

Natuurkunde II - OZ oplossingen

Jonas Couwberghs, Pieter Vanderschueren

2023-2024

Rood: Uitwerking nog niet af

Oranje: Niet zeker of de uitwerking correct is

Geel: Uitwerking gekopieerd uit handboek

Oefenzitting 1:

Herhaling Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4

Magnetische velden voor beginners Oef 1 Oef 2

Oefenzitting 2:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5

Oefenzitting 3:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5

Oefenzitting 4:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5

Oefenzitting 5:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5

Oefenzitting 6:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5

Oefenzitting 7:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5

Oefenzitting 8:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5

Oefenzitting 9:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4

Oefenzitting 10:

Oef 1 Oef 2 Oef 3 Oef 4 Oef 5 Oef 6

OZ 1 - Herhaling - Oefening 1:

Bereken de volgende **vectorproducten**:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \hat{j} \times \hat{i} \\ &= -(\hat{i} \times \hat{j}) \\ &= -\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (\hat{j} \times \hat{k}) \times \hat{j} \\ &= ((0, 1, 0) \times (0, 0, 1)) \times \hat{j} \\ &= (1, 0, 0) \times \hat{j} \\ &= \hat{i} \times \hat{j} \\ &= \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \hat{j} \times (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &= \hat{j} \times \hat{i} \\ &= -(\hat{i} \times \hat{j}) \\ &= -\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad (\hat{j} \times \hat{k}) \cdot (\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i}) + (\hat{j} \times \hat{k}) \times \hat{j}) \\ &= \hat{i} \cdot (\hat{k} \times \hat{j} + \hat{i} \times \hat{j}) \\ &= \hat{i} \cdot ((-\hat{i}) + \hat{k}) \\ &= (1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

OZ 1 - Herhaling - Oefening 2:

Alvorens de reus Goliath te verslaan door een steen tegen zijn kop te slingeren, had David uiteraard eerst uitgetest welke lengte van slinger het meest effectief zou zijn. Zo bleek dat hij een slinger van $r = 0,600$ m 8,00 keer per seconde kon ronddraaien. Gebruikte hij een slinger van $r = 0,900$ m, dan kreeg hij de slinger maar 6,00 keer per seconde rondgedraaid (neem aan dat de steen in de slinger in beide gevallen dezelfde is).

- (a) Welke slingerlengte is het meest effectief? (Anders geformuleerd: welke slinger zorgt voor de grootste snelheid van de steen?)
- (b) Wat is de centripetale versnelling van de steen in beide gevallen?
- (c) Levert David arbeid bij het ronddraaien van de slinger?

$$\text{(a) Geg. : } r_1 = 0.600\text{m}, f_1 = 8.00\text{Hz} \quad r_2 = 0.900\text{m}, f_2 = 6.00\text{Hz}$$

$$\text{Gevr. : } v_1, v_2?$$

$$\begin{aligned} \text{Opl. : } v_1 &= \omega_1 r_1 = 2\pi f_1 r_1 = 2\pi(0.600)(8.00) \approx 30.2\text{m/s} \\ v_2 &= \omega_2 r_2 = 2\pi f_2 r_2 = 2\pi(0.900)(6.00) \approx 33.9\text{m/s} \leftarrow \text{sneller} \end{aligned}$$

$$\text{(b) Geg. : } r_1 = 0.600\text{m}, v_1 = 30.2\text{m/s} \quad r_2 = 0.900\text{m}, v_2 = 33.9\text{Hz}$$

$$\text{Gevr. : } a_{R,1}, a_{R,2}$$

$$\begin{aligned} \text{Opl. : } a_{R,1} &= \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{(30.2)^2}{0.600} \approx 1.52\text{km/s}^2 \\ a_{R,2} &= \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{(33.9)^2}{0.900} \approx 1.28\text{km/s}^2 \end{aligned}$$

(c) **Gevr. :** Levert David arbeid?

Opl. : Ja, David levert arbeid bij het ronddraaien van de slinger. David voert een kracht uit op de steen waardoor deze rotationeel versneld; hij levert dus arbeid op de steen.

OZ 1 - Herhaling - Oefening 3:

Een klein rigide object draagt een positieve lading en een negatieve lading van 3,50nC. De oriëntatie van het object is zo dat de positieve lading zich op $(-1, 20\text{mm}, 1, 10\text{mm})$ bevindt en de negatieve lading op $(1, 40\text{mm}, -1, 30\text{mm})$. Het object wordt geplaatst in een elektrisch veld $\vec{E} = (7800\hat{i} - 4900\hat{j}) \text{ N/C}$.

- (a) Wat is het elektrisch dipoolmoment van het object?
- (b) Wat is de torsie die het elektrisch veld op het object uitoefent?
- (c) Wat is de potentiële energie van het object-veld systeem als het object in deze oriëntatie blijft?
- (d) Als je aanneemt dat de oriëntatie van het object kan veranderen, wat is het verschil tussen maximum en minimum potentiële energie van het systeem?

(a) **Geg. :** $q = -3.50\text{nC}$, $\vec{r}_+ = (-1.20\text{mm}, 1.10\text{mm})$, $\vec{r}_- = (1.40\text{mm}, -1.30\text{mm})$

Gevr. : \vec{p} ?

Opl. : $\vec{p} = q\vec{\ell} = q(\vec{r}_- - \vec{r}_+) = q(2.60\hat{i} + -2.40\hat{j}) \approx (-9.10\hat{i} + 8.40\hat{j}) \cdot 10^{-12} \text{ Cm}$

(b) **Geg. :** $\vec{p} = (-9.10\hat{i} + 8.40\hat{j}) \cdot 10^{-12} \text{ Cm}$, $\vec{E} = (7800\hat{i} - 4900\hat{j}) \text{ N/C}$

Gevr. : $\vec{\tau}$?

Opl. : $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -9.10 \cdot 10^{-12} & 8.40 \cdot 10^{-12} & 0 \\ 7800 & -4900 & 0 \end{vmatrix} \approx -2.09 \cdot 10^{-8} \text{ Nm } \hat{k}$

(c) **Geg. :** $\vec{p} = (-9.10\hat{i} + 8.40\hat{j}) \cdot 10^{-12} \text{ Cm}$, $\vec{E} = (7800\hat{i} - 4900\hat{j}) \text{ N/C}$

Gevr. : U ?

Opl. : $U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\sum_{i=1}^n p_i E_i \approx 1.12 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}$

(d) **Geg. :** $\vec{p} = (-9.10\hat{i} + 8.40\hat{j}) \cdot 10^{-12} \text{ Cm}$, $\vec{E} = (7800\hat{i} - 4900\hat{j}) \text{ N/C}$

Gevr. : ΔU ?

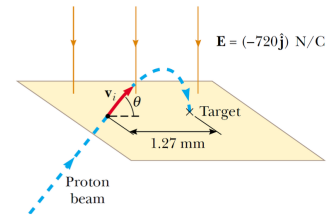
Opl. : $U_{\max} = -pE \cos(0^\circ) = -pE$

$U_{\min} = -pE \cos(180^\circ) = pE$

$\Delta U = U_{\max} - U_{\min} = -2pE \approx 2.28 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}$

OZ 1 - Herhaling - Oefening 4:

Protonen worden met een snelheid $v_i = 9,55 \text{ km/s}$ in een regio met een uniform elektrisch veld $\vec{E} = -720 \hat{k} \text{ N/C}$ geschoten (zie figuur). Het is de bedoeling dat de protonenstraal een doelwit raakt dat zich $R = 1,27 \text{ mm}$ van het punt bevindt waar de straal het elektrisch veld binnenkomt. Bereken onder welke twee hoeken θ de protonenstraal het doelwit raakt en hoe lang de protonen zich boven het vlak in de tekening bevinden. (Verwaarloos de zwaartekracht, de massa van een proton is immers $1,67E-27 \text{ kg}$).



Geg. : $v_i = 9,55 \text{ km/s}$, $\vec{E} = -720 \hat{k} \text{ N/C}$, $R = 1,27 \text{ mm}$, $m_p = 1,67E-27 \text{ kg}$, $q = q_p$

Gevr. : θ ?

