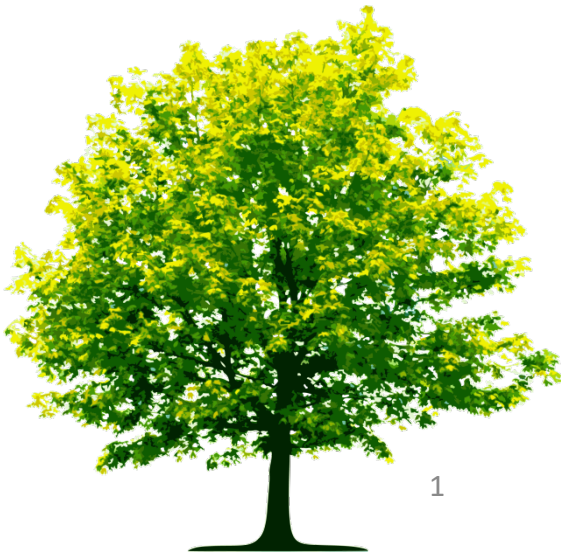
# Structuri de Date

Anul universitar 2019-2020

Prof. Adina Magda Florea



# Curs Nr. 5

## Arbori

- Arbori: definiţii, terminologie
- Arbori binari
- Reprezentarea arborilor binari
- Adresări de baza în arbori
- Operaţii de baza cu arbori

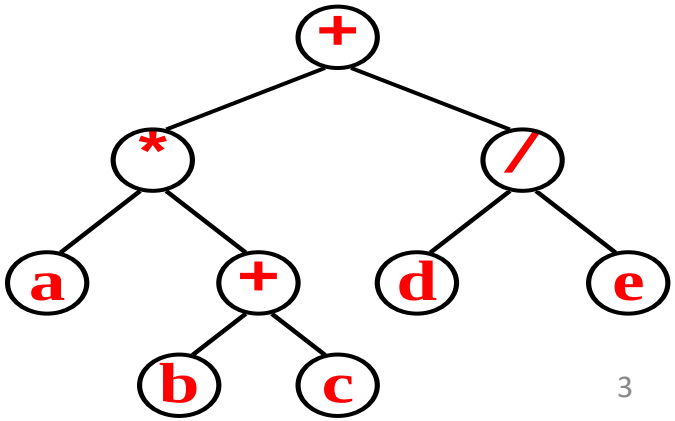
# 1. Structuri ierarhice: arbori

Liste, stive, cozi – structuri liniare

Arbori – structuri ierarhice

Multe exemple de date care pot fi structurate convenabil sub forma de arbore

- organizarea administrativă a societaţilor comerciale, ministerelor, universităţilor etc.
- programul meciurilor dintr-un turneu eliminatoriu
- directoare si subdirectoare
- arborele unei expresii aritmetice



# Arbori: definiţii

Exista mai multe tipuri de arbori:

- Arbori binari
- Arbor multicăi sau n-ari
- Arbori sortaţi sau de cautare

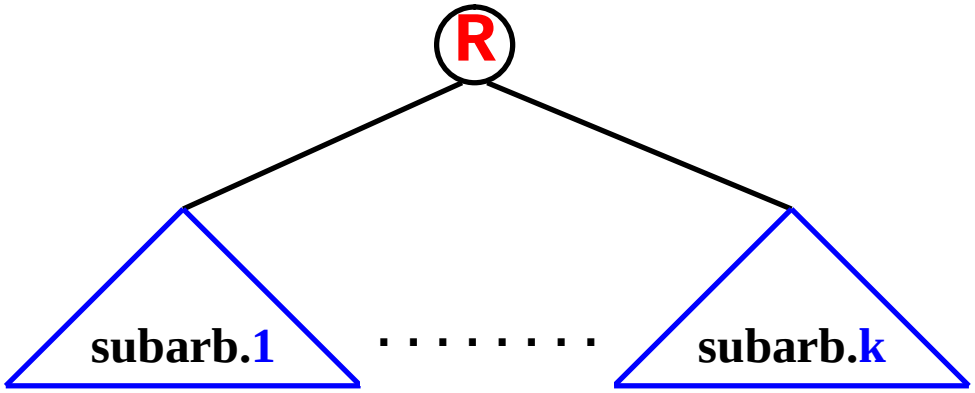
Un **arbore** este o colecţie de noduri şi arce (legături între noduri) în care exista o singură cale între oricare două noduri

