunque curva chiusa attorno al punto w (spesso si usa la notazione abbreviata \oint_w per indicare l'integrale lungo una curva arbitraria, tutta contenuta in \mathcal{D} , che racchiude w).

Esempio 8. Si calcoli l'integrale

$$I = \oint_0 \frac{dz}{z^2}$$

Soluzione - Come sopra, poniamo $z = \rho e^{i\theta}$ da cui $dz = izd\theta$. Avremo

$$I = i \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z} = \frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = -\frac{1}{\rho} [e^{-i\theta}]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

Esercizio 8.

1. Si dimostri che, per $n \in \mathbb{Z}$

$$\oint_0 z^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1}$$

ove $\delta_{a,b}$ è la delta di Krönecker

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

2. Più in generale si dimostri che

$$\oint_w (z - w)^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1}$$

1.6 Rappresentazione integrale di Cauchy

Dal teorema di Cauchy è possibile dedurre una forma integrale di rappresentazione delle funzioni molto importante.

Teorema. (Rappresentazione integrale di Cauchy) – Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e $\gamma \subseteq \mathcal{D}$ una curva chiusa regolare a tratti. Se $z \notin \gamma$ si ha che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \text{ è interno a } \gamma \\ 0 & \text{se } z \text{ è esterno a } \gamma \end{cases}$$

Dimostrazione. Se z è esterno a γ la funzione $g(w) = \frac{f(w)}{z - w}$ è olomorfa in w in tutta la regione interna a γ . Quindi il suo integrale su una curva chiusa è nullo per il teorema di Cauchy.

Se invece z è interno a γ , si consideri il rapporto

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

Poiché f è olomorfa, essa è anche continua, quindi per ogni $\epsilon > 0$ fissato a piacere, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|f(w) - f(z)| < \epsilon$$

quando $|w - z| < \delta$. Considerando ora un cerchio \mathcal{C} nel piano w centrato su z di raggio $r < \delta$, quindi tutto contenuto in \mathcal{D} , descritto dall'equazione

$$w = z + re^{i\theta}$$

Integrando lungo tale cerchio, grazie alla disuguaglianza di Darboux si ha

$$\left| \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \right| < \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon$$

Nel limite per $\epsilon \rightarrow 0$ tale espressione si annulla, implicando

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0$$

e quindi

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w - z} = f(z) \cdot 2\pi i$$

Poiché la curva \mathcal{C} e la curva γ sono entrambe contenute nel dominio di olomorfismo, possiamo deformare l'integrale da \mathcal{C} a γ aggiungendo un contributo nullo per il teorema di Cauchy, provando quindi che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

quando la curva γ racchiude z . □

Derivando rispetto a z la rappresentazione di Cauchy (all'interno del dominio delimitato dalla curva chiusa γ)

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$$

Iterando la procedura si perviene a una rappresentazione integrale per le derivate di una funzione olomorfa

$$\boxed{\frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw}$$

che come abbiamo visto nel corollario al teorema di Morera esistono e sono tutte olomorfe.

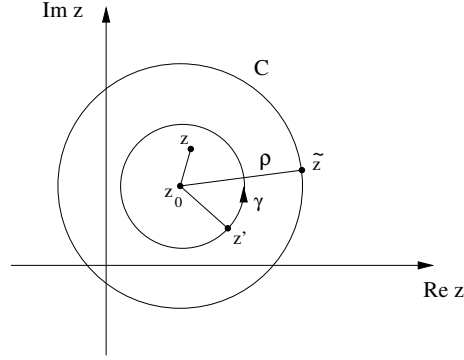


Figura 1.5: Cammino di integrazione γ per la serie di Taylor di $f(z)$ attorno a un punto regolare z_0 . z è il punto in cui è valutata la funzione, z' varia lungo la curva γ nella rappresentazione di Cauchy di $f(z)$. La regione di convergenza è delimitata dal cerchio C di raggio ρ che incontra la prima singolarità \tilde{z} .

1.7 Serie di Taylor

Definizione. Analiticità – Una funzione $f(z)$ definita in un aperto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ si dice *analitica* in Ω se $\forall z_0 \in \Omega$, f è sviluppabile in serie di potenze di $(z - z_0)$, cioè esiste un $\rho(z_0) > 0$, detto *raggio di convergenza*, tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{per } |z - z_0| < \rho(z_0)$$

Una funzione olomorfa è analitica e viceversa: i due concetti sono equivalenti.

Una funzione $f(z)$, olomorfa in un dominio \mathcal{D} ammette infatti in ogni punto $z_0 \in \mathcal{D}$ uno sviluppo in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

con

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f}{dz^k} \right|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Allo scopo di dimostrare questo asserto, osserviamo che la rappresentazione di Cauchy ci permette di scrivere

$$f(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

se la curva γ è tutta appartenente al dominio \mathcal{D} di olomorfismo della funzione f . Ora notiamo che

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0 - z + z_0} = \frac{1}{z' - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}}$$

Se γ è scelta in modo da racchiudere sia il punto z in cui valutiamo la funzione, sia il punto z_0 attorno a cui vogliamo espandere, allora avremo che $|z' - z_0| > |z - z_0|$ e quindi

$$\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1$$

Applicando il ben noto risultato per la somma della serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

valido ove la serie è convergente, cioè per $|z| < 1$ si ha

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^k$$

Poiché la serie così trovata è uniformemente convergente, possiamo sostituirla al posto di $1/(z' - z)$ nella rappresentazione di Cauchy e integrare termine a termine, ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{k+1}} dz'$$

da cui l'assunto.

Possiamo sempre deformare γ ad assumere la forma di un cerchio centrato in z_0 . Possiamo dilatare questo cerchio finché esso non incontri un punto \tilde{z} che sia una singolarità di $f(z)$. Quando il cerchio raggiunge tale punto esso non può più essere tutto nel dominio di olomorfismo \mathcal{D} di f e quindi la rappresentazione di $f(z)$ tramite serie di Taylor non è più valida. In altre parole, abbiamo trovato che il raggio di convergenza della serie di Taylor rappresentante $f(z)$ si estende fino a trovare la prima singolarità \tilde{z} di f e quindi la regione di convergenza della serie è data da un cerchio di raggio $\rho(z_0) = |\tilde{z} - z_0|$.

Esempio. Si sviluppi la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

attorno al punto $z_0 = 3$ in serie di Taylor e ne si determini il raggio di convergenza.

Soluzione - Questa funzione è singolare in un unico punto $\tilde{z} = 1$. Il raggio di convergenza della serie di Taylor attorno a $z_0 = 3$ sarà dunque $\rho(3) = |z_0 - \tilde{z}| = |3 - 1| = 2$.

Per trovare esplicitamente la serie possiamo calcolare le derivate successive

$$\begin{aligned} f(z) &= (1-z)^{-1} \\ f'(z) &= (1-z)^{-2} \\ f''(z) &= 2(1-z)^{-3} \\ f'''(z) &= 2 \cdot 3(1-z)^{-4} \\ &\dots \\ f^{(n)}(z) &= n!(1-z)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

e poi valutarle in $z = 3$ ottenendo così i coefficienti della serie in maniera diretta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (z-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-3)^n$$

1.8 Zeri e singolarità di una funzione

Definizione. Un punto z_0 è uno zero di ordine n di una funzione analitica se in tale punto la funzione e le sue prime $n-1$ derivate si annullano e la n -ima è non nulla

$$z_0 \text{ è un zero di ordine } n \iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Gli zeri sono punti regolari della funzione e attorno ad essi la funzione è rappresentabile in serie di Taylor. Poiché i primi n termini della serie sono nulli, la serie potrà essere scritta come

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_n (z-z_0)^n + a_{n+1} (z-z_0)^{n+1} + \dots \\ &= (z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z-z_0)^k = (z-z_0)^n g(z) \end{aligned}$$

ove $g(z)$ è un'altra funzione analitica in z_0 , ma ivi non nulla. Da ciò discende che gli zeri di una funzione analitica sono punti isolati, ovvero si può sempre trovare

attorno a uno zero di una funzione analitica un intorno di raggio $\epsilon > 0$ opportuno in cui la funzione non presenta altri zeri. Da ciò discende che gli zeri di una funzione costituiscono un insieme discreto di punti nel dominio di analiticità \mathcal{D} . Un eventuale punto di accumulazione di zeri (cioè un punto di cui ogni intorno di raggio $\epsilon > 0$ piccolo a piacere contiene sempre almeno uno zero della funzione) è forzatamente fuori da \mathcal{D} , e quindi una singolarità di $f(z)$.

Definizione. Una singolarità di una funzione analitica $f(z)$ si dice isolata se esiste almeno un intorno di raggio $\epsilon > 0$ in cui non sono presenti altre singolarità di $f(z)$.

1.9 Serie di Laurent

Supponiamo che $f(z)$ sia una funzione olomorfa in un dominio $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \setminus \{z_0\}$, ovvero olomorfa ovunque in \mathcal{D} tranne che nel punto z_0 dove essa presenta una singolarità isolata. Vogliamo ora trovare una rappresentazione in serie della funzione attorno al punto singolare z_0 . Allo scopo, consideriamo un punto generico $z \in \mathcal{D}_0$, per il quale varrà la rappresentazione di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\oint_{\gamma'} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0$$

lungo il cammino γ' di fig.1.6. Esso è nullo in quanto la funzione integranda è olomorfa all'interno di γ' , essendo il punto z ove essa presenterebbe una singolarità esterno a tale cammino. Consideriamo ora i cammini parziali di cui γ' è composto. Il cammino γ_2 risulta percorso in senso antiorario, mentre il cammino γ_1 è percorso in senso orario. Inoltre, i due tratti di collegamento A e B possono essere avvicinati così tanto da coincidere e vengono percorsi una volta in un senso e poi anche nel senso opposto, dunque danno contributo zero a qualunque integrale di funzione olomorfa. Pertanto

$$\oint_{\gamma'} = \oint_{\gamma_2} - \oint_{\gamma_1} - \oint_C$$

e si ha

$$\oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \oint_{\gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \oint_{\gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

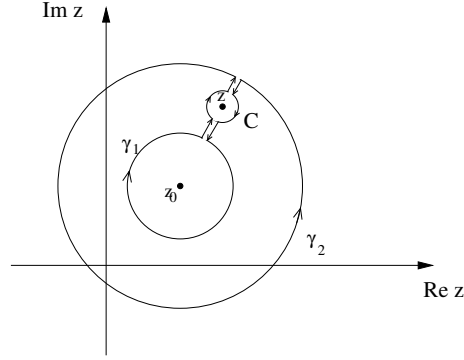


Figura 1.6: Cammino di integrazione per la serie di Laurent. z_0 è la singolarità e z il punto in cui la funzione viene valutata. Il dominio di analiticità si estende oltre γ_2 , fino alla prossima singolarità, ma non comprende, ovviamente, z_0 .

e quindi la rappresentazione integrale di Cauchy per $f(z)$ può essere scritta come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz'$$

L'integrale lungo γ_2 può essere trattato esattamente come nel caso della serie di Taylor, infatti si ha $|z' - z_0| > |z - z_0|$. Quindi questa parte dell'integrale fornisce

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

con

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Invece nel caso di γ_1 dovremo porre attenzione al fatto che $|z' - z_0| < |z - z_0|$ e quindi la corretta manipolazione è

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{z' - z_0 - z + z_0} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z' - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^l$$

che, integrata termine a termine fornisce (ponendo $k = l + 1$)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}$$

con

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(z)(z - z_0)^{k-1} dz$$

Dunque risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}$$

che possiamo convenientemente scrivere come

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

con

$$d_k = \begin{cases} a_k & \text{per } k \geq 0 \\ b_{-k} & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$d_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

lungo qualsiasi cammino $\gamma \subseteq \mathcal{D}_0$ che racchiuda il punto singolare z_0 .

Lo sviluppo di Laurent ci permette di classificare le singolarità isolate.

- Se per una funzione $f(z)$ il punto z_0 è una singolarità isolata con uno sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

cioè una serie troncata dalla parte delle potenze negative a un certo n finito, si dice che la singolarità in z_0 è un **polo** di ordine n . La parte delle potenze negative

$$\sum_{k=-n}^{-1} d_k (z - z_0)^k$$

viene detta *parte principale* della funzione $f(z)$. Si noti che in presenza di un polo di ordine n possiamo scrivere la funzione

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

con $g(z)$ funzione olomorfa in z_0 e ivi non nulla.

- Se invece la serie non si tronca mai dalla parte delle potenze negative, avremo una **singolarità essenziale**. Le singolarità essenziali isolate hanno proprietà più complicate rispetto ai poli. Per esempio, nell'intorno di una singolarità essenziale una funzione prende tutti i valori possibili nel piano complesso, ovvero oscilla selvaggiamente (teorema di Weierstrass). Inoltre, *un punto di accumulazione di zeri o di poli di una funzione è sempre una singolarità essenziale isolata*.

Esempio. Si sviluppi in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{e^{-2iz}}{(z-i)^3}$$

intorno a $z = i$. Determinare il raggio di convergenza di tale serie.

Soluzione - La funzione ha evidentemente un polo di ordine 3 in $z = i$. Essendo il numeratore e^{-2iz} una funzione intera, non vi sono altre singolarità al finito.

Un modo efficiente di sviluppare in serie di Laurent è quello di passare alla nuova variabile $\zeta = z - i$, in termini della quale la funzione diventa

$$\tilde{f}(\zeta) = \frac{e^{-2i(\zeta+i)}}{\zeta^3} = e^2 \frac{e^{-2i\zeta}}{\zeta^3}$$

che ora presenta un polo di ordine 3 in $\zeta = 0$. Sviluppiamo in serie di Taylor il numeratore attorno a $\zeta = 0$ ottenendo

$$\tilde{f}(\zeta) = \frac{e^2}{\zeta^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2i\zeta)^k}{k!} = e^2 \left(\frac{1}{\zeta^3} - \frac{2i}{\zeta^2} - \frac{2}{\zeta} + \frac{4i}{3} + \frac{2\zeta}{3} + \dots \right)$$

ovvero, in termini della variabile originale z

$$f(z) = e^2 \left(\frac{1}{(z-i)^3} - \frac{2i}{(z-i)^2} - \frac{2}{z-i} + \frac{4i}{3} + \frac{2}{3}(z-i) + \dots \right)$$

1.10 Residui

Definizione. Sia z_0 un punto singolare isolato di una funzione analitica $f(z)$. Si dice residuo di $f(z)$ nel punto z_0 la quantità

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0} f(z) dz$$

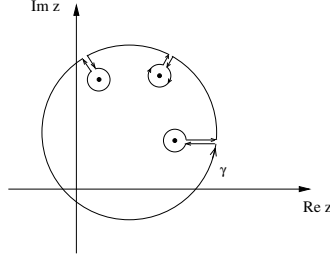


Figura 1.7: Teorema dei residui

Osservazione. Se invece il punto z_0 è regolare per la funzione $f(z)$, il residuo risulta essere 0 banalmente per il teorema di Cauchy.

Esempio. Calcoliamo

$$\text{Res}_{z=0} \frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i = 1$$

Teorema. (dei residui) – L'integrale di una funzione $f(z)$ esteso a una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset \mathcal{D}$ semplicemente connessa e non passante per nessun punto singolare di $f(z)$ è uguale a $2\pi i$ volte la somma dei residui delle singolarità z_k ($k = 1, \dots, n$) di $f(z)$ interne a γ

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (1.8)$$

Dimostrazione. Si consideri la curva γ' disegnata in fig.1.7 (dove abbiamo esemplificato il problema con 3 singolarità z_1, z_2, z_3 . Essa è tutta nella regione di analiticità di $f(z)$ e non racchiude alcuna singolarità. Perciò, per il teorema di Cauchy

$$\oint_{\gamma'} f(z) dz = 0$$

Tuttavia questa curva può essere spezzata nei cerchietti che aggirano le singolarità e danno proprio la definizione dei residui, più la curva γ originale, più i tratti che collegano γ ai cerchietti dei residui. Poiché in assenza di singolarità posso deformare i cammini di integrazione a piacere, posso rendere questi ultimi tratti, che vengono percorsi una volta in un senso e un'altra in senso opposto, praticamente coincidenti. I loro contributi all'integrale perciò si annullano e rimane

$$\oint_{\gamma'} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{z_k} f(z) dz = 0$$

Il segno meno davanti agli integrali sui cerchietti viene dal fatto che questi sono percorsi in senso orario, mentre la convenzione adottata è che il senso positivo è quello antiorario. Paragonando con la definizione di residuo si ottiene la (1.8). \square

Per valutare esplicitamente i residui di una funzione, cominciamo coll'occuparci del caso in cui z_0 è un polo di ordine n . Allora nell'intorno di z_0 potremo scrivere

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

con $g(z)$ olomorfa nell'intorno di z_0 . Dalla definizione di residuo

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz$$

La rappresentazione di Cauchy per la derivata k -ima di una funzione olomorfa

$$\frac{d^k g(z)}{dz^k} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_z \frac{g(z')}{(z' - z)^{k+1}} dz'$$

ci fornisce

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1} g(z)}{dz^{n-1}} \right|_{z=z_0}$$

e quindi

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]$$

e nel caso particolare di polo semplice

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]$$

Se poi confrontiamo questi risultati con le espressioni per i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent per $f(z)$ attorno a z_0 vediamo subito che

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = d_{-1}$$

ovvero che il residuo di una funzione in corrispondenza di una singolarità isolata corrisponde al coefficiente del termine in $(z - z_0)^{-1}$ nel suo sviluppo di Laurent. Questa ultima formula è vera non solo per poli ma anche per singolarità essenziali, purché isolate.