Opl. : Een lading in een elektrisch veld ondervindt een elektrische kracht, namelijk

$$\vec{F}_e = q_p \vec{E}$$

waarbij parallel aan het veld is. We vinden door de tweede wet van Newton dat

$$\vec{a} = \frac{q_p}{m_p} \vec{E}$$

waardoor deze oefening trivialeert tot een projectielbeweging oefening. Neem het punt waar de protonen doorvliegen als de oorsprong. Stel v_y de verticale snelheid op het hoogste punt, dan

$$\frac{v_y - v_{0,y}}{a_y} = t$$

ofwel

$$\frac{2v_i \sin(\theta)}{a_y} = t$$

waarbij we maal twee doen om een vergelijking te hebben voor heel de beweging, want het maxima komt voor in het midden van de beweging. We weten voor de x-as dat

$$\begin{aligned} R_x &= v_i \cos(\theta) t \\ &= v_i \cos(\theta) \left(\frac{2v_i \sin(\theta)}{a_y} \right) \\ &= \frac{v_i^2}{a_y} \sin(2\theta) \end{aligned}$$

wat we kunnen herwerken tot θ

$$\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{v_i^2}{a_y} \sin(2\theta) \right) = 36.9^\circ \text{ en } 53.1^\circ$$

wat we kunnen invullen in de verticale snelheidsvergelijking om de volgende tijden te krijgen

$$t_{36.9^\circ} = 1.66 \cdot 10^{-7} \text{ s en } t_{53.1^\circ} = 2.21 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

	x	y
r	$v_i \cos(\theta)t$	$v_i \sin(\theta) - \frac{at^2}{2}$
v	$v_i \cos(\theta)$	$v_i \sin(\theta) - at$
a	0	$-a$

OZ 1 - Magnetische velden voor beginners - Oefening 1:

Proton in magneetveld: Een proton met een snelheid $4,00 \cdot 10^6$ m/s beweegt door een magneetveld van $1,70$ T en ondergaat daardoor een kracht van $8,20 \cdot 10^{-13}$ N. Wat is de hoek tussen het magnetische veld en de snelheidsvector van het proton?

Geg. : $q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C; $v = 4 \cdot 10^6$ m/s; $B = 1,70$ T; $F = 8,20 \cdot 10^{-13}$ N;

Gevr. : θ ;

Opl. : $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
 $\Rightarrow F = qvB \sin \theta$
 $\Leftrightarrow \theta = \arcsin \frac{F}{qvB}$
 $= \arcsin \frac{8,20 \cdot 10^{-13}}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 1,70}$
 $= 48,91^\circ \approx 48,9^\circ$

OZ 1 - Magnetische velden voor beginners - Oefening 2:

Magnetische kracht op een stroomvoerende geleider: Beeld je in dat er een stroomvoerende draad met dichtheid $2,40$ g/m rond de aarde is gespannen ter hoogte van de (magnetische) evenaar. Neem aan dat het aardmagnetische veld daar een constante grootte heeft van $28,0$ μ T, parallel is met het aardoppervlak en wijst naar het noorden. Welke stroom (grootte en richting) moet er door de draad gestuurd worden om er voor te zorgen dat de draad blijft leviteren net boven de grond?

Geg. : $\frac{dm}{ds} = 2,40$ g/m = $2,40 \cdot 10^{-3}$ kg/m; $28,0$ μ T; $\theta = 90^\circ$;

Gevr. : \vec{I} ;

Opl. : $d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B}$
 $\Leftrightarrow dm \cdot g = I \cdot ds \cdot B \cdot \sin 90^\circ$
 $\Leftrightarrow I = \frac{dm \cdot g}{ds \cdot B \cdot \sin 90^\circ}$
 $= \frac{2,40 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{28 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 90^\circ}$
 $= 840,85714$ A ≈ 841 A;

OZ 2 - Magnetische velden - Oefening 1:

Beschouw een massa separator met $E = 2,48 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ en $B_{\text{in}} = B_{0,\text{in}} = 0,680 \text{ T}$. We sturen nu koolstofionen met massagetallen 12, 13 en 14 door deze massa separator. Hoe ver liggen de lijnen van de verschillende (enkel geladen) isotopen uit elkaar op de detector? Wat als de ionen 2+ geladen zijn?

Geg. : $E = 2,48 \cdot 10^4 \text{ V/m}$, $B_{\text{in}} = B_{0,\text{in}} = 0,680 \text{ T}$, $m_1 = 12(1.67 \cdot 10^{-27}) \text{ kg}$, $m_2 = 13(1.67 \cdot 10^{-27}) \text{ kg}$, $m_3 = 14(1.67 \cdot 10^{-27}) \text{ kg}$, $q = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Gevr. : $d_{1 \rightarrow 2}, d_{2 \rightarrow 3}, d_{3 \rightarrow 1}$

Opl. : $r_1 = \frac{m_1 v_1}{q B_{0,\text{in}}} = \frac{m_1 E}{q B_{\text{in}} B_{0,\text{in}}} = 6.67 \cdot 10^{-3}$

$$r_2 = \frac{m_2 v_2}{q B_{0,\text{in}}} = \frac{m_2 E}{q B_{\text{in}} B_{0,\text{in}}} = 7.23 \cdot 10^{-3}$$

$$r_3 = \frac{m_3 v_3}{q B_{0,\text{in}}} = \frac{m_3 E}{q B_{\text{in}} B_{0,\text{in}}} = 7.79 \cdot 10^{-3}$$

$$d_{1 \rightarrow 2} = 2r_2 - 2r_1 = 1.10 \cdot 10^{-3}$$

$$d_{2 \rightarrow 3} = 2r_3 - 2r_2 = 1.12 \cdot 10^{-3}$$

$$d_{3 \rightarrow 1} = 2r_3 - 2r_1 = 2.22 \cdot 10^{-3}$$

Als we nu de lading 2 keer vergroten, dan zien we dat de straal 2 keer verkleint en dus halveert het verschil tussen de lijnen.

OZ 2 - Magnetische velden - Oefening 2:

Een uniform magnetisch veld van $0,150 \text{ T}$ ligt volgens de x-as. Een positron vliegt dit veld binnen met een snelheid van $5,00 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ onder een hoek van $85,0^\circ$ met de x-as (de massa van een positron is $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$). Bereken de straal van de helix die het positron gaat maken en ook de afstand p tussen twee opeenvolgende windingen van de helix.

Geg. : $B = 0,150 \text{ T}$, $v = 5,00 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, $\theta = 85,0^\circ$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Gevr. : r, p

Opl. : $F_B = qvB \sin(\theta) = 1.20 \cdot 10^{-13}$

$$a_R = \frac{F_B}{m} = \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{mv^2}{F_B} = 1.89 \cdot 10^{-4}$$

$$p = 2\pi r \cos(85^\circ) = 1.04 \cdot 10^{-4}$$

OZ 2 - Magnetische velden - Oefening 3:

Een stroom I vloeit door een rechthoekige balk van geleidend materiaal terwijl een magnetisch veld \vec{B} is aangelegd zoals in de figuur.

- (a) Als de ladingsdragers **positief** zijn, in welke richting worden ze dan afgebogen door het magnetisch veld? Deze afbuiging zorgt ervoor dat de bovenkant en de onderkant van de balk een netto lading krijgen. Dit produceert een elektrisch veld dat het effect van de magnetische kracht gaat tegenwerken. Het systeem is in evenwicht als de twee krachten elkaar opheffen.
 - (b) Wat is het potentiaalverschil tussen de boven- en onderkant van de balk als het systeem in evenwicht is? Druk je resultaat uit in functie van B , v (de snelheid van de ladingsdragers) en de relevante afmetingen van de balk. (Vermeld ook welke kant de hoogste potentiaal heeft.)
 - (c) Wat zou er veranderen aan je antwoorden als de ladingsdragers negatief zouden zijn maar de stroom nog steeds in dezelfde richting zou lopen?
- (a) Het zou uit het blad bewegen.
 - (b) **Gevr. :** \mathcal{E}_H
Opl. : $\mathcal{E}_H = E_H d = v B d$
 - (c) De Hallspanning zou gelijk zijn, maar de ladingen zouden in het blad bewegen.

OZ 2 - Magnetische velden - Oefening 4:

Een draad van 4,00 m met massa 0,100 kg wordt gebruikt om een vierkante spoel met zijde 0,100 m te maken. De spoel wordt opgehangen aan één van zijn horizontale zijden in een verticaal magnetisch veld van 0,0100 T. Vervolgens stuurt men een stroom van 3,40 A door de spoel. Bepaal de hoek die de spoel maakt met de verticale wanneer de spoel zijn evenwichtspositie heeft bereikt. Wat is het krachtmoment (torsie) die het magnetisch veld op de spoel uitoefent in deze situatie?

