

Capitolo 1

Le basi storiche della Meccanica quantistica

Alla fine del XIX secolo la Fisica aveva ottenuto successi impensabili, riuscendo a spiegare sia i fenomeni meccanici, tramite le leggi di Newton, che le leggi governanti le forze fondamentali che si pensava guidassero tutta la Natura, cioè la gravità (spiegata dalla famosa legge di gravitazione universale di Newton) e l'elettromagnetismo (spiegato brillantemente dalle equazioni di Maxwell). Sembrava che la coerenza di questo edificio lasciasse poco spazio a nuove scoperte fondamentali e che la Fisica dovesse limitarsi a studiare “applicazioni” di queste leggi a vari fenomeni. Per dirla con Lord Kelvin:

“Per me la Fisica costituisce un sistema perfettamente armonioso ed essenzialmente completo. All’orizzonte scorgo solamente due piccole nubi oscure: il risultato negativo dell’esperienza di Michelson e Morley e l’insufficienza della legge di Reileigh e Jeans se applicata alle frequenze dell’ultravioletto”

Furono proprio quelle due “piccole nubi oscure” le responsabili del ciclone che sconvolse la nostra conoscenza del mondo fisico nella prima metà del secolo XX. L’esperienza di Michelson e Morley diede infatti spunto ad Einstein per creare la teoria della **Relatività** e rivoluzionare il modo di concepire lo spazio, il tempo e la gravità, mentre dallo studio della radiazione di corpo nero, di cui la legge di Reileigh e Jeans si occupava, venne la prima idea, per opera di Max Planck nel 1900, che la luce potesse propagarsi per quanti, ponendo così le basi della rivoluzione **quantistica** della fisica del mondo atomico e subatomico.

In queste prime pagine cercheremo di delineare alcuni degli aspetti, dei fatti sperimentali e delle loro interpretazioni, che portarono poco per volta i ricercatori a con-

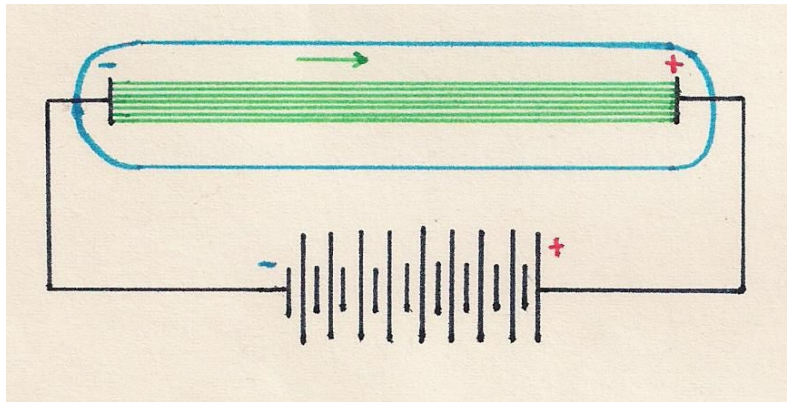


Figura 1.1: *Tubo di Geissler*

vincersi che per spiegare i fenomeni atomici occorre una prospettiva completamente nuova e spesso in contraddizione con l'esperienza quotidiana.

1.1 La scoperta dell'elettrone

Per studiare le scariche nei gas rarefatti Geissler aveva inventato nel 1854 un dispositivo simile a quello di fig.1.1. Quando si fa nel tubo un vuoto molto spinto e si applica una forte tensione agli elettrodi, dalla superficie del catodo esce una radiazione che si propaga in linea retta verso l'anodo. Nel 1876 Goldstein diede a questa radiazione il nome di *raggi catodici*.

Apportando alcune modifiche al tubo di Geissler, Crookes creò il famoso tubo che porta il suo nome e che fu di fondamentale importanza per lo studio di tali raggi. Col suo tubo Crookes dimostrò (vedi fig.1.2):

1. che i raggi catodici si propagano in linea retta
2. che posseggono energia cinetica e quantità di moto
3. che sono deviati da un campo magnetico

Si tratta dunque di un fascio di particelle, cariche elettricamente e Perrin dimostrò che la loro carica era negativa. Thomson, partendo da questi presupposti riuscì a trovare il rapporto tra carica e massa per queste particelle. Costruì un apposito tubo (fig.1.3), che è alla base della tecnologia dei tubi catodici dei televisori. I raggi si propagano in linea retta e producono una macchia fluorescente in *M*. Se però sul

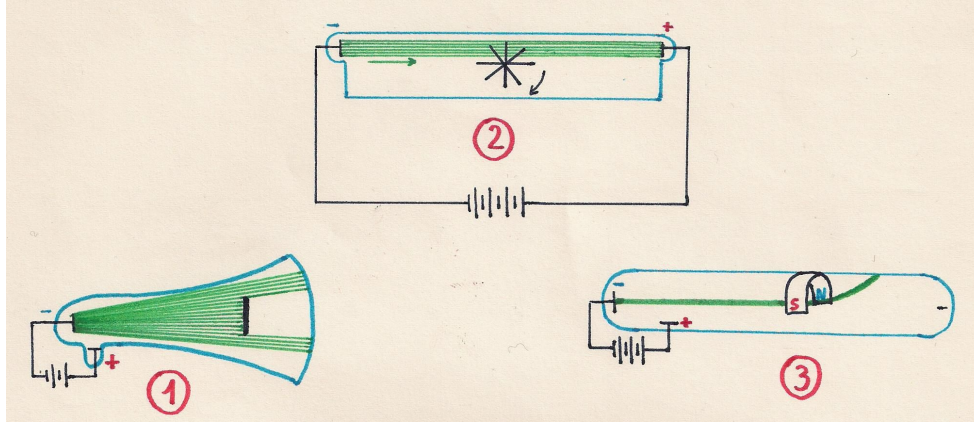


Figura 1.2: *Esperienze di Crookes sui raggi catodici: (1) si propagano in linea retta; (2) posseggono energia cinetica e impulso; (3) sono deviati da un campo magnetico.*

