# Numerieke Benadering

Pieter Vanderschueren

Academiejaar 2024-2025

# Inhoudsopgave

**Lineaire Benaderingsproblemen**

# 1 Benadering van vectoren

## 1.1 Terminologie

**Definitie 1.1: Orthogonale en orthonormale basissen**

We spreken van een orthogonale, respectievelijk orthonormale basis als de basisvectoren $\{a_1, \ldots, a_n\}$ orthogonaal, respectievelijk orthonormaal zijn. Als een basis niet orthogonaal is, spreken we van een scheve basis.

**Definitie 1.2: Grammatrix**

Voor een basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ van deelruimte $\mathcal{D}$ en twee vectoren $v, w \in \mathcal{D}$ ontbonden als

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \;\; w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$$

geldt dat het inwendig product ($\langle v, w\rangle = v^* w$) van $v$ en $w$ gelijk is aan

$$\langle v, w\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right) = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}\langle a_1, a_1\rangle & \cdots & \langle a_1, a_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, a_1\rangle & \cdots & \langle a_n, a_n\rangle\end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n\end{bmatrix}$$

waarbij deze G de zogenaamde grammatrix is horende bij de basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

**Eigenschap 1.1: Grammatrix**

- Is de basis orthogonaal, dan is de grammatrix diagonaal.
- Is de basis orthonormaal, dan is de grammatrix de eenheidsmatrix.

**Definitie 1.3: Projector**

Een projector is een matrix $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ die idempotent is, dit is $P^2 = P$. De meetkundige betekenis is als volgt. Matrix $P$ projecteert een vector op de ruimte $\mathcal{R}(P)$, waarbij de richting bepaald wordt door de nullspace $\mathcal{N}(P)$.

**Toepassing 1.1: Projector**

Stel $v \in \mathbb{C}^m$ een willekeurige vector en $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ een projector, dan is $Pv \in \mathcal{R}(P)$ olgens de definitie van het bereik, en is $(I-P)v \in \mathcal{N}(P)$, omdat

$$P(I-P)v = (P-P^2)v \overset{\text{idempotent}}{=} (P-P)v = 0$$

We kunnen dus $v$ ontbinden in componenten volgens $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ als

$$v = Pv + (I-P)v$$

Deze ontbinding is uniek.

**Eigenschap 1.2: Projector**

- Als $v \in \mathcal{R}(P)$, dan is $Pv = v$.
- Er geldt dat $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$.
- Er geldt dat $\dim(\mathcal{R}(P)) + \dim(\mathcal{N}(P)) = m$.
- De ontbinding in componenten volgens $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ is uniek.

**Bewijs 1.1: Projector**

- Als $v \in \mathcal{R}(P)$, dan $\exists u : v = Pu$, en dus is $Pv = P^2u = Pu = v$.
- Stel $x \in \mathcal{R}(P)$ en $x \in \mathcal{N}(P)$. Er volgt dat $x = Px = 0$.
- Dit volgt uit de eerste dimensiestelling en vorige eigenschap.
- Stel $v = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, met $x_1, x_2 \in \mathcal{R}(P)$ en $y_1, y_2 \in \mathcal{N}(P)$. Er geldt voor $i \in 1, 2$ dat $Pv = Px_i + Py_i = x_i$. Hieruit volgt dat $x_1 = x_2$.

$\square$

**Definitie 1.4: Complementaire projector**

Stel $P$ een projector, dan is $\tilde{P} = I - P$ de **complementaire projector** van $P$. Hierbij geldt:

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I-P) = \mathcal{N}(\tilde{P}) \quad \text{en} \quad \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I-P) = \mathcal{R}(\tilde{P}).$$

De ontbinding kan geschreven worden als

$$v = \underbrace{(I-\tilde{P})v}_{\in\mathcal{R}(P)} + \underbrace{\tilde{P}v}_{\in\mathcal{N}(P)}$$

Matrix $\tilde{P}$ projecteert dus op $\mathcal{N}(P)$ waarbij de richting bepaald wordt door $\mathcal{R}(P)$.

**Definitie 1.5: Orthogonale projector**

Een projector $P$ is orthogonaal indien $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ onderling orthogonale ruimte zijn. Een prokector die niet orthogonaal is, noemen we een scheve projector.

**Eigenschap 1.3: Orthogonale projector**

Een projector $P$ is orthogonaal als en alleen als $P = P^*$.

**Bewijs 1.2: Orthogonale projector**

"$\Rightarrow$": Beschouw een orthonormale basis $\{q_1, \ldots, q_n\}$ van $\mathcal{R}(P)$ en een orthonormale basis $\{q_{n+1}, \ldots, q_m\}$ van $\mathcal{N}(P)$. Omdat volgens de definitie beide ruimten orthogonaal zijn, volgt dat

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n & q_{n+1} & \cdots & q_m \end{bmatrix}$$

een unitaire matrix is. We verkrijgen:

$$PQ = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^*PQ = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vermits $Q^*PQ$ dus reëel is, geldt:

$$Q^*PQ = (Q^*PQ)^* = Q^*P^*Q$$

waaruit het gestelde volgt.

"$\Leftarrow$": Neem willekeurige $x = Pu \in \mathcal{R}(P)$ en $y \in \mathcal{N}(P)$. Dan is:

$$\langle x, y \rangle = x^*y = (Pu)^*y = u^*P^*vy = u^*Py = 0.$$

De ruimten $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ zijn dus orthogonaal. $\square$

## 1.2 QR-factorisatie

**Algoritme 1.1: Gram-Schmidt orthogonalisatie**

**for** $j = 1$ to $n$ **do**
    $v_j = a_j$
    **for** $i = 1$ to $j-1$ **do**
        $r_{ij} = q_i^* a_j$
        $v_j = v_j - r_{ij} q_i \quad (= a_j - P_{<q_1,\ldots,q_{j-1}>} a_j)$
    **end for**
    $r_{jj} = \|v_j\|_2$
    $q_j = v_j / r_{jj}$
**end for**

**Algoritme 1.2: Gewijzigde Gram-Schmidt orthogonalisatie**

**for** $j = 1$ to $n$ **do**
    $v_j = a_j$
    **for** $i = 1$ to $j-1$ **do**
        $r_{ij} = q_i^* \boldsymbol{v_j} \quad (a_j \ \rightarrow \ v_j)$
        $v_j = v_j - r_{ij} q_i \quad (= (\mathbb{I} - P_{<q_{j-1}>}) \ldots (\mathbb{I} - P_{<q_2>})(\mathbb{I} - P_{<q_1>}) a_j)$
    **end for**
    $r_{jj} = \|v_j\|_2$
    $q_j = v_j / r_{jj}$
**end for**

**Toepassing 1.2: Herorthogonalisatie van Gram-Schmidt**

De Gram-Schmidt orthogonalisatie is numeriek instabiel. Dit kan verholpen worden door herorthogonalisatie, hieronder twee varianten waarvan de eerste de meest gebruikte is.

1. **Stapsgewijze variant**:

$v_j = a_j$
**for** $j = 1$ to $j-1$ **do**
    $r_{ij} = q_i^* v_j$
    $v_j = v_j - r_{ij} q_i$
**end for**

$w_j = v_j$
**for** $i = 1$ to $j-1$ **do**
    $s_{ij} = q_i^* w_j$
    $v_j = v_j - s_{ij} q_i$
    $r_{ij} = r_{ij} + s_{ij}$
**end for**

2. **Simultane variant**: Na het berekenen van de onvolledige QR-factorisatie, die resulteert in factoren $\hat{Q}_1$ en $\hat{R}_1$ wordt het algoritme opnieuw toegepast met als input de eerste factor, wat resulteert in $\hat{Q}_1 \approx \hat{Q}_2\hat{R}_2$. We bepalen dan $\hat{Q} = \hat{Q}_2$ en $\hat{R} = \hat{R}_2\hat{R}_1$. Bij het gewijzigde algoritme van Gram-Schmidt (Algoritme 1.2) is dit meestal voldoende om orthogonaliteit van de kolommen van $\hat{Q}$ te garanderen, bij het standaard algoritme (Algoritme 1.1) is soms meermaals herhalen van deze procedure noodzakelijk.