**Cale** = secvenţă de noduri şi arce care conectează aceste noduri

**Rădăcină** – nodul pe care îl considerăm primul în arbore

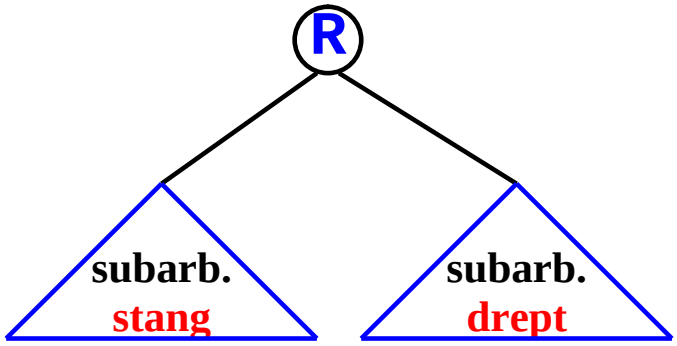
# Arbori: definiţii

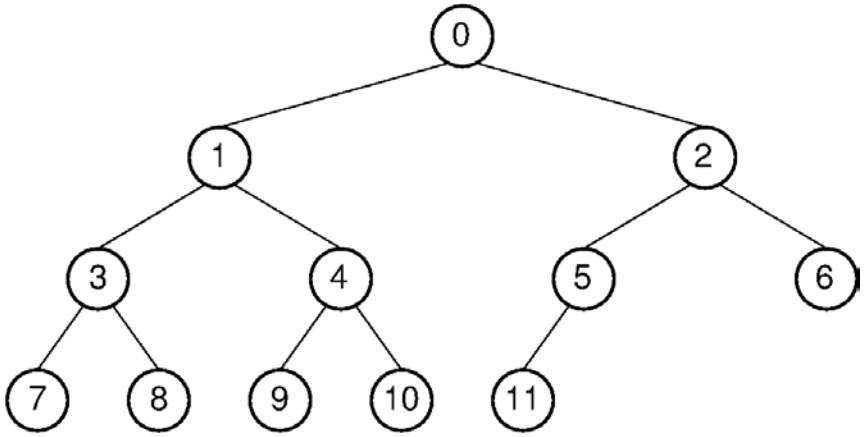
- Un arbore este format dintr-un nod rădăcină, căruia îi este ataşat un număr finit de arbori.
- Pentru a evidenţia relaţia ierarhică, aceştia sunt numiţi subarbori.
- Orice nod dintr-un arbore poate fi privit ca rădăcină a unui (sub)arbore.



# Arbori binari

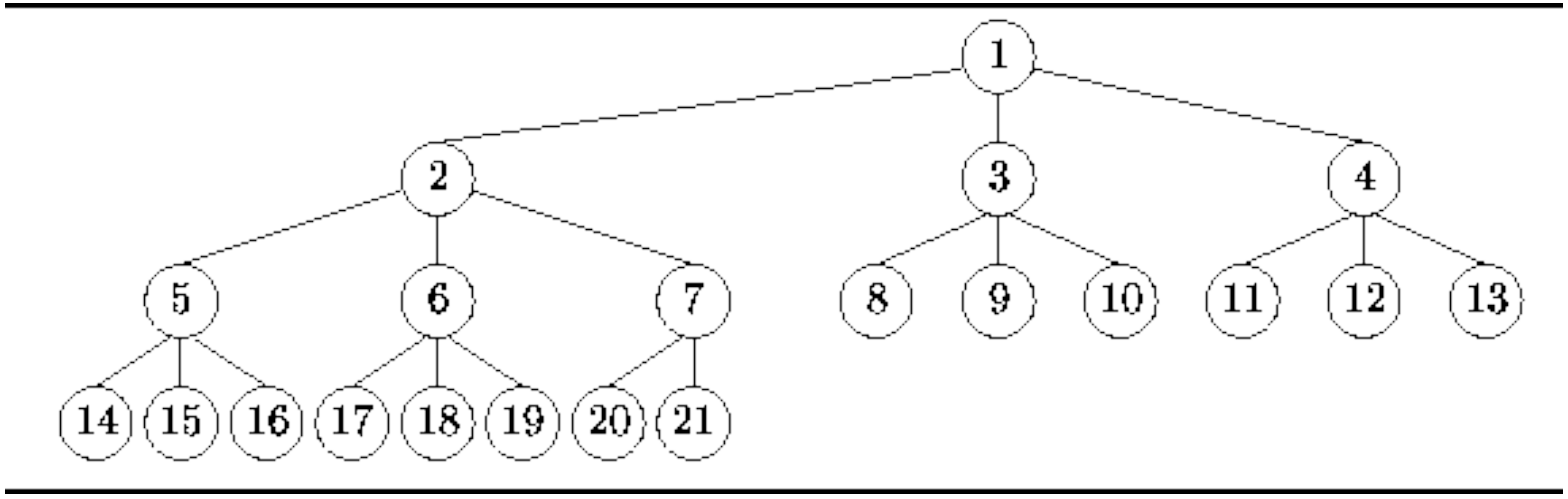
- Arbore vid - nu conţine nici un nod
- Arbore binar - nodurile au cel mult 2 subarbori
  - subarbore stâng
  - subarbore drept



# Arbori multicăi

- Arbore multicăi sau N-ar – arbore în care nodurile pot avea mai mult de 2 subarbori