loro tragitto incontrano un campo elettrico, vengono deviati in N . Se le particelle hanno tutte la stessa carica q e la stessa massa m , misurando la deviazione del raggio catodico con questo dispositivo si può misurare che

$$\frac{q}{m} = 1.76 \cdot 10^8 \frac{\text{C}}{\text{g}}$$

Usando una camera di Wilson, Thomson fu in grado di stimare che la carica di queste particelle era compresa nell'intervallo $-2 \cdot 10^{-19} \text{C} < q < -10^{-19} \text{C}$, da cui si ha anche una stima della massa dell'ordine di 10^{-27}g . A queste particelle fu dato il nome di **elettroni**. Oggi, dopo le accurate misure di Millikan nel 1927, sappiamo che la carica di un elettrone è pari a $-e$, dove

$$e = 1.602189(5) \cdot 10^{-19} \text{C}$$

e che la massa dell'elettrone è pari a

$$m_e = 9.10953(5) \cdot 10^{-27} \text{g}$$

Definito l'elettronvolt (eV) come l'energia acquisita da una carica e posta in una differenza di potenziale di 1 Volt,

$$1 \text{ eV} = 1.602189(5) \cdot 10^{-12} \text{erg}$$

l'energia a riposo di un elettrone risulta essere di ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{eV}$)

$$m_e c^2 = 0.511003(1) \text{ MeV}$$

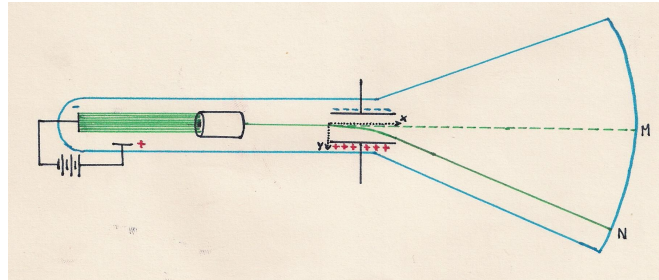


Figura 1.3: *Tubo di Thomson*

1.2 Modelli atomici di Thomson e di Rutherford

L'elettrone ha una massa 1840 volte più piccola di quella di un atomo di idrogeno e 1839 volte quella di uno ione H^+ (detto anche **protone**) che ha massa

$$m_p = 1.67265(1) \cdot 10^{-24} \text{ g} \quad , \quad m_p c^2 = 938.280(3) \text{ MeV}$$

Thomson propose un modello atomico in cui “palle” delle dimensioni di circa $10^{-8} \text{ cm} = 1 \text{ \AA}$ (1 Åmstrong) di carica positiva pari al numero atomico Z e massa pari al peso atomico A (come dati dalla tavola di Mendeleev) accoglievano al loro interno un numero di elettroni “come grani di pepe in un batuffolo di cotone” (come ebbe a dire lo stesso Thomson) che ne diminuivano la carica totale in modo da renderla uguale al numero atomico. Così ad esempio un atomo di ${}^4_2\text{He}$ è una palla di carica $+2e$ con due elettroni incastonati, risultando in una carica nulla, e di peso circa $4m_p$.

Questo modello atomico però non resse a un celebre esperimento condotto da Rutherford a Cambridge nel 1912. Rutherford bombardò un sottile foglio di oro con particelle α (cioè nuclei atomici di elio ionizzato ${}^4_2\text{He}^{++}$ ottenuti da sostanze radioattive) e notò che, anziché attraversare gli atomi e procedere dritte come ci si sarebbe aspettati nel modello di Thomson, una buona parte subiva forti deviazioni in tutte le direzioni. Ne concluse che gli atomi non avevano la struttura piena proposta da Thomson, ma erano costituiti da un nucleo centrale delle dimensioni dell'ordine di $10^{-13} \text{ cm} = 1 \text{ fm}$ (1 fermi) circondate da elettroni che gli ruotavano attorno come in un piccolo sistema planetario, governati dalle leggi dell'elettrostatica coulombiana.

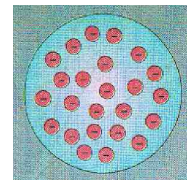


Figura 1.4: *Atomo di Thomson*

Il nucleo poteva essere ancora spiegato in termini di soli protoni ed elettroni: secondo Rutherford esso conteneva A protoni e $A - Z$ elettroni risultando così in un oggetto di massa circa pari ad Am_p e carica Ze . Questa visione entrerà in crisi diversi anni dopo con la scoperta del neutrone. Oggi si ritiene che il nucleo atomico contenga Z protoni di massa m_p e $A - Z$ neutroni di massa $m_n = 1.674951(1) \cdot 10^{-24}g$ ovvero $m_n c^2 = 939.573(3) \text{ MeV}$.

