Automaten en Berekenbaarheid

Pieter Vanderschueren

Academiejaar 2023-2024

Introductie

Inhoudsopgave

1 Talen en automaten

1.1 Wat is een taal?

Definitie 1.1: String over een alfabet Σ

Een **string** over een alfabet Σ is een eindige opeenvolging van nul, één of meer elementen van Σ.

Definitie 1.2: Taal L over een alfabet Σ

Een **taal** L over een alfabet Σ is een verzameling van strings over Σ.

1.2 Een algebra van talen

Definitie 1.3: Een algebra- of algebraïsche structuur

Een algebra- of algebraïsche structuur is een verzameling met daarop een aantal inwendige operaties: dikwijls binaire operaties, maar unair of met grotere ariteit kan ook. Zo wordt de verzameling van alle talen over een alfabet Σ een algebra als we als operaties unie, doorsnede, complement, etc. definïeren. Meer concreet: als L_1 en L_2 twee talen zijn, dan is

- de unie ervan een taal: $L_1 \cup L_2$
- de doorsnede ervan een taal: $L_1 \cap L_2$
- het complement ervan een taal: $\overline{L_1}$

Eigenschap 1.1: Concatenatie van twee talen

Gegeven twee talen L_1 en L_2 over hetzelfde alfabet Σ, dan noteren we de concatenatie van L_1 en L_2 als L_1L_2 en definïeren we:

$$L_1L_2 = \{xy|x \in L_1, y \in L_2\}$$

Eigenschap 1.2: De Kleene ster van een taal

De Kleene ster van een taal wordt gedefinieerd als volgt:

$$L^* = \cup_{n\geq 0} L^n$$

1.3 Reguliere expressies en reguliere talen

Definitie 1.4: Reguliere Expressie (RE) over een alfabet Σ

E is een **reguliere expressie** over een alfabet Σ indien E van de vorm is

- ϵ
- ϕ
- a waarbij $a \in \Sigma$
- $(E_1 E_2)$ waarbij E_1 en E_2 reguliere expressies zijn over Σ
- (E_1^*) waarbij E_1 een reguliere expressies is over Σ
- $(E_1|E_2)$ waarbij E_1 en E_2 reguliere expressies zijn over Σ

Definitie 1.5: Reguliere taal

Een reguliere expressie E bepaalt een **reguliere taal** L_E over hetzelfde alfabet Σ als volgt:

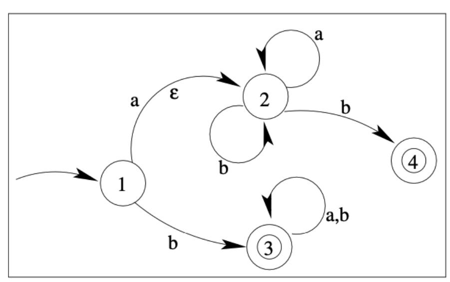
- als $E = a$ (met $a \in \Sigma$) dan is $L_E = \{a\}$
- als $E = \epsilon$ dan is $L_E = \{\epsilon\}$
- als $E = \phi$ dan is $L_E = \emptyset$
- als $E = (E_1 E_2)$ dan $L_E = L_{E_1} L_{E_2}$
- als $E = (E_1)^*$ dan $L_E = L_{E_1}^*$
- als $E = (E_1|E_2)$ dan $L_E = L_{E_1} \cup L_{E_2}$

1.4 Eindge toestandsautomaten

Definitie 1.6: Niet-deterministische eindige toestandsautomaat (NFA)

Een **niet-deterministische eindige toestandsautomaat** is een 5-tal $(Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ waarbij

- Q een eindige verzameling toestanden is
- Σ is een eindig alfabet
- δ is de overgangsrelatie van de automaat
- q_s is de starttoestand
- $F \subset Q$ is de verzameling eindtoestanden



Definitie 1.7: Een string s wordt aanvaard door een NFA

Een string s wordt aanvaard door een NFA $(Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ indien er een sequentie $q_s = q_0 \overset{a_0}{\to} \dots \overset{a_{n-1}}{\to} q_n$ van overgangen bestaat met $q_n \in F$ zodat s de ϵ-compressiew, wat bekomen wordt door in ϵ te schrappen in de string, is van $a_0 \dots a_{n-1}$.