# Arbori: terminologie

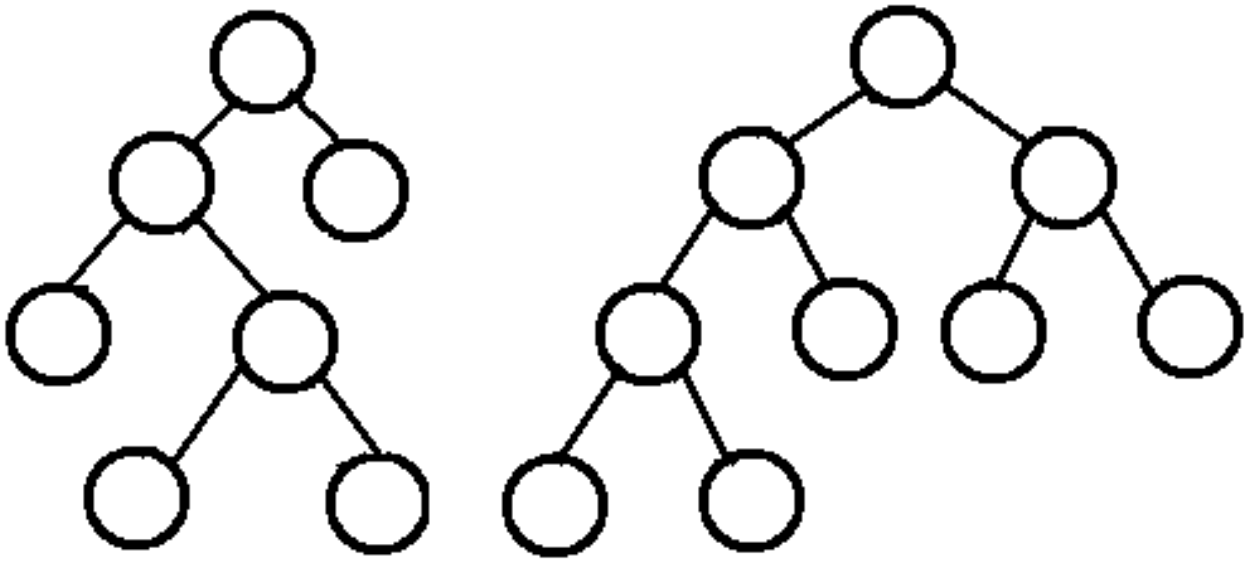
- strămoş al unui nod x – orice nod aflat pe calea (unică) de la rădăcină până la nodul x ; rădăcina este strămoşul tuturor celorlalte noduri
- descendent al unui nod x – orice nod aflat în arborele cu rădăcina x
- tată / fiu (copil) – noduri aflate la distanţa 1 (numite şi strămoş / descendent direct)
- fraţi (siblings) – fiii aceluiaşi nod

# Arbori: terminologie

- ordinul (gradul) unui nod - numărul de subarbori ataşaţi nodului
- noduri interne - nodurile care au subarbori
- noduri externe (noduri terminale sau **frunze**) – nodurile fără subarbori (cu ordin 0)
- nivelul sau adâncimea unui nod – numărul de arce de la rădăcină la nod (rădăcina are nivel 0)
- înălţimea unui arbore – **nivelul maxim din arbore** (adâncimea frunzei de nivel maxim)

# 2. Arbori binari

- **Definiţie recursiva**: Un arbore binar este (a) un nod extern sau (b) un nod intern conectat la o pereche de subarbori numiţi subarbore stâng şi subarbore drept
- Arbore binar plin (full) – fiecare nod are exact 0 sau 2 fii
- Arbore binar complet – un arbore binar care este complet umplut cu posibila excepţie a ultimului nivel care este umplut de la stânga la dreapta



Arbore binar plin

Arbore binar complet

# Proprietăţi ale arborilor binari

Un arbore binar cu **N noduri interne** are **N+1 noduri externe**

# Proprietăţi ale arborilor binari

**Înălţimea** unui arbore binar cu **N noduri interne** este **minim lgN** şi **maxim N-1**

***Justificare***

Cazul cel mai defavorabil este un arb degenerat cu 1 singura frunza (N=1), cu N-1 (=0) legaturi de la radacina la frunza.

Cazul cel mai favorabil este un arbore cu 2**i noduri interne pe fiecare nivel **i** cu exceptia ultimului nivel.

Daca inaltimea este **h**, atunci trebuie sa avem

2**(h-1) < N+1 <= 2**h deoarece avem N+1 frunze.

Inegalitatea implica proprietatea enuntata:
inaltimea pt cazul cel mai favorabil este **lgN** rotunjita la cel mai apropiat intreg.

# Proprietăţi ale arborilor binari

**Inălţimea** unui **arbore binar complet cu M noduri** este cel mult **O(log M)**

- Un arbore binar complet este un arbore special deoarece ofera raportul optim intre numarul de noduri si inaltimea arborelui.
- Inaltimea **h** a unui arbore binar complet cu **M** noduri este cel mult **O(log M)**

  $M = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(h-1)} + 2^{h} = 2^{(h+1)} - 1$
- Rezolvand pt h avem h = O(log M)

# 3. Reprezentarea arborilor binari

*Amintim reprezentarea **listei***

```
typedef int  Item;
typedef struct cel {
          Item    elem;
          struct  cel  *next;} ListCel, *TList;
sau
typedef struct node *Link;
typedef struct node {
           Item  elem;
           Link  next; } ListNode;
```

Un arbore este o generalizare a unei liste

Anumiti arbori (degenerati) devin chiar liste

*Obs: Reprezentarea arborilor multicai – in alt curs*

# Reprezentare arbori binari (R1)

```
typedef int Item;
typedef struct node {
                Item  elem;
                struct node  *lt, *rt; } TreeNode, *TTree;
```

cu declaratia

```
TTree root = NULL;
```

si alocarea unui nod

```
root = (TTree) malloc(sizeof (TreeNode));
/*  sau   root = malloc(sizeof  *root);  */
```

# Reprezentare arbori binari (R2)

sau

*R1 si R2 sunt echivalente*

```
typedef struct node *TLink;
typedef struct node {
                Item  elem;
                TLink  lt, rt; } TreeNode;
```

cu declaratia

```
TLink root = NULL;
```

si alocarea unui nod

```
root = (TLink) malloc(sizeof (TreeNode));
/*  sau   root = malloc(sizeof  *root);  */
```

# 4. Adresări de baza în arbori

- **test arborele vid: (a == NULL)**
- **Pentru arbore nevid (a != NULL)**
  - **valoarea elementului din nodul a: a->elem**
  - **pointer la subarborele stâng: a->lt**
  - **pointer la subarborele drept: a->rt**
  - **test dacă este frunză:**

