Natuurkunde voor Informatici

Pieter Vanderschueren

Academiejaren 2022-2024

Inhoudsopgave

Inleiding

1 Vectoren

Definitie 1.1: Vector

Een **Vector** is een grootheid met een grootte, net zoals een scalar, een richting en een zin.

- **Eenheidsvector:** een vector, meestal genoteerd als $\hat{u}$ waarvan de lengte 1 is
- **Plaatsvector:** vector van een punt ten opzicht van het coördinatenstelsel
- **Relatieve positievector:** vector tussen twee punten

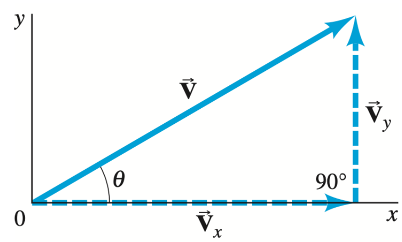
Eigenschap 1.1: Eigenschappen van vectoren

Elke vector kan je zien als een som van meerdere vectoren, namelijk zijn coördinaatvectoren. We verklaren tweedimensionaal:

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j}$$

Nu we dit weten kunen we som en verschil van twee vectoren gewoon zien als het optellen of aftrekken van de coördinaten. Deze coördinaten of vectorcomponenten kunnen we makkelijk berekenen, namelijk:

$$r_x = r\cos(\theta),\ \ r_y = r\sin(\theta)$$



($\vec{r} = \vec{V}$ op de tekening)

Hieruit kunnen we het volgende afleiden:

$$r = |r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2},\ \ \theta = \tan^{-1}\frac{r_y}{r_x}$$

Deze samenvatting zal vaak gebruik maken van de volgende notatie met $\hat{u}$ een eenheidsvector met dezelfde richting als $\vec{r}$:

$$\vec{r} = |r|\hat{u}$$

Dit volgt uit het feit dat

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

Definitie 1.2: Dot product

Het dot product kan meetkundig geïnterpreteerd worden als de grootte van een vector maal de projectie van de andere vector. De formule is:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = AB \cos \theta$$

Eigenschap 1.2: Eigenschappen van het dot product

- commutatief: $A \cdot B = B \cdot A$
- distributief t.o.v. de optelling: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Definitie 1.3: Vector product

De formule van het vector product geeft als uitkomst geen scalar, maar een gloednieuwe vector loodrecht op A en B . Hier deze formule:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin(\theta) \hat{u}$$

met $\hat{u}$ een gerichte eenheidsvector loodrecht op het vlak.

Eigenschap 1.3: Eigenschappen van het vector product

- **niet** commutatief: $A \times B = \text{-}B \times A$
- distributief t.o.v. de optelling: $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Kinematica

2 Vectoriële kinematica

Eigenschap 2.1: Nuttige vergelijkingen bij constante versnelling

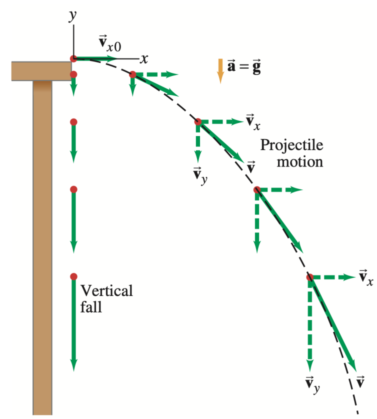
De volgende vergelijkingen kunnen gebruikt worden wanneer de versnelling constant is: $a = \dfrac{dv}{dt} = cst.$

1. $r = r_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2 = r_0 + \overline{v}t$
2. $v = v_0 + at$
3. $\overline{v} = \dfrac{v + v_0}{2}$
4. $v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$

Toepassing 2.1: Projectielbeweging

Bij een projectielbeweging (zie figuur voor een projectielbeweging met $v_{y,0} = 0$) heeft het systeem horizontaal een constante snelheid (eenparige beweging) en verticaal een constante versnelling (eenparig versnelde beweging). In de volgende tabel zijn de formules samengevat:

	horizontaal	verticaal
r	$x_0 + v_{x,0}t$	$y_0 + v_{y,0}t - \dfrac{gt^2}{2}$
v	$v_{x,0}$	$v_{y,0} - gt$
a	0	$-g$



Uit de voorgaande tabel kunnen we volgende formules halen:

$$x(t) = v_{x,0}t \rightarrow t = \frac{x(t)}{v_{x,0}}$$

$$y(t) = v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2}$$

Hieruit kunnen we de volgende formule bereiken:

$$y(x) = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x - \frac{g}{2v_{x,0}^2}x^2$$

Dynamica

3 Newton's bewegingswetten

Definitie 3.1: Kracht

Een kracht is een actie die de snelheid van een voorwerp verandert. Elke versnelling wordt dus veroorzaakt door een kracht. Er zijn twee soorten krachten:

- **Contactkrachten:** fysisch contact vindt plaats
- **Veldkrachten:** werken op een zekere afstand

Een kracht is een vectoriële grootheid en heeft dus een grootte, richting en zin.

Wet 3.1: De eerste wet van Newton: de Inertiewet

Een lichaam in rust (of in eenparige rechtlijnige beweging) zal in rust (eenparige rechtlijnige beweging) blijven tenzij er een uitwendige resulterende kracht inwerkt

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$$

Een **inertiaalstelsel** is een referentiestelsel waarin de eerste wet van Newton geldt. De **inertie** wordt gegeven door de massa en beschrijft hoeveel weerstand dat een lichaam biedt tegen een verandering van zijn snelheid.

Wet 3.2: De tweede wet van Newton: de versnellingswet

De versnelling van een voorwerp is recht evenredig met de nettokracht op het voorwerp en omgekeerd evenredig met het massa van het voorwerp. De richting van de versnelling is dezelfde als de richting van de nettokracht.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{net} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Wet 3.3: De derde wet van Newton: de actie-reactiewet

Wanneer een voorwerp een kracht uitoefent op een ander voorwerp, dan oefent het ander voorwerp een kracht met dezelfde grootte en omgekeerde zin uit op het voorwerp.

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -\vec{F}_{2\rightarrow 1}$$
$$F_{1\rightarrow 2} = F_{2\rightarrow 1}$$

Definitie 3.2: Gravitatiekracht

Alle voorwerpen nabij het aardoppervlak vallen met dezelfde versnelling $\vec{g}$. De kracht bepaald door deze vernselling wordt de **gravitatiekracht** of **zwaartekracht** genoemd:

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

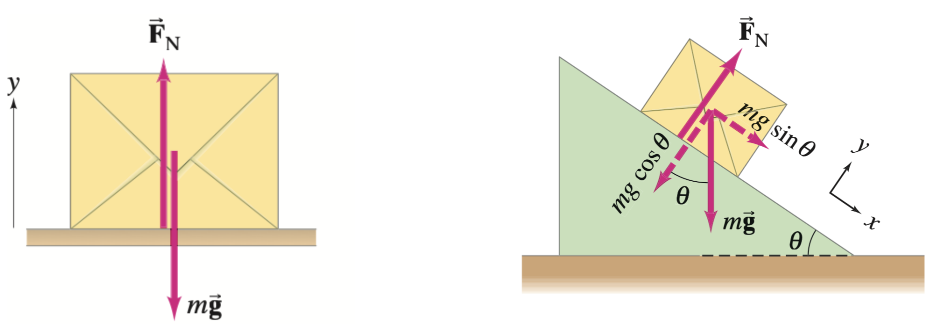
Deze kracht is gericht naar het aardoppervlak toe en de grootte wordt het **gewicht** van een voorwerp genoemd.

Definitie 3.3: Normaalkracht

De **loodrechte** kracht die het contactoppervlak uitoefent op het voorwerp

$$F_N = F_{g,y} - \sum_{rest,y} F_{rest,y}$$

wordt de normaalkracht genoemd. De volgende figuren tonen enkele veelvoorkomende situaties voor de oefeningen:



De normaalkracht is dus afhankelijk van de gravitatiekracht van zijn grootte en zin, maar niet van zijn richting (zie de rechterfiguur). We kunnen dus **niet** zeggen dat het gravitatiekracht-normaalkracht paar een actie-reactie paar vormt.

4 De wetten van Newton: wrijving, cirkelbeweging, weerstandskrachten

Definitie 4.1: Wrijvingskracht

De wrijvingkracht is de weerstand die het voorwerp ondervindt wanneer het over het oppervlak van een ander voorwerp beweegt. We bespreken 2 soorten wrijvingskrachten:

- **Kinetische:** $F_k = \mu_k F_N$ met μ_k de **kinetische** wrijvingscoëffiënt. Deze kracht is recht evenredig met de normaalkracht.
- **Statische:** $F_s \leq \mu_s F_N$ met μ_s de **statische** wrijvingscoëffiënt. Als deze drempelwaarde bereikt is, dan zal het object beginnen met bewegen en zal er sprake zijn van kinetische wrijving.

Er geldt dat het moeilijker is om een voorwerp te laten starten dan om een beweging verder te laten verlopen, of in formule vorm:

$$\mu_s > \mu_k$$

Definitie 4.2: Kinematica van de eenparige cirkelbeweging

Een voorwerp dat met een constante snelheid in een cirkel beweegt voert een **eenparig cirkelvormige beweging** uit. In dit soort beweging blijft de grootte van de snelheidsvector constant, maar verandert de richting continu, m.a.w. $a \neq 0$.

We berekenen de versnelling door te vertrekken van de formule:

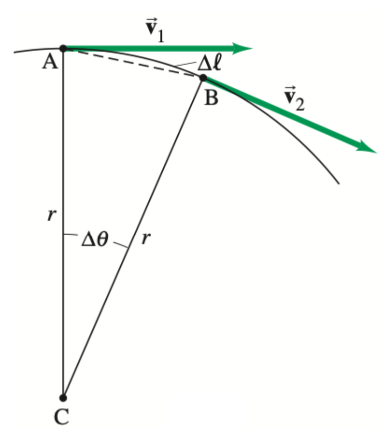
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1)$$

Uit gelijkvormige driehoeken volgt:

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta \ell}{r} \to \Delta v \approx \frac{v}{r} \Delta \ell \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$a_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r} \frac{\Delta \ell}{\Delta t}$$



Deze versnelling wordt de **centripetale versnelling genoemd** en is gericht naar het middelpunt van de cirkel. Deze wordt gegeven door de volgende formule:

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

De snelheid van een ECB wordt gegeven door de volgende formule:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Hierbij is T de periode, m.a.w. tijd nodig voor een complete omwenteling (Dimensie: s). De frequentie van de ECB, m.a.w het aantal omwentelingen per seconde (Dimensie: $s^{-1} = Hz$), wordt gegeven door de volgende formule:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Definitie 4.3: Dynamica van de eenparige cirkelbeweging

De cirkelbeweging is een versnelde beweging, dus er is een resulterende kracht nodig om het voorwerp op de cirkelbaan te houden, namelijk de **centripetale kracht**:

$$(\sum F)_R = ma_R = m\frac{v^2}{r}$$

Om een voorwerp op een cirkelbaan te houden is er een centripetale versnelling en zoals hierboven vermeld een centripetale kracht nodig, dus de F_{net} moet naar het midden van de cirkel gericht zijn. Als deze kracht er niet is, dan zal het volgens de **Inertiewet** rechtlijnig zich voortbewegen.

