

Skript zur Vorlesung Algebra

Basierend auf der Vorlesung von

Prof. Dr. Roman Sauer

Wintersemester 2023/24

Inhaltsverzeichnis

0.1	Motivation	3
0.2	Grundlegende Definitionen aus EAZ und LA	4
0.3	Grundlegende Resultate aus EAZ und LA	4
1	Einfache & Auflösbare Gruppen	6
1.1	Einfache Gruppen	6
1.2	Normal- und Kompositionsreihen	7
1.3	Auflösbare Gruppen	9
2	Körpererweiterungen	12
2.1	Irreduzible Polynome	12
2.2	Körpererweiterungen	13
2.3	Algebraische Körpererweiterungen	15
2.4	\bar{K} -Homomorphismen	17
2.5	Zerfallskörper	19
2.6	Serperable Erweiterungen	20
2.7	Endliche Körper	23
3	Galoisttheorie	26
3.1	Hauptsatz der Galoistheorie	26
3.2	Kreisteilungskörper und Einheitswurzeln	30
3.3	Charaktere und Normalbasen	32
3.4	Auflösbarkeit von Gleichungen	35
3.5	Spur und Norm	38
3.6	Anwendungen der Galoistheorie	41
3.7	Transzendenz von e und π	41

4	Bewertungstheorie	43
4.1	Beträge	43
4.2	Vervollständigungen	48
4.3	Bewertungen und Bewertungsringe	50
5	Ringe und Moduln	56
5.1	Grundlagen der Modultheorie	56
5.2	Bilineare Abbildungen und Tensorprodukte	60
5.3	Neothersche Moduln und Ring	67
6	Ganze Ringerweiterungen und Dedekindringe	70
6.1	Ganze Ringerweiterungen	70

Einführung

§0.1 Motivation

TODO

- Für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + bx + c = 0$, $b, c \in \mathbb{C}$, sind die einzigen Lösungen explizit gegeben durch

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \quad (1)$$

Erstmals systematisch behandelt wurden solche Gleichungen von al Khwarizmi (~ 800 n. Ch.).

- Für kubische Gleichungen der Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C} \quad (2)$$

haben Tartaglia und Cardano im 16. Jh. eine explizite Lösungsformel aufgestellt:

- Sei o.B.d.A. $x = y - \frac{a}{3}$ für $y \in \mathbb{C}$. Substituiere dies in eq. (2), so dass jetzt mit $p := b - \frac{a^2}{3} \in \mathbb{C}$, $q := c + \frac{2a^3 - 9ba}{27} \in \mathbb{C}$ zu lösen ist:

$$y^3 + py + q \quad (3)$$

- Substituiere nun $y = u + v$, so dass $y^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvy$. Dies ähnelt der Gleichung eq. (3), wenn $u^3 + v^3 = -q$ und $3uv = -p$ gesetzt wird. Versuche nun also,

$$u^3 + v^3 = -q \quad (4)$$

$$3uv = -p \Leftrightarrow u^3 v^3 = \frac{-p^3}{27} \quad (5)$$

zu lösen. Aus eq. (4) ergibt sich, dass u^3, v^3 die quadratische Gleichung $z^2 + qz - \frac{p^3}{27}$ lösen. Es kann nun also eq. (1) verwendet werden - man erhält die sogenannte : Beachte beim Ziehen der 3. Wurzel in der Formel von Cardano explizit, dass eq. (5) erfüllt bleibt.

Formel
von Car-
dano

- Ähnlich funktioniert das Lösen von polynomiellen Gleichungen 4. Grades mittels Radikalen.
- Für Gleichungen höheren Grades existiert keine explizite Lösungsformel mehr:

Satz 0.1 (Abel-Ruffini, 1824). *Polynomielle Gleichungen vom Grad ≥ 5 sind im Allgemeinen nicht durch Radikale lösbar.*

Kurz, nachdem dieser Satz bewiesen wurde, kam die Galois-Theorie auf, welche die algebraischen Überlegungen in Gruppentheorie überführt.

Zunächst finden sich im Folgenden noch Wiederholungen einiger gruppen- und zahlentheoretischer Begriffe aus der Linearen Algebra [LA] und Einführung in Algebra und Zahlentheorie [EAZ], die im Verlauf des Skripts eine Rolle spielen.

§0.2 Grundlegende Definitionen aus EAZ und LA

Definition 0.2 (Radikal). **TODO**

Definition 0.3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Die (Links-)Nebenklasse von $g \in G$ zu H in G ist die Menge

$$gH := \{gh \mid h \in H\}$$

Der Quotient von H in G ist die Menge der Linksnebenklassen:

$$G/H := \{gH \mid g \in G\}$$

Die kanonische Projektion von G auf G/H ist die Abbildung $\pi : G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$.

Definition 0.4 (Normalteiler, Quotientengruppe). Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. H heißt Normalteiler, wenn H konjugationsinvariant ist, also

$$\forall g \in G. gHg^{-1} = H$$

In diesem Fall schreibt man auch $H \trianglelefteq G$. Genau dann, wenn $H \trianglelefteq G$ gilt, ist die Operation $\cdot : G/H \rightarrow G/H$ mit $gH \cdot hH := (gh)H$ wohldefiniert und macht $(G/H, \cdot)$ zu einer Gruppe (der sogenannten "Quotientengruppe" von H in G). Weiter ist die kanonische Projektion von G auf H dann ein Gruppenhomomorphismus.

Beispiel 0.5 (Alternierende Gruppe A_n). Sei $n \in \mathbb{N}$, $[n] := \{1, \dots, n\}$ und $S_n := \{\pi : [n] \rightarrow [n] \mid f \text{ bijektiv}\}$ die symmetrische Gruppe auf $[n]$. Sei weiter $I(\pi) := \{(i, j) \in [n] \times [n] \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$, $\pi \in S_n$ die Menge der Inversionen und $\text{sgn}(\pi) := (-1)^{|I(\pi)|}$ die Signumsfunktion. Die alternierende Gruppe $A_n := \{\pi \in S_n \mid \text{sgn}(\pi) = 1\}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Normalteiler der symmetrischen Gruppe, also $A_n \trianglelefteq S_n$. Gleichheit gilt nur für $n = 1$. Für alle $n \geq 2$ gilt $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die kanonische Projektion $S_n \rightarrow S_n/A_n$ stimmt mit der Signumsabbildung überein.

§0.3 Grundlegende Resultate aus EAZ und LA

Lemma 0.6 (Chinesischer Restsatz). **TODO**

Lemma 0.7. Die alternierende Gruppe A_n wird für alle $n \geq 3$ von 3-Zykeln erzeugt.

Beweis. **TODO** (Für den Beweis siehe bspw. Satz 2.5.10 im EAZ-Skript von Dr. Stefan Kühnlein.) \square

Lemma 0.8. *Sei $(G, *)$ eine abelsche Gruppe. Dann ist jede Untergruppe $H \leq G$ bereits ein Normalteiler von G .*

Beweis. Sei $H \subseteq G$ und $g \in G$. Dann ist wegen der Kommutativität $gHg^{-1} = gg^{-1}H = H$, also ist H konjugationsinvariant. Gilt zudem $H \leq G$, so folgt die Behauptung. \square

Lemma 0.9. *Sei $(G, *)$ eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$. Dann ist $U * N := \{u * n \mid u \in U, n \in N\} = N * U$ eine Untergruppe von G .*

Beweis. **TODO** \square

Lemma 0.10. *Seien $(G, *)$, (H, \cdot) Gruppen, $U \leq H$, $N \trianglelefteq U$ und $\phi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\phi^{-1}(N) \trianglelefteq \phi^{-1}(U)$. Ist ϕ zusätzlich surjektiv, so gilt Gleichheit gdw. $U = N$.*

Beweis. Die Untergruppenrelation ist klar. Wir zeigen also noch, dass das Urbild $\phi^{-1}(N)$ konjugationsinvariant ist. Sei dafür $g \in G$. Dann ist $\phi(g\phi^{-1}(N)g^{-1}) = \phi(g)\phi^{-1}(N)\phi(g)^{-1} = N$, also $g\phi^{-1}(N)g^{-1} \subseteq \phi^{-1}(N)$. Außerdem ist für $a \in \phi^{-1}(N)$: $\phi(g^{-1}ag) = \phi(g)^{-1}\phi(a)\phi(g) \in \phi(g)^{-1}N\phi(g) = N$, also $g^{-1}ag \in \phi^{-1}(N)$ und damit $a = gg^{-1}agg^{-1} \in g\phi^{-1}(N)g^{-1}$, was die andere Inklusionsrichtung und damit die Konjugationsinvarianz zeigt. Ist zudem ϕ surjektiv, so gilt $N \neq U \Rightarrow \exists u \in U. u \notin N$. Ein solches $u \in U$ besitzt also kein Urbild in $\phi^{-1}(N)$, jedoch ein Urbild in $\phi^{-1}(U)$, da ϕ ja surjektiv ist. Damit muss dann also gelten $\phi^{-1}(N) \subseteq \phi^{-1}(U) \setminus \{\phi^{-1}(u)\}$ und die Mengen sind nicht gleich. \square

Lemma 0.11. *Seien $(G, *)$, (H, \cdot) Gruppen, $N \trianglelefteq G$ und $\phi : G \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dann ist auch $\phi(N) \trianglelefteq H$.*

Beweis. **TODO** \square

1 Einfache & Auflösbare Gruppen

VL vom 26.10.2023:

Erinnerung 1.0. Ein Normalteiler N einer Gruppe $(G, *)$ ist eine Untergruppe mit der Eigenschaft $\forall g \in G : gNg^{-1} = N$. Man definiert auf den Nebenklassen $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ eine Verknüpfung $g_1N \cdot g_2N = g_1g_2N$, die aus G/N eine Gruppe macht. Weiter ist $G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$ ein Homomorphismus. Notation $N \trianglelefteq G$.

Z.B. Die alternierende Gruppe A_n ist ein Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_3 .

Ansatz: Verstehe eine Gruppe G , indem man Normalteiler $\{e\} \neq N \triangleleft G$ und dann G/N studiert.

§1.1 Einfache Gruppen

Definition 1.1 (Einfache Gruppe). Eine Gruppe $(G, *)$ heißt *einfach*, wenn $G \neq \{1\}$ und die trivialen Normalteiler $\{1\}, G$ die einzigen Normalteiler von G sind.

Beispiel 1.2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist einfach gdw. n prim ist. Andernfalls folgt mit dem chinesischen Restsatz für alle $d \mid n$, dass $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Wir verfolgen das Ziel, Gruppen zu verstehen, indem wir sie in einfache Normalteiler zerlegen und diese sowie deren Quotientengruppen separat untersuchen, welche hoffentlich eine simplere Struktur haben. Für endliche Gruppen haben die nichttrivialen Normalteiler bspw. echt kleinere Kardinalität.

Satz 1.3 (A_5). Die alternierende Gruppe A_n ist einfach für $n \geq 5$.

Beweis. Wir wissen, dass A_n von 3-Zykeln erzeugt wird (lemma 0.7). Weiterhin sind alle 3-Zykel in A_n konjugiert zueinander, d.h. für jeden 3-Zykel $\sigma \in A_n$ existiert $\tau \in A_n$ (nicht unbedingt ein 3-Zykel) mit $\tau\sigma\tau^{-1} = (1\ 2\ 3)^1$. Sei $N \trianglelefteq A_n$ ein Normalteiler mit $N \neq \{1\}$. z.z. $N = A$. Das erreichen wir indem wir zeigen, dass N enthält einen 3-Zykel, da alle 3-Zyklen zueinander konjugiert sind und A_n erzeugen, wodurch $N = A_n$ gelten müsste. Wähle $\sigma \in N \setminus \{1\}$:

Fall 1: σ enthält einen Zyklus der Länge ≥ 4 O.B.d.A. $\sigma = (1\ 2 \dots r)\rho, \forall i \in \{1, 2, 3\} : \rho(i) = i$. Dann $\sigma^{-1}(1\ 3\ 2)\sigma(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ r) \in N$.

Fall 2: σ hat als längsten Zykel einen 3-Zykel (aber ist keiner) O.B.d.A. $\sigma = (1\ 2\ 3)\rho$ mit $\forall i \in \{1, 2, 3\} : \rho(i) = i$ und $\rho(4) \neq 4$. dann besitzt $N \ni \sigma^{-1}(2\ 3\ 4)\sigma(2\ 4\ 3) = (1\ 2\ 4\ 3 \dots) (\Rightarrow \text{Fall 1})$

¹Es gibt $\tau_0 \in S_n$ mit $\tau_0\sigma\tau_0^{-1} = (1\ 2\ 3)$. Falls $\tau_0 \in A_n$ ✓, sonst betrachte $\tau = (4\ 5)\tau_0$: $\tau\sigma\tau^{-1} = (4\ 5)\tau_0\sigma\tau_0^{-1} = (4\ 5)(1\ 2\ 3)(5\ 4) = (4\ 5)(5\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)$

Fall 3: σ besteht nur aus Transpositionen (aber gerade Anzahl) O.B.d.A. $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)\rho$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\} : \rho(i) = i$. Dann ist $\sigma^{-1}(1\ 3\ 2)\sigma(1\ 2\ 3) = (1\ 4)(2\ 3) \in N$. Weiter gilt: Alle Elemente in A_n von diesem Zykeltyp sind in A_n zueinander konjugiert (vgl. oben mit $\tau = (1\ 2)\tau_0$). Also liegt auch $(1\ 2)(3\ 4)(2\ 5)(3\ 4) = (1\ 2\ 5) \in N \Rightarrow$ Fall 2

□

§1.2 Normal- und Kompositionsreihen

Definition 1.4 (Normalreihe, Kompositionsreihe). Sei G eine Gruppe. Eine *Normalreihe* ist eine aufsteigende Folge von Untergruppen $\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ sodass G_i normal in G_{i+1} ist. Die Quotienten G_{i+1}/G_i heißen *Faktoren* der Reihe \mathcal{G} .

Man sagt, dass eine Normalreihe \mathcal{H} von G eine Normalreihe \mathcal{G} *verfeinert*, wenn \mathcal{H} aus \mathcal{G} durch hinzufügen von Termen hervorgeht.

Man sagt, dass \mathcal{G} und \mathcal{H} äquivalent sind, wenn sie die gleiche Länge haben und es eine Permutation $\sigma \in S_n$ gibt mit $H_{i+1}/H_i \cong G_{\sigma(i)+1}/G_{\sigma(i)}$.

Eine Normalreihe, die keine echte Verfeinerung besitzt, heißt *Kompositionsreihe*.

VL vom 27.10.2023:

Beispiel 1.5 (Kompositionsreihen von $(G := (\mathbb{Z}, +))$). Alle Untergruppen von G sind Normalteiler, da es sich um eine abelsche Gruppe handelt (Lemma 0.8). Weiterhin haben alle Untergruppen von G die Form $n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mathcal{G} : \{0\} = G_0 \triangleleft n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} = G$$

eine Normalreihe in G mit den Faktoren

$$G_1/G_0 = \{\{k\} \mid k \in n\mathbb{Z}\} \cong n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}, \quad G/G_1 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

G besitzt allerdings keine Kompositionsreihe, denn für jede Normalreihe

$$\{0\} \triangleleft n\mathbb{Z} \triangleleft \dots \triangleleft \mathbb{Z} = G$$

ist für alle $1 < k \in \mathbb{N}$ eine echte Verfeinerung gegeben durch

$$\{0\} \triangleleft (kn)\mathbb{Z} \triangleleft n\mathbb{Z} \triangleleft \dots \triangleleft \mathbb{Z} = G$$

wobei $n\mathbb{Z}/(kn)\mathbb{Z} \cong k\mathbb{Z}$.

Satz 1.6. Es gelten die folgenden Charakterisierungen von Kompositionsreihen:

- (a) Eine Normalreihe ist genau dann eine Kompositionsreihe, wenn alle Faktoren einfach sind.
- (b) Jede endliche Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe.

Beweis. Zu (a):

\Rightarrow Der Beweis erfolgt durch Kontraposition. Sei dazu

$$\mathcal{G} : \{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_i \triangleleft \dots \triangleleft G$$

so dass G_i/G_{i-1} nicht einfach ist. Sei weiterhin $\pi_i : G_i \rightarrow G_i/G_{i-1}$ die kanonische Projektion. Per Definition existiert dann ein nichttrivialer Normalteiler N von G_i/G_{i-1} , also $(\pi_i(\{G_{i-1}\})) = \{1_{G_i/G_{i-1}}\} \neq N \triangleleft G_i/G_{i-1}$. Dann ist mit lemma 0.10 (beachte, dass die kanon. Projektion surjektiv ist und $\pi^{-1}(\{G_{i-1}\}) = G_{i-1}$, $\pi^{-1}(G_i/G_{i-1}) = G_i$)

$$\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_{i-1} \triangleleft \pi_i^{-1}(N) \triangleleft G_i \triangleleft \dots \triangleleft G$$

eine echte Verfeinerung von \mathcal{G} , also ist \mathcal{G} keine Kompositionsreihe.

\Leftarrow Sei \mathcal{G} eine Normalreihe mit einfachen Faktoren und \mathcal{H} eine Verfeinerung. Z.z. $\mathcal{H} = \mathcal{G}$, d.h. $G_i = H_i$ für alle i . Beiweis durch Induktion.

IA $i = 0$: $G_0 = \{e\} = H_0$ ✓

IS: Es existiert $j > i$ mit $H_j = G_{i+1}$. $G_i \subseteq H_{j-1} \triangleleft H_j = G_{i+1} \xrightarrow{\pi_i} G_{i+1}/G_i$ einfach. Da surjektive Homomorphismen Normalteiler erhalten gilt $\pi_i(H_{j-1}) \subseteq G_{i+1}/G_i$. Wegen Einfachheit $\pi_i(H_j) = \{e\}$. $\Rightarrow H_{j-1} = G_i = H_i$.

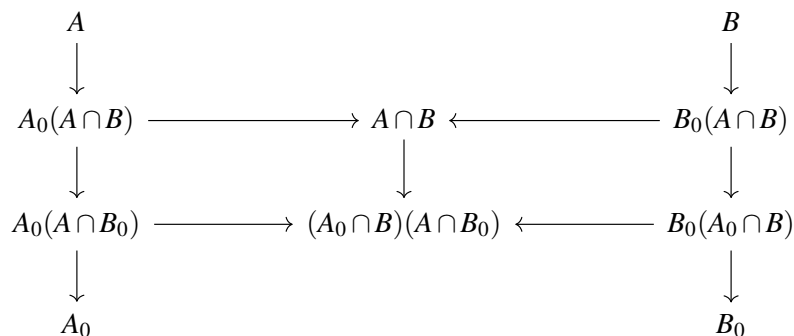
Zu (b): Induktion über die Mächtigkeit der Gruppe $|G|$. IA $|G| = 1$: $G = \{e\}$ ✓. IS: Wähle maximalen Normalteiler $N \triangleleft G$. Dann ist G/N einfach. Wende nun IA auf N (um die Kette weiter aufzubauen) an. \Rightarrow Es entsteht eine Reihe mit einfachen Faktoren, also eine Kompositionsreihe. \square

Erinnerung: Sei G Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$, dann ist $UN = NU$ Untergruppe von G .

Lemma 1.7 (Schmetterlingslemma von Zassenhaus). Sei G Gruppe, $A, B < G$ Untergruppen und $A_0 \trianglelefteq A$, $B_0 \trianglelefteq B$. Dann

$$(a) \quad A_0(A \cap B_0) \trianglelefteq A_0(A \cap B) \text{ und } B_0(A_0 \cap B) \trianglelefteq B_0(A \cap B)$$

$$(b) \quad \frac{A_0(A \cap B)}{A_0(A \cap B_0)} \cong \frac{(A \cap B)}{(A_0 \cap B)(A \cap B_0)} \cong \frac{B_0(A \cap B)}{B_0(A_0 \cap B)}$$



Beweis. **TODO**

□

Satz 1.8. Sind \mathcal{G}, \mathcal{H} Normalreihen von G , dann gibt es Verfeinerung $\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{H}}$ von \mathcal{G}, \mathcal{H} , sodass sie äquivalent sind.

Beweis. **TODO**

□

Satz 1.9 (Jordan Hölder). Je zwei Kompositionsreihen einer Gruppe sind äquivalent.

Beweis. Kompositionsreihen haben keine Verfeinerung & 1.8

□

Bemerkung. Gleiche Kompositionsreihen \nRightarrow gleiche Gruppe.

Beispiel.

- $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ hat Kompositionsreihen $\{0\} \triangleleft (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}) \triangleleft \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ und $\{0\} \triangleleft (\{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \triangleleft \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$, aber immer die gleichen Faktoren in unterschiedlicher Reihenfolge.
- Zu $G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ und $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ haben die Kompositionsreihen $\mathcal{G} : \{0\} \triangleleft 3\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \triangleleft G$ und $\mathcal{H} : \{0\} \triangleleft \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \triangleleft H$ die gleichen Faktoren (zweimal $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und damit äquivalent, aber $G \neq H$).

§1.3 Auflösbare Gruppen

Definition 1.10. Eine Gruppe $(G, *)$ heißt auflösbar, wenn sie eine Normalreihe besitzt, deren Faktoren alle abelsch sind.

VL vom 02.11.2023:

Beispiel 1.11. a) Insbesondere ist jede abelsche Gruppe auflösbar: Für die triviale Gruppe $\{1\}$ existieren keine Faktoren, ansonsten setze

$$G_0 := \{1\} \triangleleft G_1 := G$$

b) Sei weiterhin \mathbb{K} ein Körper. Die Matrixgruppe

$$(B = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K}) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}, \cdot)$$

ist nicht abelsch, aber dennoch auflösbar. Sei dafür

$$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

und

$$\phi : B \rightarrow \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^*, \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$$

Dann ist $N = \ker(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{K} \right\} \cong (\mathbb{K}, +)$ Somit ist

$$\{id\} \triangleleft N \triangleleft B$$

eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. (Geht auch für $GL_n(K)$, Beweis komplizierter)

c) (Semidirektes Produkt von Gruppen) **TODO**

Satz 1.12 (Untergruppen und Faktorgruppen auflösbarer Gruppen). *Untergruppen und Faktorgruppen auflösbarer Gruppen sind auflösbar.*

Beweis. Sei G auflösbar mit abelscher Normalreihe (abelsche Faktoren)

$$G_0 := \{1\} \triangleleft \dots \triangleleft G_n := G$$

Sei $H < G$ Untergruppe. Dann ist

$$H_0 := \{1\} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n := H$$

mit $H_i := G_i \cap H$ eine abelsche Normalreihe von H (nach Streichen gleicher Elemente):

$$H_{i+1}/H_i < G_{i+1}/G_i$$

□

Satz 1.13. *Sei G eine endliche Gruppe und \mathcal{G} eine Kompositionsreihe von G . Dann ist G auflösbar gdw. jeder Faktor von \mathcal{G} zyklisch von Primzahlordnung ist.*

Beweis.

\Rightarrow Sei G auflösbar. Nach 1.6 sind dann die G_i/G_{i-1} einfach und nach theorem 1.12 auflösbar. Insbesondere existiert also eine Normalreihe von G_i/G_{i-1} . Dies impliziert, dass G_i/G_{i-1} abelsch ist, da G_i/G_{i-1} in einer solchen Normalreihe vorkommt (Begründung aus VL: da $\{1\} \triangleleft G_i/G_{i-1}$ die einzige Normalreihe ist - wird aber nicht benötigt?) G_i/G_{i-1} ist als endliche abelsche Gruppe isomorph zu

$$\mathbb{Z}/_{p_1^{\alpha_1}} \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/_{p_m^{\alpha_m}} \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 1$$

Wegen Einfachheit gilt $m = 1$ (ansonsten $\mathbb{Z}/_{p_1^{\alpha_1}} \mathbb{Z} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ nichttrivialer NT). Also $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}/_{p^{\alpha}} \mathbb{Z}$. Wieder wegen Einfachheit ist $\alpha = 1$ (ansonsten $p\mathbb{Z}/_{p^{\alpha}} \mathbb{Z}$ nichttrivialer NT).

\Leftarrow Offensichtlich.

□

Definition 1.14 (Kommutator). Sei G eine Gruppe. Für $x, y \in G$ heißt $x^{-1}y^{-1}xy = [x, y]$ *Kommutator* von x und y . Die Kommutatoruntergruppe von G ist

$$D(G) = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$$

Alternativnotation: $[G, G] := D(G)$.

Lemma 1.15 (Abelisierung). Für die Kommutatorengruppe gelten folgende Aussagen:

- Die Kommutatoruntergruppe $D(G)$ einer Gruppe G ist ein Normalteiler von G .
- Die Faktorgruppe $G^{ab} = G/D(G)$ ist abelsch und heißt Abelisierung von G .
- Ist $N \trianglelefteq G$ und G/N abelsch, dann ist $D(G) \subseteq N$ (d.h. $G/D(G) \twoheadrightarrow G/N$ ist surjektiv)

Beweis. G Gruppe, $x, y \in G$

- Es ist $g^{-1}[x, y]g = g^{-1}x^{-1}y^{-1}xyg = (g^{-1}x^{-1}g)(g^{-1}yg)(g^{-1}xg)(g^{-1}yg) = [g^{-1}xg, g^{-1}yg]$.
Somit ist $g^{-1}D(G)g = \langle [g^{-1}xg, g^{-1}yg] \mid x, y \in G \rangle = D(G)$.
- Seien $xD(G), yD(G) \in G/D(G)$. Es ist dann $xyD(G) = xy[y, x]D(G) = xyy^{-1}x^{-1}yxD(G) = yxD(G)$.
- Betrachte die kanonische Projektion $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$. Dann ist $\pi([x, y]) = \pi(x^{-1}y^{-1}xy) = \pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1}\pi(x)\pi(y) = [\pi(x), \pi(y)] = 1N \in G/N$ abelsch. Also $D(G) \subseteq N$.

□

Definition 1.16. Setze $D^0(G) = G$ und dann induktiv $D^{i+1}(G) := D(D^i(G))$. Die Reihe

$$\dots \triangleleft D^2(G) \triangleleft D^1(G) \triangleleft D^0(G) = G$$

(mit abelschen Faktoren nach dem vorhergehenden Lemma) heißt *abgeleitete Reihe* von G .

Satz 1.17. Eine Gruppe G ist auflösbar gdw. es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $D^m(G) = \{1\}$. (Dies ist nicht immer erfüllt, da es Gruppen gibt mit $D(G) = G$, so dass die abgeleitete Reihe konstant G ist.)

Beweis. " \Leftarrow ": ist klar (good one).

" \Rightarrow ": Sei G auflösbar. Dann gibt es eine abelsche Normalreihe

$$\{1\} = G_0 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

Wir zeigen induktiv über die Länge n der Normalreihe: $D^j(G) \subseteq G_{n-j}, j \in [n]_0$.

IA: $n = 0$. Klar: $D^0(G) = G = G_0 = G_n$

IS: Angenommen $D^j(G) \subseteq G_{n-j}$. Dann $D^{j+1}(G) = D(D^j(G)) \subseteq D(G_{n-j}) \stackrel{1.15}{\subseteq} G_{n-j-1}$. □

Beispiel 1.18. Sei G eine Gruppe und p eine Primzahl. Ist $|G| = p^n$, dann ist G auflösbar (und sogar nilpotent).

2 Körpererweiterungen

§2.1 Irreduzible Polynome

Definition 2.1 (Wiederholung aus EAZ). Sei K im Folgenden ein Körper. Der Polynomring $K[X]$ ist ein Hauptidealring². Das Ideal (f) ist Primideal gdw. $f = 0$ oder f irreduzibles Polynom ist, d.h. $f = gh \Rightarrow g \in K^* \vee h \in K^*$.

Lemma 2.2. Ist f irreduzibel, dann ist (f) ein maximales Ideal³.

Beweis. Angenommen $(f) \subseteq (g)$. Dann $f = hg$ für ein $h \in K[X]$ nach Definition von (g) . Dann gilt

$$\begin{cases} g \in K^* \Rightarrow (g) = K[X] \\ \text{oder} \\ h \in K^* \Rightarrow (f) = (g) \end{cases}$$

□

Satz 2.3 (Eisensteinkriterium). Sei A ein kommutativer Ring und $P \subseteq A$ ein Primideal⁴. Sei $f \in A[X]$ mit $f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i$ mit drei Eigenschaften:

- 1) $a_n \notin P$
- 2) $a_i \in P \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$
- 3) a_0 ist kein Produkt von zwei Elementen in P .

Dann lässt sich f nicht als Produkt zweier Polynome in $A[X]$ vom Grad $< n$ schreiben.