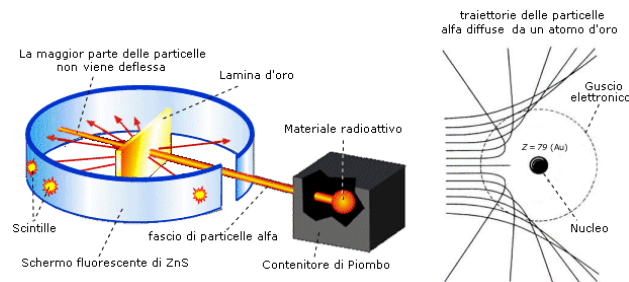


Figura 1.5: *Esperienza di Rutherford*

L'atomo di Rutherford, sebbene rappresentasse un grosso passo avanti nella nostra comprensione della struttura della materia, era affetto da una inconsistenza grave, almeno se interpretata alla luce della fisica classica. Secondo le leggi di Maxwell infatti, una carica accelerata (tale è l'elettrone che ruota attorno al nucleo a causa della accelerazione centripeta) deve emettere radiazione e perciò a

poco a poco perdere la sua energia cinetica finendo con lo spiraleggiare verso il nucleo. Un semplice calcolo indica che tale fenomeno porta l'elettrone a cadere sul nucleo in circa 10^{-8} secondi. Poiché la materia è composta da atomi stabili, il modello atomico di Rutherford risulta in netta contraddizione con l'esperienza e occorre trovare un modo di spiegare come l'elettrone non irraggi mantenendo la sua orbita stabile. Ciò sembra impossibile nell'ambito della meccanica e dell'elettromagnetismo classici.

1.3 La radiazione di corpo nero

Si dice **corpo nero** un corpo la cui superficie assorbe qualsiasi radiazione elettromagnetica che incida su di esso. La radiazione assorbita eccita le pareti, che possono essere pensate come oscillatori carichi che a loro volta emettono radiazioni di qualunque lunghezza d'onda. Dopo un certo tempo si raggiunge un equilibrio termico tra radiazione e pareti della scatola a una temperatura T . Operato un piccolo buco nella cavità, tale da non perturbare sensibilmente il sistema, se ne osserva la radiazione che esce, che si suppone essere un campione rappresentativo di quella che è in equilibrio termico dentro la scatola.

Le osservazioni sperimentali permettono di formulare le seguenti osservazioni:

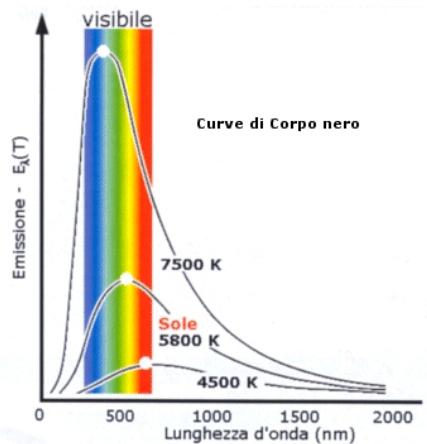


Figura 1.6: *Intensità della radiazione di corpo nero in funzione della lunghezza d'onda*

1. **Legge di Stefan-Boltzmann** - L'energia R irradiata per unità di tempo e unità di superficie è proporzionale alla quarta potenza della temperatura

$$\boxed{R = \sigma T^4} \quad , \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}^4}$$

2. **Distribuzione di intensità in funzione della lunghezza d'onda** - Fissata una temperatura, la distribuzione dell'intensità di radiazione assume un andamento come quello di fig.1.6. Incrementando la temperatura, la forma della distribuzione rimane simile, ma le curve si innalzano e i massimi si spostano verso lunghezze d'onda minori.

3. **Legge dello spostamento di Wien** - I massimi della distribuzione $I(\lambda)$ di energia in funzione della lunghezza d'onda λ seguono una ben precisa legge di proporzionalità inversa con la temperatura

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{\alpha}{T}} \quad , \quad \alpha = 0.29 \text{ cm} \cdot \text{K}$$

I tentativi per giustificare teoricamente le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien e la forma di $I(\lambda)$ furono svariati. Tra essi spicca quello di Rayleigh e Jeans che, basandosi sui principi della fisica newtoniana e dell'elettromagnetismo classico proposero una legge per l'intensità di luce $I(\lambda)$ in funzione della lunghezza d'onda λ

$$I(\lambda) \propto \frac{T}{\lambda^4}$$

in accordo con l'esperimento a grandi λ , ma errata a piccoli λ . Sebbene il risultato sia incorretto, seguiamo il ragionamento di Rayleigh e Jeans, perché il loro approccio è sostanzialmente corretto, mancando però di una ipotesi fondamentale che non è compatibile con le leggi dell'elettromagnetismo.

Allo scopo vogliamo calcolare la densità di energia di radiazione contenuta nella cavità di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$

$$\rho(\nu)d\nu = \bar{\epsilon}N(\nu)d\nu$$

ove $\bar{\epsilon}$ è l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità in risonanza con la frequenza ν e $N(\nu)d\nu$ è il numero di onde stazionarie all'interno della cavità, che assumiamo di forma cubica di lato L .