**Algoritme 1.3: QR-facrotisatie met Givens-rotaties**

$Q = I$, $R = A$<br>
**for** $j = 1$ to $n$ **do**<br>
    **for** $i = m$ downto $j+1$ **do**<br>
        $c = \frac{r_{(i-1)j}}{\sqrt{r_{(i-1)j}^2 + r_{ij}^2}}$, $s = \frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{(i-1)j}^2 + r_{ij}^2}}$<br>
        $r_{ij} = 0, \;\; r_{(i-1)j} = \sqrt{r_{(i-1)j}^2 + r_{ij}^2}$<br>
        **for** $k = j+1$ to $n$ **do**<br>
            $\begin{bmatrix} r_{(i-1)k} \\ r_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{c} & \overline{s} \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{(i-1)k} \\ r_{ik} \end{bmatrix}$<br>
        **end for**<br>
        **for** $k = 1$ to $m$ **do**<br>
            $\begin{bmatrix} q_{k(i-1)} & q_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{k(i-1)} & q_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c} & \overline{s} \\ -s & c \end{bmatrix}$<br>
        **end for**<br>
    **end for**<br>
**end for**

**Algoritme 1.4: QR-facrotisatie met Householder-rotaties**

$R = A$<br>
**for** $j = 1$ to $n$ **do**<br>
    $x = R(j:m, j)$<br>
    $v_j = x + \text{sign}(x_1)\|x\|_2 \boldsymbol{e}_1$<br>
    $v_j = v_j / \|v_j\|_2$<br>
    $R_{jj} = -\text{sign}(x_1)\|x\|_2, \;\; R(j+1:m, j) = 0$<br>
    **for** $k = j+1$ to $n$ **do**<br>
        $R(j:m,k) = R(j:m,k) - 2(v_j^* R(j:m,k))v_j$<br>
    **end for**<br>
**end for**<br>
**for** $j = 1$ to $m$ **do**<br>
    $w = \boldsymbol{e}_i$<br>
    **for** $k = n$ downto $1$ **do**<br>
        $w_{k:m} = w_{k:m} - 2(v_k^* w_{k:m})v_k$<br>
    **end for**<br>
    $Q(:, i) = w$<br>
**end for**

### 1.3 Beste benadering van een vector in een deelruimte

**Stelling 1.1: Beste benaderingsstelling**

Een vector $\hat{y}$ is een beste benadering in deelruimte $\mathcal{D}$ voor $b$ als $b - \hat{y}$ orthogonaal is ten opzichte van $\mathcal{D}$.

**Bewijs 1.3: Beste benaderingsstelling**

Neem een willekeurige $y \in \mathcal{D}$. Vermits $y - \hat{y} \in \mathcal{D}$ en dus orthogonal is ten opzichte van $b - \hat{y}$ geldt, volgens de stelling van Pythagoras:

$$\|b - y\|_2^2 = \|b - \hat{y}\|_2^2 + \|\hat{y} - y\|_2^2 \geq \|b - \hat{y}\|_2^2,$$

m.a.w. $y$ benadert $b$ niet beter dan $\hat{y}$. □

**Stelling 1.2: Orthogonale projectiestelling**

De beste benadering in deelruimte $\mathcal{D}$ voor vector $b$ bestaat en is uniek. Ze wordt gegeven door de orthogonale projectie van $b$ op $\mathcal{D}$, namelijk:

$$\hat{y} = P_{\mathcal{D}} y$$

met $P_{\mathcal{D}}$ de orthogonale projector op $\mathcal{D}$.

**Bewijs 1.4: Orthogonale projectiestelling**

Per definitie van een projector, kan $b$ ontbonden worden als

$$b = \underbrace{P_{\mathcal{D}} b}_{\in \mathcal{R}(P_{\mathcal{D}})} + \underbrace{(I - P_{\mathcal{D}}) b}_{\in \mathcal{N}(P_{\mathcal{D}})}$$

waaruit volgt dat $b - \hat{y} = b - P_{\mathcal{D}} b \in \mathcal{N}(P_{\mathcal{D}}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{D}^\perp})$. Volgens de beste benaderingsstelling (Stelling 1.1) is $\hat{y}$ een beste benadering. De uniciteit volgt uit het voorgaande bewijs (Bewijs 1.3). □

**Stelling 1.3: Normaalstelsel**

Een vector $\hat{x}$ is een oplossing van het kleinste-kwadratenprobleem, namelijk

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\|_2,$$

als en alleen als $x = \hat{x}$ voldoet aan het zogenaamde normaalstelsel:

$$A^* A x = A^* b.$$

**Bewijs 1.5: Normaalstelsel**

"$\Rightarrow$": Veronderstel dat $A\hat{x} = \hat{y}$, met $\hat{y}$ gegeven door $\hat{y} = P_{\mathcal{D}}y$. We weten dat $(b - A\hat{x}) \perp \mathcal{D} =< a_1, \dots, a_n >$ waaruit volgt

$$\forall i \in [1, n] : \ \langle a_i, (b - A\hat{x}) \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ a_i^*(b - A\hat{x}) = 0$$

wat equivalent is aan het gestelde in matrixvorm.

"$\Leftarrow$": De gelijkheid kan geschreven worden als $A^*(A\hat{x} - b)$, wat impliceert $(A\hat{x} - b) \perp \mathcal{D}$ en dus is $\hat{x}$ de beste benadering.

□

# 2 Benadering van functies

## 2.1 Metrische ruimte

**Definitie 2.1: Afstand**

Men zegt dat over een verzameling $A$ een afstand gedefinieerd is als er met elk paar elementen $x, y \in A$ een reëel getal $\rho(x, y)$ overeenstemt dat voldoet aan de volgende eigenschappen:

- Positief definitief: $\rho(x, y) \geq 0$ en $\rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
- Symmetrisch: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- Driehoeksongelijkheid: $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$

Een afstandsfunctie is bijgevolg een functionaal van de productverzameling $A \times A$ naar de verazmeling $\mathbb{R}$ van de reële getallen.

**Definitie 2.2: Metrische ruimte**

De verzameling $A$ met een afstandsfunctie $\rho$ noemt men een **metrische ruimte** $(A, \rho)$. De afstandsfunctie noemt men ook wel de **metriek** van de ruimte. De afstand tot een deelverzameling $D$ van een metrische ruimte wordt gedefinieerd als:

$$\rho(x, D) = \inf \{\rho(x, y) \mid y \in D\}$$

**Definitie 2.3: Beste benadering**

Zij $D$ een deelverzameling van een metrische ruimte $(A, \rho)$. Een element $d \in D$ noemt men een beste benadering van een gegeven element $x \in A$, als er geen enkel ander element van $D$ dichter bij $x$ gelegen is dan $d$.

