0.1 Lecture 8: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Dokážte, že pre každé $k > 1$ obsahuje nami definovaná postupnosť funkcií $\varphi_n^{(k)}$ všetky k-árne čiastočne rekurzívne funkcie.

2. Dokážte, že ak má čiastočne rekurzívna funkcia rekurzívny definičný obor, tak existuje aspoň jedno jej zúplnenie, ktoré je rekurzívne.

3. Prečo nedostaneme spor, keď v dôkaze, že U nemá rekurzívne zúplnenie zadefinujeme funkciu f pomocou U namiesto U'?

4. Dokážte m-úplnosť množiny $UNIV$.

5. Dokážte m-úplnosť množiny $\{n \mid 47 < |W_n|\}$, kde W_n je efektívne číslovanie rekurzívne vyčísliteľných množín.

6. Dokážte alebo vyvráťte: Množina A je rekurzívna práve vtedy, ak existuje rekurzívna funkcia f spĺňajúca nasledujúce podmienky:
   - $\forall a \in A : \ \exists n \in \mathbb{N} : \ f(n) = a$
   - $\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) \in A$
   - $\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) < f(n+1)$

7. Dokážte alebo vyvráťte: Existuje množina prirodzených čísel A taká, že ani A, ani $\mathbb{N} - A$ neobsahuje nekonečnú aritmetickú postupnosť.

8. Dokážte alebo vyvráťte: Každá nekonečná rekurzívne vyčísliteľná množina má nekonečnú rekurzívnu podmnožinu.

9. Množinu voláme *imúnna*, ak je nekonečná, ale nemá žiadnu nekonečnú rekurzívne vyčísliteľnú podmnožinu. Zjavne komplementom každej jednoduchej množiny je nejaká imúnna množina.

   Nájdite imúnnu množinu, ktorej komplement nie je jednoduchá množina.

10. Existuje imúnna množina, ktorej komplement je tiež imúnna množina?