    **( a->lt == NULL && a->rt == NULL)**
  - **test dacă este nod intern:**

    **( a->lt != NULL || a->rt != NULL)**

# Adresări de baza în arbori

- **Pentru arbore nevid (a != NULL)**
  - **Ordinul unui nod**

    **(( a->lt  != NULL) + ( a->rt != NULL))**

    **frunză: 0 + 0 ⇨ 0**

    **numai subarbore stâng: 1 + 0 ⇨ 1**

    **numai subarbore drept: 0 + 1 ⇨ 1**

    **doi subarbori: 1 + 1 ⇨ 2**

# 5. Operaţii de bază cu arbori

**ADT Arbore**

- Iniţializare arbore
- Test arbore vid
- Construcţie arbore pe bază de cheie, subarbore stâng şi subarbore drept
- Test nod intern
- Test nod extern / frunză
- Parcurgere arbore (cu diferite prelucrări, de exemplu afişare)

# Operaţii de bază cu arbori

- Inserare nod la stânga unui nod
- Inserare nod la dreapta unui nod

NB: Inserarea şi eliminarea depind de proprietăţile arborelui

- Determinarea înălţimii unui arbore
- Determinarea nivelului unui nod
- Determinarea numărului de noduri dintr-un arbore
- Distrugerea unui arbore

# 5.1 Iniţializare arbore

```
typedef struct node *TLink;
typedef struct node {
                Item  elem;
                TLink  lt, rt; } TreeNode;

TLink  initNode()
/* poate intoarce un arbore cu un nod*/
TLink  initTree()
/*  poate intoarce, in reprezentarea
cu santinela, un nod de arbore in care lt si
  rt puncteaza la nodul insusi */
```

# 5.2 Testare

```
typedef struct node *TLink;
typedef struct node {
                Item  elem;
                TLink  lt, rt; } TreeNode;
```

```
int  emptyTree(TLink t)
     /* arbore vid? */
int isleaf(TLink t) /* este frunza? */
int isinterior(TLink t)
     /* este nod intern? */
```

# 5.3 Creare /distrugere

```
TLink  BuildNode(Item a, TLink ltree,
                                    Tlink rtree);
/* construieste un nod avand cheia a si subarbore
  stang, respectiv drept pe ltree si rtree */
{TLink t;
   t = (TLink) malloc (sizeof (TreeNode));
   t->lt = ltree; t->rt = rtree; t->elem = a;
   return t;
}

void KillTree(TLink t);
/* distruge arborele */
```

# 5.4 Parcurgerea arborilor

Parcurgerea unui arbore implică **vizitarea tuturor nodurilor dintr-un arbore**. Deoarece arborele este o structură neliniară, nu exista o unică parcurgere

Doua tipuri de parcurgere:

- **Parcurgere în adancime**
- **Parcurgere pe nivel**

**Parcurgerea nodurilor in arbori binari**

- Parcurgere în preordine
- Parcurgere în inordine
- Parcurgere în postordine

# Parcurgere în adancime

**Algoritm Parcurge_in_Adancime(arbore):**

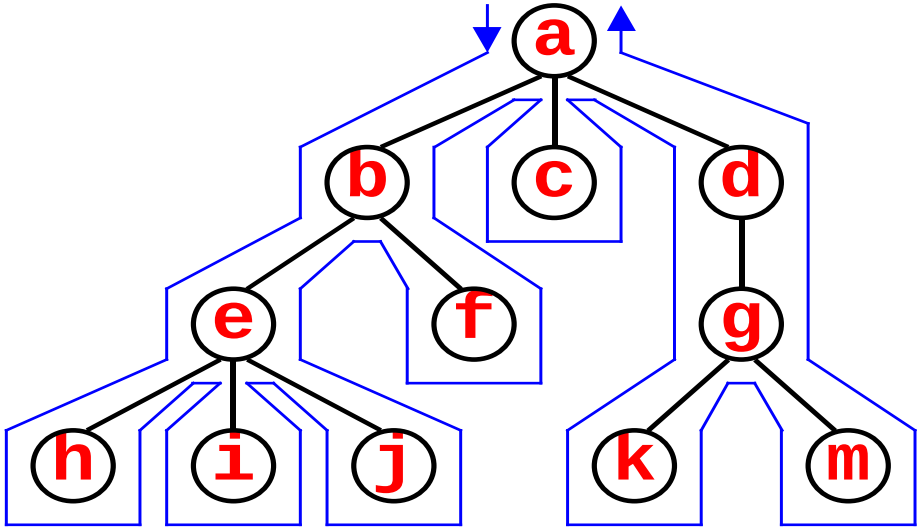
**daca** arbore vid **atunci** revenire;

prelucreaza informatia din radacina;

**pentru** fiecare subarbore **repeta**

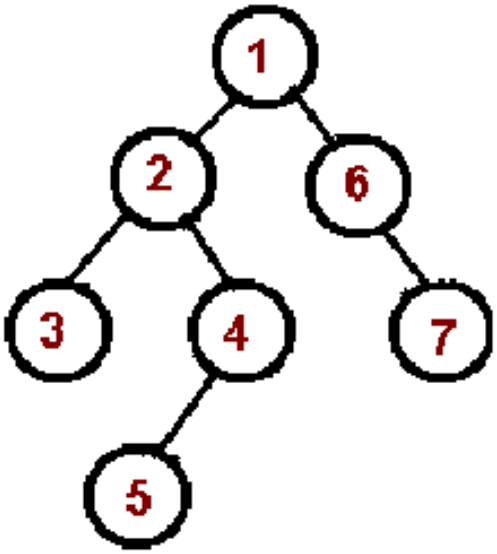
    Parcurge_in_Adancime(subarbore);