Beweis. EAZ Kühnlein

□

Definition 2.4 (Inhalt). Sei A ein Hauptidealring und $K = \text{Quot}(A)$. Sei $f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i \in A[X]$. Definiere $\tilde{c}(f) \in A$ als einen Erzeuger des Ideals $(a_0, \dots, a_n) \subset A$ (eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten/inv. Elemente in A). Die Assoziiertenklasse $c(f) = \tilde{c}(f)A^* \subset A/A^*$ [A^* invertierbare Elemente in A] heißt *Inhalt* von f .

Sei $f \in K[X]$. Wähle $a \in A \setminus \{0\}$ mit $af \in A[X]$. Dann definiere $\tilde{c}(f) = c(af)a^{-1} \in K$ und $c(f) = \tilde{c}(f)A^* \in K/A^*$ (Übung: Def. unabh. von der Wahl von a).

Beispiel. $A = \mathbb{Z}, K = \mathbb{Q}$. Dann

$$f(x) := \frac{2}{5}x^7 - 2x^3 + \frac{8}{3} = \frac{1}{15}(6x^7 - 30x^3 + 40)$$

$$\text{also } \tilde{c}(f) = \frac{\text{ggT}(6, 30, 40)}{15} = \frac{2}{15}.$$

Lemma 2.5. Seien A, K wie oben und $f, g \in K[X]$. Dann gilt

- a) Für $f \neq 0$ gilt $\tilde{c}(f)^{-1}f \in A[X]$.
- b) $c(fg) = c(f)c(g)$ (Gauß)

²nullteilerfrei, kommutativ und jedes Ideal ist Hauptideal

³Es existiert kein ("größeres") Ideal $I \neq K[X]$ mit $(f) \subset I$

⁴e.g. $A = \mathbb{Z}, P = \{pn \mid n \in \mathbb{N}\}, p$ prim

Beweis. Kühnlein EAZ □

Lemma 2.6. *A Hauptidealring, $K = \text{Quot}(A)$, $f \in A[X]$ nicht-konstantes Polynom. Falls f sich nicht als Produkt $f = gh$ mit $g, h \in A[X], \deg(g), \deg(h) < \deg(f)$ schreiben lassen, dann ist auch $f \in K[X]$ irreduzibel.*

Beweis. Ang. $f = g_0 h_0$ mit $g_0, h_0 \in K[X]$. Setze

$$g = \tilde{c}(g_0)^{-1} g_0 \in A[X]$$

und

$$h := \tilde{c}(g_0) \tilde{c}(h_0) \tilde{c}(h_0)^{-1} h_0 \stackrel{2.5b}{=} \underbrace{\tilde{c}(g_0 h_0)}_{\in A^\times} \underbrace{\tilde{c}(h_0)^{-1} h_0}_{\in A[X]} \stackrel{=f}{=}$$

für geeignetes $a \in A^*$. Somit ist auch $h \in A[X]$. Weiter ist $f = gh$. Dann ist $\deg g_0 = \deg g = \deg f$ oder $\deg h_0 = \deg h = \deg f$. □

Satz 2.7 (Eisensteinkriterium für Irreduzibilität). *Sei A ein Hauptidealring, $P \subset A$ Primideal und $f \in A[X]$. Erfüllt f die Bedingungen i), ii), iii) des Eisensteinkriteriums, dann ist f irreduzibel in $K[X]$ ($K = \text{Quot}(A)$).*

Beispiel 2.8. $A = \mathbb{Z}, K = \mathbb{Q}$.

1. $f = X^m - a$, $a \in \mathbb{Z}$. Falls $a = \prod_{1 \leq i \leq r} p_i^{\alpha_i}$ mit verschiedenen Primzahlen p_i und es ein $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $\alpha_j = 1$ gibt, dann ist f irreduzibel in $K[X]$.
2. Sei p eine Primzahl. Das Polynom $\Phi_p = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$ heißt das p -te Kreisteilungspolynom. Setze $g(X) := \Phi_p(X+1)$ (dann impliziert insb. Irreduzibilität von g auch Irreduzibilität von Φ_p ; Substitutionstrickfalls Eisensteinkriterium für Irreduzibilität nicht direkt anwendbar). Es ist $(X-1)\Phi_p(X) = X^p - 1$ und daher

$$g(X) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{1 \leq j \leq p} \binom{p}{j} X^{j-1}$$

Eisenstein für p liefert nun Irreduzibilität von g (beachte $p \mid \binom{p}{j}$ für $j = 1, \dots, p-1$). Dann Φ_p irreduzibel. Die Nullstellen von Φ_p sind gerade die primitiven p -ten Einheitswurzeln.

§2.2 Körpererweiterungen

Definition 2.9 (Körpererweiterung). Sei $(L, +, \cdot)$ ein Körper. Sei K ein Teilkörper von L , d.h. $K \subseteq L$ und $(K, +|_K, \cdot|_K)$ ist selbst Körper. Dann bezeichnet man L als Erweiterungskörper von K . Man sagt, dass L über K eine Körpererweiterung (oder auch " K -Erweiterung") ist.

$$\text{Notation: } L|K, (L-K)^T \begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array}$$

Beispiel. $\mathbb{R}|\mathbb{Q}, \mathbb{C}|\mathbb{R}, \mathbb{C}|\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}, \mathbb{C}(\mathbb{Z})|\mathbb{C}$

Definition 2.10 (Endliche Erweiterung). Sei $L|K$ eine Erweiterung. Dann ist L insb. ein K -VR. Die Dimension über K von L $\dim_K(L) =: [L : K]$ heißt der *Grad der Körpererweiterung* $L|K$. Die Erweiterung heißt *endlich*, wenn $[L : K] < \infty$.

Lemma 2.11 (Grad ist multiplikativ). Sei $L|K$ eine K -Erweiterung und sei V ein L -Vektorraum mit L -Basis $(v_i)_{i \in I} \subset V$. Sei $(e_j)_{j \in J} \subset L$ eine K -Basis von L . Dann ist $(e_j \cdot v_i)_{i \in I, j \in J}$ (VR-Multiplikation von Skalaren aus L mit Vektoren aus V) eine K -Basis von V .

Beweis. (v_i) L -Basis \Rightarrow für jedes $i \in I$ ist $\sum_j c_{ij} e_j = 0$. (c_j) K -Basis $\Rightarrow c_{ij} = 0$ für alle $i \in I, j \in J$ Erzeugendensystem: Sei $v \in V$. Dann ist $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ mit gewissen $\lambda_i \in L$. Für jedes $i \in I$ ist $\lambda_i = \sum_{j \in J} b_{ij} e_j$ mit gewissen $b_{ij} \in K$. Also $v = \sum_{i,j} b_{ij} (e_j \cdot v_i)$. \square

Lemma 2.12 (Korollar). Sind $M|L, L|K$ Körpererweiterungen, dann gilt $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$ (mit den üblichen Konventionen $\infty \cdot \infty = \infty$).

Definition 2.13 (Adjungieren). Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Sei $S \subset L$ eine Teilmenge. Dann bezeichnet $K(S)$ den kleinsten Teilkörper von L , der K und S enthält. Für $S = \{\alpha\}$ schreibt man $K(\alpha) = K(\{\alpha\})$ (gesprochen "K adjungiert α "). Man nennt eine Körpererweiterung $K(\alpha)|K$ *einfach*.

Definition 2.14 (Algebraisch vs. Transzendent). Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Sei $\alpha \in L$. Betrachte die Evaluationsabbildung $ev_\alpha : K[X] \rightarrow L, f \mapsto f(\alpha)$.

Falls ev_α injektiv ist, so nennt man α *transzendent* (dann ist $f(\alpha) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$, also ist α nicht Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms). Es gilt $\text{Bild}(ev_\alpha) \cong K[X]$ und $K(X) \cong K(\alpha)$. Insb. $[K(\alpha) : K] = \infty$.

Falls dagegen ev_α nicht injektiv ist, nennt man α *algebraisch*. Dann ist $\ker(ev_\alpha) = (m_{\alpha,K})$ Hauptideal. O.B.d.A. sei $m_{\alpha,K}$ normiert (Leitkoeffizient = 1). Wir nennen $m_{\alpha,K}$ das *Minimalpolynom* von α über K . Dann $L \supset \text{Bild}(ev_\alpha) \cong K[X]/(m_{\alpha,K})$ nullteilerfrei. Folglich ist $m_{\alpha,K}$ irreduzibel. Damit ist $(m_{\alpha,K})$ sogar ein maximales Ideal in $K[X]$, also ist $\text{Bild}(ev_\alpha) \cong K[X]/(m_{\alpha,K})$ sogar ein Körper, also $\text{Bild}(ev_\alpha) = K(\alpha)$. (Schreibe auch $K[\alpha] := \text{Bild}(ev_\alpha)$.) Es ist $[K(\alpha) : K] = \deg m_{\alpha,K} < \infty$.

Beispiel 2.15. $\pi \in \mathbb{C}$ ist transzendent über \mathbb{Q} (Lindemann 1882). Es gibt in \mathbb{C} nur abzählbar viele algebraische Zahlen über \mathbb{Q} , also überabzählbar viele transzendente Zahlen.

$d \in \mathbb{Z}$ sei quadratfrei und $d \neq 1$. Die Zahl $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ ist algebraisch mit Minimalpolynom $m_{\sqrt{d},\mathbb{Q}} = X^2 - d \in \mathbb{Q}[X]$. Weiter ist dann $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Definition 2.16 (Algebraische K -Erweiterung). Eine K -Erweiterung $L|K$ ist algebraisch, wenn jedes $\alpha \in L$ algebraisch über K ist.

§2.3 Algebraische Körpererweiterungen

Satz 2.17. 1. Ist $L \mid K$ endlich, dann ist $L \mid K$ algebraisch.

2. Ist $L \mid K$ algebraisch und endlich erzeugt (d.h. $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ für geeignete α_i), dann ist $L \mid K$ endlich.

3. Sind $M \mid L$ und $L \mid K$ algebraisch, so ist auch $M \mid K$ algebraisch.

Beweis. Zu a) Sei $\alpha \in L$. Dann gilt $[K(\alpha) : K] \leq [L : K] < \infty \Rightarrow \alpha$ algebraisch.

Zu b) Betrachte die Zwischenkörper $L =: L_n - \dots - L_2 := L_1(\alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2) - L_1 := L_0(\alpha_1) = K(\alpha_1) - L_0 := K$ (also $L_i := L_{i-1}(\alpha_i)$). Da α_i algebraisch über K ist, ist α_i insb. algebraisch über L_{i-1} . Somit $[L_i, L_{i-1}] = [L_{i-1}(\alpha_i), L_{i-1}] < \infty \Rightarrow [L : K] = [L_n : L_{n-1}] \dots [L_1 : L_0] < \infty$.

Zu c) Sei $\alpha \in M$. Betrachte $m_{\alpha, L} = \sum_{i=0}^n c_i X^i$, $c_i \in L$, Minimalpolynom von α über L . Definiere $K_0 := K(c_0, \dots, c_n) \subseteq L$. Wegen b) ist $[K_0 : K] < \infty$. Wegen $m_{\alpha, L} \in K_0[X]$, ist α algebraisch über K_0 . Dann $[K(\alpha) : K] \leq [K_0(\alpha) : K] = [K_0(\alpha) : K_0][K_0 : K] < \infty$, also α algebraisch über K . □

Bemerkung 2.18. Sei $L \mid K$ eine K -Erweiterung. Die Menge $L_{\text{alg}, K} := \{\alpha \in L \mid \alpha \text{ algebraisch über } K\}$ ist ein Zwischenkörper $L - L_{\text{alg}, K} - K$. Diesen nennt man den *algebraischen Abschluss* von K in L .

Begründung: Seien $\alpha, \beta \in L_{\text{alg}, K}$.

$$[K(\alpha, \beta) : K] = [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)][K(\alpha) : K] \leq [K(\beta) : K][K(\alpha) : K] < \infty$$

(Frage aus VL: Wie würde das Minimalpolynom von $\alpha + \beta$ über K aussehen?)

Wir stellen uns nun die folgenden Fragen: Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ nicht-konstant. Gibt es einen Erweiterungskörper $L \mid K$ so, dass

- f eine Nullstelle in L hat?
- f in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt?
- jedes Polynom in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt?

Satz 2.19. Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ irreduzibel. Dann gibt es eine algebraische K -Erweiterung mit $[L : K] = \deg(f)$, in der f eine Nullstelle besitzt.

Beweis. Setze $L := K[X]/(f)$. Nach lemma 2.2 ist L ein Körper. Betrachte die Quotientenabbildung $\pi : K[X] \rightarrow L$ (Homomorphismus!). Setze $\alpha := \pi(X) \in L$. Dann ist

$$f(\alpha) = f(\pi(X)) = \sum_{i=0}^n c_i \pi(X)^i = \pi\left(\sum_{i=0}^n c_i X^i\right) = \pi(f) = 0 \in L$$

Also $[L : K] = [K(\alpha) : K] = \deg(f)$, weil f Minimalpolynom von α ist. □

Korollar 2.20. Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom⁵. Es gibt eine endliche K -Erweiterung $L \mid K$, so dass f über L in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Induktion über $\deg(f) =: d$:

IA $d = 1$: Klar, da f selbst Linearfaktor ist.

ISchritt Sei $g \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, das f teilt. Nach dem vorhergehenden Satz (theorem 2.19) gibt es $L_1 \mid K$, in der g eine Nullstelle $\alpha \in L_1$ besitzt. Schreibe $f = (X - \alpha)\tilde{f}$ mit $\tilde{f} \in L_1[X]$. Nach I-Annahme existiert $L \mid L_1$ endlich, in der \tilde{f} in Linearfaktoren zerfällt. Weiter $[L : K] = [L : L_1][L_1 : K] < \infty$.

□

Definition 2.21. Ein Körper K ist *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[X]$ eine Nullstelle in K besitzt.

Bemerkung 2.22. Ist K algebraisch abgeschlossen, dann gilt:

- Jedes $f \in K[X] \setminus K$ zerfällt in Linearfaktoren.
- Die irreduziblen Polynome über K sind von Grad 1.

Weiter gilt: Ist $L \mid K$ algebraisch, dann gilt bereits $L = K$, denn: Das Minimalpolynom m_β von $\beta \in L$ ist linear, d.h. $m_\beta = X - \alpha, \alpha \in K \Rightarrow \beta = \alpha \in K$.

Beispiel. \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen (Fundamentalsatz der Algebra).

Lemma 2.23. Sei A ein kommutativer Ring und $I \subset A$ ein Ideal. Dann ex. ein maximales Ideal $m \subset A$, das I enthält (Beweisidee: Lemma von Zorn).

Satz 2.24. Für jeden Körper gibt es einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper.

Auswahlaxiom in Algebra: nur hier; Funktionale Analysis: überall/Hahn-Banach; Lineare Algebra: Existenz von Basen unendlich dim VR

Beweis. 1) Konstruiere $L_1 \mid K$, so dass jedes $f \in K[X] \setminus K =: \Omega$ eine Nullstelle in L_1 hat. Definiere $A = K[(X_f)_{f \in \Omega}]$ (Polynomring in unendlich vielen Variablen). Setze $I := (\{f(X_f) \mid f \in \Omega\}) \subseteq A$. Dann ist $I \subsetneq A$. Angenommen $I = A$, also $1 \in I$. Dann $1 = \sum_{i=1}^r g_i f_i(X_{f_i})$ für $g_i \in A, f_i \in \Omega$. Sei $f = f_1 \dots f_r$. Nach 2.20 ex. $F \mid K$, so dass f in Linearfaktoren zerfällt. Insbesondere hat jedes f_i eine Nullstelle $z_i \in F$. Definiere $\phi : A \rightarrow F$ durch $\phi|_K = \text{Inklusion } K \hookrightarrow F, \phi(X_f) = 0$ für $f \in \Omega \setminus \{f_1, \dots, f_r\}, \phi(X_{f_i}) = z_i$. Es gilt:

$$1 = \phi(1) = \sum_{i=1}^r \phi(g_i) \phi(f_i(X_{f_i})) = \sum_{i=1}^r \phi(g_i) f_i(\phi(X_{f_i})) = 0 \in F$$

⁵irreduzible Polynome sind per Definition nicht-konstant

Nach 2.24 ex. ein max. Ideal $m \subsetneq A$ mit $I \subseteq m$. Setze $L_1 := A/m$. Dann ist $K \rightarrow A \rightarrow A/m = L_1$ eine Einbettung (setze $\pi : A \rightarrow A/m$). Sei $f \in K[X] \setminus K$. Setze $\gamma_f = \pi(X_f) \in L_1$. Dann $f(\gamma_f) = f(\pi(X_f)) = \pi(f(X_f)) = 0$ da $f(X_f) \in I \subseteq m$.

2) Mit Schritt 1) erhalten wir eine Folge von Körpererweiterungen

$$K \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$$

mit der Eigenschaft, dass jedes $f \in L_j[X] \setminus L_j$ eine Nullstelle in L_{j+1} hat. Definiere $L = \bigcup_{j \geq 1} L_j$. Sei $g \in L[X] \setminus L$. Dann hat g endlich viele Koeffizienten, die alle in einem L_m (m groß genug) liegen. Damit hat g eine Nullstelle in $L_{m+1} \subseteq L$. [Frage aus VL: Warum existiert $L = \bigcup_{j \geq 1} L_j$?] \square

Definition 2.25. Sei K ein Körper. Es gibt einen algebraisch abgeschlossenen Körper \bar{K} so, dass $K \subseteq \bar{K}$ und $\bar{K} \setminus K$ algebraisch ist. Man nennt \bar{K} einen *algebraischen Abschluss*.

Beweis. Sei $L|K$ eine alg. abgeschlossene Erweiterung. Sei $\bar{K} = L_{\text{alg}, K} = \{\alpha \in L \mid \alpha \text{ algebraisch über } K\}$. Z.z. \bar{K} ist alg. abgeschlossen. Sei dafür $f \in \bar{K}[X] \setminus \bar{K}$. Es gibt eine Nullstelle $\alpha \in L$ von f . Dann ist α algebraisch über \bar{K} . Da \bar{K} alg. über K , ist α alg. über K , also $\alpha \in \bar{K}$. \square

§2.4 \bar{K} -Homomorphismen

Definition 2.26. Seien $L_1|K$ und $L_2|K$ K -Erweiterungen. Ein Homomorphismus $f : L_1 \rightarrow L_2$ heißt *K-Homomorphismus*, falls $f(k) = k$ für alle $k \in K$. Ein K -Isomorphismus ist ein bijektiver K -Homomorphismus. Definiere $\text{Aut}(L_1|K) = \{f : L_1 \rightarrow L_1 \mid f|_K = \text{Id}\}$ (Gruppe der K -Automorphismen mit Verknüpfung als Operation).

Bemerkung 2.27 (Beobachtung). Sei $\phi : L_1 \rightarrow L_2$ K -Hom. Sei $f \in K[X]$, $\alpha \in L_1$ mit $f(\alpha) = 0$. Dann ist $f(\phi(\alpha)) = \phi(f(\alpha)) = \phi(0) = 0$. Folgerungen: α transzendent, ϕ K -Isom. $\Rightarrow \phi(\alpha)$ transzendent; für algebraisches α ist $m_{\alpha, K} = m_{\phi(\alpha), K}$.

Beispiel. $\text{Aut}(\mathbb{C} | \mathbb{R}) = \{\text{id}, \tau\}$ mit τ komplexe Konjugation. Denn: $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$, $m_{i, \mathbb{R}} = X^2 + 1$ mit Nullstellen $i, -i$. Jeder \mathbb{R} -Aut. bildet i auf i (id) oder $-i$ (τ) ab.

Lemma 2.28. Seien K, K' zwei Körper und $\sigma : K \rightarrow K'$ ein Isomorphismus. Sei $K(\alpha) | K$ eine einfache algebraische K -Erweiterung. Sei $L' | K'$ eine K' -Erweiterung. Für jede Nullstelle $\alpha' \in L'$ von $\sigma_*(m_{\alpha, K}) \in K'[X]$ (σ_* wendet σ auf die Koeffizienten an) gibt es genau einen Homomorphismus $\phi : K(\alpha) \rightarrow L'$ mit $\phi|_K = \sigma$ und $\phi(\alpha) = \alpha'$. Dann ist ϕ Isomorphismus zwischen $K(\alpha)$ und $K'(\alpha')$.

Beweis. Kommutatives Diagramm \square

Bemerkung 2.29. Die Anzahl der Homomorphismen ϕ wie im vorherigen Lemma ist genau die Anzahl der Nullstellen von $\sigma_*(m_{\alpha, K})$ in L' .

Beispiel 2.30. Sei $d \neq 1$ eine quadratfreie ganze Zahl. $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{d}) | \mathbb{Q}) = \{\text{id}, \sigma\}$, $m_{\sqrt{d}, \mathbb{Q}} = X^2 - d$ mit $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$.

Satz 2.31 (Fortsetzungssatz).

- (a) Sei $L \mid K$ eine alg. K -Erweiterung, M ein alg. abgeschlossener Körper und $\sigma : K \rightarrow M$ ein Homomorphismus. Dann existiert $\phi : L \rightarrow M$ mit $\phi|_K = \sigma$.
- (b) Sei $\sigma : K \rightarrow K'$ ein Isomorphismus von Körpern. Seien \bar{K}, \bar{K}' alg. Abschlüsse von K bzw. K' . Dann ex. ein Isomorphismus $\phi : \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ mit $\phi|_K = \sigma$. (Je zwei algebraische Abschlüsse eines Körpers K sind isomorph.)

Beweis.

(a) Sei

$$\mathcal{U} = \{(F, \tau) \mid K \subseteq F \subseteq L \text{ Zwischenkörper und } \tau : F \rightarrow M \text{ Hom. mit } \tau|_K = \sigma\}$$

Die Menge \mathcal{U} ist partiell geordnet via

$$(F_1, \tau_1) \leq (F_2, \tau_2) :\Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \text{ und } \tau_2|_{F_1} = \tau_1$$

(\mathcal{U}, \leq) ist induktiv, d.h. jede Kette in (\mathcal{U}, \leq) (total geordnete Teilmenge) besitzt eine obere Schranke: Sei C eine Kette. Setze $F_0 := \bigcup_{(F, \tau) \in C} F \subseteq L$. Für $x \in F_0$ definiere man $\tau_0(x) := \tau_F(x)$, falls $x \in F$. Da C eine Kette ist, ist die Definition von $\tau_0(x)$ unabhängig von der konkreten Wahl von F , also wohldefiniert. Dann ist (F_0, τ_0) eine obere Schranke von C . Lemma von Zorn⁶ impliziert die Existenz eines max. Elementes $(F_1, \tau_1) \in \mathcal{U}$. Wir behaupten nun, dass $F_1 = L$. Falls nicht, also $F_1 \subset L$, sei $\alpha \in L \setminus F_1$. Dann ist α algebraisch über K , insb. algebraisch über F_1 . Definiere $F_2 := F_1(\alpha)$. Nach 2.28 ex. $\tau_2 : F_2 \rightarrow M$ mit $\tau_2|_{F_1} = \tau_1$, also $(F_2, \tau_2) > (F_1, \tau_1)$ - Widerspruch.

(b) Nach a) gibt es $\phi : \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ mit $\phi|_K = \sigma$. Z.z. $\phi(\bar{K}) = \bar{K}'$.

Das Bild $\phi(\bar{K})$ ist ein alg. abgeschlossener Körper, da ϕ injektiv und damit $\phi(\bar{K})$ isomorph zu \bar{K} .

$$\begin{array}{ccc} & \bar{K}' & \text{alg. abgeschlossen} \\ & \uparrow \text{alg.} & \\ \text{alg.} \left(\begin{array}{c} \phi(\bar{K}) \\ \downarrow \end{array} \right. & & \text{alg. abgeschlossen} \\ & K' & \end{array}$$

Wegen remark 2.22 und der Algebraizität von $\bar{K}'|_{\phi(\bar{K})}$ folgt $\phi(\bar{K}) = \bar{K}'$.

□

VL vom 13.11.2023:

⁶Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

§2.5 Zerfallskörper

Definition 2.32. Sei K ein Körper und $\Omega \subseteq K[X]$ eine Teilmenge von nicht konstanten Polynomen. Ein Erweiterungskörper L von K heißt *Zerfallungskörper* von Ω , falls gilt

1. Jedes $f \in \Omega$ zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren
2. $L = K(S)$, wobei $S = \{x \in L \mid \exists f \in \Omega : f(x) = 0\}$

Eine Körpererweiterung $L|K$ heißt *normal*, falls sie ein Zerfallungskörper für eine Menge $\Omega \subseteq K[X] \setminus K$ ist.

Bemerkung 2.33. Ist L ein Zerfallungskörper von $f \in K[X] \setminus K$ mit $\deg(f) = m$. Dann ist $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ Nullstellen von f in L sind ($r \leq m$). Es gilt $[L : K] < m^r$. Tatsächlich gilt $[L : K] \leq m!$ (Übung). Natürlich

$$\begin{array}{c} L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ | \\ K(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) \\ \vdots \\ K \end{array}$$

und $[K(\alpha_1, \dots, \alpha_i) : K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})] \leq [K(\alpha_i) : K] \leq m$.

Beispiel 2.34.

- a) $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel nach Eisensteinkriterium mit $p = 2$ und Nullstellen $\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2}$

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \cong \mathbb{Q}[X]/(f) \text{ hat Grad 4 über } \mathbb{Q}$$

II

$$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] = \left\{ \sum_{j=0}^3 a_j (\sqrt[4]{2})^j \mid a_j \in \mathbb{Q} \right\} \not\ni \pm i\sqrt[4]{2}$$

daher ist L kein Zerfallungskörper von f .

Dagegen ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Zerfallungskörper von $X^2 \in \mathbb{Q}[X]$.

- b) $f = X^4 - 2 \in \mathbb{F}_5[X]$ irreduzibel.

Beweis. Angenommen $f = gh$: Wenn $\deg(g) = 1$, hat f eine Nullstelle in \mathbb{F}_5 , aber $X^4 \equiv 1 \pmod{5}$ nach Satz von Euler⁷ und damit $\forall x \in \mathbb{F}_5 \setminus \{0\} : f(x) = X^4 - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 0$. Wenn $\deg(g) = 2 = \deg(f)$ **TODO was soll das für eine begründung sein?** □

⁷Satz von Euler: $X^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Sei $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_5}$ eine Nullstelle von f . $\overline{\mathbb{F}_5}$ algebraischer Abschluss von \mathbb{F}_5 . Dann ist $E = \mathbb{F}_5(\alpha) \cong \mathbb{F}_5[X]/(f)$ ein Zerfällungskörper von f , weil: f hat die Nullstellen $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha \in E$, da $b^4 \equiv 1 \pmod{5}$ nach Euler für $b = 2, 3, 4$ und damit $(b\alpha)^4 = b^4\alpha^4 = \alpha^4$.

In $E[X]$ gilt: $f = \prod_{i=1}^4 (X - i\alpha) \in E[X]$.

Satz 2.35. Sei K Körper und $\Omega \subseteq K[X] \setminus K$

- Jeder alg. Abschluss von K enthält genau einen Zerfällungskörper von Ω .
- Je zwei Zerfällungskörper von Ω sind K -Isomorph

Beweis. **TODO**

□

Satz 2.36 (Charakterisierung von normalen Erweiterungen). Sei K Körper mit alg. Abschluss \overline{K} . Für einen Zwischenkörper $K \subseteq L \subseteq \overline{K}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- $L|K$ ist normal
- Ist $\phi : L \rightarrow \overline{K}$ ein K -Homomorphismus, dann ist $\phi(L) = L$
- Jedes irreduzible $f \in K[X]$, dass in L eine Nullstelle besitzt, zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren

Beweis. **TODO**

□

Satz 2.37. Sei $L|K$ eine normale K -Erweiterung

- Für jeden Zwischenkörper M gilt $L|M$ ist normal.
- Sind $\alpha, \beta \in L$, dann gibt es $\sigma \in \text{Aut}(L|K)$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$ gdw $m_{\alpha,K} = m_{\beta,K}$

Beweis. **TODO**

□

VL vom 13.11.2023:

§2.6 Serperable Erweiterungen

Definition 2.38. Ein irreduzibles Polynom in $K[X]$ heißt *separabel*, wenn es im \overline{K} nur einfache Nullstellen hat. (allgemein heißt ein Polynom separabel, wenn alle irreduzieblen Faktoren separabel sind)

Definition 2.39. Die K -lineare Abbildung $D : K[X] \rightarrow K[X], \sum a_i x^i \mapsto \sum i a_i x^{i-1}$ heißt (formal) Ableitung. Es gilt die Leibnizregel $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.⁸

Satz 2.40. Ein irreduzibles Polynom f ist genau dann separabel, wenn $D(f) \neq 0$.

⁸Präzieser $\sum a_i x^i \mapsto \sum \pi(i) a_i x^{i-1}$ mit $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow K$ definiert durch $1 \mapsto 1_K$. Daher ist die $\text{Char}(K)$ auch relevant.

