Proiectii

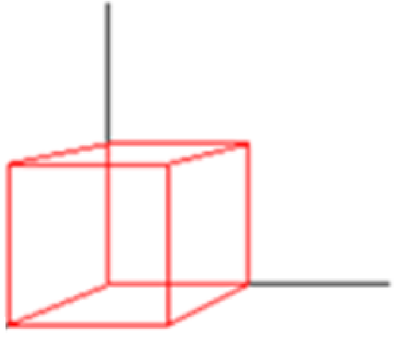
Prof. univ. dr. ing. Florica Moldoveanu

Curs *Elemente de Grafică pe Calculator* – UPB, Automatică şi Calculatoare
2021-2022

Proiectii

Proiectii $R^3 \rightarrow R^2$

- Transformari din spatiul tri-dimensional într-un spatiu bi-dimensional
- Se efectueaza într-un plan numit planul de proiectie
- Se aplica varfurilor obiectelor
- Nu modifica legaturile dintre varfuri (topologia)

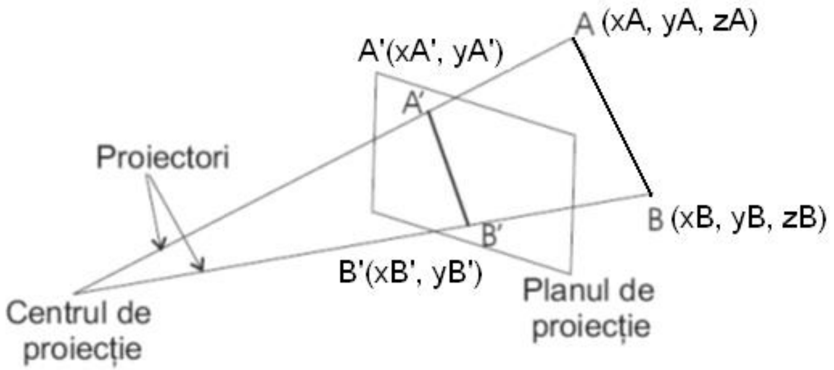


Exemplu:

- Proiectia unui cub in planul XOY
- Legaturile dintre varfurile 2D sunt aceleasi cu legaturile dintre varfurile 3D proiectate

Proiectii $\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$

- Proiectia unui varf 3D într-un plan este punctul de intersectie dintre plan si proiectorul care trece prin varf.



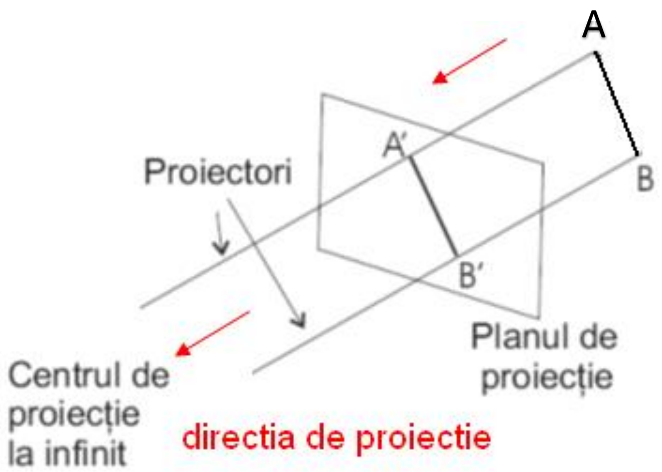
Segmentul A’-B’ este proiectia segmentului A-B in planul de proiecţie XOY (z=0).

Exista 2 clase de proiectii:

- Proiectii perspectiva: centrul de proiectie este situat la distanta finita fata de planul de proiectie (ca in figura de mai sus); proiectorii sunt drepte convergente in CP.

Proiectii $\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$

- Proiectii paralele - centrul de proiectie este la infinit; proiectorii sunt linii paralele care trec prin varfurile obiectului proiectat si au directia specificata (vectorul directie de proiectie)



Proiectii perspectiva(1)

Produc imagini asemanatoare celor obtinute cu aparatele de fotografiat.