Definitie 4.4: Kinematica én Dynamica niet-eenparige cirkelbeweging

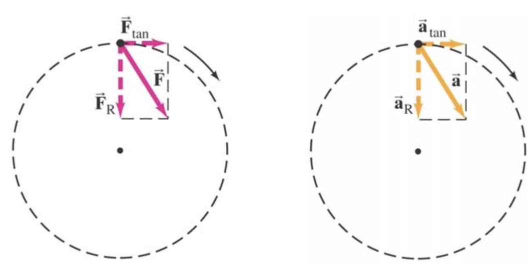
In dit soort beweging beweegt het voorwerp volgens een cirkelbaan, maar kan het versnellen. De totale vectoriele versnelling in dit soort beweging wordt gegeven door de volgende formule:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_R$$

Sinds $\vec{a}_R$ en $\vec{a}_{tan}$ altijd loodrecht op elkaar staan, geldt op eenderwelk ogenblik:

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_R^2} \text{ met } a_R = \frac{v^2}{r} \text{ en } a_{tan} = \frac{dv}{dt}$$

De figuren tonen de tangentiele en centripetale krachten en versnellingen bij een niet-eenparige cirkelbeweging:



5 De zwaartekracht en de synthese van Newton

Definitie 5.1: De wet van de universele zwaartekracht

Elk deeltje in het heelal trekt elk ander deeltje aan met een kracht die recht evenredig is met het product van hun massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de onderlinge afstand, in formulevorm:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ met } G = 6.673 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$$

We weten natuurlijk al uit voorgaande hoofdstukken wat de formule voor de zwaartekracht is nabij het aardoppervlak is, maar hoe komen we hieraan?

$$F_a = G\frac{mM_a}{(R_a+h)^2} \approx G\frac{mM_a}{r_a^2} = mG\frac{M_a}{r_a^2} \Rightarrow F_a = mg \text{ met } g = G\frac{M_a}{r_a^2}$$

Let op: De formule spreekt over twee puntmassas! Een macroscopisch voorwerp is een som (**integraal!**) over een zeer grote verzameling puntmassas, dus hoe moeten we het hier berekenen?

- **Symmetrische bol:** alsof alle massa in het middelpunt zit
- **Symmetrische schil:** alsof alle massa in het middelpunt zit, én enkel kracht op massa buiten de schil

Toepassing 5.1: Satellieten

Satellieten voeren een ECB uit rond de aarde. Er moet dus een centripetale kracht zijn die een satelliet op zijn baan houdt. Als we de tweede wet van newton zouden gebruiken vinden we in de radiale richting het volgende:

$$\sum F_R = G\frac{mM_a}{r_a^2} = m\frac{v^2}{r_a} \; met \; r_a = R_A + h_s$$

Hieruit volgt dat de tangentiêle snelheid, die de satteliet op zijn baan houdt, gelijk is aan het volgende:

$$v = \sqrt{\frac{GM_a}{r}} = \sqrt{\frac{GM_a}{R_A + h_s}}$$

Definitie 5.2: Gravitatieveld

Als we het gravitatieveld op een willekeurig punt willen meten, plaatsen we een kleine testmassa op dat punt en meten we de kracht die erop wordt uitgeoefend (waarbij we ervoor zorgen dat er alleen gravitatiekrachten werken). Dan is het gravitatieveld op dat singulier punt gedefinieerd als:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}G\frac{mM}{r^2}\hat{r} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

6 Arbeid en energie

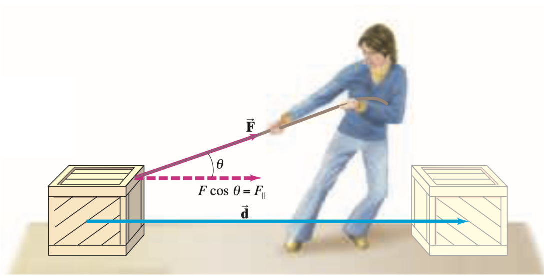
Definitie 6.1: Arbeid en energie

Arbeid is een scalaire grootheid voor het energietransfert, andersom is energie dan een scalaire grootheid voor de capaciteit om arbeid te leveren.

- Arbeid en energie door een constante kracht

  De arbeid geleverd door een constante kracht is gelijk aan de volgende formule:

$$W = F_{||}d = Fdcos(\theta) = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



- Arbeid en energie door een variabele kracht

  Stel het voorwerp wordt bewogen door een variabele kracht over een pad $a \to b$. We kunnen dit pad opsplitsen in infinitesimalen delen $d\vec{\ell}$. Als we nu integreren over het pad, dan krijgen we:

$$W = \int_a^b F_{||} d\ell = \int_a^b F \cos\theta d\ell = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Toepassing 6.1: Terugroepkracht van schroefveren

Het uittrekken of samendrukken van een veer veroorzaakt een kracht, namelijk de terugroepkracht:

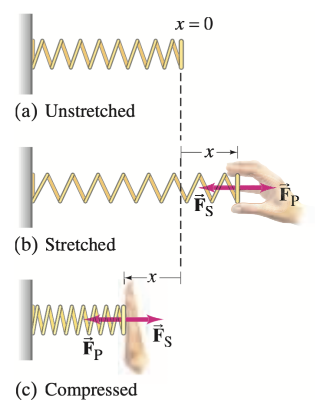
$$\vec{F}_s = -k\vec{x}$$

De arbeid geleverd door de veer hangt kunnen we ook berekenen:

$$W_s = \int_0^x \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2}kx^2$$

Deze zal gelijk zijn bij samendrukken en uitrekken.

Opmerking: de formule is geldig als de massa begint in de oorsprong en samengedrukt/uitgerokken wordt tot een punt x



Wet 6.1: Arbeid - Kinetische energie theorema

De netto-arbeid W_{net} geleverd door een voorwerp wordt bepaald door de netto-kracht F_{net}. Stel we hebben een variabele (of een constante) kracht die inoefent op een voorwerp, we berekenen nu de netto-arbeid:

$$\begin{aligned}
W_{net} &= \int_i^f \vec{F}_{net} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_i^f F_{||} d\ell \\
&= \int_i^f m\frac{dv}{dt} d\ell && (F_{||} = ma_{||} = m\frac{dv}{dt}) \\
&= \int_i^f mvdv && (v = \frac{d\ell}{dt}) \\
&= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 && (F_{net} = ma,\ a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}) \\
&= \Delta K
\end{aligned}$$

Wat we hierboven bewezen hebben is het **Arbeid - Kinetische energie theorema**, in woorden:

'Wanneer de enige verandering in het systeem de snelheid is, dan is de arbeid verricht door de netto-kracht gelijk aan de verandering in kinetische energie van het systeem.'

7 Behoud van energie

Definitie 7.1: Conservatieve en niet-conservatieve krachten

Een **conservatieve kracht** is een kracht waarbij de netto-arbeid geleverd door deze kracht nul is bij een gesloten baan, onafhankelijk is van de afgelegde weg. Bijvoorbeeld:

- de gravitatiekracht: $\vec{F}_g = m\vec{g}$
- de veerkracht: $\vec{F}_s = -k\vec{x}$

Een **niet-conservatieve kracht** is een kracht waarbij de netto-arbeid geleverd door deze kracht afhankelijk is van de gevolgde weg

Definitie 7.2: Potentiële energie

De arbeid geleverd door een conservatieve kracht is gelijk aan het tegengestelde van de verandering in potentiële energie:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \int_1^2 dU = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

Het is belangrijk om aan te halen dat het **verschil** in potentiële energie onafhankelijk is van het referentiestelsel. Hierdoor kunnen we de volgende redenering maken:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) - U(\vec{r}_1) &= -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (meestal\ kiezen\ we\ U_1 = 0) \\ -dU &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= drFcos(\theta) \end{aligned}$$

Uit deze berekeningen kunnen we een belangrijke formule halen:

$$F_T = Fcos(\theta) = -\frac{dU}{dr}$$

We kunnen deze vondst veralgemenen naar de 3 dimensies:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\tfrac{\theta}{\theta x}U\hat{i} - \tfrac{\theta}{\theta y}U\hat{j} - \tfrac{\theta}{\theta z}U\hat{k}$$

Wet 7.1: Behoud van energie

De wet van behoud van energie stelt dat energie niet kan worden gecreëerd of vernietigd - alleen omgezet van de ene vorm van energie in een andere. In formulevorm:

$$\Delta K + \Delta U = W_{nc}$$

Wet 7.2: Behoud van mechanische energie

We bundelen even wat vondsten van hiervoor samen:

$$K_b - K_a = -(U_b - U_a) = U_a - U_b$$
$$K_a + U_a = K_b + U_b$$
$$E_a = (K + U)_a = (K + U)_b = E_b$$

We zien nu dus dat de totale mechanische energie $E = K + U$ van een deeltje constant blijft ($E_a = E_b$) als de inwerkende krachten die arbeid leveren conservatief zijn. In formulevorm:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$$

Definitie 7.3: Vermogen

Het **vermogen** is een scalaire grootheid voor arbeid per tijdseenheid, uitgedrukt in Watt.

- **Gemiddelde:** $P_{gem} = \dfrac{W}{\Delta t}$
- **Ogenblikkelijke:** $P = \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{dE}{dt}$, want arbeid = energie transformatie!

  We krijgen uit de definitie van arbeid: $P = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

8 Impuls

Definitie 8.1: Impuls

Impuls is een vectoriële grootheid die de hoeveelheid van beweging weergeeft. In formulevorm:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Met dit nieuw begrip kunnen we de tweede wet van Newton herdefiniëren:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wet 8.1: Behoud van impuls

De wet van de behoud van impuls stelt dat de **totale impuls** ($\vec{P}$) van een geïsoleerd stelsel van deeltjes constant is wanneer:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\sum_i d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Toepassing 8.1: Elastische botsing

Bij een elastische botsing wordt de kinetische energie behouden. We kunnen nu met deze wet en de wet van behoud van impuls te werk gaan. Enerzijds krijgen we uit de wet van behoud van impuls:

$$m_a v_a + m_b v_b = m_a v_a' + m_b v_b' \tag{1}$$

Anderzijds uit de wet van behoud van kinetische energie bij elastische botsing:

$$\frac{1}{2}m_a v_a^2 + \frac{1}{2}m_b v_b^2 = \frac{1}{2}m_a {v_a'}^2 + \frac{1}{2}m_b {v_b'}^2 \tag{2}$$

We kunnen (1) herschrijven als volgt:

$$m_a(v_a - v_a') = m_b(v_b' - v_b) \tag{3}$$

We kunnen ook (2) herschrijven als volgt:

$$m_a(v_a^2 - {v_a'}^2) = m_b({v_b'}^2 - v_b^2) \tag{4}$$

Wegens $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ kunnen we (4) weer herschrijven:

$$m_a(v_a - v_a')(v_a + v_a') = m_b(v_b' - v_b)(v_b' + v_b) \tag{5}$$

Tenslotte kunnen we (5) delen door (3) en bekomen we:

$$v_a - v_b = -(v_a' - v_b')$$

Toepassing 8.2: Inelastische botsing

Bij een inelastische botsing wordt de kinetische energie niet behouden. Desondanks wordt de totale energie altijd behouden en dus ook het vectoriële totale impuls. Als de botsing compleet inelastisch is (dus dat de voorwerpen één massa vormen na botsing), dan kunnen we de wet van behoud van impuls toepassen en de volgende formule krijgen:

$$m_a\vec{v}_a + m_b\vec{v}_b = (m_a + m_b)\vec{v}'$$

9 Rotatie - Krachtmoment - Impulsmoment

Toepassing 9.1: Constante rotationele vs translationele versnelling

Rotationele beweging met constante α	Translationele beweging met constante a
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$
$\omega_{gem} = \dfrac{\omega + \omega_0}{2}$	$v_{gem} = \dfrac{v + v_0}{2}$