(Die mehrfachen Nullstellen eines beliebigen Polynoms f sind die gemeinsamen Nullstellen von f und $D(f)$)

Beispiel 2.41. $K = \mathbb{F}_p(T) = \text{Quot}(\mathbb{F}_p[T])$ (rationaler Funktionenkörper) Betrachte $f = X^p - T \in K[X]$. Nach Eisenstein ist f irreduzibel. Es ist $D(f) = pX^{p-1} = 0$. Also ist f nicht separabel.

Sei $a = \sqrt[p]{T} \in \bar{K}$ eine Nullstelle von f . Dann gilt $(X - a)^p = f$.

Beweis zu 2.40.

Bemerkung. Schreibe $f = c \prod_{j=1}^d (X - a_j) \in \bar{K}[X]$ mit $0 \neq c, a_1, \dots, a_d \in \bar{K}$. Dann ist $D(f) = c \sum_{j=1}^d \prod_{i \neq j} (X - a_i)$ (Leibnizregel).

Damit folgt $D(f)(a_k) = c \prod_{i \neq k} (a_k - a_i)$.

“ \Rightarrow “ Durch Kontraposition: Sei $D(f) = 0$. Dann $D(f)(a_1) = 0$. Dann $\exists i \neq 1 : a_i = a_1$, was $\nmid \text{sep}$.

“ \Leftarrow “ Sei $D(f) \neq 0$. Wegen $\deg(D(f)) < \deg(f)$ und f irreduzibel, sind $D(f)$ und f teilerfremd. Es gibt also $g, h \in K[X]$ mit $1 = gf + hD(f)$.

Sei a_k eine der Nullstellen von f in \bar{K} . Dann ist

$$\begin{array}{ccc} 1 = g(a_k)f(a_k) + h(a_k)D(f)(a_k) \\ \parallel & & \nparallel \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Wegen (*) muss die Nullstelle a_k einfach sein.

□

Bemerkung 2.42. Ist $\text{Char}(K) = 0$, dann ist jedes irreduzible Polynom separabel.⁹

Definition 2.43. Sei $L|K$ eine algebraische K -Erweiterung. Ein Element $a \in L$ ist separabel, wenn $m_{a,K}$ separabel ist. Sind alle $a \in L$ separabel, dann nennt man $L|K$ separabel.

Lemma 2.44. Ist $L|K$ separabel und $K \subseteq M \subseteq L$ ein Zwischenkörper, dann ist $L|M$ und $M|K$ separabel.

Beweis.

$M|K$: Sei $a \in M$. Die Minimalpolynome über K von a als Element von M und L sind gleich. Also ist a separabel.

$L|M$: Sei $a \in L$. Dann ist $m_{a,M}$ ein Teiler von $m_{a,K}$ in $\bar{K}[X]$. daher hat auch $m_{a,M}$ nur einfache Nullstellen.

□

⁹Editor's remark: $\text{Char}(K) = 0$ verhindert, dass die Faktor i in der Ableitung 0 werden kann und damit $D(f) = 0$ werden könnte.

Definition 2.45. Sei $L|K$ eine alg. K -Erweiterung. Der *Separabilitätsgrad* $[L : K]_S$ über K ist definiert als $|Hom_K(L, \bar{K})|$. Ist $L|K$ normal, dann ist $[L : K]_S = |Aut(L|K)|$.¹⁰

Lemma 2.46.

a) Sind $M|L$ und $L|K$ alg. Erweiterungen, dann ist

$$[M : K]_S = [M : L]_S \cdot [L : K]_S$$

b) Ist $L : K$ endlich, so ist $[L : K]_S \leq [L : K]$

Beweis.

Wir betten K, M, L in einen gemeinsamen alg. Abschluss \bar{K} ein. Seien $(\bar{\sigma}_i)_{i \in I}$ die paarweise verschiedenen K -Homomorphismen $L \rightarrow \bar{K}$. Seien $(\tau_j)_{j \in J}$ die paarweise verschiedenen L -Homomorphismen $M \rightarrow \bar{K}$. Also $|I| = [L : K]_S$ und $|J| = [M : L]_S$. Die K -Homomorphismen $\bar{\sigma}_i \circ \tau_j = f_{ij}$ sind genau die paarweise verschiedenen K -Homom. $M \rightarrow \bar{K}$, wobei $\bar{\sigma}_i$ eine Fortsetzung von σ_i zu einem K -Homomorphismus $\bar{K} \rightarrow \bar{K}$ ist (Fortsetzungssatz theorem 2.31). Angenommen $\bar{\sigma}_i \circ \tau_j = \bar{\sigma}_s \circ \tau_r$, dann ist $\sigma_i = \bar{\sigma}_i|_L = (\bar{\sigma}_i \circ \tau_j)|_L = (\bar{\sigma}_s \circ \tau_r)|_L = \sigma_s$, also $i = s$. Da $\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_s$ automatisch injektiv sind¹¹, ist $\tau_j = \tau_r$ also $j = r$. Damit ist a) bewiesen.

Zu b) Es gilt $L = K(a_1, \dots, a_n)$ für gewisse $a_i \in L$. Wegen a) wird der Gradformel lemma 2.12 genügt es $L = K(a)$ zu betrachten. Nach lemma 2.28 ist $[K(a) : K]_S = |\{b \in \bar{K} \mid m_{a,K}(b) = 0\}| \leq \deg(m_{a,K}) = [K(a) : K]$ \square

Satz 2.47 (Char. separabler Erweiterungen). Sei $L|K$ eine endliche Erweiterung. Dann sind äquivalent:

- (i) $L|K$ separabel
- (ii) $L = K(a_1, \dots, a_n)$ für über K separable Elemente $a_1, \dots, a_n \in L$
- (iii) $[L : K]_S = [L : K]$

Beweis.

- (i) \rightarrow (ii) $[L : K] < \infty$, dann gilt $a_1, \dots, a_n \in L$ mit $L = K(a_1, \dots, a_n)$. Diese Elemente sind (nach Definition separabler Körpererweiterungen 2.43) automatisch separabel.
- (ii) \rightarrow (iii) Wegen lemma 2.46 a) and lemma 2.12 reicht es (iii) für den Fall $L = K(a)$ zu zeigen.

$$[K(a) : K]_S = |\{b \in \bar{K} \mid m_{a,K}(b) = 0\}| \stackrel{a \text{ sep.}}{=} \deg(m_{a,K}) = [K(a) : K]$$

¹⁰Nach theorem 2.35 b)

¹¹Alle Körperhomomorphismen sind 0 oder injektiv. Wäre $\phi(a) = 0$, dann $0 = \phi(a) = \phi(a)\phi(a^{-1}) = \phi(1) = 1$

(iii) \rightarrow (i) Sei $a \in L$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [L : K] &= [L : K]_S = [L : K(a)]_S \cdot [K(a) : K]_S \\ &\leq [L : K(a)] \cdot [K(a) : K] \\ &= [L : K] \end{aligned}$$

Damit ist $|\{b \in \bar{K} \mid m_{a,K}(b) = 0\}| = [K(a) : K]_S = [K(a) : K] = \deg(m_{a,K})$ und a ist separabel.

□

Korollar 2.48. Ist $f \in K[X] \setminus K$ ein separables Polynom, so ist der Zerfällungskörper von f separabel

VL vom 23.11.2023:

§2.7 Endliche Körper

Ziel: Konstruktion eines Körpers \mathbb{F}_q , $q = p^n$, p prim mit q Elementen. Nicht zu verwechseln mit $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, der für $n > 1$ Nullteiler besitzt.

Lemma 2.49. Es sei \mathbb{F} ein endlicher Körper. Dann gilt $p = \text{char}(\mathbb{F}) > 0$. Somit $|\mathbb{F}| = q := p^n$ für $[\mathbb{F} : \mathbb{F}_p] = n$. Es ist \mathbb{F} der Zerfällungskörper des Polynoms $X^q - X$ über \mathbb{F}_p . Insbesondere ist die Erweiterung $\mathbb{F}|\mathbb{F}_p$ normal.

Beweis. Mit \mathbb{F} ist auch der Primkörper¹² endlich, also von der Form \mathbb{F}_p . Daher $|\mathbb{F}| = |\mathbb{F}_p|^{[\mathbb{F}:\mathbb{F}_p]} = p^n$.

Die multiplikative Gruppe \mathbb{F}^\times hat die Ordnung $q - 1$, daher ist jedes Element in \mathbb{F}^\times Nullstelle von $X^{q-1} - 1$. Also ist jedes Element von \mathbb{F} Nullstelle von $X^q - X$. Insbesondere ist \mathbb{F} Zerfällungskörper von $X^q - X$. □

Satz 2.50. Es sei p eine Primzahl. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Erweiterung $\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_p$ mit $q = p^n$ Elementen. Es ist \mathbb{F}_q bis auf Isomorphie der eindeutige Zerfällungskörper von $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Es besteht \mathbb{F}_q genau aus den Nullstellen von $X^q - X$. Jeder endliche Körper ist bis auf Isomorphie ein Körper des Typs \mathbb{F}_q .

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussagen folgen aus dem Lemma. Sei $f := X^q - X$. Wegen $D(f) = -1$ hat das Polynom nur einfache Nullstellen, also q einfache Nullstellen in einem algebraischen Abschluss $\bar{\mathbb{F}}_p$ von \mathbb{F}_p . Diese Nullstellen bilden einen Teilkörper von $\bar{\mathbb{F}}_p$:

Sei $a, b \in \bar{\mathbb{F}}_p$ Nullstellen. Dann $(a \pm b)^q = \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} a^i b^{q-i} \stackrel{\text{char}=p}{=} a^q \pm b^q$ also ist $a \pm b$ wieder eine Nullstelle.

$(ab^{-1})^q = a^q (b^q)^{-1} = ab^{-1}$ also ist ab^{-1} wieder eine Nullstelle. D.h. die Nullstellen von f sind der Zerfällungskörper von f . Er hat q Elemente. □

¹²Kleinster Teilkörper eines Körpers. Er wird von 0 und 1 durch Abschluss von Multiplikation, Addition und der Inversen erzeugt. Er ist isomorph zu \mathbb{Q} , wenn $\text{char}(K) = 0$, oder zu $\mathbb{F}_{\text{char}(K)}$, wenn $\text{char}(K) > 0$.

Bemerkung 2.51. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Das Argument des letzten Beweises impliziert, dass

$$\{x^{p^n} \mid x \in K\}$$

ein Teilkörper von K ist.

Korollar 2.52. Man biete die Körper $\mathbb{F}_q, q = p^n$ in einen algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}}_p$ von \mathbb{F}_p ein. Es ist $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q'}, (q = p^n, q' = p^{n'})$ genau dann, wenn $n \mid n'$. Die Erweiterung $\mathbb{F}_{q'} | \mathbb{F}_q$ sind bis auf Isomorphie die einzigen Erweiterungen zwischen endlichen Körpern der Charakteristik p .

Beweis. Es gelte $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q'}$. Sei $m := [\mathbb{F}_{q'} : \mathbb{F}_q]$. Dann $p^{n'} = |\mathbb{F}_{q'}| = |\mathbb{F}_q|^m = (p^n)^m = p^{n \cdot m}$, also $n \mid n'$. Gilt umgekehrt $n' = n \cdot m$, so folgt für $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ aus $a^q = a$ stets $a^{q'} = a^{q^m} = a$. Wegen des Fortsetzungssatzes kann man jede Erweiterung $L | \mathbb{F}$ von endlichen Körpern der Char. p in $\overline{\mathbb{F}}_p$ realisiert werden. Die Eindeutigkeit folgt dann mit dem schon Gezeigten und dem vorherigen Satz. \square

Ein Körper K ist *perfekt*, wenn jede alg. Erweiterung von K separabel ist.

1. $\text{char}(K) = 0$, d.h. $\mathbb{Q} \subseteq K$. Dann ist K perfekt, weil jedes irreduzible Polynom f über K separabel ist. (denn $D(f) = 0$) Es gibt aber alg., nicht normale Erweiterungen von \mathbb{Q} (Bsp. theorem 2.36 **TODO does this reference make sense???**)
2. $\mathbb{F}_p(t)$ ist nicht perfekt. Die Erweiterung $\mathbb{F}_p(t)[t^{\frac{1}{p}}] = \mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p}})$ ist normal aber nicht separabel. (Bsp. 2.41) Sei $p = 5$. Betrachte die alg. Erweiterung

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_5(t^{\frac{1}{15}}) \cong \mathbb{F}_5(t^{\frac{1}{5}})/(X^3 - t^{\frac{1}{5}}) \\ \left(\begin{array}{c} | \\ \mathbb{F}_5(t^{\frac{1}{5}}) \cong \mathbb{F}_5(t)/(X^5 - t) \\ | \text{ nicht separabel} \\ \mathbb{F}_5(t) \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{nicht normal} \\ \text{nicht separabel} \end{array} \end{array}$$

Warum ist $\mathbb{F}_5(t^{\frac{1}{15}}) | \mathbb{F}_5(t)$ nicht normal? Ansonsten wären alle Nullstellen von $X^3 - t^{\frac{1}{5}}$ in $\mathbb{F}_5(t^{\frac{1}{15}})$.¹³ Somit auch alle Nullstellen von $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. Jedes Element von $\mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{15}})$ ist von der Form $\frac{p(t^{\frac{1}{15}})}{q(t^{\frac{1}{15}})}$ mit $p, q \in \mathbb{F}_5[X]$ teilerfremde Polynome. Da $t^{\frac{1}{15}}$ transzendent über \mathbb{F} , ist die Evaluationsabbildung

$$\mathbb{F}_5[Y] \xrightarrow{\text{ev}} \mathbb{F}_5(t^{\frac{1}{15}})$$

injektiv, erwertet sich also auf den Quotientenkörper

$$\mathbb{F}_5(Y) \rightarrow \mathbb{F}_5(t^{\frac{1}{15}})$$

injektiv. Also muss es ein $f \in \mathbb{F}_5(Y)$ geben mit $f^2 + f + 1 = 0$. Sei $g = f - 2 \in \mathbb{F}_5(Y)$. Dann $0 = (g + 2)^2 + (g + 2) + 1 = g^2 + 4g + 4 + g + 2 + 1 = g^2 + 2$ also $g^2 = -2 = 3$ und $g \in \mathbb{F}_5$. Das ist ein Widerspruch: 3 ist kein Quadrat mod 5.

¹³man bekommt die dritten Einheitswurzeln aus den nullstellen raus

Korollar 2.53. Jede algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers ist normal und separabel. Insbesondere ist jeder endliche Körper perfekt.

Beweis. Sei $K|\mathbb{F}$ eine alg. Erweiterung von \mathbb{F} endlicher Körper mit $\text{Char } p > 0$. Sei zunächst $K|\mathbb{F}$ endlich und damit auch K endlich. Da $f = X^q - X$ separabel und K Zerfällungskörper von f über \mathbb{F}_p für ein $q = p^n$ ist, ist $K|\mathbb{F}_p$, insbesondere auch $K|\mathbb{F}$, normal und separabel.

Allgemein lässt sich K durch endliche Erweiterungen ausschöpfen. \square

Satz 2.54. $\text{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}|\mathbb{F}_p)$ ist zyklisch von Ordnung n . Sie wird erzeugt vom Frobenius-Automorphismus:

$$\begin{aligned} Fr : \mathbb{F}_{p^n} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_{p^n} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned}$$

Beweis. Fr ist Homomorphismus Fr injektiv, also bijektiv, weil \mathbb{F}_{p^n} endlich ist. Fr Erzeuger: Angenommen $Fr^m = id$ für $1 \leq m < n$. Dann $X^{p^m} = X$ für alle $X \in \mathbb{F}_{p^n}$. Dann hätte $X^{p^m} - X$ mehr als p^m Nullstellen. (Widerspruch) Fr hat Ordnung n : $|\mathbb{F}_{p^n}|\mathbb{F}_p| = [\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p]_s = [\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p] = n$ \square

VL vom 24.11.2023:

Satz 2.55. Eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines beliebigen Körpers ist zyklisch.

Beweis. Sei $H \leq K^*$ eine endliche Untergruppe. Sei $a \in H$ ein Element maximaler Ordnung m in H . Sei $H_m := \{b \in H \mid \text{ord}(b) \mid m\} \subseteq H$. Die Elemente von H_m sind Nullstellen des Polynoms $X^m - 1 \in K[X]$. Somit $|H_m| \leq m$. Wegen $a \in H_m$, somit $\langle a \rangle \subseteq H_m$, ist $|H_m| = m$. Ang. es gibt $b \in H \setminus H_m$. D.h. $\text{ord}(b) \nmid m$. Dann gilt $\text{ord}(ab) = \text{kgV}(\text{ord}(b), m) > m$. \nexists zur Maximalität von a . \square

Satz 2.56 (Satz vom primitiven Element). Sei $L|K$ eine endliche und separabel Körpererweiterung. Dann existiert ein $a \in L$ mit $L = K(a)$.

Beweis.

1. Fall: K ist ein Endlicher Körper Dann ist auch L endlich. Nach theorem 2.55 ist L^* zyklisch, d.h. $L^* = \langle a \rangle$. Somit $L = K(a)$.

2. Fall K ist unendlich Schreibe $L = K(a_1, \dots, a_n)$. Durch eine Induktion über n reicht es den Fall $n = 2$ zu zeigen. Sei $L = K(a_1, a_2)$ und $\phi_1, \dots, \phi_m : L \rightarrow \bar{K}$ seien die verschiedenen K -Einbettungen $L \rightarrow \bar{K}$, wobei $m = [L : K]_s = [L : K]$ weil separabel. Das Polynom

$$g = \prod_{i < j} ((\phi_i(a_1) - \phi_j(a_1)) \cdot X + (\phi_i(a_2) - \phi_j(a_2))) \in \bar{K}[X]$$

Für $i < j$ ist $\phi_i(a_1) \neq \phi_j(a_1)$ oder $\phi_i(a_2) \neq \phi_j(a_2)$. Somit $g \neq 0$. Da K unendlich, gibt es ein $c \in K$ mit $g(c) \neq 0$. Also $(\phi_i(a_1) - \phi_j(a_1)) \cdot c + (\phi_i(a_2) - \phi_j(a_2)) \neq 0$ für

alle $i < j$. Das ist $\phi_i(a_1 \cdot c + a_2) - \phi_j(a_1 \cdot c + a_2) \neq 0$ und $\phi_i(a) \neq \phi_j(a)$ mit $a := a_1 c + a_2 \in L$ für $i < j$. Damit sind $\phi_1(a), \dots, \phi_m(a)$ sind verschiedene Nullstellen von $m_{a,K}$. Damit $[L : K] \geq [K(a) : K] = \deg(m_{a,K}) \geq m = [L : K]$, also $[L : K] = [K(a) : K]$ und $L = K(a)$

□

Beispiel 2.57.

Die Separabilität im Satz theorem 2.56 ist essenziell. $K = \mathbb{F}_p(s, t)$ rationaler Funktionenkörper in zwei Variablen. $L = K(\sqrt[p]{s}, \sqrt[p]{t})$ und damit $[L : K] = p^2$.

\downarrow^p

$K(\sqrt[p]{s})$ Sei $a \in L$. Schreibe $a = \sum_{l,k} a_{l,k} (\sqrt[p]{s})^l (\sqrt[p]{t})^k$ mit $a_{l,k} \in K$. Dann ist $a^p = \sum_{l,k} a_{l,k}^p s^l t^k =: c \in K$, da $(*)^p$ eine Homomorphismus ist. Somit ist a Nullstelle von $X^p - c \in K[X]$ und $\deg(m_{a,K}) \leq p$. Damit ist $K(a) \subset L$.

\downarrow^p

K

3 Galoistheorie

Definition 3.1. Eine algebraische Körpererweiterung $L|K$ heißt *Galoiserweiterung* (oder galois'sch), wenn $L|K$ normal und separabel ist. Man nennt dann $Gal(L|K) = Aut_K(L)$ die *Galoisgruppe* von $L|K$.

Sei F ein Körper und $H \leq Aut(F)$ eine Untergruppe. dann ist $F^H = \{x \in F \mid \forall \sigma \in H : \sigma(x) = x\}$ ein Teilkörper von F , genannt *Fixkörper* von H .

§3.1 Hauptsatz der Galoistheorie

Lemma 3.2. Sei $L|K$ Galoiserweiterung. Dann ist $L^{Gal(L|K)} = K$.

Beweis.

“ \supseteq “ klar

“ \subseteq “ (Durch Kontraposition) Sei $a \in L \setminus K$. Das Minimalpolynom $m_{a,K}$ hat Grad ≥ 2 .

- $L|K$ normal $\Rightarrow m_{a,K}$ zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren.
- $L|K$ separabel $\Rightarrow m_{a,K}$ hat keine mehrfach Nullstelle.

Also gibt es eine weitere Nullstelle b von $m_{a,K}$ mit $b \neq a$. Nach Satz theorem 2.37 existiert eine $\sigma \in Gal(L|K)$ mit $\sigma(a) = b$. $\Rightarrow a \notin L^{Gal(L|K)}$

□

Satz 3.3. Seien L ein Körper und $H \leq Aut(L)$ eine endliche Untergruppe. Dann ist

1. $L|L^H$ galois'sch
2. $[L : L^H] = |H|$

3. $Gal(L|L^H) = H$

Beweis. Sei $a \in L$. Betrachte die H -Bahn von a .

$$H \cdot a = \{\sigma(a) \mid \sigma \in H\} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq L$$

Betrachte Polynom $f_a = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. Für $\sigma \in H$ ist $\sigma_*(f) = \prod_{i=1}^n (X - \sigma(a_i)) = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$.¹⁴ Da f_a also fix unter $\sigma \in H$ ist, müssen die Koeffizienten von f_a in L^H liegen und damit $f_a \in L^H[X]$. Weil alle Nullstellen von f_a auch Nullstelle von m_{a,L^H} sind¹⁵, muss schon $f_a = m_{a,L^H}$ sein. Nach Konstruktion hat f_a nur einfache Nullstellen, ist also separabel. $\Rightarrow a$ separabel. $\xRightarrow{a \text{ beliebig}} L|L^H$ separabel. Weiter zerfällt $f_a = m_{a,L^H}$ in Linearfaktoren $\Rightarrow L|L^H$ normal und damit galois'sch.

Wegen $H \subseteq Gal(L|L^H)$ gilt $|H| \leq |Gal(L|L^H)| = [L : L^H]_S \stackrel{\text{theorem 2.47}}{=} [L : L^H]$. Angenommen $|H| < [L : L^H] \leq \infty$. Dann finden wir ein L_0 mit $L^H \subseteq L_0 \subset L$ mit $|H| \leq [L_0 : L^H] < \infty$. Der Satz vom primitiven Element liefert ein $a \in L_0$ mit $L_0 = L^H(a)$. Aber $f_a = m_{a,L^H}$ hat $\text{Grad} \leq |H| \Rightarrow [L_0 : L^H] = \deg(m_{a,L^H}) \leq |H| \nmid$

Also ist $[L : L^H] = |H| = |Gal(L|L^H)| \Rightarrow H = Gal(L|L^H)$. \square

VL vom 30.11.2023:

Satz 3.4 (Hauptsatz). $L|K$ endliche Galoiserweiterung.

$$U := \{H \leq Gal(L|K) \mid H \text{ Untergruppe}\}$$

$$Z := \{E \subseteq L \mid K \subseteq E \subseteq L \text{ Zwischenkörper}\}$$

a) Die Zuordnungen $\text{Fix} : U \rightarrow Z, H \mapsto L^H$ und $\Gamma : Z \rightarrow U, E \mapsto Gal(L|E)$ sind zueinander inverse Bijektionen:

$$U \longleftrightarrow Z$$

$$H \longmapsto L^H = \text{Fix}(H)$$

$$\Gamma(E) = Gal(L|E) \longleftarrow E$$

Fix und Γ sind enthaltungsumkehrend:

$$H_1 \leq H_2 \Rightarrow \text{Fix}(H_1) \supseteq \text{Fix}(H_2)$$

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow \Gamma(E_1) \supseteq \Gamma(E_2)$$

b) Sei $E \in Z$, dann ist $E|K$ normal g.d.w. $Gal(L|E)$ ein Normalteiler von $Gal(L|K)$ ist.

$$Gal(E|K) \cong Gal(L|K) / Gal(L|E)$$

¹⁴Zu jedem a_i existiert ein $\tau \in H$ mit $\tau(a) = a_i$. Dann ist $\sigma(a_i) = \sigma(\tau(a)) = \underbrace{(\sigma \circ \tau)}_{\in H}(a) \in H \cdot a$. σ ist bijektiv,

weshalb jedes a_i auf ein anderes Element in $H \cdot a \subseteq L$ abgebildet.

¹⁵und damit $f_a | m_{a,L^H}$, aber m_{a,L^H} als Minimalpolynom irreduzibel

Beweis.

Zu a) Beachte: $E \in Z$, dann $L|E$ nach theorem 2.37 a) normal und nach lemma 2.44 separabel und damit galoissch

Fix und Γ sind inverse Bijektionen:

$$Fix \circ \Gamma = id \quad \text{Für jedes } E \in Z \text{ gilt } Fix(\Gamma(E)) = Fix(Gal(L|E)) = L^{Gal(L|E)} \stackrel{3.2}{=} E$$

$$\Gamma \circ Fix = id \quad \text{Für jedes } H \in U \text{ gilt } \Gamma(Fix(H)) = \Gamma(L^H) = Gal(L|L^H) \stackrel{3.3}{=} H$$

Fix und Γ sind enthaltungsumkehrend

- Sei $H_1 \leq H_2$. Für jedes $x \in L^{H_2}$ gilt per Definition $\forall \sigma \in H_2: \sigma(x) = x$, was damit auch insbesondere für jedes $\sigma \in H_1 \subseteq H_2$ gilt. $\Rightarrow x \in L^{H_1}$
 $\Rightarrow Fix(H_2) = L^{H_2} \subseteq L^{H_1} = Fix(H_1)$
- Sei $E_1 \subseteq E_2$. $\sigma \in \Gamma(E_2) = Gal(L|E_2) \leq Gal(L|E_1) = \Gamma(E_1)$

Bemerkung. Für $\sigma \in Gal(L|K)$ und $H \in U$, dann $\sigma(L^H) = L^{\sigma H \sigma^{-1}}$, denn für $x \in L^{\sigma H \sigma^{-1}} \Leftrightarrow \forall \tau \in H: \sigma \tau \sigma^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \forall \tau \in H: \tau \sigma^{-1}(x) = \sigma^{-1}(x) \Leftrightarrow \sigma^{-1}x \in L^H \Leftrightarrow x \in \sigma(L^H)$
 $\xrightarrow{\Gamma(\cdot)} Gal(L|\sigma(L^H)) = \sigma H \sigma^{-1}$

Zu b)

“ \Rightarrow “ Ist $E|K$ normal, so gilt $\sigma(E) = E$ für alle $\sigma \in Gal(L|K)$ nach theorem 2.35 b).

$\sigma Gal(L|E) \sigma^{-1} = Gal(L|\sigma(L^{Gal(L|E)})) = Gal(L|\sigma(E)) = Gal(L|E)$ für alle $\sigma \in Gal(L|K)$. Damit ist $Gal(L|E)$ normal, also $Gal(L|E) \trianglelefteq Gal(L|K)$.

“ \Leftarrow “ $Gal(L|E) \trianglelefteq Gal(L|K)$, d.h. $\forall \sigma \in Gal(L|K)$ gilt $\sigma(E) = \sigma(L^{Gal(L|E)}) = L^{\sigma Gal(L|E) \sigma^{-1}} = L^{Gal(L|E)} = E$. Nach theorem 2.35 (ii) ist $E|K$ normal.

Sei $E|K$ normal. Die Restriktionsabbildung $r_E: Gal(L|K) \rightarrow Gal(E|K), \sigma \mapsto \sigma|_E$ ist Gruppenhomomorphismus mit $\ker(r_E) = Gal(L|E)$. r_E ist surjektiv: Für $\tau \in Gal(E|K)$ findet man dank Fortsetzungssatz (2.31) ein $\sigma \in Gal(L|K)$ sodass $\sigma|_E = \tau$. Mit Homomorphiesatz folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 3.5. $L|K$ endliche Galoiserweiterung $H \leq Gal(L|K)$

- $[L : L^H] = |H|$
- $[L^H : K] = [L : K] / [L : L^H] = \frac{|Gal(L|K)|}{|H|} = [Gal(L|K) : H]$

Beispiel 3.6. Wie bei (theorem 2.36 a) L Zerfällungskörper von $X^4 - 2$ über \mathbb{Q} . $L = \mathbb{Q}(a, ia, -a, -ia) = \mathbb{Q}(a, i)$ mit $a = \sqrt[4]{2}$. Damit ist $[L : \mathbb{Q}] = 8$. $L|\mathbb{Q}$ ist Galois Gruppe. $\sigma \in Gal(L|\mathbb{Q})$ eindeutig bestimmt durch $\sigma(a) \in \{a, ia, -a, -ia\}$, $\sigma(i) \in \{i, -i\}$. Da $|Gal(L|\mathbb{Q})| =$

8 sind alle Kombinationen möglich. **TODO Graphik** $Gal(L|\mathbb{Q}) = \{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \rho^3\tau\}$
 $\tau\rho^{-1} = \rho\tau = \rho\tau^3$ Isomorph zu der Diedergruppe: $D_4 = \langle x, y \mid x^4 = 1, y^2 = 1, xy = yx^3 \rangle$

TODO Andere Graphik und mehr...

