

## 0.1 Lecture 6: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Dokážte, že intuitívna a moderná definícia vypočítateľných čísel zo skript sú ekvivalentné.
2. Nezáporné reálne číslo  $x$  voláme  $\mathbb{Q}$ -vyčísliteľné, ak existuje program počítajúci funkciu  $f_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  s nasledujúcou vlastnosťou:

$$\forall n \geq 0 : \quad b_n \neq 0 \wedge \left| x - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{10^n}, \quad \text{kde } (a_n, b_n) = f_x(n)$$

Aký je vzťah medzi množinou vyčísliteľných a množinou  $\mathbb{Q}$ -vyčísliteľných čísel?

3. Nezáporné reálne číslo  $x$  voláme konvergentne vyčísliteľné, ak existuje program počítajúci funkciu  $f_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  s nasledujúcou vlastnosťou:

Nech  $f_x(n) = (a_n, b_n)$ . Potom  $\forall n : b_n > 0$  a postupnosť  $\{a_n/b_n\}_{n=0}^\infty$  konverguje k  $x$ .

Aký je vzťah medzi množinou vyčísliteľných a množinou konvergentne vyčísliteľných čísel?

4. Dokážte, že ľubovoľné nezáporné reálne algebraické číslo je vyčísliteľné.
5. Dokážte alebo vyvráťte: tvoria vyčísliteľné čísla pole?