0.1 Lecture 3: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

V týchto cvičeniach niektoré sú a niektoré nie sú označené hviezdičkou ($\star$). Tie, ktoré sú označené, sú ťažšie. Tým ostatným treba určite rozumieť.

1. Z definície dokážte primitívnu rekurzívnosť nasledujúcich zaujímavých funkcií:
   - $p(x) = \begin{cases} 0 & \leftarrow x = 0 \\ x-1 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $minus(x,y) = \begin{cases} x-y & \leftarrow x \geq y \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $diff(x,y) = |x-y|$.
   - $max(x,y)$
   - $median(x,y,z)$
   - $rovnasa(x,y) = \begin{cases} 1 & \leftarrow x = y \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $fact(x) = x!$
   - ($\star$) $zvysok(x,y) = \begin{cases} x \bmod y & \leftarrow y > 0 \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$

2. Dokážte: Každý polynóm $p(x)$, ktorého koeficienty sú prirodzené čísla, je primitívne rekurzívny.

3. ($\star$) Dokážte alebo vyvráťte: K ľubovoľnému polynómu $p(x)$ s celočíselnými (potenciálne aj zápornými!) koeficientami existuje primitívne rekurzívna funkcia f_p taká, že $\forall n \in \mathbb{N} : f_p(n) = \max(0, p(n))$.

4. Dokážte: Pre ľubovoľnú primitívne rekurzívnu funkciu f je funkcia $g(x) = \sum_{i<x} f(i)$ primitívne rekurzívna. (Funkciu g voláme prefixovým súčtom funkcie f.)

   ($\star$) Dokážte aj všeobecnejšie tvrdenie: pre ľubovoľné primitívne rekurzívne funkcie lo, hi a f je funkcia

   $$g(\overline{x}) = \sum_{lo(\overline{x}) \leq i \leq hi(\overline{x})} f(i, \overline{x})$$

   primitívne rekurzívna. (Značenie $\overline{x}$ je skráteným zápisom pre $x_1, \dots, x_k$.)

5. Pomocou funkcie *zvysok* a predchádzajúceho výsledku o prefixovom súčte dokážte, že predikát *deli* a funkcia *podiel* sú primitívne rekurzívne.
   - $deli(x,y) = \begin{cases} 1 & \leftarrow y > 0 \ \wedge \ y \text{ delí } x \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $podiel(x,y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & \leftarrow y > 0 \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$

6. ($\star$) Dokážte vetu o *ohraničenej minimalizácii*:

   Pre ľubovoľné primitívne rekurzívne funkcie $f(y, \overline{x})$ a $g(\overline{x})$ je funkcia

   $$h(\overline{x}) = \begin{cases} \min\{i \mid i < g(\overline{x}) \ \wedge \ f(i, \overline{x}) > 0\} & \leftarrow \text{ak také } i \text{ existuje} \\ g(\overline{x}) & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$$

   primitívne rekurzívna.

   Slovne, $h(\overline{x})$ si môžeme predstaviť tak, že postupne počíta $f(0, \overline{x})$, $f(1, \overline{x})$, $\dots$, až kým buď prvýkrát nedostane nenulovú hodnotu, alebo nedosiahne vopred určenú hranicu $g(\overline{x})$.

7. Pomocou vety o ohraničenej minimalizácii vieme triviálne ukázať primitívnu rekurzívnosť niektorých funkcií, pre ktoré je to priamo z definície nepríjemné. Dokážte takto primitívnu rekurzívnosť nasledujúcich funkcií:

   - $ceil(x, y) = \begin{cases} \lceil x/y \rceil & \leftarrow y > 0 \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $sqrt(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$
   - ($\star$) $prvocislo(x) = \begin{cases} 1 & \leftarrow x \text{ je prvočíslo} \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$

   (Hint: *ceil* je primitívne rekurzívna, lebo ju môžeme definovať zhruba nasledovne: $ceil(x, y)$ je najmenšie také z, pre ktoré $yz \geq x$, pričom z stačí hľadať v rozsahu od 0 po x. Rozmyslite si, ako by tento argument vyzeral formálne. Pri testovaní prvočíselnosti budete pravdepodobne potrebovať niekoľko pomocných funkcií.)