CVIČNÝ FINAL

1 (True or False) and Justify (10 bodov)

Uveďte, či je tvrdenie pravdivé a nanajvýš tromi vetami svoj názor zdôvodnite.

(Úplne správna odpoveď je za 2.5 boda. Správna odpoveď úplne bez zdôvodnenia je za 0.5 boda. Nesprávna odpoveď, ako aj správna odpoveď s úplne nesprávnym zdôvodnením, sú za 0 bodov.)

Q1 Keď si rozdelíme všetky unárne totálne rekurzívne funkcie na primitívne rekurzívne P a ostatné O, tak platí: $\forall p \in P: \ \forall o \in O: \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0: \ p(n) \ \leq \ o(n)$.

Q2 Nech f je bijekcia na $\mathbb{N}$, teda injektívna (prostá) a zároveň surjektívna funkcia.
Potom platí: f je rekurzívna práve vtedy, keď f^{-1} je rekurzívna.

Q3 Ak f a g sú unárne čiastočne rekurzívne funkcie, tak aj

$$h(x) = \begin{cases} \max(f(x), g(x)) & \leftarrow f(x) \text{ aj } g(x) \text{ sú definované} \\ \perp & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$$

je čiastočne rekurzívna funkcia.

Q4 Medzi správnymi odpoveďami na tieto otázky je aspoň toľko **TRUE** ako **FALSE**.

2 (True or False) and Justify (10 bodov) – riešenia

Q1 **FALSE.** Protipríklad: $p(n) = n$ a o definovaná nasledovne: $o(2k) = A(k, k)$ a $o(2k+1) = 0$, kde $A(x, y)$ je Ackermannova funkcia.

Q2 **TRUE.** Ak je f rekurzívna, vieme program pre f^{-1} zostrojiť nasledovne: pri výpočte $f^{-1}(y)$ postupne skúšame $x = 0, 1, 2, \ldots$, pre každú spočítame $f(x)$ a prestaneme, akonáhle dostaneme výsledok y. Keďže f je bijekcia, máme istotu, že také x vždy existuje, a teda tento program vždy zastane.

Q3 **TRUE.** Paralelne spustíme programy pre $f(x)$ a $g(x)$. Ak oba skončia, spočítame maximum ich výstupov a dáme ho na výstup. Ak aspoň jeden neskončí, ani my neskončíme.

Q4 **TRUE.** Už boli dve iné odpovede **TRUE**, takže tvrdenie Q4 už je nutne pravdivé.

3 (True or False) and Justify (10 bodov) – nadhľad

Q1 To, čo v skutočnosti spôsobuje, že vypočítateľná funkcia nie je primitívne rekurzívna, nie je rýchlosť jej rastu – ale náročnosť jej výpočtu. Rýchlosť rastu je len jej druhotným prejavom v niektorých prípadoch. Jedným takým prípadom je Ackermannova funkcia, ktorej hodnota priamo zodpovedá dĺžke výpočtu, ak ju počítame podľa jej rekurzívnej definície.

Q2 Dôležité je uvedomiť si, kedy a ako môžeme využiť bijektívnosť f. Iný pohľad na náš dôkaz: Majme program F. Zoberieme tento program a zostrojíme program F' postupom z nášho dôkazu. Ak nám niekto zaručí, že program F vždy zastane a počíta bijekciu, tak z tejto záruky vyplýva, že náš F' tiež vždy zastane a počíta inverznú funkciu k tejto bijekcii.

Všimnite si tiež, že sme dokazovali len jednu implikáciu, hoci v zadaní je ekvivalencia. Toto si môžeme dovoliť, pretože zadanie je symetrické – ak by existoval kontrapríklad, tak existuje taký, kde f je a f^{-1} nie je rekurzívna.

Q3 Často pomáha sa na čiastočne rekurzívne funkcie dívať ako na programy, ktoré ich počítajú. BTW, v tejto konkrétnej situácii nebola potrebná paralelná simulácia, stačilo aj sériovo.

Q4 Takéto podrazy v skutočnej písomke nebudú `:-)`.