Caracteristici:

1. Efectul de micsorare.

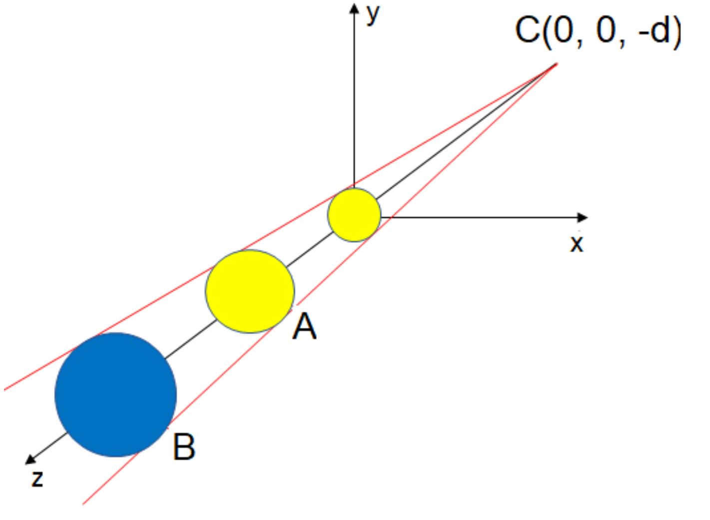
Marimea proiectiei unui obiect 3D este invers proportionala cu distanta de la centrul de proiectie la obiect.

Exemplu:

A si B sunt 2 sfere, cu centrele pe axa OZ, care se proiecteaza în acelaşi disc în planul XOY.

raza sferei B = 2* raza sferei A

Dist(B-C) = 2* Dist(A-C)

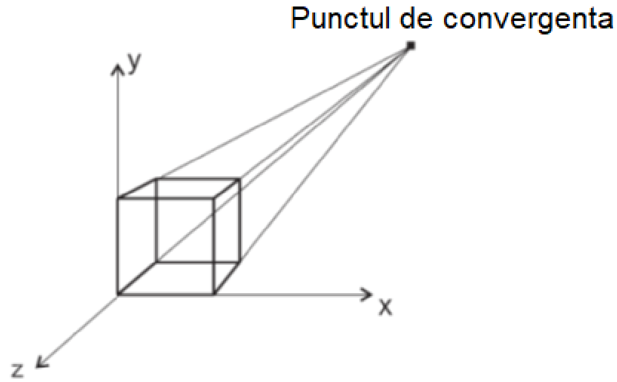


Proiectii perspectiva(2)

2. **Modifica unghiurile dintre dreptele care nu sunt paralele cu planul de proiectie**

Proiectiile liniilor paralele care nu sunt paralele cu planul de proiectie converg catre un punct din plan, numit punct de convergenta (Vanishing point).

- Punctul catre care converg proiectiile liniilor paralele cu una dintre axele principale: ***punct de convergenta principal***

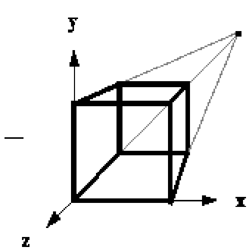


Proiectia perspectiva în planul XOY a unui cub cu feţele paralele cu planele principale

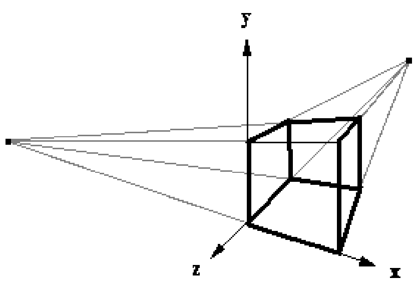
Proiectii perspectiva(3)

Pot fi efectuate proiectii cu unul, doua sau trei *puncte de convergență principale.*

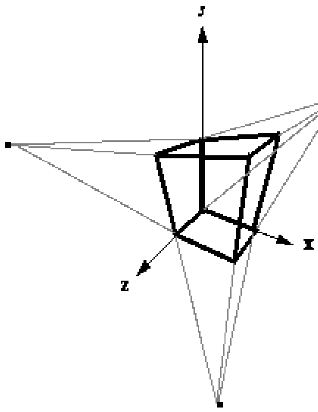
- Numarul de puncte de convergenta principale = numarul de axe principale (Ox, OY, OZ) intersectate de planul de proiectie.



Planul de proiectie intersecteaza axa OZ



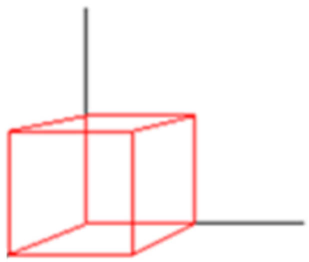
Planul de proiectie intersecteaza axele OZ si OX



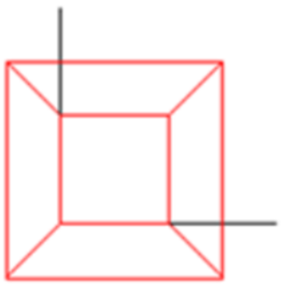
Planul de proiectie intersecteaza toate axele

Exemple de proiectii perspectiva

Proiectii ale unui cub cu latura egala cu 1, feţele paralele cu planele principale ale sistemului de coordonate şi coltul de (xmin,ymin,zmin) in originea sistemului de coordonate.