Geg. : $l = 4,00 \text{ m}$; $m = 0,100 \text{ kg}$; $z = 0,100 \text{ m}$; $B = 0,0100 \text{ T}$; $I = 3,40 \text{ A}$;

Gevr. : θ_e ; M_e ;

Opl. : (Oplossing van Serway 6E Chapter 29 Problem 22)

(a) Let θ represent the unknown angle; L , the total length of the wire; and d , the length of one side of the square coil. Then, using the definition of magnetic moment and the right-hand rule in Figure 29.15, we find

$$\mu = NAI : \boldsymbol{\mu} = \left(\frac{L}{4d}\right) d^2 I \text{ at angle } \theta \text{ with the horizontal.}$$

$$\text{At equilibrium, } \sum \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{r} \times m\mathbf{g}) = 0$$
$$\left(\frac{ILBd}{4}\right) \sin(90.0^\circ - \theta) - \left(\frac{mgd}{2}\right) \sin \theta = 0$$

and

$$\left(\frac{mgd}{2}\right) \sin \theta = \left(\frac{ILBd}{4}\right) \cos \theta$$
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{ILB}{2mg}\right) = \tan^{-1} \left(\frac{(3.40 \text{ A})(4.00 \text{ m})(0.0100 \text{ T})}{2(0.100 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}\right) = 3.97^\circ.$$

$$(b) \quad \tau_m = \left(\frac{ILBd}{4}\right) \cos \theta = \frac{1}{4}(3.40 \text{ A})(4.00 \text{ m})(0.0100 \text{ T})(0.100 \text{ m}) \cos 3.97^\circ = 3.39 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

OZ 2 - Magnetische velden - Oefening 5:

Bereken het magnetisch dipoolmoment van een roterende geladen isolerende schijf met straal R , waarbij de schijf rond zijn symmetrieas draait met een hoeksnelheid ω en de ladingsdichtheid varieert met de straal r volgens $\sigma = c \cdot r$, met c een constante.

Geg. : R, ω, r, σ

Gevr. : μ

Opl. : We stellen de formule van het infinitesimale oppervlakte op

$$dA = 2\pi r dr$$

waaruit we de formule voor de infinitesimale lading kunnen afleiden

$$\begin{aligned} dq &= \sigma dA \\ &= c 2\pi r^2 dr \end{aligned} \tag{1}$$

We weten de formule van de periode van de cirkelbeweging

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2}$$

Uit (1) en (2) vinden we

$$\begin{aligned} dI &= \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{dq}{T} \\ &= \omega c r^2 dr \end{aligned}$$

waaruit we de infinitesimale magnetisch dipoolmoment kunnen halen

$$\begin{aligned} d\mu &= dI(\pi r^2) \\ &= \pi \omega c r^4 dr \end{aligned}$$

en dus het magnetisch dipoolmoment

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^R d\mu \\ &= \pi \omega \int_0^R r^4 dr \\ &= \pi \omega c \frac{R^5}{5} \end{aligned}$$

OZ 3 - De Lorentzkracht en de wet van Ampère - Oefening 1:

Bereken de kracht die inwerkt op een oneindig lange, rechte draad met stroom I ten gevolge van:

- (a) de vierkante spoel
- (b) de driehoekige spoel



- (a) **Geg. :** I, s, a
Gevr. : de lorentzkracht F_L
Opl. : De evenwijdige zijden zullen een kracht uitoefenen op de draad. We vinden:

$$F_L = F_{\parallel, s+a} - F_{\parallel, s} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{a^2}{s(s+a)}$$

Vectorieel wordt dit:

$$\vec{F}_L = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{a^2}{s(s+a)} (-\hat{j})$$

- (b) **Geg. :** I, s, a
Gevr. : de lorentzkracht F_L
Opl. : We berekenen eerst de infinitesimale kracht veroorzaakt door de schuine draden:

$$dF_{\text{schuin}} = \frac{\mu_0 I^2 \sin(60^\circ)}{2\pi} \frac{1}{r} dr$$

Hierover integreren we:

$$\begin{aligned} F_{\text{schuin}} &= \int dF_{\text{schuin}} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \sin(60^\circ)} \int_s^{s+a \sin(60^\circ)} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \sin(60^\circ)} \left(\ln\left(\frac{s+a \sin(60^\circ)}{s}\right) \right) \end{aligned}$$

Via superpositie vinden we:

$$\begin{aligned} F_L &= 2F_{\text{schuin}} - F_{\parallel, s} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\frac{1}{\sin(60^\circ)} \ln\left(\frac{s+a \sin(60^\circ)}{s}\right) - \frac{a}{s} \right) \end{aligned}$$

Vectorieel wordt dit:

$$\vec{F}_L = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\frac{a}{s} - \frac{1}{\sin(60^\circ)} \left(\ln\left(\frac{s+a \sin(60^\circ)}{s}\right) \right) \right) (-\hat{j})$$

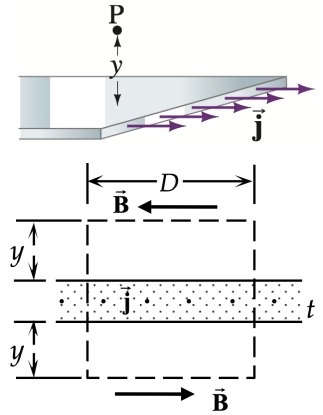
OZ 3 - De Lorentzkracht en de wet van Ampère - Oefening 2:

Een zeer groot geleidend vlak met dikte t draagt een uniforme stroomdichtheid \vec{j} . Bepaal het magneetveld (grootte, richting en zin) op een afstand y boven het vlak. (Neem aan dat het vlak oneindig groot is)

Geg. : t, \vec{j}, y

Gevr. : \vec{B} ?

Opl. : The sheet may be treated as an infinite number of parallel wires. The magnetic field at a location y above the wire will be the sum of the magnetic fields produced by each of the wires. If we consider the magnetic field from two wires placed symmetrically on either side of where we are measuring the magnetic field, we see that the vertical magnetic field components cancel each other out. Therefore, the field above the wire must be horizontal and to the left. By symmetry, the field a location y below the wire must have the same magnitude, but point in the opposite direction. We calculate the magnetic field using Ampere's law with a rectangular loop that extends a distance y above and below the current sheet, as shown in the figure.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2B_{\parallel}D = \mu_0 I_{\text{in}} = \mu_0(jtD)$$

$$B_{\parallel} = \frac{1}{2}\mu_0 jt$$

OZ 3 - De Lorentzkracht en de wet van Ampère - Oefening 3:

Een zeer lange geleidende strip van breedte d en verwaarloosbare dikte ligt in een horizontaal vlak en draagt een uniforme stroom I door zijn cross sectie

- (a) Toon aan dat voor punten op een afstand y recht boven het centrum het magneetveld gegeven is door:

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \tan^{-1} \left(\frac{d}{2y} \right)$$

Neem hierbij aan dat de strip oneindig lang is.

- (b) Weke waarde benadert B voor $y \gg d$? Houdt dit steek? Verklaar.

(a) **Geg. :** d, I, y

Gevr. : B ?

Opl. : We kunnen een strip zien als een hoop infinitesimale draden over een breedte d . We zullen een infinitesimale magnetisch veld bekijken dat veroorzaakt wordt door één van deze infinitesimale draden. Het B_y veld zal nul worden, we bekijken dus B_x .

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{r} dI = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \frac{\sin(\theta)}{r} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

Het punt y bevindt zich boven de oorsprong, we gebruiken symmetrie en integreren dus van $0 \rightarrow \frac{d}{2}$:

$$B = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\mu_0 I y}{\pi d} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 I y}{\pi d} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \tan^{-1} \left(\frac{d}{2y} \right)$$

- (b) $\lim_{y \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{d}{2y}\right) = 0 \Rightarrow B = 0$

OZ 3 - De Lorentzkracht en de wet van Ampère - Oefening 4:

Hiernaast is een coaxiale kabel afgebeeld. Rond de binnenste geleider zit een isolerende laag, daarbuiten zit opnieuw een geleidende laag die afgeschermd wordt met een tweede laag isolatiemateriaal. De stroom door de binnenste draad is 1.00 A **uit** het blad, de stroom door de buitenste geleider is 3.00 A **in** het blad. Wat is de grootte, richting en zin van het magnetische veld in punten a en b ?



