Reprezentarea pe stare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Dependenta liniara a evolutiei sistemului de starea actuala x si intrarile sale u

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dependenta liniara a iesirilor sistemului de starea actuala x si intrarile sale u

$A \in R^{n\times n}$ - matricea de stare (descrie dependenta intre evolutia viitoare a starii si starea curenta)

$B \in R^{n\times m}$ - matricea asociata intrarilor (descrie dependenta intre evolutia viitoare a starii si intrarile sistemului)

$C \in R^{p\times n}$ - matricea asociata iesirilor (descrie dependenta intre iesirile sistemului si starea sa curenta)

$D \in R^{p\times m}$ - matricea asociata transferului direct (descrie modul in care iesirile depind direct de intrari)

m - numarul de variabile de intrare

n - numarul de variabile de stare

p - numarul de variabile de iesire

3

Controlabilitate

Matematic: Controlabilitatea depinde de perechea (A,B) si este verificata cu ajutorul matricei de controlabilitate R:

perechea (A,B) controlabila / (A,B,C,D) controlabil $\longleftrightarrow$ $R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ este de rang maxim (epica) ($rank(R) = n$)

Rezulta subspatiul controlabil ca fiind imaginea matricei de controlabilitate R.

$$Im(R) = \{Rx \mid x \in R^n\}$$

Observabilitate

Matematic: Observabilitatea depinde de perechea (A,C) si este verificata cu ajutorul matricei de observabilitate Q:

perechea (A,C) observabila / (A,B,C,D) observabil $\longleftrightarrow$

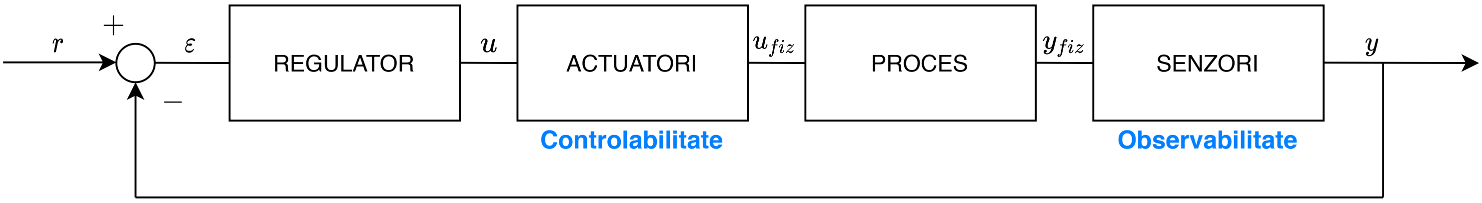
$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

este de rang maxim (monica) ($rank(Q) = n$)

Rezulta subspatiul neobservabil ca fiind nucleul matricei de observabilitate Q:

$$Ker(Q) = \{x \in R^n \mid Qx = 0\}$$

Semnificatii practice



Controlabilitate

Semnificatie: sistemul poate fi adus in orice stare dorita (nu e necesar sa si ramana acolo), aspect dependent de **ACTUATORI:**

$B \in R^{n \times m}$ - matricea asociata intrarilor (descrie dependenta intre evolutia viitoare a starii si intrarile sistemului)

$A \in R^{n \times n}$- matricea de stare (descrie dependenta intre evolutia viitoare a starii si starea curenta)

$\longrightarrow$

Controlabilitatea va fi determinata de perechea (A, B)

Ce fel de elemente de actionare folosesc? Sunt ele suficiente?

Ex: Pot controla masina doar cu volanul si fara acceleratie/frana?

Subspatiul controlabil e alcatuit din multimea starilor in care poate fi adus sistemul prin comanda. E suficient ca o singura stare sa nu poata fi atinsa pentru ca sistemul sa fie incontrolabil.

Observabilitate

Semnificatie: toate starile sistemului pot fi masurate direct sau estimate prin intermediul iesirilor acestuia, aspect dependent de **SENZORI:**

$C \in R^{p \times n}$ - matricea asociata iesirilor (descrie dependenta intre iesirile sistemului si starea sa curenta)

$A \in R^{n \times n}$- matricea de stare (descrie dependenta intre evolutia viitoare a starii si starea curenta)

$\longrightarrow$

Observabilitatea va fi determinata de perechea (A, C)

Cati senzori folosesc? Unde sunt acestia plasati?