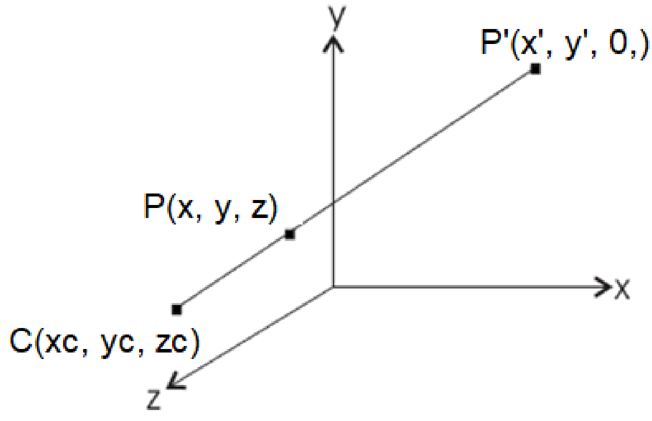


Proiectie perspectiva cu centrul in (5,2,8)



Proiectie perspectiva cu centrul in (0.5,0.5,2)

Proiectia perspectiva in planul XOY (1)



C – centrul de proiectie
P – punctul proiectat
P' – proiectia lui P in XOY

Ecuatiile parametrice ale proiectorului care trece prin P:

$x = xc + (x - xc)*t$
$y = yc + (y - yc)*t$ 0<= t <= 1, pentru punctele aflate pe segmentul C-P
$z = zc + (z - zc) *t$

$0 = zc + (z - zc) *t'$ → $t' = - zc / (z - zc)$ → $\mathbf{x' = (xc*z - zc*x)/(z - zc)}$

$\mathbf{y' = (yc*z - zc*y)/(z - zc)}$

Proiectia perspectiva in planul XOY (2)

Reprezentarea matricială a transformării de proiectie

- Necesara pentru compunerea transf. de proiectie cu alte transf; ex: Pperspectiva*T()*R()*T()

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{vmatrix} = Pperspectiva \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

x' = (xc*z – zc*x)/(z – zc)

y' = (yc*z – zc*y)/(z – zc)

$$\Rightarrow \quad Pperspectiva = \begin{vmatrix} \frac{-zc}{z-zc} & 0 & \frac{xc}{z-zc} & 0 \\ 0 & \frac{-zc}{z-zc} & \frac{yc}{z-zc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matricea proiectiei trebuie sa fie aceeasi pt toate vârfurile proiectate!

Matricea depinde de coordonata z a punctului proiectat

$$\begin{vmatrix} xw \\ yw \\ zw \\ w \end{vmatrix} = Pperspectiva \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$Pperspectiva = \begin{vmatrix} -zc & 0 & xc & 0 \\ 0 & -zc & yc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -zc \end{vmatrix}$$

Coordonatele omogene ale punctului P'

xw = -zc*x + xc*z

yw = -zc*y + yc*z

zw = 0

w = z – zc

Coordonatele carteziene ale punctului P'

- împărţirea perspectivă -

x' = xw/w = (-zc*x + xc*z)/(z-zc)

y' = yw/w = (-zc*y + yc*z)/(z-zc)

z' = zw/w = 0

Proiectia perspectiva in planul XOY (3)

Reprezentarea matricială a transformării de proiectie

$$\begin{vmatrix} xw \\ yw \\ zw \\ w \end{vmatrix} = Pperspectiva \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$Pperspectiva = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{-xc}{zc} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-yc}{zc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{zc} & 1 \end{vmatrix}$$

Coordonatele omogene ale punctului P'

xw = x + (-xc/zc)*z

yw = y + (-yc/zc)*z

zw = 0

w = (-1/zc)*z +1 = -(z – zc)/zc

Coordonatele carteziene ale punctului P'

x' = xw/w = -(x + (-xc/zc)*z)*zc/(z – zc)

= (-zc*x + xc*z)/(z-zc)

y' = yw/w = (-zc*y + yc*z)/(z-zc)

z' = zw/w = 0

Coordonatele omogene ale punctului obtinut prin proiectie perspectiva au w ≠ 1.

