Dôsledôk: $DSPACE(\log n) \subseteq NSPACE(\log n) \subseteq P \subseteq NP = PSPACE \subseteq EXP \subseteq NEXT$ – druhá inklúzia vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia (b), tretia z (a), rovnosť zo Savitchovej vety, predposledná inklúzia opäť z (b).

Poznámka: Nie je známe, či

- $DSPACE(\log n) \subsetneq NP$ ($P =^? NP$).
- $P \subsetneq PSPACE$. ($P =^? NP$).
- $NP \subsetneq NEXP$.

Je známe, že:

- $NSPACE(\log n) \subsetneq PSPACE$ (Savitch a pamäťová hierarchia).
- $P \subsetneq EXP$ (časová hierarchia).

1 Translačná lema

Tvrdenie: Ak $NSPACE(n^4) \subseteq NSPACE(n^3)$, potom $NSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^{15})$.

Dôkaz: Nech $L_1 \in NSPACE(n^{20})$, teda existuje nedeterministický Turingov stroj M_1 akceptujúci L_1 s pamäťou n^{20}.

$$L_2 = \{x\#^i \mid x \in L_1 \wedge |x|^5\}$$

Nech M_2 je nedeterministický Turingov stroj, ktorý na vstupe $x\#^i$ najprv overí, či $|x\#^i| = |x|^5$. Ak áno, potom sa na vstupe $x\#^i$ správa rovnako, ako M_1 na x.

M_2 akceptuje L_2 s pamäťou n, lebo $|x\#^i|^4 = (|x|^5)^4 = x^{20}$ a M_1 akceptuje L_1 s pamäťou n^{20}. $L_2 \in NSPACE(n^4)$. Z predpokladu tvrdenia vyplýva $L_2 \in NSPACE(n^3)$, teda existuje nedeterministický Turingov stroj M_3 akceptujúci L_2 s pamäťou n^3.

Nech M_4 je nedeterministický Turingov stroj, ktorý má na vstupe x. Najprv zostrojí (na niektorej pracovnej páske) reťazec $x\#^i$, $|x\#^i| = |x|^5$. Potom sa na "vstupe" $x\#^i$ správa rovnako, ako M_3 na $x\#^i$. M_4 akceptuje L_1 s pamäťou n^{15}, lebo $|x|^{15} - (|x|^5)^3 = |x\#^i|^3$ a $L_1 \in NSPACE(n^{15})$.

Lema (translačná): Nech $S_1(n)$, $S_2(n)$, $f(n)$ sú páskovo konštruovateľné, $S_2(n) \geq n$, $f(n) \geq n$. Potom $NSPACE(S_1(n)) \subseteq NSPACE(S_2(n)) \Rightarrow NSPACE(S_1(f(n))) \subseteq NSPACE(S_2(f(n)))$.

Tvrdenie: $NSPACE(n^3) \subsetneq NSPACE(n^4)$.

Dôkaz: Nech by $NSPACE(n^4) \subseteq NSPACE(n^3)$. Aplikáciou translačnej lemy pre $f(n) = n^3$, $f(n) = n^4$, $f(n) = n^5$ a $S_1(n) = n^4$, $S_2(n) = n^3$ postupne dostaneme:

$$\left.\begin{array}{lcl} NSPACE(n^{12}) & \subseteq & NSPACE(n^9) \\ NSPACE(n^{16}) & \subseteq & NSPACE(n^{12}) \\ NSPACE(n^{20}) & \subseteq & NSPACE(n^{15}) \end{array}\right\} NSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^9).$$

Zo Savitchovej vety a vety o pamäťovej hierarchii platí

$$\left.\begin{array}{lcl} NSPACE(n^9) & \subseteq & DSPACE(n^{18}) \\ DSPACE(n^{18} & \subsetneq & DSPACE(n^{20}) \end{array}\right\} NSPACE(n^{20}) \subsetneq DSPACE(n^{20}) \subseteq NSPACE(n^{20})$$

, čo je spor.

Veta: Ak $\varepsilon > 0$ a $r \geq 0$, potom $NSPACE(n^r) \subsetneq NSPACE(n^{r+\varepsilon})$.