Definitie 9.1: Krachtmoment

Het draaieffect (de hoekversnelling) van een kracht wordt bepaald door de grootte van de kracht, de richting/zin van de kracht en de "**momentarm**": afstand tussen het aangrijpingspunt van de kracht en de rotatie-as. Het **krachtmoment** is het rotationele equivalent van het translationele kracht, in formulevorm:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

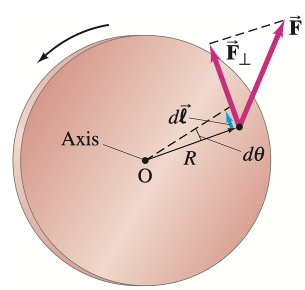
De grootte van het krachtmoment wordt gegeven door de volgende formule:

$$\tau = rF\sin(\theta) = r(ma)\sin(\theta) = (m(rsin(\theta))^2)\alpha = I\alpha$$

Toepassing 9.2: Arbeid en Vermogen bij rotatie

De arbeid vericht door een object dat roteert rond een vaste as kan geschreven kan geschreven worden tegenover rotationele grootheden:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int F_{\perp} r d\theta$$



waarbij $d\vec{\ell}$ een infinitesimale afstand is loodrecht op r met grootte $dl = rd\theta$. We weten van hierboven natuurlijk dat $\tau = F_{\perp} r$, dus de formule wordt:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

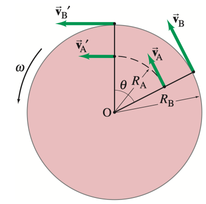
Het vermogen bij rotatie kunnen we nu ook afleiden:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

Toepassing 9.3: Kinetische energie bij rotatie

Beschouw een stijf, roterend voorwerp als opgebouwd uit vele kleine deeltjes, elk met een massa m_i. De totale kinetische energie van het hele object is de som van de kinetische energie van alle deeltjes:

$$K = \sum(\frac{1}{2}m_i v_i^2) = \sum(\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2) = \frac{1}{2}I\omega^2$$



Definitie 9.2: Impulsmoment

Het **Impulsmoment** is de rotationele variant van het translatonele impuls, net zoals krachtmoment rotationele variant is van de translationele kracht. Het wordt gegeven door de volgende formule:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

De grootte van het impulsmoment kunnen we als volgt berekenen:

$$L = prsin(\theta) = mvrsin(\theta) = (m(rsin(\theta))^2)\omega = I\omega$$

Wet 9.1: Behoud van impulsmoment

De wet van de behoud van impulsmoment stelt dat de **totale impulsmoment** ($\vec{L}_{net}$) van een geïsoleerd stelsel van deeltjes constant is wanneer:

$$\tau_{net} = \sum \tau_{ext} = \sum \frac{I\omega}{dt} = \frac{dL_{net}}{dt} = 0$$

Vergelijking 9.1: impuls – impulsmoment

Algemeen:

impuls	impulsmoment
$\vec{p}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Enkel bij een geïsoleerd systeem:

impuls	impulsmoment
behoud van impuls	behoud van impulsmoment
$F_{net} = \sum F_{ext} = 0$	$\tau_{net} = \sum \tau_{ext} = 0$

Elektriciteit

10 Elektrische velden

Definitie 10.1: Elektrische ladingen

- tegengestelde ladingen trekken elkaar aan en gelijke ladingen stoten elkaar af
- gekwantiseerde grootheid, geen fracties

Wet 10.1: Behoud van totale lading

Bij een geïsoleerd systeem blijft de totale aantal lading gelijk, er is enkel **transfert** van lading

Toepassing 10.1: Elektrische lading in het atoom – isolator ↔ geleider

- **Geleider:** sommige elektronen zijn ongebonden en kunnen vrij bewegen
- **Isolator:** alle elektronen zijn gebonden en onbeweegelijk
- **Halfgeleider:** ergens tussenin

Definitie 10.2: Coulombkracht

Coulomb concludeerde dat de kracht die een klein geladen voorwerp uitoefent op een tweede evenredig is met het product van de magnitude van de lading op de ene, q_1, maal de magnitude van de lading op de andere, q_2, en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand r tussen beide. In formulevorm wordt dit:

$$\vec{F}_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \qquad (\text{met } k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0})$$

Opmerking: de lading bij de coulombkracht is telkens de absolute waarde, omdat de grootte van een vector niet negatief mag zijn. De richting wordt dus bepaald door $\hat{r}$.

Definitie 10.3: Elektrisch veld

De elektrische veld vector $\vec{E}$ in een punt in de ruimte is gelijk aan de elektrische kracht $\vec{F}_e$ die op een **positieve** testlading werkt, gedeeld door de testlading. In formulevorm:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Toepassing 10.2: Beweging van een lading in een uniform elektrisch veld

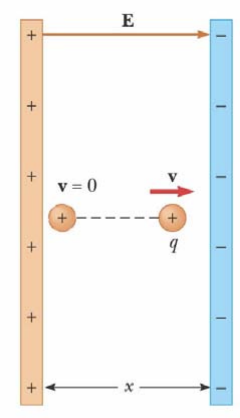
We vinden door de tweede wet van Newton toe te passen:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{net} &= \sum \vec{F} = m\vec{a} \\ &= \vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a}\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus de vectoriële formule voor de versnelling veroorzaakt door een uniform elektrisch veld, namelijk:

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Sinds dat de massa, het elektrisch veld en de lading constant is, blijft dus de versnelling **ook constant**! We kunnen dus de veelbesproken identiteiten hiervoor gebruiken.



Eigenschap 10.1: Geleiders in elektrostatisch evenwicht

- Het elektrisch veld in een geleider is nul (bij elektrostatisch evenwicht mag er geen **netto** ladingsbeweging zijn)
- De lading van een geïsoleerde geleider bevindt zich aan het oppervlak
- Het elektrisch veld net buiten de geleider is loodrecht op het oppervlak en $|E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
- Oppervlakteladingsdichtheid σ is het grootst bij de grootste oppervlaktekromming

Toepassing 10.3: Elektrisch veld berekeningen voor continue ladingsverdelingen

We kunnen bij continue ladingen een infinitesimaal gebied bekijken, hier dus een infinitesimale lading en krijgen we de volgende formule:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2}\hat{r} \tag{1}$$

We willen nu het totale veld bereken door te sommen over al deze infinitesimalen:

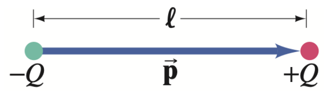
$$\vec{E} = \int d\vec{E} \tag{2}$$

Als we nu een **uniforme ladingsdichtheid** definiëren, dan kunnen we meeste berekeningen oplossen omtrent continue ladings verdelingen. We definiëren:

- **Volume-ladingsverdeling:** $\rho = \dfrac{dq}{dV}$
- **Oppervlakte-ladingsverdeling:** $\sigma = \dfrac{dq}{dA}$
- **Lineaire-ladingsverdeling:** $\lambda = \dfrac{dq}{dL}$

Definitie 10.4: Elektrische dipool en het dipoolmoment

Wanneer er 2 gelijke ladingen zijn met tegengesteld teken, dus: $+q\ en\ -q$, en ze gescheiden zijn door een lengte ℓ, dan kunnen we spreken over een **elektrisch dipool**.



Het elektrisch dipoolmoment $\vec{p}$ is een maat van polariteit van een binding en kan als volgt vectorieel weergegeven worden:

$$\vec{p} = q\vec{\ell}$$

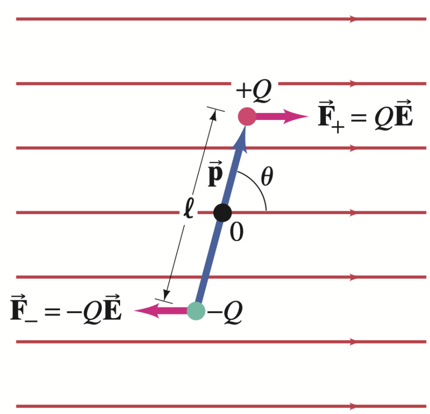
Toepassing 10.4: Dipool in een uniform veld

- **Totale kracht:**

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0$$

- **Krachtmoment rond middelpunt:**

$$\begin{aligned}\tau &= qE\frac{\ell}{2}\sin(\theta) - (-qE\frac{\ell}{2}\sin(\theta))\\ &= qE\frac{\ell}{2}\sin(\theta) + qE\frac{\ell}{2}\sin(\theta)\\ &= pE\sin(\theta)\\ \vec{\tau} &= \vec{p}\times\vec{E}\end{aligned}$$



- **Arbeid:**

$$\begin{aligned}W &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta\\ &= \text{-}pE\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin(\theta)d\theta \qquad (d\theta \text{ is negatief dus, - voor positieve } W)\\ &= pE(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))\\ &= -\Delta U\\ U &= -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (intertiaalstelsel : \theta_1 = \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

11 De wet van Gauss

Definitie 11.1: Elektrische flux

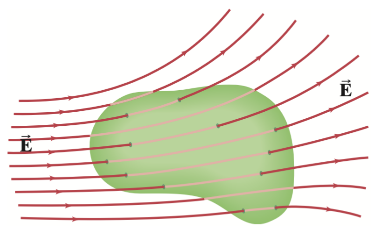
De elektrische flux doorheen een oppervlak is de oppervlakte-integraal van de elektrische veldsterkte over dat oppervlak. Laten we eerst kijken naar, zoals vaker, het makkelijker geval, namelijk wanneer we spreken over een uniform elektrisch veld:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

Als we spreken over een niet-uniform veld, dan spreken we eigenlijk over infinitesimale uniforme velden. De formule wordt dus:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

De nettoflux Φ_e is recht evenredig met netto aantal veldlijnen dat het oppervlakte verlaat.



Wet 11.1: Gauss

De wet van Gauss luidt: de nettoflux door een willekeurig **gesloten** oppervlak dat een lading q omsluit, is steeds gelijk aan $\frac{q_{in}}{\epsilon_0}$. In formulevorm:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Hieruit volgt dus dat de nettoflux door een willekeurig gesloten oppervlak dat geen lading omsluit, is steeds gelijk aan 0.

12 Elektrische potentiaal

Definitie 12.1: Elektrische potentiële energie

Om de wet van behoud van energie toe te mogen passen, moeten we nog **elektrische potentiële energie** definiëren.

$$\Delta U = -\int_a^b \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -q\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -W \qquad \text{(met } q \text{ een testlading)}$$

In overeenkomst met de wet van behoud van energie, wordt nu elektrische potentiele energie getransformeerd naar kinetische energie.

Definitie 12.2: Elektrische potentiaal en potentiaalverschil

Het **elektrische potentiaal** V is een **scalaire** grootheid die gedefinieerd wordt door het elektrische potentiële energie per lading. In formulevorm:

$$V = \frac{U}{q}$$

Het maakt niet per se uit hoeveel potentiële energie een systeem heeft op een bepaald moment, maar wel hoeveel er naar kinetische energie wordt omgezet. Dus: enkel verschillen in potentiële energie zijn zinvol of betekenisvol. In formulevorm:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W}{q}$$

Dit noemt men het **potentiaalverschil**. De eenheid van eletrische potentiaal, en dus potentiaalverschil, noemt men de volt: $V = \frac{J}{C}$.

