Numerieke Benadering

Pieter Vanderschueren

Academiejaar 2024-2025

Inhoudsopgave

Lineaire Benaderingsproblemen

1 Benadering van vectoren

1.1 Terminologie

Definitie 1.1: Orthogonale en orthonormale basissen

We spreken van een orthogonale, respectievelijk orthonormale basis als de basisvectoren $\{a_1, \ldots, a_n\}$ orthogonaal, respectievelijk orthonormaal zijn. Als een basis niet orthogonaal is, spreken we van een scheve basis.

Definitie 1.2: Grammatrix

Voor een basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ van deelruimte $\mathcal{D}$ en twee vectoren $v, w \in \mathcal{D}$ ontbonden als

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \ w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$$

geldt dat het inwendig product $((v, w) = v^* w)$ van v en w gelijk is aan

$$(v, w) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & \cdots & (a_n, a_n) \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \alpha^* G \beta$$

waarbij deze G de zogenaamde *grammatrix* is horende bij de basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Eigenschap 1.1: Grammatrix

- Is de basis orthogonaal, dan is de grammatrix diagonaal.
- Is de basis orthonormaal, dan is de grammatrix de eenheidsmatrix.

Definitie 1.3: Projector

Een *projector* is een matrix $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die idempotent is, dit is $P^2 = P$. Matrix P projecteert een vector op de ruimte $\mathcal{R}(P)$, waarbij de richting bepaald wordt door de nullspace $\mathcal{N}(P)$. Stel $v \in \mathbb{C}^m$ een willekeurige vector en $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ een projector, dan is $Pv \in \mathcal{R}(P)$ volgens de definitie van het bereik, en is $(I - P)v \in \mathcal{N}(P)$, omdat:

$$P(I - P)v = (P - P^2)v \overset{P^2 = P}{=} (P - P)v = 0.$$

We kunnen dus v (uniek) ontbinden in componenten volgens $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ als $v = Pv + (I - P)v$.

Eigenschap 1.2: Projector

- Als $v \in \mathcal{R}(P)$, dan is $Pv = v$.
- $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$.
- $\dim(\mathcal{R}(P)) + \dim(\mathcal{N}(P)) = m$.
- De ontbinding in componenten volgens $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ is uniek.

Bewijs 1.1: Projector

- Als $v \in \mathcal{R}(P)$, dan $\exists u : v = Pu$, en dus is $Pv = P^2u = Pu = v$.
- Stel $x \in \mathcal{R}(P)$ en $x \in \mathcal{N}(P)$. Er volgt dat $x = Px = 0$.
- Dit volgt uit de eerste dimensiestelling en vorige eigenschap.
- Stel $v = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, met $x_1, x_2 \in \mathcal{R}(P)$ en $y_1, y_2 \in \mathcal{N}(P)$. Er geldt voor $i \in 1, 2$ dat $Pv = Px_i + Py_i = x_i$. Hieruit volgt dat $x_1 = x_2$.

$\square$

Definitie 1.4: Complementaire projector

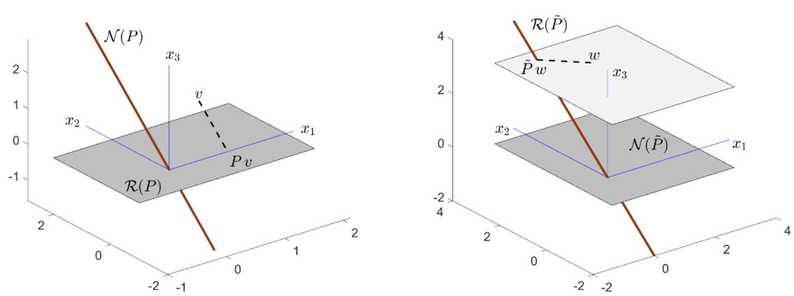
Stel P een projector, dan is $\tilde{P} = I - P$ de *complementaire projector* van P. Hierbij geldt:

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{N}(\tilde{P}) \quad \text{en} \quad \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P) = \mathcal{R}(\tilde{P}).$$

De ontbinding kan geschreven worden als

$$v = \underbrace{(I - \tilde{P})v}_{\in \mathcal{R}(P)} + \underbrace{\tilde{P}v}_{\in \mathcal{N}(P)}.$$

Matrix $\tilde{P}$ projecteert dus op $\mathcal{N}(P)$ waarbij de richting bepaald wordt door $\mathcal{R}(P)$, zie verder onderstaande figuur.



Definitie 1.5: Orthogonale projector

Een projector P is orthogonaal indien $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ onderling orthogonale ruimte zijn, m.a.w.

$$P \text{ is een orthogonale projector } \Leftrightarrow P = P^*$$

Een projector die niet orthogonaal is, noemen we een scheve projector.

Bewijs 1.2: Orthogonale projector

"$\Rightarrow$": Beschouw een orthonormale basis $\{q_1, \ldots, q_n\}$ van $\mathcal{R}(P)$ en een orthonormale basis $\{q_{n+1}, \ldots, q_m\}$ van $\mathcal{N}(P)$. Omdat volgens de definitie beide ruimten orthogonaal zijn, volgt dat

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n & q_{n+1} & \cdots & q_m \end{bmatrix}$$

een unitaire matrix is, m.a.w. $Q^*Q = QQ^* = \mathbb{I}_m$. We verkrijgen:

$$PQ = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^*PQ = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vermits Q^*PQ dus reëel is, geldt:

$$Q^*PQ = (Q^*PQ)^* = Q^*P^*Q$$

waaruit het gestelde volgt.

"$\Leftarrow$": Neem willekeurige $x = Pu \in \mathcal{R}(P)$ en $y \in \mathcal{N}(P)$. Dan is:

$$(x, y) = x^*y = (Pu)^*y = u^*P^*y = u^*Py = 0.$$

De ruimten $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ zijn dus orthogonaal. □

1.2 QR-factorisatie

Algoritme 1.1: Gram-Schmidt orthogonalisatie

for $j = 1$ to n **do**
  $v_j = a_j$
  for $i = 1$ to $j-1$ **do**
    $r_{ij} = q_i^* a_j$
    $v_j = v_j - r_{ij} q_i \quad (= a_j - P_{<q_1, \ldots, q_{j-1}>} a_j)$
  end for
  $r_{jj} = \|v_j\|_2$
  $q_j = v_j / r_{jj}$
end for

Algoritme 1.2: Gewijzigde Gram-Schmidt orthogonalisatie

for $j = 1$ to n **do**
  $v_j = a_j$
  for $i = 1$ to $j-1$ **do**
    $r_{ij} = q_i^* \boldsymbol{v_j} \quad (a_j \ \to \ v_j)$
    $v_j = v_j - r_{ij} q_i \quad (= (\mathbb{I} - P_{<q_{j-1}>}) \dots (\mathbb{I} - P_{<q_2>})(\mathbb{I} - P_{<q_1>}) a_j)$
  end for
  $r_{jj} = \|v_j\|_2$
  $q_j = v_j / r_{jj}$
end for

Toepassing 1.1: Herorthogonalisatie van Gram-Schmidt

De Gram-Schmidt orthogonalisatie is numeriek instabiel. Dit kan verholpen worden door herorthogonalisatie, hieronder twee varianten waarvan de eerste de meest gebruikte is.

1. **Stapsgewijze variant**: Het klassieke Gram-Schmidt algoritme (Algoritme 1.1) wordt lichtelijk aangepast:

   for $j = 1$ to n **do**
     $v_j = a_j$
     for $j = 1$ to $j-1$ **do**
       $r_{ij} = q_i^* v_j$
       $v_j = v_j - r_{ij} q_i$
     end for
     $w_j = v_j$
     for $i = 1$ to $j-1$ **do**
       $s_{ij} = q_i^* w_j$
       $v_j = v_j - s_{ij} q_i$
       $r_{ij} = r_{ij} + s_{ij}$
     end for
     $r_{jj} = \|v_j\|_2$
     $q_j = v_j / r_{jj}$
   end for

2. **Simultane variant**: Na het berekenen van de onvolledige QR-factorisatie, die resulteert in factoren $\hat{Q}_1$ en $\hat{R}_1$ wordt het algoritme opnieuw toegepast met als input de eerste factor, wat resulteert in $\hat{Q}_1 \approx \hat{Q}_2 \hat{R}_2$. We bepalen dan $\hat{Q} = \hat{Q}_2$ en $\hat{R} = \hat{R}_2 \hat{R}_1$. Bij het gewijzigde algoritme van Gram-Schmidt (Algoritme 1.2) is dit meestal voldoende om orthogonaliteit van de kolommen van $\hat{Q}$ te garanderen, bij het standaard algoritme (Algoritme 1.1) is soms meermaals herhalen van deze procedure noodzakelijk.