### 2.2 Vectorruimte

**Definitie 2.4: Vectorruimte**

Een vectorruimte $V$ over het veld $\mathbb{F}$ is een verzameling van elementen waarop twee bewerkingen zijn gedefinieerd: optelling en een scalaire vermenigvuldiging met een element uit $\mathbb{F}$. Deze bewerkingen moeten voldoen aan volgende voorwaarden:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \ \vec{u} + \vec{v} \in V$
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. Er bestaat een element $\vec{0} \in V$ zodat $\forall \vec{u} \in V: \ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. Voor elke $\vec{v} \in V$ bestaat er element $-\vec{v} \in V$ zodat $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
6. $\forall \vec{v} \in V, \ \forall f \in \mathbb{F}: \ f\vec{v} \in V$
7. $\forall \vec{v} \in V, \ \forall f, g \in \mathbb{F}: \ f(g\vec{v}) = (fg)\vec{v}$
8. Als 1 het eenheidselement is van $\mathbb{F}$, dan geldt $\forall \vec{v} \in V: \ 1\vec{v} = \vec{v}$
9. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \ \forall f \in \mathbb{F}: \ f(\vec{u} + \vec{v}) = f\vec{u} + f\vec{v}$
10. $\forall \vec{v} \in V, \ \forall f, g \in \mathbb{F}: \ (f + g)\vec{v} = f\vec{v} + g\vec{v}$

**Definitie 2.5: Norm en genormeerde ruimte**

Een **norm** over de vectorruimte $V$ is een functionaal van $V$ naar $\mathbb{R}$ waarvan de beelden voldoen aan de volgende eigenschappen:

- Positief definiet: $\|\vec{x}\| \geq 0$ en $\|\vec{x}\| = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{x} = \vec{0}$
- Homogeniteit: $\|a\vec{x}\| = |a|\|\vec{x}\|$
- Driehoeksongelijkheid: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Een vectorruimte waarover een norm gedefinieerd is, is een **genormeerde ruimte**.

**Stelling 2.1: Metriciteit van de vectorruimte**

Als een vectorruimte genormeerd is, dan is ze ook metrisch. De functie

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

voldoet aan de definitie van afstand.

**Bewijs 2.1: Metriciteit van de vectorruimte**

De norm is per definitie positief definiet en triviaal symmetrisch. We willen nu aantonen dat het volgende geldt:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\|.$$

Welnu voor normen geldt per definitie de driehoeksongelijkheid:

$$\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|;$$

stel hierin $\vec{\alpha} = \vec{x}-\vec{z}$ en $\vec{\beta} = \vec{z}-\vec{y}$, dan volgt het gestelde, namelijk:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{z}+\vec{z}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{y}\|.$$

$\square$

**Stelling 2.2: Translatie-invariantie en homogeniteit**

Een metrische vectorruimte kan genormeerd worden met een norm die voldoet aan de definitie van afstand als en slechts als de afstandsfunctie voldoet aan:

1. Translatie-invariantie: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V: \ \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{x}+\vec{z}, \vec{y}+\vec{z})$
2. Homogeniteit: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \ \forall a \in \mathbb{R}^+: \ \rho(a\vec{x}, a\vec{y}) = a\rho(\vec{x}, \vec{y})$

**Definitie 2.6: Convexe en strikte convexe deelverzameling van een vectorruimte**

Een deelverzameling $C$ van een vectorruimte $V$ is convex wanneer voor alle $\lambda > 0$ en $\mu > 0$ met $\lambda + \mu = 1$ en voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in C$ geldt dat $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in C$. Wanneer al deze punten tot het inwendige van $C$ behoren, dan noemt men $C$ stikt convex. Meetkundig betekent dit dat elk open lijnstuk $L(x, y)$ dat twee punten $x$ en $y$ van $C$ verbindt, volledig in $C$ ligt.

**Eigenschap 2.1: Convexiteit en genormeerde ruimte**

In een genormeerde ruimte is elke gesloten bol $B(\vec{a}, r)$ convex.

**Bewijs 2.2: Convexiteit en genormeerde ruimte**

Inderdaad, zij $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ twee punten van $B(\vec{a}, r)$. Dan moeten we aantonen dat $\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2$ tot de bol behoort, of nog dat $\|\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 - \vec{a}\| \leq r$. Welnu:

$$\|\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 - \vec{a}\| \leq \lambda\|\vec{x}_1 - \vec{a}\| + (1-\lambda)\|\vec{x}_2 - \vec{a}\| \leq \lambda r + (1-\lambda) r = r.$$

$\square$

**Definitie 2.7: Strikt genormeerde ruimte en strike norm**

Een genormeerde ruimte is strikt genormeerd als de eenheidsbol $B(\vec{0}, 1)$ strikt convex is. De eenheidsbol is strikt convex als er geen 'rechte' lijnstukken in voorkomen, of wiskundig:

$$(\vec{x} \neq \vec{y} \ \wedge \ \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1) \ \Rightarrow \ \|\vec{x} + \vec{y}\| < 2.$$

Men spreekt dan van een strikte norm.

**Opmerking:** De 1-norm en de $\infty$-norm in $\mathbb{R}^n$ zijn **geen** strikte normen, omdat de eenheidsbol in deze normen niet strikt convex is.

**Stelling 2.3: Beste benadering in een deelruimte**

Zij $\mathcal{D}$ een eindigdimensionale deelruimte van een strikt genormeerde ruimte $V$ en zij $\vec{v} \in V$. Dan bestaat de beste benadering van $\vec{v} \in \mathcal{D}$ en is deze uniek.

**Bewijs 2.3: Beste benadering in een deelruimte**

- **Existentie**: Noem $d = \inf\{\|\vec{v} - \vec{w}\| | \vec{w} \in \mathcal{D}\}$. We tonen aan dat dit infimum in feite een minimum is. Volgens de definitie van een infimum bestaat er een rij van vectoren $\{\vec{w}_k\}_{k>1}$ in $\mathcal{D}$ zodat $\{\|\vec{v} - \vec{w}\|\}_{k>1}$ een dalende rij is die convergeert naar $d$. De rij $\{\vec{w}_k\}_{k>1}$ is bovendien uniform begrensd omdat

$$\forall k > 1: \ \|\vec{w}_k\| = \|(\vec{w}_k - \vec{v}) + \vec{v}\| \leq \|\vec{w}_k - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \leq \|\vec{w}_1 - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \tag{1}$$

Stel $n$ gelijk aan de dimensie van $\mathcal{D}$ en beschouw $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ van $\mathcal{D}$. Dan kunnen we $\vec{w}_k$ met $k > 1$ ontbinden als:

$$\vec{w}_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \vec{a}_i$$

Uit (1) volgt dat de rij $\{\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn}\}_{k>1}$ uniform begrensd is. Deze rij heeft bijgevolg steeds een convergente deelrij (**stelling van Weierstrass-Bolzano**) waarvan we de limiet $(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$ noemen. Daarom kunnen we, zonder algemeenheid in te boeten, in wat volgt veronderstellen dat de rij $\{\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn}\}_{k>1}$ convergeert naar $(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$. Stel nu dat

$$\vec{\zeta} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i \vec{a}_i$$

dan geldt er voor alle $k \geq 1$ dat

$$\|\vec{v} - \vec{\zeta}\| \leq \underbrace{\|\vec{v} - \vec{w}_k\|}_{\to d} + \underbrace{\|\vec{w}_k - \vec{\zeta}\|}_{\to 0},$$

wat $\|\vec{v} - \vec{\zeta}\| = d$ impliceert. De vector $\vec{\zeta}$ is bijgevolg de beste benadering van $\vec{v}$ in $\mathcal{D}$.

- **Uniciteit**: Het bewijs is uit het ongeruijmde. Veronderstel dat er twee verschillende beste benaderingen zijn, $\vec{\zeta}_1$ en $\vec{\zeta}_2$, zodat

$$\|\vec{v} - \vec{\zeta}_1\| = \|\vec{v} - \vec{\zeta}_2\| = d.$$

Merk dat $\vec{e}_i = \frac{1}{d}(\vec{v} - \vec{\zeta}_i)$ op de eenheidsbol in $V$ ligt voor $i = 1, 2$. Omdat de eenheidsbol strikt convex is geldt

$$\left\|\vec{v} - \frac{\vec{\zeta}_1 + \vec{\zeta}_2}{2}\right\| = d\left\|\underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda}\vec{e}_1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mu}\vec{e}_2\right\| < d,$$

Dus $\frac{1}{2}(\vec{\zeta}_1 + \vec{\zeta}_2) \in \mathcal{D}$ is een betere benadering van $\vec{v}$ dan $\vec{\zeta}_1$ en $\vec{\zeta}_2$, wat in tegenspraak is met de veronderstelling.