Se la variabile z a sua volta è funzione analitica di un'altra variabile complessa t

$$z = z(t)$$

vale la formula (immediatamente ottenibile dalle usuali regole di cambiamento di variabili negli integrali)

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{t=t_0} \left(f(z(t)) \frac{dz}{dt} \right)$$

Ciò permette di studiare anche il residuo del punto all'infinito di una funzione $f(z)$. Ciò può essere fatto agevolmente con il cambiamento di variabile

$$z = \frac{1}{t}$$

che manda il punto $z = \infty$ in $t = 0$

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{t=0} \left(f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} \right)}$$

Il segno meno che compare nella formula per il residuo all'infinito è compatibile con il fatto che la curva che racchiude $z = \infty$, se viene presa come positiva in senso antiorario, sarà in senso orario se vista da $z = \infty$ stesso.

Si noti che possono esistere funzioni che sono regolari in $z = \infty$ ma che tuttavia hanno ivi un residuo non nullo. Per esempio

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

prende valore 0 all'infinito e perciò è regolare, ma

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z} = -\operatorname{Res}_{t=0} \frac{1}{t} = -1$$

Si noti che la somma di questo residuo e di quello dell'unica altra singolarità della funzione in tutto \mathbb{C} è zero.

Vale infatti un teorema generale sulla somma dei residui di una funzione:

Teorema. *Se una funzione $f(z)$ ha solo singolarità isolate, la somma di tutti i suoi residui, compreso l'eventuale residuo all'infinito, è nulla.*

Dimostrazione. Si consideri una curva chiusa γ che racchiude un certo numero di singolarità, che chiameremo interne e lascia fuori le altre che chiameremo esterne. Il teorema dei residui ci dice che l'integrale

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ interni}}} \text{Res} f(z)$$

ma anche

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = -2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ esterni}}} \text{Res} f(z)$$

Il segno meno nella seconda equazione è dovuto al fatto che γ racchiude anche le singolarità esterne, girandoci però attorno in senso orario anziché antiorario. Il confronto delle due equazioni dice subito che

$$\sum_{\substack{z=z_k \\ \text{tutti gli } z_k}} \text{Res} f(z) = 0$$

□

1.11 Classificazione delle funzioni complesse

Elenchiamo qui alcune proprietà immediate o facilmente deducibili dai risultati precedenti sulle funzioni complesse *monodrome* (cioè a un sol valore).

1. Teorema di Liouville: a parte le costanti, non esistono funzioni che non abbiano almeno una singolarità (che può essere polare o essenziale).
2. Una funzione senza singolarità essenziali, sia al finito che all'infinito, è necessariamente una funzione razionale, cioè un rapporto di polinomi.
3. Una funzione senza singolarità al finito è detta funzione intera ed è rappresentabile con una serie di potenze attorno a $z = 0$ (serie di McLaurin) con raggio di convergenza infinito.
4. Una funzione razionale e intera è necessariamente un polinomio. Esso presenterà all'infinito un polo di ordine pari al suo grado.
5. Una funzione che abbia in un dominio \mathcal{D} solo poli o punti regolari si dice meromorfa in \mathcal{D} . Una funzione su \mathbb{C} che presenti solo poli al finito, con al più l'eccezione di una singolarità essenziale all'infinito si dice meromorfa su \mathbb{C} .
6. Tutte le funzioni monodrome dotate di singolarità essenziali sono funzioni trascendenti.

1.12 Calcolo di integrali, lemma di Jordan

Il teorema dei residui permette il calcolo di una quantità di integrali definiti sull'asse reale che non sapremmo valutare con metodi elementari. Infatti permette di valutare, per esempio, integrali del tipo

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

Infatti si sostituisca $z = e^{i\theta}$ e quindi $d\theta = -i \frac{dz}{z}$ in modo che

$$f(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow F(z) = f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

per ricondurre gli integrali di questo tipo a integrali sul cerchio di raggio 1 nel piano complesso di z

$$I = \oint_C F(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res} F(z)$$

dove z_k sono le singolarità di $F(z)$ interne al cerchio C di raggio 1.

Esempio 9. Sia

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2}$$

La sostituzione $z = e^{i\theta}$ porta a

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_C \frac{dz}{z} \frac{1}{1 - p\left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2} = -i \oint_C \frac{dz}{z - pz^2 - p + p^2z} \\ &= -i \oint_C \frac{dz}{(z - p)(1 - pz)} = \frac{i}{p} \oint_C \frac{dz}{(z - p)\left(z - \frac{1}{p}\right)} \end{aligned}$$

Nel cerchio C di raggio 1 la funzione integranda ha due poli $z_1 = p$ che è interno a C se $|p| < 1$ e $z_2 = \frac{1}{p}$, interno a C se $|p| > 1$. Distinguendo quindi i due casi:

- per $|p| < 1$

$$I = 2\pi i \text{Res}_{z=p} \frac{i/p}{(z - p)\left(z - \frac{1}{p}\right)} = -\frac{2\pi}{p} \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{z - \frac{1}{p}} = \frac{2\pi}{1 - p^2}$$

- per $|p| > 1$

$$I = 2\pi i \text{Res}_{z=\frac{1}{p}} \frac{i/p}{(z - p)\left(z - \frac{1}{p}\right)} = -\frac{2\pi}{p} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{p}} \frac{1}{z - p} = \frac{2\pi}{p^2 - 1}$$

I due risultati si possono riassumere nell'unica formula

$$I = \frac{2\pi}{|1 - p^2|} \quad , \quad |p| \neq 1$$

Molti integrali sono poi valutabili grazie all'ausilio di un importante teorema noto come lemma di Jordan.

Lemma. (di Jordan) – Sia γ_R una semicirconferenza nel semipiano $\text{Im } z > 0$ centrata nell'origine $z = 0$ e di raggio R e sia $f(z)$ una funzione che tende a zero quando $|z| \rightarrow \infty$ uniformemente per $0 \leq \arg z \leq \pi$. Allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0$$

per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Omettiamo la dimostrazione di tale teorema, notando però che esso vale anche nel caso in cui $\alpha = 0$ purché in questo caso la funzione $f(z)$ tenda a 0 per $z \rightarrow \infty$ più velocemente di $1/z$. In tal caso si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Analoghe considerazioni si possono fare nel semipiano $\text{Im } z < 0$ con $\alpha \leq 0$.

Esempio. Si calcoli

$$I = \int_0^\infty \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz$$

Soluzione - Innanzitutto notiamo che la funzione integranda

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

è pari e quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$$

Il comportamento all'infinito di $f(z)$ è

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z^2}$$

e quindi si può applicare il lemma di Jordan con $\alpha = 0$ poiché $f(z)$ va a infinito più velocemente di $1/z$. $f(z)$ ha due poli nel semipiano superiore: $z_1 = i$ e $z_2 = 2i$. Ora possiamo usare il teorema dei residui per valutare l'integrale di $f(z)$ lungo una curva chiusa Γ composta da un tratto di retta reale da $-R$ a R e dalla curva γ_R del lemma di Jordan

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) \right)$$

Ma per il lemma di Jordan in secondo integrale su γ_R è nullo nel limite $R \rightarrow \infty$, mentre il primo diventa proprio $2I$. Ora

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{i^2}{2i(i^2 + 4)} = \frac{i}{6} \\ \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{4i^2}{(4i^2 + 1)4i} = -\frac{i}{3} \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

1.13 Rapidi cenni sulle funzioni polidrome

Nel campo reale siamo abituati a considerare le funzioni come applicazioni a un sol valore. Invece nel campo complesso possono verificarsi fenomeni interessanti in cui l'estensione naturale delle funzioni reali porta a definire oggetti $f(z)$ che possono assumere più valori per un argomento dato z .

Più specificatamente chiameremo monodrome attorno a un punto z_0 le funzioni che, effettuato un intero giro attorno a z_0 , cioè sotto la sostituzione

$$z - z_0 \rightarrow (z - z_0)e^{2\pi i}$$

tornano ad assumere lo stesso valore

$$f(\tilde{z}) = f(z)$$

ove

$$\tilde{z} = z_0 + (z - z_0)e^{2\pi i}$$

Alcune funzioni però acquisiscono dopo un tale giro un nuovo valore

$$f(\tilde{z}) \neq f(z)$$

A queste daremo il nome di **funzioni polidrome**. Il punto z_0 attorno a cui ciò avviene è detto in questo caso **punto di diramazione**. Il punto di diramazione va considerato come un punto singolare della funzione, anche quando essa ivi assume un valore finito o nullo.

Esempio. Consideriamo l'estensione al piano complesso della funzione radice quadrata. Cercando di mantenere le stesse proprietà del caso reale, per esempio che $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \sqrt{y}$ vediamo di definire la funzione

$$f(z) = \sqrt{z} \equiv z^{\frac{1}{2}}$$

Usando la rappresentazione polare per il numero complesso $z = |z|e^{i \arg z}$ risulta chiaro che

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|e^{i \arg z}} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2} \arg z}$$

Se ora effettuiamo un giro intero attorno a $z = 0$

$$z \rightarrow ze^{2\pi i}$$

la funzione si comporta come segue

$$\sqrt{z} \rightarrow \sqrt{ze^{2\pi i}} = \sqrt{z}e^{\pi i} = -\sqrt{z}$$

e perciò assume un nuovo valore, opposto al valore precedente. Se effettuiamo un secondo giro è immediato rendersi conto che si ritorna al valore di origine. Si dice in questo caso che la polidromia della radice quadrata è di ordine 2, ovvero che il punto di diramazione in $z = 0$ della funzione \sqrt{z} è di ordine 2.

Esempio. Le radici n -ime di un numero complesso presentano in $z = 0$ un punto di diramazione di ordine n . Infatti

$$z^{1/n} \rightarrow (ze^{2\pi i})^{1/n} = z^{1/n}e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

e si torna al valore iniziale solo dopo n giri.

L'ordine di un punto di diramazione può essere finito (si considerino per esempio le radici n -ime $z^{1/n}$) oppure infinito, come mostrato da questo altro importante esempio.

Esempio. Il logaritmo di un numero complesso è dato da

$$\log z = \log(|z|e^{i \arg z}) = \log |z| + i \arg z$$

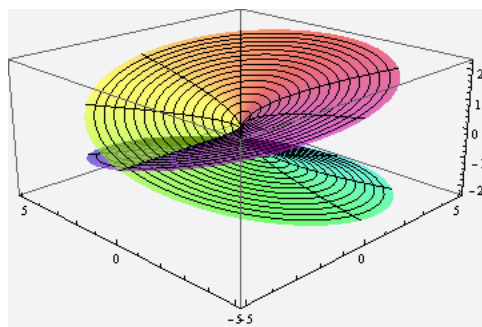


Figura 1.8: Superficie di Riemann \mathcal{R} per la radice quadrata

A ogni giro $z \rightarrow ze^{2\pi i}$ la funzione cambia di valore

$$\log z \rightarrow \log(ze^{2\pi i}) = \log z + 2\pi i$$

Dopo k giri (antiorari per k positivo e orari per k negativo) essa assume il valore

$$\log z + 2k\pi i$$

Le funzioni polidrome possono essere ricondotte ad applicazioni a un solo valore, ma non come funzioni $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, bensì come funzioni

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{R}$$

ove \mathcal{R} è una varietà detta **superficie di Riemann** e composta da più repliche di \mathbb{C} “cucite” l’una all’altra da un **taglio**, cioè una linea che collega due punti di diramazione della funzione.

Esempio. Consideriamo la radice quadrata. Oltre al punto di diramazione in $z = 0$ essa possiede anche un punto di diramazione all’infinito. Infatti ponendo $z = 1/t$ si vede subito che $z^{1/2} = t^{-1/2}$. Quest’ultima $t^{-1/2}$ possiede ovviamente un punto di diramazione in $t = 0$, da cui l’asserto. Ora pensiamo di operare un taglio nel piano complesso da zero a infinito, per esempio lungo l’asse reale negativo (come si sceglie il taglio per una data funzione è frutto di convenzione). Il taglio è la linea lungo la quale i due piani complessi in cui la funzione \sqrt{z} prende i due suoi diversi valori vengono a contatto e girando attorno ai punti di diramazione si “scivola” da un piano nell’altro (vedi fig.1.8). Più complessa è la situazione del logaritmo, dove il numero di piani complessi costituenti la superficie di Riemann sono infiniti, andando a costituire una struttura tipo “scala a chiocciola” caratteristica di questo tipo di singolarità di diramazione (vedi fig.1.9).

Altre funzioni possono avere superfici di Riemann anche molto complicate (vedi per esempio fig.1.10).

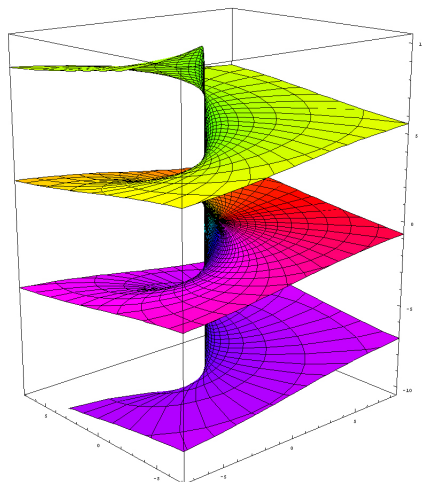


Figura 1.9: Superficie di Riemann \mathcal{R} per il logaritmo

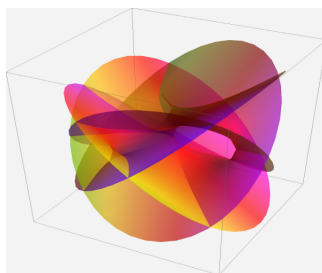


Figura 1.10: Superficie di Riemann \mathcal{R} per la funzione $\sqrt{z^2 + \frac{1}{z}}$

Capitolo 2

Alcune funzioni utili

2.1 Delta di Dirac

Definizione. Data una successione di funzioni $g_1(x), g_2(x), \dots$, anche se non esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$, ma esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) f(x) dx$$

rispetto a tutte le funzioni $f(x) \in \mathcal{F}$, ove \mathcal{F} è una certa classe di funzioni, si dice che la successione $g_n(x)$ identifica una **distribuzione** $\gamma(x)$ rispetto a \mathcal{F} nell'intervallo $[a, b]$, definita formalmente dall'identità

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) f(x) dx = \int_a^b \gamma(x) f(x) dx$$

ovvero, con una scrittura formalmente impropria ma efficace

$$\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

L'oggetto $\gamma(x)$ così introdotto non può essere considerato una funzione in senso stretto. Ecco perché si preferisce indicarlo con il termine distribuzione.

Definizione. La distribuzione **delta di Dirac** $\delta(x)$ è definita dalla relazione

$$\forall f \quad : \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y)$$

In particolare per $f(x) = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2.1}$$

Si possono dare infinite definizioni della delta di Dirac come distribuzione. In particolare vale il seguente

Teorema. *Data una funzione continua e pari $D(x) = D(-x)$ che sia assolutamente integrabile e normalizzata a 1*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x)| dx < \infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} D(x) dx = 1$$

allora la successione $d_n(x) = nD(nx)$ definisce una distribuzione delta di Dirac

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(x) = \delta(x)$$

Alcuni esempi pratici di successioni, definenti la delta di Dirac, che sono spesso usate sono

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \\ \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 nx}{nx^2} \\ \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} \\ \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} \end{aligned}$$

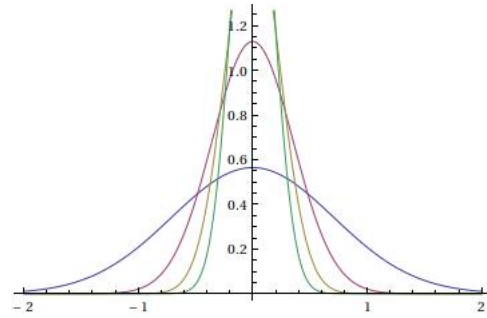


Figura 2.1: *Successione di gaussiane che genera la delta di Dirac*

Dall'ultima di queste relazioni si può anche ottenere una importantissima rappresentazione integrale per la delta di Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

nonché la seguente utilissima regola di somma

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} = \delta(x) \quad (2.2)$$

La delta di Dirac ha importanti proprietà formali

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(-x) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad a \in \mathbb{R} \\ \delta(x-y)f(x) &= \delta(x-y)f(y) \\ x\delta(x) &= 0\end{aligned}$$

Infine, considerata una funzione $y(x)$ avente n zeri semplici x_i

$$\delta(y(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|}$$

da cui in particolare

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \}$$

2.1.1 Funzione theta di Heaviside

Connessa alla delta di Dirac è la funzione **theta di Heaviside** o funzione gradino

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

che ha la delta come derivata

$$\frac{d\Theta}{dx} = \delta(x)$$

e quindi è la primitiva (in senso formale delle distribuzioni) della delta

$$\int \delta(x) dx = \Theta(x) + \text{cost.}$$

compatibilmente con la (2.1).

La Θ ha una utile rappresentazione integrale

$$\Theta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k - i\epsilon} dk$$

2.1.2 Delta di Dirac multidimensionali

La delta di Dirac può essere agevolmente generalizzata a più dimensioni. Per esempio, in \mathbb{R}^3 si definisce la delta tridimensionale dipendente da un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ come

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

Ovviamente anche per la delta tridimensionale valgono le rappresentazioni di somma e integrale

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k$$

dove $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ è un vettore di interi e $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$.

Più in generale in \mathbb{R}^N , detto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$

$$\delta(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^N \delta(x_n)$$

e valgono le rappresentazioni

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^Nk$$

Ricordando la definizione del simbolo di Krönecker

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

per il quale

$$\sum_i c_i \delta_{i,j} = c_j$$

vediamo che la delta di Dirac può essere considerata come una generalizzazione del simbolo di Krönecker per indici che diventano continui, cioè invece di avere dei vettori $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots)$, cioè collezioni di numeri etichettati da un indice discreto i , abbiamo delle funzioni $f(x)$, pensabili come collezioni di numeri etichettate da un parametro continuo x .