Le onde si propagano in tutte le direzioni con versore di propagazione di componenti $(\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3)$. Se fossimo in una sola dimensione, un'onda stazionaria dovrebbe avere un numero intero di mezze lunghezze d'onda pari al lato L

$$n \frac{\lambda}{2} = L$$

ma a 3 dimensioni dobbiamo imporre questa condizione in tutte e tre le direzioni del cubo. Allora un'onda stazionaria risonante ha

$$n_i = \frac{2L}{\lambda} \cos \theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

nodi, da cui, quadrando e sommando

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2}L^2$$

che rappresenta l'equazione dei punti a coordinate intere positive o nulle sulla sfera di raggio $R = \frac{2\nu L}{c}$. Il numero di onde stazionarie tra ν e $\nu + d\nu$ sarà pari al numero di punti a coordinate intere nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra R e $R + dR$, con $dR = \frac{2Ld\nu}{c}$. Quando tale numero è molto grande (limite termodinamico) esso approssima il volume dell'ottante suddetto:

$$\frac{1}{8}4\pi R^2 dR = \frac{1}{8}4\pi \left(\frac{2L\nu}{c} \right)^2 \frac{2Ld\nu}{c} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3}L^3 d\nu$$

La densità di modi di vibrazione permessi sarà pari al numero di onde stazionarie diviso il volume della cavità cubica moltiplicato per 2 in quanto esistono due direzioni di polarizzazione indipendenti per le onde elettromagnetiche. Perciò

$$N(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2 d\nu}{c^3}$$

La densità $\rho(\nu)$ si ottiene allora moltiplicando questo numero per il valor medio dell'energia di un oscillatore. Per calcolare $\bar{\varepsilon}$ usiamo la procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann

$$f(\varepsilon) = Ce^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

ove $k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$ è la costante di Boltzmann. Questa funzione in meccanica statistica dà la probabilità che un oscillatore del nostro ensemble abbia energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$. Perciò il valor medio dell'energia degli oscillatori sarà

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon}$$

Introducendo la notazione (spesso usata in meccanica statistica) $\beta = 1/kT$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT$$

Si ottiene così il teorema fondamentale di meccanica statistica detto “di equipartizione dell'energia”. Grazie a questo risultato è possibile scrivere la densità di energia

$$\rho(\nu) d\nu = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

e, ricordando che la frequenza è legata alla lunghezza d'onda da $\lambda = c/\nu$, quindi $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$, definendo la densità di energia in funzione della lunghezza d'onda come $\rho(\lambda) d\lambda = -\rho(\nu) d\nu$ otteniamo la legge di Rayleigh e Jeans

$$\rho(\lambda) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4}$$

Questa legge, dedotta usando principi classici in cui la radiazione è trattata rigorosamente come un'onda che, ad ogni frequenza, può essere emessa con qualunque energia, porta a una evidente contraddizione con i dati sperimentali (vedi figura) e soprattutto al fatto che la formula diverge per piccole lunghezze

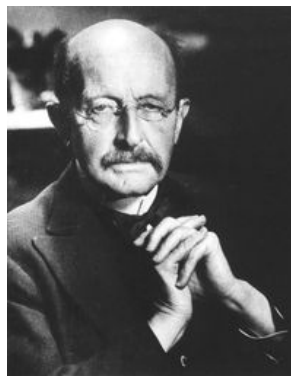


Figura 1.7: *Max Planck (1858 - 1947)*

d'onda, prevedendo quindi una emissione enorme per lunghezze d'onda corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X. Ci si riferì subito a questo problema come alla **catastrofe ultravioletta**, che una corretta teoria del corpo nero doveva evitare.

La soluzione arrivò nel 1900 con l'introduzione da parte di Planck di una nuova ipotesi, apparentemente solo tecnica, ma in realtà dalle implicazioni sconvolgenti. Planck ipotizzò che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo a pacchetti discreti detti **quanti** che, per ogni frequenza, potevano trasportare solo una ben precisa energia $\varepsilon = h\nu$ con h una costante universale. Ovvero la emissione a una data frequenza può solo essere del tipo

$$\varepsilon_n = n\varepsilon = nh\nu$$

La modifica che ciò comporta nei conti di Rayleigh e Jeans riguarda solo il calcolo del valor medio dell'energia degli oscillatori

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\beta \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_n} \\ &= -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = -\frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}\end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio si è usata la risommazione della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

Ciò porta al risultato

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \Rightarrow \quad \rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

e, passando come prima dalla $\rho(\nu)$ alla $\rho(\lambda)$

$$\boxed{\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}}$$

che è la nota **legge di Planck** per l'intensità di spettro di corpo nero. Essa risulta in perfetto accordo coi dati sperimentali se la costante h viene fissata al valore

$$h = 6.62618(4) \cdot 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s}$$

ed ha quindi le dimensioni di una energia per tempo, cioè di una azione. Essa viene detta **costante di Planck**. Spesso si usa una versione “ridotta” della costante di Planck

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054589(6) \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$$

Con questa assunzione non solo si dà ragione dei dati sperimentali dello spettro di corpo nero, ma si possono giustificare le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e di Wien. Calcoliamo infatti la densità totale

$$\rho \equiv \int_0^\infty \rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Posto per semplicità $a = \frac{8\pi h}{c^3}$ e $b = h/kT$

$$\begin{aligned} \rho &= a \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{b\nu} - 1} = a \int_0^\infty \frac{\nu^3 e^{-b\nu}}{1 - e^{-b\nu}} d\nu \\ &= a \int_0^\infty \nu^3 e^{-b\nu} \sum_{n=0}^\infty (e^{-b\nu})^n d\nu = a \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \nu^3 e^{-bn\nu} d\nu \\ &= -a \sum_{n=1}^\infty \frac{d^3}{d(bn)^3} \int_0^\infty e^{-bn\nu} d\nu = -a \sum_{n=1}^\infty \frac{d^3}{d(bn)^3} \frac{1}{bn} \\ &= \frac{6a}{b^4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

La serie che qui compare converge a un valore particolare della funzione ζ di Riemann

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Perciò

$$\rho = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4$$

che da quindi proprio l'andamento della intensità totale di radiazione in termini di T^4 come osservato empiricamente da Stefan-Boltzmann. Inserendo i valori numerici delle costanti h, k, c si ottiene proprio il valore misurato sperimentalmente della costante σ summenzionata.