Geg. : $I_{\text{binnen}} = 1.00 \text{ A}$, $I_{\text{buiten}} = 3.00 \text{ A}$, $r_a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $r_b = 3r_a = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Gevr. : \vec{B}_a , \vec{B}_b ?

Opl. : (a) We passen de wet van ampère toe op het punt:

$$B_a = \frac{\mu_0 I_{\text{binnen}}}{2\pi r_a} = 2.00 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Vectorieel wordt dit:

$$\vec{B}_a = 2.00 \cdot 10^{-4} \text{ T } \hat{j}$$

(b) We passen de wet van ampère toe op het punt:

$$B_b = \frac{\mu_0}{2\pi r_a} (I_{\text{binnen}} + I_{\text{buiten}}) = -1.33 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Vectorieel wordt dit:

$$\vec{B}_b = 1.33 \cdot 10^{-4} \text{ T } (-\hat{j})$$

OZ 3 - De Lorentzkracht en de wet van Ampère - Oefening 5:

Een solenoïde met diameter 10,0 cm en lengte 75,0 cm wordt gemaakt van een koperen draad met een heel dunne laag isolatie. De diameter van de draad is 0,100 cm. De draad wordt in een enkele laag rond een kartonnen cilinder gewikkeld, waarbij opeenvolgende wikkelingen elkaar raken. Welk vermogen moet geleverd worden aan deze solenoïde om een veld van 8,00 mT te creëren in het centrum? De resistiviteit van koper is $1.75 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ bij 20° .

Geg. : $d_{\text{spoel}} = 10.0 \text{ cm}$, $\ell_{\text{spoel}} = 75.0 \text{ cm}$, $d_{\text{draad}} = 0.100 \text{ cm}$, $\rho = 1.75 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, $B = 8.00 \text{ mT}$

Gevr. : P ?

Opl. : We passen de wet van ampère toe

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B\ell_{\text{spoel}} = \mu_0 N I_{\text{in}}$$

Er is gegeven dat opeenvolgende wikkelingen elkaar raken, hieruit volgt dat

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell_{\text{spoel}}} I_{\text{in}} = \mu_0 d_{\text{draad}} I_{\text{in}}$$

sinds $N = \frac{\ell_{\text{spoel}}}{d_{\text{draad}}}$. We vervangen I_{in} met $\sqrt{\frac{P}{R}}$:

$$B = \mu_0 \sqrt{\frac{P}{R}} = \mu_0 \sqrt{\frac{P}{4\rho \frac{\ell_{\text{draad}}}{\pi d_{\text{draad}}^2}}}$$

De lengte van de draad kunnen we berekenen met

$$\ell_{\text{draad}} = \pi d_{\text{spoel}} N$$

Hieruit kunnen we P berekenen:

$$P = \left(\frac{B}{\mu_0}\right)^2 \left(4\rho N \frac{d_{\text{spoel}}}{d_{\text{draad}}^2}\right) \approx 213 \text{ W}$$

OZ 4 - De wet van Ampère en de wet van Biot-Savart - Oefening 1:

Een geleider bestaat uit een cirkelvormige lus met straal R en twee lange rechte stukken. De draad ligt in het vlak van het blad en er loopt een stroom I doorheen. Bepaal de grootte en de richting van het magnetische veld dat geproduceerd wordt in het centrum van de lus.



Geg. : $I = 7.00\text{A}$, R

Gevr. : \vec{B} ?

Opl. : Stel nu dat $d\ell$ een infinitesimaal deeltje cirkelboog, dan is het infinitesimaal magnetisch veld door de lus

$$\begin{aligned} dB_L &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\gamma)}{R} d\theta \\ &\stackrel{\perp}{=} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

waarbij γ de hoek is tussen \vec{r} en $d\vec{\ell}$ hierover integreren om het totale magnetische veld te bekomen

$$\begin{aligned} B_L &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{R} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{2R} \end{aligned}$$

Het bovenste punt zou twee keer moeten meegelt worden, omdat er een overlap is (de andere overlap is niet loodrecht boven het punt en zal dus volgens de wet van ampere ons magnetisch veld niet beïnvloeden). Dus tellen we er nog een factor

$$B_P = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

bij en vervolgens krijgen we

$$\vec{B} = \vec{B}_L + \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right) (-\hat{k})$$

waarbij de rechterhandregel geeft dat het in het blad is.

OZ 4 - De wet van Ampère en de wet van Biot-Savart - Oefening 2:

Een circuit bestaat uit twee bogen met straal R en twee rechte stukken op een afstand $2a$ van elkaar. Door het circuit loopt een stroom I . Bereken het magnetisch veld \vec{B} in het punt $P = 0$, gelegen in het vlak van het circuit



Geg. : R, a, I

Gevr. : $\vec{A} ?$

Opl. : We zullen de vectoriële aanbrenging van de rechte stukken en bogen apart berekenen:

- We berekenen het infinitesimale veld geproduceerd door de rechte stukken

$$\begin{aligned} d\vec{B}_\parallel &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \sin(\phi)}{r^2} (\hat{k}) \end{aligned}$$

waarbij ϕ de hoek tussen $d\vec{\ell}$ en \hat{r} en dit gaan we herschrijven in functie van de hoek ϕ

$$\begin{aligned} d\vec{B}_\parallel &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} d\ell \sin(\phi) (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^2(\phi)}{a^2} d\ell \sin(\phi) (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^2(\phi)}{a^2} \frac{a}{\sin^2(\phi)} \sin(\phi) d\phi (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{a} \sin(\phi) d\phi (\hat{k}) \end{aligned}$$

waarbij we gebruikt hebben dat

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2(\phi)}{a^2} \quad \text{en} \quad d\ell = d \left(\frac{a}{\tan(\phi)} \right) = \frac{a}{\sin^2(\phi)} d\phi$$

We integreren hierover om het totale vectoriële veld te vinden van de rechte stukken

$$\begin{aligned} \vec{B}_\parallel &= 2 \int_{-\phi}^{\phi} d\vec{B}_\parallel \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{a} \int_{-\phi}^{\phi} \sin(\phi) d\phi (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{1}{a} \int_0^{\phi} \sin(\phi) d\phi (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{1}{a} [-\cos(\phi)] (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{1}{a} \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} (-\hat{k}) \end{aligned}$$

- We berekenen het infinitesimale veld geproduceerd door de bogen, we beginnen eerst voor een boog en maken gebruik van ϕ van bij de rechte stukken

$$\begin{aligned}
d\vec{B}_{\sim} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \sin(\gamma)}{r^2} (\hat{k}) \\
&\stackrel{\pm}{=} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\phi}{R} (\hat{k})
\end{aligned}$$

waarbij γ de hoek is tussen $d\ell$ en \hat{r} .

Hierover kunnen we integreren en het totale vectoriële veld vinden

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\sim} &= 2\vec{B}_{\sim} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_{-\phi}^{\phi} d\phi (\hat{k}) \\
&= \frac{\mu_0 I}{\pi R} \phi \\
&= \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \right) \right)
\end{aligned}$$

Als we nu de vectoriële som nemen van \vec{B}_{\parallel} en \vec{B}_{\sim} , vinden we

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left(\frac{1}{a} \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \right) \right)$$

OZ 4 - De wet van Ampère en de wet van Biot-Savart - Oefening 3:

Een niet-geleidende schijf van straal R draagt een uniform verdeelde lading Q . De schijf wordt rondgedraaid met een hoeksnelheid ω rond een as loodrecht op het vlak van de schijf en door het centrum van de schijf.



- (a) Bepaal het magnetische dipoolmoment van de schijf.
- (b) Bepaal het magnetische veld op de rotatie-as op een afstand x van het centrum van de schijf.
- (c) Als $x \gg R$ reduceert de uitkomst van (b) dan naar de formule voor een magnetische dipool?

(a) **Geg. :** R, Q, ω

Gevr. : $\vec{\mu}$?