2.1.3 Derivate della delta di Dirac

La distribuzione *derivata della delta di Dirac* è definita come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - x') dx = -f'(x')$$

come si può vedere agevolmente calcolando la derivata della definizione della delta

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \frac{d}{dx} \delta(x - x') dx'$$

Più in generale possiamo definire la derivata n -sima della delta attraverso la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x') dx = (-1)^n f^{(n)}(x')$$

dove col simbolo $f^{(n)}$ intendiamo la derivata n -sima.

2.2 Funzione Gamma di Eulero

Attorno alla prima metà del diciottesimo secolo si iniziò a considerare il problema di trovare una funzione continua in grado di interpolare l'operazione di fattoriale ai numeri reali. Verso la fine degli anni '20 del 1700 il problema venne risolto da Eulero tramite l'introduzione di una delle funzioni speciali più utili dal punto di vista computazionale. Si tratta della *funzione di Eulero* o *funzione Gamma*.

Dal punto di vista analitico la funzione Gamma gode di ottime proprietà: è monodroma, meromorfa e analitica in tutti i punti del piano complesso ad eccezione degli interi non positivi. Esistono molti modi equivalenti di scrivere la funzione Gamma; la rappresentazione più utile ai nostri scopi deriva da considerare il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$



Figura 2.2: *L. Euler (1707-1783)*

La prima cosa da osservare è che l'integrale è improprio e risulta ben definito all'infinito per ogni valore di z complesso, in quanto l'esponenziale decresce più velocemente di ogni potenza. In un intorno dell'origine, invece, l'integranda si comporta come

$$t^{z-1}e^{-t} = t^{z-1}(1 + O(t)) \sim t^{z-1} \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

e risulta dunque integrabile se $\operatorname{Re}[z] > 0$. Possiamo quindi definire la funzione Gamma come

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} dt} \quad \text{per } \operatorname{Re}[z] > 0 \quad (2.3)$$

Per completezza, tra le molte definizioni alternative di questa funzione ricordiamo

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right] \quad (\text{Euler, 1729})$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (\text{Gauss, 1812})$$

valide per ogni numero complesso z , tranne gli interi non positivi.

2.2.1 Proprietà della funzione $\Gamma(z)$

La relazione più importante soddisfatta dalla funzione Gamma può essere ottenuta considerando

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt$$

ed integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^z e^{-t} dt &= [t^z(-e^{-t})]_0^\infty - \int_0^\infty z t^{z-1}(-e^{-t}) dt = \\ &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z) \end{aligned}$$

quindi la funzione Gamma soddisfa, per ogni numero complesso z con $\operatorname{Re}[z] > 0$, la relazione

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)} \quad (2.4)$$

La relazione funzionale precedente può essere utilizzata per ricondurre la funzione Gamma al fattoriale, infatti considerando $z = n > 0, n \in \mathbb{N}$ e applicando ripetutamente la (2.4) otteniamo

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \cdots = \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \Gamma(1) \end{aligned}$$

ma siccome

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

abbiamo che per valori interi positivi essa si riduce al fattoriale

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \quad (2.5)$$

Si hanno quindi i valori particolari

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 0! = 1 \\ \Gamma(2) &= 1! = 1 \\ \Gamma(3) &= 2! = 2 \\ \Gamma(4) &= 3! = 6 \\ \Gamma(5) &= 4! = 24 \end{aligned}$$

Esempio 10. Per meglio cogliere l'utilità dal punto di vista del calcolo della funzione Gamma si può, ad esempio, considerare la quantità

$$I = \int_0^{\infty} p(x) e^{-ax} dx$$

con $a > 0$ e $p(x)$ polinomio di grado N arbitrario che quindi possiamo scrivere come

$$p(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k$$

Il cambio di variabile $y = ax$ ci permette di riscrivere

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} p\left(\frac{y}{a}\right) e^{-y} \frac{dy}{a} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^N c_k \left(\frac{y}{a}\right)^k e^{-y} \frac{dy}{a} = \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{c_k}{a^{k+1}} \int_0^{\infty} y^k e^{-y} dy = \sum_{k=0}^N \frac{c_k}{a^{k+1}} \int_0^{\infty} y^{(k+1)-1} e^{-y} dy = \\ &= \sum_{k=0}^N c_k \frac{\Gamma(k+1)}{a^{k+1}} = \sum_{k=0}^N c_k \frac{k!}{a^{k+1}} \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^N c_k x^k \right) e^{-ax} dx = \sum_{k=0}^N c_k \frac{k!}{a^{k+1}}$$

che mostra come un integrale il cui calcolo esplicito richiederebbe l'impiego di numerose integrazioni per parti può essere ridotto al semplice calcolo di una sommatoria di fattoriali opportunamente pesati.

Un'altra classe di valori della funzione Gamma per i quali si può dare una forma facile da calcolare è costituita da numeri seminteri positivi, cioè del tipo $(2n+1)/2$ (con $n = 1, 2, \dots$). Utilizzando la relazione funzionale (2.4) si ha infatti

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2} \Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right) = \\ &= \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

dove con il simbolo di *semifattoriale* si intende

$$\begin{aligned} (2n-1)!! &= (2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \\ (2n)!! &= (2n)(2n-2)\dots 4 \cdot 2 \\ 0!! &= 1 \end{aligned}$$

che riduce il calcolo al valore di $\Gamma(1/2)$, cioè

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

passando alla nuova variabile $u^2 = t$ si ottiene l'integrale

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

in conclusione

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

Alcuni valori notevoli sono riportati di seguito

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \approx 1.77245 \\
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886227 \\
\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 1.32934 \\
\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \approx 3.32335 \\
\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) &= \frac{7}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \approx 11.6317
\end{aligned}$$

2.2.2 Comportamento asintotico

La definizione (2.3) può essere utilizzata, attraverso il metodo della *fase stazionaria*, per ottenere la famosa *approssimazione di Stirling* per $n!$, esplicitamente

$$n! = \sqrt{2\pi n} \, n^n e^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (2.6)$$

spesso utilizzata in teoria della probabilità e in meccanica statistica, ad esempio.

2.2.3 Relazione con la trasformata di Mellin

Riprendiamo la definizione (2.3) della funzione Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

passando alla nuova variabile definita da $t = au$, con $a > 0$, otteniamo

$$\Gamma(z) = a^z \int_0^\infty u^{z-1} e^{-au} du$$

che può essere riscritta come

$$\boxed{\frac{1}{a^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty u^{z-1} e^{-au} du} \quad (2.7)$$

quest'ultima espressione è nota come *trasformata di Mellin* di e^{-au} e risulta particolarmente comoda nel calcolo di alcune classi di integrali.

Esempio 11. Si considerino, a titolo di esempio, la famiglia di integrali

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

che risultano ben definiti per ogni n naturale. Utilizzando la trasformata di Mellin l'integranda può essere riscritta come

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty u^n e^{-(1+x^2)u} du$$

quindi

$$I_n = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dx \int_0^\infty du u^n e^{-(1+x^2)u}$$

invertendo l'ordine di integrazione

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty du u^n e^{-u} \int_0^\infty dx e^{-ux^2} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty du u^n e^{-u} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot n!} \int_0^\infty du u^{(n+1/2)-1} e^{-u} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{(2n-1)!!}{n!} \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è lecito solo per $n > 0$. La precedente espressione fornisce, per i primi valori di n , il risultato corretto

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot 0!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2^2} \frac{1!!}{1!} = \frac{\pi}{4} \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{\pi}{2^3} \frac{3!!}{2!} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

come può essere provato ricorrendo a tecniche di integrazione più elementari, sebbene più lunghe e meno eleganti.

2.2.4 Il simbolo di Pochhammer

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ possiamo definire il **simbolo di Pochhammer** come

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) & \text{per } n > 0 \\ 1 & \text{per } n = 0 \\ \frac{1}{(a-1)(a-2)\dots(a+n-1)} & \text{per } n < 0 \end{cases}$$

Esso ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (1)_n &= n! \\ (k)_n &= \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} \quad \text{per } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Capitolo 3

Spazi di Hilbert e operatori

Gli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare definito positivo e completi, introdotti dal celebre matematico tedesco David Hilbert, rivestono una importanza cruciale nella formulazione della Meccanica quantistica, ma sono altrettanto importanti per applicazioni nei campi più disparati delle scienze matematiche. Su di essi si basano inoltre i costrutti degli spazi di funzioni a quadrato sommabile, che a loro volta sono alla base dell'analisi spettrale di Fourier, fondamentale nello studio di tutti i fenomeni ondulatori, dalle onde sonore, alla radiazione elettromagnetica fino alle funzioni d'onda quantistiche.

Qui daremo una rapidissima introduzione a questi spazi, tralasciando le dimostrazioni dei teoremi più complicati ed elencando i fatti fondamentali utili per gli sviluppi in Meccanica quantistica.



Figura 3.1: *David Hilbert (1862-1943)*

3.1 Spazio vettoriale su \mathbb{C}

Definizione. Un insieme \mathcal{H} di elementi, detti vettori, che denoteremo con i simboli $|f\rangle, |g\rangle, |h\rangle, \dots$ è detto **spazio vettoriale** sui numeri complessi \mathbb{C} , che denoteremo

invece con lettere greche λ, μ, \dots se in esso sono definite

1. una operazione di **somma** $+: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ che goda delle proprietà *commutativa*, *associativa*, dell'esistenza di un elemento neutro 0 , detto *vettore nullo*, e dell'esistenza, per ogni vettore $|f\rangle$, di un suo *opposto* $|-f\rangle$ tale che $|f\rangle + |-f\rangle \equiv |f\rangle - |f\rangle = 0$.
2. un **prodotto per complessi** $\mathbb{C} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ che goda delle proprietà *distributiva*, sia sui vettori $\lambda(|f\rangle + |g\rangle) = \lambda|f\rangle + \lambda|g\rangle$ che sui numeri complessi $(\lambda + \mu)|f\rangle = \lambda|f\rangle + \mu|f\rangle$, associativa $(\lambda\mu)|f\rangle = \lambda(\mu|f\rangle)$ e sia tale che $1|f\rangle = |f\rangle$.

Definizione. Un insieme $\mathcal{S} = \{|f_1\rangle, |f_2\rangle, \dots, |f_n\rangle\}$ di vettori in \mathcal{V} si dice linearmente indipendente se

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i |f_i\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

Il numero massimo N di vettori linearmente indipendenti si dice dimensione di \mathcal{H} e si scrive $\dim \mathcal{H} = N$. Nel seguito studieremo sia casi in cui N è finito, sia casi di spazi di dimensione infinita.

In uno spazio vettoriale di dimensione finita vale il seguente fondamentale

Teorema. Esiste un insieme $\mathcal{S} = \{|f_1\rangle, |f_2\rangle, \dots, |f_N\rangle\}$ di $N = \dim \mathcal{H}$ vettori linearmente indipendenti tale che ogni vettore $|f\rangle \in \mathcal{H}$ si possa scrivere come una combinazione lineare

$$|f\rangle = \sum_{n=1}^N \lambda_n |f_n\rangle$$

con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ univocamente determinati dalla scelta di $|f\rangle$.

Questo insieme \mathcal{S} è detto costituire una **base** in \mathcal{H} .

Se invece $\dim \mathcal{H} = \infty$, lo spazio \mathcal{H} si dice di dimensione infinita e la scrittura

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f_n\rangle$$

potrebbe non avere un preciso significato (non convergere a un elemento in \mathcal{H}). È necessario, per trattare spazi infinito-dimensionali, introdurre un preciso concetto di convergenza in \mathcal{H} . Ciò può essere realizzato mediante l'introduzione di un prodotto scalare in \mathcal{H} , come vedremo nelle prossime sezioni.

Esempio. L'insieme \mathbb{C}^N delle N -ple di numeri complessi, pensate come matrici unicolonnari di lunghezza N a elementi in \mathbb{C} , è uno spazio vettoriale di dimensione N , come è facile verificare una volta definita la somma e il prodotto per complessi nella maniera usuale tra matrici

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_N + b_N \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_N \end{pmatrix}$$

Osservazione. Poiché ogni spazio vettoriale finito dimensionale ammette almeno una base, e in questa ogni suo vettore può essere univocamente identificato dai suoi coefficienti, questi ultimi costituiscono un vettore colonna. Si può stabilire così una corrispondenza biunivoca tra i vettori di uno spazio vettoriale finito dimensionale generico e i vettori colonna, che rispetta le proprietà di linearità di somma e prodotto per complessi, cioè è un isomorfismo. Poiché lo spazio dei vettori colonna è costituito in pratica dalle N -ple di numeri complessi, vediamo che qualunque spazio vettoriale complesso finito dimensionale è isomorfo a \mathbb{C}^N .

3.2 Spazio a prodotto interno

Definizione. Uno spazio vettoriale \mathcal{H} è uno **spazio a prodotto interno**¹ se in esso è definito un *isomorfismo di aggiunzione* $|\cdot\rangle^\dagger$ che manda ogni vettore *ket*² $|f\rangle$ di \mathcal{H} in un corrispondente vettore *bra* $\langle f| \equiv |f\rangle^\dagger$ di uno spazio *duale* denotato con \mathcal{H}^* tale che sia possibile definire una funzione $\mathcal{H}^* \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, che denoteremo con $\langle f|g\rangle$, detta **prodotto interno** o **prodotto scalare** tale che

1. sia *sesquilineare*, cioè lineare nel secondo argomento e antilineare nel primo

$$\begin{aligned} \langle h|(\lambda|f\rangle + \mu|g\rangle) &= \lambda\langle h|f\rangle + \mu\langle h|g\rangle \\ (\lambda\langle f| + \mu\langle g|)|h\rangle &= \lambda^*\langle f|h\rangle + \mu^*\langle g|h\rangle \end{aligned}$$

¹*Inner product space*, in inglese. Talvolta viene detto anche spazio *hermitiano*, *unitario* o *prehilbertiano* (e nel caso sia definito su \mathbb{R} anziché su \mathbb{C} *spazio euclideo*).

²La notazione $|f\rangle$ qui usata per denotare i vettori è detta “di Dirac”. Questo simbolo viene denominato *ket*, mentre il suo corrispondente duale $\langle f|$ viene denominato *bra*. Il prodotto scalare $\langle f|g\rangle$ è dunque un *bra* per un *ket*, cioè una *bracket*, che in inglese significa parentesi. Questa la nomenclatura introdotta da Dirac nel 1928 nella sua riformulazione mediante spazi di Hilbert astratti della meccanica quantistica.

2. sia *hermitiana* $\langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle^*$ (da cui segue che $\langle f|f \rangle \in \mathbb{R}$)
3. sia definita positiva, cioè $\forall |f\rangle, \langle f|f \rangle \geq 0$ e inoltre $\langle f|f \rangle = 0$ se e solo se $|f\rangle = 0$.

Teorema. Con questa definizione di prodotto scalare è possibile dedurre la disuguaglianza di Schwarz (o disuguaglianza triangolare)

$$|\langle f|g \rangle|^2 \leq \langle f|f \rangle \langle g|g \rangle$$

Definizione. Uno spazio vettoriale \mathcal{N} di elementi a, b, c, \dots si dice **spazio normato** se in esso è definita una funzione $\|\cdot\| : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ detta *norma* tale che

1. sia definita positiva $\forall a \in \mathcal{N}, \|a\| \geq 0$ e $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. omogenea $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ (da cui discende in particolare che $\|-a\| = \|a\|$)
3. rispetti la disuguaglianza triangolare $\forall a, b \in \mathcal{N}, \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Ogni spazio a prodotto interno è automaticamente uno spazio normato, una volta definita in esso la norma di un vettore come

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle} \geq 0$$

Esempio. Nel caso di spazio vettoriale finito dimensionale, perciò isomorfo a \mathbb{C}^N , possiamo introdurre l'isomorfismo di aggiunzione come l'operazione che manda i vettori colonna nel complesso coniugato dei vettori riga

$$\text{Se } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad \mathbf{a}^\dagger = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_N^*) = (\mathbf{a}^T)^*$$

Conseguentemente il prodotto scalare

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{n=1}^N a_n^* b_n$$

soddisfa tutti i requisiti di linearità, hermiticità ed è definito positivo. Tutti gli spazi a prodotto interno finito dimensionali sono isomorfi a \mathbb{C}^N e in essi è definibile una norma $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}}$ finita per ogni vettore. Perciò ogni spazio a prodotto interno finito-dimensionale è uno spazio normato.

3.3 Spazio metrico

Definizione. Uno spazio (non necessariamente vettoriale) \mathcal{M} di elementi a, b, c, \dots si dice **spazio metrico** se in esso è definita una funzione $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi le proprietà

1. $d(a, b) = d(b, a)$
2. $d(a, a) = 0$
3. $d(a, b) > 0$ per ogni $a \neq b$
4. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (diseguaglianza triangolare)

Osservazione. La definizione di norma permette di dotare uno spazio vettoriale normato \mathcal{H} della struttura di spazio metrico, cioè definita la distanza tra due vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ come $d(|a\rangle, |b\rangle) \equiv \||a\rangle - |b\rangle\|$, si vede subito che le proprietà richieste per uno spazio metrico sono soddisfatte. quindi in particolare, ogni spazio a prodotto interno è anche uno spazio metrico.