VL vom 1.12.2023:

Satz 3.7 (Produktsatz). Sei K Körper $L_1, L_2 \subset \bar{K}$ zwei Teilkörper sodass $(L_1|K)$ und $(L_2|K)$ endlich und galois'sch. Dann ist das Kompositum L_1L_2 eine Galois-Erweiterung von K . Die Zuordnung

$$\Phi: Gal(L_1L_2|K) \rightarrow Gal(L_1|K) \times Gal(L_2|K)$$

$$\sigma \mapsto (\sigma|_{L_1}, \sigma|_{L_2})$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Falls $L_1 \cap L_2 = K$, so ist Φ ein Isomorphismus.

Beweis. Damit L_1L_2 galois ist, muss es normal und separabel sein:

normal L_i ist Zerfällungskörper von $w_i \in K[X] \setminus K$ ($i \in \{1, 2\}$) $\Rightarrow L_1L_2$ ist Zerfällungskörper von $w_1 \cup w_2 \Rightarrow (L_1L_2|K)$ ist normal.

separabel Nach Satz ?? gilt $L_1 = K(a_1)$, $L_2 = K(a_2)$ mit $a_i \in L_i$. Sie sind separabel über $K \Rightarrow L_1L_2 = K(a_1, a_2)$ ist separabel über K (nach 2.47)

Φ ist injektiv, denn für $\sigma \in \ker(\Phi)$ gilt $\sigma|_{L_1} = id, \sigma|_{L_2} = id$ und damit $\sigma = id$, da L_1L_2 erzeugt wird von $L_1 \cup L_2$.

Surjektivität von Φ im Fall $K = L_1 \cap L_2$:

$(L_1L_2|L_1), (L_1L_2|L_2)$ sind Galois-Erweiterungen.

$$\Phi_1: Gal(L_1L_2|L_2) \rightarrow Gal(L_1|K)$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_{L_1}$$

ist injektiv, denn für $\sigma \in \ker(\Phi_1)$ gilt $\sigma|_{L_1} = id$. Außerdem ist $\sigma|_{L_2} = id$, da σ L_2 -Homomorphismus. $\Rightarrow \sigma = id$

Φ_1 ist surjektiv (falls $K = L_1 \cap L_2$): Sei $H = \text{Bild}(\Phi_1) \leq Gal(L_1|K)$.

$$L_1^H = \{x \in L_1 \mid \forall \sigma \in Gal(L_1L_2|L_2): \sigma|_{L_1}(x) = x\}$$

$$= L_1 \cap (L_1L_2)^{Gal(L_1L_2|L_2)}$$

$$= L_1 \cap L_2$$

$$= L_1^{Gal(L_1|L_1 \cap L_2)}$$

$$\Rightarrow H = Gal(L_1|L_1 \cap L_2) = Gal(L_1|K)$$

Analog mit $\Phi_2: Gal(L_1L_2|L_1) \rightarrow Gal(L_2|K), \sigma \mapsto \sigma|_{L_2}$

$Gal(L_1L_2|K) \geq Gal(L_1L_2|L_i) \Rightarrow \Phi$ ist surjektiv

□

Beispiel 3.8. $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ $L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$ Zerfällungskörper von $X^2 - 11$. $L_1 \cdot L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i, \sqrt{11})$
 $L_1 \cap L_2 = \mathbb{Q}$ Damit gilt $\text{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong \underbrace{\text{Gal}(L_1|\mathbb{Q})}_{=D_4} \times \underbrace{\text{Gal}(L_2|\mathbb{Q})}_{=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$

§3.2 Kreisteilungskörper und Einheitswurzeln

Definition 3.9. Sei K Körper und $n \in \mathbb{N}$. Ein Element $\xi \in K^\times$ mit $\xi^n = 1$ heißt *n-te Einheitswurzel (EW)*. $\mu_n(K) := \{n\text{-te EW in } K\} \leq K^\times$ zyklische Untergruppe. $|\mu_n(K)| \leq n$
 Hat ξ die Ordnung n , so nennt man ξ *primitive n-te EW*. $\mu_n^*(K) := \{\text{primitive n-te EW in } K\}$

Beispiel. $\mu_n(\mathbb{C}) = \{\exp(2\pi i \frac{k}{n}) \mid k = 0, \dots, n-1\}$ $\exp(2\pi i \frac{2}{4}) = \exp(2\pi i \frac{1}{2})$

$\xi \in \mu_n(\mathbb{C})$ ist primitiv $\Leftrightarrow \text{ggT}(k, n) = 1$

$\xi \in \mu_n(K) \setminus \{1\} \Rightarrow (X^n - 1)/(X - 1) = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$ hat ξ als Nullstelle **TODO bild**

Definition: Für K Körper, $n \in \mathbb{N}$ ist K_n definiert als Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über K .

Satz 3.10. K Körper, $n \in \mathbb{N}$, $\text{char}(K) \nmid n$

a) $(K_n|K)$ ist Galoiserweiterung, $|\mu_n(K_n)| = n$, $\phi_n := |\mu_n^*(K_n)| = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ und $K_n = K(\xi)$ für $\xi \in \mu_n^*(K_n)$

b) $\text{Gal}(K_n|K)$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Beweis. Zu a) $(K_n|K)$ ist normal als Zerfällungskörper. Es ist $D(X^n - 1) = nX^{n-1}$, d.h. $X^n - 1$ und $D(X^n - 1)$ haben keine gemeinsamen NS d.h.¹⁶ $X^n - 1$ ist separabel $\xRightarrow{2.48} K_n|K$ ist separabel. Insbesondere hat $X^n - 1$ n verschiedene NS, d.h. $|\mu_n(K_n)| = n$. Gruppe der n -ten EW ist zyklisch (mit Argument wie in 2.49), also $|\mu_n^*(K_n)| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|$

Zu b) $\sigma \in \text{Gal}(K_n|K)$, $\xi \in \mu_n^*(K_n)$: $\sigma(\xi) = \xi^m$ für m teilerfremd zu n . σ ist durch m eindeutig bestimmt. $\Phi: \text{Gal}(K_n|K) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, $\sigma \mapsto m + n\mathbb{Z}$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. □

Definition 3.11. Der Körper $\mathbb{Q}(\xi_n)$ für $\xi_n \in \mu_n^*(\mathbb{C})$ heißt *n-ter Kreisteilungskörper*. Das Polynom $\phi_n = \prod_{\xi \in \mu_n^*(\mathbb{C})} (X - \xi)$ heißt *n-tes Kreisteilungspolynom*

Lemma 3.12. $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

Beweis. Beweis mit Induktion über n : IA: $\phi_1 = X - 1 \checkmark n \geq 2$: Wir verwenden, dass für $d < n$ gilt $\phi_d \in \mathbb{Z}[X]$. Es ist $\mu_n(\mathbb{C}) = \bigcup_{d|n} \mu_d^*(\mathbb{C})$ (disjunkt). $X^n - 1 = \prod_{\xi \in \mu_n(\mathbb{C})} (X - \xi) =$

¹⁶Wäre $X^n - 1$ nicht separabel, gäbe es einen irreduziblen, nicht separablen Teiler g mit $X^n - 1 = gh$. Dann hätte $D(X^n - 1) = D(gh) = gD(h) + hD(g) = gD(h)$ die Nullstellen von g mit $X^n - 1$ gemein. Da dies nicht der Fall ist, muss $X^n - 1$ separabel sein.

$\prod_{d|n} \underbrace{\prod_{\xi \in \mu_d^*(\mathbb{C})} (X - \xi)}_{=\phi_d}$ Setze $f = \prod_{d|n, d < n} \phi_d \stackrel{(IV)}{\in} \mathbb{Z}[X]$, f ist normiert. $X^n - 1 = qf + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}[X]$, $\deg(r) < \deg(f)$. In $\mathbb{C}[X]$ $X^n - 1 = \phi_n f$, d.h. $r = (q - \phi_n)f$. Da $\deg(r) < \deg(f)$ gilt $\phi_n = q \in \mathbb{Z}[X]$ \square

Bemerkung 3.13. Rekursive Bestimmung der Kreisteilungspolynome mittels $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$. Wenn $n = p$ prim: $\phi_p \cdot \phi_1 = X^p - 1 \rightarrow \phi_p = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$.

$$\phi_2 = X + 1$$

$$\phi_3 = X^2 + X + 1$$

$$\phi_4 \cdot \phi_2 \cdot \phi_1 = X^4 - 1 \rightarrow \phi_4 = X^2 + 1.$$

$$\phi_6 \cdot \phi_3 \cdot \phi_2 \cdot \phi_1 = X^6 - 1 \rightarrow \phi_6 = X^2 - X + 1.$$

Für $p \in \mathbb{N}$ Primzahl und $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt

$$X^{p^\alpha} - 1 = \prod_{d|p^\alpha} \phi_d = \phi_{p^\alpha} \underbrace{\prod_{d|p^{\alpha-1}} \phi_d}_{X^{p^{\alpha-1}} - 1} = \phi_{p^\alpha} (X^{p^{\alpha-1}} - 1 \dots)$$

$$\phi_{p^\alpha} = \phi_p(X^{p^{\alpha-1}}) = \sum_{k=0}^{p-1} (X^{p^{\alpha-1}})^k$$

VL vom 7.12.2023:

Satz 3.14. Das n -te Kreisteilungspolynom ϕ_n ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, d.h. $\phi_n = m_{\xi, \mathbb{Q}}$ für $\xi \in \mu_n^*(\mathbb{C})$

Beweis. Sei $\xi \in \mu_n^*(\mathbb{C})$. Sei $f := m_{\xi, \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[X]$. Wir zeigen, dass jede primitive n -te EW eine Nullstelle von f ist. Dies impliziert $\phi_n | f$ und somit $\phi_n = f$ irreduzibel.

Da ξ Nullstelle von $X^n - 1$ ist, existiert ein $h \in \mathbb{Q}[X]$ mit $X^n - 1 = f \cdot h$. Weiter gilt, dass $f, h \in \mathbb{Z}[X]$ aus folgendem Grund:

Erinnerung (Gauß-Lemma 2.5 b).

$$c(f) \cdot c(h) = c(f \cdot h) = c(X^n - 1) = 1$$

Weiter ist $\underbrace{c(f)}_{=\tilde{c}(a \cdot f)a^{-1}}, c(h) \in \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}^{17}$. Also folgt $c(f) = c(h) = 1$. $\Rightarrow f, h \in \mathbb{Z}[X]$

Sei p eine Primzahl, die n nicht teilt. Dann ist ξ^p auch eine primitive n -te EW. Wir behaupten, dass ξ^p eine Nullstelle von f ist.

Ist das nicht der Fall, dann ist $h(\xi^p) = 0$, also ist ξ eine Nullstelle von $h(X^p)$. Somit $f | h(X^p)$. Es existiert $g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $h(X^p) = f \cdot g$. Ähnlich wie oben ist sogar $g \in \mathbb{Z}[X]$. Betrachte die Reduktion $\mod p$:

$$\mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{F}_p[X], \sum_i c_i X^i \mapsto \sum_i \bar{c}_i X^i$$

¹⁷ f und $X^n - 1$ normalisiert, haben also eine 1 als höchsten Koeffizienten, womit auch h normalisiert sein muss. Mit einem 1-Koeffizienten, muss der "A-Anteil" bzw "Z-Anteil" von $c(f)$, $c(h)$ eins sein. Damit sind $c(f)$, $c(h)$ nur Brüche der Form $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{Z}$ (und $n \in \mathbb{N}$ da $c(\cdot)$ ja die Nebenklasse von $A^\times = \{\pm 1\}$ ist)

. Dann ist $\bar{h}^p = \bar{h}^p(X^p) = \bar{f} \cdot \bar{g}$, weil p -te Potenz Homomorphismus in $\text{char} = p$ und nach Euler?? $c^p \equiv c \pmod{p}$. Somit sind f und h nicht teilerfremd \pmod{p} . Dann ist $X^n - 1 = \bar{f} \cdot \bar{h} \in \mathbb{F}_p[X]$ nicht separabel im Widerspruch zu $D(X^n - 1) = nX^{n-1} \neq 0$. Somit ist ξ^p Nullstelle von f .

Ist ξ' eine andere primitive n -te EW, dann ist $\xi' = \xi^m$ mit $(m, n) = 1$ und man erhält ξ' durch wiederholtes Bilden von Primpotenzen von ξ , wobei die Primexponenten zu n teilerfremd sind. Durch Wiederholung des obigen Arguments bekommt man $f(\xi) = 0$. \square

Korollar 3.15. Sei $\xi \in \mu_n^*(\mathbb{C})$. Dann ist $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ und $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Beweis. Kombination von 3.10 und 3.14 \square

Bemerkung (Satz von Kronecker-Weber ('Kroneckers Jugendtraum')). Jede endliche abelsche Erweiterung¹⁸ von \mathbb{Q} in einem Kreisteilungskörper enthalten. **TODO Optional: Ausblick über dessen Konsequenzen (inc Graphik)**

§3.3 Charaktere und Normalbasen

Definition 3.16. Sei Γ eine Gruppe, K ein Körper. Ein *Charakter* (von Γ nach K) ist ein Homomorphismus $\Gamma \rightarrow K^\times$.

Für jede Menge M ist die Menge $\text{Abb}(M, K)$ der Abbildungen von M nach K ein K -Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und skalarer Multiplikation.

Lemma 3.17. K, Γ wie zuvor. Paarweise verschiedene Charaktere χ_1, \dots, χ_n von Γ nach K sind in $\text{Abb}(\Gamma, K)$ linear unabhängig.

Beweis. Durch Induktion über n .

IA ($n = 1$) $\chi = \chi_1 \neq 0$, da χ Werte in K^\times annimmt

IS $n \geq 2$ Annahme: Je $n - 1$ verschiedene Charaktere sind linear unabhängig. Angenommen $\sum_{i=1}^n c_i \chi_i = 0$, wobei nicht alle c_i Null sind (Sei O.B.d.A. insbesondere $c_2 \neq 0$). Sei $\mu \in \Gamma$ mit $\chi_1(\mu) \neq \chi_2(\mu)$. Dann gilt für alle $\gamma \in \Gamma$:

$$(1): \quad 0 = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(\mu\gamma) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(\mu) \chi_i(\gamma)$$

$$(2): \quad 0 = \chi_1(\mu) \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(\gamma) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_1(\mu) \chi_i(\gamma)$$

$$\begin{aligned} (1) - (2): \quad 0 &= \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{(\chi_i(\mu) - \chi_1(\mu))}_{=0 \text{ für } i=1} \cdot \chi_i(\gamma) \\ &= \sum_{i=2}^n c_i \underbrace{(\chi_i(\mu) - \chi_1(\mu))}_{\neq 0 \text{ für } i=2} \cdot \chi_i(\gamma) \end{aligned}$$

Damit sind χ_2, \dots, χ_n linear abhängig. \nexists Widerspruch zu I-Annahme.

¹⁸Erweiterung mit abelscher Galoisgruppe

□

Korollar 3.18. *Paarweise verschiedene Automorphismen eines Körpers K sind linear unabhängig in $\text{Abb}(K, K)$*

Beweis. Sei $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \text{Aut}(K)$. Dann wende lemma 3.17 auf $\sigma_1|_{K^\times}, \dots, \sigma_n|_{K^\times}$ an. □

Lemma 3.19. *Sei $L|K$ endliche und separabel. Sei $n = [L : K]$. Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n : L \rightarrow \bar{K}$ paarweise verschiedene K -Homomorphismen. Dann sind äquivalent:*

(i) $v_1, \dots, v_n \in L$ bilden eine K -Basis von L

(ii) $\det((\sigma_i(v_j))_{ij}) \neq 0$

Beweis.

(i) \Rightarrow (ii) Durch Kontraposition: Sei v_1, \dots, v_n also keine Basis. Wenn sie kein Erzeugendensystem sind, ist auch die lineare Unabhängigkeit verletzt, da $n = [L : K]$. v_1, \dots, v_n ist also nicht linear unabhängig. Sei dann $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0$, wobei nicht alle $\lambda_j \in K$ Null sind. Dann ist $0 = \sigma(0) = \sigma(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma(v_j)$ für alle i . D.h. die Spalte von $(\sigma_i(v_j))_{ij}$ sind linear abhängig.

(ii) \Rightarrow (i) Durch Kontraposition: Sei $\det = 0$. Dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_n \in \bar{K}$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i \sigma_i(v_j) = 0$ für alle j (Zeilen lin. abh). Nach lemma 3.17 sind $\sigma_1|_{L^\times}, \dots, \sigma_n|_{L^\times}$ linear unabhängig. Falls $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = L$, dann gilt $\sum_{i=1}^n \mu_i \sigma_i = 0$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit. Also ist v_1, \dots, v_n keine Basis.

□

VL vom 8.12.2023:

Satz 3.20 (Satz von der Normalbasis). *Sei $L|K$ eine endliche Galois-Erweiterung. Sei $n = [L : K]$ und $\text{Gal}(L|K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Es existiert ein $a \in L$, sodass $\sigma_1(a), \dots, \sigma_n(a)$ eine*

K -Basis von L bilden. Eine solche Basis nennen wir Normalbasis von $L|K$.

Beweis für unendliche Körper. Gemäß 3.19 reicht es ein Element $a \in L$ zu finden, mit $\det(\sigma_i(\sigma_j(a)))_{ij} \neq 0$. Nach dem Satz vom primitiven Element (2.56) gibt es ein $b \in L$ mit $K(b) = L$. Dann sind $b_i := \sigma_i(b)$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $f := m_{b,K} = \prod_{i=1}^n (X - \sigma_i(b)) \in K[X]$. Es ist $b_1 := b$ und $b_i := \sigma_i(b)$. Setze

$$g_j = \prod_{i \neq j} \frac{X - b_i}{b_j - b_i} \in L[X] \quad \text{womit } g_j(b_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } j = k \\ 0 & \text{, wenn } j \neq k \end{cases}$$

Weiter ist

$$(1) \quad g_1 + \dots + g_n = 1$$

, weil die linke Seite Grad $\leq n-1$ hat und beide Seiten für b_1, \dots, b_n übereinstimmen.

$$(2) \quad \sigma_{j*}(g_1) = \sigma_{j*} \left(\prod_{i \neq 1} \frac{X - b_i}{b_1 - b_i} \right) = \prod_{i \neq 1} \frac{X - \sigma_{j*}(b_i)}{b_j - \sigma_{j*}(b_i)} = \prod_{i \neq j} \frac{X - b_i}{b_j - b_i} = g_j$$

Betrachte die Matrix

$$A = (\sigma_{i*}(g_j))_{ij} \in M_n(L[X])$$

Beh: $\det(A) \neq 0 \in L[X]$

- Für jedes b_k ist $(g_i \cdot g_j)(b_k) = \delta_{ik} * \delta_{jk} = 0$ falls $i \neq j$. \Rightarrow Für $i \neq j$ gilt $f = m_{b,K} | (g_i \cdot g_j)$. (smile)
- Multipliziere (1) mit g_i . Dann ergibt sich, dass $g_i^2 \equiv g_i \pmod{f \cdot L[X]}$. (*)

Sei $B = AA^T = (\beta_{ij})_{ij} \in M_n(L[X])$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \sum_{k=1}^n \sigma_{i*}(g_k) \sigma_{j*}(g_k) \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^n \sigma_{i*}(\sigma_{k*}(g_1)) \sigma_{j*}(\sigma_{k*}(g_1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{(\sigma_i \circ \sigma_k)_*}_{=\sigma_{m(i,k)}}(g_1) \cdot \underbrace{(\sigma_j \circ \sigma_k)_*}_{=\sigma_{m(j,k)}}(g_1) \end{aligned}$$

mit einer passenden Abbildung $m: [n] \times [n] \rightarrow [n]$.

$$i = j \quad \beta_{ii} = \sum_{k=1}^n (\sigma_{m(i,k)}(g_1))^2 = \sum_{k=1}^n g_k^2 \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^n g_k \stackrel{(1)}{=} 1 \pmod{f \cdot L[X]}$$

$i \neq j \quad m(i,k) \neq m(j,k)$ für alle k . Wegen (smile) also $\beta_{ij} \equiv 0 \pmod{f \cdot L[X]}$.

$\Rightarrow B \equiv I_n \pmod{f \cdot L[X]} \Rightarrow \det(A)^2 = \det(B) \equiv 1 \pmod{f \cdot L[X]}$. Insbesondere ist $\det(A) \neq 0$.

Weil K unendlich ist existiert ein $u \in K$ so, dass $p(u) \neq 0$, wobei $p := \det(A) \in L[X]$.
Definiere $a := g_1(u)$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 \neq p(u) &= \det \left((\sigma_{i*}(g_j)(u))_{ij} \right) \\ &= \det \left(((\sigma_i \circ \sigma_j)_* g_j(u))_{ij} \right) \\ &= \det \left(((\sigma_i \circ \sigma_j)(a))_{ij} \right) \\ &= \det \left((\sigma_i(\sigma_j(a)))_{ij} \right) \end{aligned}$$

□

§3.4 Auflösbarkeit von Gleichungen

Definition 3.21. Sei K ein Körper, $a \in K$. Eine Nullstelle von $X^n - a$ nennt man *Radikal* von a .

Die Nullstellen von $X^n - a$ in \bar{K} sind

$$\{\xi \cdot \sqrt[n]{a} \mid \xi \in \mu_n(\bar{K})\}$$

. Der Zerfällungskörper ist $K(\xi, \sqrt[n]{a})$, wobei ξ eine primitive n -te EW ist.

Satz 3.22. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $\text{char}(K) \nmid n$.¹⁹ Es enthalte K eine primitive n -te EW ξ

(a) $K(\sqrt[n]{a})|K$ eine endliche Galois-Erweiterung. Die Galoisgruppe $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{a})|K)$ ist zyklisch und ihre Ordnung teilt n .

(b) Ist $L|K$ eine endliche Galois-Erweiterung mit $[L : K] = n$ und zyklischer Galoisgruppe, dann ist $L = K(\sqrt[n]{a})$ für ein $a \in K$.

Beweis.

a) $K(\sqrt[n]{a})|K$ ist galois'sch, weil $K(\sqrt[n]{a})$ Zerfällungskörper des separablen Polynoms $X^n - a$ ist. Sei $\sigma \in \text{Gal}(K(\sqrt[n]{a})|K)$. Dann ist $\sigma(\sqrt[n]{a}) = \omega_\sigma \cdot \sqrt[n]{a}$, wobei $\omega_\sigma = \xi^{m_\sigma}$ eine n -te EW ist. Die Abbildung $\psi : \text{Gal}(K(\sqrt[n]{a})|K) \rightarrow \mu_n(K), \sigma \mapsto \omega_\sigma = \frac{\sigma(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}}$ ist eine injektiver Gruppenhomomorphismus:

Gruppenhomomorphismus

$$\psi(\sigma\tau) = \frac{\sigma(\tau(\sqrt[n]{a}))}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sigma(\omega_\tau \cdot \sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}} = \omega_\tau \cdot \frac{\sigma(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}} = \omega_\tau \cdot \omega_\sigma = \psi(\tau)\psi(\sigma)$$

injektiv, weil σ durch ω_σ eindeutig festgelegt wird, da $\sqrt[n]{a}$ prim Element von $K(\sqrt[n]{a})$.

Wegen $\mu_n(K) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ nach 3.10 a) ist $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{a})|K)$ auch zyklisch

b) $L|K$ Galois mit $\text{Gal}(L|K) = \langle \sigma \rangle$. Langrange-Resolvente: $\phi = \sum_{i=0}^{n-1} \xi^{-i} \cdot \sigma^i \in \text{Abb}(L, L)$. Nach 3.18 sind $\sigma^0, \dots, \sigma^{n-1}$ linear unabhängig in $\text{Abb}(L, L)$. Somit ist $\phi \neq 0$. Also existiert ein $c \in L$ mit $b := \phi(c) \neq 0$. Es gilt $\sigma(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi^{-i} \cdot \sigma^{i+1}(c) = \xi \sum_{i=0}^{n-1} \xi^{-(i+1)} \cdot \sigma^{i+1}(c) = \xi \cdot b$, weil $\xi^{-((n-1)+1)} = \xi^{-n} = \xi^0$ und $\sigma^{(n-1)+1} = \sigma^0$. Das Minimalpolynom von b hat die Nullstellen $b, \xi \cdot b, \xi^2 \cdot b, \dots, \xi^{n-1} \cdot b$ und $\text{Grad} \leq n$. Also $m_{b,K} = \prod_{i=0}^{n-1} (X - \xi^i \cdot b) = X^n - b^n \in K[X]$. Wähle $a = b^n$.

□

Definition 3.23.

(i) man sagt eine K -Erweiterung $L|K$ sei *durch Radikale auflösbar*, wenn ein Turm von endlichen K -Erweiterungen gibt $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \cdots \subseteq K_r$, sodass

¹⁹0 teilt keine Zahl

- Für alle i ist $K_i = K_{i-1}(u_i)$ mit $u_i^{m_i} \in K_{i-1}$ für $m_i \in \mathbb{N}$
- $L \subseteq K_r$

(ii) Wir nennen ein Polynom $f \in K[X] \setminus K$ durch Radikale auflösbar, wenn der Zerfällungskörper von f über K durch Radikale auflösbar ist.

Bedeutung: Die Nullstellen von f lassen sich mittels Körperoperationen (+ and *) und (iterierte) Wurzeln schreiben.

VL vom 15.12.2023:

Lemma 3.24. K Körper mit $\text{char}(K) = 0$

- Wenn $L|K$ durch Radikale auflösbar, dann existiert ein Radikalturm $K \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r$ mit $L \subseteq K_r$ und $K_r|K$ galois'sch.
- Sei $\xi \in \bar{K}$ eine EW, dann ist $L|K$ durch Radikale auflösbar g.d.w. $L(\xi)|K(\xi)$ durch Radikale auflösbar ist.

Beweis. a) Induktion über die Länge des Turms: Der Induktionsanfang mit Länge 0 ist gegeben \checkmark . Für den Induktionsschritt betrachte einen Turm $K \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n$, wobei $K_n = K_{n-1}(u)$ mit $u^m \in K_{n-1}$ und $K_{n-1}|K$ galoisch ist²⁰. Nach Induktionsvoraussetzung muss ein solcher Turm existieren. Betrachte

$$f = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(K_{n-1}|K)} (X^m - \sigma(u^m)) \in K[X]$$

. $f \in K[X]$, weil $\sigma^*(f) = f$ (die Linearfaktoren werden nur permutiert) und somit alle Koeffizienten in $K_{n-1}^{\text{Gal}(K_{n-1}|K)} = K$ liegen müssen. Seien u_1, \dots, u_t die Nullstellen von f in M , dem Zerfällungskörper von f :²¹

$$K \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_{n-1}(u_1) \subseteq K_{n-1}(u_1, u_2) \subseteq \dots \subseteq K_{n-1}(u_1, \dots, u_t) = M$$

Die zu beweisende Aussage gilt mit $K_r := M$: $M|K$ ist normal (weil Zerfällungskörper) und separabel (da $\text{char}(K) = 0$) und damit galois'sch. Offensichtlich ist auch $L \subseteq M$ und M lässt sich durch einen Radikalturm darstellen.

b)

- \Leftarrow Sei $K(\xi) \subseteq K_1 \subseteq K_r \supseteq L(\xi)$ ein Radikalturm für $L(\xi)|K(\xi)$. Erhalte neuen Turm mit $K \subseteq K(\xi) \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r \supseteq L(\xi) \supseteq L$ einen neuen Radikalturm für $L|K$.
- \Rightarrow Sei $K \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r \supset L$ ein Radikalturm für $L|K$. Dann ist $K(\xi) \subseteq K_1(\xi) \subseteq \dots \subseteq K_r(\xi) \supseteq L(\xi)$.

²⁰**TODO Die Index-Arbeit hier ist verwirrend: Wir Konstruieren kein $K_n = K_{n-1}(u)$ sondern nur einen Turm (der auch galois ist), der K_n enthält.**

²¹Wenn K_{n-1} Zerfällungskörper von $W \subseteq K[X]$, dann ist M Zerfällungskörper von $W \cup \{f\}$

□

Satz 3.25. K Körper, $\text{char}(K) = 0$, $L|K$ endliche Erweiterung. Dann sind äquivalent:

- (i) $L|K$ ist durch Radikale auflösbar
- (ii) Es existiert eine endliche galois'sche Erweiterung $M|K$ mit $L \subseteq M$ und $\text{Gal}(M|K)$ auflösbar.

