Veta (o pamäťovej hierarchii): Nech $\log n \leq S_1(n) = o(S_2(n))$, kde $S_2(n)$ je páskovo konštruovateľná. Potom $DSPACE(S_1(n)) < DSPACE(S_2(n))$.

Dôkaz: *Prefixový kód* Turingovho stroja M je reťazec tvaru $11 \cdots 1 < M >$. Nech M' je deterministický Turingov stroj, ktorý:

1. Na vstupe w ($\mid w \mid = n$) označí na pracovných páskach pamäť rozsahu $S_2(n)$. Ak by mal M' použiť v ďalšom pamäť $> S_2(n)$, potom výpočet zastaví a neakceptuje vstup.
2. Ak vstup w nie je prefixový kód žiadneho Turingovho stroja, potom M' neakceptuje w.
3. w je prefixový kód nejakého Turingovho stroja M. Potom M' (rešpektujúc 1.) simuluje $2^{S_2(n)}$ krokov stroja M na w a M' akceptuje w práve vtedy, keď M neakceptuje w počas $2^{S_2(n)}$.

M – ľubovoľný deterministický Turingov stroj s páskovou zložitosťou $S_1(n)$.

Dokážeme: M neakceptuje $L(M) \in DSPACE(S_2(n))$, teda $L(M') \notin DSPACE(S_1(n))$ $\Rightarrow DSPACE(S_1(n)) \subsetneq DSPACE(S_2(n))$.

Nech má M k páskových symbolov a q stavov. Pre dostatočne dlhý vstup w ($\mid w \mid = n$) platí:
M akceptuje w práve $\iff$ M akceptuje w počas $\leq \left(q(n+2)t^{S_1(n)}(S_1(n)+1\right)^k$ $\leq 2^{S_2(n)}$ krokov (lebo $\log n \leq S_1(n) = o(S_2(n))$)

Pre dostatočne dlhý prefixový kód stroja M platí vlastnosť 1 pre $m = \mid w \mid$:

1. M' je schopný – neprekročiac $S_2(n)$ – simulovať $2^{S_2(n)}$ krokov výpočtu stroja M na w (lebo $S_1(n) = o(S_2(n))$). (iii) a 1 M' akceptuje $w \iff M$ neakceptuje w počas $2_2^S(n) \iff M$ neakceptuje w, t.j. M neakceptuje $L(M')$.

Definícia: Funkcia $T(n)$ je *časovo konštruovateľná*, ak existuje deterministický Turingov stroj, ktorý na každom vstup dĺžky n vykoná práve $T(n)$ krokov.

Veta (o časovej hierarchii): Nech $n \leq T_1(n) = o(T_2(n)/\log T_1(n))$, kde $T_2(n)$ je časovo konštruovateľná. Potom $DTIME(T_1(n)) \subsetneq DTIME(T_2(n))$.

Veta (Savitch): Nech $S(n) \geq \log n$ je páskovo konštruovateľná. Potom $NSPACE(S(n)) \subseteq DSPACE(S^2(n))$.

Dôkaz: M – ľubovoľný nedeterministický Turingov stroj s pamäťovou zložitosťou $S(n)$ majúci k pások, q stavov, t páskových symbolov. Na vstupe dĺžky n sa M môže dostať do najviac $q(n+2)\left((S(n)+1)t^{S(n)}\right)^k \leq c^{S(n)}$ rôznych konfigurácií pre vhodnú konštantu c (nazývame ich ohraničené konfigurácie).

Potom ak $x \in L(M)$, potom existuje akceptačný výpočet stroja M na x majúci krokov (prečo je to tak? – otázka na skúške).

M sa dostane z konfigurácie c_1 do konfigurácie c_2 počas $\leq i$ krokov $\iff$ M sa dostane z c_1 do nejakej c_3 počas najviac $\leq \lfloor i/2 \rfloor$ a z c_3 do c_2 počas $\leq \lceil i/2 \rceil$ krokov.

