

Natuurkunde voor Informatici

Pieter Vanderschueren

Academiejaar 2022-2023

Inhoudsopgave

1 Vectoren	3
2 Vectoriële kinematica	6
3 Newton's bewegingswetten	8
4 De wetten van Newton: wrijving, cirkelbeweging, weerstandskrachten	10
5 De zwaartekracht en de synthese van Newton	12
6 Arbeid en energie	13
7 Behoud van energie	15
8 Impuls	17
9 Rotatie - Krachtmoment - Impulsmoment	19
10 Elektrische velden	22
11 De wet van Gauss	25
12 Elektrische potentiaal	26
13 Condensatoren en diëlektrica	29
14 Elektrische stroom en weerstand	33
15 Gelijkstroomschakelingen	36
16 Magnetisme	39
17 Bronnen van magnetische velden	43
18 Magnetische inductie	46
19 Inductantie, elektromagnetische oscillaties en AC-kringen	48

Inleiding

1 Vectoren

Definitie 1.1: Vector

Een **Vector** is een grootheid met een grootte, net zoals een scalar, een richting en een zin.

- **Eenheidsvector:** een vector, meestal genoteerd als \hat{u} waarvan de lengte 1 is
- **Plaatsvector:** vector van een punt ten opzicht van het coördinatenstelsel
- **Relatieve positievervector:** vector tussen twee punten

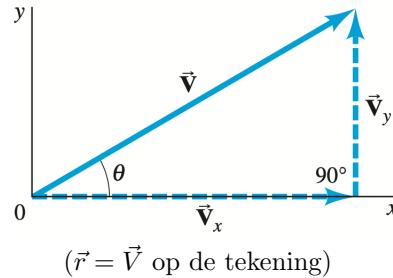
Eigenschap 1.1: Eigenschappen van vectoren

Elke vector kan je zien als een som van meerdere vectoren, namelijk zijn coördinaatvectoren. We verklaren tweedimensionaal:

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}$$

Nu we dit weten kunnen we som en verschil van twee vectoren gewoon zien als het optellen of aftrekken van de coördinaten. Deze coördinaten of vectorcomponenten kunnen we makkelijk berekenen, namelijk:

$$r_x = r \cos(\theta), \quad r_y = r \sin(\theta)$$



Hieruit kunnen we het volgende afleiden:

$$r = |r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{r_y}{r_x}$$

Deze samenvatting zal vaak gebruik maken van de volgende notatie met \hat{u} een eenheidsvector met dezelfde richting als \vec{r} :

$$\vec{r} = |r| \hat{u}$$

Dit volgt uit het feit dat

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

Definitie 1.2: Dot product

Het dot product kan meetkundig geïnterpreteerd worden als de grootte van een vector maal de projectie van de andere vector. De formule is:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = AB \cos \theta$$

Eigenschap 1.2: Eigenschappen van het dot product

- commutatief: $A \cdot B = B \cdot A$
- distributief t.o.v. de optelling: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Definitie 1.3: Vector product

De formule van het vector product geeft als uitkomst geen scalar, maar een gloednieuwe vector loodrecht op A en B . Hier deze formule:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin(\theta) \hat{u}$$

met \hat{u} een gerichte eenheidsvector loodrecht op het vlak.

Eigenschap 1.3: Eigenschappen van het vector product

- niet commutatief: $A \times B = -B \times A$
- distributief t.o.v. de optelling: $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Kinematica

2 Vectoriële kinematica

Eigenschap 2.1: Nuttige vergelijkingen bij constante versnelling

De volgende vergelijkingen kunnen gebruikt worden wanneer de versnelling constant is: $a = \frac{dv}{dt} = cst.$

$$1. \ r = r_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = r_0 + \bar{v} t$$

$$2. \ v = v_0 + at$$

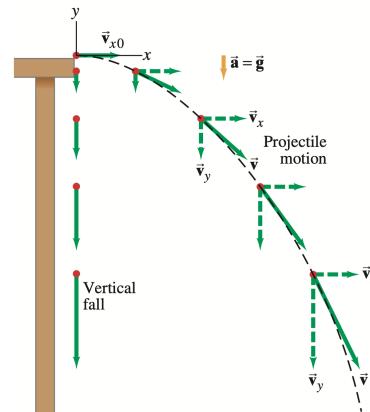
$$3. \ \bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

$$4. \ v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$$

Toepassing 2.1: Projectielbeweging

Bij een projectielbeweging (zie figuur voor een projectielbeweging met $v_{y,0} = 0$) heeft het systeem horizontaal een constante snelheid (eenparige beweging) en verticaal een constante versnelling (eenparig versnelde beweging). In de volgende tabel zijn de formules samengevat:

	horizontaal	verticaal
r	$x_0 + v_{x,0}t$	$y_0 + v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2}$
v	$v_{x,0}$	$v_{y,0} - gt$
a	0	$-g$



Uit de voorgaande tabel kunnen we volgende formules halen:

$$x(t) = v_{x,0}t \rightarrow t = \frac{x(t)}{v_{x,0}} \quad (1)$$

$$y(t) = v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

Hieruit kunnen we de volgende formule bereiken:

$$y(x) = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x - \frac{g}{2v_{x,0}^2}x^2 \quad (3)$$

Dynamica

3 Newton's bewegingswetten

Definitie 3.1: Kracht

Een kracht is een actie die de snelheid van een voorwerp verandert. Elke versnelling wordt dus veroorzaakt door een kracht. Er zijn twee soorten krachten:

- **Contactkrachten:** fysisch contact vindt plaats
- **Veldkrachten:** werken op een zekere afstand

Een kracht is een vectoriële grootheid en heeft dus een grootte, richting en zin.

Wet 3.1: De eerste wet van Newton: de Inertiewet

Een lichaam in rust (of in eenparige rechtlijnige beweging) zal in rust (eenparige rechtlijnige beweging) blijven tenzij er een uitwendige resulterende kracht inwerkt

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$$

Een **inertiaalstelsel** is een referentiestelsel waarin de eerste wet van Newton geldt. De **inertie** wordt gegeven door de massa en beschrijft hoeveel weerstand dat een lichaam biedt tegen een verandering van zijn snelheid.

Wet 3.2: De tweede wet van Newton: de versnellingswet

De versnelling van een voorwerp is recht evenredig met de nettokracht op het voorwerp en omgekeerd evenredig met het massa van het voorwerp. De richting van de versnelling is dezelfde als de richting van de nettokracht.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{net} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Wet 3.3: De derde wet van Newton: de actie-reactiewet

Wanneer een voorwerp een kracht uitoefent op een ander voorwerp, dan oefent het ander voorwerp een kracht met dezelfde grootte en omgekeerde zin uit op het voorwerp.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ F_{1 \rightarrow 2} &= F_{2 \rightarrow 1}\end{aligned}$$

Definitie 3.2: Gravitatiekracht

Alle voorwerpen nabij het aardoppervlak vallen met dezelfde versnelling \vec{g} . De kracht bepaald door deze versnelling wordt de **gravitatiekracht** of **zwaartekracht** genoemd:

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

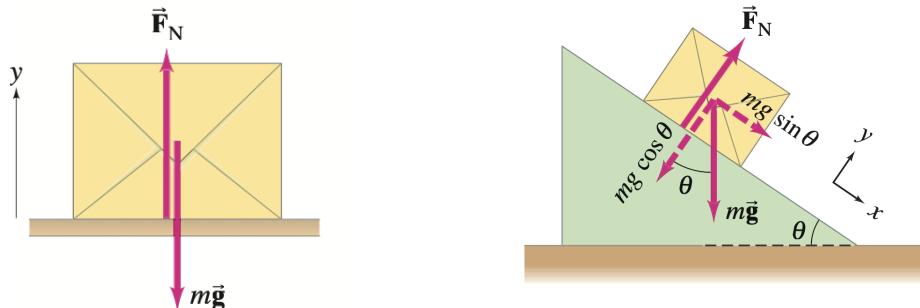
Deze kracht is gericht naar het aardoppervlak toe en de grootte wordt het **gewicht** van een voorwerp genoemd.

Definitie 3.3: Normaalkracht

De **loodrechte** kracht die het contactoppervlak uitoefent op het voorwerp

$$F_N = F_{g,y} - \sum_{rest,y} F_{rest,y}$$

wordt de normaalkracht genoemd. De volgende figuren tonen enkele veelvoorkomende situaties voor de oefeningen:



De normaalkracht is dus afhankelijk van de gravitatiekracht van zijn grootte en zin, maar niet van zijn richting (zie de rechterfiguur). We kunnen dus **niet** zeggen dat het gravitatiekracht-normaalkracht paar een actie-reactie paar vormt.

4 De wetten van Newton: wrijving, cirkelbeweging, weerstandskrachten

Definitie 4.1: Wrijvingskracht

De wrijvingskracht is de weerstand die het voorwerp ondervindt wanneer het over het oppervlak van een ander voorwerp beweegt. We bespreken 2 soorten wrijvingskrachten:

- **Kinetische:** $F_k = \mu_k F_N$ met μ_k de **kinetische** wrijvingscoëfficiënt. Deze kracht is recht evenredig met de normaalkracht.
- **Statische:** $F_s \leq \mu_s F_N$ met μ_s de **statische** wrijvingscoëfficiënt. Als deze drempelwaarde bereikt is, dan zal het object beginnen met bewegen en zal er sprake zijn van kinetische wrijving.

