# Numerieke Benadering

Pieter Vanderschueren

Academiejaar 2024-2025

# Inhoudsopgave

# Lineaire Benaderingsproblemen

# 1 Benadering van vectoren

**Definitie 1.1: Orthogonale en orthonormale basissen**

We spreken van een orthogonale, respectievelijk orthonormale basis als de basisvectoren $\{a_1, \ldots, a_n\}$ orthogonaal, respectievelijk orthonormaal zijn. Als een basis niet orthogonaal is, spreken we van een scheve basis.

**Definitie 1.2: Grammatrix**

Voor een basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ van deelruimte $\mathcal{D}$ en twee vectoren $v, w \in \mathcal{D}$ ontbonden als

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \;\; w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$$

geldt dat het inwendig product ($\langle v, w \rangle = v^* w$) van $v$ en $w$ gelijk is aan

$$\langle v, w \rangle = \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^* \right) \left( \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

waarbij deze G de zogenaamde grammatrix is horende bij de basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

**Eigenschap 1.1: Grammatrix**

- Is de basis orthogonaal, dan is de grammatrix diagonaal.
- Is de basis orthonormaal, dan is de grammatrix de eenheidsmatrix.

**Definitie 1.3: Projector**

Een projector is een matrix $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die idempotent is, dit is $P^2 = P$. De meetkundige betekenis is als volgt. Matrix $P$ projecteert een vector op de ruimte $\mathcal{R}(P)$, waarbij de richting bepaald wordt door de nullspace $\mathcal{N}(P)$.

**Toepassing 1.1: Projector**

Stel $v \in \mathbb{C}^m$ een willekeurige vector en $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ een projector, dan is $Pv \in \mathcal{R}(P)$ olgens de definitie van het bereik, en is $(I - P)v \in \mathcal{N}(P)$, omdat

$$P(I - P)v = (P - P^2)v \overset{\text{idempotent}}{=} (P - P)v = 0$$

We kunnen dus $v$ ontbinden in componenten volgens $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ als

$$v = Pv + (I - P)v$$

Deze ontbinding is uniek.

**Eigenschap 1.2: Projector**

- Als $v \in \mathcal{R}(P)$, dan is $Pv = v$.
- Er geldt dat $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$.
- Er geldt dat $\dim(\mathcal{R}(P)) + \dim(\mathcal{N}(P)) = m$.
- De ontbinding in componenten volgens $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ is uniek.

**Bewijs 1.1: Projector**

- Als $v \in \mathcal{R}(P)$, dan $\exists u : v = Pu$, en dus is $Pv = P^2u = Pu = v$.
- Stel $x \in \mathcal{R}(P)$ en $x \in \mathcal{N}(P)$. Er volgt dat $x = Px = 0$.
- Dit volgt uit de eerste dimensiestelling en vorige eigenschap.
- Stel $v = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, met $x_1, x_2 \in \mathcal{R}(P)$ en $y_1, y_2 \in \mathcal{N}(P)$. Er geldt voor $i \in 1, 2$ dat $Pv = Px_i + Py_i = x_i$. Hieruit volgt dat $x_1 = x_2$.

$\square$

**Definitie 1.4: Complementaire projector**

Stel $P$ een projector, dan is $\tilde{P} = I - P$ ook een projector. Hierbij geldt:

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{N}(\tilde{P}) \quad \text{en} \quad \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P) = \mathcal{R}(\tilde{P}).$$

De ontbinding kan geschreven worden als

$$v = \underbrace{(I - \tilde{P})v}_{\in \mathcal{R}(P)} + \underbrace{\tilde{P}v}_{\in \mathcal{N}(P)}$$

Matrix $\tilde{P}$ projecteert dus op $\mathcal{N}(P)$ waarbij de richting bepaald wordt door $\mathcal{R}(P)$. Dit is de **complementaire projector** van $P$.

**Definitie 1.5: Orthogonale projector**

Een projector $P$ is orthogonaal indien $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ onderling orthogonale ruimte zijn. Een prokector die niet orthogonaal is, noemen we een scheve projector.

**Eigenschap 1.3: Orthogonale projector**

Een projector $P$ is orthogonaal als en alleen als $P = P^*$.

**Bewijs 1.2: Orthogonale projector**

"$\Rightarrow$": Beschouw een orthonormale basis $\{q_1, \ldots, q_n\}$ van $\mathcal{R}(P)$ en een orthonormale basis $\{q_{n+1}, \ldots, q_m\}$ van $\mathcal{N}(P)$. Omdat volgens de definitie beide ruimten orthogonaal zijn, volgt dat

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n & q_{n+1} & \cdots & q_m \end{bmatrix}$$

een unitaire matrix is. We verkrijgen:

$$PQ = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^*PQ = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vermits $Q^*PQ$ dus reëel is, geldt:

$$Q^*PQ = (Q^*PQ)^* = Q^*P^*Q$$

waaruit het gestelde volgt.

"$\Leftarrow$": Neem willekeurige $x = Pu \in \mathcal{R}(P)$ en $y \in \mathcal{N}(P)$. Dan is:

$$\langle x, y \rangle = x^*y = (Pu)^*y = u^*P^*vy = u^*Py = 0.$$

De ruimten $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ zijn dus orthogonaal. □

## 2 Benadering van functies

## 3 Benadering door middel van veeltermen

## 4 Discrete benadering op basis van meetdata

## 5 Regularisatietechnieken

**Data, Grafen en Eigenwaarden**

## 6 Grafen en eigenwaarden in datawetenschappen

# 7 Eigenwaardenalgoritmes

# Niet-lineaire Benaderingsproblemen

## 8 Niet-lineaire benaderingsproblemen

## 9 Optimalisatie-algoritmes

# 10 Ijle representatie en benaderingen