Capitolo 4

Spazi funzionali e serie di Fourier

4.1 Funzioni a quadrato sommabile e spazio $\mathbb{L}^2$

Si consideri l'insieme $\mathbb{L}^2(a,b)$ delle funzioni complesse di variabile reale $f(x)$ per le quali esiste ed è finito l'integrale

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

su un intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Tali funzioni sono dette **a quadrato sommabile**. L'insieme delle funzioni a quadrato sommabile su tutto l'asse reale $(-\infty, +\infty)$ viene semplicemente indicato con $\mathbb{L}^2$.

Una funzione tale che

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

sarà necessariamente nulla ovunque in $[a,b]$, poiché $|f|^2$ è una quantità defìnta positiva.[1]

Possiamo identificare lo spazio $\mathbb{L}^2(a,b)$ come uno *spazio vettoriale lineare*, in cui gli elementi sono rappresentati dalle funzioni $f(x)$. Infatti una combinazione lineare di due funzioni appartenenti a tale insieme appartiene ancora a tale insieme. Esiste un elemento neutro $f(x) \equiv 0$ e per ogni funzione $f(x)$ esiste il suo opposto

[1]Più precisamente, tale funzione f potrebbe essere diversa da zero in un numero finito di punti, o anche infinito ma di *misura nulla* (nel senso di Lebesgue) rispetto all'intervallo di integrazione. Perciò questa funzione è *quasi* dappertutto nulla. In quanto segue, per semplificare l'esposizione, trascureremo questa precisazione (seppur importante dal punto di vista concettuale) e diremo grossolanamente che due funzioni sono uguali se differiscono l'una dall'altra per una funzione quasi dappertutto nulla.

$-f(x)$. Ogni funzione può essere moltiplicata per un numero complesso mantenendo la proprietà di quadrato sommabilità e tutti gli assiomi dello spazio vettoriale sono verificati.

In $\mathbb{L}^2(a,b)$ possiamo introdurre una nozione di prodotto scalare tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definendolo come

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

Esso è, come è facile verificare, una forma hermitiana che definisce una norma definita positiva

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Dunque si tratta di uno spazio unitario.

Una funzione tale che $\|f\| = 1$ si dice *normalizzata*. Ogni funzione $f(x) \in \mathbb{L}^2(a,b)$ può sempre essere normalizzata definedo

$$f_{norm}(x) = \frac{1}{\|f\|} f(x)$$

Due funzioni $f(x), g(x) \in \mathbb{L}^2(a,b)$ per le quali $\langle f|g\rangle = 0$ si dicono tra loro *ortogonali*. Una collezione infinita $\{\phi_i(x),\, i \in \mathbb{N}\}$ di funzioni normalizzate a 1 tra loro ortogonali costituisce un *sistema ortonormale*

$$\langle \phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{i,j}$$

Le funzioni che costituiscono un sistema ortonormale sono linearmente indipendenti. Se per assurdo non lo fossero, allora esiterebbero dei $c_i \neq 0$ tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) = 0$$

da cui però seguirebbe che

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle \phi_k|\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{k,i} = c_k = \langle \phi_k|0\rangle = 0$$

in contraddizione con l'ipotesi.

4.2 Serie di Fourier in $\mathbb{L}^2$

Dato un sistema ortonormale $\{\phi_i(x)\}$ e una generica funzione $f(x)$ in $\mathbb{L}^2(a,b)$ si definisce la **serie formale di Fourier** rispetto al sistema $\{\phi_i(x)\}$ la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x)$$

in cui i coefficienti sono dati da

$$c_i = \langle \phi_i | f \rangle$$

Essi prendono il nome di *coefficienti di Fourier* di $f(x)$.