Algoritmus na simulovanie stroja M:

```
begin
  nech x je vstup dĺžky n a nech c_0 je príslušná počiatočná konfigurácia stroja
  $M$ pre každú S(n)-ohraničenú akceptačnú konfiguráciu C_f vykonaj:
  if TEST(c_0, C_f, c^{S(n)} then accept
end

procedure TEST(c_1,c_2,i); {TEST zistí, či M prejde z c_1 do c_2 počas \leq i
krokov}
if c_1 = c_2 alebo $M$ prejde z c_1 do c_2 v jednom kroku then return true
if i>1 then
begin
  pre každú S(n)-ohraničenú c_3 vykonaj
    if TEST(c_1,c_3,\lceil i/2 \rceil) and TEST (c_3,c_2, \lfloor i/2
    \rfloor) then return true
  end
  return false
end
```

Uvedený algoritmus možno implementovať na deterministickom Turingovom stroji M', ktorý:

- jednu z pások používa ako zásobník
- pri každom volaní procedúry $TEST$ pridá do zásobníka 1 blok obsahujúci: c_1, c_2, z, c_3, $TEST(c_1, c_3, \lceil i/2 \rceil)$, $TEST(c_1, c_3, \lfloor i/2 \rfloor)$ a adresa návratu pre volanie procedúry $TEST$ (t.j. pre volanie medzi if a and alebo and a $then$.
- po vykonaní jedného volania procedúry $TEST$ odstráni príslušný blok zo zásobníka.

Rozsah bloku je teda $O(S(n))$, lebo $i \leq c^S(n)$.

Hĺbka rekurzie (počet blokov v zásobníku je najviac $1+\log_2 c^{S(n)} = O(S(n))$. lebo tretí parameter procedúry $TEST$ je zmenšený zhruba na polovicu pri každom volaní.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že M' je stroj s pamäťovou zložitosťou $O(S^2(n))$. M' možno prerobiť (kompresia pásky) na deterministický Turingov stroj s páskovou zložitosťou $S^2(n)$ akceptujúci rovnaký jazyk.

Veta:

1. $DTIME(T(n)) \subseteq NTIME(T(n)) \subseteq DSPACE(T(n))$ pre všetky časovo konštruovateľné $T(n)$.

2. $DSPACE(S(n)) \subseteq NSPACE(S(n)) \subseteq \bigcup_{c>0} DTIME(c^{\log n + S(n)})$ pre všetky páskovo konštruovateľné $S(n)$.

Dôkaz:

Pre $NTIME(T(n)) \subseteq DSPACE(T(n))$: . Vyberieme ľubovoľný nedeterministický Turingov stroj M s časovou zložitosťou $T(n)$ majúci najviac d možností pre ďalší krok. M' je deterministický storj s pamäťovou zložitosťou $T(n)$, ktorý na vstupe x na jednej z pások postupne generuje všetky možné reťazce dĺžky najviac $T(\mid x \mid)$ nad abecedou $\{a_1, \cdots, a_d\}$. Tieto reťazce reprezentujú možné nedeterministické výpočty stroja M na x. M' ich simuluje a M' akceptuje $x \iff M$ akceptoval x v niektorom výpočte. Z toho vyplýva, že $L(M) = L(M')$.

Pre $NSPACE(S(n)) \subseteq \bigcup_c DTIME(c^{\log n + S(n)})$. Nech M je ľubovoľný nedeterministický Turingov stroj s pamäťovou zložitosťou $S(n)$, majme q stavov, t páskových symbolov, k pások. x – vstup pre M, $\mid x \mid = n$.

G	$=$	(V, E) – orientovaný graf
V	$=$	$\{c \mid c$ je konfigurácia stroja M max;
$\mid V \mid$	$\leq$	$(n+2)((S(n)+1)t^{S(n)}) \leq d^{\log n + S(n)}$
E	$=$	$\{(c, c') \mid M$ prejde v 1 kroku z konfigurácie c do c' $\}$
x	$\in$	$L(M) \iff$ v G existuje cesta z počiatočnej konfigurácie do niektorej akceptačnej konfigurácie

To, či v G taká cesta existuje, možno zistiť deterministickým Turingovým strojom pomocou vhodne implmementovaného (napr. Dijkstrovho) algoritmu v čase najviac $\mid V \mid \leq (d^{\log n + S(n)}) = c^{\log n + S(n)}$ pre vhodné m a $c = d^m$.