**sfarsit**



# Parcurgerea nodurilor in arbori binari

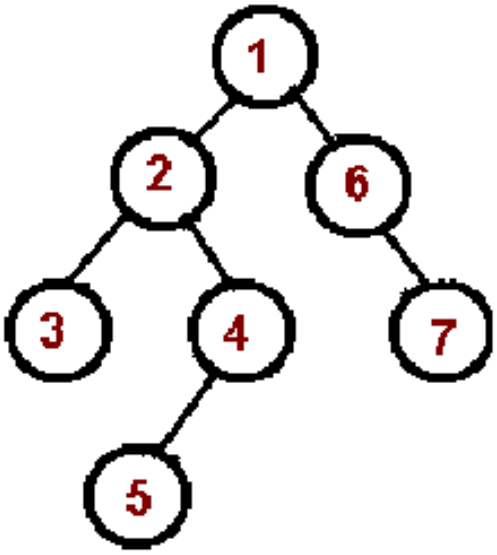
- **Pre**ordine: Radacina, Stanga, Dreapta (RSD)
- **In**ordine: Stanga, Radacina, Dreapta (SRD)
- **Post**ordine: Stanga, Dreapta, Radacina (SDR)



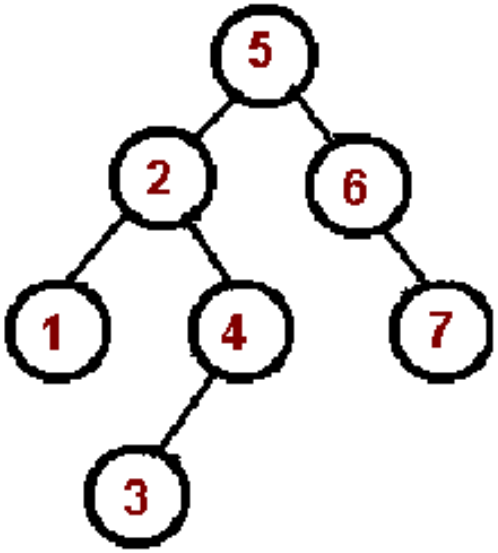

**Preordine**

# Parcurgerea în adancime arbori binari

- **Pre**ordine: Radacina, Stanga, Dreapta (RSD)
- **In**ordine: Stanga, Radacina, Dreapta (SRD)
- **Post**ordine: Stanga, Dreapta, Radacina (SDR)



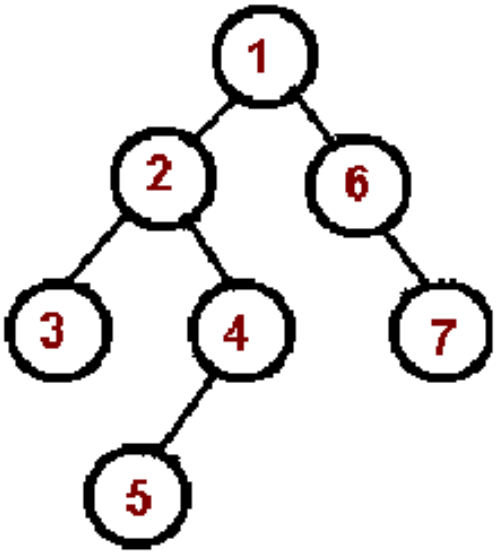

**Preordine**



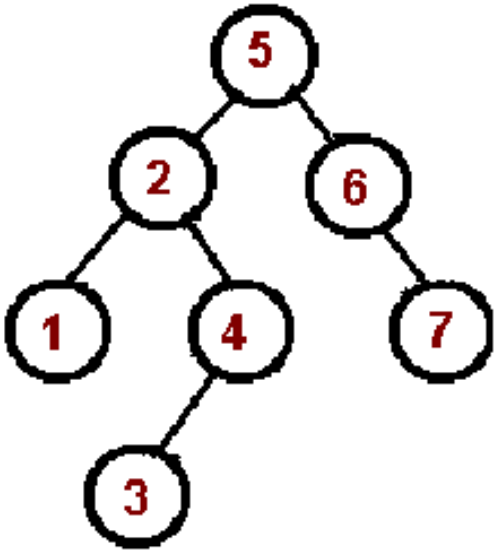

**Inordine**

# Parcurgerea în adancime arbori binari

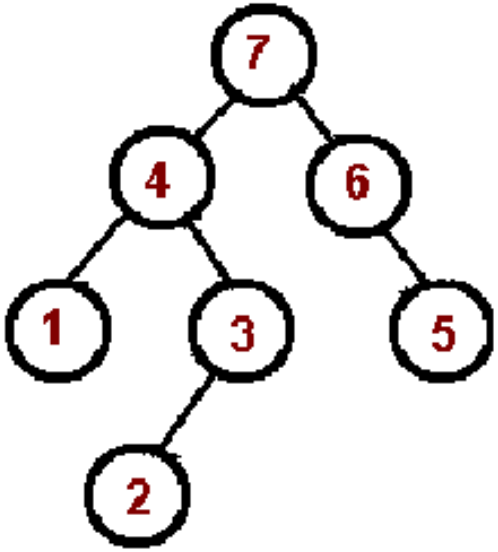
- **Pre**ordine: Radacina, Stanga, Dreapta (RSD)
- **In**ordine: Stanga, Radacina, Dreapta (SRD)
- **Post**ordine: Stanga, Dreapta, Radacina (SDR)