Proiectia perspectiva in planul XOY(4)
- pastrarea informatiei de adancime -

Pentru conservarea informatiei de adancime (necesara pentru eliminarea din imagine a partilor nevizibile ale scenei 3D) se foloseste matricea :

Coordonatele omogene si coordonatele carteziene ale punctului P'

xw = -zc*x + xc*z → x' = (-zc*x + xc*z)/(z-zc)

yw = -zc*y + yc*z → y' = (-zc*y + yc*z)/(z-zc)

zw = z → z' = z/(z – zc)

w = z – zc

$$Pperspectiva = \begin{vmatrix} -zc & 0 & xc & 0 \\ 0 & -zc & yc & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -zc \end{vmatrix}$$

Proiectia perspectiva standard

Xc = 0, Yc = 0, Zc = - d

$$Pperspectiva = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{-xc}{zc} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-yc}{zc} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{zc} & 1 \end{vmatrix} \qquad Ppers\_standard = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

xw = x → x' = x*d/(z+d)

yw = y → y'= y*d/(z+d)

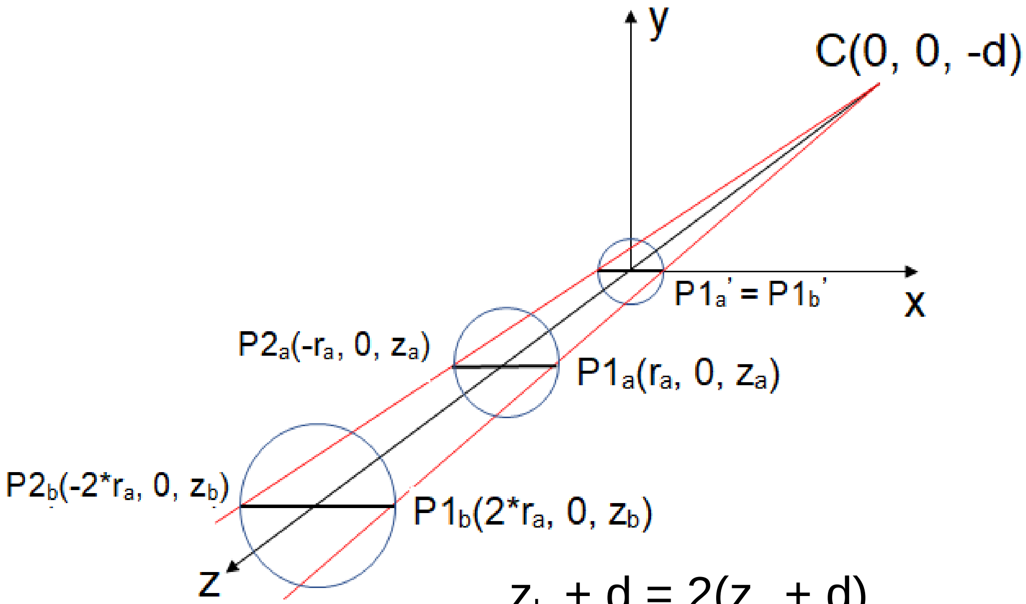
zw = z → z' = z*d/(z+d)

w = z/d + 1 = (z+d)/d

Proiectia perspectiva in planul XOY – exemplu - efectul de micsorare -

A şi B sunt 2 sfere cu centrele pe axa OZ, A de rază r_a şi B de rază $2*r_a$.

Distanța de la centrul sferei B la centrul de proiecție C este de 2 ori mai mare decât distanța de la centrul sferei A la C.



$z_b + d = 2(z_a + d)$

Proiecția perspectivă standard

$xw = x \rightarrow x' = x*d/(z+d)$

$yw = y \rightarrow y' = y*d/(z+d)$

$zw = z \rightarrow z' = z*d/(z+d)$

$w = z/d + 1 = (z+d)/d$

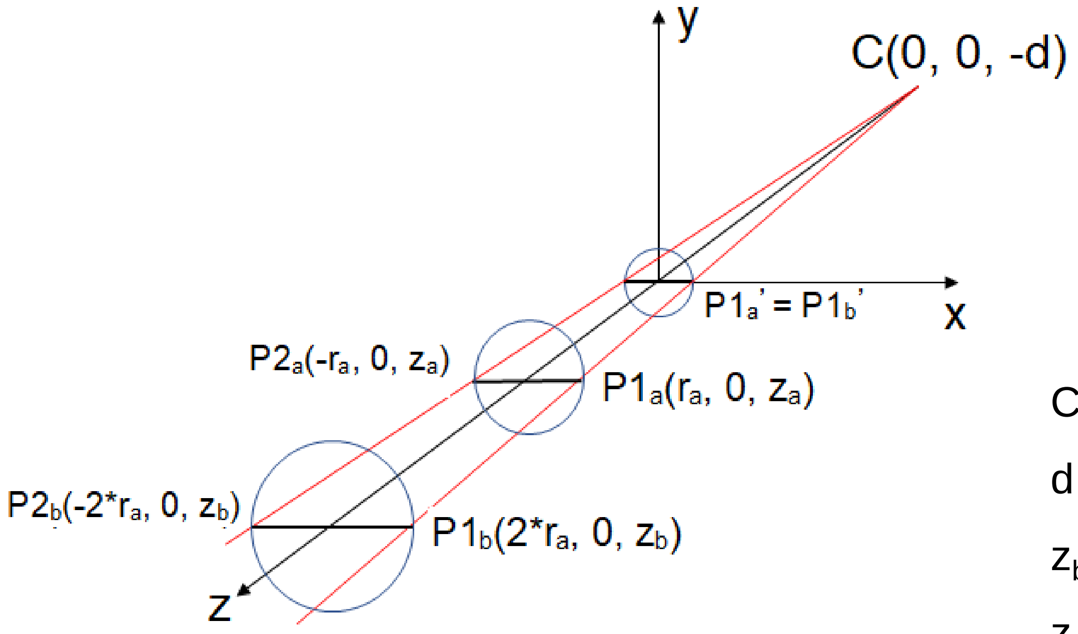
$x\_P1_a' = r_a*d/(z_a + d)$; $y\_P1_a' = 0 = y\_P1_b'$