Erinnerung. Gruppe G auflösbar, wenn eine Normalreihe $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = G$ und G_{i+1}/G_i abelsch existiert bzw. $G' = [G, G]$ terminiert in $\{1\}$ nach endlich vielen Schritten.

Beweis.

- (ii) \Rightarrow (i) Sei $n = [M : K]$ und $\xi \in \bar{K}$ eine primitive n -te Einheitswurzel. Nach 3.24 genügt es zu zeigen, dass $M(\xi)|K(\xi)$ durch Radikale auflösbar ist. Bemerke $M(\xi)|K(\xi)$ galois'sch, da $M|K$ bereits galois'sch nach Voraussetzung.

$$\text{Gal}(M(\xi)|K(\xi)) \leq \text{Gal}(M|K)$$

gilt, da sich Automorphismen aus $G(M(\xi)|K(\xi))$ auf $\text{Gal}(M|K)$ eingeschränkt werden kann. Die ist möglich, da die evtl.²² zusätzliche Nullstellen ξ^i (als Elemente in $K(\xi)$) fix gehalten werden und die Automorphismen in $\text{Gal}(M(\xi)|K(\xi))$ höchstens auf den verbleibenden Nullstellen/Elementen in M nicht-fix agieren können.

Nach theorem 1.12 sind die Untergruppen auflösbarer Gruppen auflösbar. Damit ist auch $\text{Gal}(M(\xi)|K(\xi))$ auflösbar, da $\text{Gal}(M|K)$ nach Voraussetzung auflösbar.

Sei $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = \text{Gal}(M(\xi)|K(\xi))$ mit G_i/G_{i-1} abelsch, nach 1.13 sogar zyklisch. Definiere $K_i = M(\xi)^{G_{r-i}}$.

$$K(\xi) = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r = M(\xi)$$

Nach Hauptsatz der Galoistheorie ist $M(\xi)|K_i$ galois'sch mit $\text{Gal}(M(\xi)|K_i) = G_{r-i}$. Nach 3.4 und wegen $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ folgt $\text{Gal}(K_{i+1}|K_i) = G_{r-i}/G_{r-i-1}$, was zyklisch ist (siehe oben). Sei $m = [K_{i+1} : K_i]|n$ und K enthält eine primitive n -te EW. Dann gilt nach 3.22b) $K_{i+1} = K_i(\sqrt[m]{a})$ für ein $a \in K_{i-1}$

- (i) \Rightarrow (ii) Beweisidee: Gruppenturm aus Körperturm umsetzen. Mit lemma 3.24 finde Radikalturm $K = K_0 \subseteq \dots \subseteq K_r$ mit $K_r|K$ galois'sch und $K_i = K_{i-1}(u_i)$ wobei $u_i^{m_i} \in K_{i-1}$ für geeignete $m_i \in \mathbb{N}$. Sei n ein Vielfaches von m_1, \dots, m_r und ξ eine primitive n -te EW und $M = K_r(\xi)|K$ galois'sch. Setze $G_i = \text{Gal}(M|K_{r-i}(\xi)) \leq \text{Gal}(M|K)$. $K_{r-i}(\xi)$ ist Radikalerweiterung von K_{r-i-1} . Nach 3.22 gilt/gibt es? $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = \text{Gal}(M|K(\xi)) \leq \text{Gal}(M|K)$ Nach 3.22a) ist G_i/G_{i-1} für alle i zyklisch. Da $K(\xi)|K$ galois'sch, folg aus 3.4, dass normal Untergruppe und nach 3.10 ist die Faktorgruppe ablsch.

²² ξ könnte bereits in M sein. In dem Fall ist $\text{Gal}(M(\xi)|K(\xi))$ die Menge der Automorphismen in $\text{Gal}(M|K)$ ist, die ξ fix halten.

□

Korollar 3.26. K Körper mit $\text{char}(K) = 0$. Dann $f \in K[X] \setminus K$ auflösbar durch Radikale gdw. Galoisgruppe des Zerfällungskörpers auflösbar ist.

Beweis.

\Leftarrow L Zerfällungskörper, $\text{Gal}(L|K)$ auflösbar, setze $M = L$ in 3.25

\Rightarrow Sei $L|K$ durch Radikale auflösbar. Nach 3.25 ist $K \subseteq L \subseteq M$. Da $L|K$ galois'sch, ist $\text{Gal}(M|L) \trianglelefteq \text{Gal}(M|K)$ und $\text{Gal}(M|K)/\text{Gal}(M|L) = \text{Gal}(L|K)$. Nach 3.25 ist $\text{Gal}(M|K)$ auflösbar und damit ist $\text{Gal}(L|K)$ als dessen Faktor auch auflösbar (nach 1.12).

□

Beispiel 3.27. 1. S_5 nicht auflösbar ($A_5 \leq S_5$ einfach, also nicht auflösbar). Wenn Polynom f so geartet ist, dass für dessen Zerfällungskörper M gilt $\text{Gal}(M|K) \cong S_5$, dann lassen sich die Nullstellen von f nicht durch iterierte Wurzeln sind. Z.B. $f = X^5 - 25X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

2. Alle Untergruppen von S_4, S_3 sind auflösbar.

VL vom 21.12.2023:

§3.5 Spur und Norm

Definition 3.28. Sei $L|K$ endlich. Sei $a \in L$. Die *Spur* $\text{Sp}_{L|K}(a) \in K$ ist die Spur des K -lin. Endomorphismus $\phi_a : L \rightarrow L, \phi_a(x) = a \cdot x$. Ähnlich definiert man die *Norm* $N_{L|K}(a) \in K$ als $\det(\phi_a)$. Das char. Polynom von ϕ_a bezeichnen wir mit $\chi_{a,L|K} \in K[X]$.

Offensichtlich ist $\text{Sp}_{L|K} : L \rightarrow K$ K -linear. Weiter ist $N_{L|K}(a \cdot b) = N_{L|K}(a) \cdot N_{L|K}(b)$.

Beispiel 3.29. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}), K = \mathbb{Q}$. Sei $a = a_1 + \sqrt{3}a_2 \in L, a_i \in \mathbb{Q}$. Die darstellende Matrix von ϕ_a bez. der \mathbb{Q} -Basis $1, \sqrt{3}$ ist.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 3a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Also gilt $\text{Sp}_{L|K}(a) = 2a_1$ und $N_{L|K}(a) = a_1^2 - 3a_2^2$

Lemma 3.30. Sei M ein Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung $L|K$. Dann ist $\chi_{a,L|K} = \chi_{a,M|K}^{[L:M]}$ für $a \in M$.

Beweis. Wähle VR-Basen v_1, \dots, v_n von M über K, w_1, \dots, w_m von L über M . Dann bilden die Produkte $w_k \cdot v_i$ eine VR-Basis von L über K . Sei A die darstellende Matrix von ϕ_a bezüglich (v_1, \dots, v_n) . Dann gilt

$$\chi_{a,M|L} = \det(X \cdot I_n - A)$$

Die darstellende Matrix von $\phi_a : L \rightarrow L$ bezüglich der Basis $w_k \cdot v_i$ ($k = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$) ist.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_{a,L|K} = \chi_{a,M|L}^m, m = [L : M]$$

□

Bemerkung 3.31. Unter der Voraussetzung von 3.30 erhält man für $a \in M$, dass

$$Sp_{L|K}(a) = [L : M] \cdot Sp_{M|K}(a)$$

$$N_{L|K}(a) = N_{M|K}(a)$$

Satz 3.32. Sei $L|K$ endlich und $a \in L$. Es sei $m_{a,K} = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$. Dann gelten

$$Sp_{L|K}(a) = -[L : K(a)]\alpha_{n-1}$$

$$N_{L|K}(a) = ((-1)^n \cdot \alpha_0)^{[L:K(a)]}$$

Beweis. Nach Lemma 3.30/3.31 reicht es den Fall $L = K(a)$ zu betrachten. In diesem Fall hat L die Basis $1, a, \dots, a^{n-1}$ über K . Die dazugehörige Matrix von ϕ_a lautet²³

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Sp_{L|K}(a) = -\alpha_{n-1} \Rightarrow N_{L|K}(a) = (-1)^n \alpha_0$$

□

Bemerkung 3.33. Es gilt sogar $\chi_{a,K(a)|K} = m_{a,K}$.

Cayley Hamilton: $\chi_{a,K(a)|K}(\phi_a) = 0$. Andererseits ist $0 = \chi_{a,K(a)|K}(\phi_a)(1) = \chi_{a,K(a)|K}(\underbrace{\phi_a(1)}_{=a})$.

Da $\deg(\chi_{a,K(a)|K}) = \deg(m_{a,K})$ ist $m_{a,K} = \chi_{a,K(a)|K}$.

Satz 3.34. Sei $L|K$ endlich und separabel. Sei $n = [L : K]$ und $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \text{Hom}_K(L, \bar{K})$. Dann gilt für $a \in L$

$$Sp_{L|K}(a) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(a)$$

$$N_{L|K}(a) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(a)$$

²³Die letzte Spalte ergibt sich aus $a \cdot a^{n-1} = a^n$, da $0 = m_{a,K}(a) = a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \dots, \alpha_0$

Beweis. $m_{a,K} = X^r + \alpha_{r-1}X^{r-1} + \dots + \alpha_0$ das Minimalpolynom. Nach Lemma 2.44 ist $K(a)|K$ ist auch separabel. Folglich gibt es r verschiedene K -Homomorphismen τ_1, \dots, τ_r von $K(a)$ nach \bar{K} . Weiter ist $m_{a,K} = \prod_{i=1}^r (X - \tau_i(a))$.

$$\implies \sum_{i=1}^r \tau_i(a) = -\alpha_{r-1} \text{ und } \prod_{i=1}^r \tau_i(a) = (-1)^r \cdot \alpha_0.$$

Es ist $\{\sigma_{1|K(a)}, \dots, \sigma_{n|K(a)}\} = \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$. Für jedes i ist die Anzahl der j 's mit $\sigma_{j|K(a)} = \tau_i$ gleich $[L : K(a)]_S = [L : K(a)]$. Daher folgt

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j(a) = [L : K(a)] \cdot \sum_{i=1}^r \tau_i(a) = -[L : K(a)] \alpha_{r-1} \stackrel{\text{Satz 3.32}}{=} Sp_{L|K}(a)$$

.

Satz 3.35. Sei M ein Zwischenkörper der endlichen Erweiterung $L|K$. Dann gelten $Sp_{L|K} = Sp_{M|K} \circ Sp_{L|M}$ und $N_{L|K} = N_{M|K} \circ N_{L|M}$

Beweis (nur für separable Erweiterungen). Seien $hom_M(L, \bar{K}) = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$, $m = [L : M]$ $hom_K(M, \bar{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_l\}$, $l = [M : K]$. Dann ist $\{\bar{\sigma}_j \circ \tau_i \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l\}\} = hom_K(L, \bar{K})$, wobei $\bar{\sigma}_j$ Erweiterung von σ_j zu $\bar{K} \rightarrow \bar{K}$ (siehe Beweis von 2.46)

$$\begin{aligned} Sp_{L|K}(a) &= \sum_{i,j} \bar{\sigma}_j(\tau_i(a)) \\ &= \sum_j \bar{\sigma}_j \left(\underbrace{\sum_i \tau_i(a)}_{Sp_{L|M}(a) \in M} \right) \\ &= \sum_j \sigma_j(Sp_{L|M}(a)) \\ &= Sp_{M|K}(Sp_{L|M}(a)) \end{aligned}$$

Satz 3.36. Sei $L|K$ endlich und separabel.

- a) Es gibt ein $a \in L$ mit $Sp_{L|K}(a) \neq 0$
- b) Durch $(v, w) := Sp_{L|K}(v \cdot w)$ wird eine symmetrische Bilinearform des K -VR L definiert, die nicht ausgeartet ist.

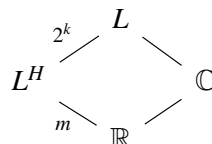
Beweis. a) Die Homom. $\{\tau_1, \dots, \tau_n\} = hom_K(L|\bar{K})$ sind lin. unabhängig als Elemente von $Abb(L^\times, \bar{K})$ und somit von $Hom_K(L, \bar{K})$. Da $Sp_{L|K} = \sum_{i=1}^n \tau_i$ kann $Sp_{L|K}$ nicht die Nullabbildung sein.

- b) Sei $a \in L$ mit $Sp_{L|K}(a) \neq 0$. Dann gilt $(v, av^{-1}) = Sp_{L|K}(a) \neq 0 \implies$ nicht ausgeartet

§3.6 Anwendungen der Galoistheorie

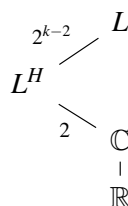
Erinnerung (Fundamentalsatz der Algebra). \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq L$ eine Kette von endlichen Erweiterungen. Zu zeigen: $L = \mathbb{C}$. Durch Vergrößern von L können wir annehmen, dass $L|\mathbb{R}$ eine Galoiserweiterung ist. Sei $G := \text{Gal}(L|\mathbb{R})$. Es ist $[L : \mathbb{R}] = |G| = 2^k \cdot m$ mit $2 \nmid m$, $k > 1$, weil $[L : \mathbb{R}] = [L : \mathbb{C}] \cdot [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = [L : \mathbb{C}] \cdot 2$. Es sei $H \leq G$ eine 2-Sylowuntergruppe von G .



Satz vom primitiven Element: $L^H = \mathbb{R}(\alpha)$. Wenn $m > 1$, wäre $\deg(m_{\alpha, \mathbb{R}})$ ungerade und dann besäße $m_{\alpha, \mathbb{R}}$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in \mathbb{R} , womit $m_{\alpha, \mathbb{R}}$ linear wäre. Also $m = 1$ und $L^H = \mathbb{R}$. $\implies [L : \mathbb{R}] = 2^k$, $[L : \mathbb{C}] = 2^{k-1}$

Ang. $k \geq 2$. Dann existiert $H' \leq G' = \text{Gal}(L|\mathbb{C})$ mit $|H'| = 2^{k-2}$ (allg. Aussage über p -Gruppen **TODO Citation needed**)



Da jedes quadratische Polynom in $\mathbb{C}[X]$ zerfällt in \mathbb{C} , folgt ähnlich wie oben ein Widerspruch (mit $m_{a, \mathbb{C}}$ für die $L^H = \mathbb{C}(a)$) \square

VL vom 22.12.2023: (Weihnachtsvorlesung)

§3.7 Transzendenz von e und π

Satz 3.37. e ist transzendent (über \mathbb{Q})

Lemma 3.38. Ist $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom, das bei Stelle $s \in \mathbb{N}$ eine k -fache Nullstelle hat, so ist

$$T := e^s \cdot \int_s^\infty F(x) e^{-x} dx$$

eine durch $k!$ teilbare ganze Zahl. Weiter gilt: $\frac{T}{k!} \equiv \frac{F}{(x-s)^k} \Big|_{x=s} \pmod{k+1}$

Beweis. Zunächst sei $s = 0$. Der allgemeine Fall folgt dann durch Substitution $x = x' + s$. man hat $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$. Da F eine \mathbb{Z} -Linearkombination von Polynomen x^{k+j} ist, folgt daraus die erste Aussage.

$$\frac{1}{k!} \int_0^\infty x^{k+j} e^{-x} dx = \frac{(k+j)!}{k!} = \begin{cases} 1 & j=0 \\ (k+1) \dots (k+j) & j \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^{k+j}}{x^k} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 1 & j=0 \\ 0 & j \geq 1 \end{cases}$$

Beide sind kongruent $\pmod{k+1}$ □

Beweis. Angenommen e wäre algebraisch über \mathbb{Q} . Dann gilt $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 + a_1 \cdot e + \dots + a_n e^n = 0$, $a_0 \neq 0$. Für ein noch festzulegendes $F \in \mathbb{Z}[X]$ multipliziert mit $\int_0^\infty F(x) e^{-x} dx$:

->

$$0 \stackrel{(*)}{=} \sum_{s=0}^n a_s e^s \int_0^\infty F(x) e^{-x} dx = \underbrace{\sum_{s=0}^n a_s e^s \int_0^s F(x) e^{-x} dx}_{P_2 :=} + \underbrace{\sum_{s=0}^n a_s e^s \int_s^\infty F(x) e^{-x} dx}_{P_1 :=}$$

Besitzt F in 0 eine k -fache Nullstelle und in den Stellen $1, 2, \dots, n$ eine $(k+1)$ -fache Nullstelle besitzt, dann $\mathbb{Z} \ni P_1 \equiv 0 \pmod{k!}$ ²⁴ und $\frac{P_1}{k!} \equiv a_0 \cdot \frac{F}{x^k} \Big|_{x=0} \pmod{k+1}$.²⁵ Für eine geeignete Wahl von F erhalten wir $\frac{P_1}{k!} \not\equiv 0 \pmod{k}$ und somit $\frac{P_1}{k!} \neq 0$. Wähle $F(x) = x^k(x-1)^{k+1} \dots (x-n)^{k+1}$ für ein k , das ein Vielfaches von $a_0 \cdot n!$ ist. Für diese Wahl ist $a_0 \frac{F}{x^k} \Big|_{x=0} \not\equiv 0 \pmod{k+1}$. Somit $P_1 \neq 0$, also $|P_1| \geq 1$.

Für den gewünschten Widerspruch zeigen wir nun $|\frac{P_2}{k!}| < 1$ für $k \gg 1$. Beh: Für die obige Wahl von F gibt es von k unabhängig Konstanten $C, M \geq 0$ mit $|P_2| \leq C \cdot M^k$.

My notes: P_2 lässt sich durch $n \cdot n^{n \cdot (k+1)+k}$, weil $s \leq n$, $e^{-x} \leq 1$. Dann ist $M = n^{n+1}$, $C = n^{n+1}$.

$$\Rightarrow \frac{P_2}{k!} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ (Stirling)} \neq.$$

□

Ähnlich aber komplizierter beweist man: Satz(Hilbert): Ist $P \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad n und sind $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ seine Nullstellen, dann $a + e^{s_1} + \dots + e^{s_n} \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen a . [mult. die angenommene Gleichung mit $\int_0^\infty F(x) e^{-x} dx$ für ein geeignetes $F \in \mathbb{Z}[X]$]

Transzendenz von π . Ang. π wäre algebraisch über \mathbb{Q} . Dann ist auch $x_1 := i \cdot \pi$ algebraisch. Sei $0 \neq Q \in \mathbb{Z}[X]$ sodass $Q(x_1) = 0$. Es seien x_2, \dots, x_n die anderen Nullstellen von Q . Wegen $e^{x_1} = -1$ ist dann

$$0 = \prod_{i=1}^n (1 + e^{x_i}) = 1 + e^{s_1} + e^{s_2} + \dots + e^{s_m}$$

wobei jedes s_i genau die Summe einer bestimmten Anzahl von x_i 's ist und $m = 2^n - 1$. Betrachte nun das Polynom $P = (X - s_1) \dots (X - s_m) \in \mathbb{C}[X]$. Da $s_i \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$, ist $P \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)[X]$ und $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n) | \mathbb{Q})$. Jedes $\sigma \in G$ permutiert die x_i und somit die s_j . Daher gilt $P \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^G[X] = \mathbb{Q}[X]$. Fun fact: P ist nicht irreduzibel.

Daher ergibt sich ein Widerspruch zum Satz von Hilbert □

²⁴Richtig, weil richtig in jedem summanden??

²⁵Lemma -> erster Summand in P_1 . Die anderen summanden sind $0 \pmod{k+1}$

4 Bewertungstheorie

VL vom 11.1.2024:

§4.1 Beträge

Definition 4.1. Ein *Betrag* auf einem Körper K ist eine $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften

i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Aus ii) folgt $|1| \cdot |1| = |1| = 1$.

Beispiel 4.2.

i) \mathbb{R} mit dem gewöhnlichen Absolutbetrag

ii) K beliebig. Dann definiert

$$|x|_{trivial} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

ein Betrag (genannt: *trivialer Betrag*)

iii) \mathbb{C} mit dem komplexen Betrag

iv) Ist $|\cdot|$ ein Betrag auf L und K ein Teilkörper von L , so ist $|\cdot|_K$ ein Betrag auf K .

Definition 4.3 (*p*-adischer Betrag). Sei $a \in \mathbb{Z}$ und p prim. Dann ist $v_p(a) = \sup\{e \in \mathbb{N} \mid p^e | a\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die *p*-adische Betrag. Beachte $v_p(0) = \infty$.

Damit gilt:

$$a = \pm \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(a)}$$

Die Funktion $v_p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt *p*-adische Bewertung. Sie hat die folgenden Eigenschaften

i) $v_p(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$

ii) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

iii) $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$

Sei nun $x \in \mathbb{Q}^\times$. Schreibe

$$x = p^m \cdot \frac{a}{b}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a$, $p \nmid b$. Definiere $v_p(x) = m$ und $v_p(0) = \infty$. Dies setzt die p -adische Bewertung von \mathbb{Z} auf \mathbb{Q} fort mit den gleichen Eigenschaften. Setze $|x|_p := p^{-v_p(x)}$ mit der Konvention $|0|_p = p^{-\infty} = 0$. Dann definiert $|\cdot|_p$ einen Betrag auf \mathbb{Q} , den p -adischen Betrag²⁶. Die Eigenschaften i), ii) sind offensichtlich. Zu iii):

$$\begin{aligned} |x+y|_p &= p^{-v_p(x+y)} \\ &\leq p^{-\min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ &= \max\{|x|_p, |y|_p\} \end{aligned}$$

Dies wird *ultrametrische Dreiecksungleichung* genannt.

Definition 4.4. Eine Bewertung v auf einem Körper K ist eine Funktion

$$v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

mit folgenden Eigenschaften

- i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$
- ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$
- iii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

Lemma 4.5. Seien K ein Körper, v eine Bewertung auf K und $a \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann definiert $|x| = a^{-v(x)}$ einen Betrag auf dem die ultrametrische Dreiecksungleichung $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ erfüllt.

Beweis. analog zu p -adischen Betrag □

Beispiel 4.6. Sei K ein Körper. Sei $K(T) = \text{Quot}(K[T])$. Sei $K(T) \setminus \{0\} \ni x = \frac{f}{g}$, $f, g \in K[T]$. Setze $v_{deg}(x) = -\deg(f) + \deg(g)$ und $v_{deg}(0) = \infty$. Dies definiert eine Bewertung auf $K(T)$

Definition 4.7 (Metrik und Topologie). Sei K ein Körper mit Betrag $|\cdot|$. Dann definiert $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik auf K . Insbesondere erhalten wir eine Topologie auf K vermöge

$$U \text{ offen} \Leftrightarrow \forall u \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^{| \cdot |} = \{v \in K \mid |u - v| < \varepsilon\} \subseteq U$$

Bemerkung 4.8. Die Addition und Multiplikation definieren stetige Abbildungen $K \times K \rightarrow K$.

Definition 4.9. Zwei Bewertungen $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ sind *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie auf K induzieren.

²⁶Zum 2ten mal

Lemma 4.10. Für zwei Beträge $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ auf K sind folgende Aussagen äquivalent (schreibe $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$):

a) $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$

b) $\forall x \in K : |x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1$

c) $\exists s \in \mathbb{R}_{>0} : |x|_1 = |x|_2^s \text{ für alle } x \in K$

Beweis.

a) \Rightarrow b) Sei $x \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x|_1 < 1 &\Leftrightarrow |x|_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Leftrightarrow |x^n|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Leftrightarrow |x^n|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Leftrightarrow |x|_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Leftrightarrow |x|_2 < 1 \end{aligned}$$

TODO Wieso folgt das in der Mitte aus äquivalenz?

b) \Rightarrow c) Falls $|\cdot|_1$ nicht trivial ist, dann gilt es ein $y \in K^\times$ mit $|y|_1 < 1$. Somit ist $|\cdot|_1$ trivial gdw $|\cdot|_2$ trivial ist.

Wir nehmen nun an, dass $|\cdot|_1$ nicht trivial ist. Sei $x \in K^\times$. Schreibe $|x|_1 = |y|_1^\alpha$ für eine $\alpha \in \mathbb{R}$. Beh: $|x|_2 = |y|_2^\alpha$. Sei $(\frac{m_i}{n_i})_i$ eine Folge rationaler Zahlen, die von oben gegen α konvergiert.

$$|x|_1 \leq |y|_1^{\frac{m_i}{n_i}} \Rightarrow |x^{n_i}|_1 < |y^{m_i}|_1 \Leftrightarrow |x^{n_i} y^{-m_i}|_1 < 1$$

Damit folgt mit b), dass $|x^{n_i} y^{-m_i}|_2 < 1$ und somit (ähnlich wie für $|\cdot|_1$) $|x|_2 \leq |y|_2^{\frac{m_i}{n_i}}$.²⁸ Limes $i \rightarrow \infty$ ergibt, dass $|x|_2 \leq |y|_2^\alpha$. Das selbe Argument mit von unten gegen α konvergierende $\frac{m_i}{n_i}$ liefert $|x|_2 \geq |y|_2^\alpha$. Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|y|_2 = |y|_1^s$. Dann folgt:

$$|x|_2 = |y|_2^\alpha = |y|_1^{s \cdot \alpha} = |x|_1^s$$

.

c) \Rightarrow a) Sei $\varepsilon > 0$ und $u \in K$.

$$B_\varepsilon^{|\cdot|_1}(u) = \{u \in K \mid |x - u|_1 < \varepsilon\} = \{x \in K \mid |x - u| < \varepsilon^{-s}\} = B_{\varepsilon^{-s}}^{|\cdot|_2}(u)$$

$$\Rightarrow |\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$$

□

²⁷Das gilt doch nur für $|y|_1 \geq 1$

²⁸**TODO Wieso gilt die Rückrichtung?**

Korollar 4.11. Seien $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ zwei nicht triviale, nicht äquivalente Beträge auf K . Dann gibt es ein $u \in K$ mit $|u|_1 < 1$ und $|u|_2 > 1$.

Beweis. nach 4.10 b) finden wir $y \in K$ mit $|y|_1 < 1$ und $|y|_2 \geq 1$.²⁹ Falls $|y|_2 = 1$, wähle $w \in K$ mit $|w|_2 > 1$. Setze $u = y^m \cdot w$ für hinreichend großes m eine geeignete Wahl. \square

Satz 4.12 (Approximationssatz). Seien $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$ nicht trivial, paarweise inäquivalente Beträge auf K . Für alle $a_1, \dots, a_n \in K$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in K$ mit

$$|a_i - x|_i < \varepsilon \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

VL vom 11.1.2024:

Beweis. Behauptung: $\exists z \in K : |z|_1 > 1$ und $|z|_j < 1$ für $j \in \{2, \dots, n\}$ Durch Induktion: Der Induktionsanfang $n = 2$ ist nach 4.11 ✓.

Angenommen es gibt $\tilde{z} \in K$ mit $|\tilde{z}|_1 > 1$ und $|\tilde{z}|_j < 1$ für $j \in \{2, \dots, n-1\}$. Wähle $u \in K$ mit $|u|_1 > 1$ und $|u|_n < 1$ nach 4.11. Falls $|\tilde{z}|_n < 1$, dann ist $z = \tilde{z}$ das gesuchte Element. Falls $|\tilde{z}|_n = 1$, dann ist $z = u\tilde{z}^m$ für hinreichend großes m das gesuchte Element.³⁰ Falls $|\tilde{z}|_n > 1$, dann betrachtet man die Folge $t_m := \frac{\tilde{z}^m}{1+\tilde{z}^m}$, für die

$$\begin{aligned} t_m &\rightarrow 1 && \text{bez. } |\cdot|_1 \text{ und } |\cdot|_n \\ t_m &\rightarrow 0 && \text{bez. } |\cdot|_2, \dots, |\cdot|_{n-1} \end{aligned}$$

gelten. Dann ist $z = u \cdot t_m$ für hinreichend großes m das gesuchte Element. <Argumentation, dass z gewünschte Eigenschaften hat...>

Für ein $z \in K$ wie in der obigen beh. konvergiert die Folge $(\frac{z^m}{1+z^m})_m$ gegen 1 bez $|\cdot|_1$ und gegen 0 bez $|\cdot|_2, \dots, |\cdot|_n$.

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ können wir somit ein $z_i \in K$ konstruieren, das sehr nahe bei 1 bez $|\cdot|_i$ und sehr nahe 0 bez der restlichen Beträge. Das Element $x = a_1 \cdot z_1 + \dots + a_n \cdot z_n$ erfüllt die Anforderungen des Approximationssatzes. \square

Definition 4.13. Ein Betrag $|\cdot|$ auf K heißt *archimedisch*, wenn

$$\{|n \cdot 1_K| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht beschränkt ist.³¹

Satz 4.14. Ein Betrag ist genau dann nicht-archimedisch, wenn er die ultrametrische Dreiecksungleichung erfüllt.

