Capitolo 5

Equazioni differenziali lineari ordinarie

Sia data una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti variabili

$$A(z)u''(z) + B(z)u'(z) + C(z)u(z) = D(z) \qquad , \quad z \in \mathbb{C}$$

Distinguiamo subito due casi:

- le **equazioni omogenee** in cui $D(z) = 0$
- le **equazioni disomogenee** per le quali $D(z) \neq 0$.

Non ci occuperemo qui delle equazioni disomogenee, le quali comunque possono essere risolte (per esempio con il metodo della *varazione delle costanti*) una volta note le soluzioni di quelle omogenee, per cui ci occuperemo qui di queste ultime, che sono tra l'altro quelle che compaiono nei problemi di meccanica quantistica, la cui forma generale è

$$A(z)u''(z) + B(z)u'(z) + C(z)u(z) = 0 \qquad , \quad z \in \mathbb{C}$$

5.1 Forma standard

In generale, dividendo per il coefficiente della derivata seconda, essa può sempre essere posta nella **forma standard**

$$\boxed{u'' + p(z)u' + q(z)u = 0} \tag{5.1}$$

in cui

$$p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad , \qquad q(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

I punti in cui $p(z)$ e $q(z)$ sono funzioni regolari, cioè non presentano singolarità, si dicono **punti regolari**. Viceversa i punti in cui questi due coefficienti presentano delle singolarità si dicono **punti singolari**.

Esempio. L'equazione

$$(1 - z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + z^2u(z) = 0 \tag{5.2}$$

in forma standard si scrive come

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{2z}{1 - z^2}\frac{du}{dz} + \frac{z^2}{1 - z^2}u(z) = 0$$

Perciò i coefficienti variabili $p(z)$ e $q(z)$ sono

$$p(z) = -\frac{2z}{1 - z^2} \qquad , \qquad q(z) = \frac{z^2}{1 - z^2}$$

Entrambi mostrano un polo del primo ordine in $z = 1$

$$\begin{aligned} p(z) \ &\underset{z\to 1}{=} \ \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-1) + \frac{1}{8}(z-1)^2 + O((z-1)^3) \\ q(z) \ &\underset{z\to 1}{=} \ -\frac{1/2}{z-1} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 + O((z-1)^3) \end{aligned}$$

e un altro in $z = -1$

$$\begin{aligned} p(z) \ &\underset{z\to -1}{=} \ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z+1) - \frac{1}{8}(z+1)^2 + O((z-1)^3) \\ q(z) \ &\underset{z\to -1}{=} \ \frac{1/2}{z+1} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}(z+1) + \frac{1}{16}(z+1)^2 + O((z-1)^3) \end{aligned}$$

Come vedremo, è importante anche conoscere l'andamento di queste funzioni all'infinito

$$p(z) \underset{z\to\infty}{=} 2z^{-1} + 2z^{-3} + O(z^{-2}) \qquad , \qquad q(z) \underset{z\to\infty}{=} -1 - z^{-2} + O(z^{-1})$$

5.2 Forma ridotta

E' sempre possibile dare una forma equivalente dell'equazione, detta **forma ridotta** in cui il termine con la derivata prima è assente. A questo scopo si scelga

$$k(z) = e^{-\frac{1}{2}\int p(z)dz}$$

con l'integrale inteso in senso indefinito e quindi definita a meno di una costante moltiplicativa, che è inessenziale in quanto può essere riassorbita nella costante di normalizzazione della soluzione. Con essa si definisca una nuova funzione incognita

$$\chi(z) = \frac{u(z)}{k(z)}$$

Poiché

$$\frac{k'(z)}{k(z)} = -\frac{1}{2}p(z) \qquad \text{e} \qquad \frac{k''(z)}{k(z)} = -\frac{1}{2}p'(z) + \frac{1}{4}p(z)^2$$

la (5.1) assume la forma

$$\chi''(z) + J(z)\chi(z) = 0$$

con

$$J(z) = q(z) - \frac{1}{2}p'(z) - \frac{1}{4}p(z)^2$$

Esempio. Nel caso dell'equazione (5.2) avremo

$$\int p(z)dz = \int \frac{-2z}{1-z^2}dz = \log(z^2-1) \qquad \Longrightarrow \qquad k(z) = (z^2-1)^{-1/2}$$