Als we de formule van de elektrische potentiele energie in functie van het potentiaalverschil schrijven, dan krijgen we:

$$\Delta V = -\frac{1}{q}\int_a^b \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Dit toont een belangrijk verband aan tussen het elektrische potentiaal en elektrisch veld. Als het veld uniform is, dan hebben de elektrisch veld en de verplaatsing vectoren dezelfde richting en volgt:

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E\int_a^b dr = -Er$$

Definitie 12.3: Equipotentiaaloppervlakken

Equipotentiaaloppervlakken zijn oppervlakken die punten met een equivalent potentiaal verbinden en die loodrecht staan op de veldlijnen, want de potentiaal moet doorheen het oppervlak gelijk zijn.

Toepassing 12.1: Elektrische potentiaal tegenover puntladingen

We hebben eerder besproken dat enkel het potentiaalverschil zinvol is. We kunnen dus een punt pakken waar het potentiaal 0 is en hiermee kunnen we het potentiaal van een singuliere puntlading berekenen. We weten ook dat het elektrisch veld door een singuliere puntlading de volgende formule heeft:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Stel nu dat $V_b = 0$ en $r_b = \infty$ en we een recht pad volgen van $a \to b$:

$$V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E\int_a^b dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{q}{r_b} - \frac{q}{r_a}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_a}$$

Het elektrische potentiaal is een **scalar**, dus we kunnen meerdere potentialen gewoon optellen zonder rekening te moeten houden met richting.

$$V_{tot} = \sum_i V_i = k(\sum_i \frac{q_i}{r_i})$$

We kunnen het concept van meerdere puntladingen verbreden tot infinitesimale puntladingen als we spreken over een continue ladingsverdeling. Zoals vaker volgt nu de volgende formule:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

In principe geeft deze formule ook het volgende:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Opmerking: het elektrisch veld in bijvoorbeeld de x-richting is dus gelijk aan $E_x = -\frac{dV}{dx}$ Hieruit kunnen we de volgende formule afleiden:

$$\vec{E} = (-\nabla V)\hat{r} = -\frac{dV}{dx}\hat{i} - \frac{dV}{dy}\hat{j} - \frac{dV}{dz}\hat{k}$$

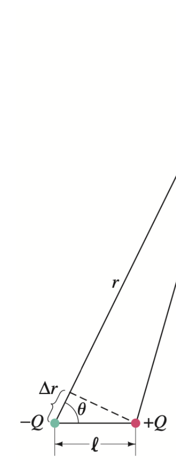
Toepassing 12.2: Elektrische potentiaal bij een dipool

Het elektrische potentiaal op een arbitrair punt P wordt gegeven door de volgende formule waarbij $V = 0$ *op* $r = \infty$:

$$V = k\frac{q}{r} + k\frac{(-q)}{r+\Delta r} = kq(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\Delta r}) = kq\frac{\Delta r}{r(r+\Delta r)}$$

Deze vergelijking wordt vele malen eenvoudiger als we een punt P pakken veel verder weg dan de scheiding tussen de twee ladingen. We zien op de tekening dat: $\Delta r \approx \ell\cos(\theta)$. Als we nu dus $r \gg \ell$ pakken, dan is dus $r \gg \Delta r$ en verandert onze formule:

$$V = k\frac{q\ell\cos(\theta)}{r^2} = k\frac{p\cos(\theta)}{r^2} \qquad (r \gg \ell)$$



Toepassing 12.3: Elektrische potentiaal bij een geladen geleider in evenwicht

- Binnen de geleider zonder caviteit:

  We weten dat het elektrisch veld in de geleider nul is als de geleider zich in een elektrostatisch evenwicht bevindt. We berekenen nu het potentiaalverschil:

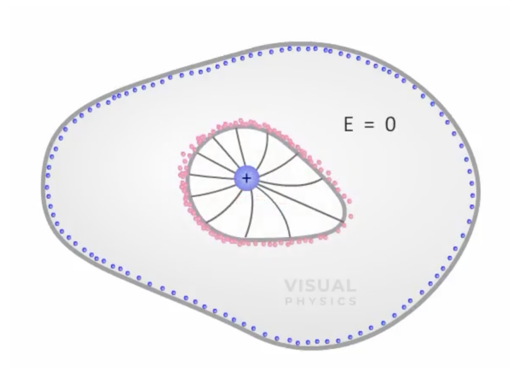
  $$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

  We kunnen nu bepaalde uitspraken doen over het potentiaalverschil bij een geleider in elektrostatisch evenwicht:

  - Het oppervlak van een geleider in elektrostatisch evenwicht heeft een constante potentiaal.
  - De potentiaal binnenin een geleider is constant, en gelijk aan de potentiaal aan het oppervlak. Er is dus **geen arbeid** vereist om een lading te bewegen binnenin een geleider

- Binnen de geleider met caviteit:

  Het veld in een caviteit (waarbinnen zich geen lading bevindt) omgeven door een geleider is nul. Als er wel een lading in zit, dan moet er aan de rand een gelijke tegengestelde lading zijn opdat er geen elektrisch veld buiten de caviteit zou zijn. Binnenin de caviteit is er natuurlijk dan wel een elektrisch veld. Wegens de wet van behoud van lading, moet er een gelijke positieve lading op het oppervlak van de geleider zijn!



- Buiten de geleider:

  We berekenen het potentiaal van op het oppervlak van een sferische geleider om tot bepaalde conclusies te kunnen komen:

  $$V = k\frac{q}{r} = k\frac{\sigma A}{r} = k\frac{\sigma 4\pi r^2}{r} = \frac{\sigma r}{\epsilon_0} = Er$$

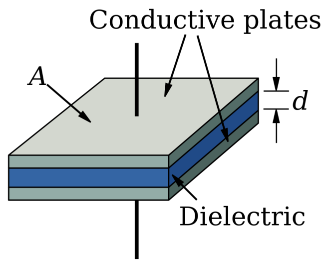
  Hieruit volgt dus dat het elektrisch veld groter is nabij convexe punten, vermits het recht evenredig is met de oppervlakteladingsdichtheid. In formulevorm:

  $$E \sim \sigma$$

13 Condensatoren en diëlektrica

Definitie 13.1: Condensatoren en capaciteit

Een **condensator** is een instrument dat elektrische lading kan opslaan. Het bestaat uit twee geleiders met in de ruimte ertussen **diëlektricum (isolator)**. De figuur hieronder toont een parallelle plaatcondensator:



De **capaciteit** (Farad) van een condensator is de **absolute waarde** van de verhouding tussen de elektrische lading (Q) op een van de geleiders en het potentiaalverschil tussen de twee geleiders.

$$C = |\frac{Q}{\Delta V}|$$

Toepassing 13.1: Parallelle plaatcondensator

Elke geleidende plaat heeft een oppervlakte A en ze zijn gescheiden door een afstand d. We nemen aan dat d klein is tegenover de afmetingen van de platen en dus dat het elektrisch veld $\vec{E}$ uniform is tussen de platen. Het elektrische veld, zoals we weten, tussen twee nabije, parallelle platen heeft grootte: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ en zijn richting is loodrecht op de platen. Sinds σ lading per oppervlakte is, bekomen we:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

We weten ook het verband tussen het elektrisch veld en het potentiaal, namelijk:

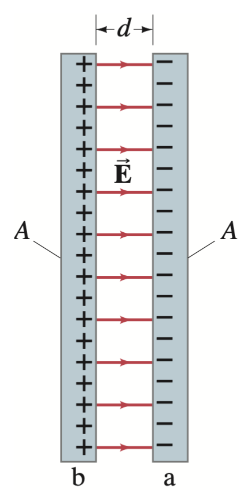
$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

We berekenen nu op een antiparallel pad:

$$\Delta V = -\int_a^b E d\ell \cos(\pi) = \int_a^b E d\ell = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \int_a^b d\ell = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

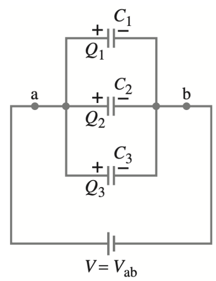
We kunnen nu de capaciteit hieruit bepalen:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$



Definitie 13.2: Parallellschakeling

Een **parallelschakeling** is een configuratie van condensatoren waarbij de stroom over de individuele condensatoren wordt verdeeld en de spanning op alle condensatoren gelijk is.

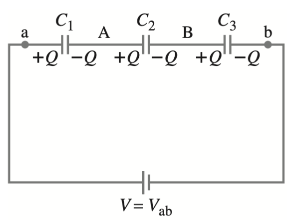


Eigenschap 13.1: Eigenschappen van een parallellschakeling

- $\Delta V = \Delta V_i$
- $Q = \sum_i Q_i$
- $C_{eq} = \sum_i C_i$

Definitie 13.3: Serieschakeling

Een **serieschakeling** is een configuratie van condensatoren waarbij de stroom door de individuele condensatoren gelijk is en de spanning over alle condensatoren wordt verdeeld.



Eigenschap 13.2: Eigenschappen van een serieschakeling

- $\Delta V = \sum_i \Delta V_i$
- $Q = Q_i$
- $\dfrac{1}{C_{eq}} = \sum_i \dfrac{1}{C_i}$

Definitie 13.4: Elektrische energie opslag

De opgeslagen energie in een condensator is gelijk aan de arbeid dat is verricht om hem op te laden.

Een condensator wordt niet onmiddellijk opgeladen. Daar is tijd voor nodig. Aanvankelijk, als de condensator ongeladen is, is er geen arbeid nodig om het eerste beetje lading over te brengen.

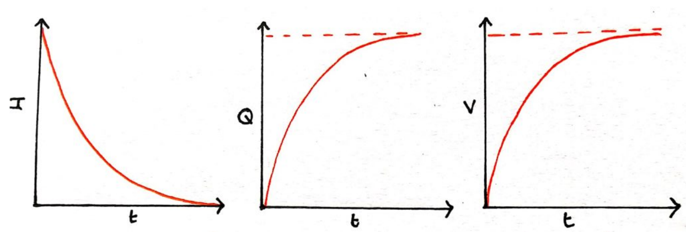
Hoe meer lading er al op een plaat zit, hoe meer arbeid er nodig is om extra lading toe te voegen. De arbeid die nodig is om een kleine hoeveelheid lading dq toe te voegen, wanneer een potentiaalverschil ΔV over de platen loopt, is $dW = \Delta V dq$. Aangezien $\Delta V = \frac{Q}{C}$ op elk moment, is de arbeid die nodig is om een totale lading Q op te slaan

$$W = \int_0^Q \Delta V dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Dus we kunnen zeggen dat de opgeslagen energie

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}Q\Delta V$$

is wanneer de condensator ladingen $+Q$ en $-Q$ bezit op zijn platen.



De **energiedichtheid** van een condensator wordt gegeven door de volgende formule:

$$U_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Definitie 13.5: Condensatoren met een diëlektricum

We kunnen in de plaats van vacuüm ook andere diëlectrica (isolator) tussen de platen steken. Er is vastgesteld dat als het diëlektricum de ruimte tussen de twee geleiders vult, de capaciteit toeneemt met een factor K, die bekend staat als de **diëlektrische constante**. Er geldt dus

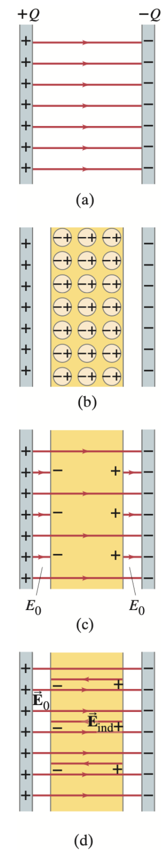
$$C = KC_0$$

waarbij C_0 de capaciteit is waarbij de ruimte in de condensator vacuüm is.