Ex: Pot observa cum se comporta masina daca nu am vitezometru / nu vad pe unde merg?

Subspatiul observabil e alcatuit din multimea starilor care pot fi masurate/estimate. E suficient ca o singura stare sa fie imposibil de masurat/estimat pentru ca sistemul sa fie neobservabil.

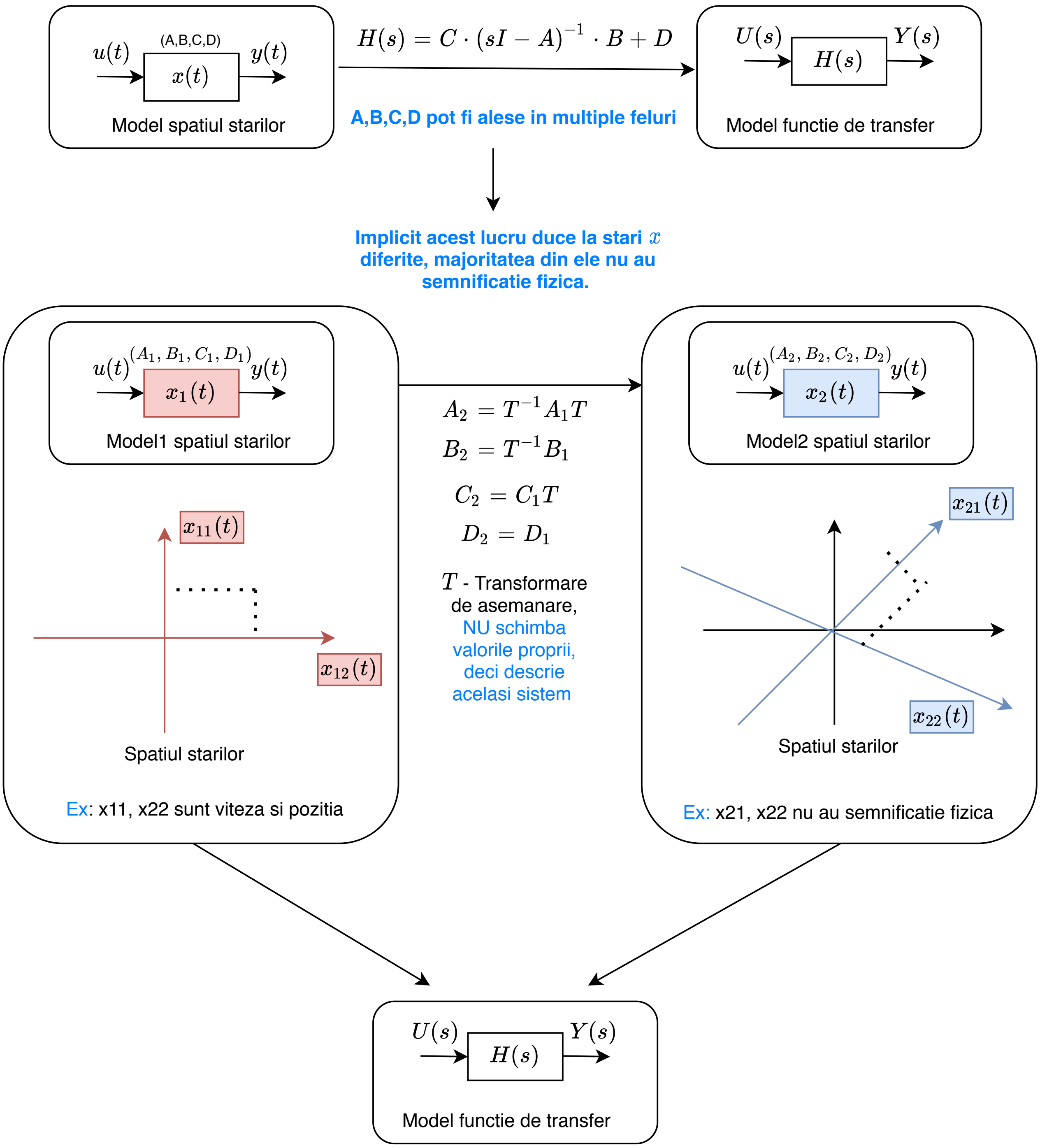
Controlabilitatea si observabilitatea isi au utilitatea in contextul **reglarii**: daca sistemul nu este controlabil (exista stari imposibil de atins prin comenzi) sau nu e obserevabil (exista stari imposibil de masurat, deci nu pot cunoaste unde ma aflu pentru a decide ce comanda sa aplic mai departe) atunci **este imposibila reglarea automata** a sistemului in cauza.