Er geldt dat het moeilijker is om een voorwerp te laten starten dan om een beweging verder te laten verlopen, of in formule vorm:

$$\mu_s > \mu_k$$

Definitie 4.2: Kinematica van de eenparige cirkelbeweging

Een voorwerp dat met een constante snelheid in een cirkel beweegt voert een **eenparig cirkelvormige beweging** uit. In dit soort beweging blijft de grootte van de snelheidsvector constant, maar verandert de richting continu, m.a.w. $a \neq 0$.

We berekenen de versnelling door te vertrekken van de formule:

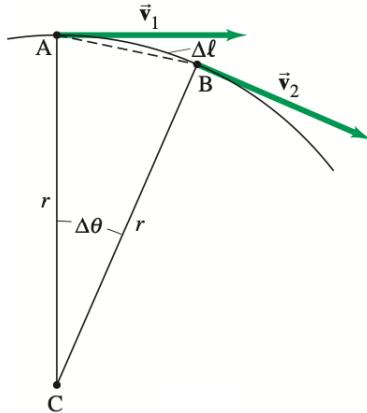
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{dt} \quad (1)$$

Uit gelijkvormige driehoeken volgt:

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta \ell}{r} \rightarrow \Delta v \approx \frac{v}{r} \Delta \ell \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$a_R = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \frac{\Delta \ell}{\Delta t}$$



Deze versnelling wordt de **centripetale versnelling genoemd** en is gericht naar het middelpunt van de cirkel. Deze wordt gegeven door de volgende formule:

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

De snelheid van een ECB wordt gegeven door de volgende formule:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Hierbij is T de periode, m.a.w. tijd nodig voor een complete omwenteling (Dimensie: s). De frequentie

van de ECB, m.a.w het aantal omwentelingen per seconde (Dimensie: $s^{-1} = Hz$), wordt gegeven door de volgende formule:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Definitie 4.3: Dynamica van de eenparige cirkelbeweging

De cirkelbeweging is een versnelde beweging, dus er is een resulterende kracht nodig om het voorwerp op de cirkelbaan te houden, namelijk de **centripetale kracht**:

$$(\sum F)_R = ma_R = m \frac{v^2}{r}$$

Om een voorwerp op een cirkelbaan te houden is er een centripetale versnelling en zoals hierboven vermeld een centripetale kracht nodig, dus de F_{net} moet naar het midden van de cirkel gericht zijn. Als deze kracht er niet is, dan zal het volgens de **Inertiewet** rechtlijnig zich voortbewegen.

Definitie 4.4: Kinematica én Dynamica niet-eenparige cirkelbeweging

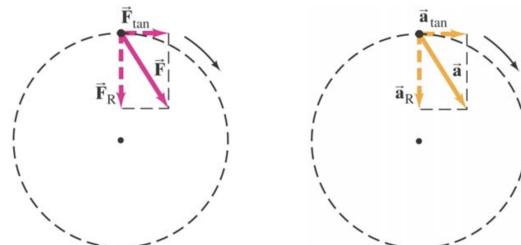
In dit soort beweging beweegt het voorwerp volgens een cirkelbaan, maar kan het versnellen. De totale vectoriële versnelling in dit soort beweging wordt gegeven door de volgende formule:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_R$$

Sinds \vec{a}_R en \vec{a}_{tan} altijd loodrecht op elkaar staan, geldt op eenderwelk ogenblik:

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_R^2} \text{ met } a_R = \frac{v^2}{r} \text{ en } a_{tan} = \frac{dv}{dt}$$

De figuren tonen de tangentiale en centripetale krachten en versnellingen bij een niet-eenparige cirkelbeweging:



5 De zwaartekracht en de synthese van Newton

Definitie 5.1: De wet van de universele zwaartekracht

Elk deeltje in het heelal trekt elk ander deeltje aan met een kracht die recht evenredig is met het product van hun massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de onderlinge afstand, in formulevorm:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ met } G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

We weten natuurlijk al uit voorgaande hoofdstukken wat de formule voor de zwaartekracht is nabij het aardoppervlak is, maar hoe komen we hieraan?

$$F_a = G \frac{m M_a}{(R_a + h)^2} \approx G \frac{m M_a}{r_a^2} = m G \frac{M_a}{r_a^2} \Rightarrow F_a = mg \text{ met } g = G \frac{M_a}{r_a^2}$$

Let op: De formule spreekt over twee puntmassas! Een macroscopisch voorwerp is een som (**integraal!**) over een zeer grote verzameling puntmassas, dus hoe moeten we het hier berekenen?

- **Symmetrische bol:** alsof alle massa in het middelpunt zit
- **Symmetrische schil:** alsof alle massa in het middelpunt zit, én enkel kracht op massa buiten de schil

Toepassing 5.1: Satellieten

Satellieten voeren een ECB uit rond de aarde. Er moet dus een centripetale kracht zijn die een satelliet op zijn baan houdt. Als we de tweede wet van newton zouden gebruiken vinden we in de radiale richting het volgende:

$$\sum F_R = G \frac{m M_a}{r_a^2} = m \frac{v^2}{r_a} \text{ met } r_a = R_A + h_s$$

Hieruit volgt dat de tangentiële snelheid, die de satelliet op zijn baan houdt, gelijk is aan het volgende:

$$v = \sqrt{\frac{GM_a}{r}} = \sqrt{\frac{GM_a}{R_A + h_s}}$$

Definitie 5.2: Gravitatieveld

Als we het gravitatieveveld op een willekeurig punt willen meten, plaatsen we een kleine testmassa op dat punt en meten we de kracht die erop wordt uitgeoefend (waarbij we ervoor zorgen dat er alleen gravitatiekrachten werken). Dan is het gravitatieveveld op dat singulier punt gedefinieerd als:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m} G \frac{m M}{r^2} \hat{r} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

6 Arbeid en energie

Definitie 6.1: Arbeid en energie

Arbeid is een scalaire grootheid voor het energietransfert, andersom is energie dan een scalaire grootheid voor de capaciteit om arbeid te leveren.

- Arbeid en energie door een constante kracht

De arbeid geleverd door een constante kracht is gelijk aan de volgende formule:

$$W = F_{||}d = F d \cos(\theta) = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



- Arbeid en energie door een variabele kracht

Stel het voorwerp wordt bewogen door een variabele kracht over een pad $a \rightarrow b$. We kunnen dit pad opsplitsen in infinitesimale delen $d\ell$. Als we nu integreren over het pad, dan krijgen we:

$$W = \int_a^b F_{||} d\ell = \int_a^b F \cos \theta d\ell = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Toepassing 6.1: Teruggroepkracht van schroefveren

Het uittrekken of samendrukken van een veer veroorzaakt een kracht, namelijk de teruggroepkracht:

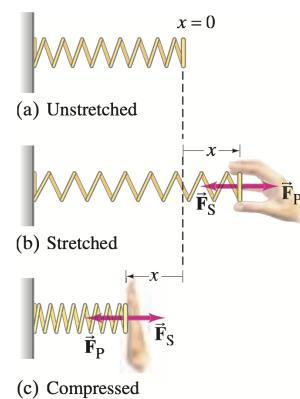
$$\vec{F}_s = -k\vec{x}$$

De arbeid geleverd door de veer hangt kunnen we ook berekenen:

$$W_s = \int_0^x \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2} k x^2$$

Deze zal gelijk zijn bij samendrukken en uittrekken.

Opmerking: de formule is geldig als de massa begint in de oorsprong en samengedrukt/uitgerokken wordt tot een punt x



Wet 6.1: Arbeid - Kinetische energie theorema

De netto-arbeid W_{net} geleverd door een voorwerp wordt bepaald door de netto-kracht F_{net} . Stel we hebben een variabele (of een constante) kracht die inoefent op een voorwerp, we berekenen nu de netto-arbeid:

$$\begin{aligned} W_{net} &= \int_i^f \vec{F}_{net} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_i^f F_{||} d\ell \\ &= \int_i^f m \frac{dv}{dt} d\ell \quad (F_{||} = ma_{||} = m \frac{dv}{dt}) \\ &= \int_i^f mv dv \quad (v = \frac{d\ell}{dt}) \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (F_{net} = ma, a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}) \\ &= \Delta K \end{aligned}$$

Wat we hierboven bewezen hebben is het **Arbeid - Kinetische energie theorema**, in woorden:

‘Wanneer de enige verandering in het systeem de snelheid is, dan is de arbeid verricht door de netto-kracht gelijk aan de verandering in kinetische energie van het systeem.’