$x\_P1_b' = 2*r_a*d/(z_b + d) = 2*r_a*d/(2*(z_a + d)) = r_a*d/(z_a + d) = x\_P1_a'$

Analog se demonstrează că $P2_b' = P2_a'$

Utilizarea coordonatei de adâncime în eliminarea suprafetelor nevizibile din imagini

Daca 2 puncte 3D se proiecteaza în acelasi punct, trebuie sa se redea in imagine culoarea punctului mai apropiat de observator (centrul de proiectie):



Proiecția perspectivă standard

zw = z → $z' = z*d/(z+d)$

$z\_P1_a' = z_a*d/(z_a + d)$

$z\_P1_b' = z_b*d/(z_b + d)$

Consideram:

$d = 50$; $z_a = 100$;

$z_b + d = 2(z_a + d)$ → $z_b = 2*z_a + d = 250$

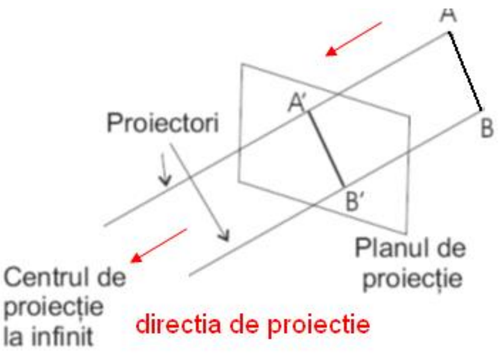
$z\_P1_a' = 100*50/150 = 33.33$;

$z\_P1_b' = 250*50/300 = 41.66$

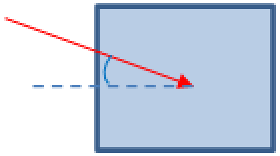
$z\_P1_a' < z\_P1_b'$ → discul în care se proiecteaza cele 2 sfere va fi afisat în culoarea sferei A

Proiectii paralele(1)

Caracteristici



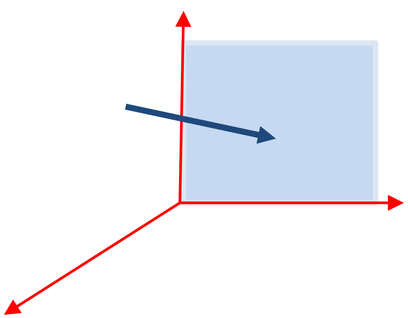
- **Proiectorii sunt drepte paralele de directie data**
- **Conserva paralelismul liniilor: sunt transformari afine**
- **Unghiurile se conserva doar pentru feţele obiectului paralele cu planul de proiectie.**

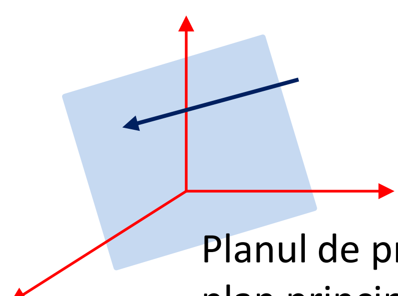


- Clasificare dupa unghiul dintre proiectori si planul de proiectie:
  - *Proiectii **ortogonale**:* proiectorii sunt perpendiculari pe planul de proiectie.
    - Ortografice: planul de proiectie este II cu un plan principal (⊥ pe o axa principala)
    - Axonometrice: planul de proiectie este oarecare
  - *Proiectii **oblice**:* proiectorii nu sunt perpendiculari pe planul de proiectie – cazuri particulare:
    - proiectii Cavalier (unghiul dintre proiectori si plan = 45 grade)
    - proiectii Cabinet (unghiul dintre proiectori si plan = 63.43 grade)