Algoritme 1.3: QR-facrotisatie met Givens-rotaties

$Q = I$, $R = A$

for $j = 1$ to n **do**
    for $i = m$ downto $j+1$ **do**
        $c = \frac{r_{(i-1)j}}{\sqrt{r_{(i-1)j}^2 + r_{ij}^2}}$, $s = \frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{(i-1)j}^2 + r_{ij}^2}}$
        $r_{ij} = 0, \;\; r_{(i-1)j} = \sqrt{r_{(i-1)j}^2 + r_{ij}^2}$
        for $k = j+1$ to n **do**
            $\begin{bmatrix} r_{(i-1)k} \\ r_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{c} & \overline{s} \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{(i-1)k} \\ r_{ik} \end{bmatrix}$
        end for
        for $k = 1$ to m **do**
            $\begin{bmatrix} q_{k(i-1)} & q_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{k(i-1)} & q_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c} & \overline{s} \\ -s & c \end{bmatrix}$
        end for
    end for
end for

Algoritme 1.4: QR-facrotisatie met Householder-rotaties

$R = A$

for $j = 1$ to n **do**
    $x = R(j:m, j)$
    $v_j = x + \text{sign}(x_1)\|x\|_2 \boldsymbol{e}_1$
    $v_j = v_j / \|v_j\|_2$
    $R_{jj} = -\text{sign}(x_1)\|x\|_2, \;\; R(j+1:m, j) = 0$
    for $k = j+1$ to n **do**
        $R(j:m, k) = R(j:m, k) - 2(v_j^* R(j:m, k)) v_j$
    end for
end for

for $j = 1$ to m **do**
    $w = \boldsymbol{e}_i$
    for $k = n$ downto 1 **do**
        $w_{k:m} = w_{k:m} - 2(v_k^* w_{k:m}) v_k$
    end for
    $Q(:, i) = w$
end for

1.3 Beste benadering van een vector in een deelruimte

Stelling 1.1: Beste benaderingsstelling

Een vector $\hat{y}$ is een beste benadering in deelruimte $\mathcal{D}$ voor b als $b - \hat{y}$ orthogonaal is ten opzichte van $\mathcal{D}$.

Bewijs 1.3: Beste benaderingsstelling

Neem een willekeurige $y \in \mathcal{D}$. Vermits $y - \hat{y} \in \mathcal{D}$ en dus orthogonal is ten opzichte van $b - \hat{y}$ geldt, volgens de stelling van Pythagoras:

$$\|b - y\|_2^2 = \|b - \hat{y}\|_2^2 + \|\hat{y} - y\|_2^2 \geq \|b - \hat{y}\|_2^2,$$

m.a.w. y benadert b niet beter dan $\hat{y}$. □

Stelling 1.2: Orthogonale projectiestelling

De beste benadering in deelruimte $\mathcal{D}$ voor vector b bestaat en is uniek. Ze wordt gegeven door de orthogonale projectie van b op $\mathcal{D}$, namelijk:

$$\hat{y} = P_{\mathcal{D}} y$$

met $P_{\mathcal{D}}$ de orthogonale projector op $\mathcal{D}$.

Bewijs 1.4: Orthogonale projectiestelling

Per definitie van een projector, kan b ontbonden worden als

$$b = \underbrace{P_{\mathcal{D}} b}_{\in \mathcal{R}(P_{\mathcal{D}})} + \underbrace{(I - P_{\mathcal{D}}) b}_{\in \mathcal{N}(P_{\mathcal{D}})}$$

waaruit volgt dat $b - \hat{y} = b - P_{\mathcal{D}} b \in \mathcal{N}(P_{\mathcal{D}}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{D}^\perp})$. Volgens de beste benaderingsstelling (Stelling 1.1) is $\hat{y}$ een beste benadering. De uniciteit volgt uit het voorgaande bewijs (Bewijs 1.3). □

Stelling 1.3: Normaalstelsel

Een vector $\hat{x}$ is een oplossing van het kleinste-kwadratenprobleem, namelijk

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\|_2,$$

als en alleen als $x = \hat{x}$ voldoet aan het zogenaamde normaalstelsel:

$$A^* A x = A^* b.$$

Bewijs 1.5: Normaalstelsel

"$\Rightarrow$": Veronderstel dat $A\hat{x} = \hat{y}$, met $\hat{y}$ gegeven door $\hat{y} = P_{\mathcal{D}}y$. We weten dat $(b - A\hat{x}) \perp \mathcal{D} =< a_1, \ldots, a_n >$ waaruit volgt

$$\forall i \in [1, n]: \ (a_i, (b - A\hat{x})) = 0 \ \Leftrightarrow \ a_i^*(b - A\hat{x}) = 0$$

wat equivalent is aan het gestelde in matrixvorm.

"$\Leftarrow$": De gelijkheid kan geschreven worden als $A^*(A\hat{x} - b)$, wat impliceert $(A\hat{x} - b) \perp \mathcal{D}$ en dus is $\hat{x}$ de beste benadering.

$\square$

2 Benadering van functies

2.1 Metrische ruimte

Definitie 2.1: Afstand

Men zegt dat over een verzameling A een *afstand* gedefinieerd is als er met elk paar elementen $x, y \in A$ een reëel getal $\rho(x, y)$ overeenstemt dat voldoet aan de volgende eigenschappen:

- Positief definitief: $\rho(x, y) \geq 0$ en $\rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
- Symmetrisch: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- Driehoeksongelijkheid: $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$

Een afstandsfunctie is bijgevolg een functionaal van de productverzameling $A \times A$ naar de verazmeling $\mathbb{R}$ van de reëele getallen.

Definitie 2.2: Metrische ruimte

De verzameling A met een afstandsfunctie ρ noemt men een *metrische ruimte* (A, ρ). De afstandsfunctie noemt men ook wel de *metriek* van de ruimte. De afstand tot een deelverzameling D van een metrische ruimte wordt gedefinieerd als:

$$\rho(x, D) = \inf \{\rho(x, y) \mid y \in D\}$$

Definitie 2.3: Beste benadering

Zij D een deelverzameling van een metrische ruimte (A, ρ). Een element $d \in D$ noemt men een beste benadering van een gegeven element $x \in A$, als er geen enkel ander element van D dichter bij x gelegen is dan d.

2.2 Vectorruimte

Definitie 2.4: Vectorruimte

Een *vectorruimte* V over het veld $\mathbb{F}$ is een verzameling van elementen waarop twee bewerkingen zijn gedefinieerd: optelling en een scalaire vermenigvuldiging met een element uit $\mathbb{F}$. Deze bewerkingen moeten voldoen aan volgende voorwaarden:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \ \vec{u} + \vec{v} \in V$
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. Er bestaat een element $\vec{0} \in V$ zodat $\forall \vec{u} \in V: \ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. Voor elke $\vec{v} \in V$ bestaat er element $-\vec{v} \in V$ zodat $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
6. $\forall \vec{v} \in V, \ \forall f \in \mathbb{F}: \ f\vec{v} \in V$
7. $\forall \vec{v} \in V, \ \forall f, g \in \mathbb{F}: \ f(g\vec{v}) = (fg)\vec{v}$
8. Als 1 het eenheidselement is van $\mathbb{F}$, dan geldt $\forall \vec{v} \in V: \ 1\vec{v} = \vec{v}$
9. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \ \forall f \in \mathbb{F}: \ f(\vec{u} + \vec{v}) = f\vec{u} + f\vec{v}$
10. $\forall \vec{v} \in V, \ \forall f, g \in \mathbb{F}: \ (f + g)\vec{v} = f\vec{v} + g\vec{v}$

Definitie 2.5: Norm en genormeerde ruimte

Een *norm* over de vectorruimte V is een functionaal van V naar $\mathbb{R}$ waarvan de beelden voldoen aan de volgende eigenschappen:

- Positief definiet: $\|\vec{x}\| \geq 0$ en $\|\vec{x}\| = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{x} = \vec{0}$
- Homogeniteit: $\|a\vec{x}\| = |a|\|\vec{x}\|$
- Driehoeksongelijkheid: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Een vectorruimte waarover een norm gedefinieerd is, is een *genormeerde ruimte*.

Stelling 2.1: Metriciteit van de vectorruimte

Als een vectorruimte genormeerd is, dan is ze ook metrisch. De functie

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

voldoet aan de definitie van afstand.

Bewijs 2.1: Metriciteit van de vectorruimte

De norm is per definitie positief definiet en triviaal symmetrisch. We willen nu aantonen dat het volgende geldt:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\|.$$

Welnu voor normen geldt per definitie de driehoeksongelijkheid:

$$\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|;$$

stel hierin $\vec{\alpha} = \vec{x}-\vec{z}$ en $\vec{\beta} = \vec{z}-\vec{y}$, dan volgt het gestelde, namelijk:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{z}+\vec{z}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{y}\|.$$

$\square$

Stelling 2.2: Translatie-invariantie en homogeniteit

Een metrische vectorruimte kan genormeerd worden met een norm die voldoet aan de definitie van afstand als en slechts als de afstandsfunctie voldoet aan:

1. Translatie-invariantie: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V: \ \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{x}+\vec{z}, \vec{y}+\vec{z})$
2. Homogeniteit: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \ \forall a \in \mathbb{R}^+: \ \rho(a\vec{x}, a\vec{y}) = a\rho(\vec{x}, \vec{y})$

Definitie 2.6: Convexe en strikte convexe deelverzameling van een vectorruimte

Een deelverzameling C van een vectorruimte V is convex wanneer voor alle $\lambda > 0$ en $\mu > 0$ met $\lambda + \mu = 1$ en voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in C$ geldt dat $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in C$. Wanneer al deze punten tot het inwendige van C behoren, dan noemt men C stikt convex. Meetkundig betekent dit dat elk open lijnstuk $L(x, y)$ dat twee punten x en y van C verbindt, volledig in C ligt.