Beweis. $\Leftarrow |n \cdot 1_K| = |1_K + \dots + 1_K| \leq |1_K| = 1$ also ist $|\cdot|$ nicht -archimedisch

²⁹Sollten die Ungleichheiten vertauscht sind, kann das Inverse betrachtet werden.

³⁰Die \tilde{z} -Potenz kann eventuelle $|u|_j > 1$ für $j \in \{2, \dots, n-1\}$ wieder unter 1 bekommen.

³¹Nach Übung: Wenn ein Betrag $|\cdot|$ nicht-archimedisch, gilt $\sup\{|n \cdot 1_K| \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$, wegen $|1| = 1$ und der ultrametrischen Dreiecksungleichung nach 4.14

\Rightarrow Seien $x, y \in K$ mit O.B.d.A. $|x| \geq |y|$. Sei $B > 0$ eine obere Schranke für $\{|n \cdot 1_K| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{aligned} |x+y|^n &= |(x+y)^n| = \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \cdot 1_K \right| \cdot |x|^k \cdot |y|^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \cdot 1_K \right| \cdot |x|^n \\ &\leq (n+1) \cdot B \cdot |x|^n \\ \Rightarrow |x+y| &\leq \sqrt[n]{(n+1)B} \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x+y| \leq |x| \end{aligned}$$

□

Der Trick am Ende für 'schlechte'/ungenauere Ungleichungen: Betrachte Potenzen und ziehe von dem dort gezeigten die Wurzel. Das kann bessere Ungleichungen bringen.

Bemerkung 4.15.

- a) Ist $|\cdot|$ ein nicht-archimedisches Betrag, dann ist $v(x) = -\log(|x|)$ eine Bewertung auf Körper K
- b) Ist $|\cdot|$ nicht-archimedisches, $|x| > |y|$, dann folgt

$$|x| = |x - y + y| \leq \max\{|x - y|, |y|\} = |x - y| \leq |x|$$

und somit Gleichheit.

Satz 4.16 (Satz von Ostrowski). *Jeder nicht-triviale Betrag auf \mathbb{Q} ist äquivalent zu $|\cdot|_p$ für eine Primzahl p oder zum Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$.*

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ ein nicht-trivialer Betrag auf \mathbb{Q} .

1. Fall Sei $\|\cdot\|$ nicht-archimedisches, d.h. $\|n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{A} := \{n \in \mathbb{Z} \mid \|n\| < 1\}$. Dann ist \mathcal{A} ein Ideal³² in \mathbb{Z} . Es gibt eine Primzahl p mit $p \in \mathcal{A}$, ansonsten wäre $\|\cdot\|$ trivial wegen Primfaktorenzerlegung. Also

$$p\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$$

(da $1 \notin \mathcal{A}$). Da $p\mathbb{Z}$ maximales Ideal ist, ist $p\mathbb{Z} = \mathcal{A}$. Sei $q \in \mathbb{Q}^\times$ und schreibe $q = p^m \cdot \frac{a}{b}$ mit $p \nmid a$, $p \nmid b$. Dann gilt $\|q\| = \|p\|^m$ wegen $\|a\| = \|b\| = 1$. Sei $s > 0$ so, dass $p^{-s} = \|p\|$. Dann folgt $\|p\| = p^{-s} = (p^{-1})^s = |p|_p^s$
 $\Rightarrow \|q\| = \|p^m\| = |q|_p^s$
 $\Rightarrow \|\cdot\| \sim |\cdot|_p$

³²Für $a, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, $x \in \mathbb{Z}$ gilt $\|ax\| = \underbrace{\|a\|}_{<1} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} < 1$ und $\|a_1 + a_2\| \leq \max\{\|a_1\|, \|a_2\|\} < 1$ und $\|-a\| = \underbrace{\|1\|}_{=1} \cdot \|a\| < 1$

2. Fall Sei $\|\cdot\|$ archimedisch. Beh.: Für alle natürlichen $n, m \in \mathbb{N}_{>1}$ gilt

$$\|n\|^{\frac{1}{\log(n)}} = \|m\|^{\frac{1}{\log(m)}} \quad (*)$$

Somit $c := \|n\|^{\frac{1}{\log(n)}}$ unabhängig von $n > 1$. $\Rightarrow \|m\| = c^{\log(m)}$ für jedes $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Wenn wir $c = e^s$, $s > 0$, schreibe, dann ergibt sich für jedes positive rationale Zahl

$$x = \frac{a}{b}$$

$$\|x\| = e^{s \log(x)} = |x|_{\infty}^s$$

Damit folgt $\|\cdot\| \sim |\cdot|_{\infty}$.

Zu (*):

Schreibe $m \in \mathbb{N}$ zur Basis $n \in \mathbb{N}$ (O.B.d.A. $n < m$):

$$m = a_0 + a_1 n + \dots + a_r n^r$$

mit $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_r \neq 0$. Somit $n^r \leq m$, also $r \leq \frac{\log(m)}{\log(n)}$. Weiter $\|a_i\| \leq a_i \|1\| = a_i < n$.

Es folgt

$$\|m\| \leq \sum_{i=0}^r \|a_i\| \cdot \|n\|^i \leq \sum_{i=0}^r n \cdot \|n\|^i \leq \left(1 + \frac{\log(m)}{\log(n)}\right) \cdot n \cdot \|n\|^{\frac{\log(m)}{\log(n)}}$$

Wir ersetzen in dieser Ungleichung m durch m^k und ziehen die k -te Wurzel:

$$\|m\| \leq \sqrt[k]{\left(1 + \frac{k \cdot \log(m)}{\log(n)}\right) \cdot n^{1/k} \cdot \|n\|^{\frac{\log(m)}{\log(n)}}}$$

$$\Rightarrow \|m\|^{\frac{1}{\log(m)}} \leq \|n\|^{\frac{1}{\log(n)}}$$

Da die Rollen von m und n vertauschbar sind, folgt Gleichheit. □

§4.2 Vervollständigungen

Definition 4.17. Ein Körper mit Betrag ist *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge³³ in K konvergiert.

Beispiel 4.18.

- $(\mathbb{R}, |\cdot|_{\infty})$, $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\mathbb{C}})$ sind vollständig
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|_5)$ nicht vollständig³⁴. Sei $a_k + 5^k \mathbb{Z}$ ein Element in $(\mathbb{Z}/5^k \mathbb{Z})^{\times}$ der Ordnung 4.³⁵ Wir können erreichen, dass $a_k \equiv a_{k+1} \pmod{5^k} \Rightarrow |a_k - a_{k+1}|_5 < \frac{1}{5^k}$, also ist $(a_k)_k$ eine Cauchyfolge bezüglich $|\cdot|_5$.

$a_k + 5^k \mathbb{Z}$ hat Ordnung³⁶ 4, also $a_k^2 \equiv -1 \pmod{5^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^2 = -1$ bez $|\cdot|_5$. Also müsste ein Grenzwert $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ in \mathbb{Q} die Gleichung $a^2 = -1$ erfüllen **! TODO**

Check for correctness

³³Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine *Cauchy-Folge*, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N: |a_m - a_n| < \varepsilon$

³⁴Das Argument gilt für alle Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$

³⁵Wegen $\phi(5^k) = 5^k - 5^{k-1} = 5^{k-1} \cdot 4$ ($k \geq 2$) und der Tatsache, dass $(\mathbb{Z}/5^k \mathbb{Z})^{\times}$ zyklisch ist gilt, dass $(\mathbb{Z}/5^k \mathbb{Z})^{\times} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^{k-1} \mathbb{Z}$. Bei Hartnick gab es mehr dazu.

³⁶Ordnung $\text{ord}_G(a) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a^i = 1\}$

Definition 4.19. Sei $(K, |\cdot|)$ ein Körper mit Betrag. Eine *Vervollständigung* von $(K, |\cdot|)$ ist ein Tripel $(\hat{K}, \|\cdot\|, i)$ bestehend aus:

- einem vollständigen Körper \hat{K} mit Betrag $\|\cdot\|$
- einem Homomorphismus $i : K \hookrightarrow \hat{K}$ so, dass
 1. $\|i(x)\| = |x|$ für alle $x \in K$ ("betragserhaltend")
 2. $i(K) \subseteq \hat{K}$ ist dicht³⁷

Satz 4.20. Jeder Körper mit Betrag $(K, |\cdot|)$ besitzt eine Vervollständigung $(\hat{K}, \|\cdot\|, i)$, die bis auf kanonische Isomorphie eindeutig ist.

Letzteres bedeutet: Ist $(\hat{K}_2, \|\cdot\|_2, i_2)$ eine andere Vervollständigung von $(K, |\cdot|)$, dann existiert ein Isomorphismus $\phi : \hat{K} \xrightarrow{\cong} \hat{K}_2$ so, dass

1.
$$\begin{array}{ccc} \hat{K} & \xrightarrow{\cong} & \hat{K}_2 \\ & \searrow \phi & \nearrow i_2 \\ & K & \end{array} \quad \text{kommutiert und}$$
2. ϕ ist betragserhaltend.

Für den Beweis im Falle der p -adischen Betrags siehe Goueva: p -adic numbers SS. 64-68. Der Beweis von 4.20 verläuft genauso wie die Konstruktion von \mathbb{R} durch Cauchyfolgen in der Analysis.

Beweisskizze.

Zur Eindeutigkeit:

Für $x \in \hat{K}$ wähle $(x_n)_n$ in K mit $\lim_{n \rightarrow \infty} i(x_n) = x$ (Dichtheit). Setze $\phi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} i_2(x_n) \in \hat{K}_2$. Grenzwert ex., da $(i(x_n))_n$ genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn $(i_2(x_n))_n$ eine ist, weil i, i_2 betragserhaltend sind. Zu zeigen:

- ϕ Homomorphismus
- ϕ betragserhaltend
- die Umkehrabbildung wird ähnlich konstruiert

Zur Existenz:

Sei $\mathcal{R} := \{\text{Cauchyfolgen in } K\}$. Durch punktweise Addition und Multiplikation wird \mathcal{R} ein Ring mit Null $(0)_n$ und Eins $(1)_n$. Sei $I = \{(x_n)_n \in \mathcal{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$. Dann ist I ein Ideal. Setze $\hat{K} := \mathcal{R}/I$. \hat{K} ist ein Körper: Sei $x + I \in \hat{K} \setminus \{0\}$ d.h. $x = (x_n)_n$ mit $(x_n)_n \notin I$.

³⁷Eine Menge $M \subseteq X$ ist dicht in X , wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen zutrifft:

- Zu jedem $x \in X$ und jedem $r > 0$ existiert ein Punkt $y \in M$, sodass $|x - y| < r$
- Zu jedem $x \in X$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus M , sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Insbesondere existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq 0$ für $x_n > n_0$. Setze $y_n = \begin{cases} 1 & n \leq n_0 \\ x_n^{-1} & n > n_0 \end{cases}$. Dann ist $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge. Also $(y_n)_n \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $(x_n)_n \cdot (y_n)_n = (x_n \cdot y_n)_n = (1)_n + (u_n)_n$ mit $u_n = 0$ für $n > n_0$, $(u_n)_n \in I$. $\implies (y_n)_n + I$ Inverses von $(x_n)_n + I$ in \hat{K} . Der Betrag auf \hat{K} ist definiert durch $\|(x_n)_n + I\| := \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ (wohldefiniert).

Definiere $i(x) = (x)_n + I \in \hat{K}$.

- i offensichtlich betragserhaltend
- $i(K) \subseteq \hat{K}$ dicht: Ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in K , dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i(x_n) = (x_n)_n + I$$

- \hat{K} ist vollständig: Ist $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge in \hat{K} , dann wählen wir $x_n \in K$ mit $\|y_n - i(x_n)\| < \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} i(x_n) = (x_n)_n + I$$

□

Definition 4.21. Die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich des p -adischen Betrags $|\cdot|_p$ nennt man den *Körper der p -adischen Zahlen* \mathbb{Q}_p

Bemerkung 4.22. Es gilt folgender Satz:

Ein Körper, der vollständig bezüglich eines archimdischen Betrags ist, ist isomorph zu \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Der Betrag ist äquivalent zum gewöhnlichen Betrag.

§4.3 Bewertungen und Bewertungsringe

Satz 4.23. Sei K ein Körper mit Bewertung $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann ist

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$

$[\mathcal{O}_v = \{x \in K \mid \|x\|_v \leq 1\}]$ für $\|x\|_v = a^{-v(x)}$ ein Ring (genannt Bewertungsring). Der Ring \mathcal{O}_v hat genau ein Maximales Ideal

$$\mathfrak{m}_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$$

$[\mathfrak{m}_v = \{x \in K \mid \|x\|_v < 1\}]$ und die Einheitengruppe

$$\mathcal{O}_v^\times = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$$

$$[\mathcal{O}_v^\times = \{x \in K \mid \|x\|_v = 1\}]$$

Beweis. \mathcal{O}_v ist ein Ring wegen der ultrametrischen Dreiecksungleichung. Die Aussage über \mathcal{O}_v^\times folgt aus $\|x^{-1}\|_v = \|x\|_v^{-1}$. m_v ist ein Ideal: Für $a \in \mathcal{O}_v$ und $x \in m_v$ ist $\|ax\|_v = \|a\|_v \cdot \|x\|_v < 1$. Für $x, y \in m_v$ ist $\|x+y\|_v \leq \max\{\|x\|_v, \|y\|_v\} < 1$.

Sei $\emptyset \neq I \subset \mathcal{O}_v$. Dann $I \cap \mathcal{O}_v^\times = \emptyset$, sonst $1 \in I$ und $I = \mathcal{O}_v$. $\implies I \subseteq m_v$. Somit ist m_v das eindeutige maximale Ideal. \square

Definition 4.24. Ein kommutativer Ring R mit genau einem maximalen Ideal m heißt *lokaler Ring*. Der Körper R/m ist der *Restklassenkörper* von R .

Beispiel 4.25. Betrachte \mathbb{Q} mit der p -adischen Bewertung v_p .

$$\mathcal{O}_{v_p} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}^{38}$$

$$m_{v_p} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \mid a, p \nmid b \right\} = p \cdot \mathcal{O}_{v_p} = p\mathbb{Z}_{(p)}$$

Weiter ist $\mathcal{O}_{v_p}/m_{v_p} \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p$

$$\left[\frac{a}{b} \right] \mapsto \bar{a} \cdot \bar{b}^{-1}$$

Lemma 4.26. Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal m . Dann gilt $R^\times = R \setminus m$.

Beweis.

$$\subseteq x \in R^\times \implies xR = R \implies x \notin m$$

$$\supseteq x \in R \setminus m. \text{ Dann ist das Ideal } xR \text{ nicht in } m \text{ enthalten. Da } m \text{ das einzige maximale Ideal und jedes Ideal } \neq R \text{ in einem maximalen Ideal enthalten ist, ist } xR = R \implies x \in R^\times$$

\square

VL vom 19.1.2024:

Definition 4.27. Man nennt eine Bewertung *diskret*, wenn sie Werte in $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ annimmt. Ein Element π mit Bewertung $v(\pi) = 1$ heißt *uniformisierendes Element*.

Bemerkung 4.28. Sei π uniformisierendes Element von K mit Bewertung v . Dann kann man jedes $x \in K^\times$ schreiben als $x = \pi^m \cdot u$ mit $m = v(x)$, $u \in \mathcal{O}_v^\times$, denn $v(\pi^m x^{-1}) = 0$ also $\pi^m x^{-1} \in \mathcal{O}_v^\times$ und damit existiert $\mathcal{O}_v^\times \ni (\pi^m x^{-1})^{-1} = x\pi^{-m} =: u$.

Satz 4.29. Für einen Kommutativen Ring A sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) A ist Bewertungsring einer diskreten (nicht-trivialen??) Bewertung auf einem Körper.
- (b) A ist ein lokaler Hauptidealring, aber kein Körper

Jeder Ring, der diese Bedingungen erfüllt, heißt diskreter Bewertungsring.

Beweis.

³⁸Siehe A3 auf Blatt 10

- (a) \Rightarrow (b) Sei $A = \mathcal{O}_v$ für eine diskrete Bewertung v auf K . Nach 4.23 ist A lokaler Ring A ist kein Körper, weil ein uniformisierendes Element nicht invertierbar ist. **TODO Wieso muss ein solches Element existieren? Jeder nicht-triviale Betrag lässt sich zu einem äquivalenten Betrag machen, der ein uniformisierendes Element hat (mit ggf der möglichen Werte 1 oder nicht ein und dann einfach durch den ggT Teilt)** Sei $I \subseteq A$ ein Ideal mit $I \neq (0)$. Beh: $I = \pi^n \cdot A$ für ein $n \in \mathbb{N}$, wobei π uniformisierend. Sei $y \in A \setminus \{0\}$. Schreibe $y = \pi^m \cdot u$ mit $m = v(y)$, $u \in A^\times = \mathcal{O}_v^\times$. Daher gilt $y \in I \Leftrightarrow u^{-1}y \in I \Leftrightarrow \pi^m = \pi^{v(y)} \in I$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ minimal mit $\pi^n \in I$. Dann $I = \pi^n \cdot A = \{x \in A \mid v(x) \geq n\}$.
- (b) \Rightarrow (a) Setze $K := \text{Quot}(A)$. Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ das (eindeutige) maximale Ideal. Sei $\pi \in \mathfrak{m}$ ein Erzeuger, d.h. $\pi A = \mathfrak{m}$. A ist kein Körper $\Rightarrow \mathfrak{m} \neq (0) \Rightarrow \pi \neq 0$. \mathfrak{m} ist auch das einzige Primideal, da in Hauptidealringen Primideale maximal sind. Eindeutige Primfaktorzerlegung und 4.26³⁹:

$$A \setminus \{0\} \ni a = \pi^n \cdot u \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0, u \in A^\times$$

Jedes $x \in K \setminus \{0\}$ schreibt sich eindeutig als

$$x = \pi^m \cdot u, m \in \mathbb{Z}, u \in A^\times$$

Definiere $v(x) := m = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid x \in \pi^k A\}$ und $v(0) = \infty$. v ist eine Bewertung auf K (A3 auf Blatt 10). Es ist dann $A = \mathcal{O}_v$.

□

Bemerkung 4.30. Sei K ein Körper mit diskreter Bewertung v . Sei $|x| = a^{-v(x)}$ ein Betrag mit $a > 1$. Eine Folge $(x_n)_n$ in K ist eine Cauchy bezüglich $|\cdot|$ gdw.

$$\forall B > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : v(x_n - x_m) > B$$

Ist K vollständig bezüglich $|\cdot|$, dann ist K vollständig bezüglich aller von v induzierten Beträge, und wir sagen, dass K *vollständig bez. v* ist.

Satz 4.31 (Satz über Reihendarstellung). Sei K vollständig mit diskreter Bewertung v . Seien $\pi \in \mathcal{O}_v$ ein uniformisierendes Element und $\Omega \subseteq \mathcal{O}_v$ ein Repräsentantensystem für $\mathcal{O}_v/\mathfrak{m} = \mathcal{O}_v/\pi\mathcal{O}_v$.

(a) Jede Laurentreihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \pi^n$ mit $m \in \mathbb{Z}, a_n \in \Omega$, konvergiert in K .

(b) Jedes $x \in K^\times$ lässt sich eindeutig schreiben als $x = \sum_{n=v(x)}^{\infty} a_n \cdot \pi^n$ mit $a_n \in \Omega$.

³⁹ **TODO Wieso gibt es eine solche Primfaktorzerlegung?** Gegeben eine Primfaktorzerlegung $a = \varepsilon \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_n$ mit $\varepsilon \in A^\times$ und $q_i \in A \setminus A^\times$ irreduzibel, ist nach 4.26 $q_i \in \mathfrak{m} \Rightarrow q_i = a_i \cdot \pi$. Wenn $a_i \notin A^\times$, wäre $q_i = \underbrace{a_i}_{\notin A^\times} \cdot \underbrace{\pi}_{\notin A^\times}$ nicht irreduzibel $\nrightarrow a_i \in A^\times$. Damit ergibt sich $a = \underbrace{\varepsilon \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n}_{=: u \in A^\times} \cdot \pi^n$

Beweis. (a) Betrachte die Partialsumme $S_k = \sum_{n=m}^k a_n \cdot \pi^n$. Z.z. $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge bezüglich v .

$$\begin{aligned} v(S_k - S_l) &= v\left(\sum_{n=l+1}^k a_n \cdot \pi^n\right) \geq \min\{v(a_n \pi^n) \mid l+1 \leq n \leq k\} \\ &= \min\{n \cdot \underbrace{v(\pi)}_{=1} + \underbrace{v(a_n)}_{\geq 0} \mid l+1 \leq n \leq k\} \geq \min\{n \mid l+1 \leq n \leq k\} > l \end{aligned}$$

impliziert Cauchy.

(b) Wir zeigen per Induktion zunächst Existenz: Es gibt $a_{v(x)}, \dots, a_k \in \Omega$ mit $v\left(x - \sum_{n=v(x)}^k a_n \pi^n\right) \geq k+1$.

Induktionsanfang $k < v(x)$: $v(x - 0) \geq k+1 \checkmark$.

Induktionsschritt: Seien $a_{v(x)}, \dots, a_k$ wie oben bekannt. Es gibt ein eindeutiges $a_{k+1} \in \Omega$

mit $(x - \underbrace{\sum_{n=v(x)}^k a_n \pi^n}_{\in \pi^{k+1} \mathcal{O}_V \text{ nach 4.28}}) \pi^{-(k+1)} - a_{k+1} \in \pi \mathcal{O}_V$.⁴⁰

$$\implies x - \sum_{n=v(x)}^{k+1} a_n \pi^n \in \pi^{k+2} \mathcal{O}_V \implies v(x - \sum_{n=v(x)}^{k+1} a_n \pi^n) \geq k+2$$

Zur Eindeutigkeit: Sei $x = \sum_{n=v(x)}^{\infty} b_n \pi^n$ eine andere solche Darstellung. Sei k minimal mit $a_k \neq b_k$.

$$\implies 0 = (a_k - b_k) \pi^k + r \pi^{k+1} \text{ für ein } r \in \mathcal{O}_V.$$

$$\implies a_k \equiv b_k \pmod{\pi \mathcal{O}_V}.$$

$$\implies a_k = b_k, \text{ weil } \Omega \text{ ein Repräsentantensystem von } \mathcal{O}_V / \pi \mathcal{O}_V \text{ ist.}$$

□

Lemma 4.32 (Henselsches Lemma). *Sei K ein vollständiger Körper mit diskreter Bewertung v . Sei $q: \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V / \mathfrak{m}_V$ die Projektion. Sei $f \in \mathcal{O}_V[X]$. Hat $q_*(f) \in \mathcal{O}_V / \mathfrak{m}_V[X]$ eine einfache Nullstelle in $\mathcal{O}_V / \mathfrak{m}_V$, dann hat f eine Nullstelle in \mathcal{O}_V .*

Beispiel. Betrachte $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}_5[X]$ (siehe 4.18). $q_*(f)(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ hat Nullstelle $\bar{2} \in \mathbb{F}_5$. Diese ist einfach, weil $D_{q_*}(f)(\bar{2}) = 2 \cdot \bar{2} \neq 0$ in \mathbb{F}_5 . Nach Hensel hat f eine Nullstelle in \mathbb{Z}_5 .

Beweis. Wir zeigen induktiv: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $a_n \in \mathcal{O}_V$ gilt

$$(i) \quad f(a_n) \equiv 0 \pmod{\pi^n \mathcal{O}_V}$$

$$(ii) \quad a_n \equiv a_{n+1} \pmod{\pi^n \mathcal{O}_V}.$$

Wähle $a_1 \in \mathcal{O}_V$ so, dass $q_*(f)(\bar{a}_1) = 0 \in \mathcal{O}_V / \pi \mathcal{O}_V \Leftrightarrow f(a_1) \equiv 0 \pmod{\pi \mathcal{O}_V}$. Angenommen wir haben $a_n \in \mathcal{O}_V$ wie oben.

Ansatz: $a_{n+1} = a_n + \pi^n \cdot b$ für $b \in \mathcal{O}_V$.

Beobachtung:

⁴⁰Wähle a_{k+1} sodass es die passende Nebenklasse in $\pi \mathcal{O}_V$

1. $(a_n + \pi^n \cdot b)^m = a_n^m + m \cdot \pi^n \cdot b \cdot a_n^{m-1} \pmod{\pi^{n+1} \mathcal{O}_V}$.
 $\implies f(a_n + \pi^n b) \equiv f(a_n) + \pi^n \cdot b \cdot D(f(a_n)) \pmod{\pi^{n+1} \mathcal{O}_V}$.
2. Da $\bar{a}_1 \in \mathcal{O}_V / \pi \mathcal{O}_V$ eine einfache Nullstelle von $q_* f$, gilt $0 \neq q_* D(f)(\bar{a}_1) \stackrel{(ii)}{=} q_* D(f)(\bar{a}_n)$.
Somit $D(f)(a_n) \in \mathcal{O}_V^\times$.

Nach (i) ist $f(a_n) = \pi^n \cdot u$ mit $u \in \mathcal{O}_V$. Setze $b := -u \cdot D(f)(a_n)^{-1}$. Dann $f(a_{n+1}) \equiv 0 \pmod{\pi^{n+1} \mathcal{O}_V}$ \square

Fortsetzung des Beispiels? (Lose formatiert)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ (2 + b \cdot 5)^2 &\equiv -1 \pmod{5^2} \\ 4 + 4 \cdot 5 \cdot b &\equiv -1 \pmod{5^2} \\ \implies 5^2 \mid 5 + 4 \cdot 5 \cdot b &= 5(1 + 4 \cdot b) \\ \iff 5 \mid 1 + 4 \cdot b \\ b = 1 &\text{ ist Lösung} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 \\ (2 + 1 \cdot 5 + c \cdot 5^2)^2 &\equiv -1 \pmod{5^3} \\ 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot c \cdot 5^2 &\equiv -1 \pmod{5^3} \\ \iff 50 + 2 \cdot 7 \cdot c \cdot 5^2 & \\ \iff 5 \mid 2 + 2 \cdot 7 \cdot c & \\ c = 2 &\text{ Lösung} \\ a_3 &= 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + \dots \end{aligned}$$

14.1.2024

Satz 4.33. Sei K ein vollständiger Körper bezüglich einer Bewertung v . Dann besitzt v eine eindeutige Bewertungsfortsetzung auf jeder endlichen Erweiterung $L|K$. Diese ist durch

$$v_L(\alpha) = \sqrt[n]{v(N_{L|K}(\alpha))}$$

gegeben, wobei $n = [L : K]$. Weiter ist L bezüglich v_L vollständig.

Bachte, dass für $\alpha \in K$: $N_{L|K}(\alpha) = \alpha^n$ und $v(N_{L|K}(\alpha)) = v(\alpha)^n$.

Bemerkung 4.34 (Die p -adischen Zahlen). \mathbb{Q}_p mit v_p bezüglich $|\cdot|_p$ p -adische (rationale) Zahlen. Erinnerung: $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, wobei $v_p|_{\mathbb{Q}}$ gegeben ist durch $v_p(p^n \frac{a}{b}) = n$ mit $p \nmid a$, $p \nmid b$. p ist uniformisierendes Element.

Der Bewertungsring $\mathbb{Z}_p := \mathcal{O}_{v_p}$ heißt der Ring der ganzen p -adischen Zahlen. Es gilt

$$\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid v_p(x) \geq 0\} = \mathbb{Z}_{(p)}^{41}$$

Teilmenge $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$ ist offen und abgeschlossen, denn:

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \geq 1\} = \overline{B_1(0)} \text{ und } \mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p < p\} = B_p(0)$$

⁴¹ $A_{(p)} := \{x \in K \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in A \text{ und } b \in A \setminus (p)\}$ nach Blatt 10 Aufgabe 3

Da $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$ offen und $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_p$ dicht, ist auch $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}_p$ dicht. Es ist sogar \mathbb{Z} in \mathbb{Z}_p dicht. Sei $x \in \mathbb{Z}_p$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ mit $|x - \frac{a}{b}| < \varepsilon$. Sei $\bar{b} \in \mathbb{Z}$ so, dass $\bar{b} \cdot b \equiv 1 \pmod{p^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $p^{-n} < \frac{\varepsilon}{|a|_p}$. Dann $|x - \underbrace{a\bar{b}}_{\in \mathbb{Z}}|_p \leq \max\{|x - \frac{a}{b}|_p, |\frac{a}{b} - a\bar{b}|_p\}$.

