

0.1 Ďalšie nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Dokážte, že ak má čiastočne rekurzívna funkcia rekurzívny definičný obor, tak existuje aspoň jedno jej zúplnenie, ktoré je rekurzívne.
2. Dokážte m-úplnosť množiny $\{n \mid 47 < |W_n|\}$, kde W_n je efektívne číslovanie rekurzívne vyčísliteľných množín.
3. Dokážte alebo vyvráťte: Množina A je rekurzívna práve vtedy, ak existuje rekurzívna funkcia f spĺňajúca nasledujúce podmienky:
 - $\forall a \in A : \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = a$
 - $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \in A$
 - $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) < f(n+1)$
4. Dokážte alebo vyvráťte: Každá nekonečná rekurzívne vyčísliteľná množina má nekonečnú rekurzívnu podmnožinu. (Hint: Predchádzajúca úloha naznačuje jeden možný smer úvah.)
5. Množinu voláme *imúnna*, ak je nekonečná, ale nemá žiadnu nekonečnú rekurzívne vyčísliteľnú podmnožinu. Zjavne komplementom každej jednoduchkej množiny je nejaká imúnna množina. Nájdite imúnnu množinu, ktorej komplement nie je jednoduchá množina.
6. Nech $A \subseteq \mathbb{N}$, pričom $A \neq \emptyset$ a $A \neq \mathbb{N}$. Dokážte alebo vyvráťte: A je rekurzívna práve vtedy, keď $A \leq_m \{47\}$.
7. Uvažujme analógiu Busy Beavera pre registrové stroje: Aké najväčšie číslo vie v niektorom registri vyrobiť program s n inštrukciami v okamihu, keď zastane? Dokážte, že príslušná busy-beaver-like funkcia B_M nie je vypočítateľná.
8. Nájdite čo najviac presných hodnôt funkcie B_M .
9. Uvažujme Turingove stroje z prednášky. Nech $R(A) = 0$ ak stroj A na prázdnom vstupe nezastaví, inak nech $R(A)$ je počet políčok, o ktoré je čítacia hlava napravo od políčka, kde začínala. (Pre niektoré A môže byť $R(A)$ aj záporné.) Nech $R(n)$ je maximum z $R(A)$ cez všetky n -stavové A . Teda $R(n)$ hovorí, že každý n -stavový TS, ktorý na prázdnom vstupe zastane, zastane s hlavou nanaajvýš $R(n)$ políčok napravo od miesta, kde začínal. Je funkcia $R(n)$ rekurzívna?