7 Behoud van energie

Definitie 7.1: Conservatieve en niet-conservatieve krachten

Een **conservatieve kracht** is een kracht waarbij de netto-arbeid geleverd door deze kracht nul is bij een gesloten baan, onafhankelijk is van de afgelegde weg. Bijvoorbeeld:

- de gravitatiekracht: $\vec{F}_g = m\vec{g}$
- de veerkracht: $\vec{F}_s = -k\vec{x}$

Een **niet-conservatieve kracht** is een kracht waarbij de netto-arbeid geleverd door deze kracht afhankelijk is van de gevolgde weg

Definitie 7.2: Potentiële energie

De arbeid geleverd door een conservatieve kracht is gelijk aan het tegengestelde van de verandering in potentiële energie:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \int_1^2 dU = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

Het is belangrijk om aan te halen dat het **verschil** in potentiële energie onafhankelijk is van het referentiestelsel. Hierdoor kunnen we de volgende redenering maken:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) - U(\vec{r}_1) &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{meestal kiezen we } U_1 = 0) \\ -dU &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= dr F \cos(\theta) \end{aligned}$$

Uit deze berekeningen kunnen we een belangrijke formule halen:

$$F_T = F \cos(\theta) = -\frac{dU}{dr}$$

We kunnen deze vondst veralgemenen naar de 3 dimensies:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial}{\partial x} U \hat{i} - \frac{\partial}{\partial y} U \hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} U \hat{k}$$

Wet 7.1: Behoud van energie

De wet van behoud van energie stelt dat energie niet kan worden gecreëerd of vernietigd - alleen omgezet van de ene vorm van energie in een andere. In formulevorm:

$$\Delta K + \Delta U = W_{nc}$$

Wet 7.2: Behoud van mechanische energie

We bundelen even wat vondsten van hiervoor samen:

$$\begin{aligned}K_b - K_a &= -(U_b - U_a) = U_a - U_b \\K_a + U_a &= K_b + U_b \\E_a &= (K + U)_a = (K + U)_b = E_b\end{aligned}$$

We zien nu dus dat de totale mechanische energie $E = K + U$ van een deeltje constant blijft ($E_a = E_b$) als de inwerkende krachten die arbeid leveren conservatief zijn. In formulevorm:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$$

Definitie 7.3: Vermogen

Het **vermogen** is een scalaire grootheid voor arbeid per tijdseenheid, uitgedrukt in Watt.

- **Gemiddelde:** $P_{gem} = \frac{W}{\Delta t}$
 - **Ogenblikkelijke:** $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$, want arbeid = energie transformatie!
- We krijgen uit de definitie van arbeid: $P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

8 Impuls

Definitie 8.1: Impuls

Impuls is een vectoriële grootheid die de hoeveelheid van beweging weergeeft. In formulevorm:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Met dit nieuw begrip kunnen we de tweede wet van Newton herdefiniëren:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wet 8.1: Behoud van impuls

De wet van de behoud van impuls stelt dat de **totale impuls** (\vec{P}) van een geïsoleerd stelsel van deeltjes constant is wanneer:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\sum_i d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Toepassing 8.1: Elastische botsing

Bij een elastische botsing wordt de kinetische energie behouden. We kunnen nu met deze wet en de wet van behoud van impuls te werk gaan. Enerzijds krijgen we uit de wet van behoud van impuls:

$$m_a v_a + m_b v_b = m_a v'_a + m_b v'_b \quad (1)$$

Anderzijds uit de wet van behoud van kinetische energie bij elastische botsing:

$$\frac{1}{2} m_a v_a^2 + \frac{1}{2} m_b v_b^2 = \frac{1}{2} m_a v'_a^2 + \frac{1}{2} m_b v'_b^2 \quad (2)$$

We kunnen (1) herschrijven als volgt:

$$m_a(v_a - v'_a) = m_b(v'_b - v_b) \quad (3)$$

We kunnen ook (2) herschrijven als volgt:

$$m_a(v_a^2 - v'^2_a) = m_b(v'^2_b - v_b^2) \quad (4)$$

Wegens $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ kunnen we (4) weer herschrijven:

$$m_a(v_a - v'_a)(v_a + v'_a) = m_b(v'_b - v_b)(v'_b + v_b) \quad (5)$$

Tenslotte kunnen we (5) delen door (3) en bekomen we:

$$v_a - v_b = -(v'_a - v'_b)$$

Toepassing 8.2: Inelastische botsing

Bij een inelastische botsing wordt de kinetische energie niet behouden. Desondanks wordt de totale energie altijd behouden en dus ook het vectoriële totale impuls. Als de botsing compleet inelastisch is (dus dat de voorwerpen één massa vormen na botsing), dan kunnen we de wet van behoud van impuls toepassen en de volgende formule krijgen:

$$m_a \vec{v}_a + m_b \vec{v}_b = (m_a + m_b) \vec{v}'$$

9 Rotatie - Krachtmoment - Impulsmoment

Toepassing 9.1: Constante rotationele vs translationele versnelling

Rotationele beweging met constante α	Translationele beweging met constante a
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$
$\omega_{gem} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$	$v_{gem} = \frac{v + v_0}{2}$

Definitie 9.1: Krachtmoment

Het draaieffect (de hoekversnelling) van een kracht wordt bepaald door de grootte van de kracht, de richting/zin van de kracht en de **"momentarm"**: afstand tussen het aangrijppingspunt van de kracht en de rotatie-as. Het **krachtmoment** is het rotationele equivalent van het translationele kracht, in formulevorm:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

De grootte van het krachtmoment wordt gegeven door de volgende formule:

$$\tau = rF \sin(\theta) = r(ma) \sin(\theta) = (m(r \sin(\theta))^2)\alpha = I\alpha$$

Toepassing 9.2: Arbeid en Vermogen bij rotatie

De arbeid vericht door een object dat roteert rond een vaste as kan geschreven worden tegenover rotationele grootheden:

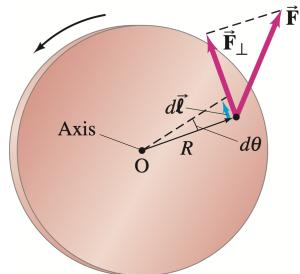
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F_{\perp} r d\theta$$

waarbij $d\vec{l}$ een infinitesimale afstand is loodrecht op r met grootte $dl = rd\theta$. We weten van hierboven natuurlijk dat $\tau = F_{\perp} r$, dus de formule wordt:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Het vermogen bij rotatie kunnen we nu ook afleiden:

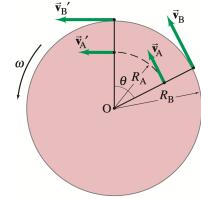
$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$



Toepassing 9.3: Kinetische energie bij rotatie

Beschouw een stijf, roterend voorwerp als opgebouwd uit vele kleine deeltjes, elk met een massa m_i . De totale kinetische energie van het hele object is de som van de kinetische energie van alle deeltjes:

$$K = \sum\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2\right) = \sum\left(\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}I\omega^2$$



Definitie 9.2: Impulsmoment

Het **Impulsmoment** is de rotationele variant van het translatonele impuls, net zoals krachtmoment de rotationele variant is van de translationele kracht. Het wordt gegeven door de volgende formule:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

De grootte van het impulsmoment kunnen we als volgt berekenen:

$$L = pr\sin(\theta) = mvrs\sin(\theta) = (m(r\sin(\theta))^2)\omega = I\omega$$

Wet 9.1: Behoud van impulsmoment

De wet van de behoud van impulsmoment stelt dat de **totale impulsmoment** (\vec{L}_{net}) van een geïsoleerd stelsel van deeltjes constant is wanneer:

$$\tau_{net} = \sum \tau_{ext} = \sum \frac{I\omega}{dt} = \frac{dL_{net}}{dt} = 0$$

Vergelijking 9.1: Vergelijking: impuls – impulsmoment

Algemeen:

impuls	impulsmoment
\vec{p}	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Enkel bij een geïsoleerd systeem:

impuls	impulsmoment
behoud van impuls	behoud van impulsmoment

$F_{net} = \sum F_{ext} = 0$

$\tau_{net} = \sum \tau_{ext} = 0$

Elektriciteit

10 Elektrische velden

Definitie 10.1: Elektrische ladingen

- tegengestelde ladingen trekken elkaar aan en gelijke ladingen stoten elkaar af
- gekwantiseerde grootheid, geen fracties

Wet 10.1: Behoud van totale lading

Bij een geïsoleerd systeem blijft de totale aantal lading gelijk, er is enkel **transfert** van lading

Toepassing 10.1: Elektrische lading in het atoom – isolator \leftrightarrow geleider

- **Geleider:** sommige elektronen zijn ongebonden en kunnen vrij bewegen
- **Isolator:** alle elektronen zijn gebonden en onbeweegelijk
- **Halfgeleider:** ergens tussenin

Definitie 10.2: Coulombkracht

Coulomb concludeerde dat de kracht die een klein geladen voorwerp uitoefent op een tweede evenredig is met het product van de magnitude van de lading op de ene, q_1 , maal de magnitude van de lading op de andere, q_2 , en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand r tussen beide. In formulevorm wordt dit:

$$\vec{F}_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (\text{met } k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0})$$

Opmerking: de lading bij de coulombkracht is telkens de absolute waarde, omdat de grootte van een vector niet negatief mag zijn. De richting wordt dus bepaald door \hat{r} .