Il sistema ortonormale $\{\phi_i(x)\}$ si dice **completo** in $\mathbb{L}^2(a,b)$ se, data una generica funzione $f(x) \in \mathbb{L}^2(a,b)$, la sua serie di Fourier converge in media alla funzione stessa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x) \qquad \text{con} \qquad c_i = \langle \phi_i | f \rangle \tag{4.1}$$

dove la convergenza in media è definita da

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)|^2 dx = 0$$

La (4.1) implica la **relazione di completezza**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_i^*(x') = \delta(x - x')$$

Infatti se riscriviamo la (4.1) come

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \phi_i | f \rangle \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b dx \phi_i^*(x') f(x') \phi_i(x) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^*(x') \phi_i(x) \right) f(x') dx' \end{aligned}$$

vediamo che la quantità tra parentesi dentro l'integrale seleziona tra tutti i valori $f(x')$ su cui si integra solo il valore $f(x)$ e quindi si comporta proprio come una delta di Dirac.

Inoltre vale l'**equazione di Parseval**

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

nonché la sua generalizzazione per il prodotto scalare di due funzioni $f(x) = \sum_i c_i \phi_i(x)$ e $g(x) = \sum_i d_i \phi_i(x)$ che può essere scritto come

$$\langle f|g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^* d_i$$

in analogia al prodotto scalare di vettori scrivibile come somma dei prodotti delle componenti.

Si dimostra inoltre che la serie di Fourier, cioè quella in cui i coefficienti sono i $\langle \phi_i|f\rangle$, dà la serie più rapidamente convergente a $f(x)$ che si possa costruire con il sistema di funzioni $\{\phi_i(x)\}$. Vale inoltre il **teorema di integrazione delle serie di Fourier** che asserisce che integrando una serie di Fourier si ottiene una serie convergente non solo in media, ma in senso stretto.

Infine, enunciamo il fondamentale

Teorema. (di Fischer-Riesz) *Condizione necessaria e sufficiente perché esista una funzione $f \in \mathbb{L}^2(a,b)$ avente come coefficienti di Fourier rispetto a un sistema ortonormale $\{\phi_i(x)\}$ dei numeri $c_i \in \mathbb{C}$ prefissati ad arbitrio è che sia*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$$

Inoltre, se $\{\phi_i(x)\}$ è completo, allora $f(x)$ è definita univocamente.

Il teorema di Fischer-Riesz assicura che, data una funzione, ne possiamo determinare i coefficienti di Fourier e dati i coefficienti di Fourier possiamo viceversa determinare la funzione. L'informazione contenuta nella funzione è anche contenuta equivalentemente nei suoi coefficienti di Fourier.

Il teorema qui enunciato stabilisce una corrispondenza biunivoca tra funzioni di $\mathbb{L}^2(a,b)$ e vettori di uno spazio vettoriale infinito dimensionale sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, dotato di prodotto scalare e di norma definita positiva, in cui vale una proprietà di completezza, ovvero uno *spazio di Hilbert.* Infatti basta costruire il vettore $|f\rangle$ di componenti $c_i = \langle \phi_i|f\rangle$ per metterlo in corrispondenza con la funzione $f(x)$. Le funzioni $\phi_i(x)$ giocano il ruolo di vettori di una base ortonormale $|i\rangle$.

Viceversa, dato un vettore $|f\rangle = \sum_i c_i|i\rangle$ i suoi coefficienti possono essere usati come coefficienti di Fourier per costruire, in base al teorema di Fischer-Riesz, una funzione $f(x)$ a quadrato sommabile.

Un sistema di funzioni $\{\psi_i\}$, non necessariamente ortonormale, può comunque dirsi *completo* se, data una funzione $f(x)$ la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(x)$$

con $c_i = \langle\psi_i|f\rangle$ converge in media a $f(x)$.