Eigenschap 2.1: Convexiteit en genormeerde ruimte

In een genormeerde ruimte is elke gesloten bol $B(\vec{a}, r)$ convex.

Bewijs 2.2: Convexiteit en genormeerde ruimte

Inderdaad, zij $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ twee punten van $B(\vec{a}, r)$. Dan moeten we aantonen dat $\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2$ tot de bol behoort, of nog dat $\|\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 - \vec{a}\| \leq r$. Welnu:

$$\|\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 - \vec{a}\| \leq \lambda\|\vec{x}_1 - \vec{a}\| + (1-\lambda)\|\vec{x}_2 - \vec{a}\| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

$\square$

Definitie 2.7: Strikt genormeerde ruimte en strike norm

Een genormeerde ruimte is strikt genormeerd als de eenheidsbol $B(\vec{0}, 1)$ strikt convex is. De eenheidsbol is strikt convex als er geen 'rechte' lijnstukken in voorkomen, of wiskundig:

$$(\vec{x} \neq \vec{y} \ \wedge \ \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1) \ \Rightarrow \ \|\vec{x} + \vec{y}\| < 2.$$

Men spreekt dan van een strikte norm.

Opmerking: De 1-norm en de ∞-norm in $\mathbb{R}^n$ zijn **geen** strikte normen, omdat de eenheidsbol in deze normen niet strikt convex is.

Stelling 2.3: Beste benadering in een deelruimte

Zij $\mathcal{D}$ een eindigdimensionale deelruimte van een strikt genormeerde ruimte V en zij $\vec{v} \in V$. Dan bestaat de beste benadering van $\vec{v} \in \mathcal{D}$ en is deze uniek.

Bewijs 2.3: Beste benadering in een deelruimte

- **Existentie**: Noem $d = \inf\{\|\vec{v} - \vec{w}\| \mid \vec{w} \in \mathcal{D}\}$. We tonen aan dat dit infimum in feite een minimum is. Volgens de definitie van een infimum bestaat er een rij van vectoren $\{\vec{w}_k\}_{k>1}$ in $\mathcal{D}$ zodat $\{\|\vec{v} - \vec{w}\|\}_{k>1}$ een dalende rij is die convergeert naar d. De rij $\{\vec{w}_k\}_{k>1}$ is bovendien uniform begrensd omdat

$$\forall k > 1: \ \|\vec{w}_k\| = \|(\vec{w}_k - \vec{v}) + \vec{v}\| \leq \|\vec{w}_k - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \leq \|\vec{w}_1 - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \tag{1}$$

Stel n gelijk aan de dimensie van $\mathcal{D}$ en beschouw een basis $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ van $\mathcal{D}$. Dan kunnen we $\vec{w}_k$ ontbinden als:

$$\forall k > 1: \ \vec{w}_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \vec{a}_i$$

Uit (1) volgt dat de rij $\{\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn}\}_{k>1}$ uniform begrensd is. Deze rij heeft bijgevolg steeds een convergente deelrij (*stelling van Weierstrass-Bolzano*) waarvan we de limiet $(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$ noemen. Daarom kunnen we, zonder algemeenheid in te boeten, in wat volgt veronderstellen dat de rij $\{\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn}\}_{k>1}$ convergeert naar $(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$. Stel nu dat

$$\vec{\zeta} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i \vec{a}_i,$$

dan geldt er voor alle $k \geq 1$ dat

$$\|\vec{v} - \vec{\zeta}\| \leq \underbrace{\|\vec{v} - \vec{w}_k\|}_{\to d} + \underbrace{\|\vec{w}_k - \vec{\zeta}\|}_{\to 0},$$

wat $\|\vec{v} - \vec{\zeta}\| = d$ impliceert. De vector $\vec{\zeta}$ is bijgevolg de beste benadering van $\vec{v}$ in $\mathcal{D}$.

- **Uniciteit**: Het bewijs is uit het ongeruijmde. Veronderstel dat er twee verschillende beste benaderingen zijn, $\vec{\zeta}_1$ en $\vec{\zeta}_2$, zodat

$$\|\vec{v} - \vec{\zeta}_1\| = \|\vec{v} - \vec{\zeta}_2\| = d.$$

Merk dat $\vec{e}_i = \frac{1}{d}(\vec{v} - \vec{\zeta}_i)$ op de eenheidsbol in V ligt voor $i = 1, 2$. Omdat de eenheidsbol strikt convex is geldt

$$\left\|\vec{v} - \frac{\vec{\zeta}_1 + \vec{\zeta}_2}{2}\right\| = d\left\|\underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda}\vec{e}_1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mu}\vec{e}_2\right\| < d,$$

Dus $\frac{1}{2}(\vec{\zeta}_1 + \vec{\zeta}_2) \in \mathcal{D}$ is een betere benadering van $\vec{v}$ dan $\vec{\zeta}_1$, wat in tegenspraak is met de veronderstelling.

□

2.3 Unitaire ruimte en orthogonaliteit

Definitie 2.8: Unitaire ruimte

Men noemt een vectorruimte V over de complexe getallen unitair als er met elk paar elementen $\vec{x}, \vec{y} \in V$ een complex getal $(\vec{x}, \vec{y})$ overeenstemt dat voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. $\forall a \in \mathbb{C}: \ (\vec{x}, a\vec{y}) = a(\vec{x}, \vec{y})$
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$
3. $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$
4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ als $\vec{x} \neq \vec{0}$

Men noemt $(\vec{x}, \vec{y})$ het scalair product van $\vec{x}$ en $\vec{y}$.

Opmerking: Uit de derde eigenschap volgt dat $(\vec{x}, \vec{x})$ reëel is, sinds $(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{(\vec{x}, \vec{x})}$. Hierdoor is het gebruik van het $' >'$-teken in de vierde eigenschap gerechtvaardigd. Ook, indien de vectorruimte reëel is, dan is de derde eigenschap symmetrisch.

Stelling 2.4: Unitair impliceert genormeerd

Als een vectorruimte unitair is, dan is ze ook genormeerd. De functie

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

voldoet aan de definitie van een norm.

Opmerking: Deze norm wordt de *natuurlijke* of *geïnduceerde norm* genoemd.

Bewijs 2.4: Unitair impliceert genormeerd

De eerste 'drie' normeigenschappen (positief definitief, homogeniteit) zijn gemakkelijk te bewijzen. De driehoeksongelijkheid volgt (voor $\vec{x}+\vec{y}\neq\vec{0}$) uit de Cauchy-Schwarz ongelijkheid:

$$\begin{aligned}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) &= (\vec{x},\vec{x}+\vec{y})+(\vec{y},\vec{x}+\vec{y})\\ &\leq \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})}+\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}\sqrt{(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})}\end{aligned}$$

en dus

$$\sqrt{(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})}\leq\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}+\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}.$$

Voor het geval $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$ is de driehoeksongelijkheid triviaal.

$\square$

Stelling 2.5: Genormeerd naar unitair

Een genormeerde vectorruimte is een unitaire ruimte met een scalair product dat voldoet aan Stelling 2.4, als en slechts als de norm voldoet aan de *parallellogramongelijkheid*:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2\left(\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2\right).$$

Opnerking: De zogenaamde parallellogramongelijkheid komt in het Euclidische vlak overeen met het feit dat de som van de kwadraten van de diagonalen van een parallellogram gelijk is aan de som van de kwadraten van de vier zijden.

Bewijs 2.5: Genormeerd naar unitair

Het nodig zijn wordt als volgt aangetoond:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 &= (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})+(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y})\\ &= 2(\vec{x},\vec{x})+2(\vec{y},\vec{y}).\end{aligned}$$

Voor een reële vecorruimte wordt het voldoende zijn bewezen door aan te tonen dat

$$(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{4}\left\{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}\|^2-\|\vec{y}\|^2\right\}$$

een scalair product is, en dat de natuurlijke norm van dit scalair product de oorspronkelijke norm is. Het bewijs is nogal technisch en laten we achterwege.

$\square$

Stelling 2.6: Eenheidsbol in unitaire ruimte

De eenheidsbol in een unitaire ruimte is strikt convex.

Bewijs 2.6: Eenheidsbol in unitaire ruimte

Het volstaat aan te tonen dat de geziene formule in Definitie 2.7 geldt. Welnu, neem $\vec{x} \neq \vec{y}$ met $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$. Dan volgt uit de parallellogramongelijkheid

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = -\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) = -\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + 4 < 4.$$

En dus is $\|\vec{x}+\vec{y}\| < 2$.

