Skúška z predmetu 2-INF-132 *Úvod do distribuovaných algoritmov*

(24. 1. 2012)

---

1 Torus (cyklická mriežka) rozmeru $n > 2$ je graf s $N = n^2$ vrcholmi, ktorý vznikne z mriežky $n \times n$ cyklickým spojením riadkov a stĺpcov. Presnejšie, vrcholy sú $V = \{[i,j] \mid i,j \in \mathbb{N}, 0 \leq i,j < n\}$ a z každého vrchola $[i,j] \in V$ vedú štyri hrany do vrcholov $[i \oplus 1, j]$, $[i \ominus 1, j]$, $[i, j \oplus 1]$, $[i, j \ominus 1]$, kde $\oplus, \ominus$ je sčítanie a odčítanie modulo n.

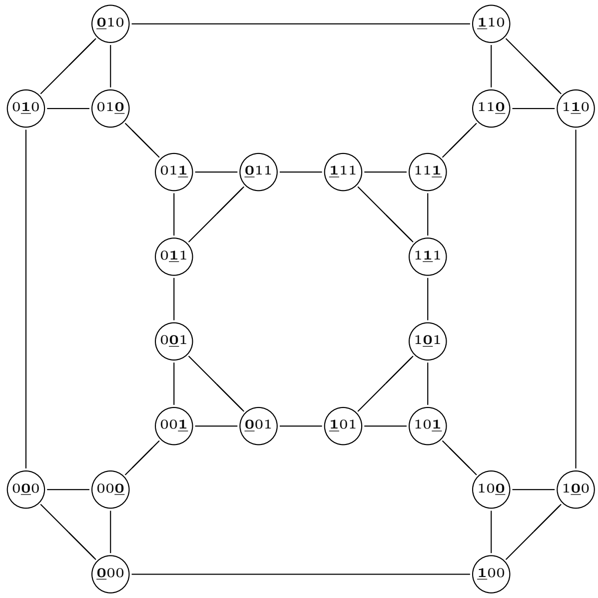
Uvažujme vrcholy spojené do torusu rozmerov $n > 2$, pričom každý vrchol má identifikátor (ale nepozná súradnice $[i,j]$). Torus má navyše "kompasový" zmysel pre orientáciu, t.j. v každom vrchole sú hrany označené podľa smeru ktorým vedú ($[+,\cdot]$, $[-,\cdot]$, $[\cdot,+]$, $[\cdot,-]$).

Systém je synchrónny a všetky procesy sa zobudia naraz. Navrhnite algoritmus na voľbu šéfa, ktorý v najhoršom prípade vykomunikuje $O(N)$ správ.

---

2 Uvažujme synchrónnu sieť s topológiou $CCC(n)$, $n > 2$. Predpokladajme, že v každom kroku sa v každom vrchole narodí s (nezávislou) pravepodobnosťou p paket určený do náhodného vrchola (vrátane seba). Nech $B(t)$ je očakávaná maximálna veľkosť buffra v niektorom vrchole po t krokoch. Dokážte, že ak $p > 2/n$, potom $B(t) \mapsto \infty$ pre ľubovoľný routovací algoritmus (Pod routovacím algoritmom rozumieme algoritmus, ktorý každému paketu priradí odchádzajúcu linku. Ak viac paketov chce ísť v jednom kroku po jednej linke, algoritmus vyberie jeden z nich a ostatné sú uložené v bufferi).

Graf $CCC(n)$ dostaneme z hyperkocky "odpílením" vrcholov a ich nahradením kruž nicami. Má $n2^n$ vrcholov, pričom každý vrchol zodpovedá jednému prvku množiny $\{(b_0, \dots, b_{n-1}, p) \ : \ b_i \in \{0,1\}\,;\, 0 \leq p < n\}$. Každý vrchol $\{(b_0, \dots, b_{n-1}, p)\}$ má troch susedov: $(b_0, \dots, b_{n-1}, p \oplus 1)$, $(b_0, \dots, b_{n-1}, p \ominus 1)$ a $(b_0, \dots, 1-b_p, \dots, b_{n-1}, p)$, kde $\oplus$, $\ominus$ sú operácie sčítania a odčítania modulo n.



Graf $CCC(3)$

---

3 Uvažujme $N = 2^d$, $d > 2$ procesov spojených obojsmernými linkami do hyperkocky. Hrany sú označené tak, že tvoria dimenzionálny zmysel pre orientáciu. Procesy majú identifikátory, štartujú naraz a pracujú v asynchrónnom režime. V hyperkocke je zvolený šéf, t.j. každý proces má logickú premennú `som_sef`, ktorá má hodnotu `true` práve v jednom procese.

V hyperkocke je jedna chybná linka, ktorá nikdy neprepúšťa správy: ak ľubovoľný z koncových vrcholov chybnej linky po nej pošle správu, správa sa bez akejkoľvek notifikácie stratí (takže žiaden proces nevie, či sa správa stratila, alebo je iba pomalá). Cieľom šéfa je zistiť, medzi ktorými dvomi vrcholmi vedie chybná linka.

Navrhnite algoritmus, pomocou ktorého šéf lokalizuje chybnú linku (t.j. zistí identifikátory vrcholov susediacich s chybnou linkou). Váš algoritmus má v najhoršom prípade použiť $O(N \log N)$ správ (pričom najhorší prípad sa berie cez všetky rozdelenia identifikátorov, všetky pozície šéfa a chybnej linky a všetky časovania správ). Zdôvodnite správnosť a zložitosť (počet správ) Vášho algoritmu.

---

4 Na prednáške bol definovaný problém dohody so stop-chybami (každý nezhavarovaný proces skončí, všetky nezhavarované procesy sa dohodnú, ak všetky procesy začínajú s rovnakou hodnotou, musia sa dohodnúť na nej) s f výpadkami procesorov. Ukážte, že ľubovoľný algoritmus, ktorý rieši daný problém pre všetky $f > 0$ za najviac f kôl nemôže byť korektný (na pednáške bol algoritmus pracujúci $f + 1$ kôl).