Opl. : We stellen de formule van het infinitesimale oppervlakte op

$$dA = 2\pi r dr$$

waaruit we de formule voor de infinitesimale lading kunnen afleiden

$$\begin{aligned} dq &= \frac{Q}{A} dA \\ &= \frac{Q}{R^2} 2\pi r dr \end{aligned} \tag{1}$$

We weten de formule van de periode van de cirkelbeweging

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2}$$

Uit (1) en (2) vinden we

$$\begin{aligned} dI &= \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{dq}{T} \\ &= \frac{Q\omega}{R^2\pi} r dr \end{aligned}$$

waaruit we de infinitesimale magnetisch dipoolmoment kunnen halen

$$\begin{aligned} d\mu &= dI(\pi r^2) \\ &= \frac{Q\omega}{R^2} r^3 dr \end{aligned}$$

en dus het magnetisch dipoolmoment

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^R d\mu \\ &= \frac{Q\omega}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{Q\omega R^2}{4} \end{aligned}$$

Vectorieel wordt dit:

$$\vec{\mu} = \frac{Q\omega R^2}{4} \hat{i}$$

- (b) **Geg. :** R, Q, ω
Gevr. : B_x ?
Opl. : We berekenen eerst het magnetisch veld in het centrum van een cirkel met straal r

$$\begin{aligned}
 B_{\text{cirkel},x} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell}{r^2 + x^2} \sin(\phi) \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{r}{r^2 + x^2} \sin(\phi) d\theta \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{r}{r^2 + x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} d\theta \\
 &= \frac{\mu_0 Q \omega r}{4\pi^2 R^2} \frac{r}{r^2 + x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{\mu_0 Q \omega r^3}{2\pi R^2 (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

waarbij $I = \frac{Q\omega}{R^2\pi}r$, wat we berekent hadden in (a). Een schijf bestaat uit infinitesimale cirkels en dus integreren we over bovenstaande formule om het magnetisch veld door de schijf te verkrijgen

$$\begin{aligned}
 B_{\text{schijf},x} &= \int dB_{\text{cirkel},x} \\
 &= \int \frac{\mu_0 Q \omega r^3}{2\pi R^2 (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dr \\
 &= \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \int_0^R \frac{r^3}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \left(\sqrt{x^2 + R^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right)
 \end{aligned}$$

- (c) **Geg. :** $x \gg R, B_{\text{dipool}} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$
Gevr. : $B_{\text{schijf},x} \approx B_{\text{dipool}}$?
Opl. : We beginnen door $B_{\text{schijf},x}$ te herschrijven

$$\begin{aligned}
 B_{\text{schijf},x} &= \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \left(\sqrt{x^2 + R^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right) \\
 &= \frac{\mu_0 Q \omega x}{2\pi R^2} \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} - 2 \right)
 \end{aligned}$$

We nemen de derde-orde taylorreeks van $\sqrt{1+y^2}$ en $(\sqrt{1+y^2})^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+y^2} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 \\
 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} &= 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2
 \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$B_{\text{schijf},x} = \frac{\mu_0 Q \omega R^2}{8\pi x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3} \approx B_{\text{dipool}}$$

OZ 4 - De wet van Ampère en de wet van Biot-Savart - Oefening 4:

Bepaal de grootte, richting en zin van het magnetische veld dat geproduceerd wordt in het punt P door de stroomvoerende lus.



Geg. : a, b, θ

Gevr. : \vec{B} ?

Opl. : Het magnetisch veld zal bepaald worden door de twee booglengtes.

(a) Het magnetische veld door de dichtste booglengte is

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} \int_0^\theta ds (\hat{k}) = \frac{\mu_0 I \theta}{4a\pi} (\hat{k})$$

(b) Het magnetische veld door de verste booglengte is

$$\vec{B}_b = \frac{\mu_0 I}{4b\pi} \int_0^\theta ds (-\hat{k}) = \frac{\mu_0 I \theta}{4b\pi} (-\hat{k})$$

De vectorsom hiervan is dan

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) (\hat{k})$$

waarbij $\theta = \frac{\pi}{3}$.

OZ 4 - De wet van Ampère en de wet van Biot-Savart - Oefening 5:

Een lange cilindrische geleider met straal a heeft twee cilindrische gaten van diameter a doorheen zijn hele lengte (zie doorsnede in Figuur 5). Een stroom I vloeit door de geleider en is uit het blad gericht. De stroomdichtheid is uniform doorheen de doorsnede van de draad. Wat is het magnetisch veld in termen van μ_0 , I , r en a in punt P_1 ? Dezelfde vraag voor punt P_2 .



Opl. : Neem B_1 het magnetisch veld door het gekleurde deel, B_2 het magnetisch veld door de bovenste caviteit en B_3 het magnetisch veld door de onderste caviteit. De oppervlakte A waardoor stroom vloeit is

$$A = \pi \left(a^2 - \frac{a^2}{2} \right) = \pi \frac{a^2}{2}$$

waaruit volgt dat de stroom dichtheid J het volgende is

$$J = \frac{2I}{\pi a^2}$$

m.a.w. er vloeit een stroom $2I$ door de geleider (en dus een stroom $-I$ door de caviteiten).

P_1 : **Geg.** : μ_0, I, r, a

Gevr. : B in P_1 ?

Opl. : We vinden de volgende magnetische velden

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} \\ B_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(r - \frac{a}{2}\right)} \\ B_3 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(r - \frac{a}{2}\right)} \end{aligned}$$

het equivalente veld in P_1 is

$$\begin{aligned} B &= B_1 - B_2 - B_3 \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(r - \frac{a}{2}\right)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(r - \frac{a}{2}\right)} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(\frac{2r^2 - a^2}{4r^2 - a^2} \right) \end{aligned}$$

Vectorieel:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(\frac{2r^2 - a^2}{4r^2 - a^2} \right) (-\hat{i})$$

P_2 : **Geg.** : μ_0, I, r, a

Gevr. : B in P_2 ?

Opl. : We vinden de volgende magnetische velden

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} \\ B_{2,3} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

waarbij $B_{2,3} = B_2 = B_3$. De horizontale componenten van B_2 en B_3 annuleren, het equivalente veld in P_2 is

$$\begin{aligned} B &= B_1 - 2B_{2,3} \cos(\theta) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} - \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \cos(\theta) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} - \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(1 - \frac{r^2}{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(\frac{2r^2 + a^2}{4r^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

Vectorieel:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(\frac{2r^2 + a^2}{4r^2 + a^2} \right) (\hat{j})$$

OZ 5 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 1:

Een segment van een draad met lengte d draagt een stroom I , zoals aangegeven in de figuur hiernaast.



- (a) Toon aan dat voor punten op de positieve x -as, zoals het punt Q , het magnetisch veld \vec{B} nul is.
- (b) Bepaal de uitdrukking van het magnetisch veld \vec{B} punten op de positieve y -as, zoals het punt P .

(a) **Geg. :** Q, d, I

Gevr. : \vec{B}

Opl. : We gebruiken de wet van Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \vec{0}$$

waarbij r en elke infinitesimale $d\ell$ parallel zijn.

(b) **Geg. :** P, d, I

Gevr. : \vec{B}

Opl. : We gebruiken de wet van Biot-Savart

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx \hat{i} \times (-x\hat{i} + y\hat{j})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_0^d \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \left[\frac{x}{y^2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^d (\hat{k}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \frac{d}{(d^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} (\hat{k})\end{aligned}$$

OZ 5 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 2:

Bekijk het gesloten halfbolvormig oppervlak. Deze halve bol wordt in een uniform magnetisch veld geplaatst dat een hoek θ maakt met de verticale as. Bereken de flux door



- (a) het platte oppervlak S_1
- (b) het halve boloppervlak S_2 .

(a) **Geg. :** S_1, θ

Gevr. : $\Phi_{B,1}$

Opl. : We berekenen de magnetische flux

$$\begin{aligned}\Phi_{B,1} &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= \int B dA \cos(-\theta) \\ &= -B \cos(\theta) \int dA \\ &= -B\pi R^2 \cos(\theta)\end{aligned}$$

(b) **Geg. :** S_2, θ

Gevr. : $\Phi_{B,2}$

Opl. : We berekenen de magnetische flux

$$\begin{aligned}\Phi_{B,2} &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= \int B dA \cos(\theta) \\ &= B \cos(\theta) \int dA \\ &= B\pi R^2 \cos(\theta)\end{aligned}$$

OZ 5 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 3:

Stel een metalen ring die vrij kan expanderen en samentrekken. De ring wordt in een constant magneetveld \vec{B}_0 gebracht. Het magneetveld staat loodrecht op het vlak van de ring. De ring zal expanderen met een straal die lineair in de tijd toeneemt:

$$r(t) = r_0 + \alpha t.$$

De weerstand zal per lengte-eenheid van de ring toenemen volgens de empirische vergelijking:

$$R(\ell) = R_0 \ell (1 + \beta t)$$

Bereken de geïnduceerde stroom in de ring in functie van de tijd. Specificeer zowel de zin als de grootte van de stroom.