Bij parallelle platen wordt deze formule dan:

$$C = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d}$$

Toepassing 13.2: Moleculaire beschrijving van diëlektrica



Als we beginnen van een geïsoleerde situatie, zie figuur (a), dan kunnen we de capaciteit met de volgende formule beschrijven

$$C_0 = \frac{Q}{(\Delta V)_0}$$

waarbij het subscript 0 voor vacuüm dient. Als we nu een diëlektricum toevoegen aan de constructie, dan zal door het elektrische veld de molecules van het diëlektricum zoals op figuur (b). Het effect van deze ordening is dat er nu een netto postieve en negatieve lading is op de uiteinde van het diëelektricum, zie figuur (c). Sommige van de elekrische veldlijnen worden ook opgenomen door het diëlektricum, dus het elektrisch veld wordt verkleind. Het elektrisch veld in het diëlektricum E_D kan gezien worden als het veld door de vrije ladingen van de platen en het veld van de geïnduceerde ladingen, zie figuur (d). De vectoriële som is dan

$$\vec{E}_D = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$$

ofwel

$$E_D = E_0 - E_{ind} = \frac{E_0}{K}$$

Het geïnduceerd veld wordt dus berekend op de volgende manier:

$$E_{ind} = E_0(1 - \frac{1}{K})$$

Toepassing 13.3: Parallelle plaatcondensator met een diëlektricum

We hebben in de voorgaande hoofdstukken al de volgende formule besproken

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

waarbij σ de oppervlakte ladingsdichtheid is op de geleider. Deze lading Q wordt vaak de vrije lading genoemd. Als we nu het geïnduceerde veld bekijken, dan krijgen we:

$$E_{ind} = \frac{\sigma_{ind}}{\epsilon_0}$$

Hier is σ_{ind} de oppervlakte ladingsdichtheid op de isolator. De lading Q_{ind} wordt vaak de gebonden lading genoemd. Uit deze laatste twee formules kunen we de volgende nuttige resultaten bekomen:

$$\sigma_{ind} = \sigma(1 - \frac{1}{K}), \qquad Q_{ind} = Q(1 - \frac{1}{K})$$

14 Elektrische stroom en weerstand

Definitie 14.1: Elektrische stroom

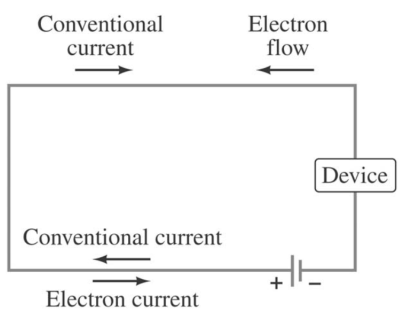
Elektrische stroom is het tempo waarmee er elektrische lading door een oppervlak stroomt. Het is dus eigenlijk een vorm van snelheid voor de lading. Voor een constant tempo bekomen we

$$I_{gem} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

en bij variërend tempo bekomen we

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

De stroomzin is in de omgekeerde richting van de elektronenstroom,



maar wordt gedragen door de elektronen in metalen draden op microscopisch niveau en in fluïdum door protonen of elektronen. De stroomzin is dus eerder een conventie.

Toepassing 14.1: Microscopisch model van elektrische stroom

We nemen aan dat we ons niet in het electrostatisch geval bevinden, namelijk dat

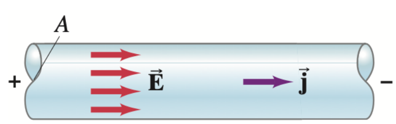
$$\vec{E} \neq 0$$

en dus de ladingen vrij zijn om te bewegen. We definiëren nu een nieuwe microscopische grootheid, de stroomdichtheid $\vec{J}$, die staat voor stroom per cross-sectioneel oppervlakteeenheid:

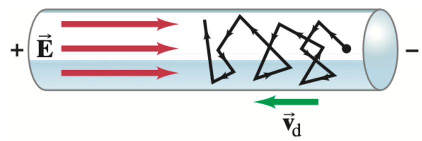
$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Voor het uniforme geval krijgen we dus:

$$J = \frac{I}{A}$$



De richting van $\vec{J}$ is gekozen volgens de stroomzin, maar in een geleider weten we dat de stroom gedragen wordt door de elektronen: ze bewegen dus eigenlijk in de met tegengestelde zin volgens $-\vec{J}$. De elektronen voelen initieel een kracht door de aanwezigheid van het elektrisch veld en beginnen te versnellen. Hun versnelling in de tegengestelde zin van het elektrisch veld wordt de **driftsnelheid** genoemd. Deze is ongeveer gelijk omdat de elektronen constant botsen met de atomen van de draad en dus niet rechtstreeks bewegen volgens de elektronenstroom.



Met deze nieuwe informatie kunen we de voorgaande formules herschrijven, namelijk

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n(-e)Av_d\Delta t}{\Delta t} = n(-e)Av_d$$

met v_d de driftsnelheid: $\sim 10^{-4}m/s$, $-e$ de lading van een elektron en n het aantal ladingen per volumeeenheid. De stroomdichtheid

$$\vec{J} = n(-e)\vec{v_d} = \frac{n(-e)^2\tau}{m_e}\vec{E}$$

met τ de gemiddelde tijd tussen 2 botsingen, heeft dus ook het minteken wat aanduid dat in werkelijkheid de stroomzin hier in de tegengestelde richting is van de driftsnelheid van de elektronen. De betekenis van weerstand op microscopisch niveau is het verlies van energie bij botsing tussen de elektronen en de atomen van de draad, want de vibraties zorgen voor de transformatie naar warmte.

Definitie 14.2: Weerstand en resistiviteit

De grootte van de stroom is niet enkel afhankelijk van het potentiaal, maar ook van de **weerstand**. Het wordt gegeven door de volgende formule bij Ohmse materialen (zie hierna):

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

De **resistiviteit** ρ van een draad

$$R = \rho\frac{l}{A}$$

is recht evenredig met de lengte l en omgekeerd met de doorsnede. Het is afhankelijk van het materiaal van de draad en de temperatuur van de draad. Bij metalen groeit de resistiviteit lineair met de temperatuur, in formulevorm:

$$\rho_T = \rho_0[1 + \alpha(T - T_o)]$$

De **geleidbaarheid** van een materiaal kan men beschrijven door de inverse van de resistiviteit, ofwel:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Wet 14.1: Ohm

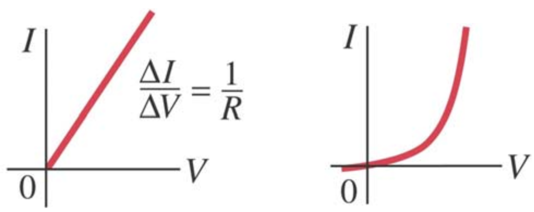
De stroom doorheen een draad is recht evenredig met het potentiaalverschil over de twee uiteinden, in formulevorm:

$$I \sim \Delta V$$

Ohm ontdekte ook dat bij metalen geleiders, zogenaamde 'Ohmse' materialen,

$$\Delta V = IR$$

een constante bleek te zijn. Hieronder vergelijken we Ohmse materialen en niet-Ohmse materialen:



Microscopisch zou dit betekenen dat de verhouding tussen de stroomdichtheid en het elektrische veld een constante, namelijk de **geleidbaarheid** van het materiaal, is, in formulevorm:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \rightarrow \sigma = \frac{n(-e)^2\tau}{m_e}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{n(-e)^2\tau}$$

Definitie 14.3: Elektrische Vermogen

We weten van voorgaande hoofdstukken dat vermogen een eenheid is voor arbeid per tijdseenheid: de mate waarin energie getransformeerd wordt. We vinden dus

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt}\Delta V$$

en als we dit combineren met de definitie van stroom, bekomen we:

$$P = I\Delta V$$

Deze formule kunnen we ook op andere manieren schrijven, namelijk:

$$P = I\Delta V = I(IR) = I^2R$$
$$P = I\Delta V = (\frac{\Delta V}{R})\Delta V = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

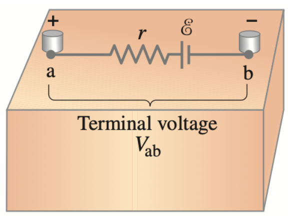
Als we spreken over **supergeleidende** materialen, dan zijn deze volledig weerstandloos en wordt er dus geen vermogen verloren aan warmte.

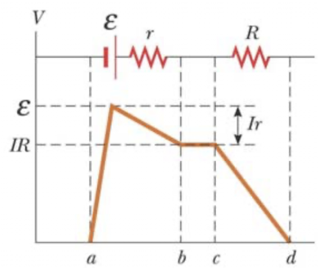
15 Gelijkstroomschakelingen

Definitie 15.1: Elektromotorische "kracht"

Om stroom te hebben in een circuit, hebben we een apparaat nodig dat elektrische energie kan uitgeven. Dit apparaat wordt een bron van **elektromotorische kracht** (emf) genoemd. Het potentiaalverschil tussen de terminalen, ofwel de klemspanning, van de bron, wanneer er geen stroom vloeit, noemt men het emf $\mathcal{E}$ van de bron. Als er nu een stroom vloeit, dan is er een interne verzwakking van de klemspanning met een mate Ir waarbij r de interne weerstand is. In formulevorm krijgen we:

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir$$





Eigenschap 15.1: Weerstanden bij gelijkstroomschakelingen

Parallel	Serie
$I = \sum_i I_i$	$I = I_i$
$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$	$R = \sum_i R_i$
$\Delta V = \Delta V_i$	$\Delta V = \sum_i \Delta V_i$

Definitie 15.2: Eerste regel van Kirchhoff

De som van de stromen die een vertakking binnenkomen, moet gelijk zijn aan de som van de stromen die de vertakking verlaten. In formulevorm:

$$\sum I_{in} = \sum I_{uit}$$

Definitie 15.3: Tweede regel van Kirchhoff

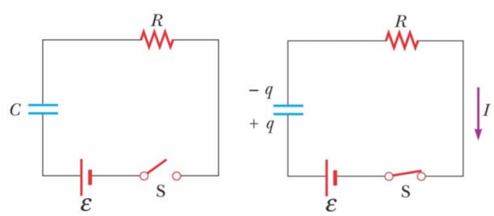
De som van de potentiaalverschillen over alle elementen in een gesloten kring, moet nul zijn. In formulevorm:

$$\sum_{\text{gesloten kring}} \Delta V = 0$$

Toepassing 15.1: RC-kringen

Als de schakelaar dicht is, dan laadt de condensator op tot het het potentiaalverschil heeft van de batterij. We kunnen hierop de tweede regel van Kirchoff toepassen, namelijk $\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0$:

$$t = 0 : \mathcal{E} - I_0 R = 0$$
$$t = \infty : \mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0$$



We weten dat stroom lading per tijdseenheid is dus we kunnen hieruit de volgende tijdsafhankelijke oplossingen halen:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

We kunnen nu een nieuwe constante bepalen, namelijk de **tijdsconstante** $\tau = RC$ die de tijd voorstelt nodig voor een condensator om tot 63% van zijn lading en voltage te bekomen: RC is een maateenheid voor de snelheid van het opladen van de condensator.