Inoltre esso si dice **chiuso** in $\mathbb{L}^2(a,b)$ se la sola funzione ortogonale a tutte le ψ_i è la funzione identicamente nulla $f(x) \equiv 0$. Si dimostra che

Teorema. *Un sistema ortonormale è completo se e solo se è chiuso.*

Una funzione $f(x)$ può anche essere espansa in serie rispetto a un sistema completo non ortonormale. La completezza di tale sistema garantirà la convergenza in media della serie corrispondente (che non è più di Fourier). Se il sistema $\{\psi_i\}$ risulta poi essere in corrispondenza a un altro sistema $\{\chi_i\}$ attraverso una trasformazione lineare invertibile, allora anche questo nuovo sistema è completo. Ciò tra l'altro permette di trovare sempre una trasformazione che porti da un sistema completo qualunque a un sistema ortonormale, con una procedura pratica che viene detta metodo di **ortogonalizzazione di Schmidt**, che consiste nel porre

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi_1 \\ \phi_2 &= a_{21}\psi_1 + \psi_2 \end{aligned}$$

determinando a_{21} in modo tale che sia $(\phi_2, \phi_1) = 0$, e quindi

$$0 = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = a_{21}\langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_1|\psi_2\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad a_{21} = -\frac{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}{\|\psi_1\|^2}$$

e poi

$$\phi_3 = a_{31}\psi_1 + a_{32}\psi_2 + \psi_3$$

determinando a_{31} e a_{32} in modo che sia $\langle\phi_3|\phi_1\rangle = \langle\phi_3|\phi_2\rangle = 0$ e così via garantendo l'ortogonalità e infine normalizzando a 1 le funzioni risultanti dalla procedura.

4.3 Serie di Fourier trigonometriche

Un sistema ortonormale completo molto usato in $\mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$ (o in qualsiasi altro intervallo di ampiezza 2π, grazie alla loro peridocità, è quello delle funzioni *trigonometriche*

$$\left\{\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\; \phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,,\; \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\,, \quad n = 1,2,3...\right\}$$

che permettono di rappresentare una funzione periodica come

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

con $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \sin nx|f\rangle$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \cos nx|f\rangle$. Si noti che una funzione pari avrà solo i termini con i coseni diversi da zero, mentre una dispari solo quelli con i seni.

Equivalentemente si può usare il sistema delle funzioni *esponenziali*

$$\left\{\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right\}$$

che è il più usato in fisica e che rappresenta una funzione periodica mediante

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k e^{inx}$$

con $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle e^{inx}|f\rangle$.

Naturalmente, se l'intervallo di periodicità non è di lunghezza 2π, ma L, basterà riscalare la variabile $x \to \frac{2\pi}{L}x$ e quindi per ogni funzione che abbia periodo L (quindi definita per es. nell'intervallo $[0, L]$, oppure $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$) si avrà

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}}$$

con

$$\boxed{c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{L}x} dx}$$

4.4 Trasformate di Fourier

Si può anche pensare di effettuare il limite formale per $L \to \infty$, anche se ci sarebbero delicati problemi di convergenza da trattare, che in questa sede sorvoliamo. Ciò permette di definire un analogo delle serie di Fourier anche per funzioni non periodiche e definite su tutto l'asse reale. Definiamo

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \qquad \text{e} \qquad \frac{2\pi n}{L} = k_n$$

Δk diventa infinitesimo per $L \to \infty$ e i k_n tendono ad addensarsi. I coefficienti

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

pure tenderebbero a zero (sempre che l'integrale sia convergente) e quindi conviene definire

$$\tilde{f}(k_n) = \frac{c_n}{\Delta k}$$

La serie di Fourier diventa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_n) e^{ik_n x} \Delta k$$

Nel limite $L \to \infty$ allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k ... \to \int_{-\infty}^{+\infty} dk ...$$

e le k_n diventano una variabile continua k. Possiamo scrivere perciò

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx}$$

Alla funzione $\tilde{f}(k)$ si da il nome di **trasformata di Fourier** di $f(x)$ e $f(x)$ è la *antitrasformata di Fourier* di $\tilde{f}(k)$.

Serie e intergrali di Fourier compaiono in ogni problema in cui sia opportuno rappresentare un dato fenomeno come sovrapposizione di fenomeni periodici. Dunque in qualunque problema di tipo ondulatorio l'analisi di Fourier è cruciale e infatti le trasformate di Fourier trovano ampia applicazione dall'acustica, all'ottica e spettroscopia fino alla meccanica quantistica ondulatoria.