Dus: Voor toestanden p,q en string $w \in \Sigma^*$ schrijven we $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$ indien er een sequentie van overangen $p \overset{a_0}{\to} \dots \overset{a_{n-1}}{\to} q$ bestaat zodat w de ϵ-comprssie is van $a_0 \dots a_{n-1}$.

Definitie 1.8: De taal door een NFA M bepaald

Een taal L wordt bepaald door een NFA M, indien L de verzameling van strings is die M aanvaardt. We noteren de taal van M als L_M.

Definitie 1.9: Equivalentie van twee NFA's

Twee NFA's worden **equivalent** genoemd als ze dezelfde taal bepalen.

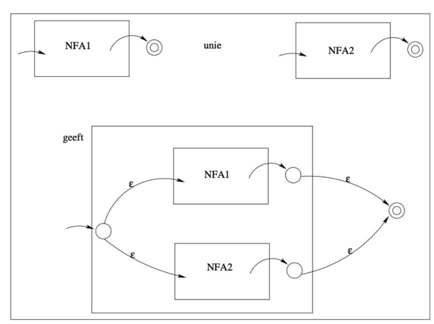
1.5 De algebra van NFA's

Eigenschap 1.3: De unie van twee NFA's

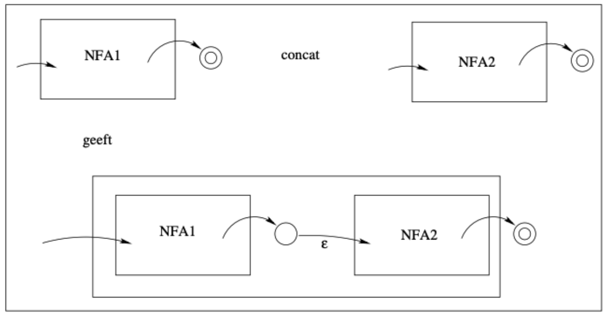
Gegeven: $NFA_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{s_1}, \{q_{f_1}\})$ en $NFA_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{s_2}, \{q_{f_2}\})$

De unie $NFA_1 \cup NFA_2$ is de $NFA = (Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ waarbij

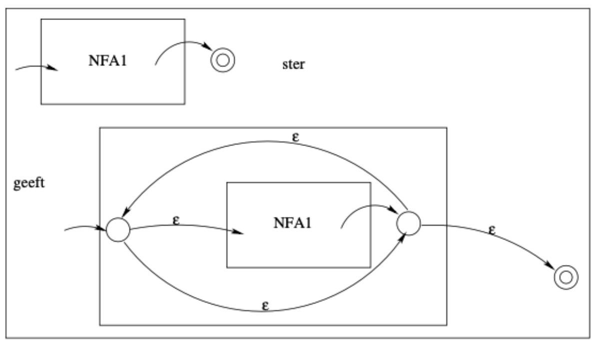
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_s, q_f\}$
- $F = \{q_f\}$
- δ is gedefnieerd als:
  - $\forall q \in Q_i \backslash \{q_{f_i}\},\ x \in \Sigma_\epsilon,\ i = 1,2:\ \delta(q,x) = \delta_i(q,x)$
  - $\delta(q_s, \epsilon) = \{q_{s_1}, q_{s_2}\}$
  - $\forall x \in \Sigma : \delta(q_s, x) = \emptyset$
  - $i = 1,2 : \delta(q_{f_i}, \epsilon) = \{q_f\}$
  - $\forall x \in \Sigma, i = 1,2 : \delta(q_{f_i}, x) = \emptyset$



Eigenschap 1.4: De concatenatie van twee NFA's



Eigenschap 1.5: De ster van een NFA



1.6 Van RE naar NFA

2 Talen en berekenbaarheid

3 Herschrijfsystemen

4 Andere rekenparadigmas

5 Talen en complexiteit