Se poi poniamo $\alpha = 8\pi hc$ e $\gamma = hc/kT$ possiamo riscrivere la legge di Planck nella forma

$$\rho(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda^5} (e^{\gamma/\lambda} - 1)^{-1}$$

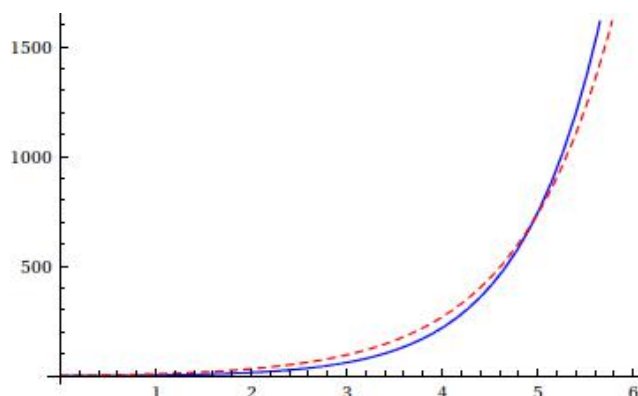


Figura 1.8: Funzioni xe^x (curva continua blu) e $5(e^x - 1)$ (curva tratteggiata rossa)

particolarmente utile per calcolarne la derivata

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda^6} (e^{\gamma/\lambda} - 1)^{-1} \left\{ 5 - \frac{\frac{\gamma}{\lambda} e^{\gamma/\lambda}}{e^{\gamma/\lambda} - 1} \right\}$$

che si annulla (fornendo la posizione dei massimi e minimi della funzione $\rho(\lambda)$) per $\lambda = \infty$ e per $\lambda = \lambda_{max}$ dato dalla soluzione dell'equazione trascendente

$$5(e^x - 1) = xe^x$$

ove si è posto $x = \gamma/\lambda$. Uno sguardo al grafico delle due funzioni da eguagliare (fig.1.8) ci convince subito che la soluzione diversa da 0 è unica e il suo valore numerico può essere calcolato con la precisione voluta. La soluzione $x_0 = 4.96511...$ ci permette di scrivere

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{kx_0} = \text{cost.}$$

fornendo così la legge di Wien

$$\lambda_{max} = \frac{\text{cost.}}{T}$$

Anche qui la sostituzione dei valori numerici delle costanti universali ci dà un valore della costante di Wien in perfetto accordo col valore empirico.

Dunque l'ipotesi di Planck spiega con successo tutti i fenomeni relativi alla radiazione di corpo nero, ma per fare ciò si è dovuta accettare una ipotesi che non ha riscontro nella descrizione classica della radiazione da cariche oscillanti: che l'energia venga emessa tramite un numero intero di pacchetti che a una data frequenza

sono tutti uguali. Fu questo il primo segnale concreto che per spiegare la fisica dei fenomeni atomici occorreva allontanarsi dalle assunzioni convenzionali della fisica macroscopica.

1.4 Effetto fotoelettrico

Quando Newton studiò i fenomeni della luce da un punto di vista della scienza moderna, notando le leggi dell'ottica geometrica si formò l'idea che la luce fosse composta da corpuscoli. Questa ipotesi si scontrò con la visione alternativa che essa fosse composta da onde, proposta inizialmente da Huygens e poi comprovata con una serie di esperimenti, prima sulla diffrazione (Grimaldi, Bologna 1665) e poi, dissipando ogni dubbio, sull'interferenza (Young, 1801). La natura ondulatoria ebbe ulteriore supporto nell'ambito della teoria di Maxwell dei campi elettromagnetici, in cui appunto la luce è spiegata come un'onda elettromagnetica.

L'unico che ebbe il coraggio di dubitarne fu Einstein, nell'*annus mirabilis* 1905 (lo stesso anno in cui pubblicò anche il primo lavoro sulla Relatività e quello sul moto browniano che prova la natura corpuscolare della materia). I suoi dubbi si basavano principalmente sull'interpretazione dell'effetto fotoelettrico. Fino dal 1887 Hertz aveva messo in evidenza il fatto che, illuminando un metallo, questo emette elettroni. Se tale metallo costituisce l'armatura di un condensatore con una differenza di potenziale V , gli elettroni emessi si dirigono verso l'armatura carica positivamente e si riscontra passaggio di corrente nel circuito (fig.1.10). L'energia cinetica dell'elettrone

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}m_e v^2 = eV$$

può quindi essere misurata dalla differenza di potenziale del condensatore.

