Kapitola: Redukcie a porovnávanie zložitosti

1.1 Základná terminológia

Funkciu voláme *primitívne rekurzívna*, ak ju vieme vyrobiť z nuly, successora a projekcií pomocou konečného počtu operácií kompozície a primitívnej rekurzie.

Funkciu (potenciálne čiastočnú) voláme *čiastočne rekurzívna*, ak ju vieme vyrobiť z nuly, successora a projekcií pomocou konečného počtu operácií kompozície, primitívnej rekurzie a minimalizácie.

Funkciu voláme *rekurzívna*, ak je čiastočne rekurzívna a zároveň je totálna.

(Primitívne rekurzívne funkcie zodpovedajú programom len s for-cyklami. Čiastočne rekurzívne funkcie zodpovedajú všeobecným programom. Rekurzívne funkcie zodpovedajú tým programom, ktoré pre každý vstup zastanú.)

Nech $M \subseteq \mathbb{N}$. *Charakteristickou funkciou* množiny M nazveme funkciu

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 & \leftarrow x \in M \\ 0 & \leftarrow x \notin M \end{cases}$$

Čiastočnou charakteristickou funkciou množiny M nazveme funkciu

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 & \leftarrow x \in M \\ \perp & \leftarrow x \notin M \end{cases}$$

Množinu voláme primitívne rekurzívnou, ak jej charakteristická funkcia je primitívne rekurzívna.

Množinu voláme rekurzívnou, ak jej charakteristická funkcia je rekurzívna.

Množinu voláme rekurzívne vyčísliteľnou, ak jej **čiastočná** charakteristická funkcia je čiastočne rekurzívna.

(Rekurzívne množiny zodpovedajú triede rekurzívnych jazykov. Rekurzívne vyčísliteľné množiny zodpovedajú triede rekurzívne vyčísliteľných jazykov.)

1.2 Many-to-one redukcia

Hovoríme, že množina A *je m-redukovateľná* na množinu B (značíme $A \leq_m B$), ak existuje **rekurzívna** funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $\forall n \in \mathbb{N} : \ n \in A \iff f(n) \in B$. Funkciu f voláme *many-to-one redukciou* A na B.

(Ak sa na množiny A a B dívame ako na rozhodovacie problémy, tak funkcia f predstavuje konečný algoritmus, ktorý zoberie ľubovoľnú inštanciu problému A a prerobí ju na inštanciu problému B tak, aby odpoveď zostala nezmenená.)

Existencia many-to-one redukcie nám v istom zmysle ukazuje, že problém príslušnosti do A je nanajvýš taký ťažký ako problém príslušnosti do B – totiž čokoľvek, čo vieme robiť s inštanciami problému B, vieme vďaka existencii f robiť aj s inštanciami problému A.

Relácia $\leq_m$ je reflexívna a tranzitívna, určuje nám teda tzv. kváziusporiadanie na množine $2^{\mathbb{N}}$.

Teraz môžeme definovať reláciu *m-ekvivalencie*: Množiny A a B sú m-ekvivalentné (značíme $A \equiv_m B$), ak $A \leq_m B$ a zároveň $B \leq_m A$.

Z reflexívnosti a tranzitívnosti $\leq_m$ a zo symetrie definície vyplýva, že $\equiv_m$ je skutočne reláciou ekvivalencie.

Každá many-to-one redukcia je vlastne program, ktorý vždy zastane, a programov je len spočítateľne veľa. Preto pre ľubovoľnú konkrétnu množinu A existuje len nanajvýš spočítateľne veľa množín B takých, že $A \leq_m B$. A z toho vyplýva, že každá trieda ekvivalencie relácie $\equiv_m$ obsahuje len nanajvýš spočítateľne veľa množín.

Všetky rekurzívne množiny okrem $\emptyset$ a $\mathbb{N}$ tvoria jednu triedu ekvivalencie v $\equiv_m$. (Totiž ak A a B sú netriviálne rekurzívne množiny, určite existuje f, ktorá o vstupe zistí, či patrí do A a podľa toho vráti buď konkrétny prvok z B, alebo konkrétny prvok z $\mathbb{N} - B$.)