CVIČNÝ MIDTERM

1 Formalizmus (10 bodov)

V tejto úlohe klaďte hlavný dôraz na presnosť a korektnosť práce s formalizmom z prednášky.

V tejto úlohe je povolené bez dôkazu použiť len nasledujúce skutočnosti:

- definíciu množiny primitívne rekurzívnych funkcií,
- skutočnosť, že funkcia *sub*, realizujúca odčítanie ktoré nemôže podtiecť pod 0, je primitívne rekurzívna.

Dokážte nasledujúcu vetu o for-cykle:

Ak $lo, hi, f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ a $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sú primitívne rekurzívne funkcie, potom aj funkcia h počítaná nasledujúcim pseudokódom je primitívne rekurzívna.

```
def h(x,y,z):
  temp = f(x,y,z)
  for i = lo(x,y,z) to hi(x,y,z) do temp = g(temp)
  return temp
```

1 Formalizmus (10 bodov) – riešenie

Primitívnou rekurziou môžeme definovať funkciu $iterg(n, x)$, ktorá na x použije n-krát po sebe funkciu g a vráti výsledok.

$$\begin{aligned} iterg_1 &= P_1^1 \\ iterg_2 &= Comp[g, P_1^3] \\ iterg &= PR[iterg_1, iterg_2] \end{aligned}$$

Dosadením hodnôt vypočítaných lo a hi do funkcie sub vieme spočítať počet iterácií cyklu.

$$\begin{aligned} shi &= Comp[s, hi] \\ steps &= Comp[sub, shi, lo] \end{aligned}$$

No a dosadením počtu krokov a začiatočnej hodnoty do funkcie $iterg$ dostávame požadovanú funkciu h:

$$h = Comp[iterg, steps, f]$$

2 Známa pôda (10 bodov)

V tejto úlohe sa pýtam na priamo odprednášané veci, ukážte, že im dostatočne rozumiete.

Uvažujme deterministický Turingov stroj, ktorý má read-only vstupnú pásku a 7 pracovných pások, ale jeho pracovná abeceda je unárna – dokáže teda zapisovať len jeden symbol.

Má takýto Turingov stroj rovnakú výpočtovú silu ako klasický? Ak áno, dokážte to. Ak nie, poznáte iný výpočtový model, ktorý má s týmto rovnakú výpočtovú silu?

2 Známa pôda (10 bodov) – riešenie

Na každú pracovnú pásku takéhoto DTS sa môžeme dívať ako na počítadlo – polohou hlavy na nej si vieme pamätať prirodzené číslo. Tento DTS je teda ekvivalentný dvojsmernému konečnému automatu so 7 počítadlami.

Analogicky ako pre Minského registrové stroje vieme dokázať, že pomocou 2 počítadiel vieme simulovať zásobník a pomocou dvoch zásobníkov si vieme uložiť ľubovoľne dlhú postupnosť znakov a pristupovať k ľubovoľnému jej prvku.

Vieme teda na takomto DTS simulovať klasický DTS s jedinou páskou: namiesto nej budeme používať 4 počítadlá, v ktorých si budeme pamätať aktuálny obsah pásky simulovaného DTS.

(Tu by sa ešte patrilo uviesť presnejšie spôsob kódovania obsahu pásky do čísla.)

3 Exkurzia do neznáma (10 bodov)

V tejto úlohe sa pýtam na niečo, čo som neprednášal, a chcem vidieť, ako si s tým poradíte.

Dokážte vetu o konštantnom zrýchlení pre Wang Tiles:

Ku každému dlaždicovému programu A s časovou zložitosťou f existuje dlaždicový program B taký, že $L(A) = L(B)$ a pre časovú zložitosť g dlaždicového programu B platí $\forall n : g(n) \leq \lceil f(n)/2 \rceil$.

3 Exkurzia do neznáma (10 bodov) – riešenie

Stačí vždy spojiť dvojicu „nad seba pasujúcich" dlaždíc do jednej. Musíme takisto ponechať pôvodné typy dlaždíc kvôli dláždeniam s nepárnym počtom riadkov.

Formálne, nech $A = (\Sigma, \Gamma, \mathbf{l}, \mathbf{r}, \mathbf{b}, D)$. BUNV predpokladajme, že Γ a Γ^2 sú disjunktné.

Zostrojme množinu D_1 nasledovne:

$$D_1 = \Big\{ \big(t_1,\ (l_1, l_2),\ (r_1, r_2),\ b_2\big) \ \Big|\ (t_1, l_1, r_1, b_1),\ (t_2, l_2, r_2, b_2) \in D \quad \wedge \quad b_1 = t_2 \Big\}$$

Toto už je takmer to, čo sme chceli, len ešte musíme vyrobiť dlaždice, ktoré budú pasovať na ľavý/pravý okraj obdĺžnika. Tam totiž nechceme mať symbol $(\mathbf{l}, \mathbf{l})$, resp. $(\mathbf{r}, \mathbf{r})$, ale len $\mathbf{l}$, resp. $\mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}
D_2 &= \Big\{ \big(t_1,\ \mathbf{l},\ (r_1, r_2),\ b_2\big) \ \Big|\ \big(t_1,\ (\mathbf{l}, \mathbf{l}),\ (r_1, r_2),\ b_2\big) \in D \Big\} \\
D_3 &= \Big\{ \big(t_1,\ (l_1, l_2),\ \mathbf{r},\ b_2\big) \ \Big|\ \big(t_1,\ (l_1, l_2),\ (\mathbf{r}, \mathbf{r}),\ b_2\big) \in D \Big\} \\
D_4 &= \Big\{ \big(t_1,\ \mathbf{l},\ \mathbf{r},\ b_2\big) \ \Big|\ \big(t_1,\ (\mathbf{l}, \mathbf{l}),\ (\mathbf{r}, \mathbf{r}),\ b_2\big) \in D \Big\}
\end{aligned}$$

Hľadaný dlaždicový program B je zjavne $B = \big(\Sigma, \Gamma, \mathbf{l}, \mathbf{r}, \mathbf{b},\ D \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4\,\big)$.