Definizione. Una successione infinita a_1, a_2, a_3, \dots in uno spazio metrico \mathcal{M} è detta convergente a un elemento $b \in \mathcal{M}$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(b, a_n) = 0$$

Scriveremo, esendendo la usuale notazione dei limit anche agli spazi metrici

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Un noto criterio di convergenza in \mathbb{R} e in \mathbb{C} è il criterio di Cauchy. Analogamente introduciamo un simile concetto negli spazi metrici.

Definizione. Una successione infinita a_1, a_2, a_3, \dots in uno spazio metrico \mathcal{M} è detta *di Cauchy* se

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(a_m, a_n) = 0$$

Teorema. *Se una successione infinita a_1, a_2, a_3, \dots converge in uno spazio metrico a un elemento b , allora b è unico e la successione è di Cauchy.*

In generale però potrebbe non essere vero il contrario, il che giustifica la seguente

Definizione. Uno spazio metrico \mathcal{M} è **completo** se ogni successione a_1, a_2, a_3, \dots di elementi in \mathcal{M} che sia di Cauchy ha un limite che è esso stesso un elemento di \mathcal{M} , cioè $\exists b \in \mathcal{M}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

Uno spazio normato che sia anche uno spazio metrico completo si dice *spazio di Banach*.

3.4 Spazi di Hilbert

Definizione. Un sottoinsieme \mathcal{S} di uno spazio a prodotto interno \mathcal{H} è detto *dappertutto denso* se per ogni $|g\rangle \in \mathcal{H}$ esiste una successione $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle, \dots\} \subset \mathcal{H}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = g$$

Esempio. L'insieme dei razionali \mathbb{Q} è dappertutto denso in \mathbb{R} poiché ogni elemento di \mathbb{R} può essere ottenuto come sezione di Dedekind da una opportuna successione di razionali.

Definizione. Uno spazio a prodotto interno \mathcal{H} è **separabile**, se esiste un sottoinsieme \mathcal{S} *numerabile* e dappertutto denso.

Esempio. Lo spazio \mathbb{R} è separabile, in quanto \mathbb{Q} è numerabile e dappertutto denso.

In uno spazio separabile è dunque garantito che ogni vettore può essere rappresentato come limite di una opportuna successione numerabile di vettori.

Definizione. Uno spazio a prodotto interno che sia anche uno *spazio metrico completo* rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare e *separabile* si dice **spazio di Hilbert**.

Le proprietà di separabilità e completezza garantiscono che sia possibile, anche in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, estendere il concetto di *base* di vettori linearmente indipendenti a un insieme infinito di vettori. Vale infatti il seguente

Teorema. *Uno spazio a prodotto interno \mathcal{H} è separabile se e solo se in esso esiste una base numerabile.*

Cioè ogni vettore $|f\rangle \in \mathcal{H}$ potrà essere scritto come combinazione lineare (eventualmente infinita, cioè con $\dim \mathcal{H} = \infty$) di vettori di una base

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}} c_i |f_i\rangle$$

Osservazione. Tutti gli spazi a prodotto interno finito dimensionali sono automaticamente spazi di Hilbert, poiché in \mathbb{C} tutte le serie convergenti sono di Cauchy e viceversa, e ciò può essere esteso banalmente a \mathbb{C}^N . Inoltre si può sempre trovare una base in \mathbb{C}^N che perciò è separabile.

Esempio. Definiamo lo spazio $\ell^2(\mathbb{C})$ delle successioni infinite di numeri complessi $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ a quadrato sommabili, cioè tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$$

Chiamiamo gli elementi \mathbf{z} *vettori* di $\ell^2(\mathbb{C})$ e li possiamo pensare come vettori colonna con infiniti elementi

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^\dagger = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, \dots)$$

Definita una somma $\mathbf{z} + \mathbf{w}$ e un prodotto per complessi $\alpha \mathbf{z}$ secondo le solite regole del calcolo matriciale, si verifica che $\ell^2(\mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale. Infatti anche la somma è a quadrato sommabile

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|z_n|^2 + |w_n|^2) < \infty$$

e il prodotto per complessi pure

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha z_n|^2 = |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$$

Inoltre, definito il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{z} | \mathbf{w} \rangle = \mathbf{z}^\dagger \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^* w_n$$

si mostra che esso converge poiché in \mathbb{C} vale che $|z^* w| \leq |z| |w|$ e si vede subito che si tratta di una forma hermitiana definita positiva per la quale la norma

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2}$$

è finita per ogni vettore (quindi $\ell^2(\mathbb{C})$ è uno spazio normato). Con tale norma possiamo costruire una funzione distanza

$$d(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - w_n|^2}$$

che ha tutte le proprietà richieste per uno spazio metrico. Infine, una successione di Cauchy in \mathbb{C} converge a un numero \mathbb{C} e da ciò è possibile, con opportune maggiorazioni, dimostrare che una successione $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots$ di vettori in $\ell^2(\mathbb{C})$ che rispetti il criterio di Cauchy

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{(m)} - \mathbf{z}^{(n)}\| = 0$$

converge a un vettore $\mathbf{z} \in \ell^2(\mathbb{C})$. Perciò lo spazio $\ell^2(\mathbb{C})$ è completo. Inoltre esso è anche separabile, come si potrebbe far vedere utilizzando la densità di \mathbb{Q}^2 in \mathbb{C} e la sua numerabilità. Se ne conclude che $\ell^2(\mathbb{C})$ è uno spazio di Hilbert.

3.5 Basi ortonormali

Definizione. In uno spazio di Hilbert due vettori sono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è nullo

$$\langle f | g \rangle = 0$$

Se un vettore $|f\rangle$ è ortogonale a tutti i vettori di \mathcal{H} , esso è necessariamente nullo $|f\rangle = 0$.

Dato un vettore $|f\rangle$ possiamo sempre *normalizzarlo*, cioè definire un vettore $|\check{f}\rangle$ di norma 1, ponendo

$$|\check{f}\rangle = \frac{1}{\|f\|} |f\rangle$$

Definizione. Una famiglia di vettori $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ che siano tra loro ortogonali e normalizzati si dicono **ortonormali**

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Teorema. *Vettori ortonormali sono certamente linearmente indipendenti.*

Infatti, supposto di avere una famiglia di vettori ortonormali $\mathcal{O} = \{|e_i\rangle\}$ finita o infinita, la relazione

$$\sum_i c_i |e_i\rangle = 0$$

implica che le c_i siano tutte nulle, poiché moltiplicando per un generico $\langle e_j | \in \mathcal{O}^*$

$$0 = \langle e_j | \sum_i c_i | e_i \rangle = \sum_i c_i \langle e_j | e_i \rangle = \sum_i c_i \delta_{i,j} = c_j$$

◆

Se qualunque vettore nello spazio \mathcal{H} si può scrivere come combinazione lineare (finita o infinita) della famiglia di vettori \mathcal{O} , si dice che \mathcal{O} è una *base* di \mathcal{H} . Nel caso infinito dimensionale, come abbiamo visto, ciò è possibile se sussiste la proprietà di completezza.

In generale una base di uno spazio di Hilbert non è ortonormale. Tuttavia, esiste sempre una trasformazione che porti da una base completa qualunque a una base di vettori tutti ortonormali, cioè a una **base ortonormale**, con una procedura pratica che viene detta metodo di **ortogonalizzazione di Schmidt**, che consiste nel porre

$$|e_1\rangle = \frac{|f_1\rangle}{\|f_1\|}$$

che è chiaramente normalizzato: $\langle e_1 | e_1 \rangle = 1$. Poi

$$|e_2\rangle = \frac{|\phi_2\rangle}{\|\phi_2\|}$$

dove $|\phi_2\rangle = |f_2\rangle + a_{21}|e_1\rangle$ sia ortogonale a $|e_1\rangle$, cioè

$$0 = \langle e_1 | \phi_2 \rangle = \langle e_1 | f_2 \rangle + a_{21} \langle e_1 | e_1 \rangle \quad \implies \quad a_{21} = -\langle e_1 | f_2 \rangle$$

Perciò $|\phi_2\rangle = |f_2\rangle - \langle e_1 | f_2 \rangle |e_1\rangle$ e quindi

$$|e_2\rangle = \frac{|f_2\rangle - \langle e_1 | f_2 \rangle |e_1\rangle}{\| |f_2\rangle - \langle e_1 | f_2 \rangle |e_1\rangle \|}$$

In altre parole si sottrae al vettore $|f_2\rangle$ la sua proiezione lungo la direzione di $|e_1\rangle$ rendendolo così ortogonale a $|e_1\rangle$ e poi lo si normalizza. Procedendo analogamente col terzo vettore

$$|\phi_3\rangle = |f_3\rangle - \langle e_2 | f_3 \rangle |e_2\rangle - \langle e_1 | f_3 \rangle |e_1\rangle$$

cioè sottraendogli le proiezioni che esso può avere nelle direzioni di $|e_1\rangle$ ed $|e_2\rangle$ si può definire il terzo vettore ortonormale

$$|e_3\rangle = \frac{|\phi_3\rangle}{\|\phi_3\|} = \frac{|f_3\rangle - \langle e_2 | f_3 \rangle |e_2\rangle - \langle e_1 | f_3 \rangle |e_1\rangle}{\| |f_3\rangle - \langle e_2 | f_3 \rangle |e_2\rangle - \langle e_1 | f_3 \rangle |e_1\rangle \|}$$

e così via si può dimostrare per induzione che l' n -simo vettore ortonormale sarà

$$|e_n\rangle = \frac{|f_n\rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \langle e_j | f_n \rangle |e_j\rangle}{\left\| |f_n\rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \langle e_j | f_n \rangle |e_j\rangle \right\|}$$

Questa procedura ricorsiva permette di ortonormalizzare sempre qualunque base di vettori, anche se infinita.

3.6 Operatori

Introduciamo il concetto di *operatore* come quello di un ente astratto che, applicato a un generico $|a\rangle \in \mathcal{H}$ produce come risultato un altro vettore $|d\rangle \in \mathcal{H}$. Scriveremo $A|a\rangle = |d\rangle$.

Definizione. Una funzione $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ che sia un *endomorfismo* di \mathcal{H} (si scrive $A \in \text{End}(\mathcal{H})$), cioè che goda di una proprietà di linearità

$$A(\lambda|a\rangle + \mu|b\rangle) = \lambda A|a\rangle + \mu A|b\rangle$$

si dice **operatore lineare** su \mathcal{H}

Algebra degli operatori. Il più semplice operatore che possiamo immaginare è l'operatore *identità*, che indicheremo con I , che non fa nulla sul vettore su cui è applicato $I|a\rangle = |a\rangle$, $\forall |a\rangle \in \mathcal{H}$. Due operatori sono uguali se danno lo stesso risultato agendo su tutti i vettori

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A|v\rangle = B|v\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathcal{H}$$

Un operatore può essere moltiplicato per un numero complesso

$$B = \alpha A \quad \Longleftrightarrow \quad B|v\rangle = \alpha A|v\rangle \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall |v\rangle \in \mathcal{H}$$

La relazione $A|v\rangle = \alpha|v\rangle$ per ogni $|v\rangle \in \mathcal{H}$ implica perciò che $A = \alpha I$.

La somma $S = A + B$ di due operatori lineari è quell'operatore lineare tale che

$$S|v\rangle = A|v\rangle + B|v\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathcal{H}$$

e la differenza $A - B = A + (-1)B$. Con queste definizioni si vede che $\text{End}(\mathcal{H})$ è esso stesso uno spazio vettoriale su \mathbb{C} .

Commutatore. Analogamente si può definire l'operatore lineare prodotto di due operatori lineari

$$P = AB \quad \Longleftrightarrow \quad P|v\rangle = A(B|v\rangle) \quad \forall |v\rangle \in \mathcal{H}$$

che gode della ovvia proprietà $IA = AI = A$. Il prodotto di operatori in generale non è commutativo

$$AB \neq BA$$

e si definisce perciò il *commutatore* di due operatori

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

Ogni operatore commuta con l'identità: $[A, I] = 0$ e con se stesso: $[A, A] = 0$. Data la sua definizione il commutatore è un oggetto antisimmetrico

$$[A, B] = -[B, A]$$

e distributivo

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

Inoltre soddisfa la *identità di Jacobi*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Nelle applicazioni spesso si usa anche l'*anticommutatore*

$$\{A, B\} \equiv AB + BA = \{B, A\}$$

Funzioni di operatori. Possiamo anche definire l'elevamento a potenza di un operatore

$$A^n = \begin{cases} AA \dots A & (n \text{ volte}) & \text{per } n \geq 1 \\ I & & \text{per } n = 0 \end{cases}$$

e dare pertanto un significato formale a funzioni di operatori tramite sviluppi in serie

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n$$

per esempio

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

oppure

$$\log(I + A) = A + \frac{A^2}{2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n}$$

Si noti che (formula di *Campbell - Baker - Hausdorff*)

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\dots} \neq e^{A+B}$$

a meno che $[A, B] = 0$.

Questo modo di definire le funzioni di operatori permette anche di dare una definizione formale di derivata di una funzione di operatore rispetto a un operatore

$$\frac{d}{dA} f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n A^{n-1}$$

Si può controllare che essa gode della proprietà di Leibnitz per il prodotto di derivate e della regola di derivazione a catena.

Operatore inverso. Non tutti gli operatori ammettono un inverso. Se esiste, l'inverso di A è definito come l'operatore A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Un operatore dotato di inverso viene detto *regolare*. Se non ammette inverso invece viene detto *singolare*. Se due operatori sono regolari anche il loro prodotto lo è e il suo inverso è

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

L'inverso dell'identità è l'identità stessa: $I^{-1} = I$.

Azione sui bra. L'azione di un operatore può essere considerata anche sui *bra* corrispondenti ai vettori duali $\langle a|A = \langle d|$. Se consideriamo il prodotto scalare di questo risultato con un altro vettore, daremo significato alla notazione

$$\langle a|A|b\rangle$$

nella quale l'operatore può essere visto indifferentemente come agente verso destra o verso sinistra.

Operatore aggiunto (o *hermitiano coniugato*). Se $A|v\rangle = |x\rangle$, definiamo come operatore aggiunto l'operatore A^\dagger che agendo sul *bra* $\langle v|$ produce il risultato duale $\langle x|$

$$\langle x| = \langle v|A^\dagger$$

Equivalentemente possiamo definire l'operatore aggiunto come l'operatore A^\dagger tale che

$$\langle a|A|b\rangle^* = \langle b|A^\dagger|a\rangle \quad , \quad \forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$$

L'aggiunto dell'aggiunto è l'operatore stesso: $(A^\dagger)^\dagger = A$. L'aggiunto di una somma è la somma degli aggiunti, mentre per il prodotto vale la proprietà

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Inoltre, se $A = \alpha B$ allora $A^\dagger = \alpha^* B^\dagger$.

Operatore hermitiano (o *autoaggiunto*). È un operatore che sia uguale al suo aggiunto, cioè $H = H^\dagger$. Il prodotto di due operatori hermitiani A e B è hermitiano solo se essi commutano. Infatti

$$(AB)^\dagger = BA$$

può essere scritto come AB solo se $[A, B] = 0$.

Si dice *antihermitiano* un operatore tale che $C^\dagger = -C$. Se C è antihermitiano, ovviamente $D = iC$ è hermitiano. Il commutatore di due operatori hermitiani A e B è antihermitiano

$$[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger] = [B, A] = -[A, B]$$

Quindi l'operatore $K = i[A, B]$ risulta essere hermitiano.

Un generico operatore lineare si può sempre scrivere come la somma di un operatore hermitiano e di uno antihermitiano, o equivalentemente

$$A = H + iK$$

con H e K hermitiani.

Operatore unitario. Un operatore U regolare tale che

$$U^{-1} = U^\dagger \quad \text{ovvero} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

si dice *operatore unitario*. Il prodotto di due operatori unitari è unitario.

Un operatore unitario conserva la norma dei vettori su cui agisce

$$\|U|x\rangle\| = \sqrt{\langle x|U^\dagger U|x\rangle} = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \|x\|$$

Un generico operatore unitario U può sempre essere messo nella forma

$$U = e^{iH}$$

con H operatore hermitiano.

Prodotti ket-bra. Un simbolo del tipo $|a\rangle\langle b|$ soddisfa tutte le proprietà di un operatore lineare. Posto infatti

$$A = |a\rangle\langle b|$$

si ha che A applicato a un *ket* produce un nuovo *ket*.

$$A|x\rangle = |a\rangle\langle b|x\rangle = \alpha|a\rangle = |x'\rangle$$

ove si è posto $\alpha = \langle b|x\rangle$. Allo stesso modo si può verificare che anche l'azione su un *bra* è consistente con la definizione di operatore.

L'aggiunto di $A = |a\rangle\langle b|$ è $A^\dagger = |b\rangle\langle a|$.

Proiettore. Un operatore lineare hermitano e idempotente, cioè tale che $P^2 = P$ si dice *operatore di proiezione* o *proiettore*. Un operatore di proiezione non ammette inverso. La somma di due proiettori è un proiettore se e solo se essi sono *ortogonali*, cioè se $P_1P_2 = 0$.

3.7 Autovalori e autovettori

Se l'applicazione di un operatore A a un certo vettore $|u\rangle \neq 0$ dà come risultato un vettore proporzionale a $|u\rangle$ stesso

$$A|u\rangle = \lambda|u\rangle \tag{3.1}$$

si dice che λ è un **autovalore** dell'operatore A e che $|u\rangle$ è un **autovettore** dell'operatore A appartenente o corrispondente all'autovalore λ .