Geg. : $r(t), R(\ell), \vec{B}_0$

Gevr. : I_{ind}

Opl. : We gebruiken de wet van Faraday

$$\oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\ell = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

waarbij

$$\begin{aligned} E_{\text{ind}} &= \rho J \\ &= \left(\frac{A}{\ell} R(\ell) \right) \frac{I_{\text{ind}}}{A} \\ &= I_{\text{ind}} (R_0 (1 + \beta t)) \end{aligned}$$

We krijgen nu

$$I_{\text{ind}} (R_0 (1 + \beta t)) \int_0^{2\pi r(t)} d\ell = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} I_{\text{ind}} &= \frac{\frac{d}{dt} (B_0 A)}{(R_0 (1 + \beta t)) \int_0^{2\pi r(t)} d\ell} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} (B_0 A)}{(R_0 (1 + \beta t)) (2\pi r(t))} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} (B_0 \pi r(t)^2)}{(R_0 (1 + \beta t)) (2\pi r(t))} \\ &= \frac{B_0 \left(\frac{d}{dt} \pi r(t)^2 \right)}{(R_0 (1 + \beta t)) (2\pi r(t))} \\ &= \frac{B_0 (2\pi r(t)) \left(\frac{d}{dt} \alpha t \right)}{(R_0 (1 + \beta t)) (2\pi r(t))} \\ &= \frac{B_0 \alpha}{(R_0 (1 + \beta t))} \end{aligned}$$

De stroom zal wijzersin gaan als $\alpha > 0$.

OZ 5 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 4:

Een toroïde met een gemiddelde straal van 20,0 cm en 630 windingen wordt opgevuld met staalpoeder dat een magnetische susceptibiliteit χ van 100 heeft. Er wordt een stroom van 3,00 A aangelegd. Bepaal het magnetisch veld dat geproduceerd wordt in de toroïde. (Je mag aannemen dat het magnetisch veld uniform is.)

Geg. : $r = 20.0 \text{ cm}$, $N = 630$, $\chi = 100$, $I = 3.00 \text{ A}$

Gevr. : \vec{B}

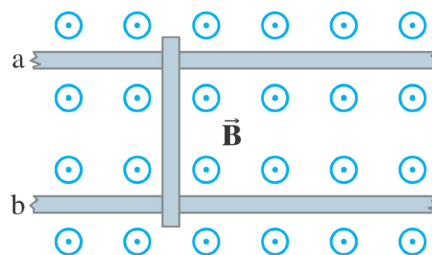
Opl. : We weten dat de totale magnetisch veld gegeven wordt door het volgende

$$\begin{aligned} B &= \mu_0(1 + \chi)H \\ &= \mu_0(1 + \chi)(nI) \\ &= \mu_0(1 + \chi) \left(\frac{N}{\ell} I \right) \\ &= \mu_0(1 + \chi) \left(\frac{N}{2\pi r} I \right) \\ &= 0.191 \text{ T} \end{aligned}$$

OZ 5 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 5:

Een geleidende staaf (massa m , weerstand R) rust op twee wrijvingsloze en weerstandsloze parallelle rails (afstand ℓ tussen de twee rails) in een uniform magnetisch veld \vec{B} , zie figuur hieronder. Op tijdstip $t = 0$ is de staaf in rust en is er een spanningsbron verbonden aan de punten a en b .

- (a) Bepaal de snelheid van de staaf in functie van de tijd als een constante stroombron wordt gebruikt.
- (b) Bepaal de snelheid van de staaf in functie van de tijd als constante spanningsbron (emf) gebruikt wordt.
- (c) Bereikt de staaf een eindige snelheid? Indien ja, wat is deze snelheid dan?



(a) **Geg. :** m , R , ℓ , B

Gevr. : $v(t)$

Opl. : We weten de formule voor magnetische kracht

$$F = I\ell B = ma = m \frac{dv}{dt}$$

waaruit volgt

$$v(t) = \frac{I\ell B}{m} t$$

(b) **Geg. :** m, R, ℓ, B

Gevr. : $v(t)$

Opl. : De magnetische flux is

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B\ell x$$

waaruit we de geïnduceerde emf bepalen

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

wat betekent dat de geïnduceerde stroom het volgende is

$$I_{\text{ind}} = \frac{B\ell v}{R}.$$

We weten de formule voor magnetische kracht

$$F_I = I\ell B$$

$$F_{I_{\text{ind}}} = I_{\text{ind}}\ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R}$$

waarop we de tweede wet van Newton toepassen

$$F_{\text{net}} = F_I - F_{I_{\text{ind}}} = I\ell B - \frac{B^2\ell^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

wat leidt tot de differentiaalvergelijking

$$\frac{dv}{dt} - \frac{B^2\ell^2}{mR}v + \frac{I\ell B}{m} = 0$$

wat als oplossing heeft

$$v(t) = \frac{\epsilon_0}{B\ell} \left(1 - e^{\left(\frac{-B^2\ell^2 t}{mR}\right)} \right)$$

(c) **Geg. :** m, R, ℓ, B

Gevr. : $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$

Opl. : We berekenen de limiet tot oneindig van de gevonden $v(t)$ uit (b), we krijgen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_0}{B\ell} \left(1 - e^{\left(\frac{-B^2\ell^2 t}{mR}\right)} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{B\ell} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{-B^2\ell^2 t}{mR}\right)} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{B\ell} (1 - 0) \\ &= \frac{\epsilon_0}{B\ell} \end{aligned}$$

6 Oefenzitting 6

OZ 6 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 1:

Een kort stuk van een draad, van lengte a , beweegt met snelheid \vec{v} , parallel langs een zeer lange draad waardoor een stroom I loopt d. Het dichtste uiteinde van de korte draad is een afstand b van de lange draad verwijderd. Neem aan dat de verticale draad lang is vergeleken met $a + b$. Bepaal de emf tussen de uiteindes van de korte draad wanneer \vec{v}



- (a) in de zelfde zin is als I ,
 (b) in de tegengestelde zin is als I .

(a) **Geg. :** v, I, a, b

Gevr. : \mathcal{E}_{ind}

Opl. : Deze oefening mag niet met de wet van Faraday, sinds er geen veranderende magnetische flux is. De ladingen in de draad zullen een lorentzkracht ondervinden totdat er een evenwicht is, namelijk

$$\mathcal{E} = E\ell = vB(r)\ell$$

waabij het magnetisch veld is een functie van de afstand tot de lange draad

$$B_{\parallel}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

en dus veranderlijk is over de lengte van de draad. We berekenen de infinitesimale geïnduceerde emf over een infinitesimaal stukje van de draad

$$d\mathcal{E}_{\text{ind}} = B_{\parallel}(r)vdr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}vdr$$

waarover we integreren tot we de volledige geïnduceerde emf hebben

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right).$$

De emf is gericht **naar** de draad wegens de lorentzkracht.

(b) **Geg. :** v, I, a, b

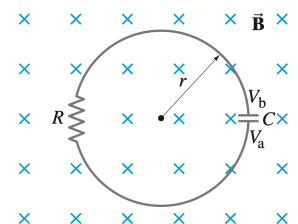
Gevr. : \mathcal{E}_{ind}

Opl. : Analoog aan (a), maar de emf is gericht **van** de draad **weg** wegens de lorentzkracht.



OZ 6 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 2:

Een cirkelvormig circuit met straal r bevat een weerstand R en capaciteit C , en bevindt zich in een uniform magneetveld \vec{B} . Startend op tijdstip $t = 0$, begint het spanningsverschil $\Delta V = V_b - V_a$ over de condensator platen toe te nemen met tijd volgens $\Delta V = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, met V_0 en τ positieve constanten. Bepaal $\frac{dB}{dt}$, de snelheid waarmee de grootte van het magnetisch veld verandert in functie van de tijd. Wordt B groter of kleiner wanneer de tijd vordert?