□

Definitie 2.9: Orthogonaliteit

Twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ in een unitaire ruimte V zijn orthogonaal als hun scalair product nul is, of nog als:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \;\Rightarrow\; (\vec{x},\vec{y}) = 0.$$

Stelling 2.7: Pythagoras

Wanneer $\vec{x}$ en $\vec{y}$ orthogonaal zijn in een unitaire ruimte V, dan geldt t.o.v. de natuurlijke norm in V dat

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Bewijs 2.7: Pythagoras

Het gestelde volgt triviaal uit een expansie van $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2$, namelijk:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})\\ &= (\vec{x},\vec{x}) + (\vec{y},\vec{y}) + 2(\vec{x},\vec{y})\\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.\end{aligned}$$

□

Stelling 2.8: Hermitiaans positief definiet

Neem de grammatrix G van een stel vectoren $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$, namelijk:

$$G = G(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n) = \begin{bmatrix}(\vec{a}_1,\vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_1,\vec{a}_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\vec{a}_n,\vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_n,\vec{a}_n)\end{bmatrix}.$$

Indien deze matrix Hermitiaans positief definiet is, dan zijn de vectoren $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ lineair onafhankelijk. Hieruit volgt dat de matrix G een inverteerbare matrix is (als en slechts als de vectoren lineair onafhankelijk zijn).

Bewijs 2.8: Hermitiaans positief definiet

- **Hermitiaans:** Uit de derde voorwaarde voor een scalair product (zoals gezien in Definitie 2.8) volgt dat $G = G^*$, dus G is een Hermitiaanse martix.
- **Positief definitief:** Zij $v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ een vector in $\mathbb{C}^n$. Steunend op de lineairiteit van het scalair product kunnen we de uitdrukking v^*Gv schrijven als:

$$\begin{aligned} v^*Gv &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_1, \vec{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{a}_n, \vec{a}_1) & \cdots & (\vec{a}_n, \vec{a}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\vec{a}_1, v_1\vec{a}_1, + \cdots + v_n\vec{a}_n) \\ \vdots \\ (\vec{a}_n, v_1\vec{a}_1, + \cdots + v_n\vec{a}_n) \end{bmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n v_i\vec{a}_i, \sum_{j=1}^n v_j\vec{a}_j \right) = \left\| \sum_{i=1}^n v_i\vec{a}_i \right\|^2. \end{aligned}$$

  Als $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ lineair onafhankelijk zijn, dan geldt voor $v \neq 0$ dat $\sum_{i=1}^n v_i\vec{a}_i \neq 0$ en dus $v^*Gv > 0$. Dit bewijst dat G positief definiet is.

$\square$

Eigenschap 2.2: Orthogonale projector

Een projector P is orthogonaal als en alleen als:

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \ (P\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, P\vec{w}).$$

Bewijs 2.9: Orthogonale projector

"$\Rightarrow$": Als $\mathcal{R}(P)$ en $\mathcal{N}(P)$ orthogonaal zijn, dan is:

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \ (P\vec{v}, (I-P)\vec{w}) = \vec{0} = ((I-P)\vec{v}, P\vec{w}),$$

waaruit volgt, wegens lineariteit van het scalair product, dat $(P\vec{v}, \vec{w}) = (P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, P\vec{w})$.

"$\Leftarrow$": Neem willekeurige $\vec{x} = P\vec{u} \in \mathcal{R}(P)$ en $\vec{y} \in \mathcal{N}(P)$. Dan geldt:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (P\vec{u}, \vec{y}) = (\vec{u}, P\vec{y}) = (\vec{u}, \vec{0}) = 0,$$

wat de orthogonaliteit bewijst.

$\square$

Algoritme 2.1: Gram-Schmidt algoritem in een unitaire ruimte

for $j = 1$ to n **do**
  $\vec{v}_j = \vec{a}_j$
  for $i = 1$ to $j-1$ **do**
    $r_{ij} = (\vec{q}_i, \vec{a}_j)$
    $\vec{v}_j = \vec{v}_j - r_{ij}\vec{q}_i \quad (= \vec{a}_j - P_{\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_{j-1}}\vec{a}_j)$
  end for
  $r_{jj} = \|\vec{v}_j\|_2$
  $\vec{q}_j = \vec{v}_j / r_{jj}$
end for

Opmerking: In vergelijking tot Algoritme 1.1 zijn inwendige producten tussen vectoren in $\mathbb{C}^n$ vervangen door scalaire producten in V en de Euclidische norm door de natuurlijke norm geïnduceerd door het scalair product, dit is $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$.

Stelling 2.9: Orthogonale projectiestelling

De beste benadering van vector $\vec{v}$ in een deelruimte $\mathcal{D}$ van een unitaire ruimte V met betrekking tot de natuurlijke norm wordt gegeven door $\vec{\hat{y}} = P_{\mathcal{D}}\vec{v}$, met $P_{\mathcal{D}}$ de orthogonale projector op $\mathcal{D}$.

3 Benadering door middel van veeltermen

3.1 Orthogonale veeltermen

Eigenschap 3.1: Orthogonale veeltermen

Het stel orthogonale veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ vormt een basis van de ruimte $P_n[a,b]$.

Bewijs 3.1: Orthogonale veeltermen

Het stel van $n+1$ veeltermen is lineair onafhankelijk in een ruimte met dimensie $n+1$, dit volgt uit de inverteerbaarheid van de grammatrix. Het stel is dus een basis van $P_n[a,b]$.

$\square$

Stelling 3.1: Lageregraadstermen en orthogonaliteit

Een veelterm die behoort tot een rij orthogonale veeltermen is ook orthogonaal tot alle veeltermen van een lagere graad.

Stelling 3.2: Orthogonale veeltermen over de reële getallen

De orthogonale veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ voldoen aan een drietermrecursiebetrekking:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \lambda_0, \\ \phi_1(x) &= \lambda_1 \left(x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \right) \phi_0(x), \\ \phi_k(x) &= \lambda_k \left(x - \alpha_k \right) \phi_{k-1}(x) - \beta_k \phi_{k-2}(x). \end{aligned}$$

waarbij

$$\alpha_k = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}{(\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}, \quad \beta_k = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-2})}{(\phi_{k-2}, \phi_{k-2})},$$

en λ_k een normalisatieconstante is.

Opmerking: De formules werden afgeleid voor een algemeen scalair product gedefinieerd op een vectorruimte over de reële getallen.

Bewijs 3.2: Orthogonale veeltermen over de reële getallen

Veeltermen $\phi_0(x)$ en $\phi_1(x)$ verkrijgt men door orthogonalisatie van 1 en x met de Gram-Schmidtprocedure. De waarden van λ_0 en λ_1 volgen uit de normalisatievoorwaarde.

Vermits de veelterm $x\phi_{k-1}(x)$ een veelterm van graad k is, kan ze ontbonden worden als een lineaire combinatie van de orthogonale veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_k(x)$. Herneem formule

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_k \phi_k(x), \quad \alpha_k = \frac{(\phi_k, f)}{\phi_k, \phi_k}.$$

Nu krijgen we:

$$x\phi_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \phi_i(x), \quad \forall \ell \leq k: \; b_\ell = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_\ell)}{(\phi_\ell, \phi_\ell)} = \frac{(\phi_{k-1}, \phi_\ell)}{(\phi_\ell, \phi_\ell)}.$$

De veelterm $x\phi_\ell(x)$ is van graad $\ell + 1$. Uit Stelling 3.1 volgt dan dat b_ℓ gelijk is aan nul wanneer $k - 1 > \ell + 1$, of nog, wanneer $\ell < k - 2$. In het rechterlid van de bovenstaande vergelijking blijven enkel de termen over met $k - 2 \leq \ell \leq k$. We vinden dus:

$$x\phi_{k-1}(x) = b_{k-2}\phi_{k-2}(x) + b_{k-1}\phi_{k-1}(x) + b_k\phi_k(x).$$

Dit herschrijven we als:

$$\phi_k(x) = \frac{1}{b_k} \left((x - b_{k-1})\phi_{k-1}(x) - b_{k-2}\phi_{k-2}(x) \right).$$

Dit geeft ons de drietermrecursiebetrekking.

□

Toepassing 3.1: Orthogonale veeltermen

Met een gebruik van het continue scalair product voor een gewichtsfunctie $w(x)$ over een interval $[a, b]$ kunnen de coëfficiënten van de recursiebetrekking voluit geschreven worden als:

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b w(x)x\phi_{k-1}^2(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_{k-1}^2(x)dx}, \quad \beta_k = \frac{\int_a^b w(x)x\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_{k-2}^2(x)dx}.$$

Stelling 3.3: Nulpunten van orthogonale veeltermen

De veelterm $\phi_k(x)$ die behoort tot een stel veeltermen dat orthogonaal is over een interval $[a, b]$ heeft k enkelvoudige reële nulpunten in het open interval (a, b).

Bewijs 3.3: Nulpunten van orthogonale veeltermen

Voor $k = 0$ is de stelling triviaal; het bewijs dat hier volgt, geldt voor $k > 0$.