**Preordine**




**Inordine**




**Postordine**

# Parcurgerea în preordine (RSD)

**Algoritm Parcurgere_Preordine(arbore)**

**daca** arborele este vid **atunci revenire**
prelucreaza informatia din radacina
Parcurgere_Preordine(subarborele stang)
Parcurgere_Preordine(subarborele drept)
**sfarsit**

# Parcurgerea în preordine (RSD)

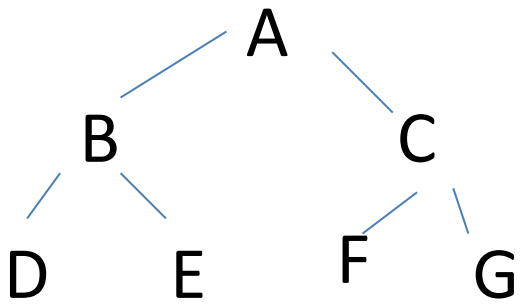
```
void vizit(TLink t)
{ printf("%d \n", t->elem); }

void Preorder(TLink t)/* preordine, RSD */
{ if(t==NULL) return;
  vizit(t);
  Preorder(t->lt);
  Preorder(t->rt);
}
```

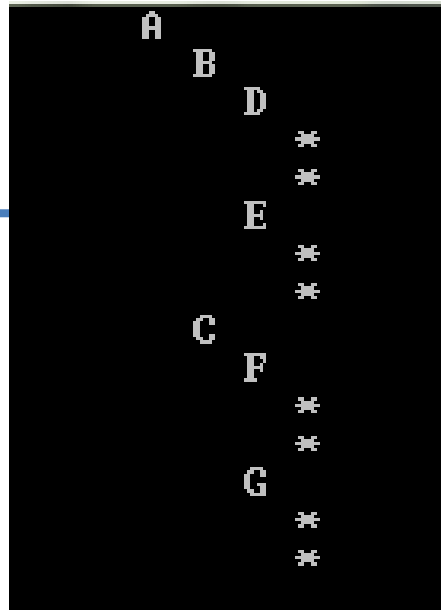
# Parcurgerea în preordine (RSD)

```
void vizit(TLink t)
{ printf("%d \n", t->elem); }
```

```
void traverse(TLink t, void (*vizit)(TLink))
{ if(t==NULL) return;
  (*vizit)(t);
  traverse(t->lt, vizit);
  traverse(t->rt, vizit);
}
```


A
B
C
D
E
F
G

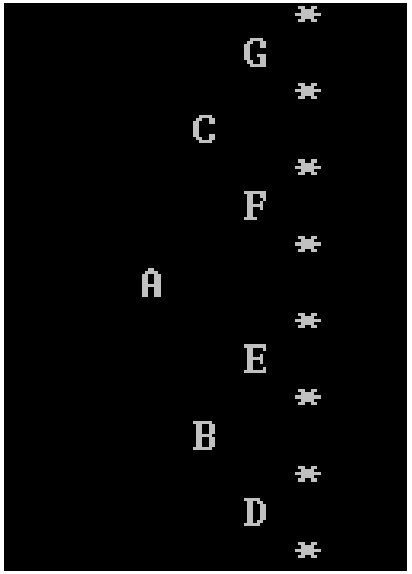
# Afişare arbore binar




```
typedef char Item;
void printnode(char a, int h)
{   int i;
    for(i=0; i<h; i++) printf("  ");
    printf("%c\n", a);
}
void show(TLink t, int h)
{   if(t==NULL) {printnode('*', h); return;}
     printnode(t->elem, h);
     show(t->lt, h+1);
     show(t->rt, h+1);
 }
```

# Afişare arbore binar

```
typedef char Item;
void printnode(char a, int h)
{   int i;
    for(i=0; i<h; i++) printf("  ");
    printf("%c\n", a);
}
void show(TLink t, int h)
{   if(t==NULL) {printnode('*', h); return;}
    show(t->rt, h+1);
    printnode(t->elem, h);
    show(t->lt, h+1);
}
```



# Parcurgerea în adancime nerecursiv a.b.

```
Algoritm Parcurge_in_Adancime(arbore):
    daca arbore vid atunci revenire;
    initializeaza stiva de arbori (pointer la nod arbore)
    Push(stiva, rad_arbore)
    cat timp stiva nu este vida repeta
    {     Pop(stiva, arbore)
          prelucreaza informatia din radacina arbore
          daca subarbore drept nu este vid
          atunci Push(stiva, rad_sdr)
          daca subarbore stang nu este vid
          atunci Push(stiva,rad_sstg)
          }
sfarsit
```

# Parcurgerea în adancime nerecursiv

```
typedef char Item;
typedef struct node *TLink;
typedef struct node {
        Item elem;
        TLink lt, rt;} TreeNode;

typedef struct cel {
        TLink   elem;
        struct  cel  *next;} StackCel, *TStack;
```

# Parcurgere în adancime nerecursiv

```
Int EmptyStack(TStack s)
{ return s==NULL;}
```

Vezi cursul 4

```
TStack Push(TStack s,TLink a)
{TStack t;
    t=(TStack)malloc(sizeof(StackCel));
    if(t==NULL)
     {    printf("memorie insuficienta \n");
          return NULL;}
    t->elem = a; t->next = s;
    return t;
}
```

