Final 2009

1 (True or False) and Justify [20 bodov]

Uveďte, či je tvrdenie pravdivé a nanajvýš tromi vetami svoj názor zdôvodnite.

(Úplne správna odpoveď je za 2.5 boda. Správna odpoveď úplne bez zdôvodnenia je za 0.5 boda. Nesprávna odpoveď, ako aj správna odpoveď s úplne nesprávnym zdôvodnením, sú za 0 bodov.)

Q1 Definujme $LHALT = \{n \mid$ Turingov stroj číslo n na vstupe n zastane po max. n krokoch$\}$. Množina $LHALT$ je úplná pri many-to-one redukcii.

Q2 Existujú rekurzívne vyčísliteľné množiny A a B také, že $A \cup B$ je rekurzívna, ale $A \cap B$ nie je rekurzívna.

Q3 Nech P je program v Pascale, ktorý počíta primitívne rekurzívnu funkciu, pričom niekde v P sa vyskytuje priradenie „`x:=4;`“. Ak toto priradenie zmeníme na „`x:=7;`“, dostaneme opäť program počítajúci primitívne rekurzívnu funkciu.

Q4 Majme nejaké efektívne číslovanie unárnych primitívne rekurzívnych funkcií. Nech p_n je funkcia číslo n v tomto číslovaní. Definujme $f(n) = p_n(n)$. Potom f je nutne primitívne rekurzívna.

Q5 Existuje nejaká množina $M_{\text{sviňa}} \subseteq \mathbb{N}$, ktorá je najťažšia spomedzi úplne všetkých množín pri rekurzívnej many-to-one redukcii. Inými slovami, existuje $M_{\text{sviňa}} \subseteq \mathbb{N}$ taká, že $\forall A \subseteq \mathbb{N} : \ A \leq_m M_{\text{sviňa}}$.

Q6 Nech D je sada Wangovych dlaždíc, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: pre každé dve dlaždice $x, y \in D$, $x \neq y$ platí, že spodná strana x je odlišná od hornej strany y. Potom existuje deterministický konečný automat, ktorý rozpoznáva rovnaký jazyk ako D.

Q7 Nech M je Minského registrový stroj, ktorý počíta unárnu funkciu $f(x)$. Navyše o M vieme, že jeho výpočet pre ľubovoľné x skončí a počas tohto výpočtu hodnota v žiadnom registri neprekročí 47^x. Potom f je primitívne rekurzívna.

Q8 Ak sú A a B rekurzívne vyčísliteľné, tak aj $\{a + b \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$ je nutne rekurzívne vyčísliteľná.

2 Riešenie: (True or False) and Justify

Q1 **FALSE.** Množina $LHALT$ je rekurzívna: Náš program načíta n, zostrojí n-tý Turingov stroj, odsimuluje jeho n krokov a podľa toho, čo sa stane, odpovie a tak či tak skončí.

Q2 **TRUE.** Napríklad $A = \mathbb{N}$ a $B = HALT$.

Q3 **FALSE.** Napr. P, ktorý má vstupy `x` a `y` a ktorého telo hlavnej funkcie vyzerá približne nasledovne:

```
begin x:=4; if (x=4) then return y else return A(y,y); end.
```

Samozrejme, `A(m,n)` je volanie implementácie Ackermannovej funkcie.

Q4 **FALSE.** Keby bola, musela by byť primitívne rekurzívna aj funkcia $g(n) = f(n) + 1$, tá sa ale líši od každej primitívne rekurzívnej funkcie.

Q5 **FALSE.** Možných množín A je nespočítateľne veľa. Na druhej strane, všetkých rekurzívnych funkcií je len spočítateľne veľa, a každá z nich funguje ako redukcia pre práve jednu A. Preto nutne pre ľubovoľnú M existuje dokonca nespočítateľne veľa A takých, že $A \not\leq_m M$.

Q6 **TRUE.** Ak existuje korektné dláždenie slova w sadou D, tak existuje korektné dláždenie, ktoré má len jeden riadok – lebo v ľubovoľnom inom platí, že posledný riadok je zhodný s predposledným, a teda ho môžeme odstrániť. Existenciu jednoriadkového dláždenia ľahko skontrolujeme konečným automatom.

Q7 **TRUE.** Všetkých možných konfigurácií na vstupe x je $c \cdot 47^{xr}$, kde r je počet registrov a c počet inštrukcii stroja M. Funkcia $g(x) = c \cdot 47^{xr}$ je primitívne rekurzívna a zároveň udáva horný odhad časovej zložitosti výpočtu stroja M, preto podľa vety o primitívne rekurzívnej časovej zložitosti je f primitívne rekurzívna.