Daar $\phi_k(x)$ een veelterm is van de k-de graad, heeft hij hoogstens k reële nulpunten. Hij kan dus hoogstens k maal van teken veranderen in (a, b), en dit enkel als alle nulpunten reëel en enkelvoudig zijn. Als we dus kunnen bewijzen dat deze veeltermen k maal van teken verandert in (a, b), dan is de stelling bewezen.
Veronderstel dat $\phi_k(x)$ slechts m keer van teken verandert met $m < k$. Noem de punten waar dit gebeurt $x_1, \dots, x_m$. Beschouw dan de veelterm:

$$\psi(x) = \phi_k(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i).$$

Telens als $\phi_k(x)$ van teken wisselt, bijvoorbeeld in x_i, wordt dit opgeheven door de aanwezigheid van een factor $(x - x_i)$ die er ook van teken wisselt. De functie $\psi(x)$ verandert dus nergens van teken in (a, b). Vanwege de continuïteit is $\psi(x)$ dus overal positief of overal negatief. De integraal

$$\int_a^b w(x)\psi(x)dx = \int_a^b w(x)\phi_k(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)dx$$

is bijgevolg verschillend van nul.

Welnu, $\prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$ is een veelterm van graad $m < k$, en dus orthogonaal tot $\phi_k(x)$; dus moet de integraal wel nul zijn. De aanname $m < k$ is bijgevolg onjuist.

$\square$

Stelling 3.4: Eigenwaarden en tridiagonale matrix

De nulpunten van de veelterm $\phi_n(x)$ zijn de eigenwaarden van $\textbf{tridiag}(v_{k-1}; \alpha_k; \mu_k)$, de $n \times n$ tridiagonale matrix, met $v_k = \beta_{k+1}$ en $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$, waarbij α_k, β_k en λ_k gegeven worden door Stelling 3.2.

Bewijs 3.4: Eigenwaarden en tridiagonale matrix

Herneem Stelling 3.2, deze fundamentele recursiebetrekking kan herschreven worden als:

$$\beta_k \phi_{k-2}(x) + \alpha_k \phi_{k-1}(x) + \frac{1}{\lambda_k} \phi_k(x) = x\phi_{k-1}(x).$$

Stel nu $v_k = \beta_{k+1}$ en $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$, dan wordt dit:

$$v_{k-1}\phi_{k-2}(x) + \alpha_k \phi_{k-1}(x) + \mu_k \phi_k(x) = x\phi_{k-1}(x).$$

Definieer de $n \times n$ tridiagonale matrix A en de n-vector $\Phi(x)$ als:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & \alpha_2 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & v_2 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & v_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(x) \\ \phi_{n-1}(x) \end{bmatrix}.$$

Gebruik makend van de herwerkte fundamentele recursiebetrekking, kan men het matrix-vectorproduct $A\Phi(x)$ vereenvoudigen tot:

$$A\Phi(x) = x \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-2}(x) \\ \phi_{n-1}(x) \end{bmatrix} - \mu_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = x\Phi(x) - \mu_n \Psi(x).$$

Evalueren we deze betrekking in een nulpunt x_k van de veelterm $\phi_n(x)$, dan vinden we:

$$A\Phi(x_k) = x_k \Phi(x_k).$$

Dit wil zeggen dat x_k een eigenwaarde is van A, met $\Phi(x_k)$ als corresponderende eigenvector. Dit geldt voor alle nulpunten x_k van $\phi_n(x)$. Vermits een $n \times n$ matrix hoogstens n verschillende eigenwaarden heeft, moeten alle eigenwaarden nulpunten zijn (en omgekeerd).

□

Stelling 3.5: Kleinste-kwadratenbenadering

Zij een orthogonaal stel veeltermen $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ en een continue te benaderen functie $f(x)$. De kleinste-kwadratenbenadering van de n-de graad is dan gelijk aan:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_k(x) \quad \text{met} \quad \alpha_k = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \phi_k(x) dx}{\int_a^b w(x) \phi_k^2(x) dx}.$$

De fout of het residu van de kleinste-kwadratenbenadering t.o.v. de n-de graad is dan gelijk aan:

$$r_n(x) = f(x) - y_n(x) \simeq -\alpha_{n+1} \phi_{n+1}(x).$$

Stelling 3.6: Interpolerende eigenschap van de kleinste-kwadratenbenadering

Zij f een continue functie op het interval $[a, b]$. Dan geldt dat de fout van de n-de graadsbenadering nul wordt in minstens $n + 1$ punten van het open interval (a, b).

Bewijs 3.5: Interpolerende eigenschap van de kleinste-kwadratenbenadering

We tonen aan dat het residu minstens $n + 1$ tekenwisselingen ondergaat in het open interval (a, b). Uit de continuïteit van $f(x)$ volgt dan dat het residu minstens $n + 1$ nulpunten heeft.

Veronderstel dat $r_n(x)$ slechts m tekenwisselingen zou ondergaan, met $m \leq n$, namelijk in de punten $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, gelegen in het open interval (a, b). Dan heeft de functie:

$$r_n(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$$

geen enkele tekenverandering in $[a, b]$ en is dus:

$$\int_a^b w(x) r_n(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i) dx \neq 0.$$

Wegens Stelling 1.1 staat de functie $r_n(x)$ dus ook orthogonaal tot de veelterm $\prod_{i=1}^{m}(x - x_i)$. Hieruit zou dus volgen:

$$\int_a^b w(x) r_n(x) \prod_{i=1}^{m} (x - x_i) dx = 0,$$

wat in tegenspraak is met de aanname. De veronderstelling $m \leq n$ is dus onjuist, ofwel het residu heeft minstens $n + 1$ tekenwisselingen in (a, b).

$\square$

3.2 Legendre-veeltermen

Definitie 3.1: Legendre-veeltermen

De veeltermen $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ met $P_k(1) = 1$ die een orthogonale rij vormen voor het scalair product

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)dx$$

waarbij $w(x) = 1$, noemt men de Legendre-veeltermen. De veeltermen worden door volgende algemene uidrukking gegeven:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} x^{k-2j},$$

waarbij

$$A_k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}, \quad \|P_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$$

met A_k de hoogstegraadscoëfficiënt en $\| \cdot \|$ de natuurlijke norm.

Definitie 3.2: Legendre-benadering

De Legendre-bendaring over het interval $[-1, 1]$ van een functie $f(x)$ wordt gegeven door:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x) \quad \text{met} \quad \alpha_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx.$$

Indien we de momenten $I_k = \int_{-1}^{1} x^k f(x)dx$ van de functie erbij halen, dan kunnen we de coëfficiënten α_k ook schrijven als:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx \\
&= \frac{2k+1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} \int_{-1}^{1} f(x)x^{k-2j}dx \\
&= \frac{2k+1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} I_{k-2j}.
\end{aligned}$$

3.3 Chebyshev-veeltermen

Definitie 3.3: Chebyshev-veeltermen

De veeltermen $T_0(x), T_1(x), T_2(x), \ldots$ met $T_k(1) = 1$ die een orthogonale rij vormen voor het scalair

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)dx$$

waarbij $w(X) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, noemt men de Chebyshev-veeltermen (van de eerste soort). De veeltermen worden door volgende goniometrische uitdrukking gegeven:

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad \text{voor } x \in [-1, 1].$$

Hieruit volgt de orthogonaliteit van de veeltermen op het interval $[-1, 1]$. De algemene uitdrukking voor de Chebyshev-veeltermen is:

$$T_k(x) = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \frac{(k-j-1)!}{j!(k-2j)!} (2x)^{k-2j}.$$

waarbij

$$\forall k \geq 1: \; A_k = 2^{k-1}, \quad \|T_k\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{indien } k = 0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{indien } k \neq 0. \end{cases}$$

met A_k de hoogstegraadscoëfficiënt en $\| \cdot \|$ de natuurlijke norm.

Definitie 3.4: Chebyshev-benadering

De Chebyshev-kleinste-kwadratenveelterm met graad n voor een functie $f(x)$ is gelijk aan:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k(x) \quad \text{met} \quad \alpha_k = \frac{1}{\|T_k\|^2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

We kunnen α_k ook schrijven als:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{voor } k \geq 1.$$

De benaderingsfout of residu $r_n(x)$ van deze benadering is gelijk aan:

$$r_n(x) \simeq -\alpha_{n+1} T_{n+1}(x).$$

Opmerking: In de literatuur wordt soms voor algemeenheid gebruikgemaakt van een licht gewijzigd sommatiesymbool:

$$y_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' \alpha_k T_k(x) := \frac{1}{2} \alpha_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(x).$$

waardoor dan α_k dan in alle gevallen gelijk is aan $\frac{1}{\|T_k\|^2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Definitie 3.5: Minimaxcriterium

Het minimaxcriterium zoekt een veelterm y_n van graad n die de maximale fout over $[a, b]$ minimaliseert:

$$E_n = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - y_n(x)|.$$

Als de functie f continue is, bestaat zulke veelterm.

Opmerking: De term $f(x) - y_n(x)$ komt overeen met het residu $r_n(x)$ uit Stelling 3.5.