Definitie 10.3: Elektrisch veld

De elektrische veld vector \vec{E} in een punt in de ruimte is gelijk aan de elektrische kracht \vec{F}_e die op een **positieve** testlading werkt, gedeeld door de testlading. In formulevorm:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Toepassing 10.2: Beweging van een lading in een uniform elektrisch veld

We vinden door de tweede wet van Newton toe te passen:

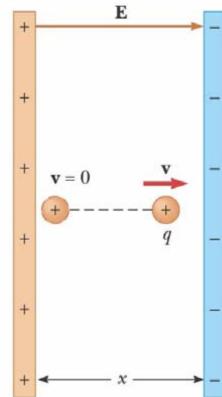
$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$= \vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a}$$

Hieruit volgt dus de vectoriële formule voor de versnelling veroorzaakt door een uniform elektrisch veld, namelijk:

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Sinds dat de massa, het elektrisch veld en de lading constant is, blijft dus de versnelling **ook constant!** We kunnen dus de veelbesproken identiteiten hiervoor gebruiken.



Eigenschap 10.1: Geleiders in elektrostatisch evenwicht

- Het elektrisch veld in een geleider is nul (bij elektrostatisch evenwicht mag er geen **netto** ladingsbeweging zijn)
- De lading van een geïsoleerde geleider bevindt zich aan het oppervlak
- Het elektrisch veld net buiten de geleider is loodrecht op het oppervlak en $|E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
- Oppervlakteladingsdichtheid σ is het grootst bij de grootste oppervlaktekromming

Toepassing 10.3: Elektrisch veld berekeningen voor continue ladingsverdelingen

We kunnen bij continue ladingen een infinitesimaal gebied bekijken, hier dus een infinitesimale lading en krijgen we de volgende formule:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

We willen nu het totale veld berekenen door te sommen over al deze infinitesimalen:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \quad (2)$$

Als we nu een **uniforme ladingsdichtheid** definiëren, dan kunnen we meeste berekeningen oplossen omtrent continue ladingsverdelingen. We definiëren:

- **Volume-ladingsverdeling:** $\rho = \frac{dq}{dV}$
- **Oppervlakte-ladingsverdeling:** $\sigma = \frac{dq}{dA}$
- **Lineaire-ladingsverdeling:** $\lambda = \frac{dq}{dL}$

Definitie 10.4: Elektrische dipool en het dipoolmoment

Wanneer er 2 gelijke ladingen zijn met tegengesteld teken, dus: $+q$ en $-q$, en ze gescheiden zijn door een lengte ℓ , dan kunnen we spreken over een **elektrisch dipool**.



Het elektrisch dipoolmoment \vec{p} is een maat van polariteit van een binding en kan als volgt vectorieel weergegeven worden:

$$\vec{p} = q\ell$$

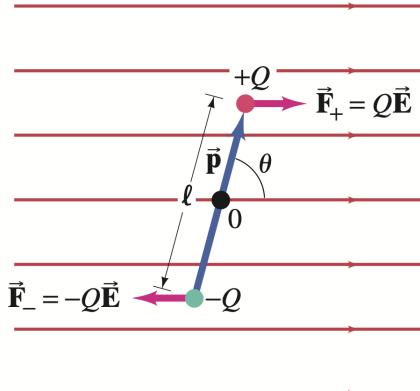
Toepassing 10.4: Dipool in een uniform veld

- **Totale kracht:**

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0$$

- **Krachtmoment rond middelpunt:**

$$\begin{aligned}\tau &= qE \frac{\ell}{2} \sin(\theta) - (-qE \frac{\ell}{2} \sin(\theta)) \\ &= qE \frac{\ell}{2} \sin(\theta) + qE \frac{\ell}{2} \sin(\theta) \\ &= pE \sin(\theta) \\ \vec{\tau} &= \vec{p} \times \vec{E}\end{aligned}$$



- **Arbeid:**

$$\begin{aligned}W &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta \\ &= -pE \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta) d\theta \quad (d\theta \text{ is negatief dus, - voor positieve } W) \\ &= pE(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) \\ &= -\Delta U \\ U &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (\text{intertiaalstelsel : } \theta_1 = \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

11 De wet van Gauss

Definitie 11.1: Elektrische flux

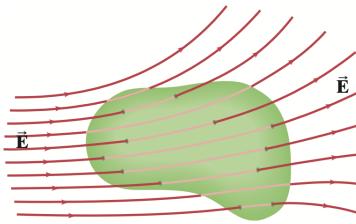
De elektrische flux doorheen een oppervlak is de oppervlakte-integraal van de elektrische veldsterkte over dat oppervlak. Laten we eerst kijken naar, zoals vaker, het makkelijker geval, namelijk wanneer we spreken over een uniform elektrisch veld:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

Als we spreken over een niet-uniform veld, dan spreken we eigenlijk over infinitesimale uniforme velden. De formule wordt dus:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

De nettoflux Φ_e is recht evenredig met netto aantal veldlijnen dat het oppervlakte verlaat.



Wet 11.1: Gauss

De wet van Gauss luidt: de nettoflux door een willekeurig **gesloten** oppervlak dat een lading q omsluit, is steeds gelijk aan $\frac{q_{in}}{\epsilon_0}$. In formulevorm:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Hieruit volgt dus dat de nettoflux door een willekeurig gesloten oppervlak dat geen lading omsluit, is steeds gelijk aan 0.

12 Elektrische potentiaal

Definitie 12.1: Elektrische potentiële energie

Om de wet van behoud van energie toe te mogen passen, moeten we nog **elektrische potentiële energie** definiëren.

$$\Delta U = - \int_a^b \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -W \quad (\text{met } q \text{ een testlading})$$

In overeenkomst met de wet van behoud van energie, wordt nu elektrische potentiele energie getransformeerd naar kinetische energie.

Definitie 12.2: Elektrische potentiaal en potentiaalverschil

Het **elektrische potentiaal** V is een **scalaire** grootheid die gedefinieerd wordt door het elektrische potentiële energie per lading. In formulevorm:

$$V = \frac{U}{q}$$

Het maakt niet per se uit hoeveel potentiële energie een systeem heeft op een bepaald moment, maar wel hoeveel er naar kinetische energie wordt omgezet. Dus: enkel verschillen in potentiële energie zijn zinvol of betekenisvol. In formulevorm:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W}{q}$$

Dit noemt men het **potentiaalverschil**. De eenheid van elektrische potentiaal, en dus potentiaalverschil, noemt men de volt: $V = \frac{J}{C}$.

Als we de formule van de elektrische potentiele energie in functie van het potentiaalverschil schrijven, dan krijgen we:

$$\Delta V = -\frac{1}{q} \int_a^b \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Dit toont een belangrijk verband aan tussen het elektrische potentiaal en elektrisch veld. Als het veld uniform is, dan hebben de elektrisch veld en de verplaatsing vectoren dezelfde richting en volgt:

$$\Delta V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E \int_a^b dr = -Er$$

Definitie 12.3: Equipotentiaaloppervlakken

Equipotentiaaloppervlakken zijn oppervlakken die punten met een equivalent potentiaal verbinden en die loodrecht staan op de veldlijnen, want de potentiaal moet doorheen het oppervlak gelijk zijn.

Toepassing 12.1: Elektrische potentiaal tegenover puntladingen

We hebben eerder besproken dat enkel het potentiaalverschil zinvol is. We kunnen dus een punt pakken waar het potentiaal 0 is en hiermee kunnen we het potentiaal van een singuliere puntlading berekenen. We weten ook dat het elektrisch veld door een singuliere puntlading de volgende formule heeft:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Stel nu dat $V_b = 0$ en $r_b = \infty$ en we een recht pad volgen van $a \rightarrow b$:

$$V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E \int_a^b dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_b} - \frac{q}{r_a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_a}$$

Het elektrische potentiaal is een **scalar**, dus we kunnen meerdere potentialen gewoon optellen zonder rekening te moeten houden met richting.

$$V_{tot} = \sum_i V_i = k \left(\sum_i \frac{q_i}{r_i} \right)$$

We kunnen het concept van meerdere puntladingen verbreden tot infinitesimale puntladingen als we spreken over een continue ladingsverdeling. Zoals vaker volgt nu de volgende formule:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

In principe geeft deze formule ook het volgende:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Opmerking: het elektrisch veld in bijvoorbeeld de x-richting is dus gelijk aan $E_x = -\frac{dV}{dx}$. Hieruit kunnen we de volgende formule afleiden:

$$\vec{E} = (-\nabla V)\hat{r} = -\frac{dV}{dx}\hat{i} - \frac{dV}{dy}\hat{j} - \frac{dV}{dz}\hat{k}$$

Toepassing 12.2: Elektrische potentiaal bij een dipool

Het elektrische potentiaal op een arbitrair punt P wordt gegeven door de volgende formule waarbij $V = 0$ op $r = \infty$:

$$V = k \frac{q}{r} + k \frac{(-q)}{r + \Delta r} = kq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} \right) = kq \frac{\Delta r}{r(r + \Delta r)}$$

Deze vergelijking wordt vele malen eenvoudiger als we een punt P pakken veel verder weg dan de scheiding tussen de twee ladingen. We zien op de tekening dat: $\Delta r \approx \ell \cos(\theta)$. Als we nu dus $r \gg \ell$ pakken, dan is dus $r \gg \Delta r$ en verandert onze formule:

$$V = k \frac{q\ell \cos(\theta)}{r^2} = k \frac{p \cos(\theta)}{r^2} \quad (r \gg \ell)$$



Toepassing 12.3: Elektrische potentiaal bij een geladen geleider in evenwicht

- Binnen de geleider zonder caviteit:

We weten dat het elektrisch veld in de geleider nul is als de geleider zich in een elektrostatisch evenwicht bevindt. We berekenen nu het potentiaalverschil:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

We kunnen nu bepaalde uitspraken doen over het potentiaalverschil bij een geleider in elektrostatisch evenwicht:

- Het oppervlak van een geleider in elektrostatisch evenwicht heeft een constante potentiaal.
- De potentiaal binnenvoor een geleider is constant, en gelijk aan de potentiaal aan het oppervlak. Er is dus **geen arbeid** vereist om een lading te bewegen binnenvoor een geleider

- Binnen de geleider met caviteit:

Het veld in een caviteit (waarbinnen zich geen lading bevindt) omgeven door een geleider is nul. Als er wel een lading in zit, dan moet er aan de rand een gelijke tegengestelde lading zijn opdat er geen elektrisch veld buiten de caviteit zou zijn. Binnenvoor de caviteit is er natuurlijk dan wel een elektrisch veld. Wegens de wet van behoud van lading, moet er een gelijke positieve lading op het oppervlak van de geleider zijn!