Perciò, ponendo

$$u(z) = (z^2-1)\chi(z)$$

ed essendo

$$J(z) = \frac{1+z^2+z^4}{(z^2-1)^2}$$

la $\chi(z)$ soddisferà l'equazione

$$\chi''(z) + \frac{1+z^2+z^4}{(z^2-1)^2}\chi(z) = 0$$

5.3 Soluzioni linearmente indipendenti

L'equazione (5.1) è del secondo ordine, perciò ammette due soluzioni linearmente indipendenti. Dette queste $u_1(z)$ e $u_2(z)$ la soluzione generale sarà

$$u(z) = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z)$$

con c_1, c_2 coefficienti arbitrari. Il problema si riconduce quindi a quello di trovare due soluzioni linearmente indipendenti della (5.1). Allo scopo introduciamo la nozione di **determinante wronskiano** delle due soluzioni

$$\boxed{W = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix}}$$

per il quale vale il seguente fondamentale teorema

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due soluzioni u_1 e u_2 siano linearmente indipendenti è che il loro determinante wronskiano sia diverso da zero.*

Dimostrazione. Infatti se u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti la relazione

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$$

implica necessariamente $\alpha = \beta = 0$. Lo stesso dicasi per la derivata di tale relazione

$$\alpha u_1' + \beta u_2' = 0$$

Il sistema lineare composto da queste due equazioni ammette come unica soluzione la $\alpha = \beta = 0$ se e solo se il determinante w non si annulla. □

La dipendenza di W da z è indipendente dalla conoscenza esplicita delle soluzioni u_1 e u_2. Poiché

$$W = u_1 u_2' - u_1' u_2$$

derivando rispetto a z si ha

$$W' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2$$

Ma la (5.1) implica $u_i'' = -p u_i' - q u_i$ $(i = 1, 2)$ e quindi

$$W' = -p(u_1 u_2' - u_1' u_2) = -pW$$

ovvero

$$\frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{d}{dz} \log W(z) = -p(z)$$

che integrata fornisce la cosiddetta **formula di Liouville** del wronskiano

$$\boxed{W(z) = W(z_0)e^{-\int_{z_0}^{z} p(\zeta)d\zeta}}$$

In particolare, se $W \neq 0$ in un punto z_0, esso è diverso da zero ovunque. Se le due soluzioni u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti in z_0, esse lo sono ovunque.

5.4 Soluzioni attorno a punti regolari

Diciamo che z_0 è un **punto regolare** dell'equazione (5.1) se sia $p(z)$ che $q(z)$ sono olomorfe in z_0. Ciò significa che p e q ammettono una espansione in serie di Taylor attorno a z_0

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z-z_0)^n \\ q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

Le soluzioni attorno a un punto regolare z_0 sono esse stesse regolari. Quindi, possono essere date come sviluppi in serie di potenze attorno a z_0

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

I coefficienti c_n posssono essere calcolati inserendo questo *ansatz* di soluzione nell'equazione stessa, ottenendo una formula ricorsiva. Infatti, calcoliamo u' e u''

$$\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(z-z_0)^n \\ u''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)(z-z_0)^n \end{aligned}$$

Immettendo tutto ciò nell'equazione, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)(z-z_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z-z_0)^k \sum_{l=0}^{\infty} c_{l+1}(l+1)(z-z_0)^l \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} q_k(z-z_0)^k \sum_{l=0}^{\infty} c_l(z-z_0)^l \end{aligned}$$

Ora cerchiamo di riorganizzare le somme in modo che in ogni termine compaia sempre la stessa potenza di $(z-z_0)$. Un cambio di variabile negli indici delle somme $n = k+l$ porta a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\dots$$

in cui $k \to n-l$. Ciò permette di riorganizzare la somma in

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{l=0}^{n}\left[p_{n-l}c_{l+1}(l+1) + q_{n-l}c_l\right]\right\}(z-z_0)^n = 0$$

e questo ci da una formula di ricorrenza per le c_n

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{l=0}^{n}\left[p_{n-l}c_{l+1}(l+1) + q_{n-l}c_l\right] = 0$$

che risultano tutte determinate una volta fissate le prime due c_0 e c_1, che rimangono quindi le due costanti arbitrarie da cui giustamente deve dipendere la soluzione generale di una equazione di secondo ordine.