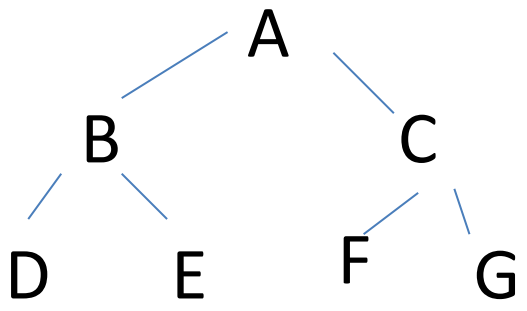
# Parcurgere în adancime nerecursiv

```
TStack Pop(TStack s,TLink *a)
{ TStack t;
  if(s == NULL)
     {printf("stiva vida \n"); return NULL;}
  *a = s->elem;
  t = s; s = s->next; free(t);
  return s;
}
```

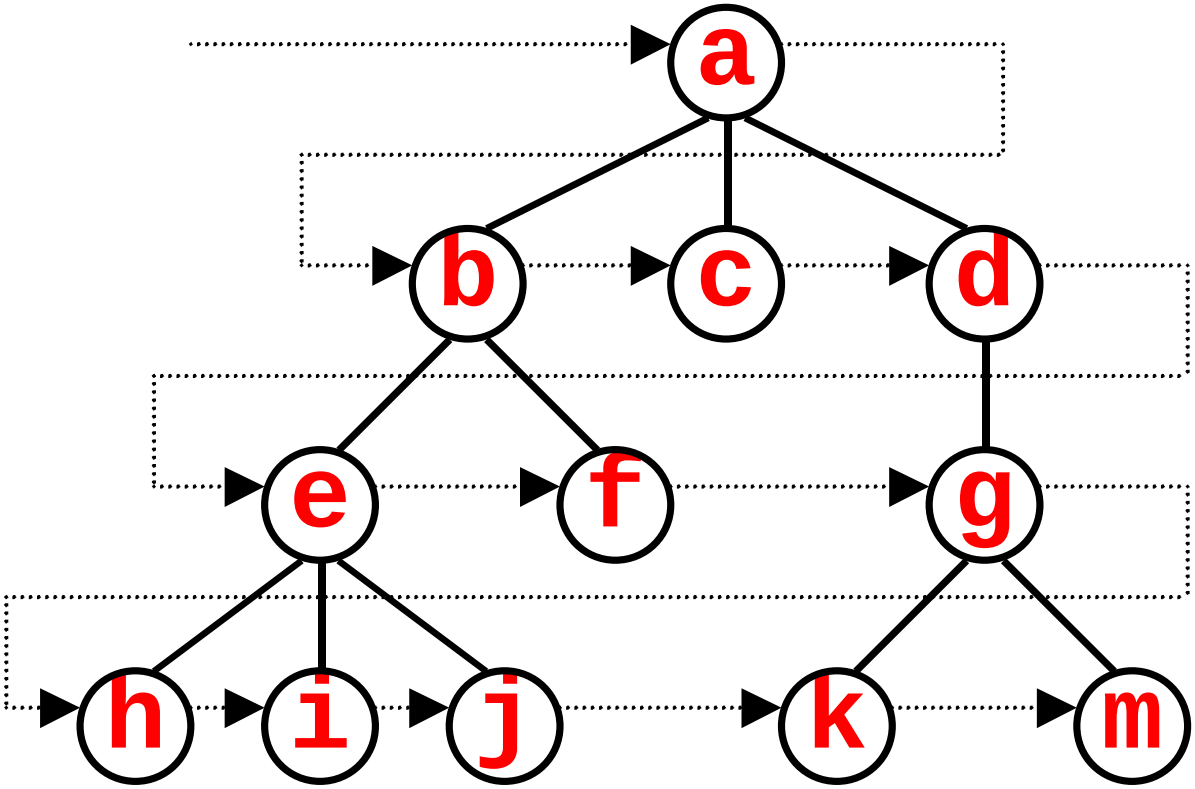
Vezi cursul 4

# Parcurgere în adancime nerecursiv

```
void traverse_A(TLink tree) /* adancime */
{TStack s; TLink t;
  if( tree == NULL) {printf("arbore vid \n");
                     return;}
  s = InitStack();
  s = Push(s,tree);
  while(!EmptyStack(s))
  {
      s = Pop(s,&t);
      printf("%c  ", t->elem);
      if(t->rt != NULL) s = Push(s,t->rt);
      if(t->lt != NULL) s = Push(s,t->lt);
  }}
```



# Parcurgere în lăţime / pe nivel



# Parcurgerea pe nivel a.b.

```
Algoritm Parcurge_pe_Nivel(arbore):
    daca arbore vid atunci revenire;
    initializeaza coada de arbori (pointer la nod arbore)
    Enqueue(coada, rad_arbore)
    cat timp coada nu este vida repeta
    {     Dequeue(coada, arbore)
          prelucreaza informatia din radacina arbore
          daca subarbore stang nu este vid
          atunci Enqueue(coada,rad_sstg)
          daca subarbore drept nu este vid
          atunci Enqueue(coada, rad_sdr)
}
sfarsit
```

# Parcurgere pe nivel

```
typedef char Item;
typedef struct node *TLink;
typedef struct node {
        Item elem;
        TLink lt, rt;} TreeNode;

typedef struct cel {
          TLink  elem;
          struct cel *next;} QueueCel, *TQueue;

TQueue front, rear;
```