Stelling 3.7: Borel

Voor elke functie $f(x)$ die continu is over het compacte interval $[a, b]$, bestaat er een veelterm $y_n(x)$ van graad n of lager waarvoor geldt dat:

$$\forall p_n \in P_n[a, b] : \max_{x \in [a,b]} |f(x) - y_n(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|.$$

De punten in het interval $[a, b]$ waar het maximum $E_n \left(= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - y_n(x)|\right)$ wordt bereikt, worden extremaalpunten genoemd. Een punt waar $f(x) - y_n(x) = E_n$ noemt men een +punt, waar $f(x) - y_n = -E_n$ een −punt.

Stelling 3.8: Equioscillatiestelling

Zij $f(x)$ een continue functie op een compact interval $[a, b]$ en zij $y_n(x)$ een veelterm van graad n. Dan is y_n een beste benadering van graad n volgens het minimaxcriterium als en alleen als er in het interval $[a, b]$ een rij van $n + 2$ extremaalpunten bestaat die afwisselen tussen +punten en −punten.

4 Benadering door middel van splinefuncties

4.1 Splines

Definitie 4.1: Splinefunctie

Zij een strikt stijgende rij van reële getallen gegeven, die voldoet aan

$$a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Een spline functie $s(x)$ van graad $k > 0$ of orde $k + 1$ met knooppunten $t_0, \ldots, t_n$ is een functie gedefinieerd op $[a, b]$ die voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. in elk interval $[t_i, t_{i+1}]$ is $s(x)$ een veelterm van graad k of lager;
2. de functie $s(x)$ en haar afgeleiden tot en met orde $k - 1$ zijn continu in $[a, b]$.

Stelling 4.1: Dimensie van de ruimte van splinefuncties

De vectorruimte van de splinefuncties van graad k met knooppunten $t_0, \ldots, t_n$ heeft dimensie $n + k$.

Toepassing 4.1: Interpolerende splinefunctie

Een splinefunctie wordt **interpolerend** genoemd als hij in de knoopunten $t_0, \ldots, t_n$ bepaalde opgegeven waarden $f_0, \ldots, f_n$ aanneemt.

Toepassing 4.2: Natuurlijke splinefunctie

Een **natuurlijke splinefunctie** is een splinefunctie van oneven graad $\exists m \geq 1 : \ k = 2m + 1$, waarvoor geldt dat

$$\forall j \in [m+1, 2m] : \ s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0.$$

Opmerking: De meest courant gebruikte interpolerende splinefuncties zijn natuurlijke, interpolerende splinefuncties, d.w.z. dat dergelijke functie behoort tot oneven graad $k = 2m + 1$ en voldoet aan:

$$\forall j \in [0, m] : \ s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0 \quad \text{en} \quad \forall i \in [0, n] : \ s(t_i) = f_i.$$

Dat zijn $(n+1) + 2m = n + k$ bijkomende voorwaarden en dus volgt, vermits de splimeruimte dimensie $n + k$ heeft (Stelling 4.1), dat deze functie eenduidig bepaald is.

Toepassing 4.3: Periodieke splinefunctie

Een **periodieke splinefunctie** is een splinefunctie die voldoet aan

$$\forall j \in [0, k-1] : \ s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b).$$

4.2 B-splines

Definitie 4.2: Gedeelde differentie

De gedeelde differentie van orde nul van een functie f in een punt x_i is gelijk aan

$$f[x_i] = f(x_i) = f_i.$$

De gedeelde differentie van orde $k = j - i$ voor $j > i$ van een functie f in de verschillende punten $x_i, \ldots, x_j$ wordt gedefinieerd als

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i} \left(= \Delta_t^k(x_i, \ldots, x_{i+k}) f(t)\right).$$

Eigenschap 4.1: Gedeelde differentie

1. De gedeelde differentie $f[x_i, \ldots, x_j]$ is lineair in f, d.w.z.
$$(af + bg)[x_i, \ldots, x_j] = af[x_i, \ldots, x_j] + bg[x_i, \ldots, x_j].$$
2. **Newton-vorm**: De interpolerende veelterm van graad $j - i$ door $(x_i, f_i), \ldots, (x_j, f_j)$ is gelijk aan:
$$p_{j-i}(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)(x - x_{i+1}) + \ldots + a_{j-i} \prod_{k=0}^{j-i-1} (x - x_{i+k}),$$
waarbij de coëfficiënten worden gegeven door:
$$a_k = f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$$
3. De gedeelde differentie $f[x_i, \ldots, x_j]$ is continu in de argumenten $x_i, \ldots, x_j$ als $f(x)$ $(j - i)$-maal differentieerbaar is met continue $(j - i)$-de afgeleide.
4. De gedeelde differentie van orde $j - i$ van een veelterm $p_m(x)$ van graad m met $m < j - i$, heeft de waarde nul, d.w.z. dat
$$\exists m < j - i : \; p_m[x_i, \ldots, x_j] = 0.$$
5. De gedeelde differentie $f[x_i, \ldots, x_j]$ is een lineaire samenstelling van de functie waarden $f_i, \ldots, f_j$, d.w.z. dat
$$f[x_i, \ldots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} \lambda_k f_k.$$
6. De **formule van Leibniz** voor de gedeelde differentie van een product van twee functies luidt als volgt:
$$f(x) = g(x)h(x) \;\Rightarrow\; f[x_i, \ldots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} g[x_i, \ldots, x_k]h[x_k, \ldots, x_j].$$

Definitie 4.3: Afgeknotte machtsfunctie

Een veelgebruikte functie in de numerieke wiskunde is de afgeknotte machtsfunctie, die gedefinieerd is als
$$(t - x)_+^k = \begin{cases} (t - x)^k & \text{als } t > x, \\ 0 & \text{als } t \leq x. \end{cases}$$

Definitie 4.4: Gewone B-spline

De gewone B-spline van graad k of orde $k + 1$ wordt gegeven door:
$$M_{i,k+1}(x) = \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t - x)_+^k.$$

Definitie 4.5: Genormaliseerde B-spline

De Genormaliseerde B-spline van graad k of orde $k+1$ wordt gegeven door:

$$N_{i,k+1}(x) = (t_{i+k+1} - t_i)M_{i,k+1}(x).$$

Stelling 4.2: Geldigheid van B-splines

De gewone B-splinefunctie $M_{i,k+1}(x)$ en de genormaliseerde B-splinefunctie $N_{i,k+1}(x)$ zijn splinefuncties.

Bewijs 4.1: Geldigheid van B-splines

Herneem de eigenschap dat de gedeelde differentie een lineaire samenstelling is van functiewaarden $f_i, \dots, f_j$ (zoals gezien in Propositie 4.1), namelijk:

$$f[x_i, \dots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} \lambda_k f_k.$$

De functie $M_{i,k+1}(x)$ is dus een lineaire samenstelling van afgeknotte-machtsfuncties van graad k van de volgende vorm:

$$1, x, x^2, \dots, x^k, (t_1 - x)_+^k, \dots, (t_{n-1} - x)_+^k.$$

Deze lineaire samenstelling vormt een basis van de vectorruimte van de splinefuncties van graad k met knooppunten $t_0, \dots, t_n$ en dus is $M_{i,k+1}(x)$ een splinefunctie. Hetzelfde geldt voor $N_{i,k+1}(x)$.

□

Eigenschap 4.2: B-spline - Eerste orde

$$M_{i,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} & \text{als } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} \quad , \quad N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Bewijs 4.2: B-spline - Eerste orde

Per definitie van $M_{i,k+1}(x)$ geldt dat

$$\begin{aligned} M_{i,1}(x) &= \Delta_t^1(t_i, t_{i+1})(t - x)_+^0 \\ &= \frac{1}{t_{i+1} - t_i}(t - x)_+ \\ &= \frac{(t_{i+1} - x)_+^0 - (t_i - x)_+^0}{t_{i+1} - t_i}. \end{aligned}$$

Het bovenste deel van de breuk is gelijk aan 1 als $t_i \leq x < t_{i+1}$ en 0 anders, hierdoor volgt dus:

$$M_{i,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} & \text{als } t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hieruit volgt ook $N_{i,1}(x)$, sinds dit neer komt op vermenigvuldigen met $(t_{i+1} - t_i)$.

Opmerking: Dit bewijs dient niet gekend te zijn, enkel grafisch inzien.

□

Eigenschap 4.3: B-spline

$$k \geq 1,\ x \in \Omega:\ M_{i,k+1}(x) = 0 \quad \text{met} \quad \Omega = (-\infty, t_i] \cap [t_{i+k+1}, \infty)$$

Bewijs 4.3: B-spline

We leidden vroeger reeds af dat

$$M_{i,k+1}(x) = \sum_{s=i}^{i+k+1} \lambda_s f_s \quad \text{met} \quad f_s = (t_s - x)_+^k.$$

Wanneer nu $x \geq t_{i+k+1}$, dan zijn alle f_s in bovenstaande formule nul. Als $x \leq t_i$, dan mogen we in de uitdrukking voor f_s het vervangen door equivalente $(t-x)^k$ en dit voor elke s. De gewone B-spline wordt dan:

$$M_{i,k+1}(x) = \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)^k.$$

Dat is identiek nul, want differentie van orde $k+1$ avn een veelterm van graad k is nul.