Se ne conclude che un punto regolare dell'equazione ammette nel suo intorno soluzioni certamente olomorfe. Le sole possibili singolarità delle soluzioni potranno manifestarsi solo nei punti singolari dell'equazione, cioè dove $p(z)$ e $q(z)$ presentano singolarità.

5.5 Soluzioni attorno a punti singolari

Se in z_0 le funzioni $p(z)$ e/o $q(z)$ non sono olomorfe e quindi presentano delle singolarità, esso viene detto **punto singolare** dell'equazione differenziale. In una regione anulare attorno a un tale punto singolare, $p(z)$ e $q(z)$ ammetteranno una espansione in serie di Laurent

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(z-z_0)^n \\ q(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

Supponiamo che $v_1(z)$ e $v_2(z)$ siano una base di due soluzioni lineramente indipendenti in un intorno di z_0. Facciamo fare un giro completo a z attorno a z_0

$$z - z_0 \to (z - z_0)e^{2\pi i}$$

ovvero studiamo le funzioni v_1, v_2 nel punto

$$\tilde{z} = z_0 + (z - z_0)e^{2\pi i}$$

Se le funzioni fossero olomorfe in z_0 ovviamente sarebbe $v_i(z) = v_i(\tilde{z})$. Ora però, essendo z_0 un punto singolare e quindi non potendo applicare il teorema di Cauchy, le funzioni $\tilde{v}_i(z) \equiv v_i(\tilde{z})$ sebbene ancora soluzioni dell'equazione differenziale, in generale differiranno dalle originali $v_i(z)$. Esse costituiranno una nuova base di funzioni linearmente indipendenti, poiché il loro wronskiano sarà comunque diverso da zero.

Le nuove soluzioni così trovate dovranno essere scrivibili come combinazioni lineari delle vecchie. In altre parole aver girato attorno alla singolarità z_0 equivale ad aver operato un cambiamento di base nello spazio delle soluzioni. Dunque potremo scrivere

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(z) \\ \tilde{v}_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \end{pmatrix}$$

Ci si può chiedere se tra tutte le basi v_1, v_2 e $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ possibili ve ne siano alcune dalle proprietà più semplici, ovvero che siano semplicemente moltiplicate per una costante quando operiamo una trasformazione del tipo descritto sopra. La risposta è che tali soluzioni sono facilmente selezionate considerando gli autovettori della matrice di elementi a_{ij} ora introdotta. Essa viene detta **matrice di monodromia** delle soluzioni attorno al punto singolare z_0. L'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

fornisce gli autovalori λ_1, λ_2 della matrice di monodromia. Essi possono essere diversi tra loro $\lambda_1 \neq \lambda_2$, oppure coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$.

5.5.1 Autovalori non coincidenti

Supponiamo dapprima che gli autovalori λ_1, λ_2 siano diversi tra loro. In corrispondenza di ognuno dei due troveremo le soluzioni linearmente indipendenti (autovettori) u_1, u_2 tali che

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(z) = u_1(\tilde{z}) &= \lambda_1 u_1(z) \\ \tilde{u}_2(z) = u_2(\tilde{z}) &= \lambda_2 u_2(z) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Osserviamo ora che una funzione che venga moltiplicata per un fattore costante quando si compia un giro attorno a z_0 è la funzione $(z - z_0)^\rho$ con $\rho \in \mathbb{R}$. Infatti

$$(z - z_0)^\rho \to (z - z_0)^\rho e^{2\pi i \rho}$$

e quindi scegliendo

$$\rho_i = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_i$$

le due funzioni $(z - z_0)^{\rho_i}$ con $i = 1, 2$ hanno le stesse proprietà di polidromia (singolarità *branch*) delle $u_i(z)$. Perciò le due funzioni

$$\frac{u_i(z)}{(z - z_0)^{\rho_i}}$$

sono monodrome nel punto z_0. Esse sono analitiche nell'anello attorno a z_0 in cui lo sono $p(z)$ e $q(z)$ e come esse ammettono quindi uno sviluppo in serie di Laurent. In conclusione possiamo scrivere, per le soluzioni attorno a un punto singolare isolato z_0, che esse sono combinazioni lineari delle soluzioni linearmente indipendenti rappresentate da