Per essere autovettore di A un vettore $|u\rangle$ deve soddisfare un'equazione agli *autovalori* come la (3.1). Riscrivendola come

$$(A - \lambda I)|u\rangle = 0 \tag{3.2}$$

ci rendiamo conto che essa è equivalente alla richiesta che l'operatore $A - \lambda I$ debba essere singolare. Se infatti esso ammettesse un inverso, potrei moltiplicare a sinistra

la (3.2) per quest'ultimo ottenendo $|u\rangle = 0$ in contraddizione con la definizione stessa di autovettore.

L'insieme di tutti i valori di λ che soddisfano la (3.2) si dice **spettro** dell'operatore A .

L'equazione agli autovalori è omogenea, cioè se $|u\rangle$ è un autovettore corrispondente all'autovalore λ anche $\alpha|u\rangle$ lo è. Se due vettori $|u\rangle$ e $|v\rangle$ sono entrambi soluzioni dell'equazione agli autovalori per lo stesso λ , anche ogni loro combinazione lineare $\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle$ lo è. Perciò a ogni autovalore λ corrisponde in realtà un sottospazio di \mathcal{H} di una certa dimensionalità, detto *autospazio* dell'autovalore λ .

Se la dimensione del sottospazio di autovettori di un certo autovalore λ è maggiore di 1, si dice che l'autovalore λ è *degenere*.

Definizione. Si dice *normale* un operatore i cui autovettori costituiscano un insieme completo ortonormale.

Teorema. Un operatore A è normale se e solo se commuta con il suo aggiunto: $[A, A^\dagger] = 0$

Ovviamente ogni operatore hermitiano è anche normale.

È possibile dimostrare il seguente fondamentale

Teorema. Due operatori normali A e B ammettono il medesimo insieme completo ortonormale $\{|u_i\rangle\}$ di autovettori se e solo se essi commutano

$$[A, B] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A|u_i\rangle = a_i|u_i\rangle \\ B|u_i\rangle = b_i|u_i\rangle \end{cases}, \quad \forall i$$

Spettro di operatori hermitiani. Gli autovalori e autovettori di un operatore hermitiano godono di certe proprietà molto interessanti, soprattutto per le applicazioni in Meccanica quantistica.

Teorema. Gli autovalori di un operatore hermitiano sono tutti reali.

Infatti, se H è hermitiano e $|u\rangle$ è un suo autovettore appartenente all'autovalore λ , accanto alla sua equazione agli autovalori $H|u\rangle = \lambda|u\rangle$ possiamo scrivere anche la sua hermitiana coniugata $\langle u|H = \langle u|\lambda^*$. Moltiplicando la prima equazione per $\langle u|$ a sinistra e la seconda per $|u\rangle$ a destra

$$\langle u|H|u\rangle = \lambda\langle u|u\rangle = \lambda^*\langle u|u\rangle$$

Perciò deve essere $\lambda \in \mathbb{R}$.

Inoltre si può dimostrare, ma qui tralasciamo la dimostrazione, che

Teorema. *Autovettori di un operatore hermitiano appartenenti ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.*

Poiché un operatore hermitiano è anche normale, avrà una base di autovettori completa e ortonormale nello spazio in cui è definito. Ciò può essere realizzato prendendo tutti gli autospazi e trovando una base ortonormale in ognuno di essi. Il teorema precedente assicura che basi in autospazi diversi sono tra loro ortogonali (e se abbiamo normalizzato tutti gli autovettori, ortonormali). Perciò

Teorema. *Gli autovettori di un operatore hermitiano formano una base ortonormale completa in \mathcal{H} e lo spettro è reale.*

Infine, considerando un operatore unitario U e scriviamo l'equazione agli autovalori sia per i ket che per i bra, ricordando la definizione di operatore aggiunto

$$\begin{aligned} U|u\rangle &= \lambda|u\rangle \\ \langle u|U^\dagger &= \langle u|\lambda \end{aligned}$$

da cui

$$U^\dagger|u\rangle = \lambda^*|u\rangle$$

Moltiplicando per $U^{-1} = U^\dagger$ avremo, da un lato

$$U^\dagger U|u\rangle = \lambda U^\dagger|u\rangle = \lambda\lambda^*|u\rangle = |\lambda|^2|u\rangle$$

e dall'altro $U^\dagger U|u\rangle = |u\rangle$. Perciò $|\lambda|^2 = 1$. Abbiamo così dimostrato che

Teorema. *Gli autovalori di un operatore unitario giacciono sul cerchio di raggio 1 del piano complesso.*

3.8 Matrici come rappresentazione di operatori

Prima di continuare, addentramoci nel caso finito dimensionale, dove, come abbiamo visto, tutti gli spazi a prodotto interno sono spazi di Hilbert e sono tutti isomorfi a \mathbb{C}^N . Cerchiamo di rendere esplicito questo isomorfismo anche per gli operatori, mettendo la loro algebra in contatto con l'algebra delle matrici.

Sia quindi $\dim \mathcal{H} = N < \infty$, perciò $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ e $|d\rangle = A|a\rangle$. Il vettore $|d\rangle$ è esprimibile in una base ortonormale $\{|i\rangle\}$ come $|d\rangle = \sum_{i=1}^N d_i|i\rangle$. Lo stesso vettore $|d\rangle$ si può anche scrivere come

$$|d\rangle = A|a\rangle = A\left(\sum_{i=1}^N a_i|i\rangle\right) = \sum_{i=1}^N a_i A|i\rangle = \sum_{j=1}^N a_i A_{ij}|j\rangle$$

cioè

$$d_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} a_j$$

in cui A_{ij} indica la i -sima componente del vettore $\mathbf{A}|j\rangle$. I numeri A_{ij} possono essere organizzati in una matrice $N \times N$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

Si può così dire che la matrice \mathbf{A} costituisce una *rappresentazione matriciale* dell'operatore lineare \mathbf{A} .

Gli elementi di matrice A_{ij} possono essere visti come i valori presi dall'operatore \mathbf{A} agente sui vettori della base:

$$\langle j|\mathbf{A}|i\rangle = A_{ij}$$

Abbiamo visto che un vettore $|a\rangle = \sum_{i=1}^N a_i |i\rangle$ può essere rappresentato dalla matrice colonna

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

e ciò concorda con la definizione del prodotto righe per colonne

$$d_i = \sum_j A_{ij} a_j \quad \text{cioè} \quad \mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{a}$$

I vettori della base ortonormale $|i\rangle$ sono rappresentati dai vettori colonna $\mathbf{e}^{(i)}$ di componenti $\mathbf{e}_j^{(i)} = \delta_{i,j}$

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tutte le definizioni e proprietà degli operatori trovano corrispettivo nelle matrici. Dando per scontate le manipolazioni algebriche elementari sulle matrici (definizioni di identità³, somme, prodotti riga per colonna, traccia, determinante, trasposta, matrice inversa), notiamo che vale il seguente fondamentale

³La matrice identità $\mathbf{1}$ ha elementi $\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij}$.

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perché una matrice ammetta inverso è che il suo determinante sia diverso da zero.*

Il determinante di un prodotto è pari al prodotto dei determinanti

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Poiché $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$, il determinante della matrice inversa è l'inverso del determinante

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$$

Un'altra operazione spesso utile sulle matrici quadrate è la traccia, ovvero la somma degli elementi diagonali

$$\text{Tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^N A_{ii}$$

La traccia di un prodotto di più matrici gode di una proprietà ciclica

$$\text{Tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n) = \text{Tr}(\mathbf{A}_n \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{n-1})$$

L'inversa di un prodotto di matrici è data da

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Poiché un vettore *bra* si decompone nella *base duale* $\{\langle i| \}$ come

$$\langle a| = \sum_{i=1}^N a_i^* \langle i|$$

i vettori *bra* sono perciò identificabili con i vettori riga, quindi i trasposti dei vettori colonna, ma con tutte le componenti complesse coniugate. Si dice *matrice aggiunta* di una matrice \mathbf{A} la matrice $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T)^*$ di elementi

$$(A^\dagger)_{ij} = (A_{ji})^*$$

ovvero la matrice aggiunta è la trasposta e complessa coniugata. L'aggiunta di un prodotto di matrici è dato da

$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$$

Una matrice che commuta con la sua aggiunta $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]$ si dice *normale* e una matrice che ha se stessa per aggiunta $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ si dice *hermitiana*. Una matrice hermitiana è sempre normale.

Con tale notazione risulta che se \mathbf{a} è un vettore colonna rappresentante il *ket* $|a\rangle$, il corrispondente *bra* $\langle a|$ è rappresentato dal vettore riga \mathbf{a}^\dagger . Una relazione del tipo $\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{a}$ si traduce allora nello spazio duale come

$$\mathbf{d}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$$

Il prodotto scalare di due vettori si esprimerà, come già visto, come

$$\langle a|b\rangle = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \sum_i a_i^* b_i$$

L'equazione agli autovalori di un operatore si traduce facilmente a livello di matrici

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

Vogliamo determinare per quali valori di λ questa equazione ammette soluzioni $\mathbf{u} \neq 0$. La richiesta che la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}$ sia singolare si traduce nella cosiddetta **equazione caratteristica**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = 0$$

Quest'ultima, immaginando di svolgere il determinante, risulta essere una equazione polinomiale di grado N e perciò, per il teorema fondamentale dell'algebra, ammette, in \mathbb{C} , N soluzioni (contando separatamente eventuali zeri doppi o multipli). Supponiamo di aver trovato una soluzione λ_1 . Ora, inserendo questa soluzione nella originale equazione agli autovalori otteniamo un sistema lineare di N equazioni in N incognite, che dunque ci permette di trovare una soluzione per le componenti u_i del vettore colonna \mathbf{u} , che indicheremo con $\mathbf{u}^{(1)}$ per ricordare che è autovettore appartenente all'autovalore λ_1 . Ripetendo la procedura per ogni altra soluzione λ_n e supponendo in prima battuta che tutte le soluzioni siano distinte, troveremo un insieme di autovettori $\{\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}\}$. Potremo così creare una matrice \mathbf{S} le cui colonne siano le componenti degli autovettori trovati

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N^{(1)} & \dots & u_N^{(N)} \end{pmatrix}$$

Si dimostra che se \mathbf{A} è normale, questa matrice è regolare e unitaria, perciò può essere invertita. Possiamo considerare la trasformazione di *similarità*

$$\mathbf{A}^D = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{S}$$

che può essere vista come un cambiamento di base dalla base ortonormale generica $\{|i\rangle\}$ alla base degli autovettori ortonormalizzati $\{|\check{u}_i\rangle\}$. Questa trasformazione conserva sia il determinante che la traccia

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}^D &= \det \mathbf{S}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{S} = \det \mathbf{A} \\ \text{Tr} \mathbf{A}^D &= \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}) = \text{Tr}(\mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}) = \text{Tr} \mathbf{A}\end{aligned}$$

ma la cosa interessante è che nella nuova base la matrice \mathbf{A}^D risulta diagonale e formata dagli autovalori di \mathbf{A}

$$\mathbf{A}^D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

da cui segue subito che il determinante è il prodotto degli autovalori e la traccia ne è la somma

$$\det \mathbf{A} = \prod_{n=1}^N \lambda_n \quad , \quad \text{Tr} \mathbf{A} = \sum_{n=1}^N \lambda_n$$

Se anche solo uno dei suoi autovalori è zero, una matrice è necessariamente singolare.

Se poi la matrice è hermitiana $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$, avremo la certezza che gli autovalori sono reali e che gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali.

Se ci sono però autovalori degeneri, cioè soluzioni dell'equazione caratteristica doppie, triple, o di ordine $p > 1$, ci sono più autovettori corrispondenti allo stesso autovalore e si può trovare un insieme di p autovettori linearmente indipendenti. Tutte le loro combinazioni lineari sono ancora autovettori corrispondenti allo stesso autovalore degenero, identificando così un sottospazio di dimensione p . Tuttavia, possiamo usare i p vettori linearmente indipendenti trovati come una base di questo sottospazio e grazie al metodo di Schmidt la possiamo ortonormalizzare. Aggiunta questa sottobase agli autovettori normalizzati degli altri autovalori non degeneri, si può garantire che, nel caso di operatore hermitiano, si troverà sempre una base ortonormale di autovettori che sia completa nello spazio di Hilbert finito-dimensionale in esame.

3.9 Operatori in spazi infinito dimensionali

Nel caso infinito dimensionale lo spettro degli operatori è più delicato da trattare. Innanzitutto non esiste una equazione caratteristica che fornisca gli autovalori con

una procedura standard. Inoltre, se si definisce lo spettro come l'insieme di valori λ per i quali l'operatore $(A - \lambda I)$ è singolare, questo può in alcuni casi non coincidere con gli autovalori intesi come valori di λ per cui l'equazione $A|u\rangle = \lambda|u\rangle$ ammette soluzione nell'incognita $|u\rangle$. La teoria spettrale in matematica si occupa di questi delicati problemi. Qui faremo una trattazione semplificata, ignorando i casi patologici e concentrandoci sul formalismo utile per la Meccanica quantistica.

Nel caso in cui \mathcal{H} sia infinito-dimensionale la diagonalizzabilità viene garantita dalla separabilità, ma può aversi che gli autovettori sono vettori non appartenenti ad \mathcal{H} stesso. In altre parole, essi costituiscono ancora un insieme completo di autovettori, su cui è possibile espandere ogni vettore di \mathcal{H} , ma non sono in \mathcal{H} . Un esempio di questo fenomeno è dato dall'espansione in onde piane di una funzione a quadrato sommabile. Essa è in \mathbb{L}^2 , ma le onde piane non lo sono. A causa di ciò, dobbiamo trattare separatamente due tipi diversi di autovettori

Caso discreto

Se lo spettro è *discreto* cioè composto o da un numero finito di autovalori o da un numero infinito ma numerabile di autovalori separati da salti, possiamo etichettare gli autovalori e autovettori con interi $k = 1, 2, 3, \dots$

$$F|k\rangle = f_k|k\rangle \quad \text{con} \quad \langle k|k'\rangle = \delta_{k,k'}$$

e per ogni $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$$

Il prodotto scalare di due vettori è dato da

$$\langle \psi^{(1)} | \psi^{(2)} \rangle = \sum_k c_k^{(1)*} c_k^{(2)}$$

e quindi $c_k = \langle k | \psi \rangle$ e $\|\psi\| = \sum_k |c_k|^2$. I vettori sono quindi normalizzabili

$$|\check{\psi}\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\|\psi\|} = \sum_k a_k |k\rangle \quad \text{con} \quad a_k = \frac{c_k}{\sqrt{\sum_l |c_l|^2}}$$

e l'espressione $\langle \check{\psi} | \check{\psi} \rangle = 1$ implica l'*equazione di Parseval*

$$\sum_k |a_k|^2 = 1$$

Poiché $a_k = \langle k | \check{\psi} \rangle$, quest'ultima può essere riscritta come

$$\sum_k \langle \check{\psi} | k \rangle \langle k | \check{\psi} \rangle = 1$$

e quindi implica la *relazione di completezza*

$$\sum_k |k\rangle \langle k| = \hat{1}$$

Applicando ad essa l'operatore F stesso, si ottiene la cosiddetta *decomposizione spettrale* (si ricordi che un prodotto ket-bra è un operatore)

$$F = \sum_k f_k |k\rangle \langle k|$$

Caso continuo

Se lo spettro è continuo, gli autovalori sono etichettati da una variabile continua $k \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$

$$F|k\rangle = f(k)|k\rangle$$

e gli autovettori non sono normalizzabili e pertanto non rappresentano stati possibili in \mathcal{H} . Essi soddisfano ancora una relazione di *ortonormalità generalizzata*, nel senso che

$$\langle k | l \rangle = \delta(k - l)$$

e la completezza in questo caso si esprime come un integrale

$$|\psi\rangle = \int_a^b c(k) |k\rangle dk$$

con i coefficienti $c(k)$ che ora costituiscono una funzione, detta *funzione d'onda nello spazio delle k*

$$c(k) = \langle k | \psi \rangle$$

Il prodotto scalare di due vettori è un integrale

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_a^b c_1(k)^* c_2(k) dk$$

e la norma si esprime come

$$\|\psi\|^2 = \int_a^b |c(k)|^2 dk \geq 0$$

Gli stati $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ possono essere normalizzati

$$|\check{\psi}\rangle = \int_a^b a(k)|k\rangle dk \quad \text{con} \quad a(k) = \frac{c(k)}{\|\psi\|^2}$$

conducendo all'equazione di Parseval

$$\int_a^b |a(k)|^2 dk = 1$$

e alla relazione di completezza

$$\int_a^b |k\rangle\langle k| = \hat{1}$$

nonché alla decomposizione spettrale

$$F = \int_a^b f(k)|k\rangle\langle k| dk$$

Nel seguito faremo uso convenzionalmente della notazione per spettri discreti, sottintendendo però di estenderla anche al caso continuo (con le dovute cautele), a patto di sostituire nelle formule

- alle somme gli integrali

$$\sum_k \dots \rightarrow \int \dots dk$$

- agli indici discreti (per es. a valori su \mathbb{N} o su \mathbb{Z}) opportuni indici continui (per es. a valori su \mathbb{R} o su \mathbb{R}^N) e conseguentemente a insiemi discreti di numeri delle funzioni

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{N} &\rightarrow k \in \mathbb{R} \\ \phi_k &\rightarrow \phi(k) \end{aligned}$$

- alle delta di Krönecker le delta di Dirac

$$\delta_{k,k'} \rightarrow \delta(k - k')$$

Capitolo 4

Spazi funzionali e serie di Fourier

4.1 Funzioni a quadrato sommabile e spazio \mathbb{L}^2

Si consideri l'insieme $\mathbb{L}^2(a, b)$ delle funzioni complesse di variabile reale $f(x)$ per le quali esiste ed è finito l'integrale

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

su un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Tali funzioni sono dette **a quadrato sommabile**. L'insieme delle funzioni a quadrato sommabile su tutto l'asse reale $(-\infty, +\infty)$ viene semplicemente indicato con \mathbb{L}^2 .