- Buiten de geleider:

We berekenen het potentiaal van op het oppervlak van een sferische geleider om tot bepaalde conclusies te kunnen komen:

$$V = k \frac{q}{r} = k \frac{\sigma A}{r} = k \frac{\sigma 4\pi r^2}{r} = \frac{\sigma r}{\epsilon_0} = Er$$

Hieruit volgt dus dat het elektrisch veld groter is nabij convexe punten, vermits het recht evenredig is met de oppervlakteladingsdichtheid. In formulevorm:

$$E \sim \sigma$$

13 Condensatoren en diëlektrica

Definitie 13.1: Condensatoren en capaciteit

Een **condensator** is een instrument dat elektrische lading kan opslaan. Het bestaat uit twee geleiders met in de ruimte ertussen **diëlektricum (isolator)**. De figuur hieronder toont een parallelle plaatcondensator:



De **capaciteit** (Farad) van een condensator is de **absolute waarde** van de verhouding tussen de elektrische lading (Q) op een van de geleiders en het potentiaalverschil tussen de twee geleiders.

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right|$$

Toepassing 13.1: Parallelle plaatcondensator

Elke geleidende plaat heeft een oppervlakte A en ze zijn gescheiden door een afstand d . We nemen aan dat d klein is tegenover de afmetingen van de platen en dus dat het elektrisch veld \vec{E} uniform is tussen de platen. Het elektrische veld, zoals we weten, tussen nabije, parallelle platen heeft grootte: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ en zijn richting is loodrecht op de platen. Sinds σ lading per oppervlakte is, gekomen we:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

We weten ook het verband tussen het elektrisch veld en het potentiaal, namelijk:

$$\Delta V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\ell$$

We berekenen nu op een antiparallel pad:

$$\Delta V = - \int_a^b E d\ell \cos(\pi) = \int_a^b E d\ell = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \int_a^b d\ell = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

We kunnen nu de capaciteit hieruit bepalen:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$



Definitie 13.2: Parallelschakeling

Een **parallelschakeling** is een configuratie van condensatoren waarbij de stroom over de individuele condensatoren wordt verdeeld en de spanning op alle condensatoren gelijk is.



Eigenschap 13.1: Eigenschappen van een parallelschakeling

- $\Delta V = \Delta V_i$
- $Q = \sum_i Q_i$
- $C_{eq} = \sum_i C_i$

Definitie 13.3: Serieschakeling

Een **serieschakeling** is een configuratie van condensatoren waarbij de stroom door de individuele condensatoren gelijk is en de spanning over alle condensatoren wordt verdeeld.



Eigenschap 13.2: Eigenschappen van een serieschakeling

- $\Delta V = \sum_i \Delta V_i$
- $Q = Q_i$
- $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Definitie 13.4: Elektrische energie opslag

De opgeslagen energie in een condensator is gelijk aan de arbeid dat is verricht om hem op te laden.

Een condensator wordt niet onmiddellijk opgeladen. Daar is tijd voor nodig. Aanvankelijk, als de condensator ongeladen is, is er geen arbeid nodig om het eerste beetje lading over te brengen.

Hoe meer lading er al op een plaat zit, hoe meer arbeid er nodig is om extra lading toe te voegen. De arbeid die nodig is om een kleine hoeveelheid lading dq toe te voegen, wanneer een potentiaalverschil ΔV over de platen loopt, is $dW = \Delta V dq$. Aangezien $\Delta V = \frac{Q}{C}$ op elk moment, is de arbeid die nodig is om een totale lading Q op te slaan

$$W = \int_0^Q \Delta V dq = \frac{1}{C} \int_0^Q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Dus we kunnen zeggen dat de opgeslagen energie

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

is wanneer de condensator ladingen $+Q$ en $-Q$ bezit op zijn platen.



De **energiedichtheid** van een condensator wordt gegeven door de volgende formule:

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Definitie 13.5: Condensatoren met een diëlektricum

We kunnen in de plaats van vacuüm ook andere diëlectrica (isolator) tussen de platen steken. Er is vastgesteld dat als het diëlektricum de ruimte tussen de twee geleiders vult, de capaciteit toeneemt met een factor K , die bekend staat als de **diëlektrische constante**. Er geldt dus

$$C = KC_0$$

waarbij C_0 de capaciteit is waarbij de ruimte in de condensator vacuüm is.

Bij parallelle platen wordt deze formule dan:

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}$$

Toepassing 13.2: Moleculaire beschrijving van diëlektrica

Als we beginnen van een geïsoleerde situatie, zie figuur (a), dan kunnen we de capaciteit met de volgende formule beschrijven

$$C_0 = \frac{Q}{(\Delta V)_0}$$

waarbij het subscript 0 voor vacuüm dient. Als we nu een diëlektricum toevoegen aan de constructie, dan zal door het elektrische veld de moleculen van het diëlektricum zoals op figuur (b). Het effect van deze ordening is dat er nu een netto postieve en negatieve lading is op de uiteinde van het diëlektricum, zie figuur (c). Sommige van de elektrische veldlijnen worden ook opgenomen door het diëlektricum, dus het elektrisch veld wordt verkleind. Het elektrisch veld in het diëlektricum E_D kan gezien worden als het veld door de vrije ladingen van de platen en het veld van de geïnduceerde ladingen, zie figuur (d). De vectoriële som is dan

$$\vec{E}_D = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$$

ofwel

$$E_D = E_0 - E_{ind} = \frac{E_0}{K}$$

Het geïnduceerd veld wordt dus berekend op de volgende manier:

$$E_{ind} = E_0 \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$



Toepassing 13.3: Parallelle plaatcondensator met een diëlektricum

We hebben in de voorgaande hoofdstukken al de volgende formule besproken

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

waarbij σ de oppervlakte ladingsdichtheid is op de geleider. Deze lading Q wordt vaak de vrije lading genoemd. Als we nu het geïnduceerde veld bekijken, dan krijgen we:

$$E_{ind} = \frac{\sigma_{ind}}{\epsilon_0}$$

Hier is σ_{ind} de oppervlakte ladingsdichtheid op de isolator. De lading Q_{ind} wordt vaak de gebonden lading genoemd. Uit deze laatste twee formules kunnen we de volgende nuttige resultaten bekomen:

$$\sigma_{ind} = \sigma \left(1 - \frac{1}{K}\right), \quad Q_{ind} = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

14 Elektrische stroom en weerstand

Definitie 14.1: Elektrische stroom

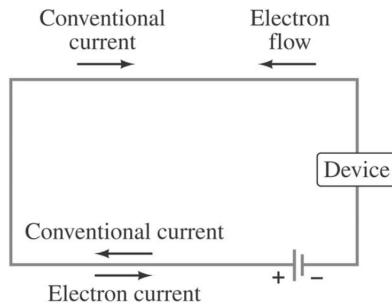
Elektrische stroom is het tempo waarmee er elektrische lading door een oppervlak stroomt. Het is dus eigenlijk een vorm van snelheid voor de lading. Voor een constant tempo bekomen we

$$I_{\text{gem}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

en bij variërend tempo bekomen we

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

De stroomzin is in de omgekeerde richting van de elektronenstroom,



maar wordt gedragen door de elektronen in metalen draden op microscopisch niveau en in fluïdum door protonen of elektronen. De stroomzin is dus eerder een conventie.

Toepassing 14.1: Microscopisch model van elektrische stroom

We nemen aan dat we ons niet in het electrostatisch geval bevinden, namelijk dat

$$\vec{E} \neq 0$$

en dus de ladingen vrij zijn om te bewegen. We definiëren nu een nieuwe microscopische grootheid, de stroomdichtheid \vec{J} , die staat voor stroom per cross-sectioneel oppervlakteenheid:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Voor het uniforme geval krijgen we dus:

$$J = \frac{I}{A}$$



De richting van \vec{J} is gekozen volgens de stroomzin, maar in een geleider weten we dat de stroom gedragen wordt door de elektronen: ze bewegen dus eigenlijk in de met tegengestelde zin volgens $-\vec{J}$. De elektronen voelen initieel een kracht door de aanwezigheid van het elektrisch veld en beginnen te versnellen. Hun versnelling in de tegengestelde zin van het elektrisch veld wordt de **driftsnelheid** genoemd. Deze is ongeveer gelijk omdat de elektronen constant botsen met de atomen van de draad en dus niet rechtstreeks bewegen volgens de elektronenstroom.