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ u_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{cases}$$

Si noti infine che la definizione di ρ_i in termini di λ_i è ambigua poiché il logaritmo di un numero complesso è definito $\mod 2\pi i$ e quindi le ρ_i risultano definite a meno di interi. Ciò non comporta però alcun problema, perché un cambiamento di ρ_i di un intero nelle formule per le u_1, u_2 può essere riassorbito da uno shift dello stesso intero nel conteggio dei termini della serie di Laurent.

5.5.2 Autovalori coincidenti

Consideriamo ora il caso in cui gli autovalori λ_1, λ_2 siano coincidenti (e quindi $\rho_2 - \rho_1 \in \mathbb{Z}$). In questo caso esisterà una sola soluzione $u_1(z)$ che soddisfi le proprietà di monodromia (5.3). Ad essa dovremo affiancare un'altra generica soluzione linearmente indipendente $u_2(z)$, per la quale però

$$\tilde{u}_2(z) = a_{21} u_1(z) + a_{22} u_2(z)$$

L'equazione secolare diventa ora

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

ma, avendo essa per ipotesi due soluzioni identiche $\lambda_2 = \lambda_1$ non potrà che essere $a_{22} = \lambda_1$ e quindi

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(z) &= \lambda_1 u_1(z) \\ \tilde{u}_2(z) &= a_{21} u_1(z) + \lambda_1 u_2(z) \end{aligned}$$

Dividendo membro a membro queste due realzioni

$$\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} = \frac{u_2}{u_1} + \frac{a_{21}}{\lambda_1}$$

osserviamo che la funzione u_2/u_1 gode anch'essa di particolari proprietà di polidromia attorno a z_0, ovvero a seguito di un giro attorno a z_0 acquista una costante. Questa è una proprietà tipica della funzione logaritmo

$$a \log(z - z_0) \to a \log(z - z_0) + 2\pi i a$$

Ponendo

$$a = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{21}}{\lambda_1}$$

la funzione

$$\frac{u_2}{u_1} - a \log(z - z_0)$$

è monodroma nel punto z_0 ed analitica nell'anello di analiticità di $p(z)$ e $q(z)$ attorno a z_0 e quindi ivi sviluppabile in serie di Laurent. In conclusione la soluzione generale dell'equazione differenziale attorno a z_0 potrà essere espressa come combinazione lineare delle soluzioni linearmente indipendenti della forma

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ u_2(z) = a u_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_1} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{cases}$$

5.5.3 Punti fuchsiani

Tutto ciò che abbiamo detto finora è del tutto formale perché le serie di Laurent sono infinite in entrambe le direzioni e perciò non esiste un metodo iterativo, simile a quello illustrato nel caso di punti regolari, per determinare i coefficienti. Inoltre non abbiamo un metodo esplicito per determinare gli esponenti ρ_i.

Se però le singolarità delle funzioni $p(z)$ e $q(z)$ sono poli di un certo ordine finito, la parte negativa delle loro espansioni di Laurent si tronca a un numero finito di termini. Ci si può chiedere quale sia il massimo ordine del polo di $p(z)$ e di quello di $q(z)$ in z_0 tale che le soluzioni linearmente indipendenti siano scrivibili come

$$u_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Grazie all'ambiguità nella definizione di ρ_i a meno di interi, ridefinendo $\rho_i \to \rho_i - n$ la serie che rimane sarà tutta a potenze positive e perciò di Taylor. dunque non si perde di generalità nel cercare soluzioni

$$u_i(z) = (z - z_0)^{\rho_i} R_i(z) \qquad , \quad i = 1, 2 \tag{5.4}$$

che siano il prodotto di un punto di diramazione $(z-z_0)^{\rho_i}$ e di una funzione olomorfa in z_0

$$R_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

e quindi

$$u_i'(z) = \rho_i (z - z_0)^{\rho_i - 1} R_i(z) + (z - z_0)^{\rho_i} R_i'(z) = (z - z_0)^{\rho_i - 1} S_i(z)$$

con $S_i = \rho_i R_i + (z - z_0) R_i'$ ancora olomorfa.

