0.1 Riešenie cvičenia 7.5

Zadanie

Dokážte alebo vyvráťte: Nech f je prostá unárna primitívne rekurzívna funkcia. Potom existuje primitívne rekurzívna funkcia g taká, že $\forall n : g(f(n)) = n$.

Riešenie

Toto riešenie je úmyselne dlhé. Netreba sa ho ale zľaknúť. Samotné riešenie by sa dalo napísať na pár riadkov, tu je však navyše aj jeden možný myšlienkový proces, ktorý k nemu vedie.

Zamyslime sa, ako k takejto úlohe pristupovať. Na úvod môžeme skúsiť dokázať, že tvrdenie platí. Keďže f vôbec nepoznáme, asi bude tento dôkaz vyzerať spôsobom „zoberiem program, ktorý počíta f, a pomocou neho zostrojíme nový program, ktorý bude počítať g“. No ale bez nejakej hlbšej analýzy toho, čo a ako f počíta, máme v princípe jedinú možnosť, ako naprogramovať g:

```
g(y):
    x = 0
    while f(x) != y: x += 1
    return x
```

Tento postup má ale hneď dva problémy. Prvým je použitie while-cyklu, ktoré nám môže pokaziť primitívnu rekurzívnosť. A druhým je to, že podľa zadania f nemusí byť bijektívna. Môže teda existovať y také, že $\forall x : f(x) \neq y$. No a čo spraví náš program pre g, keď dostane takéto y na vstupe? Bude bežať do nekonečna. To veru nechceme. Vyzerá to teda, že k dôkazu tvrdenia priamočiara cesta nevedie. Možno budeme úspešnejší pri snahe vyvrátiť ho.

Čo potrebujeme na vyvrátenie tvrdenia? Nájsť funkciu f, ktorá sa počíta „ľahko“ (teda napr. vieme jej časovú zložitosť vyjadriť nejakou prim. rek. funkciou), ale každá inverzná funkcia k nej sa počíta „ťažko“ (teda nie je primitívne rekurzívna).

Funkcií, ktoré nie sú primitívne rekurzívne, nepoznáme zatiaľ veľa, v princípe len dve – Ackermannovu a univerzálnu pre primitívne rekurzívne funkcie. Asi sa teda oplatí najskôr skúšať variácie na tieto známe témy. Univerzálna primitívne rekurzívna funkcia sa správa divoko, navyše má ďaleko do prostej funkcie. Nádejnejšie vyzerá Ackermannova funkcia. Intuitívne: jej inverzná funkcia by mohla byť primitívne rekurzívna, lebo počítame z veľkej hodnoty malú. Uvidíme.

Tak teda prvý pokus. Môžeme ako g chcieť mať priamo unárnu Ackermannovu funkciu a? (Teda funkciu, pre ktorú $\forall n : a(n) = A(n, n)$. Špeciálne teda $a(0) = A(0, 0) = 1$, $a(1) = A(1, 1) = 3$, $a(2) = A(2, 2) = 7$, $a(3) = A(3, 3) = 61$ a $a(4)$ už je nepredstaviteľne obrovské.)

Nemôžeme. Totiž také f, ku ktorému by bola a inverznou funkciou, by muselo $a(0)$ zobraziť na 0, $a(1)$ na 1, $a(2)$ na 2, atď. A tým sme si už minuli všetky prirodzené čísla a neostalo nám žiadne, ktoré by sme mohli vrátiť ako $f(0)$ či ako $f(47)$.

To je ale len syntaktický problém, ktorý vieme ľahko vyriešiť vhodným pomasírovaním oboch funkcií. Zvolíme teda funkciu φ definovanú nasledovným predpisom: ak $\exists n : x = a(n)$, tak $\varphi(x) = 2n$, inak $\varphi(x) = 2x + 1$.

Takto upravená funkcia teda robí nasledovné: ak na vstupe dostaneš nejaký výstup Ackermannovej funkcie, vráť párne číslo (ktoré je dvojnásobkom príslušného vstupu pre ňu), inak vráť nepárne číslo. Naša funkcia φ je teda nejakou vhodne upravenou inverznou Ackermannovou funkciou.

Uvedomte si ešte, že korektnosť definície φ aj jej prostosť obe vyplývajú z toho, že funkcia a je ostro rastúca, a teda prostá.

Začíname už možno mať pocit, že toto by mohol byť ten protipríklad, ktorý hľadáme. Potrebujeme teda dokázať dve tvrdenia:
– že je naša funkcia φ primitívne rekurzívna,
– že žiadna funkcia ψ, pre ktorú platí $\forall n : \psi(\varphi(n)) = n$, primitívne rekurzívna nie je.

Začneme tým druhým. Predpokladajme, že máme takúto funkciu ψ, ktorá je primitívne rekurzívna. Ako pomocou ψ určiť hodnotu $x = a(z) = A(z, z)$ pre konkrétne z? Vieme, že pre toto konkrétne x vráti funkcia φ hodnotu $2z$. A teda ψ musí pre vstup $2z$ vrátiť hodnotu x.

Inými slovami, unárnu Ackermannovu funkciu a vieme vypočítať pomocou ψ nasledovným predpisom: $\forall z : a(z) = \psi(2z)$. A to je spor, lebo potom by aj a musela byť primitívne rekurzívna.

Zostáva zdôvodniť, že je φ primitívne rekurzívna. Na to budeme potrebovať nasledovné ľahko dokázateľné tvrdenie: $\forall m, n : A(m, n) > m \wedge A(m, n) > n$. (Dôkaz indukciou.)

My hľadáme pre dané x konkrétne n také, že $A(n, n) = x$. To môžeme spraviť tak, že nájdeme úplne všetky m, n také, že $A(m, n) \leq x$ (a vypočítame aj ich hodnoty). A na to zjavne stačí uvažovať len $m, n < x$.

Celý výpočet môžeme teda spraviť nasledovným primitívne rekurzívnym programom:

```
sprav pole A[0..x-1][0..x-1]
pre m od 0 po x-1:
    pre n od 0 po x-1:
        ak m==0:
            A[m][n] = n+1
        inak:
            ak n==0:
                A[m][0] = A[m-1][1]
            inak:
                tmp = A[m][n-1]
                if tmp >= x:
                    A[m][n] = x+1
                inak:
                    A[m][n] = A[m-1][tmp]
```

(Hodnotu $x + 1$ použijeme pre všetky políčka, ktorých skutočná hodnota je väčšia ako x. Polia sme síce v našom jazyku z prednášky zatiaľ nepovolili, ale ľahko si domyslíte, že konečne veľké pole vieme primitívne rekurzívne zakódovať do jedného čísla.)

Program pre funkciu φ teda zostrojí vyššie popísaným spôsobom pole A a následne prezrie všetky políčka na jeho uhlopriečke. Ak nájde i také, že $A[i][i] = x$, vráti $2i$, inak vráti $2x + 1$.