Voľba šéfa v jednosmernom kruhu (algoritmus Chang, Roberts)

Majme n procesorov zapojených do jednosmerného kruhu. Každý procesor má svoj identifikátor (jednoznačné prirodzené čislo) a dve komunikačné linky: linku l_{in}, po ktorej mu prichádzajú správy a linku l_{out}, po ktorej posiela správy. Na začiatku je zobudených niekoľko (aspoň jeden) procesov. Keď proces dostane správu, zobudí sa. Cieľom je za šéfa zvoliť proces s minimálnym ID spomedzi procesov zobudených na začiatku.

Algoritmus používa jednoduchú ideu: na začiatku každý zobudený procesor pošle po kruhu svoje ID. Proces, ktoý dostane správu $\langle i \rangle$, porovná i so svojím ID. Ak je jeho číslo väčšie, pošle správu ďalej. Keďže procesy majú jednoznačné ID, jediná správa, ktorej sa podarí obísť celý kruh, je správa nesúca minimálne ID.

const: ID : integer
l_{in}, l_{out} : link
var: $leader$: integer

Init:

$leader := NULL$

Code:

send $\langle ID \rangle$
wait until $leader <> NULL$

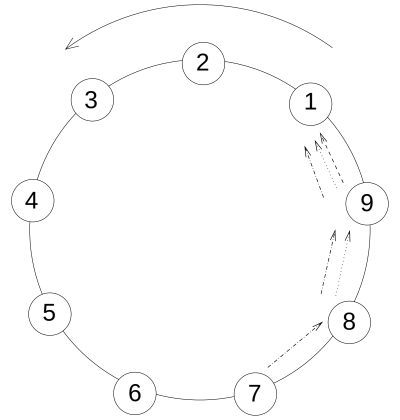
On receipt $\langle i \rangle$:

if $i < ID$ **then send** $\langle i \rangle$
if $i = ID$ **then**
$leader := ID$
send $\langle \textbf{leader}, ID \rangle$

On receipt $\langle \textbf{leader}, x \rangle$:

$leader := x$
send $\langle \textbf{leader}, ID \rangle$

Z nasledujúceho obrázku ľahko vidno, že v najhoršom prípade sa môže vykomunikovať až $\Omega(n^2)$ správ, ak sú procesory očíslované v smere kruhu a správy od procesorov s menšími číslami idú pomaly (t.j. najprv dorazí správa od procesora n, potom dve správy od procesora $n-1$, tri správy od $n-2$ atď).



Teraz ideme ukázať, že v priemernom prípade sa vykomunikuje $O(n \log n)$ správ. Pretože jediná operácia s ID je porovnanie, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že procesory sú očíslované permutáciou čísel $1, \ldots, n$. Nech náhodná premenná X_i udáva, koľkokrát bola poslaná správa $\langle i \rangle$. Správa $\langle 1 \rangle$ bola poslaná n-krát, takže uvažujme $i > 1$. Pozrime sa na rozdelenie pravdepodobnosti X_i. Aká je pravdepodobnosť, že $\langle i \rangle$ bola poslaná práve k-krát? Zjavne vrcholy kruhu museli byť očíslované tak, že za vrcholom i nasleduje $k-1$ vrcholov s väčším ID a za nimi vrchol s menším ID. Je práve $\binom{n-i}{k-1} \cdot (i-1)$ možností takýchto očíslovaní. Všetkých možností, ako vybrať $k-1$ čísel vrcholov a potom jedno iné číslo je $\binom{n-1}{k-1} \cdot (n-k)$. Preto keď túto pravdepodobnosť označíme $P(i,k)$, dostávame

$$P(i,k) = \frac{\binom{n-i}{k-1} \cdot (i-1)}{\binom{n-1}{k-1} \cdot (n-k)}$$

Aký je teda očakávaný počet poslaní správy $\langle i \rangle$? Správa $\langle i \rangle$ mohla byť poslaná najviac $n-i+1$ krát a teda stredná hodnota X_i je

$$E[X_i] = \sum_{k=1}^{n-i+1} k \cdot P(i,k)$$

Majme teraz náhodnú premennú X, ktorá udáva počet všetkých správ rôznych od $\langle 1 \rangle$. Zjavne

$$X = \sum_{i=2}^{n} X_i$$

a teda očakávaný počet všetkých správ je:

$$n + E[X] = n + \sum_{i=2}^{n} E[X_i] = n + \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} k \cdot P(i,k)$$

Ostáva nám teda iba upraviť sumu

$$n + \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} k \cdot \frac{\binom{n-i}{k-1} \cdot (i-1)}{\binom{n-1}{k-1} \cdot (n-k)}$$

Budeme používať nasledujúcu identitu:

Lema 1

$$\sum_{j=k}^{n-1} \frac{j!}{(j-k)!} = k!\binom{n}{k+1}$$

Dôkaz:

$$\sum_{j=k}^{n-1} \frac{j!}{(j-k)!} = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{k!j!}{k!(j-k)!} = k! \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k} = k!\binom{n}{k+1}$$

Teraz už môžeme dokázať nasledujúcu vetu:

Veta 1 *Očakávaný počet správ algoritmu Chang-Roberts je $n \cdot H_n$.*

Dôkaz: Substitúcia $j := n+1-i$:

$$n + \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} k \cdot \frac{\binom{n-i}{k-1} \cdot (i-1)}{\binom{n-1}{k-1} \cdot (n-k)} = n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{j} k \cdot \frac{\binom{j-1}{k-1} \cdot (n-j)}{\binom{n-1}{k-1} \cdot (n-k)} =$$

Rozpíšeme:

$$= n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{j} \frac{k(j-1)!(n-j)(k-1)!(n-k)!}{(k-1)!(j-k)!(n-1)!(n-k)} =$$

Zmeníme poradie sumácie:

$$= n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k(n-k-1)!}{(n-1)!} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{(j-1)!(n-j)}{(j-k)!} \right] =$$

$$= n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k(n-k-1)!}{(n-1)!} \left(\sum_{j=k}^{n-1} \frac{n(j-1)!}{(j-k)!} - \sum_{j=k}^{n-1} \frac{j!}{(j-k)!} \right) \right] =$$

Podľa lemy platí $\sum_{j=k}^{n-1} \frac{(j-1)!}{(j-k)!} = (k-1)!\binom{n-1}{k}$ a $\sum_{j=k}^{n-1} \frac{j!}{(j-k)!} = k!\binom{n}{k+1}$, preto pokračujeme:

$$= n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k-1)!}{(n-1)!} \left[n \cdot (k-1)! \binom{n-1}{k} - k! \binom{n}{k+1} \right] =$$

a po rozpísaní a vykrátení dostaneme

$$= n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k+1}$$

čo je hľadaný výsledok.