Prima di procedere dimostriamo un importante lemma.

Lemma. *Una qualunque funzione $F(z)$ che sia scrivibile nella forma*

$$F(z) = (z - z_0)^{\alpha} G(z)$$

con α costante e $G(z)$ olomorfa in z_0 è tale che la sua derivata logaritmica F'/F ha al più un polo di ordine 1 in z_0. Inoltre il rapporto F''/F ha al più un polo di ordine 2 in z_0.

Dimostrazione. Supponiamo che $G(z)$ abbia uno zero di ordine $n \geq 0$ in z_0. Allora potrà essere scritta come $G(z) = (z - z_0)^n H(z)$ con $H(z)$ funzione olomorfa e non nulla in z_0. Risulta allora

$$F(z) = (z - z_0)^{\alpha+n} H(z)$$

e sarà perciò

$$\log F(z) = (\alpha + n) \log(z - z_0) + \log H(z)$$

e la derivata logaritmica

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{d}{dz} \log F(z) = \frac{\alpha + n}{z - z_0} + \frac{H'(z)}{H(z)}$$

ha al più un polo di ordine 1, poiché H'/H è sicuramente olomorfa in z_0. Analogamente, denotando quest'ultima funzione olomorfa con $K(z) = \alpha + n + \frac{H'(z)}{H(z)}$, sicché

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{K(z)}{z - z_0}$$

avremo

$$\begin{aligned} \frac{F''}{F} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{F'}{F}\right) - \left(\frac{F'}{F}\right)^2 = \frac{d}{dz}\frac{K(z)}{z - z_0} - \frac{K^2(z)}{(z - z_0)^2} \\ &= \frac{-K(z) + (z - z_0)K'(z) - K^2(z)}{(z - z_0)^2} \end{aligned}$$

Poiché il numeratore di questo rapporto è tutto olomorfo, se ne deduce che F''/F può avere al più un polo di ordine 2. $\square$

Consideriamo il wronskiano delle due soluzioni linearmente indipendenti u_1, u_2

$$W = W_0 e^{-\int_{z_0}^{z} p(z')dz'} \neq 0$$

e

$$W(z) = u_1 u_2' - u_1' u_2 = (z - z_0)^\alpha T(z)$$

con $T = R_1 S_2 - R_2 S_1$ olomorfa e $\alpha = \rho_1 + \rho_2 - 1$. Ora

$$p(z) = -\frac{d}{dz} \log W(z) = -\frac{W'}{W}$$

ha al più un polo di ordine 1 in z_0 per il lemma ora enunciato. Quindi possiamo affermare che

$$p(z) = \frac{P(z)}{z - z_0}$$

con $P(z)$ olomorfa e quindi $p(z)$ può avere al più un polo del primo ordine.

Per quanto riguarda la funzione $q(z)$, possiamo ricavarla dall'equazione stessa. Per qualunque $u(z)$ soluzione dell'equazione differenziale si ha infatti

$$q(z) = -\frac{u''}{u} + p\frac{u'}{u}$$

e di nuovo per il lemma precedente u''/u ha al più un polo di ordine 2 e u'/u un polo di ordine 1, che va moltiplicato per p che pure ha un polo di ordine 1. Perciò il prodotto pu'/u avrà un polo di ordine 2 e ne risulta che $q(z)$ ha al più un polo di ordine 2.