We kunnen ook wat praten over de energiebalans van de RC-kring:

- Hoeveel energie heeft de emf geleverd?

$$U_{\text{emf}} = \int_0^Q \mathcal{E} dq = Q\mathcal{E} = \mathcal{E}^2 C$$

- Hoeveel energie is er opgeslagen in de condensator?

$$U_C = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

- Hoeveel warmte is er gedisipeerd in de weerstand?

$$U_R = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

We zien dus dat de energie geleverd door de emf netjes is verdeeld over de weerstand en de condensator, namelijk:

$$U_{\text{emf}} = U_C + U_R$$

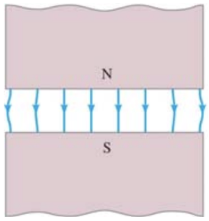
Magnetisme

16 Magnetisme

Definitie 16.1: Magnetische velden

Net zoals we rondom een elektrische lading een elektrisch veld hebben gedefinieerd, kunnen we rond een magneet een magnetisch veld $\vec{B}$ definiëren. Magnetische veldlijnen op tekeningen hebben dusdanig ook dezelfde eigenschappen als elektrische veldlijnen, namelijk

- de richting van het magnetische veld is tangentieel met de magnetische veldlijnen
- de hoeveelheid magnetische veldlijnen per oppervlakte duidt op het sterkte van het magnetische veld



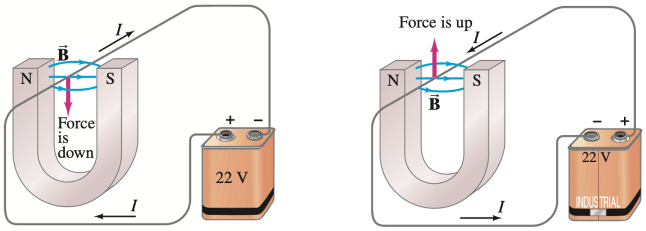
Elektrische stroom **produceert** een magnetisch veld. Een niet-magnetische, geleidende draad is dus magnetisch als we er stroom op zetten. Om de richting van het magnetisch veld te weten, kunnen we de **rechterhandregel** toepassen.

Definitie 16.2: Magnetische kracht

De relatie tussen de magnetische kracht $\vec{F}$ van een draad met stroom I en het magnetisch veld $\vec{B}$ kan geschreven worden als een vector product

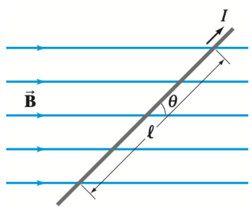
$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

waarbij $d\vec{F}$ een infinitesimale kracht op een infinitesimale lengte $d\vec{\ell}$ van de draad in het magnetische veld.



Als het veld homogeen is, dan zal elk infinitesimaal deeltje $d\vec{\ell}$ van de rechte draad dezelfde hoek maken met het magnetische veld $\vec{B}$. Hieruit volgt dan de formule:

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

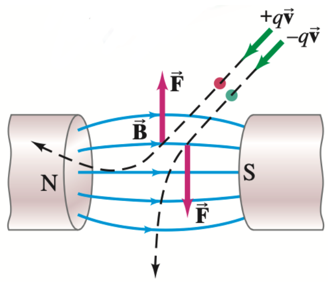


Definitie 16.3: Magnetische kracht op een bewegende lading

Elektrische stroom is een verzameling van N bewegende ladingen, we kunnen de definitie van magnetische kracht dus ook anders schrijven

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

sinds $I = \frac{Nq}{t}$ en $\vec{\ell} = \vec{v}t$. De bijlage hieronder toont de magnetische kracht op bewegende ladingen:



Vergelijking 16.1: Verschillen tussen elektrische en magnetische kracht

Elektrische kracht: $\vec{F} = q\vec{E}$	Magnetische kracht: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
in de **richting** van het elektrsich veld	**loodrecht** op het magnetische veld
werkt op een **lading**	werkt op een **bewegende lading**
levert **arbeid** bij de verplaatsing van de lading	levert **geen arbeid** bij de verplaatsing van de lading

Toepassing 16.1: Bewegende lading in een vlak loodrecht op magnetisch veld

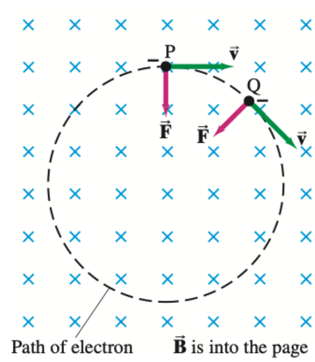
Het pad van een bewegende lading in een vlak loodrecht op het magnetisch veld is cirkelvormig. De kracht zal altijd loodrecht zijn op de snelheid, dus de lading zal cirkelvormig bewegen met centripetale versnelling:

$$a_R = \frac{v^2}{r}.$$

De periode heeft de volgende formule:

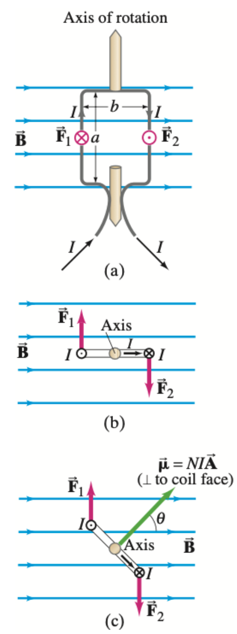
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{1}{f}$$

sinds $r = \frac{mv}{qB}$.



Definitie 16.4: Magnetisch dipool moment

Wanneer een lading stroomt door een gesloten kring in een extern magnetisch veld, dan kan de magnetische kracht torsie veroorzaken. Stroom vloeit door de rechthoekige kring (zie figuur a), waarvan we aannemen dat hij parrallel is met het veld $\vec{B}$. Het veld oefent noch een kracht, noch een krachtmoment uit op de horizontale delen; hier is $\sin(\theta) = 0$. Het veld oefent wel een kracht uit op de verticale delen (zie figuur b), we noemen deze krachten $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$. Deze krachten zorgen voor een krachtmoment:



$$\vec{\tau} = NI(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{B} = NI\vec{A} \times \vec{B}$$

waarbij $\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b}$ de oppervlakte van de spoel en $I = NI$ in een spoel met N kringen. Het **magnetisch dipool moment** $\vec{\mu}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$\vec{\mu} = NI\vec{A}$$

waarbij de ricthing van $\vec{A}$ loodrecht is op het vlak van de spoel. Hiermee kunnen we de krachtmoment formule herschrijven:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

De potentiële energie U kunnen we dan als volgt berekenen

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau d\theta = \mu B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta = -\mu B \cos(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

wat ook logisch is sinds we dit kunnen vergelijkigen met het elektrisch dipool moment.

Vergelijking 16.2: Verschillen tussen het magnetisch en elektrisch dipoolmoment

Magnetisch dipoolmoment in een magnetisch veld	Elektrisch dipolmoment in een elektrisch veld
$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$	$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$
$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$	$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Toepassing 16.2: Magnetisch moment van een atoom

Bij een atoom cirkelt een elektron rond de kern: er is dus een stroom. We vinden hiervoor:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}$$

We kunnen ook het **orbitaal magnetisch moment** berekenen, namelijk:

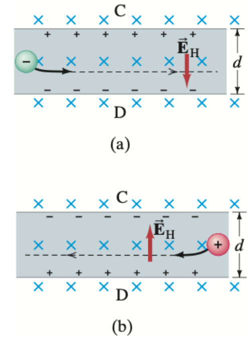
$$\vec{\mu} = I\vec{A} = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \hat{k} = -\frac{e}{2m_e}(-m_e r v \hat{k}) = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

Hierbij hebben we dus het magnetisch moment van een atoom uitgedrukt in termen van het impulsmoment.

Definitie 16.5: Hall-Effect

Wanneer een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld wordt vastgehouden, oefent het veld een zijwaartse kracht uit op de ladingen die in de geleider bewegen. De lading zal kaatsen en er zal een potentiaalverschil ontstaan. Dit potentiaalverschil zal stijgen totdat het gecreërde elektrisch veld $\vec{E}_H$ een kracht $e\vec{E}_H$ op de ladingen uitoefent dat gelijk en tegengesteld is aan de magnetische kracht, ofwel:

$$eE_H = ev_dB \Rightarrow E_H = v_dB$$



Dit noemen we het **Hall-effect**. Het potentiaalverschil wordt ook wel de **Hallsspanning** en wordt bij een uniform Hall veld in een lange, dunne geleider gegeven door

$$\mathcal{E}_H = E_H d = v_d B d = R_H \frac{IBd}{A}$$

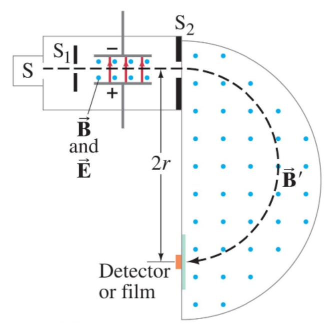
met $R_H = \frac{1}{ne}$ de **Hall-coëfficiënt**. Hieruit zien we ook dat er een snelheid nodig is om door de geleider te gaan zonder gebogen te worden, namelijk

$$v_d = \frac{E_H}{B} = R_H \frac{I}{A}$$

dit zal in volgende toepassing van groot belang zijn.

Toepassing 16.3: Massaspectrometer

De massaspectrometer is een toestel dat gebruikt wordt om de massas van atomen te meten. Ionen worden geproduceerd door warmte of door een stroom in de bron S. De partikels, met massa m en elektrische lading q, gaan door de gleuf S_1 en gaan door het gebied waar elektrisch veld en magnetisch veld elkaar kruisen. We weten dat het Halleffect nu op het partikel een effect zal hebben en dus weten we ook de snelheid die nodig is om door de gleuf S_2 te geraken. Dit is dus eigenlijk wat men noemt een **snelheidsfilter**. In het halfcirkelvormig gebied is er enkel een magnetisch veld B' en zal dus het magnetisch veld voor een cirkelvormige beweging veroorzaken voor het partikel. De straal r van dit cirkelvormig pad kunnen we vinden door te plaats te meten waar het partikel aankomt. Volgens de tweede wet van Newton krijgen we nu



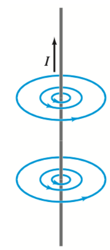
$$m = \frac{qB'r}{v} = \frac{qBB'r}{E}$$

en kunnen we m nu dus bepalen.

17 Bronnen van magnetische velden

Toepassing 17.1: Magnetisch veld ten gevolge van een rechte draad

Het magnetische veld ten gevolge van de elektrische stroom in een lange rechte draad is zodanig dat de veldlijnen cirkels zijn met de draad in het midden (zie figuur). De veld sterkte is groter hoe dichter je bij de draad bent en hoe groter de stroom, in formulevorm:



$$B \propto \frac{I}{r}$$

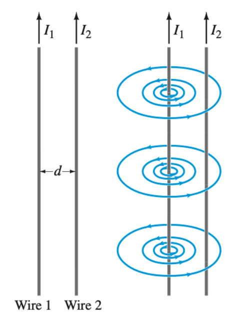
met r de loodrechte afstand van de draad. Deze relatie blijft waar als we aanemen dat de draad lang is. Het magnetisch veld nabij een lange, rechte draad is als volgt

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

met μ_0 de magnetische permeabiliteit in vacuum.