Met deze nieuwe informatie kunnen we de voorgaande formules herschrijven, namelijk

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n(-e)Av_d\Delta t}{\Delta t} = n(-e)Av_d$$

met v_d de driftsnelheid: $\sim 10^{-4} m/s$, $-e$ de lading van een elektron en n het aantal ladingen per volumeeenheid. De stroomdichtheid

$$\vec{J} = n(-e)\vec{v}_d = \frac{n(-e)^2\tau}{m_e}\vec{E}$$

met τ de gemiddelde tijd tussen 2 botsingen, heeft dus ook het minteken wat aanduid dat in werkelijkheid de stroomzin hier in de tegengestelde richting is van de driftsnelheid van de elektronen. De betekenis van weerstand op microscopisch niveau is het verlies van energie bij botsing tussen de elektronen en de atomen van de draad, want de vibraties zorgen voor de transformatie naar warmte.

Definitie 14.2: Weerstand en resistiviteit

De grootte van de stroom is niet enkel afhankelijk van het potentiaal, maar ook van de **weerstand**. Het wordt gegeven door de volgende formule bij Ohmse materialen (zie hierna):

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

De **resistiviteit** ρ van een draad

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

is recht evenredig met de lengte l en omgekeerd met de doorsnede. Het is afhankelijk van het materiaal van de draad en de temperatuur van de draad. Bij metalen groeit de resistiviteit lineair met de temperatuur, in formulevorm:

$$\rho_T = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

De **geleidbaarheid** van een materiaal kan men beschrijven door de inverse van de resistiviteit, ofwel:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Wet 14.1: Ohm

De stroom doorheen een draad is recht evenredig met het potentiaalverschil over de twee uiteinden, in formulevorm:

$$I \sim \Delta V$$

Ohm ontdekte ook dat bij metalen geleiders, zogenaamde 'Ohmse' materialen,

$$\Delta V = IR$$

een constante bleek te zijn. Hieronder vergelijken we Ohmse materialen en niet-Ohmse materialen:



Microscopisch zou dit betekenen dat de verhouding tussen de stroomdichtheid en het elektrische veld een constante, namelijk de **geleidbaarheid** van het materiaal, is, in formulevorm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \rightarrow \sigma = \frac{n(-e)^2 \tau}{m_e}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{n(-e)^2 \tau}$$

Definitie 14.3: Elektrische Vermogen

We weten van voorgaande hoofdstukken dat vermogen een eenheid is voor arbeid per tijdseenheid: de mate waarin energie getransformeerd wordt. We vinden dus

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V$$

en als we dit combineren met de definitie van stroom, bekomen we:

$$P = I \Delta V$$

Deze formule kunnen we ook op andere manieren schrijven, namelijk:

$$P = I \Delta V = I(IR) = I^2 R$$
$$P = I \Delta V = \left(\frac{\Delta V}{R}\right) \Delta V = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Als we spreken over **supergeleidende** materialen, dan zijn deze volledig weerstandloos en wordt er dus geen vermogen verloren aan warmte.

15 Gelijkstroomschakelingen

Definitie 15.1: Elektromotorische “kracht”

Om stroom te hebben in een circuit, hebben we een apparaat nodig dat elektrische energie kan uitgeven. Dit apparaat wordt een bron van **elektromotorische kracht** (emf) genoemd. Het potentiaalverschil tussen de terminalen, ofwel de klemspanning, van de bron, wanneer er geen stroom vloeit, noemt men het emf \mathcal{E} van de bron. Als er nu een stroom vloeit, dan is er een interne verzwakking van de klemspanning met een mate Ir waarbij r de interne weerstand is. In formulevorm krijgen we:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir$$



Eigenschap 15.1: Weerstanden bij gelijkstroomschakelingen

Parallel	Serie
$I = \sum_i I_i$	$I = I_i$
$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$	$R = \sum_i R_i$
$\Delta V = \Delta V_i$	$\Delta V = \sum_i \Delta V_i$

Definitie 15.2: Eerste regel van Kirchhoff

De som van de stromen die een vertakking binnenkomen, moet gelijk zijn aan de som van de stromen die de vertakking verlaten. In formulevorm:

$$\sum I_{in} = \sum I_{uit}$$

Definitie 15.3: Tweede regel van Kirchhoff

De som van de potentiaalverschillen over alle elementen in een gesloten kring, moet nul zijn. In formulevorm:

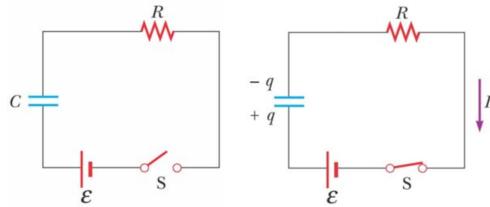
$$\sum_{\text{gesloten kring}} \Delta V = 0$$

Toepassing 15.1: RC-kringen

Als de schakelaar dicht is, dan laadt de condensator op tot het het potentiaalverschil heeft van de batterij. We kunnen hierop de tweede regel van Kirchoff toepassen, namelijk $\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0$:

$$t = 0 : \mathcal{E} - I_0 R = 0$$

$$t = \infty : \mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0$$



We weten dat stroom lading per tijdseenheid is dus we kunnen hieruit de volgende tijdsafhankelijke oplossingen halen:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

We kunnen nu een nieuwe constante bepalen, namelijk de **tijdsconstante** $\tau = RC$ die de tijd voorstelt nodig voor een condensator om tot 63% van zijn lading en voltage te bekomen: RC is een maateenheid voor de snelheid van het opladen van de condensator.

We kunnen ook wat praten over de energiebalans van de RC-kring:

- Hoeveel energie heeft de emf geleverd?

$$U_{\text{emf}} = \int_0^Q \mathcal{E} dq = Q\mathcal{E} = \mathcal{E}^2 C$$

- Hoeveel energie is er opgeslagen in de condensator?

$$U_C = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

- Hoeveel warmte is er gedisipeerd in de weerstand?

$$U_R = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

We zien dus dat de energie geleverd door de emf netjes is verdeeld over de weerstand en de condensator, namelijk:

$$U_{\text{emf}} = U_C + U_R$$

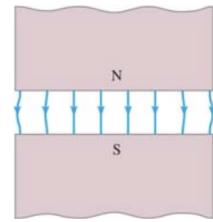
Magnetisme

16 Magnetisme

Definitie 16.1: Magnetische velden

Net zoals we rondom een elektrische lading een elektrisch veld hebben gedefinieerd, kunnen we rond een magneet een magnetisch veld \vec{B} definiëren. Magnetische veldlijnen op tekeningen hebben dusdanig ook dezelfde eigenschappen als elektrische veldlijnen, namelijk

- de richting van het magnetische veld is tangentieel met de magnetische veldlijnen
- de hoeveelheid magnetische veldlijnen per oppervlakte duidt op het sterkte van het magnetische veld



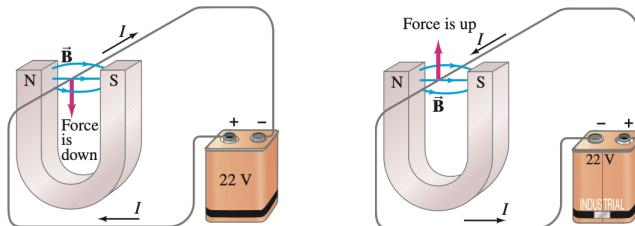
Elektrische stroom **produceert** een magnetisch veld. Een niet-magnetische, geleidende draad is dus magnetisch als we er stroom op zetten. Om de richting van het magnetisch veld te weten, kunnen we **rechterhandregel 1** (zie Samenvatting 1) toepassen.

Definitie 16.2: Magnetische kracht

De relatie tussen de magnetische kracht \vec{F} van een draad met stroom I en het magnetisch veld \vec{B} kan geschreven worden als een vector product

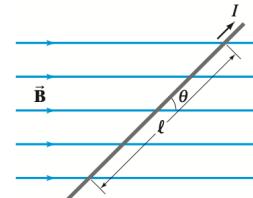
$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

waarbij $d\vec{F}$ een infinitesimale kracht op een infinitesimale lengte $d\vec{\ell}$ van de draad in het magnetische veld.



Als het veld homogeen is, dan zal elk infinitesimaal deeltje $d\vec{\ell}$ dezelfde hoek maken met het magnetische veld \vec{B} . Hieruit volgt dan de formule:

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$



Definitie 16.3: Magnetische kracht op een bewegende lading

Elektrische stroom is een verzameling van N bewegende ladingen, we kunnen de definitie van magnetische kracht dus ook anders schrijven:

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

sinds $I = \frac{Nq}{t}$ en $\vec{\ell} = \vec{v}t$. De bijlage hieronder toont de magnetische kracht op bewegende ladingen:



Vergelijking 16.1: Verschillen tussen elektrische en magnetische kracht

Elektrische kracht: $\vec{F} = q\vec{E}$	Magnetische kracht: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
in de richting van het elektrisch veld	loodrecht op het magnetische veld
werkt op een lading	werkt op een bewegende lading
levert arbeid bij de verplaatsing van de lading	levert geen arbeid bij de verplaatsing van de lading

Toepassing 16.1: Bewegende lading in een vlak loodrecht op magnetisch veld

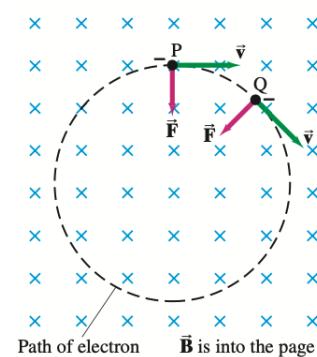
Het pad van een bewegende lading in een vlak loodrecht op het magnetisch veld is cirkelvormig. De kracht zal altijd loodrecht zijn op de snelheid, dus de lading zal cirkelvormig bewegen met centripetale versnelling:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

De periode heeft de volgende formule:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{1}{f}$$

sinds $r = \frac{mv}{qB}$.