Geg. : $\vec{B}, R, C, r, V_0, \tau$

Gevr. : $\frac{dB}{dt}$

Opl. : Het magnetisch veld zal een emf induceren in het circuit, waardoor er een stroom tegenwijzerzin zal lopen. De stroom kunnen we vinden met volgende formule

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(CV_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

waaruit we de geïnduceerde emf kunnen vinden

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = IR + V_C = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = V_0$$

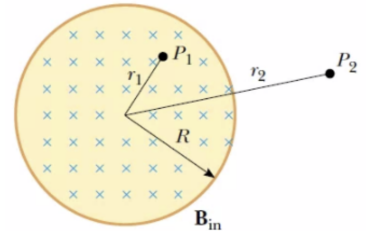
wat we kunnen stoppen in de wet van Faraday om de verandering van het magnetisch veld te vinden

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{A} = -\frac{V_0}{\pi r^2}$$

en dus blijkt dat het magnetisch veld vermindert. Het geïnduceerde magnetische veld \vec{B}_{ind} zal dus het magnetische veld \vec{B} versterken en is dus in het bord gericht.

OZ 6 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 3:

Een homogeen magnetisch veld wordt aangelegd in de cirkel. Het veld verandert in de tijd volgens $B = (2.00t^3 - 4.00t^2 + 0.800)$ T met t de tijd in seconden. Zij $r_2 = 2R = 5.00$ cm.



(a) Bereken de grootte en de richting van de kracht die inwerkt op een elektron dat zich in een punt P_2 bevindt als $t = 2.00$ s.

(b) Op welk tijdstip is deze kracht gelijk aan 0?

(a) **Geg. :** $B = (2.00t^3 - 4.00t^2 + 0.800)$ T, $r_2 = 2R = 5.00$ cm, $t = 2.00$ s, $q = -1.60 \cdot 10^{-19}$ C

Gevr. : F

Opl. : We weten volgens de wet van Faraday dat waarbij we $d\vec{s}$ kiezen in tegenwijzerzin (en dus $d\vec{A}$ uit het bord)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left(\int \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

ofwel dat

$$E(t) = \frac{\pi(\frac{r_2}{2})^2}{2\pi r_2} \frac{d((2.00t^3 - 4.00t^2 + 0.800))}{dt} = \frac{r_2}{8} (6.00t^2 - 8.00t).$$

Hieruit volgt voor $t = 2.00$ s dat

$$F(q, t) = qE(t) = -8.00 \cdot 10^{-21}.$$

Vectorieel wordt dit

$$\vec{F}_{P_2} = 8.00 \cdot 10^{-21} (-\hat{j})$$

(b) **Geg. :** $F(t) = 0$

Gevr. : t

Opl. : We zoeken de nulpunten van de functie

$$F(q, t) = qE(t) = q \left(\frac{r_2}{8} (6.00t^2 - 8.00t) \right) = 0.$$

De enigste factor die nul kan worden is $6.00t^2 - 8.00t$ en dus zoeken we de nulpunten hiervan, wat ons $t = 0$ en $t = \frac{4}{3}$ s geeft.

OZ 6 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 4:

Bepaal de emf geïnduceerd in een vierkante lus waarbij de lus in rust blijft en een stroom in de rechte draad gegeven is door $I(t) = 15.0 \sin(2500t)$ A met t de tijd in seconden. De afstand a is 12.0 cm, en b is 15.0 cm.



Geg. : $I(t) = 15.0 \sin(2500t)$ A, $a = 12.0 \cdot 10^{-2}$ m, $b = 15.0 \cdot 10^{-2}$ m

Gevr. : \mathcal{E}_{ind}

Opl. : We kunnen de wet van Faraday gebruiken om de geïnduceerde emf te vinden

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{ind}}(t) &= -\frac{d}{dt} \left(\int \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\int B dA \right) \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\int \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} a dr \right) \\ &= -\frac{dI(t)}{dt} \left(\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) \right)\end{aligned}$$

wat ons geeft

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}(t) = 5.30 \cos(2500t) \cdot 10^{-4} \text{ V.}$$

als we het gegeven invullen.

OZ 6 - Magnetische inductie en de wet van Faraday - Oefening 5:

Twee oneindig lange solenoïdes gaan door een circuit zoals aangegeven. De grootte van het magnetisch veld in beide solenoïdes is hetzelfde en neemt toe met 100 T/s. Welke stromen lopen er door verschillende weerstanden?



Geg. : $B_{\text{in}} = B_{\text{out}}$, $\frac{d}{dt}B_{\text{in}} = \frac{d}{dt}B_{\text{out}} = 100 \text{ T/s}$, $R_1 = 6.0 \text{ } \Omega$, $R_2 = 3.0 \text{ } \Omega$, $R_3 = 5.0 \text{ } \Omega$, $r_1 = 0.100 \text{ m}$, $r_2 = 0.150 \text{ m}$, $a = 0.500 \text{ m}$

Gevr. : I_1, I_2, I_3

Opl. : In de linkse lus is de geïnduceerde emf gelijk aan

$$|\mathcal{E}_{\text{ind}}| = \frac{d\Phi_{B_{\text{in}}}}{dt} = A \frac{dB_{\text{in}}}{dt} = \pi r_1^2 \frac{dB_{\text{in}}}{dt} = \pi \text{ V.}$$

waarbij de stroom tegen-wijzerzin loopt, sinds $\frac{dB_{\text{in}}}{dt} > 0$. In de rechtse lus is de geïnduceerde emf gelijk aan

$$|\mathcal{E}_{\text{ind}}| = \frac{d\Phi_{B_{\text{in}}}}{dt} = A \frac{dB_{\text{in}}}{dt} = \pi r_2^2 \frac{dB_{\text{in}}}{dt} = 2.25\pi \text{ V.}$$

warbij de stroom wijzerzin loopt, sinds $\frac{dB_{\text{out}}}{dt} > 0$. We vinden met de wetten van Kirchhoff dat

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 6.00I_1 + 3.00I_2 - \pi = 0 \\ 3.00I_2 + 5.00I_3 - 2.25\pi = 0 \end{cases}$$

wat we kunnen oplossen tot:

$$\begin{cases} I_1 = 0.0622 \text{ A} \\ I_2 = 0.923 \text{ A} \\ I_3 = 0.860 \text{ A} \end{cases}$$

OZ 7 - Inductantie - Oefening 1:

Bepaal voor de toroïde de energiedichtheid in het magnetisch veld in functie van r waarbij $r_1 < r < r_2$. Integreer dit over het volume om de totale energie opgeslagen in de toroïde te vinden. De toroïde bevat N windingen en draagt een stroom I .



Geg. : $N, I, r_1 < r < r_2$

Gevr. : u_B ?

Opl. : De energiedichtheid is gegeven door $u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$, dus

$$u_B(r) = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

waarover we kunnen integreren om de totale potentiële energie te vinden:

$$\begin{aligned} U_B &= \int_{r_1}^{r_2} u_B(r) dV \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r h dr \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \end{aligned}$$

Opmerking: Je kan de energiedichtheid ook afleiden door

$$u_B = \frac{dU_B}{dV}$$

waarbij U_B de energie opgeslagen in het magnetisch veld is en V het volume van de toroïde. We berekenen het magnetisch veld binnen de torus

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

waaruit triviale volgt dat:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

We hebben ook de zelfinductie nodig van de toroïde, deze is gegeven door:

$$\begin{aligned} L &= \frac{N}{I} \Phi_B \\ &= \frac{N}{I} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 N I h}{2\pi r} dr \\ &= \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \end{aligned}$$

De energie opgeslagen in het magnetisch veld is gegeven door

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

met energiedichtheid

$$u_B = \frac{dU_B}{dV} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{8\pi^2 r^2}.$$

OZ 7 - Inductantie - Oefening 2:

Twee solenoïdes A en B , die zich dicht in elkaars buurt bevinden en dezelfde cilindrische as delen, hebben 400 en 700 windingen, respectievelijk. Een stroom van 3.50 A door spoel A produceert een gemiddelde flux van $300 \mu\text{Wb}$ door elke winding van A en een flux van $90.0 \mu\text{Wb}$ door elke winding van spoel B .