Wir haben $|\frac{a}{b} - a\bar{b}|_p = |a|_p \cdot |\frac{1}{b} - \bar{b}|_p \leq {}^{42} |a|_p \cdot |b|_p^{-1} \cdot |\frac{1}{b} - \bar{b}|_p = |a|_p \cdot |1 - b\bar{b}|_p \leq |a|_p \cdot p^{-n} < \varepsilon \implies |x - a\bar{b}|_p < \varepsilon$

Für den Restklassenring der Körper \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p gilt:

$$\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}_{(p)} / p\mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p / p \cdot \mathbb{Z}_p$$

Die Surjektivität und damit Bijektivität/Isomorphie folgt aus der Tatsache, dass jede Nebenklasse $x + p\mathbb{Z}_p$ offen ist und somit Elemente aus $\mathbb{Z}_{(p)}$ enthält. **TODO Injektivität?**

Reihendarstellung (4.31): Jedes Element $x \in \mathbb{Q}_p$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$x = \sum_{i=v_p(x)}^{\infty} a_i \cdot p^i, a_i \in \{0, \dots, p-1\}$$

Bsp: $-1 = (p-1) + (p-1) \cdot p + (p-1) \cdot p^2 + \dots$ sieht man entweder durch $\underbrace{(p-1) + \dots + (p-1)p^n}_{(p-1)(1+\dots+p^n)} = p^{n+1} - 1 \equiv -1 \pmod{p^{n+1}}$ oder

durch geometrische Reihe $\frac{-1}{p-1} = \sum_{i=0}^{\infty} p^i$.

\mathbb{Q}_p enthält primitive $(p-1)$ -te Einheitswurzeln: Sei $\Phi_{p-1} \in \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Z}_p[x]$ das $(p-1)$ -te Kreisteilungspolynom. Da $p \nmid (p-1)$ und $\Phi_{p-1} | X^{p-1} - 1$ ist Φ_{p-1} separabel über \mathbb{F}_p . Weiter besitzt \mathbb{F}_p eine primitive $(p-1)$ -te Einheitswurzel. $\implies \Phi_{p-1}$ besitzt eine einfache Nullstelle über \mathbb{F}_p . Hensels Lemma: Φ_{p-1} hat eine Nullstelle in $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$.

Satz 4.35. Sei $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Sei p prim. Die Kongruenz

$$F(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^m}$$

ist genau dann für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ lösbar, wenn

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

in \mathbb{Z}_p lösbar ist.

Beweis.

\Leftarrow Sei $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ eine Lösung. Betrachte Reihendarstellung $x_i = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_{i,\alpha} p^\alpha$.

Dann ist $(\underbrace{\sum_{\alpha=0}^{m-1} a_{1,\alpha} p^\alpha}_{\in \mathbb{Z}}, \dots, \underbrace{\sum_{\alpha=0}^{m-1} a_{n,\alpha} p^\alpha}_{\in \mathbb{Z}})$ eine Lösung von F modulo p^m .

⁴² **TODO Sollte das nicht = sein? $|b|_p$ sollte ja 1 sein**

\Rightarrow Sei umgekehrt $(x_1^m, \dots, x_n^m) \in \mathbb{Z}^n$ eine Lösung modulo p^m . O.B.d.A.⁴³ sei $n = 1$, also $(x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ Lösung von $F(x) \equiv 0 \pmod{p^m}$. Wähle Teilfolge $(y_1^m)_m$ von $(x^m)_m$ und $y_1 \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} y_1^m &\equiv y_1 \pmod{p} \\ F(y_1^m) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Eine solche Teilfolge muss existieren, da es nur p mögliche Reste für die x_i gibt und so mindestens einen Rest y_1 unendlich häufig vollkommen und eine Teilfolge gebildet werden kann.

Im nächsten Schritt wähle eine Teilfolge $(y_2^m)_m$ von $(y_1^m)_m$, die $\pmod{p^2}$ konstant ist, d.h.

$$\begin{aligned} y_2^m &\equiv y_2 \pmod{p^2} \\ F(y_2^m) &\equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Dann konvergiert die Folge y_1, y_2, \dots gegen eine Lösung von F in \mathbb{Z}_p .

□

5 Ringe und Moduln

VL vom 26.1.2024:

§5.1 Grundlagen der Modultheorie

Sei R ein Ring mit Eins (aber nicht zwingend kommutativ)

Definition 5.1. Ein *Linksmodul* über R ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Skalarmultiplikation

$$R \times M \rightarrow M, \quad (r, m) \mapsto r * m$$

mit den Eigenschaften

- (i) $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- (ii) $(r + s) * x = r * x + s * x$
- (iii) $(r \cdot s) * x = r * (s * x)$
- (iv) $1_R * x = x$

für alle $r, s \in R$ und $x, y \in M$.

Analog ist ein *Rechtsmodul* definiert mit Skalarprodukt $M \times R \rightarrow M \quad (m, r) \mapsto m * r$

⁴³Da Validität des O.B.d.A. zeigt sich erst im Laufe des Beweises.

Bemerkung 5.2. Auf der R zugrundeliegenden abelschen Gruppe erhalten wir eine neue Ringstruktur, indem wir die Multiplikation durch $r \odot s := s \cdot r$ ersetzen. Man nennt diese den entgegengesetzten Ring R^{Op} . Ist M bezüglich $M \times R \rightarrow M$ ein R -Rechtsmodul, dann ist M bezüglich $R^{Op} \times M \rightarrow M, r \odot m = m \cdot r$, ein R^{Op} -Linksmodul.

Wir betrachten in Zukunft Linksmoduln und nennen sie einfach Moduln.

Beispiel 5.3.

- (1) $R = K$ Körper. Dann sind K -Moduln genau die K -Vektorräume
- (2) M abelsche Gruppe

$$End(M) = \{f : M \rightarrow M \text{ Homomorphismus}\}$$

ist ein Ring bezüglich $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$ mit der Skalarmultiplikation $End(M) \times M \rightarrow M \quad (f, m) \mapsto f(m)$ wird M ein $End(M)$ -Modul.

- (3) Abelsche Gruppen sind genau die \mathbb{Z} -Moduln: Ist M eine abelsche Gruppe, dann ist M ein \mathbb{Z} -Modul vermöge

$$n \cdot x = \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-fach}} \quad (-1) \cdot x = -x$$

Definition 5.4.

- (a) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen R -Moduln ist R -Linear, wenn für $x, y \in M, r \in R$ gilt

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

$$Hom_R(M, N) := \{R\text{-lineare Abbildung } M \rightarrow N\}$$

- (b) Isomorphismus
- (c) Untermodul

Beispiel 5.5.

- (a) Ist $f \in Hom_R(M, N)$, dann sind $\ker(f)$ und $f(M)$ Untermoduln.
- (b) R ist ein Links- und Rechtsmodul bzüglich der Ringmultiplikation $R \times R \rightarrow R$. Dann (Links-) Ideale $\hat{=}$ Untermodul (in Linksmodulstruktur). Für Rechts- analog.

Ilias (angeblich)

Definition 5.9. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} M_i$ ist ein R -Modul bezüglich $(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$ und $r \cdot (x_i)_{i \in I} = (rx_i)_{i \in I}$. Wir sagen $\prod_{i \in I} M_i$ ist das direkte Produkt der M_i . Für jedes $i \in I$ ist die Projektion $pr_i : \prod_{j \in I} M_j \rightarrow M_i$ R -linear. Die Zuordnung $\phi \mapsto (pr_i \circ \phi)_{i \in I}$ definiert einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$Hom_R(M, \prod_{i \in I} M_i) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} Hom_R(M, M_i)$$

(Ist R kommutativ ist die Struktur wieder ein Modul)

Bemerkung. **TODO Timos remark**

Definition 5.10 (Direkte Summe von R -Moduln). Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Definiere $\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } i\}$ die *direkte Summe der* M_i also Untermodul von $\prod_{i \in I} M_i$. Für jedes $j \in I$ ist $\iota_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, $\iota_j(x) = (0, \dots, 0, \underbrace{x}_{\text{Position } j}, 0, \dots, 0)$ eine injektive R -lineare Abbildung. Die Zuordnung $\phi \mapsto (\phi \circ \iota_i)_{i \in I}$ definiert einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, M\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, M)$$

Die Umkehrabbildung ist

$$(f_i : M_i \rightarrow M)_{i \in I} \mapsto \begin{cases} \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M, \\ (x_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i(x_i) \end{cases}$$

Gewöhnlich schreiben wir $(x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ auch als $\sum_{i \in I} x_i$.

Notation: Ist $M_i = M$, dann schreiben wir $\bigoplus_{i \in I} M_i = M^{(I)}$ und $\prod_{i \in I} M_i = M^I$

Definition 5.11. Sei $S \subseteq M$ eine Teilmenge in einem R -Modul M . Dann heißt S

- *Erzeugendensystem*, wenn $M := \langle S \rangle_R = \{\sum_{s \in J} r_s \cdot s \mid J \subseteq S \text{ endlich}, r_s \in R\} = \bigcap \{N \mid N \subseteq M \text{ Untermodul mit } S \subseteq N\}$
- *R -linear unabhängig*, wenn für alle $s_1, \dots, s_m \in S$ und $r_1, \dots, r_m \in R$ die Implikation $\sum_{i=1}^m r_i \cdot s_i = 0 \Rightarrow r_1 = \dots = r_m = 0$ gilt.
- *Basis*, wenn S ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist
- M heißt
 - *endlich erzeugt*, wenn M ein endliches Erzeugendensystem besitzt
 - *frei*, wenn M eine Basis besitzt

Bemerkung 5.12.

- a) Jeder VR hat eine Basis, ist also frei. Aber $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n$ also \mathbb{Z} -Modul ist nicht frei: Betrachte $q_1 = \frac{a_1}{b_1}, q_2 = \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $(b_1 a_2) \cdot q_1 - (b_2 a_1) \cdot q_2 = 0$ (nicht triviale Linearkombination). Somit ist $S \subseteq \mathbb{Q}$ mit $|S| \geq 2$ nicht linear unabhängig. Weiter kann ein einziges Element $q = \frac{a}{b}$ nicht \mathbb{Q} erzeugen als \mathbb{Z} -Modul, denn $\langle q \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}q = \mathbb{Z} \cdot \frac{a}{b} \subseteq \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{b} \subset \mathbb{Q}$
- b) Die Kardinalität einer Basis ist im Allgemeinen keine Invariante für Moduln.

Lemma 5.13. Ein R -Modul M ist frei genau dann, wenn er zu einem Modul $R^{(I)}$ für eine Menge I isomorph ist.

Beweis.

\Rightarrow Sei S eine Basis. Betrachte die Abbildung $R^{(S)} \xrightarrow{\cong} M$, $(r_s)_{s \in S} \mapsto \sum_{s \in S} r_s \cdot s$. Diese ist ein Isomorphismus.

$\Leftarrow R^{(I)}$ ist frei bezüglich der Basis $\{e_i = \iota_i(1_R) \mid i \in I\}$

□

01.02.2023

Definition 5.14. Ein Untermodul $N \subseteq M$ heißt *direkter Summand*, wenn es einen Untermodul $C \subseteq M$ gibt so, dass

$$(i) \ C \cap N = \{0\}$$

$$(ii) \ C + N = M$$

In diesem Fall gilt $M \cong C \oplus N$. Man schreibt dann $M = C \oplus N$.

Beispiel. $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ist kein direkter Summand

Definition 5.15 (Exakte Folgen). Es seien M, M', M'' R -Moduln. Es seien $f : M' \rightarrow M, g : M \rightarrow M''$ R -lineare Abbildungen. Man sagt, dass die Folge

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

exakt ist, wenn $\text{Bild}(f) = \ker(g)$.

Eine Folge der Form

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

nennt man *kurz exakte Folge*, wenn sie exakt an jeder Stelle ist, d.h. f injektiv, g surjektiv und $\text{Bild}(f) = \ker(g)$.

Homomorphiesatz liefert⁴⁴, dass

$$M/f(M') \cong M''$$

.

Beispiel. $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ kurz exakt.

Satz 5.16. Für eine kurze exakte Folge $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $f(M') \subseteq M$ ist ein direkter Summand

(ii) $\exists s \in \text{Hom}_R(M'', M) : g \circ s = \text{id}_{M''}$

⁴⁴Das sollte für alle $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ gelten. g muss surjektiv sein, damit $g(M) = M''$, aber f nicht injektiv, weil das nichts an $\text{Bild}(f) = \ker(g)$ ändert

$$(iii) \exists t \in \text{Hom}_R(M, M') : t \circ f = \text{id}_{M'}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sagt man, dass die Folge spaltet.

Beweis.

(i) \Rightarrow (ii) Angenommen $f(M') \oplus C = M$. Dann ist $g|_C$ ein Isomorphismus:

- $\ker(g|_C) = \ker(g) \cap C = f(M') \cap C = 0$
- $\text{Bild}(g|_C) = g(C) = g(f(M') \oplus C) = g(M) = g(M) = M''$

Definiere $s(x) = g|_C^{-1}(x) \in M$ für $x \in M''$. Dann ist $g \circ s = \text{id}_{M''}$.

(ii) \Rightarrow (iii) Für $y \in M$ ist $y - (s \circ g)(y) \in \text{Bild}(f) = \ker(g)$, weil

$$g(y - (s \circ g)(y)) = g(y) - \underbrace{(g \circ s \circ g)}_{=\text{id}_{M''}}(y) = g(y) - g(y) = 0$$

. Definiere $t(y) = f^{-1}(y - s \circ g(y))$ wobei f als Abbildung aufs Bild betrachtet wird.

Dann $t \circ f = \text{id}_{M'}$, wegen $t(f(x)) = f^{-1}(f(x) - \underbrace{s \circ g \circ f}_{=0}(x)) = x$.

(iii) \Rightarrow (i) Setze $C := \ker(t)$ Dann ist $C \cap f(M') = \{0\}$: Sei $x \in C \cap f(M')$. Insbesondere $x = f(y)$ für ein $y \in M'$. Dann $0 = t(x) = t(f(y)) = y \Rightarrow x = f(y) = 0$.

Weiter ist $C + f(M') = M$. Sei $m \in M$. Betrachte $t(m - f \circ t(m)) = t(m) - \underbrace{t \circ f \circ t}_{=\text{id}_{M'}}(m) =$

$$t(m) - t(m) = 0, \text{ also } m - \underbrace{f \circ t(m)}_{\in \text{Bild}(f)} \in C$$

□

Definition 5.17.

- a) Ein R -Modul P heißt *projektiv*, wenn jede kurze exakte Folge von R -Moduln der Form $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ spaltet.
- b) Ein R -Modul I heißt *injektiv*, wenn jede kurze exakte Folge von R -Moduln der Form $0 \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ spaltet.

Bemerkung 5.18. Jede kurze exakte Folge von VR über einem Körper K spaltet, weil jeder Unter-VR ein Komplement besitzt. \Rightarrow Alle VR sind projektiv und injektiv.

§5.2 Bilineare Abbildungen und Tensorprodukte

In diesem Abschnitt ist R ein kommutativer Ring.

Definition 5.19. Seien L, M, N drei R -Moduln. Eine Abbildung $f : M \times N \rightarrow L$ heißt *R -bilinear* wenn gelten

1. $f(rx + sy, u) = rf(x, u) + sf(y, u)$
2. $f(x, ru + sv) = rf(x, u) + sf(x, v)$

für $x, y \in M, u, v \in N, r, s \in R$.

Definition 5.20. Ein *Tensorprodukt* zweier R -Moduln M und N ist ein Paar (T, β) bestehend aus einem R -Modul T und einer R -bilinearen Abbildung $\beta : M \times N \rightarrow T$ so, dass eine *universelle* Eigenschaft erfüllt ist:

Für jeden R -Modul L und jede R -bilineare Abbildung $f : M \times N \rightarrow L$ existiert ein eindeutiger R -Homomorphismus $\phi : T \rightarrow L$ mit $\phi \circ \beta = f$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\beta} & T \\ f \downarrow & \searrow \exists! \phi & \\ L & & \end{array}$$

Lemma 5.21. Sind (T, β) und (T', β') zwei Tensorprodukte von $M \times N$, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\phi : T \rightarrow T'$ mit

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow[\cong]{\phi} & T' \\ \beta \swarrow & & \searrow \beta' \\ & M \times N & \end{array}$$

Beweis.

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow[\exists! \phi]{\quad} & T' \\ \beta \swarrow & & \searrow \beta' \\ & M \times N & \end{array} \quad \text{universelle Eigenschaften von } (T, \beta)$$

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} T & \xleftarrow[\exists! \psi]{\quad} & T' \\ \beta \swarrow & & \searrow \beta' \\ & M \times N & \end{array} \quad \text{universelle Eigenschaft von } (T', \beta')$$

$$\bullet \quad \begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{id_T} & & & \\ T & \xrightarrow{\phi} & T' & \xrightarrow{\psi} & T \\ \beta \swarrow & & & & \searrow \beta \\ & M \times N & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{universelle Eigenschaft: } (T, \beta) \text{-Eindeutigkeit} \\ \Rightarrow \psi \circ \phi = id_T \end{array}$$

$$\bullet \quad \begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{id_{T'}} & & & \\ T' & \xrightarrow{\psi} & T & \xrightarrow{\phi} & T' \\ \beta' \swarrow & & & & \searrow \beta' \\ & M \times N & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{universelle Eigenschaft: } (T', \beta') \text{-Eindeutigkeit} \\ \Rightarrow \phi \circ \psi = id_{T'} \end{array}$$

□

Satz 5.22 (Satz von der Existenz des Tensorprodukts). *Für je zwei R -Moduln existiert ein Tensorprodukt.*

Beweis. Sei M, N zwei R -Moduln. Sei $I = M \times N$. Betrachte den freien R -Modul $F := R^{(I)} = \bigoplus_{(x,u) \in I} R$. Für $(x, u) \in I$ sei $i_{(x,u)} : R \rightarrow F$ die jeweilige Inklusion. Schreibe $[x, u] := i_{(x,u)}(1) \in F$. Die Menge $\{[x, u] \mid x \in M, u \in N\}$ ist eine Basis von F . Sei Z der Untermodul von F , der von allen Elementen der Form $[rx + sy, u] - r[x, u] - s[y, u]$, $[x, ru + sv] - r[x, u] - s[x, v]$ mit $r, s \in R, x, y \in M, u, v \in N$ erzeugt wird. Setze $T := F/Z$.

Die Abbildung $\beta : M \times N \rightarrow T, \beta(m, n) = [m, n] + Z$ ist bilinear nach Konstruktion.

β erfüllt die Universelle Eigenschaft: Betrachte **TODO Mehr Bilder** Definiere $\bar{\phi} : F \rightarrow L$ durch $\bar{\phi}([m, n]) = f(m, n)$. Z.z. $\bar{\phi}|_Z \equiv 0$. Dann induziert $\bar{\phi}$ einen Homomorphismus $\phi : T \rightarrow L$. $\bar{\phi}|_Z$ folgt sofort aus der Bilinearität von f . □

02.02.2024

Bemerkung 5.23 (Notation). Das Tensorprodukt der R -Moduln M und N notiert man $M \otimes_R N$ ($M \otimes N$, wenn R aus dem Kontext klar ist). Das Bild von $(m, n) \in M \times N$ unter der Strukturabbildung $\beta : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ notiert man als $m \otimes n \in M \otimes_R N$. Diese Elemente $m \otimes n, m \in M, n \in N$ nennt man auch *Elementartensor*; diese erzeugen $M \otimes_R N$. (siehe Beweis von 5.22). Beachte: Die Bilinearität von β übersetzt sich in folgende Gleichungen für Elementartensoren:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n \\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2 \\ (r \cdot m) \otimes n &= r \cdot (m \otimes n) = m \otimes (r \cdot n) \end{aligned}$$

Beispiel 5.24. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$

$$\begin{aligned} x \otimes y &= x \cdot n^{-1} \cdot n \otimes y \\ &= n \cdot (xn^{-1} \otimes y) \\ &= xn^{-1} \otimes n \cdot y \\ &= xn^{-1} \cdot 0 \\ &= 0 \in M \otimes N \end{aligned}$$

Lemma 5.25. *Für alle R -Moduln L, M, N gelten:*

- (i) $R \otimes_R N \cong N$
- (ii) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$
- (iii) $M \otimes_R (N \otimes_R L) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R L$
- (iv) $(\bigotimes_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \bigotimes_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$

Beweis.

- (i) $R \times N \rightarrow N, (r, n) \mapsto r \cdot n$ R -bilinear. Somit induziert sie einen R -Homomorphismus $R \otimes_R N \rightarrow N, r \otimes n \mapsto r \cdot n$. Die Umkehrabbildung ist $N \rightarrow R \otimes_R N, n \mapsto 1 \cdot n$ R -linear.
- (ii) Die Abbildung $M \times N \rightarrow N \otimes_R M, (m, n) \mapsto n \otimes m$ ist bilinear. Somit erhält man die induzierte Abbildung $M \otimes_R N \rightarrow N \otimes_R M, m \otimes n \mapsto n \otimes m$. Ähnlich erhält man die Umkehrabbildung $N \otimes_R M \rightarrow M \otimes_R N, n \otimes m \mapsto m \otimes n$.
- (iii) Sei $z \in L$. Die Abbildung $f_z : M \times N \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_R L), (m, n) \mapsto m \otimes (n \otimes z)$ ist bilinear. Daraus lässt sich $f'_z : M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_R L), m \otimes n \mapsto m \otimes (n \otimes z)$ konstruieren. Die Abbildung $g : (M \otimes_R N) \times L \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_R L), (m \otimes n, z) \mapsto f'_z(m \otimes n)$ ist bilinear. Daraus konstruiere $(M \otimes_R N) \otimes_R L \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_R L), (m \otimes n) \otimes z \mapsto m \otimes (n \otimes z)$. Die Wohldefiniertheit der offensichtlichen Umkehrabbildung beweist man ähnlich.
- (iv) Die R -Homomorphismen $j_i : M_i \otimes_R N \rightarrow (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N, m \otimes n \mapsto \text{incl}_i(m) \otimes n$ sind induziert durch die bilineare Abbildung $M_i \times N \rightarrow (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N, (m, n) \mapsto \text{incl}_i(m) \otimes n$. Die Familie $(j_i)_i$ induziert einen R -Homomorphismus $\bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N \rightarrow (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N$. Die dazugehörige Umkehrabbildung wird induziert durch die bilineare Abbildung $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \times N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N, (\sum_i m_i, n) \mapsto \sum_i m_i \otimes n$

□

Beispiel. $R^2 \otimes_R R^3 \stackrel{(iv)}{\cong} R \otimes_R R^3 \oplus R \otimes_R R^3 \stackrel{(iv)+(ii)}{\cong} R \otimes_R R \oplus \dots \oplus R \otimes_R R \stackrel{(i)}{\cong} R \oplus \dots \oplus R = R^6$

Bemerkung 5.26 (Tensorprodukt als Funktor). Seien $f : M \rightarrow M', g : N \rightarrow N'$ zwei R -lineare Abbildungen. Dann gibt es genau eine R -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\xrightarrow{f \otimes g} M' \otimes_R N', \\ m \otimes n &\mapsto f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

Kompatibel mit Komposition: $(f \circ \tilde{f}) \otimes (g \circ \tilde{g}) = (f \otimes g) \circ (\tilde{f} \otimes \tilde{g})$

Satz 5.27 (Tensorprodukt ist rechtsexakt). *Es sei M ein R -Modul und*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$$

eine exakte Folge von R -Moduln. Dann ist auch die Folge

$$M \otimes_R N' \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_R N \xrightarrow{id_M \otimes g} M \otimes_R N'' \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis.

1. $id_M \otimes g$ ist surjektiv: Jeder Elementartensor $x \otimes y \in M \otimes_R N''$ liegt in $\text{Bild}(id_M \otimes g)$, denn $x \otimes y = x \otimes g(\tilde{y}) = (id_M \otimes g)(x \otimes \tilde{y})$ für ein g -Urbild \tilde{y} von y . Da die Elementartensoren $M \otimes_R N''$ erzeugt, ist $\text{Bild}(id_M \otimes g) = M \otimes_R N''$.

2. $\text{Bild}(id_M \otimes f) = \ker(id_M \otimes g)$:

$$\subseteq: \text{folgt aus } (id_M \otimes g) \circ (id_M \otimes f) \left(\underbrace{x \otimes y}_{\in M \otimes_R N'} \right) = x \otimes g(f(y)) = x \otimes 0 = 0$$

\supseteq : Setze $B := \text{Bild}(id_M \otimes f)$. Definiere eine bilineare Abbildung $\beta : M \times N'' \rightarrow (M \otimes_R N)/B$ wie folgt: Für $x \in M, u'' \in N''$ wähle $u \in N$ mit $g(u) = u''$ und definiere $\beta(x, u'') := x \otimes u + B$.

Wohldefiniertheit? Sei $g(v) = u''$. Dann ist $u - v \in \ker(g) = \text{Bild}(f)$. Sei $u' \in N'$ mit $f(u') = u - v$. Nun folgt

$$x \otimes v + B = x \otimes v + \underbrace{x \otimes f(u')}_{\in B} + B = x \otimes v + x \otimes (u - v) + B = x \otimes v + x \otimes u - x \otimes v + B = x \otimes u + B$$

Das induziert Abbildung⁴⁵ $s : M \otimes_R N'' \rightarrow (M \otimes_R N)/B$ mit der Eigenschaft $m \otimes g(u) \mapsto m \otimes u + B$. Für $w \in M \otimes_R N$ gilt somit $s \circ (id_M \otimes g)(w) = w + B$. Somit gilt für $w \in \ker(id_M \otimes g) \subseteq M \otimes_R N$, dass $w + B = 0 \in (M \otimes_R N)/B$.
 $\implies w \in B = \text{Bild}(id_M \otimes f)$.

□

Bemerkung 5.28. Im Allgemeinen ist der Funktor $M \otimes_R -$ nicht exakt, d.h. $M \otimes -$ erhält im Allgemeinen nicht kurze exakte Folgen. Bsp $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{5} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rightarrow 0$ liefert:

TODO bild

Ein R -Modul M ist *flach*, wenn $M \otimes_R -$ exakt ist. Bsp:

- \mathbb{Q} ist ein flacher \mathbb{Z} -Modul.
- Jeder freie R -Modul flach
- Jeder projektive R -Modul ist flach.

Definition 5.29. Eine R -Algebra ist ein Ring A (mit 1, nicht unbedingt kommutativ) mit einer R -Modulstruktur $R \times A \rightarrow A$ so, dass die Ringmultiplikation $A \times A \rightarrow A$ R -bilinear ist. [d.h. $\forall a, b \in A, r \in R : r(a \cdot_A b) = (ra) \cdot_A b = a \cdot_A (rb)$]

08.02.2024

$$(ra) \cdot b = a \cdot (rb) = r(a \cdot b)$$

Beispiel 5.30.

- (i) $M_n(R)$ ist eine R -Algebra
- (ii) $L|K$ Körpererweiterung. Dann ist L eine K -Algebra.
- (iii) R nullteilerfrei. Dann ist $\text{Quot}(R)$ eine R -Algebra.
- (iv) Jeder Ring ist eine \mathbb{Z} -Algebra

⁴⁵Ist diese Abbildung nicht β

(v) $R[X_1, \dots, X_n]$ ist R -Algebra

TODO Ab hier

Bemerkung 5.31. Sei A eine R -Algebra. Definiere $i : R \rightarrow A, r \mapsto r1_A$. i ist ein Ringhomomorphismus. Weiter $i(R) \subseteq Z(A) := \{a \in A \mid \forall b \in A : ab = ba\}$ (SZentrum"). Denn:
 $b \cdot i(r) = b \cdot (r1_A) = rb$
 $i(r) \cdot b = (r1_A) \cdot b = r(1_A \cdot b) = rb$

Umgekehrt: Ist A ein Ring und $i : R \rightarrow Z(A) \subseteq A$ ein Ringhomomorphismus, dann wird A eine R -Algebra bezüglich der Skalarmultiplikation: $ra := i(r) \cdot a$.

Satz 5.32 (Skalarerweiterung). *Es seien A eine R -Algebra und M ein R -Modul. Es gibt genau eine Skalarmultiplikation von A auf $A \otimes_R M$ mit $a(b \otimes x) = ab \otimes x$ für $a, b \in A, x \in M$, die $A \otimes_R M$ zu einem A -Modul macht. Man sagt: $A \otimes_R M$ entsteht durch Skalarerweiterung. Ist $f : M \rightarrow N$ R -linear, dann ist $id_A \otimes f : A \otimes_R M \rightarrow A \otimes_R N$ A -linear.*

Beweis. Beweisskizze: Sei $l_a : A \rightarrow A$ die Linksmultiplikation mit $a \in A$. Dann ist l_a R -linear: $rl_a(b) = r(a \cdot b) = a \cdot (rb) = l_a(rb)$. \rightarrow induziert die Skalarmultiplikation $l_a \otimes id_M : A \otimes_R M \rightarrow A \otimes_R M, b \otimes x \mapsto ab \otimes x$. Der Rest ist Nachrechnen \square

Beispiel 5.33. Ist $f : V \rightarrow W$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen \mathbb{R} -VR, dann ist $id_{\mathbb{C}} \otimes f : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung mit der gleichen Abbildungsmatrix⁴⁶.