Empiricamente si nota che:

1. l'effetto fotoelettrico avviene solo se la radiazione ha una frequenza $\nu \geq \nu_0$, in cui la frequenza di soglia ν_0 dipende dal metallo usato;

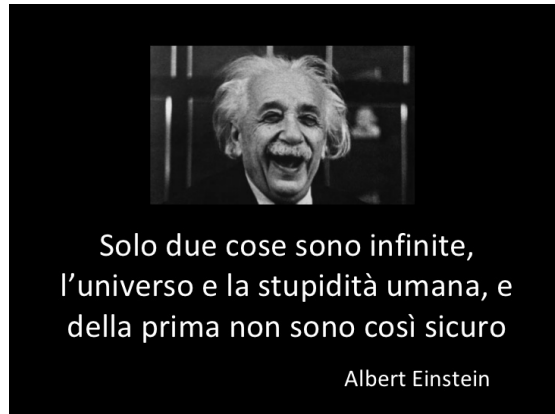


Figura 1.9: *Albert Einstein (1879 - 1955)*

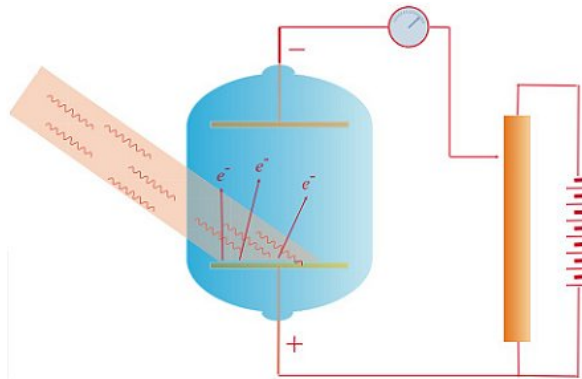


Figura 1.10: *Effetto fotoelettrico*

2. per valori maggiori di ν_0 si ha proporzionalità tra frequenza ed energia cinetica: $\varepsilon_c \propto (\nu - \nu_0)$, cioè l'energia degli elettroni emessi dipende dalla frequenza e non dall'intensità I della radiazione (fig.1.11)
3. il numero N di elettroni emessi è proporzionale all'intensità della radiazione: $N \propto I$ (ovviamente sempre a frequenza $\nu \geq \nu_0$)
4. il tempo intercorrente tra l'inizio dell'illuminazione e l'inizio dell'emissione di elettroni è indipendente dall'intensità della radiazione e sempre inferiore a 10^{-9}s .

La fisica classica è incapace di spiegare contemporaneamente questi 4 dati sperimentali. Infatti, l'ipotesi ondulatoria condurrebbe a queste considerazioni:

1. l'energia che giunge ad un dato atomo fa vibrare l'elettrone finché questo, raggiunta una soglia di intensità di radiazione, si stacca dall'atomo. Perciò l'effetto fotoelettrico si avrà solo se l'intensità I sarà maggiore di una certa soglia I_0 , non la frequenza.
2. l'energia cinetica sarà proporzionale all'intensità: $\varepsilon_c \propto (I - I_0)$
3. il tempo che trascorre tra l'inizio dell'illuminazione e l'inizio dell'emissione è relativamente lungo e dipende dall'intensità di radiazione.

Questi risultati in netto contrasto con l'esperienza indussero Einstein a pensare che, come esistevano dei "granelli" di materia (gli atomi e gli elettroni) dovessero esistere

anche dei “granelli di energia” (del resto nello stesso periodo stava meditando sull’equivalenza massa - energia $E = mc^2$) cui diede il nome di **fotoni**. Ogni fotone trasporta un quanto di energia $\varepsilon = h\nu$ come proposto da Planck e non ha massa a riposo. La Relatività lo obbliga pertanto a viaggiare sempre alla velocità della luce c .

Oltre all’energia il fotone trasporta anche un impulso. La relazione relativistica di mass-shell $\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, nel caso di massa a riposo $m = 0$ si riduce a

$$\varepsilon = pc$$

che assieme alla relazione di Planck fornisce, per l’energia e il modulo dell’impulso di un fotone:

$$\varepsilon = h\nu \quad , \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

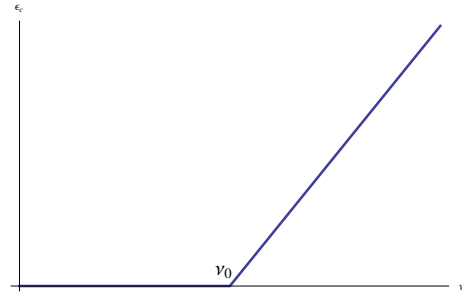


Figura 1.11: *Relazione tra frequenza e corrente nell’effetto fotoelettrico*

Ogni “colore” ha perciò il suo tipo di fotoni, tutti uguali tra loro, ma con contenuto energetico diverso da quelli di un’altra frequenza. Con questa nuova ipotesi, le osservazioni sperimentali sull’effetto fotoelettrico vengono spiegate egregiamente:

1. per staccare un elettrone da un atomo occorre una energia ε_0 . Perciò se un fotone si scontra con un elettrone di un atomo, si possono verificare due casi
 - (a) $h\nu < \varepsilon_0$: l’energia fornita è insufficiente e l’elettrone rimane nell’atomo
 - (b) $h\nu \geq \varepsilon_0 \equiv h\nu_0$: l’energia ceduta all’elettrone viene utilizzata in parte per staccarlo dall’atomo e in parte viene ceduta all’elettrone medesimo sotto forma di energia cinetica $\varepsilon_c = h(\nu - \nu_0)$
2. un maggior numero di fotoni, cioè maggiore intensità di radiazione, aumenta la probabilità di scontro e quindi il numero di elettroni emessi. Perciò $N \propto I$.
3. l’effetto di emissione è praticamente istantaneo: nel momento in cui si comincia a bombardare il metallo con fotoni, essi si scontrano con elettroni e iniziano a estrarli.

Dunque l’ipotesi di Einstein da spiegazione di tutti quei fenomeni relativi all’effetto fotoelettrico che la fisica classica non riusciva a spiegare. Ciò a patto di rivoluzionare la visione classica e ammettere una natura corpuscolare della luce. Tuttavia nessuno

poteva mettere in dubbio il valore dell'esperienza di Young che all'inizio dell'800 aveva dato ragione all'ipotesi ondulatoria. Occorreva un passo avanti culturale tremendo per superare questo paradosso.