Definitie 16.4: Magnetisch dipool moment

Wanneer een lading stroom door een gesloten kring in een extern magnetisch veld, dan kan de magnetische kracht torsie veroorzaken. Stroom vloeit door de rechthoekige kring (zie figuur a), waarvan we aannemen dat het parallel is met het veld \vec{B} . Het veld oefent noch een kracht, noch een krachtmoment uit op de horizontale delen; hier is $\sin(\theta) = 0$. Het veld oefent wel een kracht uit op de verticale delen (hiervan geeft figuur b een bovenaanzicht), we noemen deze krachten \vec{F}_1 en \vec{F}_2 .

Deze krachten zorgen voor een netto krachtmoment:

$$\tau = Iab \frac{b}{2} + Iab \frac{b}{2} = IabB = IAB$$

waarbij $A = ab$ de oppervlakte van de spoel. Als de spoel N kringen heeft en een hoek θ maakt met het magnetisch veld (zie figuur c), dan is de stroom NI en volgt:

$$\tau = NIAB \sin(\theta)$$

want de krachten blijven gelijk, maar de krachtarmen verkleint. Het **magnetisch dipool moment** $\vec{\mu}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$\vec{\mu} = NI\vec{A}$$

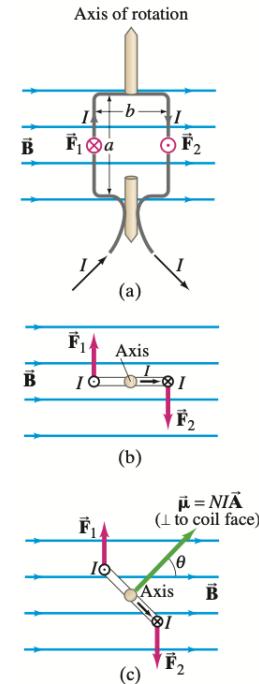
waarbij de richting van \vec{A} loodrecht is op het vlak van de spoel. Hiermee kunnen we de formule vectorieel schrijven:

$$\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

De potentiële energie U kunnen we dan als volgt berekenen

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} NIAB \sin(\theta) d\theta = -\mu B \cos(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

wat ook logisch is sinds we dit kunnen vergelijken met het elektrisch dipool moment (zie vergelijking 16.2).



Vergelijking 16.2: Verschillen tussen het magnetisch en elektrisch dipoolmoment

Magnetisch dipoolmoment in een magnetisch veld	Elektrisch dipolmoment in een elektrisch veld
$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$	$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$
$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$	$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Definitie 16.5: Het Hall-Effect

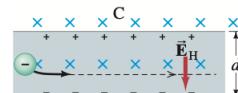
Wanneer een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld wordt vastgehouden, oefent het veld een zijwaartse kracht uit op de ladingen die in de geleider bewegen. De lading zal kaatsen en er zal een potentiaalverschil ontstaan. Dit potentiaalverschil zal stijgen totdat het gecreëerde elektrisch veld \vec{E}_H een kracht $e\vec{E}_H$ op de krachten uitoefent dat gelijk en tegengesteld is aan de magnetische kracht, ofwel:

$$eE_H = ev_dB \Rightarrow E_H = v_dB$$

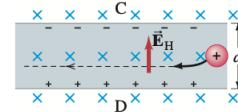
Dit noemen we het **Hall-effect**. Het potentiaalverschil wordt ook wel de **Hallspanning** en wordt bij een uniform Hall veld in een lange, dunne geleider:

$$\mathcal{E}_H = E_H d = v_d B d = R_H \frac{IBd}{A}$$

met $R_H = \frac{1}{ne}$ de **Hall-coëfficiënt**.



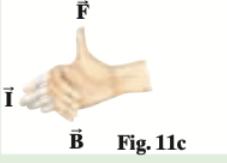
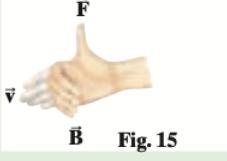
(a)



(b)

Samenvatting 16.1: Rechterhandregels

TABLE 1 Summary of Right-hand Rules (=RHR)

Physical Situation	Example	How to Orient Right Hand	Result
1. Magnetic field produced by current (RHR-1)	 Fig. 8c	Wrap fingers around wire with thumb pointing in direction of current I	Fingers point in direction of \vec{B}
2. Force on electric current I due to magnetic field (RHR-2)	 Fig. 11c	Fingers point straight along current I , then bend along magnetic field \vec{B}	Thumb points in direction of the force \vec{F}
3. Force on electric charge $+q$ due to magnetic field (RHR-3)	 Fig. 15	Fingers point along particle's velocity \vec{v} , then along \vec{B}	Thumb points in direction of the force \vec{F}

17 Bronnen van magnetische velden

Definitie 17.1: Magnetisch veld ten gevolge van een rechte draad

Het magnetische veld ten gevolge van de elektrische stroom in een lange rechte draad is zodanig dat de veldlijnen cirkels zijn met de draad in het midden (zie figuur). De veldsterkte is groter hoe dichter je bij de draad bent en hoe groter de stroom, in formulevorm:

$$B \propto \frac{I}{r}$$

met r de loodrechte afstand van de draad. Deze relatie blijft waar als we aan nemen dat de draad lang is. Het magnetisch veld nabij een lange, rechte draad is als volgt

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

met μ_0 de magnetische permeabiliteit in vacuum.



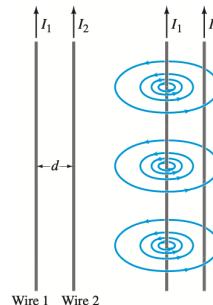
Toepassing 17.1: Magnetische kracht tussen twee parallelle draden

Neem twee lange evenwijdige draden gescheiden door een afstand d , zoals in de figuur. Ze voeren respectievelijk stromen I_1 en I_2 . Elke stroom produceert een magnetisch veld dat door de ander wordt 'gevoeld', dus oefenen ze een kracht uit op mekaar. We weten dat

$$F_{\max} = I\ell B$$

en dus krijgen we:

$$F = I_2 B_1 \ell_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \ell_2$$



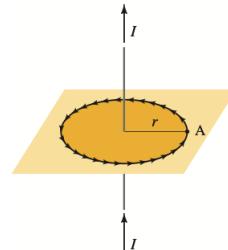
Hieruit kunnen we afleiden dat evenwijdige stroomvoerende geleiders elkaar

- aantrekken indien de stroom in dezelfde richting vloeit,
- afstoten indien de stroom in tegengestelde richting vloeit.

Wet 17.1: Ampère

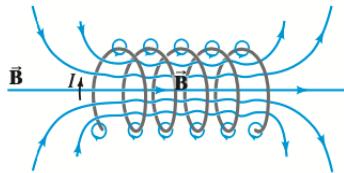
De lijnintegraal van het magneetveld langs een gesloten pad is gelijk aan $\mu_0 I_{\text{in}}$, waarbij I_{in} de totale stroom is, die vloeit door een oppervlak dat omsloten is door het pad, in formulevorm:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{in}}$$



Definitie 17.2: Magnetisch veld van een spoel

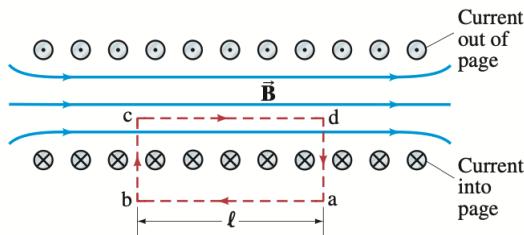
Een lange draad met meerdere windingen noemen we een **spoel**, zie de figuren hieronder.



Elke winding genereert een magnetisch veld. Nabij elke draad zijn de veldlijnen quasi cirkels, net zoals bij een rechte draad. In het centrum van de spoel is het netto magnetisch veld een redelijk groot en redelijk uniform veld, we nemen aan dat een spoel dicht gebonden is en dus dat het veld praktisch uniform is. We kunnen de wet van Ampère toepassen op de zijden van de rechthoek (zie figuur onderaan)

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= B\ell\end{aligned}$$

waarbij de integralen op de paden $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ en $d \rightarrow a$ nul zijn, want het veld is praktisch nul tussen in en buiten de spoel.



We berkenen nu de formule van het magnetisch veld van een spoel:

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 NI \\ B\ell &= \mu_0 NI \\ B &= \mu_0 nI\end{aligned}$$

met $n = \frac{N}{\ell}$ het aantal windingen per lengte.