La definizione di trasformata di Fourier qui data ha però il problema che non garantisce l'esistenza di $\tilde{f}(k)$ per una $f(x)$ generica. L'integrale che la definisce potrebbe infatti non essere convergente. Esiste però un notevole

Teorema. (di Plancherel) *Per una funzione $f(x) \in \mathbb{L}^2$ a quadrato sommabile sui reali esiste sempre la sua trasformata di Fourier, ovvero esiste una funzione*

$$\tilde{f}(k) = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-ikx} f(x)dx$$

ove il limite è inteso nel senso della convergenza in media. Tale funzione $\tilde{f}(k)$ è pure essa a quadrato sommabile sui reali e la sua antitrasformata converge in media a $f(x)$.

Questo teorema da sé giustifica già abbastanza l'interesse per le funzioni a quadrato sommabile nei problemi ondulatori. Se le funzioni d'onda di un sistema quantisitico sono a quadrato sommabile, anche le loro trasformate di Fourier costituiscono un sistema a quadrato sommabile e ci possiamo chiedere che cosa rappresenti questa nuova collezione di funzioni.

Prima di addentrarci in questo problema, però, vogliamo elencare alcune proprietà importanti delle trasformate di Fourier. Per enunciarle conviene vedere la trasformata di Fourier come un operatore

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x)dx$$

che associa a una funzione nello spazio funzionale delle f un'altra funzione nello spazio funzionale delle $\tilde{f}$.

Derivate – La trasformata di Fourier della derivata di una funzione $f(x)$ è legata a quella di $f(x)$ stessa dalla relazione

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{df(x)}{dx}\right] = ik\mathcal{F}_k[f(x)]$$

Essa si dimostra agevolmente dalla definizione, effettuando una integrazione per parti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k\left[\frac{df(x)}{dx}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\frac{df(x)}{dx}dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{-ikx}}{dx} f(x)dx\end{aligned}$$

Ora, se $f(x)$ ammette trasformata di Fourier deve essere $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e il termine integrato sparisce. Ne segue

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{df(x)}{dx}\right] = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x)dx = ik\tilde{f}(k)$$

Similmente vale anche una proprietà sulle antitrasformate, che porta all'ulteriore interessante relazione

$$\mathcal{F}_k[xf(x)] = i\frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)]$$

Queste realzioni possono agevolmente essere generalizzate alle derivate n-sime

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}_k[f(x)] \qquad , \qquad \mathcal{F}_k[x^n f(x)] = i^n \frac{d^n}{dk^n}\mathcal{F}_k[f(x)]$$

e per le primitive

$$\mathcal{F}_k\left[\int f(x)dx\right] = \frac{1}{ik}\mathcal{F}_k[f(k)] + \text{cost.}\delta(k)$$

Traslazioni – Valgono inoltre le relazioni "di traslazione"

$$\mathcal{F}_k[f(x-a] = e^{ika}\mathcal{F}_k[f(x)] \qquad , \qquad \mathcal{F}_k[e^{iqx}f(x)] = \mathcal{F}_{k-q}[f(x)]$$

Definizione. Si dice **convoluzione** di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ l'integrale

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

L'operazione di convoluzione è, nello spazio funzionale, un prodotto commutativo e associativo, come è facile verificare dalla definizione. Vale la seguente proprietà per le trasformate di Fourier di una convoluzione

$$\mathcal{F}_k[(f*g)(x)] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}_k[f(x)]\mathcal{F}_k[g(x)] \qquad , \qquad \mathcal{F}_k[f(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_k[f] * \mathcal{F}_k[g]$$

ovvero la trasformata di Fourier manda convoluzioni in prodotti ordinari e viceversa.

Diamo qui di seguito alcuni esempi di trasformate di Fourier di funzioni utili.

La trasformata della funzione $f(x) = 1$, che non è a quadrato sommabile, dà una funzione che non è una funzione, bensì una distribuzione: la delta di Dirac

$$\mathcal{F}_k[1] = \sqrt{2\pi}\delta(k)$$

La trasformata di una funzione tipo onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| < a \\ 0 & \text{per } |x| > a \end{cases}$$