1.5 Effetto Compton

Un'altra evidenza della natura corpuscolare della luce venne dall'osservazione che nello spettro dei raggi X diffusi da una targhetta solida, oltre alla riga di lunghezza d'onda pari a quella incidente, si notava una seconda riga con $\lambda' > \lambda$. La differenza $\lambda' - \lambda$ dipende linearmente dal coseno dell'angolo θ di diffusione secondo la legge empirica

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta)$$

dove la costante λ_c vale sperimentalmente $\lambda_c = 2.4 \cdot 10^{-10} \text{cm}$. Si tratta di un fenomeno maggiormente visibile a grandi angoli θ .

Anche questo fenomeno non ha una spiegazione classica in termini di onde elettromagnetiche e viene invece spiegato molto semplicemente con un modello di urto elastico di un fotone γ e un elettrone e^- , cioè assumendo una natura corpuscolare per la radiazione elettromagnetica, come brillantemente trattato da Compton nel 1927.

Si consideri la conservazione dell'energia e di ciascuna componente dell'impulso nel piano del moto (vedi fig.1.12).

$$\begin{aligned} E_\gamma + E_e &= E'_\gamma + E'_e \\ \mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_e &= \mathbf{p}'_\gamma + \mathbf{p}'_e \end{aligned}$$

dove le quantità non primite si riferiscono a prima dell'urto e quelle primite a dopo l'urto. Ovviamente, $E_\gamma = h\nu$ con ν frequenza della radiazione incidente e $E_e = m_e c^2$ in quanto l'elettrone è inizialmente fermo. In una trattazione relativistica, la conservazione dell'energia si scrive

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + M c^2$$

dove

$$M = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

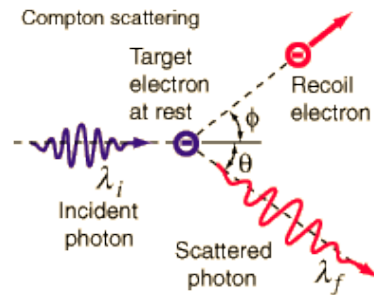


Figura 1.12: *Effetto Compton*

Elevando al quadrato

$$M^2 c^4 = h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2m_e c^2 h(\nu - \nu') + m_e^2 c^4 \quad (1.1)$$

La conservazione dell'impulso nella direzione del raggio incidente dà

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + Mv \cos \phi$$

e quella nella direzione ad esso perpendicolare

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - Mv \sin \phi$$

Anche in questo caso, elevando al quadrato, si perviene alla relazione

$$M^2 v^2 c^2 = h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta) \quad (1.2)$$

Sottraendo ambo i membri delle equazioni (1.1) e (1.2) si ottiene

$$1 - \cos \theta = \frac{m_e c^2}{h} \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'}$$

che riscritta in termini di lunghezze d'onda anziché frequenze, diventa

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

in pieno accordo coi dati sperimentali anche per quanto riguarda la predizione della costante λ_c

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 2.43 \cdot 10^{-2} \text{Å}$$

che viene detta *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone.

1.6 Atomo di Bohr

Abbiamo visto come l'atomo di Rutherford presentasse un grave problema di instabilità. Occorreva un modello di atomo che potesse risolvere questo problema.

Inoltre, le osservazioni relative all'emissione di luce dagli atomi, cioè gli studi di spettroscopia, avevano messo in evidenza un'altro aspetto inspiegabile classicamente, ovvero il presentarsi non di una radiazione continua, bensì di radiazioni a ben precise frequenze caratterizzanti di ogni materiale, che anzi vennero presto usate per comprendere la composizione chimica dei corpi radianti, per esempio delle stelle. In particolare, esaminando l'emissione da un gas di idrogeno opportunamente scaldato, nel 1885 Balmer scoprì che alcune righe spettrali osservate avevano frequenze date dalla serie

$$\nu_n = cR \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad , \quad n = 3, 4, 5 \dots$$

ove la costante R , detta costante di Rydberg, vale empiricamente $R = 109677.576 \text{ cm}^{-1}$. Poco dopo, Lyman si accorse che un'altra sequenza di righe spettrali dell'idrogeno poteva essere riassunta nella formula

$$\nu_n = cR \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad , \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Procedendo allo stesso modo furono scoperte altre serie di righe:

$$\nu_n = cR \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2} \right) \quad , \quad n = 4, 5, 6 \dots \quad , \quad \text{serie di Paschen}$$

$$\nu_n = cR \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{n^2} \right) \quad , \quad n = 5, 6, 7 \dots \quad , \quad \text{serie di Brackett}$$

$$\nu_n = cR \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{n^2} \right) \quad , \quad n = 6, 7, 8 \dots \quad , \quad \text{serie di Pfund}$$

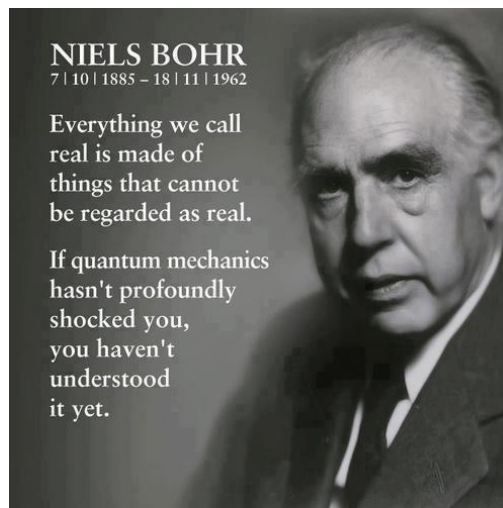


Figura 1.13: *Niels Bohr (1885 - 1962)*

Rydberg e Ritz riassunsero tutti questi risultati in un'unica formula empirica

$$\nu_{m,n} = cR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad n = m + 1, m + 2, \dots$$