In generale, dunque, per avere soluzioni della forma (5.4) in z_0, si dovrà verificare che i coefficienti variabili $p(z)$ e $q(z)$ dell'equazione differenziale in forma standard devono presentare in z_0 solo poli, al più rispettivamente di ordine 1 o 2. Quando questa condizione è verificata, la singolarità dell'equazione in z_0 si dice **fuchsiana** ed esiste ancora un metodo generale per risolvere l'equazione, detto **metodo di Frobenius**, di cui daremo qui gli elementi essenziali, senza entrare nei dettagli. Dunque sia

$$\boxed{p(z) = \frac{P(z)}{z-z_0} \qquad \text{con} \qquad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z-z_0)^n}$$

$$\boxed{q(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_0)^2} \qquad \text{con} \qquad Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-z_0)^n}$$

ovvero $P(z)$ e $Q(z)$ sono olomorfe nell'intorno di z_0. Cerchiamo soluzioni della forma

$$u(z) = (z-z_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

cioè tali che $u(z)/(z-z_0)^\rho$ sia olomorfa. Il metodo procede in maniera del tutto simile a quanto fatto nel caso dei punti regolari, assumendo ora la forma

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+\rho}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
u'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z-z_0)^{n-1+\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(z-z_0)^{n+\rho} \\
u''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2+\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)(z-z_0)^{n+\rho}
\end{aligned}$$

Sostituendo queste formule per $u(z)$ e le sue derivate, nonché delle $p(z)$ e $q(z)$, nell'equazione differenziale, si perviene, con lo stesso tipo di manipolazioni usate nel caso dei punti regolari, a un insieme di relazioni a cascata per i coefficienti, che in questo caso sono date da

$$(k+\rho)(k+\rho+1)c_k + \sum_{l=0}^{k}[(k-l+\rho)p_l + q_l]c_{k-l} = 0$$

In particolare, per $k=0$ si ha la relazione

$$[\rho(\rho-1) + \rho p_0 + q_0]c_0 = 0$$

che è soddifatta o per $c_0 = 0$ (che corrisponde alla scelta della soluzione banale $u=0$) oppure per

$$\boxed{\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0}$$

che è una equazione algebrica di secondo grado in ρ, detta **equazione indiciale**, le cui soluzioni sono le ρ_1, ρ_2 già descritte nel caso di singolarità isolate generiche

$$\rho_{1,2} = \frac{(1-p_0) \pm \sqrt{(1-p_0)^2 - 4q_0}}{2}$$

Esse forniscono gli esponenti della diramazione che va preposta alla serie regolare. In altre parole le soluzioni linearmente indipendenti $u_1(z)$ e $u_2(z)$ devono prendere la forma

$$\begin{aligned} u_1(z) &= (z-z_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \\ u_2(z) &= \begin{cases} \text{se } \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}: & (z-z_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n \\ \text{se } \rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}: & a u_1(z)\log(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^n \end{cases} \end{aligned}$$

e la soluzione generale è comunque

$$u(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z)$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie.

5.5.4 Punto all'infinito

Il punto all'infinito può essere regolare o singolare. Si studia agevolamente effettuando il cambiamento di variabili $z = 1/\zeta$ e studiando poi il comportamento nell'origine $\zeta \to 0$. Riassumiamo qui i risultati utili per scrivere le soluzioni.

- il punto all'infinito è regolare se

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} zp(z) &= 2 \\ \lim_{z\to\infty} z^4 q(z) &< \infty \end{aligned} \tag{5.5}$$

  In questo caso la soluzione generale si scrive

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

  con c_0 e c_1 arbitrari e i successivi determinati da una relazione di ricorrenza.

- il punto all'infinito è una signolarità fuchsiana se esistono i due limiti

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} zp(z) &= P_\infty \\ \lim_{z\to\infty} z^2 q(z) &= Q_\infty \end{aligned}$$

  Allora si può scrivere l'equazione indiciale

$$\rho^2 - (P_\infty - 1)\rho + Q_\infty = 0$$

  le cui soluzioni ρ_1 e ρ_2 determinano gli esponenti di z da premettere a una serie regolare:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= z^{-\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\ u_2(z) &= \begin{cases} \text{se } \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z} & z^{-\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} \\ \text{se } \rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z} & a u_1(z) \log z + z^{-\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} \end{cases} \end{aligned}$$

  Sia in questo caso che nei punti fuchsiani al finito il coefficiente a può, dopo la sostituzione nella equazione e la determinazione dei coefficienti ricorsivamente, risultare nullo. Ciò tuttavia non è mai vero se $\rho_1 = \rho_2$.

Per punti singolari non fuchsiani non esiste un metodo generale di soluzione e occorre trovarne uno volta per volta.