0.1 Lecture 6: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Dokážte primitívnu rekurzívnosť logickej spojky xor. Teda dokážte, že ak p a q sú primitívne rekurzívne predikáty s rovnakou aritou, tak je primitívne rekurzívny aj predikát r, ktorý vracia 1 práve pre tie vstupy, pre ktoré jeden z p a q vracia 1 a druhý 0.

2. Dokážte: Pre ľubovoľnú primitívne rekurzívnu funkciu f je funkcia $g(x) = \sum_{i<x} f(i)$ primitívne rekurzívna. (Funkciu g voláme prefixovým súčtom funkcie f.)

   Dokážte aj všeobecnejšie tvrdenie: pre ľubovoľné primitívne rekurzívne funkcie lo, hi a f je funkcia

   $$g(\overline{x}) = \sum_{lo(\overline{x}) \leq i \leq hi(\overline{x})} f(i, \overline{x})$$

   primitívne rekurzívna. (Značenie $\overline{x}$ je skráteným zápisom pre $x_1, \dots, x_k$.)

3. Pomocou všetkých doteraz známych výsledkov dokážte, že sú primitívne rekurzívne nasledovné funkcie:

   - $mod(x, y) = \begin{cases} x \bmod y & \leftarrow y > 0 \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $divides(x, y) = \begin{cases} 1 & \leftarrow y > 0 \ \wedge \ y \text{ delí } x \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $div(x, y) = \begin{cases} \lfloor x/y \rfloor & \leftarrow y > 0 \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
   - $isprime(x) = \begin{cases} 1 & \leftarrow x \text{ je prvočíslo} \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$

4. Dokážte, že n-té prvočíslo (číslované od 0) je menšie alebo rovné ako 2^{2^n}.

5. Uvažujme konštantnú funkciu $t(x) = 1000$. Táto funkcia je primitívne rekurzívna, teda k nej existuje „recept“: postupnosť funkcií $f_1, f_2, \dots, f_k = t$ taká, že každá f_i je nulárna nula, successor, niektorá projekcia, alebo vzniká z niektorých predchádzajúcich f_j operáciou kompozície alebo operáciou primitívnej rekurzie.

   Dokážte alebo vyvráťte: v každom recepte pre t je $k \geq 1000$.