Una funzione tale che

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

sarà necessariamente nulla ovunque in $[a, b]$, poiché $|f|^2$ è una quantità definita positiva.¹

Possiamo identificare lo spazio $\mathbb{L}^2(a, b)$ come uno *spazio vettoriale lineare*, in cui gli elementi sono rappresentati dalle funzioni $f(x)$. Infatti una combinazione lineare di due funzioni appartenenti a tale insieme appartiene ancora a tale insieme. Esiste un elemento neutro $f(x) \equiv 0$ e per ogni funzione $f(x)$ esiste il suo opposto

¹Più precisamente, tale funzione f potrebbe essere diversa da zero in un numero finito di punti, o anche infinito ma di *misura nulla* (nel senso di Lebesgue) rispetto all'intervallo di integrazione. Perciò questa funzione è *quasi* dappertutto nulla. In quanto segue, per semplificare l'esposizione, trascureremo questa precisazione (seppur importante dal punto di vista concettuale) e diremo grossolanamente che due funzioni sono uguali se differiscono l'una dall'altra per una funzione quasi dappertutto nulla.

$-f(x)$. Ogni funzione può essere moltiplicata per un numero complesso mantenendo la proprietà di quadrato sommabilità e tutti gli assiomi dello spazio vettoriale sono verificati.

In $\mathbb{L}^2(a, b)$ possiamo introdurre una nozione di prodotto scalare tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definendolo come

$$\langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

Esso è, come è facile verificare, una forma hermitiana che definisce una norma definita positiva

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Dunque si tratta di uno spazio unitario.

Una funzione tale che $\|f\| = 1$ si dice *normalizzata*. Ogni funzione $f(x) \in \mathbb{L}^2(a, b)$ può sempre essere normalizzata definendo

$$f_{norm}(x) = \frac{1}{\|f\|} f(x)$$

Due funzioni $f(x), g(x) \in \mathbb{L}^2(a, b)$ per le quali $\langle f|g \rangle = 0$ si dicono tra loro *ortogonali*. Una collezione infinita $\{\phi_i(x), i \in \mathbb{N}\}$ di funzioni normalizzate a 1 tra loro ortogonali costituisce un *sistema ortonormale*

$$\langle \phi_i|\phi_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Le funzioni che costituiscono un sistema ortonormale sono linearmente indipendenti. Se per assurdo non lo fossero, allora esisterebbero dei $c_i \neq 0$ tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) = 0$$

da cui però seguirebbe che

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle \phi_k|\phi_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{k,i} = c_k = \langle \phi_k|0 \rangle = 0$$

in contraddizione con l'ipotesi.

4.2 Serie di Fourier in \mathbb{L}^2

Dato un sistema ortonormale $\{\phi_i(x)\}$ e una generica funzione $f(x)$ in $\mathbb{L}^2(a, b)$ si definisce la **serie formale di Fourier** rispetto al sistema $\{\phi_i(x)\}$ la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x)$$

in cui i coefficienti sono dati da

$$c_i = \langle \phi_i | f \rangle$$

Essi prendono il nome di *coefficienti di Fourier* di $f(x)$.

Il sistema ortonormale $\{\phi_i(x)\}$ si dice **completo** in $\mathbb{L}^2(a, b)$ se, data una generica funzione $f(x) \in \mathbb{L}^2(a, b)$, la sua serie di Fourier converge in media alla funzione stessa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \quad \text{con} \quad c_i = \langle \phi_i | f \rangle \quad (4.1)$$

dove la convergenza in media è definita da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)|^2 dx = 0$$

La (4.1) implica la **relazione di completezza**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_i^*(x') = \delta(x - x')$$

Infatti se riscriviamo la (4.1) come

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \phi_i | f \rangle \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b dx \phi_i^*(x') f(x') \phi_i(x) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^*(x') \phi_i(x) \right) f(x') dx' \end{aligned}$$

vediamo che la quantità tra parentesi dentro l'integrale seleziona tra tutti i valori $f(x')$ su cui si integra solo il valore $f(x)$ e quindi si comporta proprio come una delta di Dirac.

Inoltre vale l'equazione di Parseval

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

nonché la sua generalizzazione per il prodotto scalare di due funzioni $f(x) = \sum_i c_i \phi_i(x)$ e $g(x) = \sum_i d_i \phi_i(x)$ che può essere scritto come

$$\langle f|g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^* d_i$$

in analogia al prodotto scalare di vettori scrivibile come somma dei prodotti delle componenti.

Si dimostra inoltre che la serie di Fourier, cioè quella in cui i coefficienti sono i $\langle \phi_i|f \rangle$, dà la serie più rapidamente convergente a $f(x)$ che si possa costruire con il sistema di funzioni $\{\phi_i(x)\}$. Vale inoltre il **teorema di integrazione delle serie di Fourier** che asserisce che integrando una serie di Fourier si ottiene una serie convergente non solo in media, ma in senso stretto.

Infine, enunciamo il fondamentale

Teorema. (di Fischer-Riesz) *Condizione necessaria e sufficiente perché esista una funzione $f \in \mathbb{L}^2(a, b)$ avente come coefficienti di Fourier rispetto a un sistema ortonormale $\{\phi_i(x)\}$ dei numeri $c_i \in \mathbb{C}$ prefissati ad arbitrio è che sia*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$$

Inoltre, se $\{\phi_i(x)\}$ è completo, allora $f(x)$ è definita univocamente.

Il teorema di Fischer-Riesz assicura che, data una funzione, ne possiamo determinare i coefficienti di Fourier e dati i coefficienti di Fourier possiamo viceversa determinare la funzione. L'informazione contenuta nella funzione è anche contenuta equivalentemente nei suoi coefficienti di Fourier.

Il teorema qui enunciato stabilisce una corrispondenza biunivoca tra funzioni di $\mathbb{L}^2(a, b)$ e vettori di uno spazio vettoriale infinito dimensionale sul corpo \mathbb{C} dei numeri complessi, dotato di prodotto scalare e di norma definita positiva, in cui vale una proprietà di completezza, ovvero uno *spazio di Hilbert*. Infatti basta costruire il vettore $|f\rangle$ di componenti $c_i = \langle \phi_i|f \rangle$ per metterlo in corrispondenza con la funzione $f(x)$. Le funzioni $\phi_i(x)$ giocano il ruolo di vettori di una base ortonormale $|i\rangle$.

Viceversa, dato un vettore $|f\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$ i suoi coefficienti possono essere usati come coefficienti di Fourier per costruire, in base al teorema di Fischer-Riesz, una funzione $f(x)$ a quadrato sommabile.

Un sistema di funzioni $\{\psi_i\}$, non necessariamente ortonormale, può comunque dirsi *completo* se, data una funzione $f(x)$ la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(x)$$

con $c_i = \langle \psi_i | f \rangle$ converge in media a $f(x)$.

Inoltre esso si dice **chiuso** in $\mathbb{L}^2(a, b)$ se la sola funzione ortogonale a tutte le ψ_i è la funzione identicamente nulla $f(x) \equiv 0$. Si dimostra che

Teorema. *Un sistema ortonormale è completo se e solo se è chiuso.*

Una funzione $f(x)$ può anche essere espansa in serie rispetto a un sistema completo non ortonormale. La completezza di tale sistema garantirà la convergenza in media della serie corrispondente (che non è più di Fourier). Se il sistema $\{\psi_i\}$ risulta poi essere in corrispondenza a un altro sistema $\{\chi_i\}$ attraverso una trasformazione lineare invertibile, allora anche questo nuovo sistema è completo. Ciò tra l'altro permette di trovare sempre una trasformazione che porti da un sistema completo qualunque a un sistema ortonormale, con una procedura pratica che viene detta metodo di **ortogonalizzazione di Schmidt**, che consiste nel porre

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \psi_1 \\ \phi_2 &= a_{21}\psi_1 + \psi_2\end{aligned}$$

determinando a_{21} in modo tale che sia $(\phi_2, \phi_1) = 0$, e quindi

$$0 = \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = a_{21} \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad \implies \quad a_{21} = -\frac{\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle}{\|\psi_1\|^2}$$

e poi

$$\phi_3 = a_{31}\psi_1 + a_{32}\psi_2 + \psi_3$$

determinando a_{31} e a_{32} in modo che sia $\langle \phi_3 | \phi_1 \rangle = \langle \phi_3 | \phi_2 \rangle = 0$ e così via garantendo l'ortogonalità e infine normalizzando a 1 le funzioni risultanti dalla procedura.

4.3 Serie di Fourier trigonometriche

Un sistema ortonormale completo molto usato in $\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)$ (o in qualsiasi altro intervallo di ampiezza 2π , grazie alla loro periodicità, è quello delle funzioni *trigonometriche*

$$\left\{ \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

che permettono di rappresentare una funzione periodica come

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

con $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \sin nx | f \rangle$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \cos nx | f \rangle$. Si noti che una funzione pari avrà solo i termini con i coseni diversi da zero, mentre una dispari solo quelli con i seni.

Equivalentemente si può usare il sistema delle funzioni *esponenziali*

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

che è il più usato in fisica e che rappresenta una funzione periodica mediante

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

con $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e^{inx} | f \rangle$.

Naturalmente, se l'intervallo di periodicità non è di lunghezza 2π , ma L , basterà riscrivere la variabile $x \rightarrow \frac{2\pi}{L}x$ e quindi per ogni funzione che abbia periodo L (quindi definita per es. nell'intervallo $[0, L]$, oppure $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$) si avrà

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in \frac{2\pi}{L} x}$$

con

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in \frac{2\pi}{L} x} dx$$

4.4 Trasformate di Fourier

Si può anche pensare di effettuare il limite formale per $L \rightarrow \infty$, anche se ci sarebbero delicati problemi di convergenza da trattare, che in questa sede sorvoliamo. Ciò permette di definire un analogo delle serie di Fourier anche per funzioni non periodiche e definite su tutto l'asse reale. Definiamo

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad \text{e} \quad \frac{2\pi n}{L} = k_n$$

Δk diventa infinitesimo per $L \rightarrow \infty$ e i k_n tendono ad addensarsi. I coefficienti

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

pure tenderebbero a zero (sempre che l'integrale sia convergente) e quindi conviene definire

$$\tilde{f}(k_n) = \frac{c_n}{\Delta k}$$

La serie di Fourier diventa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_n) e^{ik_n x} \Delta k$$

Nel limite $L \rightarrow \infty$ allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k \dots \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dk \dots$$

e le k_n diventano una variabile continua k . Possiamo scrivere perciò

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk} \quad \text{e} \quad \boxed{\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx}$$

Alla funzione $\tilde{f}(k)$ si dà il nome di **trasformata di Fourier** di $f(x)$ e $f(x)$ è la *antitrasformata di Fourier* di $\tilde{f}(k)$.

Serie e integrali di Fourier compaiono in ogni problema in cui sia opportuno rappresentare un dato fenomeno come sovrapposizione di fenomeni periodici. Dunque in qualunque problema di tipo ondulatorio l'analisi di Fourier è cruciale e infatti le trasformate di Fourier trovano ampia applicazione dall'acustica, all'ottica e spettroscopia fino alla meccanica quantistica ondulatoria.

La definizione di trasformata di Fourier qui data ha però il problema che non garantisce l'esistenza di $\tilde{f}(k)$ per una $f(x)$ generica. L'integrale che la definisce potrebbe infatti non essere convergente. Esiste però un notevole

Teorema. (di Plancherel) *Per una funzione $f(x) \in \mathbb{L}^2$ a quadrato sommabile sui reali esiste sempre la sua trasformata di Fourier, ovvero esiste una funzione*

$$\tilde{f}(k) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-ikx} f(x) dx$$

ove il limite è inteso nel senso della convergenza in media. Tale funzione $\tilde{f}(k)$ è pure essa a quadrato sommabile sui reali e la sua antitrasformata converge in media a $f(x)$.

Questo teorema da sé giustifica già abbastanza l'interesse per le funzioni a quadrato sommabile nei problemi ondulatori. Se le funzioni d'onda di un sistema quantistico sono a quadrato sommabile, anche le loro trasformate di Fourier costituiscono un sistema a quadrato sommabile e ci possiamo chiedere che cosa rappresenti questa nuova collezione di funzioni.

Prima di addentrarci in questo problema, però, vogliamo elencare alcune proprietà importanti delle trasformate di Fourier. Per enunciarle conviene vedere la trasformata di Fourier come un operatore

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

che associa a una funzione nello spazio funzionale delle f un'altra funzione nello spazio funzionale delle \tilde{f} .

Derivate – La trasformata di Fourier della derivata di una funzione $f(x)$ è legata a quella di $f(x)$ stessa dalla relazione

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = ik \mathcal{F}_k[f(x)]$$

Essa si dimostra agevolmente dalla definizione, effettuando una integrazione per parti

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k \left[\frac{df(x)}{dx} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{df(x)}{dx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{-ikx}}{dx} f(x) dx \end{aligned}$$

Ora, se $f(x)$ ammette trasformata di Fourier deve essere $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ e il termine integrato sparisce. Ne segue

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) dx = ik \tilde{f}(k)$$

Similmente vale anche una proprietà sulle antitrasformate, che porta all'ulteriore interessante relazione

$$\mathcal{F}_k[xf(x)] = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}_k[f(x)]$$

Queste relazioni possono agevolmente essere generalizzate alle derivate n -sime

$$\mathcal{F}_k \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right] = (ik)^n \mathcal{F}_k[f(x)] \quad , \quad \mathcal{F}_k[x^n f(x)] = i^n \frac{d^n}{dk^n} \mathcal{F}_k[f(x)]$$

e per le primitive

$$\mathcal{F}_k \left[\int f(x) dx \right] = \frac{1}{ik} \mathcal{F}_k[f(k)] + \text{cost.} \delta(k)$$

Traslazioni – Valgono inoltre le relazioni “di traslazione”

$$\mathcal{F}_k[f(x-a)] = e^{ika} \mathcal{F}_k[f(x)] \quad , \quad \mathcal{F}_k[e^{iqx} f(x)] = \mathcal{F}_{k-q}[f(x)]$$

Definizione. Si dice **convoluzione** di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ l'integrale

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

L'operazione di convoluzione è, nello spazio funzionale, un prodotto commutativo e associativo, come è facile verificare dalla definizione. Vale la seguente proprietà per le trasformate di Fourier di una convoluzione

$$\mathcal{F}_k[(f * g)(x)] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[f(x)] \mathcal{F}_k[g(x)] \quad , \quad \mathcal{F}_k[f(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_k[f] * \mathcal{F}_k[g]$$

ovvero la trasformata di Fourier manda convoluzioni in prodotti ordinari e viceversa.

Diamo qui di seguito alcuni esempi di trasformate di Fourier di funzioni utili.

La trasformata della funzione $f(x) = 1$, che non è a quadrato sommabile, dà una funzione che non è una funzione, bensì una distribuzione: la delta di Dirac

$$\mathcal{F}_k[1] = \sqrt{2\pi} \delta(k)$$

La trasformata di una funzione tipo onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| < a \\ 0 & \text{per } |x| > a \end{cases}$$

ha la forma (che abbiamo già incontrato nel pacchetto d'onda, che avevamo appunto costruito in pratica come un'onda quadra attorno al valor medio dell'impulso)

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ka}{k}$$

La funzione $e^{-\lambda|x|}$ ha come trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}_k[e^{-\lambda|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + k^2}$$

Una trasformata di Fourier molto importante è quella della gaussiana di larghezza σ

$$\mathcal{F}_k\left[e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}}$$

che è ancora una gaussiana di larghezza $2/\sigma$, inversamente proporzionale alla precedente. Ovvero più una gaussiana è stretta, più la sua trasformata è larga. Tavole estese di trasformate di Fourier delle più comuni funzioni si trovano su vari manuali come per esempio il Gradshteyn - Ryzhik, o possono essere calcolate da programmi di manipolazione algebrica quali Mathematica o Maple.

Capitolo 5

Equazioni differenziali lineari ordinarie

Sia data una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti variabili

$$A(z)u''(z) + B(z)u'(z) + C(z)u(z) = D(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

Distinguiamo subito due casi:

- le **equazioni omogenee** in cui $D(z) = 0$
- le **equazioni disomogenee** per le quali $D(z) \neq 0$.

Non ci occuperemo qui delle equazioni disomogenee, le quali comunque possono essere risolte (per esempio con il metodo della *variazione delle costanti*) una volta note le soluzioni di quelle omogenee, per cui ci occuperemo qui di queste ultime, che sono tra l'altro quelle che compaiono nei problemi di meccanica quantistica, la cui forma generale è

$$A(z)u''(z) + B(z)u'(z) + C(z)u(z) = 0 \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

5.1 Forma standard

In generale, dividendo per il coefficiente della derivata seconda, essa può sempre essere posta nella **forma standard**

$$\boxed{u'' + p(z)u' + q(z)u = 0} \tag{5.1}$$

in cui

$$p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad , \quad q(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

I punti in cui $p(z)$ e $q(z)$ sono funzioni regolari, cioè non presentano singolarità, si dicono **punti regolari**. Viceversa i punti in cui questi due coefficienti presentano delle singolarità si dicono **punti singolari**.