$\square$

## 2.3 Unitaire ruimte en orthogonaliteit

**Definitie 2.8: Unitaire ruimte**

Men noemt een vectorruimte $V$ over de complexe getallen unitair als er met elk paar elementen $\vec{x}, \vec{y} \in V$ een complex getal $(\vec{x}, \vec{y})$ overeenstemt dat voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. $\forall a \in \mathbb{C}: \ (\vec{x}, a\vec{y}) = a(\vec{x}, \vec{y})$
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$
3. $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$
4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ als $\vec{x} \neq \vec{0}$

Men noemt $(\vec{x}, \vec{y})$ het scalair product van $\vec{x}$ en $\vec{y}$.

**Opmerking:** Uit de derde eigenschap volgt dat $(\vec{x}, \vec{x})$ reëel is. Hierdoor is het scalair product over het veld $\mathbb{R}$ symmetrisch.

**Stelling 2.4: Unitair impliceert genormeerd**

Als een vectorruimte unitair is, dan is ze ook genormeerd. De functie

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

voldoet aan de definitie van een norm.

**Bewijs 2.4: Unitair impliceert genormeerd**

De eerste 'drie' normeigenschappen (positief definitief, homogeniteit) zijn gemakkelijk te bewijzen. De driehoeksongelijkheid volgt (voor $\vec{x}+\vec{y}\neq\vec{0}$) uit de Cauchy-Schwarz ongelijkheid:

$$\begin{aligned}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) &= (\vec{x},\vec{x}+\vec{y})+(\vec{y},\vec{x}+\vec{y})\\ &\leq \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})}+\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}\sqrt{(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})}\end{aligned}$$

en dus

$$\sqrt{(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})}\leq\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}+\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}.$$

Voor het geval $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$ is de driehoeksongelijkheid triviaal.

$\square$

**Stelling 2.5: Genormeerd naar unitair**

Een genormeerde vectorruimte is een unitaire ruimte met een scalair product dat voldoet aan Stelling 2.4, als en slechts als de norm voldoet aan de parallellogramongelijkheid:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2\left(\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2\right).$$

**Bewijs 2.5: Genormeerd naar unitair**

Het nodig zijn wordt als volgt aangetoond:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 &= (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})+(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y})\\ &= 2(\vec{x},\vec{x})+2(\vec{y},\vec{y}).\end{aligned}$$

Voor een reële vecorruimte wordt het voldoende zijn bewezen door aan te tonen dat

$$(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{4}\left\{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}\|^2-\|\vec{y}\|^2\right\}$$

een scalair product is, en dat de natuurlijke norm van dit scalair product de oorspronkelijke norm is. Het bewijs is nogal technisch en laten we achterwege.

$\square$

**Stelling 2.6: Eenheidsbol in unitaire ruimte**

De eenheidsbol in een unitaire ruimte is strikt convex.

**Bewijs 2.6: Eenheidsbol in unitaire ruimte**

Het volstaat aan te tonen dat de geziene formule in Definitie 2.7 geldt. Welnu, neem $\vec{x} \neq \vec{y}$ met $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$. Dan volgt uit de parallellogramongelijkheid

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = -\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) = -\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + 4 < 4.$$

En dus is $\|\vec{x} + \vec{y}\| < 2$.

$\square$

**Definitie 2.9: Orthogonaliteit**

Twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ in een unitaire ruimte $V$ zijn orthogonaal als hun scalair product nul is, of nog als:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \;\Rightarrow\; (\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

**Stelling 2.7: Pythagoras**

Wanneer $\vec{x}$ en $\vec{y}$ orthogonaal zijn in een unitaire ruimte $V$, dan geldt t.o.v. de natuurlijke norm in $V$ dat

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

**Bewijs 2.7: Pythagoras**

Het gestelde volgt triviaal uit een expansie van $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2$, namelijk:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

**Stelling 2.8: Hermitiaans positief definiet**

Neem de grammatrix $G$ van een stel vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, namelijk:

$$G = G(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \begin{bmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_1, \vec{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{a}_n, \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_n, \vec{a}_n) \end{bmatrix}.$$

Indien deze matrix Hermitiaans positief definiet is, dan zijn de vectoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ lineair onafhankelijk. Hieruit volgt dat de matrix $G$ een inverteerbare matrix is (als en slechts als de vectoren lineair onafhankelijk zijn).

**Bewijs 2.8: Hermitiaans positief definiet**

- **Hermitiaans:** Uit de derde voorwaarde voor een scalair product (zoals gezien in Definitie 2.8) volgt dat $G = G^*$, dus G is een Hermitiaanse martix.
- **Positief definitief:** Zij $v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ een vector in $\mathbb{C}^n$. Steunend op de lineairiteit van het scalair product kunnen we de uitdrukking $v^*Gv$ schrijven als:

$$\begin{aligned} v^*Gv &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_1, \vec{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{a}_n, \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_n, \vec{a}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\vec{a}_1, v_1\vec{a}_1, + \cdots + v_n\vec{a}_n) \\ \vdots \\ (\vec{a}_n, v_1\vec{a}_1, + \cdots + v_n\vec{a}_n) \end{bmatrix} \\ &= \left( \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{a}_i, \sum_{j=1}^{n} v_j\vec{a}_j \right) = \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{a}_i \right\|^2. \end{aligned}$$

  Als $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ lineair onafhankelijk zijn, dan geldt voor $v \neq 0$ dat $\sum_{i=1}^{n} v_i\vec{a}_i \neq 0$ en dus $v^*Gv > 0$. Dit bewijst dat $G$ positief definiet is.

$\square$

**Eigenschap 2.2: Orthogonale projector**

Een projector $P$ is orthogonaal als en alleen als:

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \ (P\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, P\vec{w}).$$

**Bewijs 2.9: Orthogonale projector**

"$\Rightarrow$": Als $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ orthogonaal zijn, dan is:

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \ (P\vec{v}, (I-P)\vec{w}) = ((I-P)\vec{v}, P\vec{w}) = \vec{0},$$

waaruit volgt dat $(P\vec{v}, \vec{w}) = (P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, P\vec{w})$.

"$\Leftarrow$": Neem willekeurige $\vec{x} = P\vec{u} \in \mathcal{R}(P)$ en $\vec{y} \in \mathcal{N}(P)$. Dan geldt:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (P\vec{u}, \vec{y}) = (\vec{u}, P\vec{y}) = (\vec{u}, \vec{0}) = 0,$$

wat de orthogonaliteit bewijst.

$\square$

**Algoritme 2.1: Gram-Schmidt algoritem in een unitaire ruimte**

**for** $j = 1$ to $n$ **do**
  $\vec{v}_j = \vec{a}_j$
  **for** $i = 1$ to $j-1$ **do**
    $r_{ij} = (\vec{q}_i, \vec{a}_j)$
    $\vec{v}_j = \vec{v}_j - r_{ij}\vec{q}_i \quad (= \vec{a}_j - P_{\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_{j-1}}\vec{a}_j)$
  **end for**
  $r_{jj} = \|\vec{v}_j\|_2$
  $\vec{q}_j = \vec{v}_j / r_{jj}$
**end for**

**Opmerking:** In vergelijking tot Algoritme 1.1 zijn inwendige producten tussen vectoren in $\mathbb{C}^n$ vervangen door scalaire producten in $V$ en de Euclidische norm door de natuurlijke norm geïnduceerd door het scalair product, dit is $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$.

# 3 Benadering door middel van veeltermen

## 3.1 Orthogonale veeltermen

**Eigenschap 3.1: Orthogonale veeltermen**

Het stel orthogonale veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ vormt een basis van de ruimte $P_n[a,b]$.

**Bewijs 3.1: Orthogonale veeltermen**

Het stel van $n+1$ veeltermen is lineair onafhankelijk in een ruimte met dimensie $n+1$, dit volgt uit de inverteerbaarheid van de grammatrix. Het stel is dus een basis van $P_n[a,b]$.