Mancava però una interpretazione fisica di tutto ciò e la meccanica classica ancora una volta era incapace di formulare predizioni valide. Una proposta di soluzione venne dalla geniale intuizione del fisico danese Niels Bohr nel 1913. Bohr era stato studente di Rutherford a Cambridge dove apprese le sue idee sull'atomo "planetario", ma, per giustificare la stabilità atomica che sarebbe stata compromessa dalla meccanica classica, adottò una serie di ipotesi *ad hoc* e cioè:

1. un atomo ha un insieme discreto di stati stazionari con energia E_1, E_2, E_3, \dots
2. l'emissione e l'assorbimento di radiazione per un atomo non avviene in forma continua, secondo l'elettrodinamica classica, ma solo quando l'elettrone passa da un'orbita stazionaria ad un'altra.
3. Nel passaggio da un'orbita stazionaria E_m ad un'altra E_n si emette o assorbe un fotone di energia $h\nu = |E_m - E_n|$
4. un elettrone in uno stato stazionario descrive un'orbita circolare governata dalle leggi della meccanica classica, che però non sono valide nelle transizioni da uno stato stazionario ad un altro.
5. Le orbite stazionarie vengono determinate dalla condizione che il modulo del momento angolare orbitale $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ dell'elettrone sia quantizzato, cioè sia un multiplo intero di \hbar

$$|\mathbf{l}| = n\hbar$$

Ogni orbita sarà quindi caratterizzata da un preciso valore del momento angolare e può quindi essere etichettata dal numero $n = 1, 2, 3, \dots$. L'energia di un elettrone nell' n -esima orbita è data dalla somma di energia cinetica e potenziale coulombiano tra le due cariche $+e$ del protone e $-e$ dell'elettrone.

$$E_n = T_n + V_n = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{e^2}{r_n}$$

Per orbite circolari l'accelerazione è puramente centripeta e l'equazione del moto fornisce

$$\frac{e^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n} \quad \implies \quad m_e v_n^2 = \frac{e^2}{r_n} \quad (1.3)$$

e perciò l'energia può riscriversi in una qualunque delle due forme

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} m_e v_n^2$$

La quantizzazione del momento angolare può rileggersi come

$$v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}$$

che, inserita nella (1.3) da

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2$$

I raggi delle orbite risultano dunque quantizzati in modo proporzionale a n^2 . Conseguentemente le velocità decrescono come $1/n$

$$v_n = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n}$$

Si noti come $v_1 \approx 2.2 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$, più di $1/100$ della velocità della luce. L'approssimazione non-relativistica con cui stiamo trattando la dinamica è perciò valida. Inoltre, la dimensione “tipica” di un atomo di idrogeno può essere stimata a grandi linee dal raggio dell'orbita fondamentale $r_1 \approx 0.53 \text{ \AA}$.

Inserendo questi risultati nella formula per l'energia si ottengono i livelli energetici delle varie orbite

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Grazie a questa formula è possibile dare una spiegazione alle serie di Rydberg e Ritz. Le frequenze osservate nello spettro di emissione dell'idrogeno sono tutte e sole quelle corrispondenti ai salti da un'orbita n -esima all'orbita m -esima. La differenza di energia viene emessa con un fotone di frequenza

$$\nu_{m,n} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{\pi m_e e^4}{\hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

prevedendo quindi non solo la corretta formula, ma anche il giusto valore della costante di Rydberg.

Le energie degli stati legati, in cui l'elettrone è in orbita attorno al nucleo, sono tutte negative. Ciò significa che abbiamo posto il livello zero di energia pari all'energia di fuga dell'elettrone dall'atomo. Energie positive rappresenteranno invece elettroni che passano in prossimità di un protone, ma non ne vengono catturati

ma solo deviati lungo orbite iperboliche che non risultano quantizzate. L'energia per ionizzare un atomo di idrogeno, cioè strappare l'elettrone all'attrazione del protone, è pari alla differenza tra l'energia di fuga e quella dell'orbita fondamentale $E_1 = -13.59\text{eV}$, cioè

$$E_{ion} = E_{\infty} - E_1 = 13.59\text{ eV}$$

in perfetto accordo coi dati sperimentali.

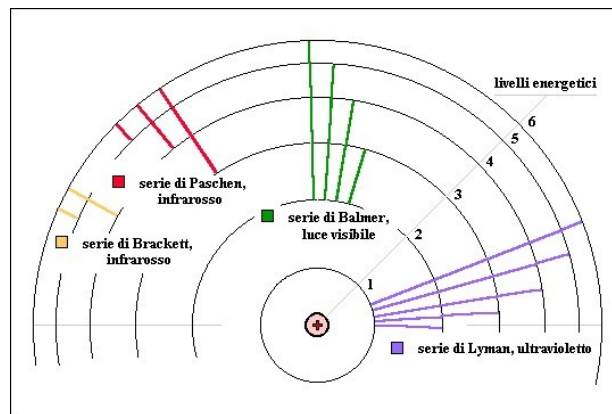


Figura 1.14: *Modello atomico di Bohr*