Esempio. L'equazione

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + z^2 u(z) = 0 \quad (5.2)$$

in forma standard si scrive come

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{2z}{1 - z^2} \frac{du}{dz} + \frac{z^2}{1 - z^2} u(z) = 0$$

Perciò i coefficienti variabili $p(z)$ e $q(z)$ sono

$$p(z) = -\frac{2z}{1 - z^2} \quad , \quad q(z) = \frac{z^2}{1 - z^2}$$

Entrambi mostrano un polo del primo ordine in $z = 1$

$$\begin{aligned} p(z) &\underset{z \rightarrow 1}{=} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-1) + \frac{1}{8}(z-1)^2 + O((z-1)^3) \\ q(z) &\underset{z \rightarrow 1}{=} -\frac{1/2}{z-1} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 + O((z-1)^3) \end{aligned}$$

e un altro in $z = -1$

$$\begin{aligned} p(z) &\underset{z \rightarrow -1}{=} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z+1) - \frac{1}{8}(z+1)^2 + O((z-1)^3) \\ q(z) &\underset{z \rightarrow -1}{=} \frac{1/2}{z+1} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}(z+1) + \frac{1}{16}(z+1)^2 + O((z-1)^3) \end{aligned}$$

Come vedremo, è importante anche conoscere l'andamento di queste funzioni all'infinito

$$p(z) \underset{z \rightarrow \infty}{=} 2z^{-1} + 2z^{-3} + O(z^{-2}) \quad , \quad q(z) \underset{z \rightarrow \infty}{=} -1 - z^{-2} + O(z^{-1})$$

5.2 Forma ridotta

E' sempre possibile dare una forma equivalente dell'equazione, detta **forma ridotta** in cui il termine con la derivata prima è assente. A questo scopo si scelga

$$k(z) = e^{-\frac{1}{2} \int p(z) dz}$$

con l'integrale inteso in senso indefinito e quindi definita a meno di una costante moltiplicativa, che è inessenziale in quanto può essere riassorbita nella costante di normalizzazione della soluzione. Con essa si definisca una nuova funzione incognita

$$\chi(z) = \frac{u(z)}{k(z)}$$

Poiché

$$\frac{k'(z)}{k(z)} = -\frac{1}{2}p(z) \quad \text{e} \quad \frac{k''(z)}{k(z)} = -\frac{1}{2}p'(z) + \frac{1}{4}p(z)^2$$

la (5.1) assume la forma

$$\chi''(z) + J(z)\chi(z) = 0$$

con

$$J(z) = q(z) - \frac{1}{2}p'(z) - \frac{1}{4}p(z)^2$$

Esempio. Nel caso dell'equazione (5.2) avremo

$$\int p(z) dz = \int \frac{-2z}{1-z^2} dz = \log(z^2 - 1) \quad \implies \quad k(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}$$

Perciò, ponendo

$$u(z) = (z^2 - 1)\chi(z)$$

ed essendo

$$J(z) = \frac{1 + z^2 + z^4}{(z^2 - 1)^2}$$

la $\chi(z)$ soddisferà l'equazione

$$\chi''(z) + \frac{1 + z^2 + z^4}{(z^2 - 1)^2} \chi(z) = 0$$

5.3 Soluzioni linearmente indipendenti

L'equazione (5.1) è del secondo ordine, perciò ammette due soluzioni linearmente indipendenti. Dette queste $u_1(z)$ e $u_2(z)$ la soluzione generale sarà

$$u(z) = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z)$$

con c_1, c_2 coefficienti arbitrari. Il problema si riconduce quindi a quello di trovare due soluzioni linearmente indipendenti della (5.1). Allo scopo introduciamo la nozione di **determinante wronskiano** delle due soluzioni

$$W = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix}$$

per il quale vale il seguente fondamentale teorema

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due soluzioni u_1 e u_2 siano linearmente indipendenti è che il loro determinante wronskiano sia diverso da zero.*

Dimostrazione. Infatti se u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti la relazione

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$$

implica necessariamente $\alpha = \beta = 0$. Lo stesso dicasi per la derivata di tale relazione

$$\alpha u_1' + \beta u_2' = 0$$

Il sistema lineare composto da queste due equazioni ammette come unica soluzione la $\alpha = \beta = 0$ se e solo se il determinante w non si annulla. \square

La dipendenza di W da z è indipendente dalla conoscenza esplicita delle soluzioni u_1 e u_2 . Poiché

$$W = u_1 u_2' - u_1' u_2$$

derivando rispetto a z si ha

$$W' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2$$

Ma la (5.1) implica $u_i'' = -p u_i' - q u_i$ ($i = 1, 2$) e quindi

$$W' = -p(u_1 u_2' - u_1' u_2) = -pW$$

ovvero

$$\frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{d}{dz} \log W(z) = -p(z)$$

che integrata fornisce la cosiddetta **formula di Liouville** del wronskiano

$$W(z) = W(z_0)e^{-\int_{z_0}^z p(\zeta)d\zeta}$$

In particolare, se $W \neq 0$ in un punto z_0 , esso è diverso da zero ovunque. Se le due soluzioni u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti in z_0 , esse lo sono ovunque.

5.4 Soluzioni attorno a punti regolari

Diciamo che z_0 è un **punto regolare** dell'equazione (5.1) se sia $p(z)$ che $q(z)$ sono olomorfe in z_0 . Ciò significa che p e q ammettono una espansione in serie di Taylor attorno a z_0

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z - z_0)^n \\ q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z - z_0)^n \end{aligned}$$

Le soluzioni attorno a un punto regolare z_0 sono esse stesse regolari. Quindi, possono essere date come sviluppi in serie di potenze attorno a z_0

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

I coefficienti c_n possono essere calcolati inserendo questo *ansatz* di soluzione nell'equazione stessa, ottenendo una formula ricorsiva. Infatti, calcoliamo u' e u''

$$\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n \\ u''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)(z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)(z - z_0)^n \end{aligned}$$

Immettendo tutto ciò nell'equazione, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)(z - z_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z - z_0)^k \sum_{l=0}^{\infty} c_{l+1}(l+1)(z - z_0)^l \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} q_k(z - z_0)^k \sum_{l=0}^{\infty} c_l(z - z_0)^l \end{aligned}$$

Ora cerchiamo di riorganizzare le somme in modo che in ogni termine compaia sempre la stessa potenza di $(z - z_0)$. Un cambio di variabile negli indici delle somme $n = k + l$ porta a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \dots$$

in cui $k \rightarrow n - l$. Ciò permette di riorganizzare la somma in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{l=0}^n [p_{n-l}c_{l+1}(l+1) + q_{n-l}c_l] \right\} (z - z_0)^n = 0$$

e questo ci dà una formula di ricorrenza per le c_n

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{l=0}^n [p_{n-l}c_{l+1}(l+1) + q_{n-l}c_l] = 0$$

che risultano tutte determinate una volta fissate le prime due c_0 e c_1 , che rimangono quindi le due costanti arbitrarie da cui giustamente deve dipendere la soluzione generale di una equazione di secondo ordine.

Se ne conclude che un punto regolare dell'equazione ammette nel suo intorno soluzioni certamente olomorfe. Le sole possibili singolarità delle soluzioni potranno manifestarsi solo nei punti singolari dell'equazione, cioè dove $p(z)$ e $q(z)$ presentano singolarità.

5.5 Soluzioni attorno a punti singolari

Se in z_0 le funzioni $p(z)$ e/o $q(z)$ non sono olomorfe e quindi presentano delle singolarità, esso viene detto **punto singolare** dell'equazione differenziale. In una regione anulare attorno a un tale punto singolare, $p(z)$ e $q(z)$ ammetteranno una espansione in serie di Laurent

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(z - z_0)^n \\ q(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(z - z_0)^n \end{aligned}$$

Supponiamo che $v_1(z)$ e $v_2(z)$ siano una base di due soluzioni linearmente indipendenti in un intorno di z_0 . Facciamo fare un giro completo a z attorno a z_0

$$z - z_0 \rightarrow (z - z_0)e^{2\pi i}$$

ovvero studiamo le funzioni v_1, v_2 nel punto

$$\tilde{z} = z_0 + (z - z_0)e^{2\pi i}$$

Se le funzioni fossero olomorfe in z_0 ovviamente sarebbe $v_i(z) = v_i(\tilde{z})$. Ora però, essendo z_0 un punto singolare e quindi non potendo applicare il teorema di Cauchy, le funzioni $\tilde{v}_i(z) \equiv v_i(\tilde{z})$ sebbene ancora soluzioni dell'equazione differenziale, in generale differiranno dalle originali $v_i(z)$. Esse costituiranno una nuova base di funzioni linearmente indipendenti, poiché il loro wronskiano sarà comunque diverso da zero.

Le nuove soluzioni così trovate dovranno essere scrivibili come combinazioni lineari delle vecchie. In altre parole aver girato attorno alla singolarità z_0 equivale ad aver operato un cambiamento di base nello spazio delle soluzioni. Dunque potremo scrivere

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(z) \\ \tilde{v}_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \end{pmatrix}$$

Ci si può chiedere se tra tutte le basi v_1, v_2 e \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 possibili ve ne siano alcune dalle proprietà più semplici, ovvero che siano semplicemente moltiplicate per una costante quando operiamo una trasformazione del tipo descritto sopra. La risposta è che tali soluzioni sono facilmente selezionate considerando gli autovettori della matrice di elementi a_{ij} ora introdotta. Essa viene detta **matrice di monodromia** delle soluzioni attorno al punto singolare z_0 . L'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

fornisce gli autovalori λ_1, λ_2 della matrice di monodromia. Essi possono essere diversi tra loro $\lambda_1 \neq \lambda_2$, oppure coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$.

5.5.1 Autovalori non coincidenti

Supponiamo dapprima che gli autovalori λ_1, λ_2 siano diversi tra loro. In corrispondenza di ognuno dei due troveremo le soluzioni linearmente indipendenti (autovettori) u_1, u_2 tali che

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(z) = u_1(\tilde{z}) &= \lambda_1 u_1(z) \\ \tilde{u}_2(z) = u_2(\tilde{z}) &= \lambda_2 u_2(z) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Osserviamo ora che una funzione che venga moltiplicata per un fattore costante quando si compia un giro attorno a z_0 è la funzione $(z - z_0)^\rho$ con $\rho \in \mathbb{R}$. Infatti

$$(z - z_0)^\rho \rightarrow (z - z_0)^\rho e^{2\pi i \rho}$$

e quindi scegliendo

$$\rho_i = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_i$$

le due funzioni $(z - z_0)^{\rho_i}$ con $i = 1, 2$ hanno le stesse proprietà di ploidromia (singolarità *branch*) delle $u_i(z)$. Perciò le due funzioni

$$\frac{u_i(z)}{(z - z_0)^{\rho_i}}$$

sono monodrome nel punto z_0 . Esse sono analitiche nell'anello attorno a z_0 in cui lo sono $p(z)$ e $q(z)$ e come esse ammettono quindi uno sviluppo in serie di Laurent. In conclusione possiamo scrivere, per le soluzioni attorno a un punto singolare isolato z_0 , che esse sono combinazioni lineari delle soluzioni linearmente indipendenti rappresentate da

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \end{cases}$$

Si noti infine che la definizione di ρ_i in termini di λ_i è ambigua poiché il logaritmo di un numero complesso è definito mod $2\pi i$ e quindi le ρ_i risultano definite a meno di interi. Ciò non comporta però alcun problema, perché un cambiamento di ρ_i di un intero nelle formule per le u_1, u_2 può essere riassorbito da uno shift dello stesso intero nel conteggio dei termini della serie di Laurent.

5.5.2 Autovalori coincidenti

Consideriamo ora il caso in cui gli autovalori λ_1, λ_2 siano coincidenti (e quindi $\rho_2 - \rho_1 \in \mathbb{Z}$). In questo caso esisterà una sola soluzione $u_1(z)$ che soddisfi le proprietà di monodromia (5.3). Ad essa dovremo affiancare un'altra generica soluzione linearmente indipendente $u_2(z)$, per la quale però

$$\tilde{u}_2(z) = a_{21}u_1(z) + a_{22}u_2(z)$$

L'equazione secolare diventa ora

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

ma, avendo essa per ipotesi due soluzioni identiche $\lambda_2 = \lambda_1$ non potrà che essere $a_{22} = \lambda_1$ e quindi

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(z) &= \lambda_1 u_1(z) \\ \tilde{u}_2(z) &= a_{21} u_1(z) + \lambda_1 u_2(z) \end{aligned}$$

Dividendo membro a membro queste due relazioni

$$\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} = \frac{u_2}{u_1} + \frac{a_{21}}{\lambda_1}$$

osserviamo che la funzione u_2/u_1 gode anch'essa di particolari proprietà di polidromia attorno a z_0 , ovvero a seguito di un giro attorno a z_0 acquista una costante. Questa è una proprietà tipica della funzione logaritmo

$$a \log(z - z_0) \rightarrow a \log(z - z_0) + 2\pi i a$$

Ponendo

$$a = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{21}}{\lambda_1}$$

la funzione

$$\frac{u_2}{u_1} - a \log(z - z_0)$$

è monodroma nel punto z_0 ed analitica nell'anello di analiticità di $p(z)$ e $q(z)$ attorno a z_0 e quindi ivi sviluppabile in serie di Laurent. In conclusione la soluzione generale dell'equazione differenziale attorno a z_0 potrà essere espressa come combinazione lineare delle soluzioni linearmente indipendenti della forma

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ u_2(z) = a u_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{cases}$$

5.5.3 Punti fuchsiani

Tutto ciò che abbiamo detto finora è del tutto formale perché le serie di Laurent sono infinite in entrambe le direzioni e perciò non esiste un metodo iterativo, simile a quello illustrato nel caso di punti regolari, per determinare i coefficienti. Inoltre non abbiamo un metodo esplicito per determinare gli esponenti ρ_i .

Se però le singolarità delle funzioni $p(z)$ e $q(z)$ sono poli di un certo ordine finito, la parte negativa delle loro espansioni di Laurent si tronca a un numero finito di termini. Ci si può chiedere quale sia il massimo ordine del polo di $p(z)$ e di quello di $q(z)$ in z_0 tale che le soluzioni linearmente indipendenti siano scrivibili come

$$u_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Grazie all'ambiguità nella definizione di ρ_i a meno di interi, ridefinendo $\rho_i \rightarrow \rho_i - n$ la serie che rimane sarà tutta a potenze positive e perciò di Taylor. dunque non si perde di generalità nel cercare soluzioni

$$u_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} R_i(z) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (5.4)$$

che siano il prodotto di un punto di diramazione $(z - z_0)^{\rho_i}$ e di una funzione olomorfa in z_0

$$R_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

e quindi

$$u'_i(z) = \rho_i (z - z_0)^{\rho_i-1} R_i(z) + (z - z_0)^{\rho_i} R'_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i-1} S_i(z)$$

con $S_i = \rho_i R_i + (z - z_0) R'_i$ ancora olomorfa.

Prima di procedere dimostriamo un importante lemma.

Lemma. *Una qualunque funzione $F(z)$ che sia scrivibile nella forma*

$$F(z) = (z - z_0)^\alpha G(z)$$

con α costante e $G(z)$ olomorfa in z_0 è tale che la sua derivata logaritmica F'/F ha al più un polo di ordine 1 in z_0 . Inoltre il rapporto F''/F ha al più un polo di ordine 2 in z_0 .

Dimostrazione. Supponiamo che $G(z)$ abbia uno zero di ordine $n \geq 0$ in z_0 . Allora potrà essere scritta come $G(z) = (z - z_0)^n H(z)$ con $H(z)$ funzione olomorfa e non nulla in z_0 . Risulta allora

$$F(z) = (z - z_0)^{\alpha+n} H(z)$$

e sarà perciò

$$\log F(z) = (\alpha + n) \log(z - z_0) + \log H(z)$$

e la derivata logaritmica

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{d}{dz} \log F(z) = \frac{\alpha + n}{z - z_0} + \frac{H'(z)}{H(z)}$$

ha al più un polo di ordine 1, poiché H'/H è sicuramente olomorfa in z_0 . Analogamente, denotando quest'ultima funzione olomorfa con $K(z) = \alpha + n + \frac{H'(z)}{H(z)}$, sicché

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{K(z)}{z - z_0}$$

avremo

$$\begin{aligned} \frac{F''}{F} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{F'}{F} \right) - \left(\frac{F'}{F} \right)^2 = \frac{d}{dz} \frac{K(z)}{z - z_0} - \frac{K^2(z)}{(z - z_0)^2} \\ &= \frac{-K(z) + (z - z_0)K'(z) - K^2(z)}{(z - z_0)^2} \end{aligned}$$

Poiché il numeratore di questo rapporto è tutto olomorfo, se ne deduce che F''/F può avere al più un polo di ordine 2. \square

Consideriamo il wronskiano delle due soluzioni linearmente indipendenti u_1, u_2

$$W = W_0 e^{-\int_{z_0}^z p(z') dz'} \neq 0$$

e

$$W(z) = u_1 u_2' - u_1' u_2 = (z - z_0)^\alpha T(z)$$

con $T = R_1 S_2 - R_2 S_1$ olomorfa e $\alpha = \rho_1 + \rho_2 - 1$. Ora

$$p(z) = -\frac{d}{dz} \log W(z) = -\frac{W'}{W}$$

ha al più un polo di ordine 1 in z_0 per il lemma ora enunciato. Quindi possiamo affermare che

$$p(z) = \frac{P(z)}{z - z_0}$$

con $P(z)$ olomorfa e quindi $p(z)$ può avere al più un polo del primo ordine.

Per quanto riguarda la funzione $q(z)$, possiamo ricavarla dall'equazione stessa. Per qualunque $u(z)$ soluzione dell'equazione differenziale si ha infatti

$$q(z) = -\frac{u''}{u} + p\frac{u'}{u}$$

e di nuovo per il lemma precedente u''/u ha al più un polo di ordine 2 e u'/u un polo di ordine 1, che va moltiplicato per p che pure ha un polo di ordine 1. Perciò il prodotto pu'/u avrà un polo di ordine 2 e ne risulta che $q(z)$ ha al più un polo di ordine 2.