$\square$

**Stelling 3.1: Lageregraadstermen en orthogonaliteit**

Een veelterm die behoort tot een rij orthogonale veeltermen is ook orthogonaal tot alle veeltermen van een lagere graad.

**Stelling 3.2: Orthogonale veeltermen over de reële getallen**

De orthogonale veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ voldoen aan een drietermrecursiebetrekking:

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= \lambda_0, \\
\phi_1(x) &= \lambda_1 \left( x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \right) \phi_0(x), \\
\phi_k(x) &= \lambda_k \left( x - \alpha_k \right) \phi_{k-1}(x) - \beta_k \phi_{k-2}(x).
\end{aligned}$$

waarbij

$$\alpha_k = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}{(\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}, \quad \beta_k = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-2})}{(\phi_{k-2}, \phi_{k-2})},$$

en $\lambda_k$ een normalisatieconstante is.

**Opmerking:** De formules werden afgeleid voor een algemeen scalair product gedefinieerd op een vectorruimte over de reële getallen.

**Bewijs 3.2: Orthogonale veeltermen over de reële getallen**

Veeltermen $\phi_0(x)$ en $\phi_1(x)$ verkrijgt men door orthogonalisatie van 1 en $x$ met de Gram-Schmidtprocedure. De waarden van $\lambda_0$ en $\lambda_1$ volgen uit de normalisatievoorwaarde.

Vermits de veelterm $x\phi_{k-1}(x)$ een veelterm van graad $k$ is, kan ze ontbonden worden als een lineaire combinatie van de orthogonale veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_k(x)$. Herneem formule

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_k \phi_k(x), \quad \alpha_k = \frac{(\phi_k, f)}{\phi_k, \phi_k}.$$

Nu krijgen we:

$$x\phi_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \phi_i(x), \quad \forall \ell \leq k: \ b_\ell = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_\ell)}{(\phi_\ell, \phi_\ell)} = \frac{(\phi_{k-1}, \phi_\ell)}{(\phi_\ell, \phi_\ell)}.$$

De veelterm $x\phi_\ell(x)$ is van graad $\ell + 1$. Uit Stelling 3.1 volgt dan dat $b_\ell$ gelijk is aan nul wanneer $k - 1 > \ell + 1$, of nog, wanneer $\ell < k - 2$. In het rechterlid van de bovenstaande vergelijking blijven enkel de termen over met $k - 2 \leq \ell \leq k$. We vinden dus:

$$x\phi_{k-1}(x) = b_{k-2}\phi_{k-2}(x) + b_{k-1}\phi_{k-1}(x) + b_k\phi_k(x).$$

Dit herschrijven we als:

$$\phi_k(x) = \frac{1}{b_k} \left( (x - b_{k-1})\phi_{k-1}(x) - b_{k-2}\phi_{k-2}(x) \right).$$

Dit geeft ons de drietermrecursiebetrekking.

□

**Toepassing 3.1: Orthogonale veeltermen**

Met een gebruik van het continue scalair product voor een gewichtsfunctie $w(x)$ over een interval $[a, b]$ kunnen de coëfficiënten van de recursiebetrekking voluit geschreven worden als:

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b w(x) x \phi_{k-1}^2(x) dx}{\int_a^b w(x) \phi_{k-1}^2(x) dx}, \quad \beta_k = \frac{\int_a^b w(x) x \phi_{k-1}(x) \phi_{k-2}(x) dx}{\int_a^b w(x) \phi_{k-2}^2(x) dx}.$$

**Stelling 3.3: Nulpunten van orthogonale veeltermen**

De veelterm $\phi_k(x)$ die behoort tot een stel veeltermen dat orthogonaal is over een interval $[a, b]$ heeft $k$ enkelvoudige reële nulpunten in het open interval $(a, b)$.

**Bewijs 3.3: Nulpunten van orthogonale veeltermen**

Voor $k = 0$ is de stelling triviaal; het bewijs dat hier volgt, geldt voor $k > 0$.

Daar $\phi_k(x)$ een veelterm is van de $k$-de graad, heeft hij hoogstens $k$ reële nulpunten. Hij kan dus hoogstens $k$ maal van teken veranderen in $(a, b)$, en dit enkel als alle nulpunten reëel en enkelvoudig zijn. Als we dus kunnen bewijzen dat deze veeltermen $k$ maal van teken verandert in $(a, b)$, dan is de stelling bewezen.
Veronderstel dat $\phi_k(x)$ slechts $m$ keer van teken verandert met $m < k$. Noem de punten waar dit gebeurt $x_1, \ldots, x_m$. Beschouw dan de veelterm:

$$\psi(x) = \phi_k(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i).$$

Telens als $\phi_k(x)$ van teken wisselt, bijvoorbeeld in $x_i$, wordt dit opgeheven door de aanwezigheid van een factor $(x - x_i)$ die er ook van teken wisselt. De functie $\psi(x)$ verandert dus nergens van teken in $(a, b)$. Vanwege de continuïteit is $\psi(x)$ dus overal positief of overal negatief. De integraal

$$\int_a^b w(x) \psi(x) dx = \int_a^b w(x) \phi_k(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i) dx$$

is bijgevolg verschillend van nul.

Welnu, $\prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$ is een veelterm van graad $m < k$, en dus orthogonaal tot $\phi_k(x)$; dus moet de integraal wel nul zijn. De aanname $m < k$ is bijgevolg onjuist.

$\square$

**Stelling 3.4: Eigenwaarden en tridiagonale matrix**

De nulpunten van de veelterm $\phi_n(x)$ zijn de eigenwaarden van $\textbf{tridiag}(v_{k-1}; \alpha_k; \mu_k)$, de $n \times n$ tridiagonale matrix, met $v_k = \beta_{k+1}$ en $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$, waarbij $\alpha_k, \beta_k$ en $\lambda_k$ gegeven worden door Stelling 3.2.

**Bewijs 3.4: Eigenwaarden en tridiagonale matrix**

Definieer de $n \times n$ tridiagonale matrix $A$ en de $n$-vector $\Phi(x)$ als:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & \alpha_2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & v_2 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & v_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(x) \\ \phi_{n-1}(x) \end{bmatrix}.$$

De fundamentele recursiebetrekking kan herschreven worden als:

$$\beta_k \phi_{k-2}(x) + \alpha_k \phi_{k-1}(x) + \frac{1}{\lambda_k} \phi_k(x) = x \phi_{k-1}(x).$$

Stel nu $v_k = \beta_{k+1}$ en $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$, dan wordt dit:

$$v_{k-1} \phi_{k-2}(x) + \alpha_k \phi_{k-1}(x) + \mu_k \phi_k(x) = x \phi_{k-1}(x).$$

Gebruik makend van bovenstaande betrekking, kan men het matrix-vectorproduct $A\Phi(x)$ vereenvoudigen tot:

$$A\Phi(x) = x \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-2}(x) \\ \phi_{n-1}(x) \end{bmatrix} - \mu_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = x\Phi(x) - \mu_n \Psi(x).$$

Evalueren we deze betrekking in een nulpunt $x_k$ van de veelterm $\phi_n(x)$, dan vinden we:

$$A\Phi(x_k) = x_k \Phi(x_k).$$

Dit wil zeggen dat $x_k$ een eigenwaarde is van $A$, met $\Phi(x_k)$ als corresponderende eigenvector. Dit geldt voor alle nulpunten $x_k$ van $\phi_n(x)$. Vermits een $n \times n$ matrix hoogstens $n$ verschillende eigenwaarden heeft, moeten alle eigenwaarden nulpunten zijn (en omgekeerd).