Q8 **TRUE.** Striedavo generujeme prvky A a B a zakaždým vyrobíme všetky možné súčty už vyrobených dvojíc.

3 Formalizmus [10 bodov]

V tejto úlohe klaďte hlavný dôraz na presnosť a korektnosť práce s formalizmom z prednášky.

Uvažujme jazyk **predikátovej logiky prvého rádu**, ktorý obsahuje symboly `01+*=¬∧∨→∀∃()uvwxyzP`. Všetkým symbolom priraďujeme v našom svete ich tradičnú interpretáciu v rámci aritmetiky na prirodzených číslach. (Symboly `uvwxyz` predstavujú premenné, symbol `P` predstavuje binárny predikát.)
Ku každému z nasledujúcich tvrdení zostrojte jeden možný reťazec, ktorý mu zodpovedá.

a) (2 body) „x delí y“
b) (3 body) „súčin dvoch nenulových čísel je vždy väčší ako ich súčet“
c) (3 body) „pravdivosť P závisí len od súčtu jeho vstupov“
d) (2 body) „existuje binárny predikát, ktorý nikdy nevráti hodnotu true“

4 Riešenie: Formalizmus

Nižšie uvedené riešenia nie sú jediné správne.

a) `∃z(x*z=y)`

b) Tvrdenie $x > y$ vieme sformalizovať napr. nasledovne: `(∃u(x=y+u+1))`.
(Nie je to jediný spôsob. Iná možnosť by bola napr. `(∃u((x=y+u)∧(¬(u=0))))`.)

Pomocou symbolu > by sme vedeli naše tvrdenie sformalizovať nasledovne:
`∀x(∀y((x>0∧y>0)→(x*y>x+y)))`.

Po rozpísaní > teda dostávame:
`∀x(∀y(((∃u(x=u+1))∧(∃v(y=v+1)))→(∃w(x*y=x+y+w+1))))`

c) `∀x(∀y(∀u(∀v((x+y=u+v)→((P(x,y)→P(u,v))∧(P(u,v)→P(x,y)))))))`
(slovne: ak majú dva vstupy (x, y) a (u, v) rovnaký súčet, tak $P(x, y)$ platí práve vtedy, ak aj $P(u, v)$.)

d) chyták: takéto tvrdenie nevieme v rámci logiky prvého rádu formalizovať

5 Známa pôda [15 bodov]

V tejto úlohe sa pýtam na priamo odprednášané veci, ukážte, že im dostatočne rozumiete.

a) (10 bodov) Nájdite všetky dvojice množín (A, B), pre ktoré platí, že A je rekurzívna a $A \equiv_m B$.
b) (5 bodov) Dokážte/vyvráťte: Ak B je rekurzívne vyčísliteľná a $A \leq_m B$, tak A je rekurzívne vyčísliteľná.

6 Riešenie: Známa pôda

Lema 1: Ak platí $B \leq_m A$ a A je rekurzívna, tak aj B je rekurzívna.
Dôkaz: Keďže $B \leq_m A$, existuje rekurzívna f taká, že $\forall b : b \in B \iff f(b) \in A$. Keďže A je rekurzívna, má rekurzívnu charakteristickú funkciu χ_A. Pre charakteristickú funkciu množiny B zjavne platí $\chi_B(x) = \chi_A(f(x))$, a teda je nutne aj χ_B rekurzívna.
Dôsledok 1: Do úvahy teda prichádzajú len dvojice (A, B), kde sú obe množiny rekurzívne.

Lema 2: Ak sú A a B rekurzívne množiny, $B = \emptyset$ a $B \neq \mathbb{N}$, tak $A \leq_m B$.
Dôkaz: Zoberme ľubovoľné $b \in B$ a $\overline{b} \notin B$. Nech χ_A je charakteristická funkcia množiny A. Definujme $f(x) = b\chi_A(x) + \overline{b}(1 - \chi_A(x))$. Zjavne f je rekurzívna (lebo χ_A je rekurzívna) a tiež zjavne je f many-to-one redukciou A na B, q.e.d.

Lema 3: Ak A je neprázdna, tak neplatí $A \leq_m \emptyset$. Ak A nie je rovná $\mathbb{N}$, tak neplatí $A \leq_m \mathbb{N}$.
Dôkaz: V prvom prípade existuje $a \in A$, ktorý nemáme na čo zobraziť. V druhom prípade existuje $a \notin A$, ktorý nemáme na čo zobraziť.