In generale, dunque, per avere soluzioni della forma (5.4) in z_0 , si dovrà verificare che i coefficienti variabili $p(z)$ e $q(z)$ dell'equazione differenziale in forma standard devono presentare in z_0 solo poli, al più rispettivamente di ordine 1 o 2. Quando questa condizione è verificata, la singolarità dell'equazione in z_0 si dice **fuchsiana** ed esiste ancora un metodo generale per risolvere l'equazione, detto **metodo di Frobenius**, di cui daremo qui gli elementi essenziali, senza entrare nei dettagli. Dunque sia

$$p(z) = \frac{P(z)}{z - z_0} \quad \text{con} \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z - z_0)^n$$

$$q(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2} \quad \text{con} \quad Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z - z_0)^n$$

ovvero $P(z)$ e $Q(z)$ sono olomorfe nell'intorno di z_0 . Cerchiamo soluzioni della forma

$$u(z) = (z - z_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$$

cioè tali che $u(z)/(z - z_0)^\rho$ sia olomorfa. Il metodo procede in maniera del tutto simile a quanto fatto nel caso dei punti regolari, assumendo ora la forma

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^{k+\rho}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1+\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) (z - z_0)^{n+\rho} \\ u''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) (z - z_0)^{n-2+\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) (z - z_0)^{n+\rho} \end{aligned}$$

Sostituendo queste formule per $u(z)$ e le sue derivate, nonché delle $p(z)$ e $q(z)$, nell'equazione differenziale, si perviene, con lo stesso tipo di manipolazioni usate nel caso dei punti regolari, a un insieme di relazioni a cascata per i coefficienti, che in questo caso sono date da

$$(k + \rho)(k + \rho + 1)c_k + \sum_{l=0}^k [(k - l + \rho)p_l + q_l]c_{k-l} = 0$$

In particolare, per $k = 0$ si ha la relazione

$$[\rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0]c_0 = 0$$

che è soddisfatta o per $c_0 = 0$ (che corrisponde alla scelta della soluzione banale $u = 0$) oppure per

$$\boxed{\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0}$$

che è una equazione algebrica di secondo grado in ρ , detta **equazione indiciale**, le cui soluzioni sono le ρ_1, ρ_2 già descritte nel caso di singolarità isolate generiche

$$\rho_{1,2} = \frac{(1 - p_0) \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0}}{2}$$

Esse forniscono gli esponenti della diramazione che va preposta alla serie regolare. In altre parole le soluzioni linearmente indipendenti $u_1(z)$ e $u_2(z)$ devono prendere la forma

$$u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$u_2(z) = \begin{cases} \text{se } \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z} : & (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \\ \text{se } \rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z} : & a u_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \end{cases}$$

e la soluzione generale è comunque

$$u(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z)$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

5.5.4 Punto all'infinito

Il punto all'infinito può essere regolare o singolare. Si studia agevolmente effettuando il cambiamento di variabili $z = 1/\zeta$ e studiando poi il comportamento nell'origine $\zeta \rightarrow 0$. Riassumiamo qui i risultati utili per scrivere le soluzioni.

- il punto all'infinito è regolare se

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) &= 2 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) &< \infty\end{aligned}\tag{5.5}$$

In questo caso la soluzione generale si scrive

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

con c_0 e c_1 arbitrari e i successivi determinati da una relazione di ricorrenza.

- il punto all'infinito è una singolarità fuchsiana se esistono i due limiti

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) &= P_{\infty} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 q(z) &= Q_{\infty}\end{aligned}$$

Allora si può scrivere l'equazione indiciale

$$\rho^2 - (P_{\infty} - 1)\rho + Q_{\infty} = 0$$

le cui soluzioni ρ_1 e ρ_2 determinano gli esponenti di z da premettere a una serie regolare:

$$\begin{aligned}u_1(z) &= z^{-\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\ u_2(z) &= \begin{cases} \text{se } \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z} & z^{-\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} \\ \text{se } \rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z} & au_1(z) \log z + z^{-\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} \end{cases}\end{aligned}$$

Sia in questo caso che nei punti fuchsiani al finito il coefficiente a può, dopo la sostituzione nella equazione e la determinazione dei coefficienti ricorsivamente, risultare nullo. Ciò tuttavia non è mai vero se $\rho_1 = \rho_2$.

Per punti singolari non fuchsiani non esiste un metodo generale di soluzione e occorre trovarne uno volta per volta.

Capitolo 6

Polinomi ortogonali

6.1 Generalità

Il sistema delle potenze $\{x^n\}$ è, per tutte le funzioni regolari, una base di funzioni completa. Infatti ogni funzione regolare è espandibile in serie di McLaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Tuttavia, tale base non è ortonormale, come appare chiaro per esempio calcolando il prodotto scalare

$$\langle x^n | x^m \rangle = \int_a^b x^n x^m dx = \frac{b^{n+m+1} - a^{n+m+1}}{n+m+1} \neq \delta_{n,m}$$

Dunque occorre ortogonalizzare la base con la procedura di Graham-Schmidt e definire così sequenze di **polinomi ortogonali** $\{p_n(x)\}$ di grado pari all'indice, che abbiano prodotto scalare dato da $h_n \delta_{n,m}$, ove h_n è una costante di normalizzazione. Inoltre, generalizziamo qui il concetto di prodotto scalare ammettendo che l'integrale che lo rappresenta possa essere “pesato”, cioè effettuato su una misura che non sia la banale dx ma una più generica $d\mu = w(x)dx$. La funzione $w(x)$, che assumeremo positiva in tutto l'intervallo $[a, b]$, è detta **peso** del prodotto scalare generalizzato. In questo contesto dei polinomi ortogonali si considerano funzioni reali di variabile reale, perciò omettiamo la coniugazione complessa nel prodotto scalare generalizzato, che pertanto si scrive

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\mu = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

Diremo che una funzione $f(x)$ appartiene alle funzioni a quadrato sommabile rispetto al peso $w(x)$ (o equivalentemente alla misura $d\mu$) se ha norma finita rispetto al prodotto scalare generalizzato

$$\langle f|f \rangle = \int_a^b f(x)^2 d\mu < \infty$$

e scriveremo $f \in \mathbb{L}_w^2(a, b)$. Pertanto la relazione di ortogonalità di due polinomi si scrive

$$\langle p_n | p_m \rangle = \int_a^b p_n(x) p_m(x) d\mu = h_n \delta_{n,m}$$

ove

$$h_n = \langle p_n | p_n \rangle = \int_a^b p_n^2(x) d\mu$$

Per le sequenze di polinomi ortogonali vale il seguente

Teorema. (di unicità) *Se $\{p_n(x)\}$ è un sistema di polinomi ortogonali nell'intervallo $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$, allora ogni polinomio $p_n(x)$ è determinato univocamente a meno di una costante moltiplicativa K_n .*

La costante K_n può essere fissata univocamente da qualche richiesta, variabile a seconda della sequenza particolare in esame, sul valore che i polinomi debbono assumere in qualche loro punto, oppure sul valore che deve avere la loro derivata in qualche punto, o secondo altri criteri, normalmente dettati dalle situazioni storiche in cui la sequenza è stata introdotta. La costante K_n è detta **standardizzazione** e non è da confondere con la costante di **normalizzazione** h_n . Quasi mai i polinomi ortogonali sono dati in una sequenza che sia anche ortonormalizzata, ma conoscendo h_n questo non è un problema, in quanto basta dividere il polinomio per $\sqrt{h_n}$ per ottenerne una versione normalizzata. Nel seguito, per ogni sequenza che esamineremo, daremo sia K_n che h_n .

Teorema. (degli zeri) *Gli zeri di un polinomio ortogonale $p_n(x)$ sono tutti semplici e interni all'intervallo $[a, b]$.*

Tutte le sequenze di polinomi ortogonali soddisfano certe proprietà fondamentali che qui elenchiamo senza darne dimostrazione:

1. Tre polinomi ortogonali consecutivi della stessa sequenza soddisfanno una **relazione di ricorrenza**

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) p_n(x) - C_n p_{n-1}(x)$$

con A_n, B_n, C_n coefficienti opportuni dipendenti da n ma non da x . Quindi conoscendo i primi n polinomi si può ricorsivamente ottenere l' $n + 1$ -simo.

2. Le sequenze più importanti di polinomi ortogonali si possono ottenere, a meno della standardizzazione, mediante la **formula di Rodriguez**

$$K_n p_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x) X(x)]^n$$

ove $X(x)$ è un polinomio al più di secondo grado. Le sequenze di polinomi ortogonali cosiddetti *classici* si ottengono appunto scegliendo la funzione $X(x)$ come polinomio di secondo grado, di primo grado o costante. La funzione $X(x)$ determina anche quale forma generale debba avere la funzione peso per assicurare la convergenza dell'integrale

$$\int_a^b w(x) dx < \infty$$

- (a) in $\mathbb{L}_w^2(a, b)$, con a, b finiti, i polinomi ortogonali si ottengono scegliendo

$$X(x) = (x - a)(b - x)$$

e corrispondentemente la funzione peso

$$w(x) = (b - x)^\alpha (x - a)^\beta$$

con $\alpha, \beta > -1$. Si definisce così una famiglia a due parametri α, β di sequenze di polinomi ortogonali. Nel caso particolare in cui l'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$ essi sono detti **polinomi di Jacobi** $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ per i quali

$$X(x) = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$$

- (b) nel caso $\mathbb{L}_w^2(a, \infty)$ la scelta di $X(x)$ è di polinomio di primo grado

$$X(x) = x - a$$

È d'uso scegliere $a = 0$ e quindi studiare i polinomi sulla semiretta positiva $[0, \infty]$ con

$$X(x) = x \quad \text{e} \quad w(x) = e^{-x} x^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha > -1$$

La famiglia a un parametro α di sequenze di polinomi ortogonali risultante $\{L_n^\alpha(x)\}$ viene denominata **polinomi di Laguerre**.

- (c) nel caso di $\mathbb{L}_w^2(-\infty, \infty) = \mathbb{L}_w^2$ la scelta di $X(x)$ è ovviamente di grado zero, cioè una costante e definisce polinomi ortogonali sull'intero asse reale

$$X(x) = 1 \quad \text{e} \quad w(x) = e^{-x^2}$$

In questo caso esiste una sola sequenza di polinomi ortogonali, detta **polinomi di Hermite** $\{H_n(x)\}$.

3. Il sistema delle derivate prime dei polinomi ortogonali classici costituisce ancora un sistema di polinomi ortogonali.
4. Esiste una **formula per la derivata** prima $p'_n(x)$ di un polinomio ortogonale classico in termini del polinomio $p_n(x)$ stesso e del suo antecedente $p_{n-1}(x)$.
5. I polinomi ortogonali classici soddisfano una **equazione differenziale** ordinaria lineare omogenea del secondo ordine

$$X(x) \frac{d^2 p_n}{dx^2} + K_1 p_1(x) \frac{dp_n}{dx} + \lambda_n p_n = 0$$

ove λ_n dipende da n ma non da x .

6. Infine per ogni sequenza di polinomi ortogonali classici esiste una **funzione generatrice** $F(x, t)$ da cui essi possono essere ottenuti come coefficienti di una espansione in serie nella variabile t

$$F(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} K_n p_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

ovvero

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n} \left. \frac{\partial^n F}{\partial t^n} \right|_{t=0}$$

6.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre sono definiti come le soluzioni polinomiali dell'equazione di Legendre per l intero positivo o nullo ($l = 0, 1, 2, \dots$)

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_l}{dx^2} - 2x \frac{dP_l}{dx} + l(l + 1) P_l = 0$$

e corrispondono a un caso particolare dei polinomi di Jacobi per $\alpha = \beta = 0$. Essi hanno perciò

$$X(x) = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad w(x) = 1$$

Vengono standardizzati imponendo che

$$P_l(1) = 1$$

il che implica

$$K_l = (-2)^l l!$$

Essi sono generati dalla formula di Rodriguez

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

o, alternativamente, dall'espansione della funzione generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (-2)^l P_l(x) t^l$$

La loro forma esplicita è

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2l - 2k)!}{k! (l - k)! (l - 2k)!} x^{l-2k}$$

I primi polinomi di Legendre sono

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ &\dots \end{aligned}$$

e soddisfano la relazione di ricorrenza

$$\boxed{(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)} \quad (6.1)$$

nonché quella per la derivata

$$(x^2 - 1) \frac{dP_l(x)}{dx} = l[xP_l(x) - P_{l-1}(x)]$$

ovvero equivalentemente

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1} [P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)] \quad (6.2)$$

I polinomi di Legendre sono ortogonali

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = h_l \delta_{l,l'}$$

con

$$h_l = \frac{2}{2l+1}$$

La sequenza ortonormalizzata si ottiene dividendo per la normalizzazione

$$\check{P}_l(x) = \frac{P_l(x)}{\sqrt{h_l}}$$

I polinomi di Legendre di grado pari sono funzioni pari di x e quelli di grado dispari sono funzioni dispari di x

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

Spesso interessano i polinomi di Legendre per $x = \cos \theta$. In questo caso, grazie a note identità trigonometriche che legano potenze dei coseni a coseni di angoli multipli, la forma generale si può riscrivere come

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{k=0}^l \frac{(1/2)_k (1/2)_{n-k}}{k!(n-k)!} \cos[(l-2k)\theta]$$

6.3 Funzioni associate ai polinomi di Legendre

Si definiscano, per m intero tale che $-l \leq m \leq l$, le funzioni

$$P_l^m(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) & \text{se } m \geq 0 \\ (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x) & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

ove $P_l(x)$ sono polinomi di Legendre. A tali funzioni si dà il nome di *funzioni associate ai polinomi di Legendre*. Esse risultano essere soluzioni dell'equazione differenziale di Legendre per $m \neq 0$

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)u = 0$$

Una importante relazione può essere ottenuta tra le funzioni associate di Legendre considerando $x = \cos \theta$. La relazione di ricorrenza (6.1) per i polinomi di Legendre implica, applicandovi l'operatore $(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m} = \sin^m \theta \frac{d^m}{dx^m}$

$$(l+1)P_{l+1}^m(x) = (2l+1)xP_l^m(x) + (2l+1)m\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x) - lP_{l-1}^m(x) \quad (6.3)$$

e, osservando che

$$\sin \theta P_l^m(x) = \sin^{m+1} \theta \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

con l'ausilio della formula per le derivate dei polinomi di Legendre (6.2) si ricava

$$\sin \theta P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} \sin^{m+1} \theta \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} [P_{l+1} - P_{l-1}]$$

da cui

$$\boxed{\sin \theta P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}^{m+1}(x) - P_{l-1}^{m+1}(x)]} \quad (6.4)$$

Utilizzando poi la (6.4) nella (6.3) si può agevolmente ottenere anche la relazione di ricorrenza per le $P_l^m(x)$

$$\boxed{(l+1-m)P_{l+1}^m(x) = (2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x)}$$

da cui si può ricavare la utile ulteriore relazione

$$\boxed{\cos \theta P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} [(l-m+1)P_{l+1}^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x)]} \quad (6.5)$$

6.4 Polinomi di Hermite

I polinomi di Hermite $H_n(x)$ sono ortonormali sull'intero asse reale, con la scelta

$$X(x) = 1 \quad \text{e} \quad w(x) = e^{-x^2}$$

cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_{n'}(x) e^{-x^2} dx = h_n \delta_{n,n'}$$

con

$$h_n = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

La standardizzazione è

$$K_n = (-1)^n$$

e la formula di Rodriguez

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Soddisfano l'equazione differenziale

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

e la relazione di ricorrenza

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

nonché la formula per la derivata

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

La loro funzione generatrice è

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

I polinomi di Hermite hanno definita parità: quelli di grado pari sono pari e quelli di grado dispari sono dispari

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

La formula esplicita è

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

I primi polinomi di Hermite sono

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 2(2x^2 - 1) \\ H_3(x) &= 4(2x^3 - 3x) \\ &\dots \end{aligned}$$

6.5 Polinomi di Laguerre

I polinomi di Laguerre $L_n^\alpha(x)$ sono una famiglia dipendente da un parametro $\alpha > -1$ di sequenze di polinomi ortogonali sulla semiretta reale positiva, con la scelta della funzione $X(x)$ e del peso pari a

$$X(x) = x \quad \text{e} \quad w(x) = x^\alpha e^{-x}$$

Essi sono ortogonali nella semiretta reale positiva

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_{n'}^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = h_n \delta_{n,n'}$$

con

$$h_n = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \quad \text{e} \quad K_n = n!$$

La loro formula di Rodriguez è

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{\alpha+n}$$

e soddisfano l'equazione differenziale

$$x L_n^{\alpha''} + (\alpha + 1 - x) L_n^{\alpha'} + n L_n^\alpha = 0$$

La relazione di ricorrenza è

$$(n+1) L_{n+1}^\alpha(x) = (2n + \alpha + 1 - x) L_n^\alpha(x) - (n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(x)$$

e la formula per la derivata

$$x L_n^{\alpha'}(x) = n L_n^\alpha(x) - (n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(x)$$

Possono essere ottenuti dalla funzione generatrice

$$\frac{e^{\frac{xt}{t-1}}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n$$

La formula esplicita è

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(n-k)! \Gamma(k - \alpha)} \frac{(-x)^k}{k!}$$

I primi polinomi di Laguerre sono

$$\begin{aligned}L_0^\alpha(x) &= 1 \\L_1^\alpha(x) &= \alpha + 1 - x \\L_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2}[x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 1)(\alpha + 2)] \\&\dots\end{aligned}$$

I polinomi di Laguerre non hanno particolari simmetrie di parità.