- (a) Bereken de wederzijdse inductie van de twee solenoïdes.
- (b) Wat is de zelfinductie van A ?
- (c) Welke emf wordt geïnduceerd in B wanneer de stroom in A stijgt met 0.500 A/s

Geg. : $N_A = 400$, $N_B = 700$, $I_A = 3.50 \text{ A}$, $\Phi_A = 300 \mu\text{Wb}$, $\Phi_B = 90.0 \mu\text{Wb}$,

- (a) **Gevr. :** M_{AB} ?

Opl. : De wederzijdse inductie van twee spoelen wordt gegeven door:

$$M_{BA} = \frac{N_B \Phi_{BA}}{I_A}.$$

Er is geen stroom door B dus $\Phi_{BA} = \Phi_B = 90.0 \mu\text{Wb}$. De wederzijdse inductie wordt dan:

$$M_{BA} = \frac{N_B \Phi_B}{I_A} = 18.0 \text{ mH}$$

- (b) **Gevr. :** L_B ?

Opl. : De zelfinductie van een spoel wordt gegeven door:

$$L_A = \frac{N_A \Phi_A}{I_A} = 34.3 \text{ mH}$$

- (c) **Geg. :** $\frac{dI_A}{dt} = 0.500 \text{ A/s}$

Gevr. : \mathcal{E}_B ?

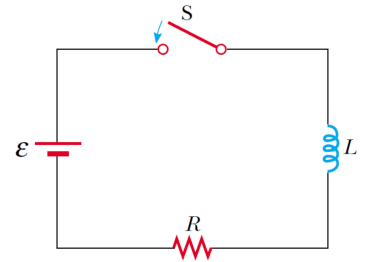
Opl. : De emf geïnduceerd in een spoel wordt gegeven door:

$$\mathcal{E}_B = -M_{BA} \frac{dI_A}{dt} = -9.00 \text{ mV}$$

OZ 7 - Inductantie - Oefening 3:

Beschouw een circuit waarbij $\mathcal{E} = 6,00 \text{ V}$, $L = 8,00 \text{ mH}$, en $R = 4,00 \Omega$.

- (a) Wat is de inductieve tijdsconstante τ van het circuit?
- (b) Bereken de stroom in het circuit $250 \mu\text{s}$ nadat de schakelaar gesloten werd.
- (c) Wat is de uiteindelijke (steady-state) stroom?
- (d) Hoe lang duurt het voordat de stroom 80 % van zijn maximale waarde heeft bereikt?



Geg. : $\mathcal{E} = 6,00 \text{ V}$, $L = 8,00 \text{ mH}$, $R = 4,00 \Omega$

- (a) **Gevr. :** τ ?

Opl. : De inductieve tijdsconstante τ van het circuit is gelijk aan

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{8,00 \cdot 10^{-3}}{4,00} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

- (b) **Geg. :** $t_1 = 250 \mu\text{s}$

Gevr. : $I(t_1)$

Opl. : We passen de wet van Kirchhoff toe op het circuit

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + RI$$

wat een differentiaalvergelijking is met oplossing

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right)$$

waarin we de gegeven waarde invullen

$$I(t_1) = 0.176 \text{ A.}$$

- (c) **Gevr. :** $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$

Opl. : De steady-state stroom is gelijk aan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{-t}{\tau}} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1.50 \text{ A.}$$

- (d) **Gevr. :** $t_{80\%}$

Opl. : De maximale stroom, of de steady-state stroom, is gelijk aan

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1.50 \text{ A.}$$

De stroom $I_{80\%}$ wordt dus eigenlijk gegeven door

$$I_{80\%} = \left(1 - e^{\frac{-t_{80\%}}{\tau}} \right) I_{max}.$$

We zoeken nu de tijd $t_{80\%}$ waarvoor

$$e^{\frac{-t_{80\%}}{\tau}} = 0.20$$

wat uitkomt op

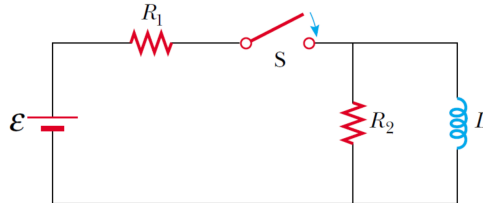
$$t_{80\%} = -\tau \ln(0.20) = 3.22 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

OZ 7 - Inductantie - Oefening 4:

Op $t = 0$ wordt de open schakelaar gesloten. Toon aan door de regels van Kirchhoff te gebruiken dat de stroom in de spoel op $t > 0$ gelijk is aan:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R'}{L}t} \right)$$

waarbij $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.



TB. : $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R'}{L}t} \right)$ met $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

B. : Laat de stromen door R_1 , R_2 en L respectievelijk I_1 , I_2 en $I(t)$ zijn. De knooppuntregel van Kirchhoff geeft

$$I_1 = I_2 + I(t)$$

en de spanningsregel in de lussen

$$\mathcal{E} - (I + I_2)R_1 - I_2 R_2 = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{E} - (I + I_2)R_1 - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (2)$$

uit (1) en (2) te combineren volgt

$$I_2 = \frac{L}{R_2} \frac{dI}{dt}.$$

We substitueren dit in (1) en krijgen

$$\mathcal{E} - \left(I + \frac{L}{R_2} \frac{dI}{dt} \right) R_1 - \left(\frac{L}{R_2} \frac{dI}{dt} \right) R_2 = 0$$

wat we kunnen herschrijven als

$$\mathcal{E} - IR_1 - \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{LdI}{dt} = 0.$$

Stel nu $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, dan wordt dit

$$\mathcal{E}' - IR' - \frac{LdI}{dt} = 0.$$

waarbij $\mathcal{E}' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E} = \frac{R'}{R_1} \mathcal{E}$. De differentiaalvergelijking geeft de oplossing

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}'}{R'} \left(1 - e^{-\frac{R'}{L}t} \right)$$

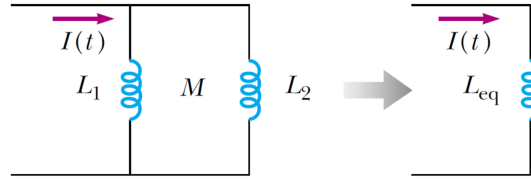
wat we kunnen herschrijven als

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R'}{L}t} \right)$$

waarmee het gevraagde bewezen is.

OZ 7 - Inductantie - Oefening 5:

Twee spoelen met zelfinductie L_1 en L_2 zijn parallel geschakeld. De wederzijdse inductie tussen de twee spoelen is M . Bepaal de equivalentie zelfinductie L_{eq} van de twee spoelen.



Geg. : L_1, L_2 en M

Gevr. : L_{eq} ?

Opl. : **Gevr. :** L_{eq} ?

Opl. : Stel er is een spanningsbron \mathcal{E} . We krijgen de volgende spanningsvergelijkingen:

$$\mathcal{E} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad (1)$$

$$\mathcal{E} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \quad (2)$$

$$\mathcal{E} = -L_{eq} \frac{dI}{dt}. \quad (3)$$

met $I = I_1 + I_2$. Uit (1) vinden we

$$-\frac{dI_1}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L_1} + \frac{M}{L_1} \frac{dI_2}{dt}$$

wat we invullen in (2)

$$\mathcal{E} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \left(\frac{\mathcal{E}}{L_1} + \frac{M}{L_1} \frac{dI_2}{dt} \right)$$

wat we herschrijven tot

$$(-L_1 L_2 + M^2) \frac{dI_2}{dt} = \mathcal{E}(L_1 - M). \quad (4)$$

Uit (2) vinden we

$$-\frac{dI_2}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L_2} + \frac{M}{L_2} \frac{dI_1}{dt}$$

wat we invullen in (1)

$$\mathcal{E} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \left(\frac{\mathcal{E}}{L_2} + \frac{M}{L_2} \frac{dI_1}{dt} \right)$$

wat we herschrijven tot

$$(-L_1 L_2 + M^2) \frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E}(L_2 - M). \quad (5)$$

Als we (4) en (5) optellen vinden we

$$(-L_1 L_2 + M^2) \left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \right) = \mathcal{E}(L_1 + L_2 - 2M)$$

sinds (3) geldt, volgt

$$L_{eq} = -\frac{-L_1 L_2 + M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$