Kapitola: Vyčísliteľné čísla

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vyčísliteľnými číslami, t. j. reálnymi číslami, ktoré vieme algoritmicky určiť s ľubovoľnou presnosťou.

Uvedieme dva ekvivalentné spôsoby, ako tieto čísla definovať.

Intuitívna definícia. Takto pôvodne vyčísliteľné čísla definoval Alan Turing:

Nezáporné reálne číslo x voláme vyčísliteľné, ak existuje program počítajúci nasledujúcu funkciu f_x:

$$f_x(n) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \leftarrow n = 0 \\ n\text{-tá desatinná cifra } x & \leftarrow n > 0 \end{cases}$$

Moderná definícia. Takto sa zvyknú vyčísliteľné čísla definovať v súčasnosti:

Nezáporné reálne číslo x voláme vyčísliteľné, ak existuje program počítajúci funkciu f_x s nasledujúcou vlastnosťou:

$$\forall n \geq 1 : \quad \frac{f_x(n) - 1}{n} \leq x \leq \frac{f_x(n) + 1}{n}$$

A pre poriadok, komplexné číslo $a + bi$ voláme vyčísliteľné, ak sú vyčísliteľné aj číslo $|a|$, aj číslo $|b|$.

Teda voľne povedané, vyčísliteľné čísla sú tie, ktoré vieme algoritmicky vypočítať s ľubovoľnou presnosťou, na ľubovoľne veľký počet desatinných miest.

Teda napr. ak chceme ukázať, že číslo $\pi \simeq 3.1415926$ je vyčísliteľné, potrebujeme ukázať, že existuje program, ktorý pre vstup n vypíše na výstup n-tú cifru π. Teda pre vstup 0 by mal vypísať 3, pre vstup 1 vypísať 1, pre vstup 2 vypísať 4, atď. (Takéto programy pre π skutočne existujú, viď napr. http://en.wikipedia.org/wiki/Computing_%CF%80.)

1.1 Ktoré čísla sú vyčísliteľné?

- Zjavne ľubovoľné racionálne číslo je vyčísliteľné.
- Všetkých možných programov je len spočítateľne veľa, preto aj vyčísliteľných čísel je len spočítateľne veľa.
- Čísla, ktoré vieme dostať ako korene polynómov s celočíselnými koeficientami, voláme *algebraické*. Dá sa dokázať, že všetky algebraické čísla sú vyčísliteľné.

  Príklady algebraických čísel: 47, $-5/3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{7}/5$, $\sqrt[3]{4+\sqrt{7}}$, zlatý rez: $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, všetky komplexné odmocniny z 1, všetky vzdialenosti zostrojiteľné z úsečky dĺžky 1 pomocou kružidla a lineáru...

  Pre zaujímavosť, algebraické čísla tvoria pole, teda sú uzavreté na bežné aritmetické operácie. Navyše platí, že korene ľubovoľného polynómu, ktorého koeficienty sú algebraické, sú tiež algebraické.
- Čísla, ktoré nie sú algebraické, voláme *transcendentné*. Známe transcendentné čísla sú napríklad π (pomer obsahu a obvodu kruhu) a e (konštanta pre ktorú je exponenciála rovná svojej derivácii).

  Niektoré transcendentné čísla (vrátane π a e) sú tiež vyčísliteľné. Ale samozrejme všetkých transcendentných čísel je nespočítateľne veľa, takže skoro žiadne z nich vyčísliteľné nie je.

1.2 Konštruktivizmus v matematike

Prečo sú vyčísliteľné čísla zaujímavé?

Jedným z takpovediac filozofických smerov v matematike je konštruktivizmus. Zástupcovia tohto smeru majú za cieľ budovať „tú matematiku, ktorá by čo najpresnejšie zodpovedala nášmu svetu“. Aj v rámci samotného konštruktivizmu samozrejme existuje ďalšie delenie, ale základnou spoločnou črtou je, že konštruktivisti pripustia existenciu objektu len vtedy, ak ho naozaj vieme zostrojiť. (Nestačí teda napr. vychádzať z jeho neexistencie a dospieť k sporu.)

Z pohľadu niektorých konštruktivistov sú problematické už aj veci ako nespočítateľne veľké nekonečno a konkrétne aj množina reálnych čísel. Jediné nekonečno, ktoré sa podľa nich vyskytuje vo svete okolo nás, je nekonečno spočítateľné, a aj to len v podobe nekonečna potenciálneho – teda nie ako niečo, čoho je nekonečne veľa, ale len ako možnosť ísť ďalej, nájsť ešte väčšie číslo, nájsť ešte presnejšiu aproximáciu, a pod.

A práve vyčísliteľné čísla sú z pohľadu mnohých konštruktivistov tou hranicou, tým najzložitejším, čo ešte zodpovedá skutočnému svetu.

1.3 Table-maker's dilemma

Linka so stručným vysvetlením, aký technický problém mala pôvodná Turingova definícia.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Table-maker%27s_dilemma#The_table-maker.27s_dilemma`