1 Aprixomovateľnosť NP-optimalizačných problémov

Definícia Nech$A$ je NP-optimalizačný problém s cieľom min (max), reláciou $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ a hodnotovou funkciou m.

Nech

$$\begin{aligned} m^*(x) &= min\{m(x,y)|(x,y) \in R\}\text{pre cieľ min,} \\ m^*(x) &= max\{m(x,y)\ (x,y) \in R\}\text{pre cieľ max,} \end{aligned}$$

Hovoríme, že problém jč α-aproximovateľný pre $\alpha > 1$, ak existuje deterministický polymoniálny algoritmus M, ktorý pretransformuje vstup x na vástyp y (t.j $M(x) = y$), pričom $(x,y) \in R$ a

$$\begin{aligned} \alpha m^*(x) &\geq m(x, M(x)), \text{(pre skoro všetky x) pre cieľ min} \\ m^*(x) &\leq \alpha m(x, M(x)), \text{(pre skoro všetky } x\text{) pre cieľ max} \end{aligned}$$

Definícia Problém A je *dobre aproximovateľný*, ak je α-aproximovateľný pre každé $\alpha > 1$ ($\alpha \to 1$).

Definícia Problém A je *neaproximovateľný*, ak nie je α-aproximovateľný pre žiadne $\alpha > 1$ (ľubovoľne veľké α).

1.1 NP-optimalizačný problém 0-1 knapsack

Optimalizačné parametre:

- cieľ = max
- $$R = \{(x,y)|x = d(v_1)\# \cdots \#d(v_n)\#d(w_1)\# \cdots \#d(w_n)\#d(W)\}$$
- $$R = \{(x,y)|y = d(S), S \subseteq \{1, \ldots, n\}, \sum_{i \in S} w_i \leq W\}$$

v_i – ceny, w_i – váhy, W – mohutnosť batoha, ($w_i \leq W \forall i$), $d(U)$ – binárny/dekadický zápis čícla/množiny U, $m(x,y) = \sum i \in S v_i$

1.2 Rozhodovací problém 0-1 knapsack

$L = \{x\#d(K)\ \exists S \subseteq \{1, \ldots, n\}, \sum_{i \in S} w_i \leq W, \sum_{i \in S} v_i \geq K\}$

Veta L je NP-úplný.

1.3 Konštrukčný problém 0-1 knapsack

Pre vstup $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, W$ (formálne x) nájdi výstup $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ (formálne y), t.j. $(x, y) \in R$ a $m(x, y) = \sum_{i \in S} v_i = \max_{S' \subseteq \{1,\dots,n\}} \{\sum_{i \in S} v_i | \sum_{i \in S} w_i \leq W\}$.

1.4 Algoritmus pre konštrukciu problému 0-1 knapsack

(algoritmus nájde optimálny výber S t.j. $\sum_{i \in S} v_i = \max_{S' \subseteq \{1,\dots,n\}} v_i | \sum_{i \in S'} w_i \leq W\}$ a $\sum_{i \in S} w_i \leq W\}$)

1. Vyplň tabuľku $W(0..n, 0..nV)$, kde $V = \max\{v_1, \dots, v_n\} = v_l$, použi $W(i{+}1, v) = \min\{W(i, v), W(i, v - v_{i+1} + w_{i+1}\}$, začni s $W(i, v) \leftarrow \infty, v$, ale $W(0, 0) \leftarrow 0$.