Opmerking: Dit bewijs dient niet gekend te zijn, enkel grafisch inzien.

□

Eigenschap 4.4: B-spline - Recursiebetrekkingen

- $M_{i,k+1}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k+1}-t_i} M_{i,k}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_i} M_{i+1,k}(x)$,
- $N_{i,k+1}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k}(x)$.

Bewijs 4.4: B-spline - Recursiebetrekkingen

Voor $k \geq 1$ kunnen we schrijven dat:

$$(t-x)_+^k = (t-x)_+^{k-1}(t-x).$$

We vullen dit in in de definitie van $M_{i,k+1}(x)$ en passen de formule van Leibniz voor gedeelde differentie (zie Eigenschap 4.1) toe, namelijk:

$$f(x) = g(x)h(x) \;\Rightarrow\; f[x_i, \ldots, x_j] = \sum_{k=i}^{j} g[x_i, \ldots, x_k]h[x_k, \ldots, x_j].$$

Omwille van de factor $(t - x)$, een veelterm van graad 1 in t, bevatten de meeste termen in de bovenstaande som een factor die gelijk is aan nul. We vinden:

$$\begin{aligned}
M_{i_k+1}(x) &= \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)_+^k \\
&= \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})\{(t-x)_+^{k-1}(t-x)\} \\
&= \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)_+^{k-1} \cdot \Delta_t^0(t_{i+k+1})(t-x) + \\
&\quad\; \Delta_t^k(t_i, \ldots, t_{i+k})(t-x)_+^{k-1} \cdot \Delta_t^1(t_{i+k}, t_{i+k+1})(t-x) \\
&= \Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)_+^{k-1}(t_{i+k+1} - x) + M_{i,k}(x)
\end{aligned}$$

Men gebruikt nu de recursieve definitie van gedeelde differentie, om de differentie van orde $k+1$ in bovenstaande uitdrukking te schrijven als een lineaire combinatie van twee gedeelde differenties van orde k. Rekening houdend met de definitie van B-spline, verkrijgt men:

$$M_{i,k+1}(x) = \frac{M_{i+1,k}(x) - M_{i,k}(x)}{t_{i+k+1} - t_i}(t_{i+k+1} - x) + M_{i,k}(x).$$

Hieruit volgt de recursiebetrekking voor $M_{i,k+1}(x)$. De recursiebetrekking voor $N_{i,k+1}(x)$ volgt op analoge wijze.

Opmerking: Dit bewijs dient niet gekend te zijn, enkel grafisch inzien.

□

Eigenschap 4.5: B-spline

$$k \geq 1,\; x \in (t_i, t_{i+k+1}):\; M_{i,k+1}(x) > 0$$

Bewijs 4.5: B-spline

We geven een bewijs gebaseerd op de recursiebetrekking en maken gebruik van volledige inductie.

Voor $k = 1$ luidt de recursiebetrekking

$$M_{i,2}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+2} - t_i}M_{i,1}(x) + \frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}}M_{i+1,1}(x).$$

Schrijven we het rechterlid als $AB + CD$, dan is $A > 0$ voor $x \in (t_i, \infty)$, $B > 0$ voor $x \in [t_i, t_{i+1})$ en nul daarbuiten, $C > 0$ voor $x \in (-\infty, t_{i_2})$, $D > 0$ voor $x \in [t_{i_1}, t_{i+2})$ en nul daarbuiten. Uit dit alles volgt dat $M_{i,2}(x) > 0$ als $x \in (t_i, t_{i+2})$.

Voor de inductie stap bekijken we de recursiebetrekking M_i^{k+1},

$$M_{i,k+1}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k+1} - t_i} M_{i,k}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_i} M_{i+1,k}(x).$$

Schrijven we ook hier het rechterlid als $AB+CD$, dan is $A > 0$ voor $x \in (t_i, \infty)$, $B > 0$ als $x \in [t_i, t_{i+k})$ en nul daarbuiten, $C > 0$ voor $x \in (-\infty, t_{i+k+1})$, $D > 0$ als $x \in [t_{i+k}, t_{i+k+1})$ en nul daarbuiten. Er volgt dat $M_{i,k+1}(x) > 0$ als $x \in (t_i, t_{i+k+1})$.

Opmerking: Dit bewijs dient niet gekend te zijn, enkel grafisch inzien.

□

Eigenschap 4.6: B-spline

$$k \geq 1,\ \forall j \in [0, k-1] :\ M_{i,k+1}^{(j)}(t_i) = M_{i,k+1}^{(j)}(t_{i+k+1}) = 0$$

Bewijs 4.6: B-spline

Sinds we bewezen hebben dat een B-spline een geldige splinefunctie is (zie Bewijs 4.1), volgt het te bewijzen uit de tweede eigenschap van splinefuncties in tandem met Eigenschap 4.3.

Opmerking: Dit bewijs dient niet gekend te zijn, enkel grafisch inzien.

□

Eigenschap 4.7: B-spline

$$k \geq 1,\ x \in [t_0, t_n] :\ \sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k+1}(x) = 1$$

Bewijs 4.7: B-spline

We gebruiken de recursiebetrekking en Eigenschap 4.3 om aan te tonen dat $x \in [t_j, t_{j+1})$ geldt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k+1}(x) &= \sum_{i=j-k}^{j} N_{i,k+1}(x) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j} \left\{ \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k}(x) \right\} \\
&= \frac{x - t_{j-k}}{t_j - t_{j-k}} N_{j-k,k}(x) + \sum_{i=j-(k-1)}^{j} \left\{ \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_i} \right\} N_{i,k}(x) \\
&\quad + \frac{t_{j+k+1} - x}{t_{j+k+1} - t_{j+1}} N_{j+1,k}(x)
\end{aligned}$$

Uit Eigenschap 4.3 volgt dat $N_{j-k,k}(x)$ en $N_{j+1,k}(x)$ identiek nul zijn voor $x \in [t_j, t_{j+1}]$. Dus:

$$\sum_{i=j-k}^{j} N_{i,k+1}(x) = \sum_{i=j-(k-1)}^{j} N_{i,k}(x).$$

We kunnen op analoge manier verder gaan. We vinden

$$\sum_{i=j-k}^{j} N_{i,k+1}(x) = \ldots = \sum_{i=j-1}^{j} N_{i,2}(x) = N_{j,1}(x).$$

Voor $x \in [t_j, t_{j+1})$ is het rechterlid gelijk aan 1. Dat bewijst de stelling voor alle $x \in [t_0, t_n)$. Het geval $x = t_n$ volgt uit de continuïteit van de functie

$$k \geq 1: \sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k+1}(x).$$

Opmerking: Dit bewijs dient niet gekend te zijn, enkel grafisch inzien.

□

Eigenschap 4.8: B-spline

$$k \geq 1: \; N'_{i,k+1}(x) = k\left(\frac{N_{i,k}(x)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{N_{i+1,k}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}\right)$$

Bewijs 4.8: B-spline

In het aanstaande bewijs zal gebruik gemaakt worden van volgende ongeziene eigenschap van de afgeknotte machtsfunctie:

$$\frac{d}{dx}(t-x)_+^k = -k(t-x)_+^{k-1}.$$

Deze formule is steeds geldig, uitgezonderd voor het berekenen van de afgeleide in het punt $x = t$ voor $k = 1$. In dat geval geeft de formule de waarde van de rechterafgeleide.

We bewijzen nu het gestelde:

$$\begin{aligned} N'_{i,k+1}(x) &= \frac{d}{dx}\left\{(t_{i+k+1} - t_i)\Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)_+^k\right\} \\ &= (t_{i+k+1} - t_i)\Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})\frac{d}{dx}(t-x)_+^k \\ &= -k(t_{i+k+1} - t_i)\Delta_t^{k+1}(t_i, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)_+^{k-1} \\ &= -k\left(\Delta_t^k(t_{i+1}, \ldots, t_{i+k+1})(t-x)_+^{k-1} - \Delta_t^k(t_i, \ldots, t_{i+k})(t-x)_+^{k-1}\right) \\ &= k\left(\frac{N_{i,k}(x)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{N_{i+1,k}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}\right). \end{aligned}$$

Opmerking: Dit bewijs dient niet gekend te zijn, enkel grafisch inzien.