Toepassing 17.2: Magnetisch veld van een torus

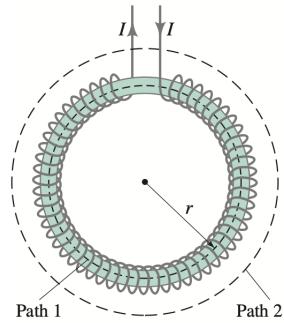
We kunnen de wet van Ampère gebruiken om het magnetisch veld in de torus en buiten de torus te berekenen.

- Binnen de torus:** als we de wet van Ampère toepassen op pad 1 vinden we

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 N I$$

waarbij N de hoeveelheid windingen en I de stroom in deze windingen.



- Buiten de torus:** het pad buiten de torus bevat N windingen die stroom I in één richting bevat en N windingen die stroom I in de tegengestelde richting bevat. Hierdoor wordt de ingesloten stroom $I_{\text{encl}} = 0$ en volgt dus

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

$$B(2\pi r) = 0$$

en dus

$$B = 0$$

Wet 17.2: Biot-savart

Een stroom die vloeit door een bepaald pad kan bekijken worden door vele, infinitesimale stroomelementen. Als $d\vec{\ell}$ een infinitesimale lengte voorstelt waardoor stroom vloeit, dan is het magnetisch veld $d\vec{B}$, op elke plaats P in de ruimte, door dit stroomelement gegeven door

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

waarbij \vec{r} de verplaatsingsvector is van het element $d\vec{\ell}$ tot het punt P . Het totale magnetisch veld in punt P vinden we dan met

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r}$$

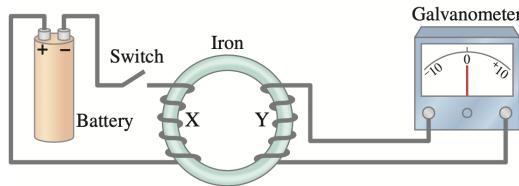
Vergelijking 17.1: Verschil tussen de wet van Ampère en de wet van Biot-Savart

Een belangrijk onderscheid tussen de wet van Biot-Savart en de wet van Ampère is dat bij de wet van Ampère het magnetisch veld \vec{B} niet noodzakelijk enkel door de stroom is bij het integratiepad. Maar bij de wet van Biot-Savart is het magnetisch veld $d\vec{B}$ enkel en volledig bepaald door het stroomelement. Om het totale magnetisch veld \vec{B} te vinden is het noodzakelijk om de alle stroom te includeren.

18 Magnetische inductie

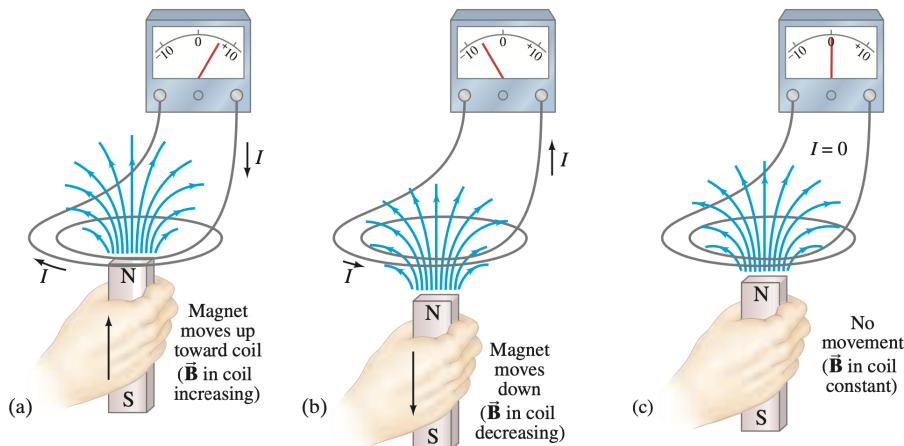
Definitie 18.1: Elektromagnetische inductie

Een spoel, X, was verbonden aan een batterij. De stroom die door X gaat produceert een magnetisch veld dat versterkt wordt door de ijzere kern. De tweede spoel Y werd verbonden aan een galvanometer. De hoop was nu om door magnetisme een stroom te verkrijgen in Y. De constructie is hieronder uitgebeeld



Als we nu de schakelaar open zouden doen, waardoor X niet meer verbonden zou zijn met de batterij en dus geen stroom meer zou bevatten, dan zou de galvanometer een **geïnduceerde stroom** weergeven. Dit gebeurt ook op het moment waarop we de schakelaar dicht doen, waarbij het magnetisch veld dus verandert. We concluderen: wanneer het magnetisch veld door Y verandert, komt er een stroom voor alsof Y verbonden zou zijn met een emf. Kortom, een veranderend magnetisch veld induceert een emf. Dit fenomeen wordt **elektromagnetische inductie** genoemd. Omgekeerd, we kunnen ook een magneet snel nabij een geleider brengen. Hierdoor zal er dus een stroom geïnduceerd worden in de geleider. De figuur hieronder beeld drie situaties uit, namelijk

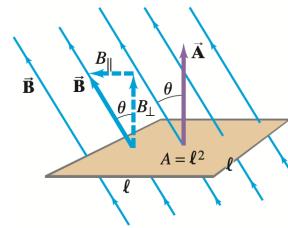
- (a) Magneet wordt snel bij een draad gebracht
- (b) Magneet wordt snel bij een draad weggehaald
- (c) Magneet wordt stilgehouden bij een draad



Definitie 18.2: Magnetische flux

Magnetische flux, net zoals elektrische flux, wordt gedefinieerd als de hoeveelheid magnetisch veld door een oppervlakte vloeit. Dit komt dan overeen met de formule

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



Wet 18.1: Faraday

De geïnduceerde emf in een gesloten circuit is gelijk aan minus de tijdsverandering van de magnetische flux doorheen de kring, in formulevorm:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Het minteken dient als herinnering voor de richting van de geïnduceerde spanning.

Wet 18.2: Lenz

De stroom geproduceerd door een geïnduceerde emf beweegt in een richting zodat het magnetisch veld geproduceerd door die stroom de verandering in magnetische flux doorheen het oppervlak tegenwerkt. We spreken nu over twee distincte velden, namelijk

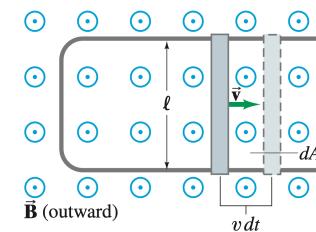
1. het veranderd magnetisch veld of flux die de stroom induceert
2. het magnetisch veld geproduceerd door de geïnduceerde stroom

waarbij het tweede veld het eerste tegenstelt. Anders verwoord: een geïnduceerde emf is altijd in de richting die de verantwoordelijke, originele lading in flux tegenstelt.

Toepassing 18.1: Geïnduceerde emf in een bewegende geleider

We kunnen ook op een andere manier een emf induceren, namelijk met een bewegende geleider. Stel je een uniform magnetisch veld \vec{B} loodrecht is met de oppervlakte van de U-vormige geleider en de bewegende staaf op de geleider ligt (en er dus een kring ontstaat). Als de rod beweegt met een snelheid v , dan legt het een afstand $dx = vdt$ af in een tijd dt . Dus vergroot de oppervlakte van de kring met $dA = \ell dx = \ell v dt$ in een tijd dt . Volgens de wet van Faraday is er nu een geïnduceerde emf

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{B dA}{dt} = \frac{B \ell v dt}{dt} = B \ell v$$



waarbij we annemen dat B , ℓ en v onderling loodrecht zijn. Als dit niet zo is, dan gebruiken we de loodrechte componenten.

19 Inductantie, elektromagnetische oscillaties en AC-kringen

Definitie 19.1: Wederzijdse inductie

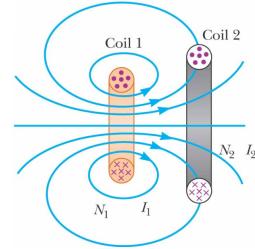
Als twee spoelen nabij elkaar worden geplaatst, zoals in de figuur, dan zal een veranderende stroom in de ene, een emf induceren in de andere. Dus: geïnduceerde emf in een spoel is evenredig met de snelheid van de stroomverandering in de andere. Dit noemt men **wederzijdse inductie** M , we noteren

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

met M_{21} de wederzijdse inductiecoëfficiënt en Φ_{21} de magnetische flux doorheen spoel 2 tegenover de stroom in spoel 1. We kunnen dit mengen met de wet van Faraday

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

waarbij nu de verandering in stroom in spoel 1 hebben verbonden aan de emf dat het induceert in spoel 2. In de algemene situatie is $M = M_{12} = M_{21}$.



Toepassing 19.1: Wederzijdse inductie van een solenoïde en een spoel

De solenoïde is opeengepakt, dus kunnen we veronderstellen dat alle magnetische flux in de solenoïde blijft in de tweede spoel. We weten dan wat de flux door deze spoel is, namelijk

$$\Phi_{21} = BA = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1 A$$

en de wederzijdse inductiecoëfficiënt

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} A$$

waarbij we zien dat deze enkel afhangt van de geometrie van het systeem.

Definitie 19.2: Zelfinductie