   Poznámka platí $W(i, v) = \min_{S' \subseteq \{1,\dots,i\}} \left\{ \sum_{j \in S'} w_j | \sum_{j \in S'} v_j = v \right\}$

2. $u \leftarrow \max\{v | W(n, v) \leq W\}$, u je cena najlepšieho výberu. (pozn. $u = \max_{S' \subseteq \{1,\dots,n\}} \left\{ \sum_{i \in S'} v_i | \sum_{i \in S'} w_i \leq W \right\}$)

   $$S \leftarrow \emptyset$$

```
for i<- n-1 to 0 do
  if W(i,n) > W(i,u-v_{i+1} then S=S+{i+1} a u=u-v_{i+1}
```

Časová zložitosť: $O(n^2 V)$ – nie nutne polynomiálne, napr. $n = \Theta\left(\sqrt{|x|}\right)$, $|d(v_i)| = |d(w_i)| = |d(W)| = \Theta\left(\sqrt{|x|}\right)$, $V = 2^{\Theta\left(\sqrt{|x|}\right)}$ a časová zložitosť je $O(|x| \cdot 2^{\Theta(\sqrt{|x|})})$ – nie je polynomiálna ku $|x|$.

2 Aproximačný algoritmus pre konštrukciu problému 0-1 knapsack

(pre ľubovoľné α, $2 \geq \alpha > 1$, algoritmus nájde výber S', t.j.: $\sum_{i \in S} v_i \leq \alpha \sum_{i \in S'} v_i$ a $\sum_{i \in S'} w_i \leq W$.

1. $d \leftarrow \left\lfloor \frac{(\alpha-1)V}{n+1} \right\rfloor$; pre $d = 0$, t.j. pre $(\alpha - 1)V < n{+}1$ použi presný algoritmus s časovou zložitosťou $O(n^2 V) = O(\frac{n^3}{\alpha - 1})$
2. Nájde optimálny výber S' pomocou presného algoritmu pre konštrukčný problém 0-1 knapsack pre vstup $v'_1, v'_2, \dots v'_n, w_1, \dots w_n, W$, kde $v'_i = \left\lfloor \frac{v_i}{d} \right\rfloor \forall i$.

Časová zložitosť: $O(n^2 V')$, $V' = max\{v'_1, v'_2, \dots v'_n\} = v'_l = \left\lfloor \frac{v_l}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{V}{d} \right\rfloor \leq \frac{V}{d}$. $O(n^2 V) = O(n^2 V / d) = O(\frac{n^3}{\alpha - 1})$ – polynóm, lebo $\frac{(\alpha-1)V}{n+1} \leq d + 1$.

Nepresnosť aproximoačného algoritmu Platí: $\sum_{i\in S'} v_i \geq (\text{lebo} v_i \geq dv'_i)d\sum_{i\in S'} v'_i \geq d(\text{lebo} opt.S')\sum_{i\in S} v'_i \geq (\text{lebo} 1{+}v'_i \geq v_i/d)\sum_{i\in S}(v_i{-}d) \geq (\text{lebo } |S| \leq n)\sum_{i\in S} v_i - nd(*)$

Platí: $\frac{nd}{\alpha-1} \leq (\text{lebo } \alpha \leq \frac{(\alpha-1)V}{n+1})V - \frac{\alpha}{\alpha-1} \leq (\text{lebo } 1 < \alpha \leq 2 \leq V - d = v_l - d \leq (\text{lebo } \frac{v_l}{d} \leq (\text{lebo } \left\lfloor \frac{v_l}{d} \right\rfloor + 1) \leq d\left\lfloor \frac{v_l}{d} \right\rfloor \leq (\text{lebo } opt.S')d\sum_{i\in S} v'_i \leq (\text{lebo } dv'_i \leq v_i)\sum_{i\in S'} v_i(**)$.

Z (*) a (**) dostaneme, čo bolo treba dokázať: $\sum_{i\in S} V_i \leq (\text{lebo } *) \leq nd + \sum_{i\in S'} \leq (\text{lebo } **)(\alpha-1)\sum_{i\in S'} v_i + \sum_{i\in S'} v_i = \alpha\sum_{i\in S'} v_i$ – cena aproximovaného riešenia.

Veta 0-1 knapsack je dobre aproximovateľný NP-optimalizačný problém, ale jeho rozhodovací problém je NP-úplný, a teda naptrí do P, ak $P \neq NP$.

Veta Ak $P \neq NP$, potom NP-optimalizačný problém obchodného cestujúceho je neaproximovateľný.