Toepassing 17.2: Magnetische kracht tussen twee parallelle draden

Neem twee lange evenwijdige draden gescheiden door een afstand d, zoals in de figuur. Ze voeren respectievelijk stromen I_1 en I_2. Elke stroom produceert een magnetisch veld dat door de ander wordt 'gevoeld', dus oefenen ze een kracht uit op mekander. We weten dat



$$F_{\|} = I\ell B$$

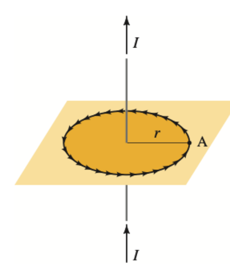
en dus krijgen we

$$F = I_2 B_1 \ell_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}\ell_2$$

waarbij we bovenstaande definitie toepassen. Hieruit kunnen we afleiden dat evenwijdige stroomvoerende geleiders elkaar

- aantrekken indien de stroom in dezelfde richting vloeit,
- afstoten indien de stroom in tegengestelde richting vloeit.

Wet 17.1: Ampère

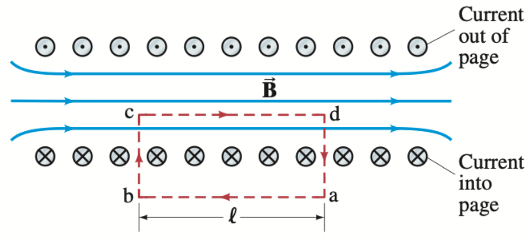


De lijnintegraal van het magneetveld langs een gesloten pad is gelijk aan $\mu_0 I_{\text{in}}$, waarbij I_{in} de totale stroom is, die vloeit door een oppervlak dat omsloten is door het pad, in formulevorm:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{in}}$$

Toepassing 17.3: Magnetisch veld van een spoel

Elke winding genereert een magnetisch veld. Nabij elke draad zijn de veldlijnen quasi cirkels, net zoals bij een rechte draad. In het centrum van de spoel is het netto magnetisch veld een redelijkgroot en redelijk uniform veld. Intuitiëf kunnen we redeneren: hoe compacter de spoel, hoe uniformer het veld. Bijgevolg nemen we aan dat de spoel compact is en dus dat het veld praktisch uniform is, zie de figuur hieronder.



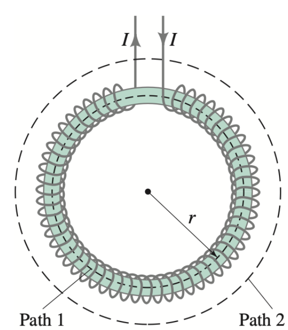
We kunnen de wet van Ampère toepassen op de zijden van de rechthoek

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\
&= B\ell \\
&= \mu_0 N I \\
B &= \mu_0 n I
\end{aligned}
$$

met $n = \frac{N}{\ell}$ het aantal windingen per lengte en waarbij de integralen op de paden $a \to b$, $b \to c$ en $d \to a$ nul zijn, want het veld is praktisch nul tussenin en buiten de spoel.

Toepassing 17.4: Magnetisch veld van een torus

We kunnen de wet van Ampère gebruiken om het magnetisch veld in de torus en buiten de torus te berekenen.



1. **Binnen de torus:** als we de wet van Ampère toepassen op pad 1 vinden we

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I_{\text{encl}} \\
B(2\pi r) &= \mu_0 N I
\end{aligned}
$$

   waarbij N de hoeveelheid windingen en I de stroom in deze windingen.

2. **Buiten de torus:** het pad buiten de torus bevat N windingen die stroom I in één richting bevat en N windingen die stroom I in de tegengestelde bevat. Hierdoor wordt de ingesloten stroom $I_{\text{encl}} = 0$ en volgt dus

$$B = 0$$

Wet 17.2: Biot-savart

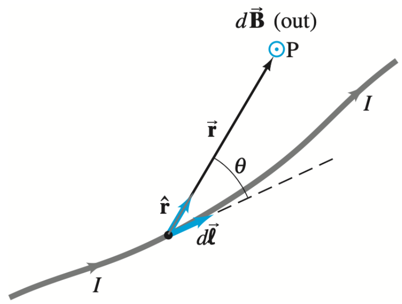
Een stroom die vloeit door een bepaald pad kan bekeken worden door vele, infinitesimale stroomelementen Als $d\vec{\ell}$ een infinitesimale lengte voorstelt waardoor stroom vloeit, dan is het magnetisch veld $d\vec{B}$, op eenderwelk punt P in de ruimte, door dit stroomelement gegeven door

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

waarbij $\vec{r}$ de afstandsvector is van het element $d\vec{\ell}$ tot het punt P. We zien dus nu dat wegens de definitie van het vectorproduct

- de veldsterkte minimaal is, als $\forall k \in \mathbb{N}^+ :\ \theta = 0° + k(180°)$
- de veldsterkte maximaal is, als $\forall k \in \mathbb{N}^+ : \theta = 90° + k(180°)$

De onderstaande figuur is een illustratie die tracht deze wet te verduidelijken:



Het totale magnetische veld in een punt P door de stroomdraad vinden we dan door de integraal te nemen over alle stroomelementen

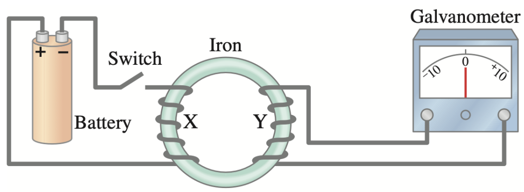
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Deze wet is vooral nuttig als we geen symmetrie kunnen gebruiken, en dus niet de wet van Ampère kunnen gebruiken.

18 Magnetische inductie

Definitie 18.1: Elektromagnetische inductie

Een spoel, X, was verbonden aan een batterij. De stroom die door X gaat produceert een magnetisch veld dat versterkt wordt door de ijzere kern. De tweede spoel Y werd verbonden aan een galvanometer. De hoop was nu om door magnetisme een stroom te verkrijgen in Y. De constructie is hieronder uitgebeeld

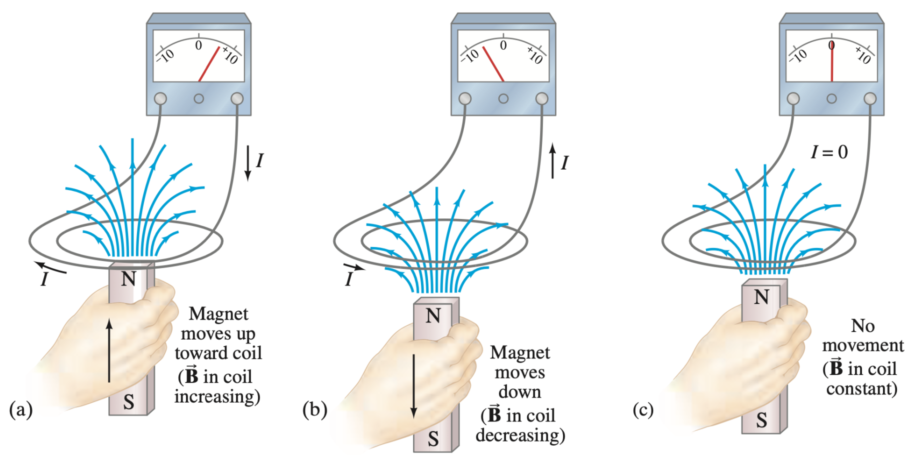


Als we nu de schakelaar open zouden doen, waardoor X niet meer verbonden zou zijn met de batterij en dus geen stroom meer zou bevatten, dan zou de galvanometer een **geïnduceerde stroom** weergeven. Dit gebeurt ook op het moment waarop we de schakelaar dicht doen, waarbij het magnetisch veld dus verandert. We concluderen: wanneer het magnetisch veld door Y verandert, komt er een stroom voor alsof Y verbonden zou zijn met een emf. Kortom, een veranderend magnetisch veld induceert een emf. Dit fenomeen wordt **elektromagnetische inductie** genoemd. Omgekeerd, we kunnen ook een magneet snel nabij een geleider brengen. Hierdoor zal er dus een stroom geïnduceerd worden in de geleider. De figuur hieronder beeld drie situaties uit, namelijk

(a) Magneet wordt snel bij een draad gebracht

(b) Magneet wordt snel bij een draad weggehaald

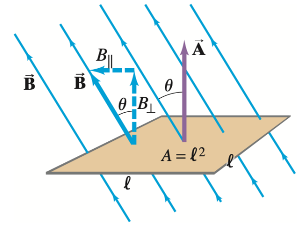
(c) Magneet wordt stilgehouden bij een draad



Definitie 18.2: Magnetische flux

Magnetische flux, net zoals elektrische flux, wordt gedefinieerd als de hoeveelheid magnetisch veld dat door een oppervlakte vloeit. Dit komt dan overeen met de formule

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



Wet 18.1: Faraday

De geïnduceerde emf in een gesloten circuit is gelijk aan minus de tijdsverandering van de magnetische flux doorheen de kring met N windingen, waardoor dezelfde magnetische flux gaat, in formulevorm:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Het minteken dient als herinnering voor de richting van de geïnduceerde spanning.

Wet 18.2: Lenz

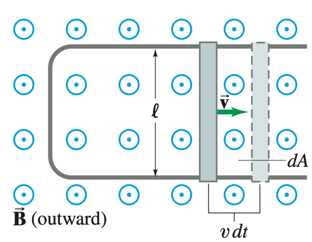
De stroom geproduceerd door een geïnduceerde emf beweegt in een richting zodat het magnetisch veld geproduceerd door die stroom de verandering in magnetische flux doorheen het oppervlak tegenwerkt. We spreken nu over twee distincte velden, namelijk

1. het veranderend magnetisch veld of flux die de stroom induceert
2. het magnetisch veld geproduceerd door de geïnduceerde stroom

waarbij het tweede veld het eerste tegenstelt. Als dit niet zo zou zijn, dan zou er een kettingreactie zijn van geïnduceerde emf's en stromen. Dit is in tegenspraak met de wet van behoud van energie.

Toepassing 18.1: Geïnduceerde emf in een bewegende geleider

We kunnen ook op een andere manier een emf induceren, namelijk met een bewegende geleider. Stel je een uniform magnetisch veld $\vec{B}$ loodrecht is met de oppervlakte van de U-vormige geleider en de bewegende staaf op de geleider ligt (en er dus een kring ontstaat). Als de rod beweegt met een snelheid v, dan legt het een afstand $dx = vdt$ af in een tijd dt. Dus vergroot de oppervlakte van de kring met $dA = \ell dx = \ell vdt$ in een tijd dt. Volgends de wet van Faraday is er nu een geïnduceerde emf



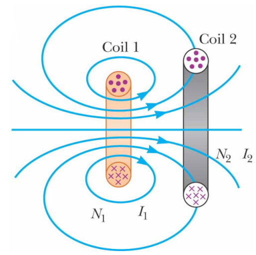
$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{BdA}{dt} = \frac{B\ell vdt}{dt} = B\ell v$$

waarbij we aannemen dat B, ℓ en v onderling loodrecht zijn. Als dit niet zo is, dan gebruiken we de loodrechte componenten.

19 Inductantie, elektromagnetische oscillaties en AC-kringen

Definitie 19.1: Wederzijdse inductie

Als twee spoelen nabij elkaar plaatst worden, zoals in de figuur, dan zal een veranderende stroom in de ene, een emf induceren in de andere. Dus: geïnduceerde emf in een spoel is enevredig met de snelheid van de stroomverandering in de andere. Dit noemt men **wederzijdse inductie** M, we noteren



$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

met M_{21} de wederzijdse inductiecoefficient en Φ_{21} de magnetische flux doorheen spoel 2 tegenover de stroom in spoel 1. We kunnen dit mengen met de wet van Faraday

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

waarbij nu de verandering in stroom in spoel 1 hebben verbonden aan de emf dat het induceert in spoel 2. In de algemene situatie is $M = M_{12} = M_{21}$.