Riešenie podúlohy a): Sú to dvojice $(\emptyset, \emptyset)$, $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ a (A, B), kde A a B sú rekurzívne množiny rôzne od $\emptyset$ a $\mathbb{N}$.

Dôkaz: Ľahko overíme, že $(\emptyset, \emptyset)$ aj $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vyhovujú zadaniu. Zvyšok vyplýva z Dôsledku 1, Lemy 2 a Lemy 3.

Riešenie podúlohy b): Tvrdenie platí.
Dôkaz: Analogicky s Lemou 1. Keďže $A \leq_m B$, existuje rekurzívna f taká, že $\forall a : a \in A \iff f(a) \in B$. Keďže B je rekurzívne vyčísliteľná, je jej čiastočná charakteristická funkcia χ'_B čiastočne rekurzívna. Pre čiastočnú charakteristickú funkciu množiny A zjavne platí $\chi'_A(x) = \chi'_B(f(x))$, a teda je nutne aj χ'_A čiastočne rekurzívna.
Dôkaz inými slovami: Príslušnosť do A vieme čiastočne rozhodovať nasledovne: pre vstup a spočítam $f(a)$ a následne generujem prvky B a v okamihu, keď vygenerujem $f(a)$, akceptujem.

7 Exkurzia do neznáma [15+ bodov]

V tejto úlohe sa pýtam na niečo, čo som neprednášal, a chcem vidieť, ako si s tým poradíte.

Hovoríme, že funkcia g je vylepšením f (značíme $g \heartsuit f$), ak g vzniká z funkcií successor, zero, projekcií **a funkcie f** pomocou konečného počtu operácií kompozície, primitívnej rekurzie a minimalizácie. Hovoríme, že množina B je vylepšením A (značíme $B \heartsuit A$), ak pre ich charakteristické funkcie platí $\chi_B \heartsuit \chi_A$.

a) (5 bodov) Dokážte/vyvráťte: $\forall A \subseteq \mathbb{N} : \ \overline{A} \heartsuit A$.
b) (5 bodov) Dokážte/vyvráťte: $\forall A, B \subseteq \mathbb{N} : \ \exists C \subseteq \mathbb{N} : \ A \heartsuit C \ \wedge \ B \heartsuit C$.
c) (5 bodov) Dokážte/vyvráťte: Relácia $\heartsuit$ je reláciou ekvivalencie.
d) (bonus) Dokážte/vyvráťte: $\forall A \subseteq \mathbb{N} : \ \exists B \subseteq \mathbb{N} : \ A \heartsuit B \ \wedge \ \neg(B \heartsuit A)$.

8 Riešenie: Exkurzia do neznáma

Zadanie jedným možným spôsobom formalizuje v reči čiastočne rekurzívnych funkcií pojem Turingovskej redukcie. Pre názornosť budeme v riešení písať $g \leq_\heartsuit f$ namiesto $g \heartsuit f$, aby sme zvýraznili nesymetrickosť definície tejto relácie.

a) Tvrdenie platí. Charakteristickú funkciu $\chi_{\overline{A}}$ môžeme zapísať napr. nasledovne: $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$ a táto funkcia sa zjavne dá z χ_A povoleným spôsobom zostrojiť.

b) Môžeme napríklad definovať $C = \{2a \mid a \in A\} \ \cup \ \{2b + 1 \mid b \in B\}$, teda C je „označeným zjednotením" A a B. Potom $\chi_A(x) = \chi_C(2x)$ a $\chi_B(x) = \chi_C(2x + 1)$ sú obe zjavne χ_C-rekurzívne.

c) Relácia $\leq_\heartsuit$ nie je reláciou ekvivalencie, lebo nie je symetrická. Napríklad platí $\emptyset \leq_\heartsuit HALT$, ale neplatí $HALT \leq_\heartsuit \emptyset$.

   Dôkaz: Nech $z^1(x) = 0$ je charakteristická funkcia pre $\emptyset$. Zjavne z^1 je čiastočne rekurzívna, preto ju vieme vyrobiť aj bez pomoci χ_{HALT}, a teda platí $\emptyset \leq_\heartsuit HALT$.

   A naopak, keďže z^1 je čiastočne rekurzívna, tak z^1-rekurzívne funkcie sú práve všetky čiastočne rekurzívne funkcie. Preto totálne z^1-rekurzívne funkcie sú práve všetky totálne rekurzívne funkcie. To ale znamená, že medzi nimi nie je charakteristická funkcia množiny $HALT$, ktorá rekurzívna nie je. Čiže neplatí $HALT \leq_\heartsuit \emptyset$, q.e.d.