□

Eigenschap 4.9: Splinefunctie - B-splinevoorstelling

De splinefunctie $s(x)$ kan worden voorgesteld als een lineaire combinatie van $n+k$ B-splines,

$$s(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} c_i N_{i,k+1}(x).$$

Stelling 4.3: de Boor

Zij $x \in [t_j, t_{j+1})$. Dan geldt $s(x) = c_j^{[k]}$. De constante $c_i^{[0]} = c_i$ en $c_i^{[r]}$ wordt gevonden uit

$$c_i^{[r]} = \alpha_{i,r} c_i^{[r-1]} + (1-\alpha_{i,r}) c_{i-1}^{[r-1]} \quad \text{met} \quad \alpha_{i,r} = \frac{x - t_i}{t_{i+k+1-r} - t_i}.$$

Bewijs 4.9: de Boor

We schrijven $s(x)$ als een lineaire combinatie van B-splines van orde $k+1$, waarna we Eigenschap 4.4 hanteren en vereenvoudigen:

$$\begin{aligned}
s(x) &= \sum_{i=-k}^{n-1} c_i N_{i,k+1}(x) \\
&= \sum_{i=-k}^{n-1} c_i \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k}(x) \right) \\
&= \sum_{i=-(k-1)}^{n-1} c_i \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k}(x) + \sum_{i=-k}^{n-2} c_i \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k}(x) \\
&= \sum_{i=-(k-1)}^{n-1} \left(c_i \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} + c_{o-1} \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_i} \right) N_{i,k}(x) \\
&= \sum_{i=-(k-1)}^{n-1} c_i^{[1]} N_{i,k}(x).
\end{aligned}$$

Schrijven we $c_i^{[0]} = c_i$, dan vinden we de $c_i^{[1]}$-coëfficiënten als

$$c_i^{[1]} = \alpha_{i,1} c_i^{[0]} + (1-\alpha_{i,1}) c_{i-1}^{[0]} \quad \text{met} \quad \alpha_{i,1} = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i}.$$

Op een analoge manier kunnen we verder gaan en vinden dat

$$s(x) = \sum_{i=-(k-r)}^{n-1} c_i^{[r]} N_{i,k+1-r}(x) = \ldots = \sum_{i=o}^{n-1} c_i^{[k]} N_{i,1}(x).$$

waarbij $c_i^{[r]}$ gegeven wordt door de recursiebetrekking van het gestelde. Voor $x \in [t_j, t_{j+1})$ zijn alle

B-splines van eerste orde gelijk aan nul, op $N_{j,1}(x)$ na. Die neemt er de waarde 1 aan. We vinden dus:

$$s(x) = c_j^{[k]}.$$

□

Stelling 4.4: Differentiëren van een splinefunctie

De afgeleide van orde r van een splinefunctie $s(x)$ voldoet aan

$$s^{(r)}(x) = \sum_{i=-(k-r)}^{n-1} c_i^{(r)} N_{i,k+1-r}(x)$$

met $c_i^{(0)} = c_i$ en $c_i^{(r)} = (k+1-r)\frac{c_i^{(r-1)} - c_{i-1}^{(r-1)}}{t_{i+k+1-r} - t_i}$. Indien $r = k$, dan geeft bovenstaande formule de rechterafgeleide.

Bewijs 4.10: Differentiëren van een splinefunctie

We bewijzen per inductie, beginnende bij het basisgeval $r = 1$.

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \sum_{i=-k}^{n-1} c_i^{(0)} N'_{i,k+1}(x) \\
&= \sum_{i=-k}^{n-1} c_i^{(0)} k \left(\frac{N_{i,k}(x)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{N_{i+1,k}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right) \\
&= \sum_{i=-(k-1)}^{n-1} c_i^{(1)} N_{i,k}(x) \quad \text{met} \quad c_i^{(1)} = k\frac{c_i^{(0)} - c_{i-1}^{(0)}}{t_{i+k} - t_i}
\end{aligned}$$

Stel nu dat het geldt voor $r - 1$, namelijk:

$$s^{(r-1)}(x) = \sum_{i=-(k+1-(r-1))}^{n-1} c_i^{(r-1)} N_{i,k+1-(r-1)}(x)$$

Door deze expressie af te leiden, kunnen we aantonen dat het ook geldt voor r wegens inductie:

$$\begin{aligned}
s^{(r)}(x) &= \sum_{i=-(k+1-(r-1))}^{n-1} c_i^{(r-1)} N'_{i,k+1-(r-1)}(x) \\
&= \sum_{i=-(k+1-r)}^{n-1} c_i^{(r-1)} (k+1-r) \left(\frac{N_{i,k+1-r}(x)}{t_{i+k+1-r} - t_i} - \frac{N_{i+1,k+1-r}(x)}{t_{i+k+1-(r-1)} - t_{i+1}} \right) \\
&= \sum_{i=-(k+1-r)}^{n-1} c_i^{(r)} N_{i,k+1-r}(x) \quad \text{met} \quad c_i^{(r)} = (k+1-r)\frac{c_i^{(r-1)} - c_{i-1}^{(r-1)}}{t_{i+k+1-r} - t_i}
\end{aligned}$$

□

Data, Grafen en Eigenwaarden

5 Grafen en eigenwaarden in datawetenschappen

6 Eigenwaardenalgoritmes

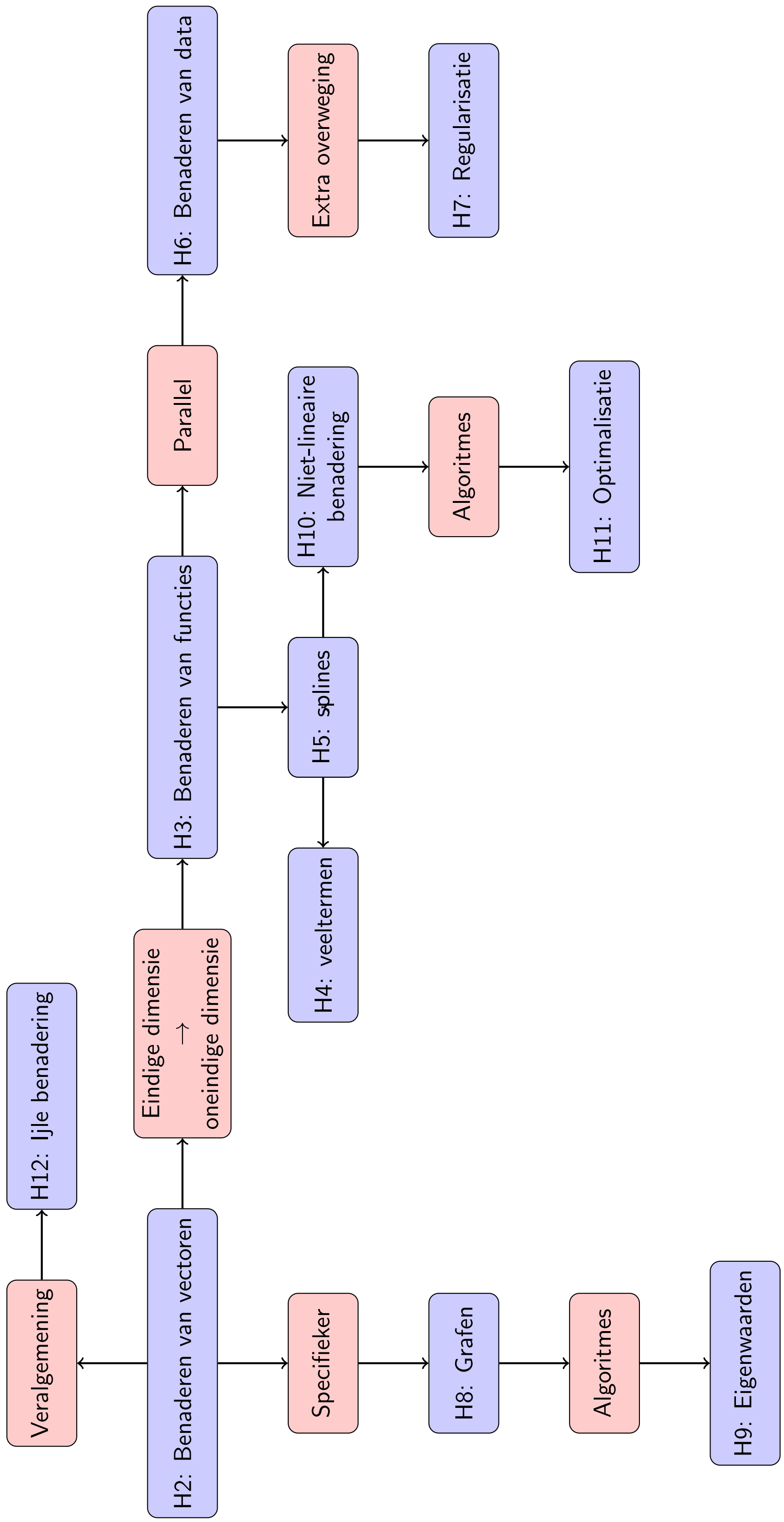
Niet-lineaire Benaderingsproblemen

7 Niet-lineaire benaderingsproblemen

8 Optimalisatie-algoritmes

9 Ijle representatie en benaderingen

Appendix



H2: Benaderen van vectoren
Veralgemening
H12: Ijle benadering
Specifieker
H8: Grafen
Algoritmes
H9: Eigenwaarden
Eindige dimensie
→
oneindige dimensie
H3: Benaderen van functies
H5: splines
H4: veeltermen
H10: Niet-lineaire benadering
Algoritmes
H11: Optimalisatie
Parallel
H6: Benaderen van data
Extra overweging
H7: Regularisatie