Satz 5.34. *Es seien M und N freie R -Moduln mit Basen $\{x_1, \dots, x_m\}$ für M und $\{y_1, \dots, y_n\}$ für N . Sei weiter A eine R -Algebra.*

- (i) $M \otimes_R N$ ist ein freier R -Modul mit Basis $\{x_i \otimes y_j \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$
- (ii) $A \otimes_R M$ ist ein freier A -Modul mit Basis $\{1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_m\}$.

Beweis. i) Basen induzieren Isomorphismen $M \cong R^m$ und $N \cong R^n$. $\Rightarrow M \otimes_R N \cong R^m \otimes_R R^n \cong \underbrace{R^m \otimes_R R \oplus \dots \oplus R^m \otimes_R R}_{\cong R^m} \cong \underbrace{R^m \oplus \dots \oplus R^m}_{n \text{ mal}} \cong R^{n \cdot m}$ Inspektion des Isomorphismus zeigt, dass $\{x_i \otimes y_j\}$ eine R -Basis ist.

ii) $A \otimes_R M \cong A \otimes_R R^m \cong A \otimes_R R \oplus \dots \oplus A \otimes_R R \cong A \oplus \dots \oplus A \cong A^m$ Standardbasis in A^m entspricht $\{1 \otimes x_i \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ unter dem obigen Isomorphismus. \square

Korollar 5.35. *Sei R kommutativer Ring, aber nicht der Nullring. Ist M ein freier R -Modul mit zwei Basen $\{x_1, \dots, x_m\}$ und $\{y_1, \dots, y_n\}$, dann ist $n = m$.*

Beweis. Lemma 2.27 liefert uns ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R$. Dann ist $R/\mathfrak{m} =: K$ ein Körper. K ist auch eine R -Algebra. Durch Skalarerweiterung erhält man den K -VR $K \otimes_R M$ mit den K -Basen $\{1 \otimes x_1, 1 \otimes x_2, \dots\}$ und $\{1 \otimes y_1, 1 \otimes y_2, \dots\}$ (Satz 5.34), Lineare Algebra $\Rightarrow n = m$. \square

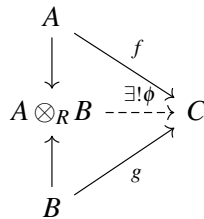
⁴⁶Wenn w und V die Basen $\{v_1, \dots\}$ und $\{w_1, \dots\}$, dann wäre $\{1 \otimes v_1, 1 \otimes v_2, \dots\}$ und $\{1 \otimes w_1, \dots\}$ Basen zu $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ und $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$.

Satz 5.36. Seien A, B R -Algebren. Auf $A \otimes_R B$ existiert genau eine Struktur als R -Algebra so, dass $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ für alle $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$.

Beweisskizze. Sei $a \in A$ und $b \in B$. Die Abbildungen $r_a : A \rightarrow A, x \mapsto xa$ und $r_b : B \rightarrow B, x \mapsto xb$ sind R -linear. Wir erhalten somit eine R -lineare Abbildung $r_{(a,b)} := r_a \otimes r_b : A \otimes_R B \rightarrow A \otimes_R B, x \otimes y \mapsto xa \otimes yb$. Sei $z \in A \otimes_R B$. Die Abbildung $f_z : A \times B \rightarrow A \otimes_R B, f_z((a,b)) = r_{(a,b)}(z)$ ist R -linear. $\rightarrow f_z : A \otimes_R B \rightarrow A \otimes_R B \rightarrow$ Wohldefinierte Abbildung $A \otimes_R B \times A \otimes_R B \rightarrow A \otimes_R B, (z,w) \mapsto f_z(w)$, die auf Elementartensoren wie folgt aussieht: $(x \otimes y, a \otimes b) \mapsto xa \otimes yb$. Es verbleibt die Ringaxiome nachzuweisen! \square

Bemerkung 5.37. In der obigen Situation sind $A \rightarrow A \otimes_R B, a \mapsto a \otimes 1$ und $B \rightarrow A \otimes_R B, b \mapsto 1 \otimes b$ Homomorphismen von R -Algebren.

Satz 5.38. Sei A, B zwei R -Algebren, so hat $A \otimes_R B$ folgende universelle Eigenschaft: Für jede weitere R -Algebra C und Homomorphismen $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C$ mit der Eigenschaft $\forall a \in A, b \in B : f(a) \cdot g(b) = g(b) \cdot f(a)$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus von R -Algebren $\phi : A \otimes_R B \rightarrow C$ mit $\phi(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$



mit $f(a) \cdot g(b) = g(b) \cdot f(a)$

$$\phi(a \otimes b) = \phi(a \otimes 1 \cdot 1 \otimes b) = \phi(a \otimes 1) \cdot \phi(1 \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$$

Beweis. Die Abbildung $A \times B \rightarrow C, (a,b) \mapsto f(a) \cdot g(b)$ ist R -bilinear. Somit erhält man $\phi : A \otimes_R B \rightarrow C$ mit $\phi(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$ R -linear.

Beh: ϕ ist Ringhomomorphismus: $\phi(a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2) = \phi(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) = f(a_1 a_2) \cdot g(b_1 b_2) = f(a_1) f(a_2) g(b_1) g(b_2) = f(a_1) f(a_2) g(b_1 b_2) = \phi(a_1 \otimes b_1) \cdot \phi(a_2 \otimes b_2) = f(a_1) \cdot g(b_1) \cdot f(a_2) \cdot g(b_2) = f(a_1) f(a_2) g(b_1) g(b_2) = f(a_1 a_2) \cdot g(b_1 b_2) = \phi(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)$. f, g Ringhomomorphismen. \square

Beispiel 5.39. Sei A eine R -Algebra mit Skalarabbildung $i : R \rightarrow Z(A) \subseteq A, r \mapsto r1_A$. Beh: $A \otimes_R M_n(R) \cong M_n(A)$ als R -Algebren.

Betrachte $f : A \in M_n(A), a \mapsto (\text{Diagonalmatrix mit } a \text{ auf der Diagonal})$, $g : M_n(R) \rightarrow M_n(A), (r_{ij}) \mapsto (i(r_{ij})) \in M_n(Z(A)) \subseteq M_n(A)$. dann gilt $f(a)g((r_{ij})) = g((r_{ij}))f(a)$. Nach der universellen Eigenschaft existiert $A \otimes_R M_n(R) \rightarrow M_n(A), a \otimes (r_{ij}) \mapsto (\text{diag-matrix mit } a \text{ in der Diagonal}) \cdot (r_1)$ Homomorphismus. Warum ϕ Iso? $A \otimes_R \underbrace{M_n(R)}_{=R^{n^2}} \cong A^{n^2}$ und ϕ überführt die SS Standardbasen".

$$M_n(A) \cong A^{n^2}$$

09.02.2024

§5.3 Noethersche Moduln und Ring

[R möglicherweise nicht kommutativer Ring]

Beispiel 5.40. $R = \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots]$ Polynomring in abzählbar unendlich vielen Variablen. $M = R$ R -Modul ist endlich erzeugt: $M = \langle 1_R \rangle$. Sei $I = \langle X_1, X_2, \dots \rangle \subseteq M$ der von allen Variablen erzeugte Untermodul. dann ist I nicht endlich erzeugt.

Seien $f_1, \dots, f_m \in I$. Sei X_n eine Variable, die nicht in den Polynomen f_1, \dots, f_m vorkommt. Dann $x_n \notin \langle f_1, \dots, f_m \rangle = \{ \sum_{i=1}^m g_i f_i \mid g_1, \dots, g_m \in R \}$. Somit sind Untermoduln von endlich erzeugten R -Moduln i.A. nicht endlich erzeugt.

Definition 5.41. Ein R -Modul M heißt *noethersch*, wenn jeder Untermodul von M endlich erzeugt ist.

Satz 5.42. Sei M ein R -Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) M ist noethersch
- (ii) Ist $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M , dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \dots$
- (iii) Jede nicht leere Menge von Untermoduln von M besitzt ein maximales Element⁴⁷.

Beweis.

(i) \Rightarrow (ii) Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette und $N := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. M noethersch $\Rightarrow N$ endlich erzeugt, d.h. $N = \langle m_{i_1}, \dots, m_{i_n} \rangle$ mit $m_{i_k} \in M_{i_k}$. Setze $n_0 = \max\{i_1, \dots, i_n\}$. Dann ist $N = M_{n_0}$

(ii) \Rightarrow (iii) Durch Widerspruch:

Sei \mathcal{X} eine nicht leere Menge von Untermoduln, die kein maximales Element hat. Wähle $M_1 \in \mathcal{X}$. M_1 nicht maximal \Rightarrow ⁴⁸ es gibt $M_2 \in \mathcal{X}$ mit $M_1 \subset M_2$. M_2 nicht maximal \Rightarrow es gibt $M_3 \in \mathcal{X}$ mit $M_2 \subset M_3 \dots$ Wir erhalten induktiv eine strikt aufsteigende Kette von Untermoduln $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots \nexists$

(iii) \Rightarrow (i) Sei $N \subset M$ ein Untermodul. Betrachte $\mathcal{X} = \{N' \subseteq N \mid N' \text{ endlich erzeugt}\} \neq \emptyset$, wegen $\{0\} \in \mathcal{X}$. Sei $N_0 \in \mathcal{X}$ ein maximales Element. Beh. $N_0 = N$. Angenommen $x \in N \setminus N_0$. Dann $\langle N_0 \cup \{x\} \rangle \in \mathcal{X}$ im Widerspruch zur Maximalität.

□

Lemma 5.43. Es sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \xrightarrow{P} M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von R -Moduln. Dann ist M genau dann noethersch, wenn M' und M'' noethersch sind.

⁴⁷Eine Menge N ist maximal in \mathcal{X} , wenn für jedes Element $N' \in \mathcal{X}$ gilt $N' \supseteq N \Rightarrow N = N'$

⁴⁸Gäbe es keine echte Obermenge gäbe, wäre es maximal. Wenn es eine gibt, dann ist sie nach Definition von Maximal ungleich.

Beweis.

\Rightarrow Sei M noethersch. Dann ist jeder Untermodul von M' isomorph zu einem Untermodul von M und somit endlich erzeugt. Also ist M' noethersch.

Sei $N \subseteq M''$ ein Untermodul. Dann ist $p^{-1}(N) \subseteq M$ endlich erzeugt. Somit ist $p(p^{-1}(N)) = N$ auch endlich erzeugt. Also ist M'' noethersch.

\Leftarrow Sei $W \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist

$$0 \rightarrow \underbrace{j^{-1}(W)}_{\subseteq M'} \xrightarrow{j} W \xrightarrow{p} \underbrace{p(W)}_{\subseteq M''} \rightarrow 0$$

exakt und $j^{-1}(W)$ und $p(W)$ sind endlich erzeugt.

Die Aussage folgt aus der folgenden Implikation: $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{j} M_2 \xrightarrow{p} M_3 \rightarrow 0$ kurze exakte Folge und M_1, M_3 endlich erzeugt $\Rightarrow M_2$ endlich erzeugt.

Seien $M_1 = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ und $M_3 = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$. Dann ist $M_2 = \langle \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m, j(x_1), \dots, j(x_n) \rangle$ für $\tilde{y}_i \in p^{-1}(\{y_i\})$

Sei $z \in M_2$. Dann gibt es $r_1, \dots, r_m \in R$ mit $p(z) = r_1 \cdot y_1 + \dots + r_m \cdot y_m$. Somit ist $z - (r_1 \tilde{y}_1 + \dots + r_m \tilde{y}_m) \in \ker(p) = \text{Bild}(j)$. \Rightarrow es gibt $s_1, \dots, s_n \in R$ mit $z - (r_1 \tilde{y}_1 + \dots + r_m \tilde{y}_m) = s_1 j(x_1) + \dots + s_n j(x_n)$.

□

Korollar 5.44.

- (i) Jeder Untermodul und jeder Faktormodul eines noetherschen Moduls ist noethersch.
- (ii) Jede endliche direkte Summe von noetherschen Moduln ist noethersch.

Beweis.

- (i) direkte Konsequenz von 5.43
- (ii) Es genügt zu zeigen, dass $M \oplus N$ noethersch ist, falls M, N noethersch sind. Folgt aus 5.43 und der kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow M \rightarrow M \oplus N \rightarrow N \rightarrow 0$

□

Definition 5.45. Ein Ring heißt *linksnoethersch*, wenn er als Linksmodul über sich selbst noethersch ist.

Analog definiert man *rechtsnoethersch*. Ein Ring heißt *noethersch*, wenn er links- und rechtsnoethersch ist.

Beispiel. für noethersche Ringe:

- $R = K$ Körper
- Hauptidealringe (folgt aus dem Sturktursatz für Hauptidealringe)
- $R = M_n(K)$, K Körper. Jedes (Links-) Ideal in R ist ein K -Untervektorraum von $M_n(K) = K^{n^2}$, somit endlich erzeugt als K -VR. Somit erst recht endlich erzeugt als R -Ideal

Bsp 5.40: $\mathbb{C}[X_1, X_2, \dots]$ nicht noethersch.

Lemma 5.46. Jeder endlich erzeugte Modul über einem linksnoetherschen Ring ist noethersch

Beweis. 5.44 (ii) $\Rightarrow R^n$ ist noethersch für $n \in \mathbb{N}$. Sei $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ein endlich erzeugter Modul. Dann ist $R^n \twoheadrightarrow M, e_i \mapsto x_i$ ein Epimorphismus. 5.44(i) $\Rightarrow M$ noethersch. \square

Lemma 5.47. Sei M ein noetherscher R -Modul. Falls $M \cong M \oplus N$ für einen R -Modul N , so gilt $N = 0$.

Satz 5.48. Sei R ein linksnoetherscher Ring, aber nicht der Nullring. Sei M ein freier R -Modul mit Basen $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{y_1, \dots, y_m\}$. Dann gilt $n = m$.

Beweis. Ang. $m \leq n$. Dann gilt $R^m \cong M \cong R^n = R^m \oplus R^{n-m}$. Weiter ist R^m noethersch, weil R linksnoethersch ist. Lemma 5.47 $\Rightarrow R^{n-m} = 0 = R$ nicht Nullring $\Rightarrow n-m = 0$ \square

15.02.2024

Beweis zu 5.47. Sei $X = \{\text{durch } M \text{ komplementierbare Untermoduln von } M\} = \{N_0 \subseteq M \mid N_0 \text{ Untermodul, es existiert ein Untermodul } C \text{ s.d. } N_0 \oplus C = M \text{ und } C \cong M\}$. Dann ist $\{0\} \in X$, also $X \neq \emptyset$. Sei $L \in X$ ein maximales Element, dass nach 5.42 existiert. Dann ist $M = L \oplus C$ mit $C \cong M$. Sei $f: M \oplus N \rightarrow M$ ein Isomorphismus. Dann betrachte

$$\begin{array}{ccccc} M \oplus N & \xrightarrow[\quad f \quad]{\cong} & M \cong C & \hookrightarrow & M \\ & & \searrow g & & \uparrow \end{array}$$

Setze $L_1 := L + g(N) = L \oplus g(N) \subseteq M$. Dann gilt $M = L \oplus C = L \oplus g(N) \oplus g(M) = L \oplus \overbrace{g(M)}^{\cong M}$ somit $L_1 \in X$. Wegen Maximaxität und $L_1 \supseteq L$ ist $g(N) = 0$ und somit $N = 0$. \square

Satz 5.49 (Hilbertscher Basissatz). Ist R ein linksnoetherscher Ring, dann ist der Polynomring $R[X]$ auch linksnoethersch.

Beweis. Sei $I \subseteq R[X]$ ein Linksideal. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n = \{f \in I \mid \deg(f) \leq n\}$. Dann ist $I_{\leq n}$ ein R -Untermodul von I . Für $f = \sum a_i x^i$ sei $\text{coef}_n(f) := a_n$. Dann ist $\text{coef}_n: I_{\leq n} \rightarrow R$ R -linear. Sei $J_{\leq n} := \text{Koe}f_n(I_{\leq n}) \subseteq R$. Dann ist $J_{\leq n}$ ein Linksideal von R . Falls $f \in I_{\leq n}$ dann ist $x \cdot f \in I_{\leq n+1}$ und $\text{Koe}f_{n+1}(x \cdot f) = \text{Koe}f_n(f)$. Somit $J_{\leq n} \subseteq J_{\leq n+1}$. da R linksnoethersch ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $J_{\leq m} = J_{\leq k}$ für alle $m \geq k$.

Beh: $I = \langle I_{\leq k} \rangle_{R[X]} = R[X] \cdot I_{\leq k}$. Klar ist \supseteq . Umgekehrt sei $f \in I$ mit $\deg(f) = m$. mit Induktion über den Grad m zeigen wir, dass $f \in \langle I_{\leq k} \rangle_{R[X]}$.

I-Anfang: $m \leq k$ ✓ I-Schritt: $\text{Koeff}_m(f) \in J_{\leq m} = J_{\leq k}$. Also gibt es $g \in I_{\leq k}$ mit $\text{koeff}_k(g) = \text{koeff}_m(f)$. Betrachte $\tilde{f} = f - X^{m-k} \cdot g$. Dann ist $\deg \tilde{f} < m$. I-Vorraussetzung $\Rightarrow \tilde{f} \in \langle I_{\leq k} \rangle_{R[X]}$.
 $\Rightarrow f = \tilde{f} + X^{m-k} \cdot \underbrace{g}_{I_{\leq k}} \in \langle I_{\leq k} \rangle_{R[X]}$. Nun ist $I_{\leq k}$ ein R -Untermodul von $Rx^k \oplus Rx^{k-1} \oplus \dots \oplus$

$Rx \oplus R \cong R^{k+1}$. Da R linksnoethersch ist, folgt mit 5.46, dass $I_{\leq k}$ als R -Modul endlich erzeugt ist. Sei $g_1, \dots, g_l \in I_{\leq k}$ ein R -Erzeugendensystem. Dann gilt: $I = \langle I_{\leq k} \rangle_{R[X]}$ auch $I = \langle \{g_1, \dots, g_l\} \rangle_{R[X]}$ \square

Korollar 5.50. Sei K ein Körper⁴⁹. Der Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch.

Beweis. Man hat $K[X_1, \dots, X_n] = K[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ und wendet den Hilbertschen Basissatz wiederholt an. \square

Korollar 5.51. Sei K ein Körper und sei $F \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ eine Menge von Polynomen. Betrachte die Verschwindungsmenge

$$V(F) = \{(z_1, \dots, z_n) \in K^n \mid \forall f \in F : f(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

Dann existieren endlich viele $f_1, \dots, f_r \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $V(F) = V(\{f_1, \dots, f_r\})$

6 Ganze Ringerweiterungen und Dedekindringe

Alle Ring sind kommutativ.

§6.1 Ganze Ringerweiterungen

Definition 6.1. Sei B ein Ring und $A \subseteq B$ ein Unterring. Ein Element $x \in B$ heißt ganz über A , wenn es ein normiertes Polynom $f \in A[X] \setminus \{0\}$ gibt mit $f(x) = 0$, d.h. $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ mit $a_i \in A$.

Satz 6.2 (Charakterisierung ganzer Elemente). $A \subseteq B$ Unterring. Für $x \in B$ sind äquivalent:

- (i) x ist ganz über A
- (ii) Der Ring $A[x]$ ⁵⁰ ist als A -Modul endlich erzeugt
- (iii) $A[x]$ ist in einem Unterring $C \subseteq B$ enthalten, der als A -Modul endlich erzeugt ist.

Beweis.

- (i) \Rightarrow (ii) Sei x ganz, d.h. $x^n = -a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0 \in \langle 1, \dots, x^{n-1} \rangle_A$. Mit Induktion über $k \in \mathbb{N}$ sieht man, dass $x^{n+k} \in \langle 1, \dots, x^{n-1} \rangle_A$. $\Rightarrow A[x]$ ist endlich erzeugt als A -Modul!

⁴⁹linksnoetherscher Ring reicht aus

⁵⁰kleinster Unterring von B , der A und x enthält

(ii) \Rightarrow (iii) Nimm $C = A[x]$

(iii) \Rightarrow (i) Sei $\{c_1, \dots, c_n\}$ ein A -Erzeugendensystem von C . Wegen $x \in C$ ist $xc_i \in C$ für alle i . Also ist $xc_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \cdot c_j$ für geeignete $\gamma_{ij} \in A$. Die Matrix $T = x \cdot I_n - (\gamma_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(A[X])$. erfüllt $T \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$.

Sei T^{adj} die Adjunkte⁵¹ zu T . Es gibt $T^{adj} \dots T = \det(T) \cdot I_n \Rightarrow \det(T) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = T^{adj} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det(T) \cdot c_i = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. $\Rightarrow \det(T) \cdot c = 0$ für jedes $c \in C$. $\stackrel{c=1}{\Rightarrow} \det(T) = 0 = f(x) = \det(x \cdot I_n - (\gamma_{ij}) \in A[x]$ (das math x soll evtl ein groß X sein) $\Rightarrow g$ ganz

□

16.02.2024

Korollar 6.3. A Unterring von B

- (a) Sind $x_1, \dots, x_n \in B$ ganz über A , so ist $A[x_1, \dots, x_n]$ endlich erzeugt als A -Modul.
- (b) Die Menge der über A ganzen Elemente von B bildet einen Unterring.
- (c) Sei B Unterring von C . Falls B endlich erzeugt als A -Modul und $y \in C$ ganz über B , dann ist y ganz über A .

Beweis. (a) Induktion nach n :

$n = 1 \rightarrow$ siehe 6.2

schreibe $A[x_1, \dots, x_{n+1}] = A[x_1, \dots, x_n][x_{n+1}]$. Weil x_{n+1} ganz über A ist, ist x_{n+1} auch ganz über $A[x_1, \dots, x_n]$. Sei $\{f_1, \dots, f_r\}$ ein Erzeugendensystem von $A[x_1, \dots, x_n]$ als A -Modul, was nach Induktionsvoraussetzung existiert. Sei $\{g_1, \dots, g_l\}$ ein Erzeugendensystem für $A[x_1, \dots, x_n][x_{n+1}]$ als $A[x_1, \dots, x_n]$ -Modul. Sei $z \in A[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Schreibe

$$z = \sum_{i=1}^l b_i g_i, b_i \in A[x_1, \dots, x_n]$$

und

$$b_i = \sum_{j=1}^r c_{ij} f_j, c_{ij} \in A$$

$\rightarrow z = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r c_{ij} f_j g_i$. Also ist $\{f_j g_i \mid j \in \{1, \dots, r\}, i \in \{1, \dots, l\}\}$ ein A -Erzeugendensystem für $A[x_1, \dots, x_{n+1}]$.

- (b) Sei $x, y \in B$ ganz über A . Dann sind $x + y, x - y, x \cdot y \in A[x, y]$. Wegen (a) und 6.2 sind $x \pm y, x \cdot y$ ganz über A .

⁵¹Wikipedia: $\text{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(S_{ji})$

(c) Wegen 6.2 ist $B[y]$ als B -Modul endlich erzeugt. Wie im Beweis von (a) sieht man, dass dann $B[y]$ als A -Modul endlich erzeugt ist. Also ist y ganz über A . \square

Definition 6.4. Sei $A \subseteq B$ Unterring und $R = \{x \in B \mid x \text{ ganz über } A\}$. R heißt *ganze Hülle* von A in B . Ist $R = B$, so sagt man, dass B eine *ganze Ringerweiterung* von A ist. Ist $R = A$, so sagt man, dass A *ganz abgeschlossen* in B ist. Ein Integritätsbereich, der ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist, heißt *ganz abgeschlossen*.

Lemma 6.5. Jeder Hauptidealring ist ganz abgeschlossen.

Beweis. Sei A ein Hauptidealring und $K = \text{Quot}(A)$. Sei $x = \frac{a}{b} \in K^\times$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1$. Ist x ganz, dann $x^n = -a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ mit geeigneten $a_i \in A$. $\Rightarrow a^n = -a_{n-1} \cdot ba^{n-1} - \dots - a_0 \cdot b^n$. Jeder Primteiler von b teilt a^n , also auch a . Wegen $\text{ggT}(a, b) = 1$, ist $b \in A^\times$. Folglich $x = \frac{a}{b} \in A$. \square

Satz 6.6. Sei A ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich und $K = \text{Quot}(A)$. Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung. Dann gilt $y \in L$ ganz über $A \Leftrightarrow m_{y,K} \in A[X]$

Beweis.

\Leftarrow per Definition und wegen Normiertheit des $m_{y,K}$.

\Rightarrow Sei $f \in A[X]$ normiert mit $f(y) = 0$. Es gilt $m_{y,K} \mid f$ als Elemente von $K[X]$. Sei \bar{K} der algebraische Abschluss von K und schreibe $m_{y,K} = \prod_{i=1}^n (X - b_i)$ mit $b_1, \dots, b_n \in \bar{K}$. Es gilt $f(b_i) = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Also sind b_1, \dots, b_n ganz über A . Wegen 6.3 (b) sind alle Koeffizienten von $m_{y,K}$ ganz über A . Da A ganz abgeschlossen ist, ist $m_{y,K} \in A[X]$ \square

Definition 6.7. Einen endlichen Erweiterungskörper $K|\mathbb{Q}$ nennt man *algebraischer Zahlkörper*. Die ganze Hülle \mathcal{O}_K von \mathbb{Z} in K nennt man den *Ganzheitsring* von K .

Beispiel. (1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $d \neq 1$. Was ist \mathcal{O}_K ? Betrachte $K \ni x = a + \sqrt{d} \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Angenommen $b \neq 0$. Dann ist das Minimalpolynom

$$X^2 - 2aX + a^2 - db^2$$

x ganz über \mathbb{Z} , d.h. $x \in \mathcal{O}_K \Leftrightarrow 2a \in \mathbb{Z}, a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$. Für $x \in \mathcal{O}_K$ schreibe $a = \frac{\tilde{a}}{2}$ mit $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$, $b = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$. $\mathbb{Z} \ni a^2 - db^2 = \frac{\tilde{a}^2}{4} - d \frac{p^2}{q^2} = \frac{\tilde{a}^2 q^2 - 4dp^2}{4q^2}$. Es folgt $q^2 \mid 4dp^2$. Da $\text{ggT}(p, q) = 1$ und d quadratfrei, ist $q^2 \mid 4$. Also $q \in \{1, 2\}$.

Falls $q = 1$, dann $4 \mid \tilde{a}^2$, also \tilde{a} gerade. Folglich $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}k$

Falls $q = 2$, dann folgt $16|4\tilde{a}^2 - 4dp^2$ und p ungerade. $\Rightarrow 4|\tilde{a}^2 - dp^2$. $4 \nmid \tilde{a}^2$, da d quadratfrei und p ungerade. Somit $\tilde{a}^2 - dp^2 \equiv 1 - d \cdot 1 \equiv 0 \pmod{4}$, also $d \equiv 1 \pmod{4}$.

Wir erhalten

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{d}}{2} \cdot \mathbb{Z} & d \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z} + \sqrt{d} \cdot \mathbb{Z} & d \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

<Große Verwirrung....>

$a = \frac{\tilde{a}}{2}$ mit \tilde{a} ungerade

$b = \frac{p}{q} = \frac{p}{2}$ mit p ungerade

$$x = \frac{\tilde{a}}{2} + \sqrt{d} \frac{p}{2} = \underbrace{\frac{\tilde{a}-p}{2}}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{p}{2} + \sqrt{d} \frac{p}{2} \in \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{d}}{2} \cdot \mathbb{Z} \text{ Folglich } \mathcal{O}_K \subseteq \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{d}}{2} \mathbb{Z} \text{ im ersten}$$

Fall. Für die umgekehrte Inklusion benötigen wir nun $\frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathcal{O}_K$ und \mathcal{O}_K ein Ring ist.
 $m_{\frac{1+\sqrt{d}}{2}, \mathbb{Q}} = X^2 - X - \frac{1}{4} - d \cdot \frac{1}{4} \in \mathbb{Z}[X]$ wegen $d \equiv 1 \pmod{4}$.

(2) $d = -5, K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \sqrt{-5}\mathbb{Z}$

\mathcal{O}_K ist kein Hauptidealring: $2 \cdot 3 = 6 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$ $2, 3, 1 \pm \sqrt{-5}$ sind irreduzibel in \mathcal{O}_K , aber sind nicht assoziiert.

\mathcal{O}_K ist ein Beispiel eines *Dedekindrings*, für die man Zahlentheoretische Betrachtungen analog zu Hauptidealringin durchführen.