# Metodi Matematici della Fisica

Istituzioni di Fisica Teorica

Lezione 3

# Lezione 3

- Teoremi di Cauchy e di Morera
- Rappresentazione integrale di Cauchy
- Funzioni analitiche
- Zeri e punti singolari di funzioni

# Teoremi di Cauchy e di Morera

Teorema di Cauchy: Se $f$ è olomorfa in un dominio $\mathcal{D}$ e $\gamma$ è una curva di Jordan tutta contenuta in $\mathcal{D}$ allora l'integrale di $f$ lungo $\gamma$ si annulla:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{1}$$

Teorema di Morera: Se $f$ è continua in un insieme connesso $A$ e l'integrale $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$ si annulla per ogni curva chiusa $\gamma$ allora la funzione è olomorfa in $A$.

# Rappresentazione integrale di Cauchy

Se $f$ è olomorfa in un dominio $\mathcal{D}$ e $\gamma$ è una curva di Jordan tutta contenuta in $\mathcal{D}$ allora vale la seguente rappresentazione integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \tag{2}$$

Di conseguenza, esistono tutte le derivate di $f(z)$ che possono essere scritte come:

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \tag{3}$$

e la funzione $f$ è sviluppabile in serie di Taylor. Questo implica che ogni funzione olomorfa è anche analitica.

# Esercizio 1

Calcolare al variare di $a \in \mathbb{C}$

$$I(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{1}{(z-a)^m} dz \quad m = 1, 2, \dots \tag{4}$$

dove $\gamma$ è un circonferenza di raggio $R$ centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario.

# Esercizio 2

Calcolare al variare di $R \in \mathbb{R}$ $(R > 0)$ il seguente integrale:

$$I(R) = \oint_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{-w}}{w - \pi \mathrm{i}/2} dw \tag{5}$$

dove $\gamma_R$ è la curva (percorsa in senso antiorario) che delimita la regione

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \leq R \;,\; |\mathrm{Im}(z)| \leq R\}.$$

# Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale

$$I = \oint_\gamma \frac{1}{2z^2 + 3z - 2} dz \tag{6}$$

dove $\gamma$ è la circonferenza di raggio uno centrata nell'origine (percorsa in senso antiorario). $[2\mathrm{i}\pi/5]$

# Esercizio 4

Calcolare il seguente integrale (se possibile, con la rappresentazione integrale di Cauchy)

$$I = \oint_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z-\pi)} dz \tag{7}$$

per ognuno dei seguenti casi (tutte le circonferenze sono centrate in zero e percorse in senso antiorario)

1. $\gamma$ è data dall'unione delle due circonferenze che formano il bordo di un anello il cui raggio minore vale 1 e il cui raggio maggiore vale 3; $[-4\mathrm{i}]$
2. $\gamma$ è data dall'unione delle due circonferenze che formano il bordo di un anello il cui raggio minore vale 1 e il cui raggio maggiore vale 4; $[-6\mathrm{i}]$
3. $\gamma$ è la circonferenza di raggio $R$ con $R > \pi$; $[-4\mathrm{i}]$
4. $\gamma$ è la circonferenza di raggio $R$ con $R < \pi$. $[-2\mathrm{i}]$