2 Vety o medzere a o zrýchľovaní

Tvrdenie: Existuje rekuzrívna funkcia $S(n) \geq n$, teda $DSPACE(S(n)) = DSPACE(2^{S(n)})$.

Dôkaz: Nech $m \in N$, M je ľubovoľný deterministický Turingov stroj, x je ľubovoľný vstup, s je maximálna veľkosť použitej pamäte počas výpočtu M na x; $s \in N \cup \{\infty\}$.

$$TEST(m, M, x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } s \in < m+1, 2^m > \\ 0 & \text{ak } s \notin < m+1, 2^m > \end{cases}$$

Otázka: Existuje algorigmus počítajúci $TEST \forall m, M, x$?

Odpoveď: Áno.

Dôvod: Označme t počet rôznych konfigurácií, do ktorých sa môže dostať M na x použijúc najviac pamäť 2^m. Simulujme M na x počas $t+1$ krokov, pričom existujú 3 prípady:

1. M sa zastavil na x do času t, teda vieme určiť s a teda aj $TEST(m, M, x)$. V čase $t+1$ má stroj M použitú pamäť najviac 2^m.
2. V čase $t+1$ má M použitú pamäť $\leq 2^m$, potom platí to isté, ako v predchádzajúcom prípade.
3. V čase $t+1$ má M použitú pamäť $> 2^m$, a teda $TEST(m, M, x) = 0$, lebo $s > 2^M$ (aj keď nepoznáme s).

Nech $M_1, M_2, ...$ je ľubovoľná efektívne očíslovaná postupnosť všetkých Turingovych strojov (t.j. z čísla i vieme algoritmicky zostrojiť M_i.).

Algoritmus pre $S(n)$: Nech $s_1 < s_2 < ... < s_p$ sú všetky veľkosti použitej pamäte v čase zastavenia sa niektorého stroja M_i, $i \leq n$ na niektorom $x \in \{0,1\}^n$.

Cieľ: Určiť $S(n)$ tak, aby platilo $S_i \notin < S(n)+1, 2^S(n) >$ pre $i = 1, 2, \ldots, p$. Hľadáme dosť veľký interval, do ktorého nepadne žiadne s_i.

Pre $m \leftarrow n, n+1, \ldots$, ak $TEST(m, M, x) = 0 \forall M_j (j \leq n) \wedge x \in \{0,1\}^n$, potom $S(n) = m$. (také m existuje, lebo pre každú dvojicu (M_j, x) (ktorých je $n2^n$, teda konečne veľa) platí $TEST(m, M, x) = 1$ len pre konečne veľa m (teda $m < s \leq 2^m$), ale algoritmus skúša nekonečne veľa $m \geq n$).

Nech $L \in DSPACE(2^{S(n)})$, potom existuje M_k akceptujúci L s pamäťou najviac $2^S(n)$. Nech $n \geq k$, $x \in \{0,1\}^n$. M_k je deterministický, a teda M_k zastaví na x s použitou pamäťou $S_j \leq 2^{S(n))}$, $1 \leq j \leq p$. Potom $S_j \leq S(n)$, teda M_k sa zastaví na každom x dĺžky k s pamäťou $\leq S(n)$, teda $L \in DSPACE(S(n))$.

Veta (Gap theorem): Pre každú rekurzívnu funkciu $g(n) \geq n$ existuje rekurzívna funkcia $S(n) \geq n$ taká, že $DSPACE(S(n)) = DSPACE(g(S(n)))$.

Veta (Speed up theorem): Pre každú rekurzívnu funkciu $f(n) \geq n^2$ existuje rekurzívny jazyk L taký, že pre ľubovoľný deterministický Turingov stroj M akceptujúci L v čase $T(n)$ existuje deterministický Turingov stroj M' akceptujúci L v čase $T'(n)$ tak, že platí

$$\mathcal{F}(T'(n)) \leq T(n)$$

skoro pre všetky n.

Poznámka: Napríklad pre $f(n) = 2^n$ platí: $2^{T'(n)} < T(n)$, teda $T'(n) \leq \log T(n)$.