$\square$

**Stelling 3.5: Kleinste-kwadratenbenadering**

Zij een orthogonaal stel veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ en een continue te benaderen functie $f(x)$. De kleinste-kwadratenbenadering van de $n$-de graad is dan gelijk aan:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_k(x) \quad \text{met} \quad \alpha_k = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \phi_k(x) dx}{\int_a^b w(x) \phi_k^2(x) dx}.$$

De fout of het residu van de kleinste-kwadratenbenadering t.o.v. de $n$-de graad is dan gelijk aan:

$$r_n(x) = f(x) - y_n(x) \simeq -\alpha_{n+1} \phi_{n+1}(x).$$

**Stelling 3.6: Interpolerende eigenschap van de kleinste-kwadratenbenadering**

Zij $f$ een continue functie op het interval $[a, b]$. Dan geldt dat de fout van de $n$-de graadsbenadering nul wordt in minstens $n + 1$ punten van het open interval $(a, b)$.

**Bewijs 3.5: Interpolerende eigenschap van de kleinste-kwadratenbenadering**

We tonen aan dat het residu minstens $n + 1$ tekenwisselingen ondergaat in het open interval $(a, b)$. Uit de continuïteit van $f(x)$ volgt dan dat het residu minstens $n + 1$ nulpunten heeft.

Veronderstel dat $r_n(x)$ slechts $m$ tekenwisselingen zou ondergaan, met $m \leq n$, namelijk in de punten $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, gelegen in het open interval $(a, b)$. Dan heeft de functie:

$$r_n(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$$

geen enkele tekenverandering in $[a, b]$ en is dus:

$$\int_a^b w(x) r_n(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i) dx \neq 0.$$

Wegens Stelling 1.1 staat de functie $r_n(x)$ dus ook orthogonaal tot de veelterm $\prod_{i=1}^{m}(x - x_i)$. Hieruit zou dus volgen:

$$\int_a^b w(x) r_n(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i) dx = 0,$$

wat in tegenspraak is met de aanname. De veronderstelling $m \leq n$ is dus onjuist, ofwel het residu heeft minstens $n + 1$ tekenwisselingen in $(a, b)$.

$\square$

### 3.2 Legendre-veeltermen

**Definitie 3.1: Legendre-veeltermen**

De veeltermen $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ met $P_k(1) = 1$ die een orthogonale rij vormen voor het scalair product

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)dx$$

waarbij $w(x) = 1$, noemt men de Legendre-veeltermen. De veeltermen worden door volgende algemene uidrukking gegeven:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} x^{k-2j},$$

waarbij

$$A_k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}, \quad \|P_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$$

met $A_k$ de hoogstegraadscoëfficiënt en $\|\cdot\|$ de natuurlijke norm.

**Definitie 3.2: Legendre-benadering**

De Legendre-bendaring over het interval $[-1, 1]$ van een functie $f(x)$ wordt gegeven door:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x) \quad \text{met} \quad \alpha_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx.$$

Indien we de momenten $I_k = \int_{-1}^{1} x^k f(x)dx$ van de functie erbij halen, dan kunnen we de coëfficiënten $\alpha_k$ ook schrijven als:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx \\
&= \frac{2k+1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} \int_{-1}^{1} f(x)x^{k-2j}dx \\
&= \frac{2k+1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} I_{k-2j}.
\end{aligned}$$

### 3.3 Chebyshev-veeltermen

**Definitie 3.3: Chebyshev-veeltermen**

De veeltermen $T_0(x), T_1(x), T_2(x), \ldots$ met $T_k(1) = 1$ die een orthogonale rij vormen voor het scalair

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)dx$$

waarbij $w(X) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, noemt men de Chebyshev-veeltermen (van de eerste soort). De veeltermen worden door volgende goniometrische uitdrukking gegeven:

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad \text{voor } x \in [-1, 1].$$

Hieruit volgt de orthogonaliteit van de veeltermen op het interval $[-1, 1]$. De algemene uitdrukking voor de Chebyshev-veeltermen is:

$$T_k(x) = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \frac{(k-j-1)!}{j!(k-2j)!} (2x)^{k-2j}.$$

waarbij

$$\forall k \geq 1: \; A_k = 2^{k-1}, \quad \|T_k\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{indien } k = 0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{indien } k \neq 0. \end{cases}$$

met $A_k$ de hoogstegraadscoëfficiënt en $\|\cdot\|$ de natuurlijke norm.

**Definitie 3.4: Chebyshev-benadering**

De Chebyshev-kleinste-kwadratenveelterm met graad $n$ voor een functie $f(x)$ is gelijk aan:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k(x) \quad \text{met} \quad \alpha_k = \frac{1}{\|T_k\|^2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

We kunnen $\alpha_k$ ook schrijven als:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{voor } k \geq 1.$$

De benaderingsfout of residu $r_n(x)$ van deze benadering is gelijk aan:

$$r_n(x) \simeq -\alpha_{n+1} T_{n+1}(x).$$

**Opmerking:** In de literatuur wordt soms voor algemeenheid gebruikgemaakt van een licht gewijzigd sommatiesymbool:

$$y_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' \alpha_k T_k(x) := \frac{1}{2}\alpha_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(x).$$

waardoor dan $\alpha_k$ dan in alle gevallen gelijk is aan $\frac{1}{\|T_k\|^2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

**Definitie 3.5: Minimaxcriterium**

Het minimaxcriterium zoekt een veelterm $y_n$ van graad $n$ die de maximale fout over $[a, b]$ minimaliseert:

$$E_n = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - y_n(x)|.$$

Als de functie $f$ continue is, bestaat zulke veelterm.

**Opmerking:** De term $f(x) - y_n(x)$ komt overeen met het residu $r_n(x)$ uit Stelling 3.5.

**Stelling 3.7: Borel**

Voor elke functie $f(x)$ die continu is over het compacte interval $[a, b]$, bestaat er een veelterm $y_n(x)$ van graad $n$ of lager waarvoor geldt dat:

$$\forall p_n \in P_n[a, b] : \max_{x \in [a,b]} |f(x) - y_n(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|.$$

De punten in het interval $[a, b]$ waar het maximum $E_n \left(= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - y_n(x)|\right)$ wordt bereikt, worden extremaalpunten genoemd. Een punt waar $f(x) - y_n(x) = E_n$ noemt men een +punt, waar $f(x) - y_n = -E_n$ een −punt.

**Stelling 3.8: Equioscillatiestelling**

Zij $f(x)$ een continue functie op een compact interval $[a, b]$ en zij $y_n(x)$ een veelterm van graad $n$. Dan is $y_n$ een beste benadering van graad $n$ volgens het minimaxcriterium als en alleen als er in het interval $[a, b]$ een rij van $n + 2$ extremaalpunten bestaat die afwisselen tussen +punten en −punten.

# 4 Benadering door middel van splinefuncties

## 4.1 Splines

**Definitie 4.1: Splinefunctie**

Zij een strikt stijgende rij van reële getallen gegeven, die voldoet aan

$$a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Een spline functie $s(x)$ van graad $k > 0$ of orde $k + 1$ met knooppunten $t_0, \ldots, t_n$ is een functie gedefinieerd op $[a, b]$ die voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. in elk interval $[t_i, t_{i+1}]$ is $s(x)$ een veelterm van graad $k$ of lager;
2. de functie $s(x)$ en haar afgeleiden tot en met orde $k - 1$ zijn continu in $[a, b]$.

**Stelling 4.1: Dimensie van de ruimte van splinefuncties**

De vectorruimte van de splinefuncties van graad $k$ met knooppunten $t_0, \ldots, t_n$ heeft dimensie $n + k$.

**Toepassing 4.1: Interpolerende splinefunctie**

Een splinefunctie wordt **interpolerend** genoemd als hij in de knoopunten $t_0, \ldots, t_n$ bepaalde opgegeven waarden $f_0, \ldots, f_n$ aanneemt.