! Putem regla automat un sistem daca acesta este atat controlabil cat si observabil, adica minimal.

Controlabil neobservabil: pot influenta sistemul dar nu pot vedea efectul acestei influente, reglarea automata e imposibila.

Observabil necontrolabil: pot vedea evolutia sistemului dar nu o pot influenta in vreun fel, reglarea automata e imposibila.

Transformari de asemanare intre modele pe SS



Daca exista transformarea de asemanare T, cele doua sisteme (A_1, B_1, C_1, D_1) si (A_2, B_2, C_2, D_2) **sunt echivalente-intrare iesire si ambele descriu sistemul dat de functia/matricea de transfer H.**

Mai mult, daca sistemele sunt **echivalente intrare-iesire** si au si **acelasi numar de stari** spunem ca sistemele sunt **echivalente pe stare.**

De ce? Transformarile ne sunt utile deoarece acestea ne pot aduce sistemul la o forma controlabila, la o forma observabila, sau pot duce A la forma diagonala, lucru util pentru proiectarea controlului automat al sistemului.

De asemenea, putem trece un sistem la forma controlabila si sa ii verificam observabilitatea pentru a vedea daca e minimal sau invers.

Minimalitate

Un sistem pe spatiul starilor (A, B, C, D) este **minimal** daca si numai daca acesta este atat **controlabil** (perechea (A, B) e controlabila) cat si **observabil** (perechea '(A,C)' e observabila).

Un sistem minimal are dimensiunea minima a vectorului starilor x, nu exista stari redundante. Nu se poate gasi un vector de stare mai mic pentru descrierea completa a sistemului.

$$size(x) = \min$$

Un sistem minimal trecut in matrice de transfer rezulta intr-o matrice de transfer $H(s)$de dimensiuni minime, nu se poate gasi o matrice de transfer mai mica pentru descrierea completa sistemului.

$$size(H) = \min$$

Pentru un sistem minimal polii matricei de transfer $H(s)$ coincid cu spectrul matricei de stare A. In cazul sistemelor care nu sunt minimale, multimea polilor matricei de transfer $H(s)$ este inclusa in spectrul matricei de stare A.

$$pol(H) \equiv \Lambda(A)$$

Numai un sistem minimal poate fi supus controlului automat.

'Bonus': Intuitie pt forma matricei de controlabilitate

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

Presupunem ca u_k e scalar si cautam evolutia la intrare impuls:

IN:u_k	**STATE:**x_k
$u_0 = 1$	$x_0 = 0(c.i. = 0)$
$u_1 = 0$	$x_1 = B$
$u_2 = 0$	$x_2 = AB$
$u_3 = 0$	$x_3 = A^2B$
...	...
$u_m = 0$	$u_m = A^{m-1}B$

Daca $R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$.

are rang maxim atunci impulsul a facut ca sistemul sa treaca prin toate starile posibile, deci toate starile sunt posibil de atins si sistemul e controlabil. In caz contrar exista stari imposibil de atins prin impuls, deci imposibil de atins prin orice alt semnal, sistemul fiind necontrolabil.

Functii de interes

`R = ctrb(A,B) / R = ctrb(sys)` - generarea matricei de controlabilitate R

`Q = obsv(A,C) / Q = obsv(sys)` - generarea matricei de observabilitate Q

`rang = rank(R)` - determinarea rangului unei matrici