# Parcurgere pe nivel

```
void InitQueue()
{ front = rear = NULL;}
Int EmptyQueue()
{ return front == NULL;}
void Enqueue(TLink a)
{TQueue q;
   q = (TQueue)malloc(sizeof(QueueCel));
   if(q==NULL){printf("not enough memory\n"); return;}
    q->elem = a; q->next = NULL;
    if(front == NULL && rear == NULL)
        { front = rear = q; return; }
    rear->next = q;
    rear = q;
}
```

Vezi cursul 4

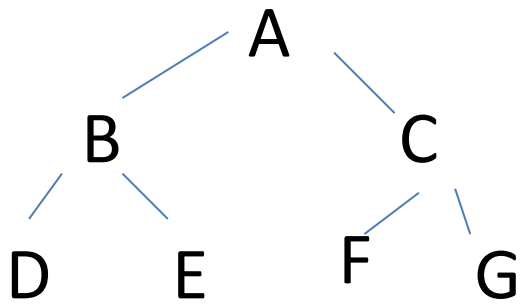
# Parcurgere pe nivel

```
TLink Dequeue()
{TQueue q = front; TLink t;
    if(front == NULL)
     { printf("empty queue\n"); return NULL;}
    t = front->elem;
    if(front == rear)front = rear = NULL;
    else front = front->next;
    free(q);
    return t;
}
```

Vezi cursul 4

# Parcurgere pe nivel

```
void traverse_N(TLink tree) /* nivel*/
{TLink t;
  if(tree == NULL) {printf("arbore vid \n");
                    return;}
  InitQueue();
  Enqueue(tree);
  while(!EmptyQueue())
  {   t=Dequeue();
      printf("%c  ",t->elem);
      if(t->lt != NULL) Enqueue(t->lt);
      if(t->rt != NULL) Enqueue(t->rt);
  }
}
```



# Parcurgerea pe nivel pt arbori N-ari

**Algoritm Parcurge_pe_Nivel(arbore):**

**daca** arbore vid **atunci** revenire;

initializeaza coada de arbori (pointer la nod arbore)

Enqueue(coada, rad_arbore)

**cat timp** coada nu este vida **repeta**

{ Dequeue(coada, arbore)

prelucreaza informatia din radacina arbore

**pentru** fiecare subarbore **repeta**

**daca** subarbore nu este vid **atunci**

Enqueue(coada,rad_subarbore)

}

**sfarsit**

# Parcurgerea în adâncime pt arbori N-ari

**Algoritm Parcurge_in_Adancime(arbore):**

**daca** arbore vid **atunci** revenire;
initializeaza stiva de arbori (pointer la nod arbore)
Push(stiva, rad_arbore)
**cat timp** stiva nu este vida **repeta**
{ Pop(stiva, arbore)
prelucreaza informatia din radacina arbore
**pentru** fiecare subarbore **repeta**
**daca** subarbore nu este vid **atunci**
Push(stiva,rad_subarbore)

}
**sfarsit**

# 5.5 Arbori binari expresie aritmetică

**Rădăcină Stânga Dreapta - în preordine**

genereaza **notatia prefixata** a unei expresii

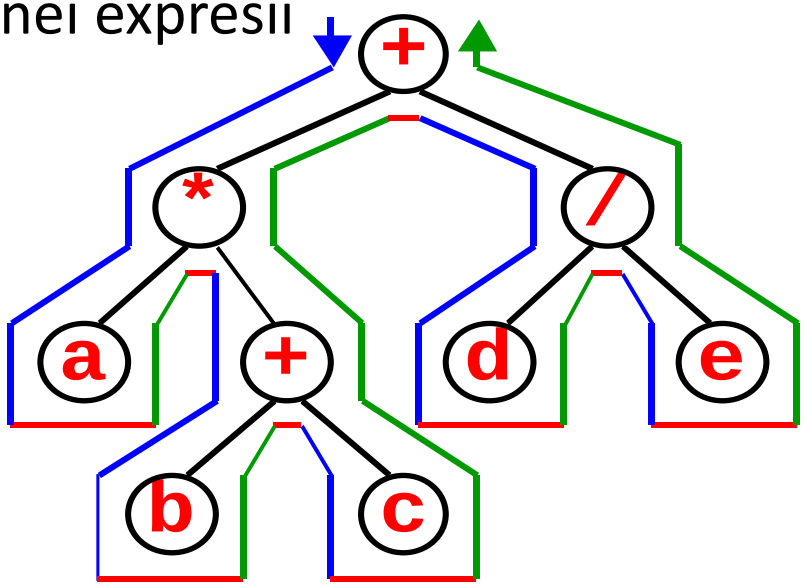
**Stânga Rădăcină Dreapta- în inordine**

genereaza **notatia infixata** a unei expresii

**Stânga Dreapta Rădăcină - în postordine**

genereaza **notatia postfixata** a unei expresii

**Arbore expresie**
**Noduri interne:**
**operatori binari**
**Frunze: operanzi**



# 6. Reprezentarea arborilor binari prin vectori

- Radacina – indice ***i = 1***
- Nodul cu indice ***i*** are subarborii la pozitiile ***2*i*** si ***2*i+1***
- Arbore de inaltimea ***h*** are $\mathbf{2^{(h+1)} - 1}$ celule
- Daca cunosc indexul unui nod ***i***, obtin indexul radacinii

***i div 2***