**Toepassing 4.2: Natuurlijke splinefunctie**

Een **natuurlijke splinefunctie** is een splinefunctie van oneven graad $\exists m \geq 1 : \ k = 2m+1$, waarvoor geldt dat

$$\forall j \in [m+1, 2m] : \ s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0.$$

**Opmerking:** De meest courant gebruikte interpolerende splinefuncties zijn natuurlijke, interpolerende splinefuncties, d.w.z. dat dergelijke functie behoort tot oneven graad $k = 2m + 1$ en voldoet aan:

$$\forall j \in [0, m] : \ s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0 \quad \text{en} \quad \forall i \in [0, n] : \ s(t_i) = f_i.$$

Dat zijn $(n+1) + 2m = n + k$ bijkomende voorwaarden en dus volgt, vermits de splimeruimte dimensie $n + k$ heeft (Stelling 4.1), dat deze functie eenduidig bepaald is.

**Toepassing 4.3: Periodieke splinefunctie**

Een **periodieke splinefunctie** is een splinefunctie die voldoet aan

$$\forall j \in [0, k-1] : \ s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b).$$

## 4.2 B-splines

**Definitie 4.2: Gedeelde differentie**

De gedeelde differentie van orde nul van een functie $f$ in een punt $x_i$ is gelijk aan

$$f[x_i] = f(x_i) = f_i.$$

De gedeelde differentie van orde $k = j - i$ voor $j > i$ van een functie $f$ in de verschillende punten $x_i, \ldots, x_j$ wordt gedefinieerd als

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i} \left(= \Delta_t^k(x_i, \ldots, x_{i+k}) f(t)\right).$$

**Eigenschap 4.1: Gedeelde differentie**

1. De gedeelde differentie $f[x_i, \ldots, x_j]$ is lineair in $f$, d.w.z.
$$(af + bg)[x_i, \ldots, x_j] = af[x_i, \ldots, x_j] + bg[x_i, \ldots, x_j].$$
2. **Newton-vorm**: De interpolerende veelterm van graad $j - i$ door $(x_i, f_i), \ldots, (x_j, f_j)$ is gelijk aan:
$$p_{j-i}(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)(x - x_{i+1}) + \ldots + a_{j-i} \prod_{k=0}^{j-i-1} (x - x_{i+k}),$$
waarbij de coëfficiënten worden gegeven door:
$$a_k = f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$$
3. De gedeelde differentie $f[x_i, \ldots, x_j]$ is continu in de argumenten $x_i, \ldots, x_j$ als $f(x)$ $(j - i)$-maal differentieerbaar is met continue $(j - i)$-de afgeleide.
4. De gedeelde differentie van orde $j - i$ van een veelterm $p_m(x)$ van graad $m$ met $m < j - i$, heeft de waarde nul, d.w.z. dat
$$\exists m < j - i : \; p_m[x_i, \ldots, x_j] = 0.$$
5. De gedeelde differentie $f[x_i, \ldots, x_j]$ is een lineaire samenstelling van de functie waarden $f_i, \ldots, f_j$, d.w.z. dat
$$f[x_i, \ldots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} \lambda_k f_k.$$
6. De **formule van Leibniz** voor de gedeelde differentie van een product van twee functies luidt als volgt:
$$f(x) = g(x)h(x) \; \Rightarrow \; f[x_i, \ldots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} g[x_i, \ldots, x_k]h[x_k, \ldots, x_j].$$

**Definitie 4.3: Afgeknotte machtsfunctie**

Een veelgebruitke functie in de numerieke wiskunde is de afgeknotte machtsfunctie, die gedefinieerd is als
$$(t - x)_+^k = \begin{cases} (t - x)^k & \text{als } t > x, \\ 0 & \text{als } t \leq x. \end{cases}$$

**Definitie 4.4: Gewone B-spline**

De gewone B-spline van graad $k$ of orde $k + 1$ wordt gegeven door:
$$M_{i,k+1}(x) = \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t - x)_+^k.$$

**Definitie 4.5: Genormaliseerde B-spline**

De Genormaliseerde B-spline van graad $k$ of orde $k+1$ wordt gegeven door:

$$N_{i,k+1}(x) = (t_{i+k+1} - t_i)M_{i,k+1}(x).$$

**Stelling 4.2: Geldigheid van B-splines**

De gewone B-splinefunctie $M_{i,k+1}(x)$ en de genormaliseerde B-splinefunctie $N_{i,k+1}(x)$ zijn splinefuncties.

**Bewijs 4.1: Geldigheid van B-splines**

Herneem de eigenschap dat de gedeelde differentie een lineaire samenstelling is van functiewaarden $f_i, \ldots, f_j$ (zoals gezien in Propositie 4.1), namelijk:

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} \lambda_k f_k.$$

De functie $M_{i,k+1}(x)$ is dus een lineaire samenstelling van afgeknotte-machtsfuncties van graad $k$ van de volgende vorm:

$$1, x, x^2, \ldots, x^k, (t_1 - x)_+^k, \ldots, (t_{n-1} - x)_+^k.$$

Deze lineaire samenstelling vormt een basis van de vectorruimte van de splinefuncties van graad $k$ met knooppunten $t_0, \ldots, t_n$ en dus is $M_{i,k+1}(x)$ een splinefunctie. Hetzelfde geldt voor $N_{i,k+1}(x)$.

$\square$

**Eigenschap 4.2: B-splines**

1. Voor een gegeven $i$ zijn de B-splines van orde 1 als volgt gedefinieerd:
   - $M_{i,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} & \text{als } t_i \le x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$
   - $N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } t_i \le x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$
2. Voor een gegeven $i$ en $k \ge 1$, geldt voor $x \le t_i$ of $(x \ge t_{i+k+1})$ dat

$$M_{i,k+1}(x) = 0$$

3. Voor de gewone en de genormaliseerde B-splines gelden volgende recursiebetrekkingen:
   - $M_{i,k+1}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i} M_{i,k}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_i} M_{i+1,k}(x),$
   - $N_{i,k+1}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k}(x).$

4. Voor een gegeven $k \geq 1$ en $x \in (t_i, t_{i+k+1})$ geldt dat

$$M_{i,k+1}(x) > 0$$

**Bewijs 4.2: B-splines**

1. Per definitie van $M_{i,k+1}(x)$ geldt dat

$$\begin{aligned} M_{i,1}(x) &= \Delta_t^1(t_i, t_{i+1})(t-x)_+^0 \\ &= \frac{1}{t_{i+1}-t_i}(t-x)_+ \\ &= \frac{(t_{i+1}-x)_+^0 - (t_i-x)_+^0}{t_{i+1}-t_i}. \end{aligned}$$

   Het bovenste deel van de breuk is gelijk aan 1 als $t_i \leq x < t_{i+1}$ en 0 anders, hierdoor volgt dus:

$$M_{i,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} & \text{als } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   Hieruit volgt ook $N_{i,1}(x)$, sinds dit neer komt op vermenigvuldigen met $(t_{i+1} - t_i)$.

2. We leidden vroeger reeds af dat

$$M_{i,k+1}(x) = \sum_{s=i}^{i+k+1} \lambda_s f_s \quad \text{met} \quad f_s = (t_s - x)_+^k.$$

   Wanneer nu $x \geq t_{i+k+1}$, dan zijn alle $f_s$ in bovenstaande formule nul. Als $x \leq t_i$, dan mogen we in de uitdrukking voor $f_s$ het vervangen door equivalente $(t-x)^k$ en dit voor elke $s$. De gewone B-spline wordt dan:

$$M_{i,k+1}(x) = \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)^k.$$

   Dat is identiek nul, want differentie van orde $k+1$ avn een veelterm van graad $k$ is nul.