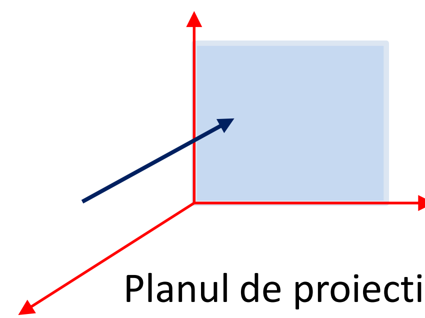
Proiectii paralele(2) - clasificare

- Proiectii paralele
  - Oblice
    - Cavalier
    - Cabinet
    - Generale
  - Ortogonale
    proiectori ⊥ pe planul de proiectie
    - Axonometrice
      - Izometrice
      - Dimetrice
      - Trimetrice
    - Ortografice(6 vederi)
      planul de proiectie ⊥ pe o axa principala





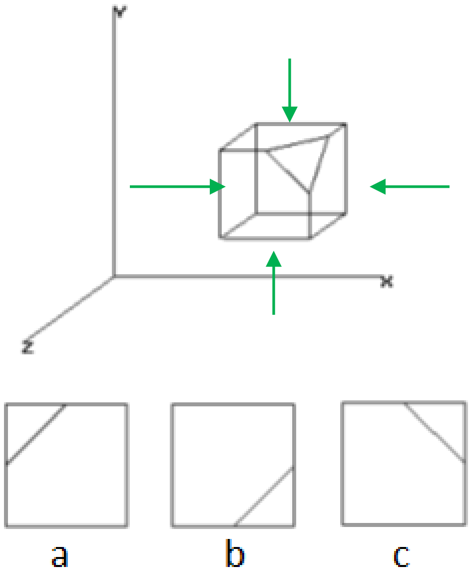
Planul de proiectie nu este || cu un plan principal



Planul de proiectie || cu un plan principal

Proiectii paralele(3)

1. Proiectii ortogonale - ortografice



Proiectii ortografice ale cubului:

a) Vederea din dreapta
b) Vederea de sus
c) Vederea din față

❑ Proiectii in planele sistemului de coordonate (planul de proiectie ⊥ pe o axa principala) → numite şi **vederi**

· în YOZ: *vederea din stanga, vederea din dreapta,*

· în XOZ *: vederea de sus, vederea de jos,*

· în XOY : *vederea din fata, vederea din spate.*

➢ Conserva lungimile laturilor si unghiurile dintre laturi

➢ Utile in desenul tehnic: se folosesc mai multe vederi

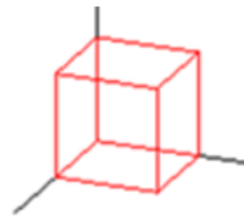
In vederile din stanga, de jos, din spate nu apare colțul tăiat!

Proiectii paralele(4)

2. Proiectii ortogonale - axonometrice

- Planul de proiectie nu este perpendicular pe nici una din axele sistemului de coordonate.
- Redau mai multe feţe ale obiectului proiectat (ca si cele perspectiva): alegand planul de proiectie se poate controla scalarea laturilor.

Izometrica



Dimetrica: sx=sy

Planul de proiectie intersecteaza cu unghiuri egale axele OX si OY

- In functie de unghiurile pe care planul de proiectie le face cu axele sistemului de coordonate:

  - proiectii *izometrice*, planul face unghiuri egale cu toate cele trei axe → prin proiectie, laturile sunt scalate cu factori egali pe cele 3 axe: sx=sy=sz

  - proiectii *dimetrice*, planul face unghiuri egale cu doua dintre axe → laturile sunt scalate cu factori de scalare egali pe 2 axe: sx=sy sau sx=sz sau sy=sz

  - proiectii *trimetrice*, unghiurile dintre cele trei axe si plan sunt diferite → factorii de scalare ai laturilor pe cele 3 axe sunt diferiti: sx # sy # sz

Proiectii paralele(5)

3. Proiectii oblice

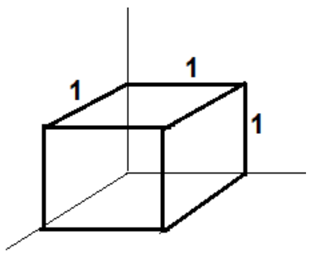
- Planul de proiectie este perpendicular pe o axa principala:

  se efectueaza proiectii in planele principale

- Directia de proiectie nu este perpendiculara pe planul de proiectie.
- Fețele II cu planul de proiectie se proiecteaza fara modificarea unghiurilor si a marimii laturilor

❑ **Proiectii Cavalier**

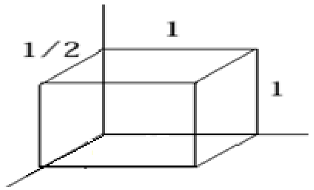
(unghiul proiectorilor cu planul de proiectie = 45 grade)