Toepassing 19.1: Wederzijdse inductie van een solenoïde en een spoel

De solenoïde is compact, dus kunnen we aannemen dat alle magnetische flux in de solenoïde blijft en door de tweede spoel gaat. We weten dan wat de flux door deze spoel is, namelijk

$$\Phi_{21} = BA = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1 A$$

en de wederzijdse inductiecoëfficiënt is

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} A$$

waaruit blijkt dat deze alleen afhankelijk is van de geometrie van het systeem.

Definitie 19.2: Zelfinductie

De magnetische flux Φ_B door een spoel met N windingen (of eenderwelke kring) is evenredig met de stroom I die erdoor vloeit, dus we definiëren de **zelfinductie** L als

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

Dus de geïnduceerde emf $\mathcal{E}$ in een spoel met zelfinductie L is, volgens de wet van Faraday, gelijk aan

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Toepassing 19.2: Energie opgeslagen in een magnetisch veld

Wanneer een inductor met zelfinductie L een stroom I heeft, die verandert met een snelheid dI/dt, dan is de energie die gelever wordt aan de inductor gelijk aan

$$P = \mathcal{E}I = -LI\frac{dI}{dt}$$

De hoeveelheid arbeid dW geleverd aan de inductor in een tijd dt is gelijk aan

$$dW = Pdt = -LIdI$$

De energie die opgeslagen is in het magnetisch veld van de inductor is gelijk aan de energie die geleverd is aan de inductor

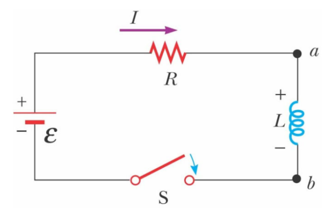
$$U = \int dW = \int Pdt = \int_0^I -LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

wat heel vergelijkbaar is aan de formule voor de energie opgeslagen in een condensator, namelijk: $U_C = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$. Net zoals de energie in een condensator zich bevindt in het elektrisch veld tussen de platen,bevindt de energie in een inductor zich in het magnetisch veld binnenin de spoel.

Vergelijking 19.1: Energiedichtheid

Energiedichtheid van een elektrisch veld van een spoel met zelfinductie L en stroom I	Energiedichtheid van een magnetisch veld van een condensator met capaciteit C en spanning V
$U_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$	$U_B = \frac{1}{2}\mu_0 B^2$

Toepassing 19.3: RL-kringen



We sluiten de schakelaar en we passen de tweede wet van Kirchhoff toe op de kring. We krijgen

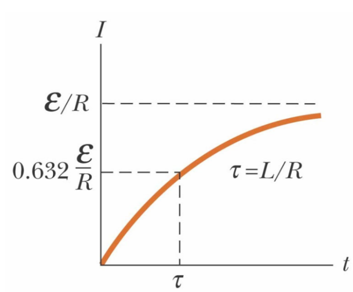
$$V_0 - IR - \mathcal{E} = V_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

We kunnen dit herwerken tot een differentiaalvergelijking

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

wat we oplossen tot

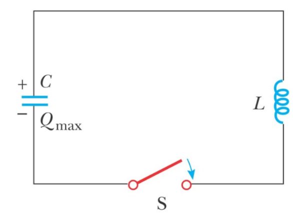
$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$



met $\tau = \frac{L}{R}$. We zien dat de stroom initieel snel stijgt en dan afvlakt geleidelijk nabij $\frac{\mathcal{E}}{R}$.

Toepassing 19.4: LC-kringen

We bekijken nu een kring met een inductor met inductantie L en een condensator met capaciteit C; dit is dus een ideale kring zonder weerstand. We gaan ervan uit dat er initieel lading is in de condensator en er dus een potentiaal verschil $\Delta V = \frac{Q}{C}$ op is. Stel dat we de schakelaar sluiten, dan zal de condensator beginnen te ontladen en zal de stroom door de inductor beginnen te stijgen. Hierop passen we de tweede wet van Kirchhoff toe



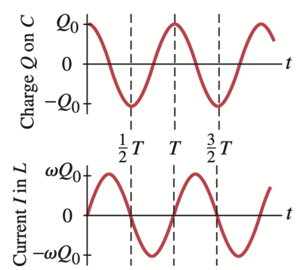
$$-L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

De lading op de positieve plaat, die voor de stroom zorgt, zal verminderen en dus ook de stroom. We hebben nu $I = -\frac{dQ}{dt}$ en we kunnen nu de bovenstaande vergelijking herwerken tot een differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

wat dezelfde vorm heeft als de vergelijking van de harmonische beweging. De oplossing is dus

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 \cos(\omega t) \\ &= Q_0 \cos(\tfrac{t}{\sqrt{LC}}) \end{aligned}$$



en voor de stroom

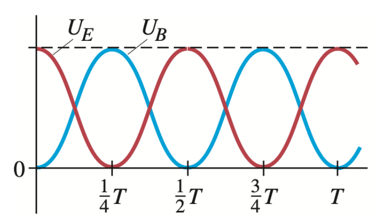
$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{dQ(t)}{dt} \\ &= \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin(\tfrac{t}{\sqrt{LC}}) \end{aligned}$$

We zien dat de lading en de stroom sinusvormige functies zijn van de tijd. De stroom is 90° uit fase met de lading en de frequentie van de oscillaties is

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

waaruit we $\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ kunnen afleiden. De energie in het elektrisch veld van de condensator is

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t)$$



en de energie in het magnetische veld van de inductor is

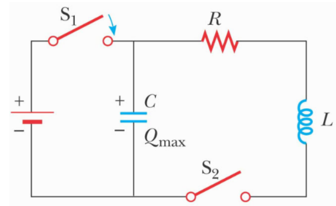
$$U_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{LQ_0^2}{2C}\sin^2(\omega t)$$

De totale energie in de kring is dus

$$\begin{aligned} U &= U_E + U_B \\ &= \frac{Q_0^2}{2C}\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} \end{aligned}$$

Toepassing 19.5: RLC-kringen

We bekijken een kring met twee schakelaars, een weerstand R, een condensator met capaciteit C en een inductor met inductantie L. We sluiten schakelaar 1 (zoals op de figuur) opdat er lading zou zijn op de condensator. Vervolgens openen we deze weer en sluiten we de tweede schakelaar. Er is nu een LC-oscillatie waarbij er energie verloren gaat aan de weerstand. We passen de tweede wet van Kirchhoff toe op de kring



$$LI\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -I^2R$$

wat we kunnen omvormen tot

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

wat hetzelfde is als de gedempte harmonische beweging. De oplossing is dus

$$Q(t) = Q_0 e^{\frac{-Rt}{2L}} \cos(\omega t)$$

met $\omega = \left[\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L}^2)\right]$. We zien dus duidelijk als R groot is, dat we kunnen spreken van **overdemping**.

Definitie 19.3: Wisselstroomkringen

Wisselstroomkringen zijn kringen waarbij de stroom varieert in de tijd. De stroom kan worden beschreven door

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

en het potentiaalverschil van de bron als

$$\Delta V = \Delta V_0 \sin(\omega t)$$

waarbij ΔV_0 de amplitude is van het potentiaalverschil. De stroom en het potentiaalverschil zijn in fase met elkaar.

Eigenschap 19.1: Weerstand in een wisselstroomkring

Stel je een circuit voor met een AC-bron en een weerstand R. De tweede wet van Kirchhoff geeft

$$\Delta V - \Delta V_R = 0$$

de spanningsgroottes zijn dus gelijk en volgt dus dat

$$\Delta V_R = \Delta V_0 \sin(\omega t) = I_0 R \sin(\omega t)$$

waarmee we de stroom door de weerstand kunnen bepalen in functie van de tijd

$$I = \frac{\Delta V_R}{R} = \frac{\Delta V_0}{R}\sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t)$$

Eigenschap 19.2: Zelfinductie in een wisselstroomkring

Stel je een circuit voor met een AC-bron en een inductor met zelfinductie L. De tweede wet van Kirchhoff geeft

$$\Delta V - \mathcal{E}_L = \Delta V_0 \sin(\omega t) - L\frac{dI}{dt} = 0$$

waaruit we een formule kunnen halen voor de stroom door de inductor

$$I(t) = \frac{\Delta V_0}{L}\int \sin(\omega t)dt = -\frac{\Delta V_0}{\omega L}\cos(\omega t)$$

wat we herleiden tot

$$I(t) = \frac{\Delta V_0}{\omega L}\sin(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) = I_0 \sin(\omega t - \tfrac{\pi}{2})$$

door gebruik te maken van de goniometrisch identiteiten

$$\cos(\theta - \tfrac{\pi}{2}) = \sin(\theta) \quad \text{en} \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

We zien dat er een faseverschil is tussen de stroom en het potentiaalverschil van 90°, waarbij de stroom achter loopt.

Eigenschap 19.3: Capaciteit in een wisselstroomkring

Stel je een circuit voor met een AC-bron en een condensator met capaciteit C. De tweede wet van Kirchhoff geeft

$$\Delta V - \Delta V_C = \Delta V_0 \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0$$

waaruit we een formule kunnen halen voor de lading op de condensator

$$Q(t) = C\Delta V_0 \sin(\omega t)$$

wat we herleiden tot een formule voor de stroom door de condensator

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega C \Delta V_0 \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$$

wat we herleiden tot

$$I(t) = \omega C \Delta V_0 \sin(\omega t + \tfrac{\pi}{2}) = I_0 \sin(\omega t + \tfrac{\pi}{2})$$

door gebruik te maken van de goniometrische identiteiten

$$\cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(-\theta) \quad \text{en} \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

We zien dat er een faseverschil is tussen de stroom en het potentiaalverschil van 90°, waarbij de stroom voor loopt.

Definitie 19.4: Inductieve en capacitieve reactantie

- De **inductieve reactantie** X_L van een spoel met zelfinductie L is gedefinieerd als

  $$X_L = \omega L$$

  waarbij ω de hoekfrequentie is van de wisselstroom. We zien

  - $\omega \to 0 : X_L \to 0 \quad$ (kortsluiting)
  - $\omega \to \infty : X_L \to \infty \quad$ (open circuit)

  We kunnen nu ook de formule herwerken tot

  $$\Delta V_L = -I_0 X_L \sin(\omega t)$$

- De **capacitieve reactantie** X_C van een condensator met capaciteit C is gedefinieerd als

  $$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

  waarbij ω de hoekfrequentie is van de wisselstroom. We zien

  - $\omega \to 0 : X_C \to \infty \quad$ (open circuit)
  - $\omega \to \infty : X_C \to 0 \quad$ (kortsluiting)

  We kunnen nu ook de formule herwerken tot

  $$\Delta V_C = I_0 X_C \sin(\omega t)$$

Opmerking: Reactantie is een maat van weerstand tegen de ladingstroom, de reactantie van een weerstand X_R is gewoon de weerstand R zelf.

Samenvatting 19.1: Toepassingen in wisselstroomkringen

	ΔV	I	$\frac{\Delta V_0}{I_0}$
R	$\Delta V_0 \sin(\omega t)$	$I_0 \sin(\omega t)$	$X_R = R$
L	$\Delta V_0 \sin(\omega t)$	$I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$X_L = \omega L$
C	$\Delta V_0 \sin(\omega t)$	$I_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$