3. Voor $k \geq 1$ kunnen we schrijven dat:

$$(t-x)_+^k = (t-x)_+^{k-1}(t-x).$$

   We vullen dit in in de definitie van $M_{i,k+1}(x)$ en passen de formule van Leibniz voor gedeelde differentie (zie Eigenschap 4.1) toe, namelijk:

$$f(x) = g(x)h(x) \;\Rightarrow\; f[x_i, \ldots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} g[x_i, \ldots, x_k]h[x_k, \ldots, x_j].$$

   Omwille van de factor $(t-x)$, een veelterm van graad 1 in $t$, bevatten de meeste termen in de bovenstaande som een factor die gelijk is aan nul. We vinden:

$$\begin{aligned}
M_{i_k+1}(x) &= \Delta_t^{k+1}(t_i,\ldots,t_{i+k+1})(t-x)_+^k \\
&= \Delta_t^{k+1}(t_i,\ldots,t_{i+k+1})\{(t-x)_+^{k-1}(t-x)\} \\
&= \Delta_t^{k+1}(t_i,\ldots,t_{i+k+1})(t-x)_+^{k-1}\cdot\Delta_t^0(t_{i+k+1})(t-x)+ \\
&\qquad \Delta_t^k(t_i,\ldots,t_{i+k})(t-x)_+^{k-1}\cdot\Delta_t^1(t_{i+k},t_{i+k+1})(t-x) \\
&= \Delta_t^{k+1}(t_i,\ldots,t_{i+k+1})(t-x)_+^{k-1}(t_{i+k+1}-x)+M_{i,k}(x)
\end{aligned}$$

Men gebruikt nu de recursieve definitie van gedeelde differentie, om de differentie van orde $k+1$ in bovenstaande uitdrukking te schrijven als een lineaire combinatie van twee gedeelde differenties van orde $k$. Rekening houdend met de definitie van B-spline, verkrijgt men:

$$M_{i,k+1}(x) = \frac{M_{i+1,k}(x)-M_{i,k}(x)}{t_{i+k+1}-t_i}(t_{i+k+1}-x)+M_{i,k}(x).$$

Hieruit volgt de recursiebetrekking voor $M_{i,k+1}(x)$. De recursiebetrekking voor $N_{i,k+1}(x)$ volgt op analoge wijze.

4. We geven een bewijs gebaseerd op de recursiebetrekking en maken gebruik van volledige inductie.

Voor $k=1$ luidt de recursiebetrekking

$$M_{i,2}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i}M_{i,1}(x)+\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}M_{i+1,1}(x).$$

Schrijven we het rechterlid als $AB+CD$, dan is $A>0$ voor $x\in(t_i,\infty)$, $B>0$ voor $x\in[t_i,t_{i+1})$ en nul daarbuiten, $C>0$ voor $x\in(-\infty,t_{i_2})$, $D>0$ voor $x\in[t_{i_1},t_{i+2})$ en nul daarbuiten. Uit dit alles volgt dat $M_{i,2}(x)>0$ als $x\in(t_i,t_{i+2})$.

Voor de inductie stap bekijken we de recursiebetrekking $M_i^{k+1}$,

$$M_{i,k+1}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i}M_{i,k}(x)+\frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_i}M_{i+1,k}(x).$$

Schrijven we ook hier het rechterlid als $AB+CD$, dan is $A>0$ voor $x\in(t_i,\infty)$, $B>0$ als $x\in[t_i,t_{i+k})$ en nul daarbuiten, $C>0$ voor $x\in(-\infty,t_{i+k+1})$, $D>0$ als $x\in[t_{i+k},t_{i+k+1})$ en nul daarbuiten. Er volgt dat $M_{i,k+1}(x)>0$ als $x\in(t_i,t_{i+k+1})$.

□

## 5 Discrete benadering op basis van meetdata

## 6 Regularisatietechnieken

**Data, Grafen en Eigenwaarden**

# 7 Grafen en eigenwaarden in datawetenschappen

# 8 Eigenwaardenalgoritmes

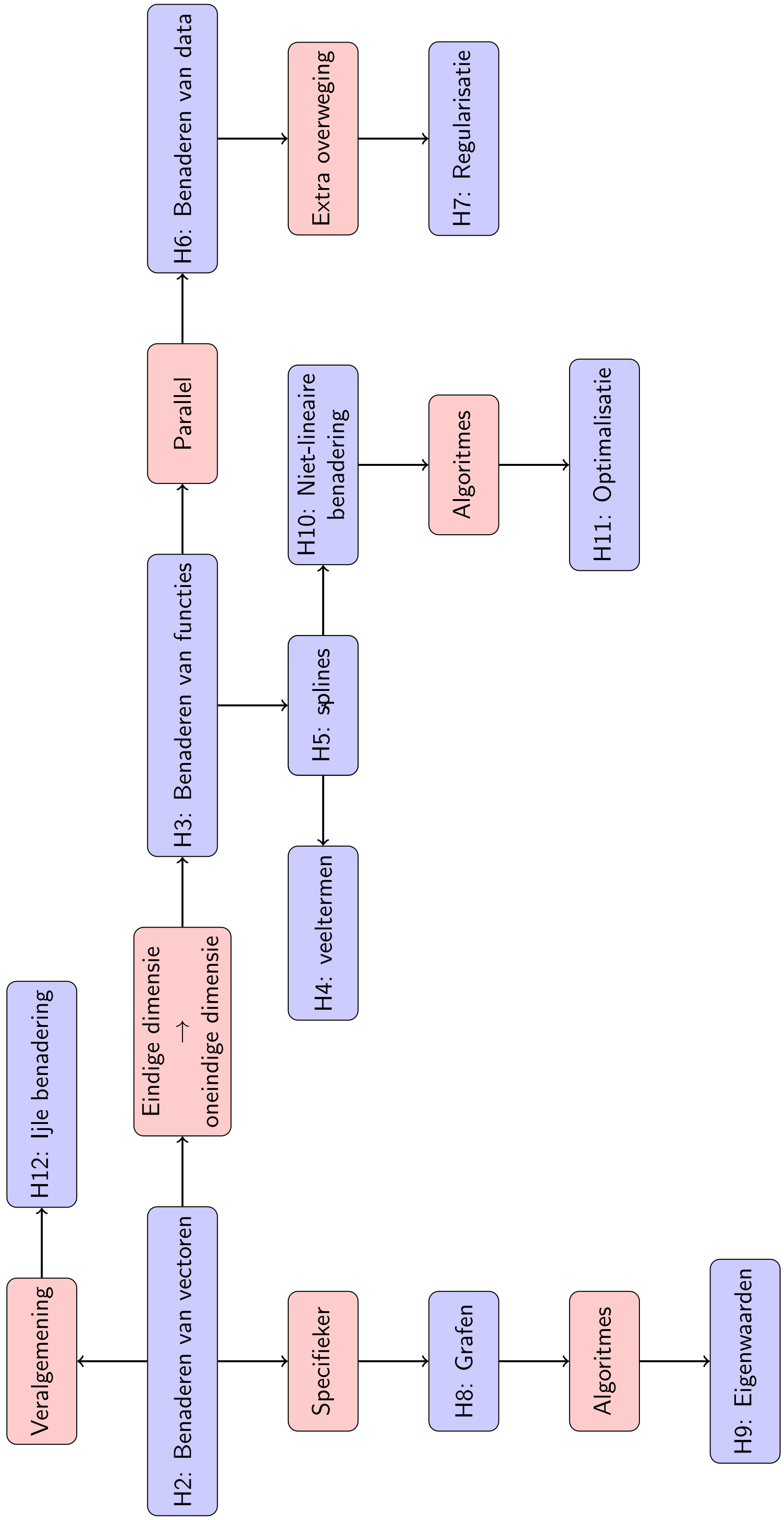
# Niet-lineaire Benaderingsproblemen

# 9 Niet-lineaire benaderingsproblemen

# 10 Optimalisatie-algoritmes

# 11 Ijle representatie en benaderingen

# Appendix


H2: Benaderen van vectoren
Veralgemening
H12: Ijle benadering
Eindige dimensie → oneindige dimensie
H3: Benaderen van functies
Parallel
H6: Benaderen van data
Extra overweging
H7: Regularisatie
H5: splines
H4: veeltermen
H10: Niet-lineaire benadering
Algoritmes
H11: Optimalisatie
Specifieker
H8: Grafen
Algoritmes
H9: Eigenwaarden