- Lungimea proiectiei unei laturi perpendiculare pe plan este egala cu lungimea laturii 3D (conserva lungimea laturilor perpendiculare pe planul de proiectie)

❑ **Proiectii Cabinet**

(unghiul proiectorilor cu planul de proiectie = 63.43 grade)

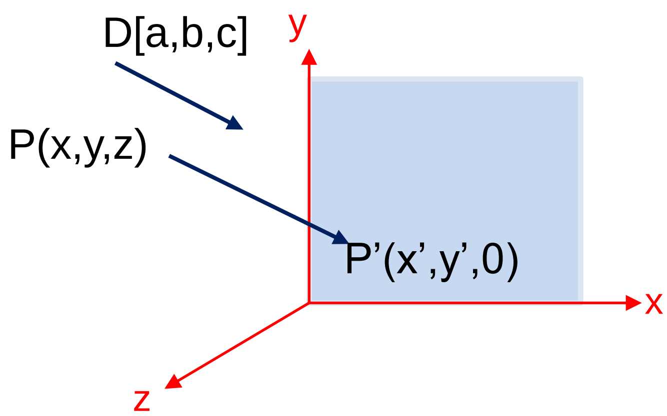


- Lungimea proiectiei unei laturi perpendiculare pe plan este egala cu jumatate din lungimea laturii 3D

Proiectii paralele in planul XOY(6)

Fie punctul P(x,y,z) şi direcţia de proiectie D[a,b,c].

Proiectia lui P in XOY este punctul P' (x',y',0).



Din conditia PP' || D, rezulta:

PP' = s*D, unde s este un scalar oarecare

x' – x = s*a
y' – y = s*b
0 – z = s*c → s = z/c

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - (a/c) * z \\ y' &= y - (b/c) * z \end{aligned}}$$

Proiectia paralela în XOY, cu directia de proiectie [a,b,c]

Proiectii paralele in planul XOY(7)

Reprezentarea matriciala a proiectiilor paralele:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{vmatrix} = Pparalela \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

x’ = x – (a/c)*z
y’ = y – (b/c) * z
z’ = 0

$$\Longrightarrow \quad Pparalela = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{-a}{c} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-b}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ca si în cazul proiectiilor perspectiva, pentru conservarea informatiei de adancime se foloseste matricea

$$\Longrightarrow \quad Pparalela = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{-a}{c} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-b}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cazuri particulare

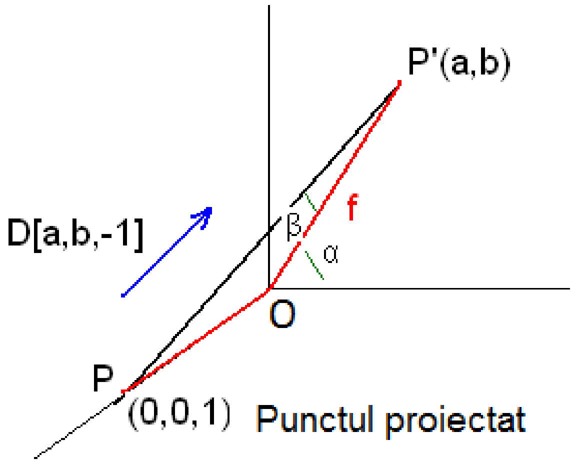
1. Proiectia ortografica in XOY (proiectorii perpendiculari pe XOY):

D[a, b, c]
a= 0, b = 0

$$\Longrightarrow \quad P_{O\text{-}XOY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proiectii paralele in planul XOY(8)

2. Proiectii oblice in XOY



c = -1 → $P_{OBI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P_{OBI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f*\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & f*\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OP de lungime 1 se proiecteaza in OP' de lungime f → f este factorul de scalare al laturilor perpendiculare pe XOY (OP este perpendicular pe XOY).

tg(β) = 1/f

f = 0 → β=90^0 : proiectie ortografica

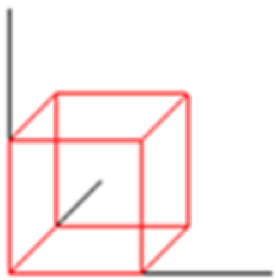
f = 1 → β=45^0 : proiectie Cavalier

f = 0.5 → β=63.43^0 : proiectie Cabinet

α este un parametru liber

in mod uzual, α= 30^0 sau 45^0

Exemple de proiectii oblice



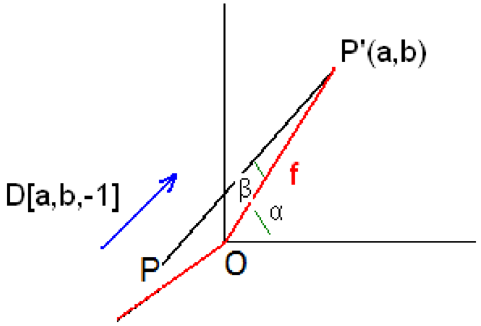
Proiectie Cavalier: f=1, beta=45, alfa=45

Directia de proiectie: [cos(45),sin(45),-1]

Proiectie Cabinet: f=0.5, beta=63.43, alfa=45

Directia de proiectie:

[0.5*cos(45),0.5*sin(45),-1]



Proiectii paralele in planul XOY(9)

3. Proiectii axonometrice(1)

- **proiectii ortogonale într-un plan care intersecteaza 2/3 axe principale**

Sunt 2 posibilități de exprimare matematica:

1. Obiectul proiectat fix in spatiu, se alege planul astfel incat sa obtinem tipul de proiectie dorit (izometrica, dimetrica, generala):

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{vmatrix} = Pax(N,R) \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

- Pax – matricea proiectiei axonometrice intr-un plan oarecare (N,R)

2. Plan de proiectie fix (XOY), se pozitioneaza obiectul față de plan astfel încat sa obtinem tipul de proiectie dorit :

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{vmatrix} = Po\text{-}xoy * TA \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix}$$

- Pax - transformare geometrica a obiectului (TA) urmata de proiectie ortografica in XOY (Po-xoy)– cu efect echivalent

  TA consta din rotatii in jurul axelor OX si OY. Particularizand unghiurile de rotatie obtinem cazurile de proiectii axonometrice: izometrice, dimetrice, generale.

Proiectii paralele in planul XOY(10)

Proiectii axonometrice(2)

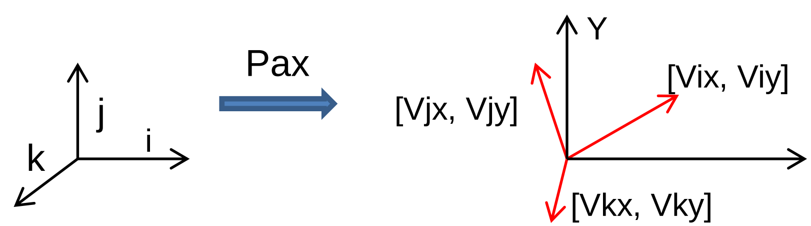
Exemplu:

TA = Rx(ux) * Ry(uy)

$$Pax = Po\text{-}xoy * TA = \begin{bmatrix} \cos(uy) & 0 & \sin(uy) & 0 \\ \sin(ux)^*\sin(uy) & \cos(ux) & -\cos(uy)^*\sin(ux) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se aplica transformarea Pax versorilor axelor principale:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Vi & Vj & Vk \end{array} \\ \begin{bmatrix} Vix & Vjx & Vkx \\ Viy & Vjy & Vky \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = PA \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Factorii de scalare a laturilor pe cele 3 axe sunt lungimile proiectiilor celor trei vectori unitate:

$sx = sqrt\ (Vix^2 + Viy^2)$

$sy = sqrt\ (Vjx^2 + Vjy^2)$

$sz = sqrt\ (Vkx^2 + Vky^2)$

Proiectii paralele in planul XOY(11)

Proiectii axonometrice(3)

Se deduc unghiurile de rotatie in jurul axelor pentru obtinerea celor 2 cazuri particulare de proiectii axonometrice: izometrice si dimetrice.

1. *Proiectii izometrice:*

- Se impune conditia: sx = sy = sz
- Rezulta: ux = (+/-) 35.26 grade ; uy = (+/-) 45 grade

2. *Proiectii dimetrice:* doi dintre factorii de scalare sunt egali

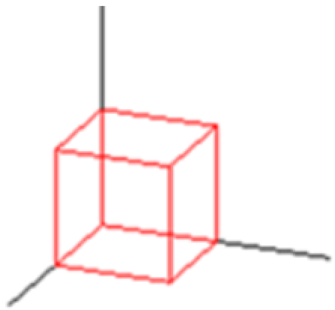
- Daca se impune conditia: sx = sy, rezulta:

  ux = arcsin((+/-) sz $\sqrt{2}$), uy = arcsin((+/-) sz $\sqrt{(2-sz^2)}$)

  sz poate fi ales intre 0 si 1;

  - pentru fiecare valoare a lui sz exista 4 proiectii dimetrice; de exemplu:
  - pentru sz = 0.5 : ux = +/- 20.705 grade, uy = +/- 22.208 grade

Exemple de proiectii axonometrice



Proiectie izometrica:

P_ort_XOY * R_Ox(35.26)* R_Oy(45)

sx = sy = sz

Proiectie dimetrica:

P_ort_XOY * R_Ox(20.705)* R_Oy(22.208)

sx = sy # sz