

1 Voľba šéfa na hyperkocke – riešenie

ZADANIE: Navrhните asynchrónny algoritmus pre voľbu šéfa na d -rozmernej hyperkocke, ktorý pracuje s počtom správ $O(n)$, kde $n = 2^d$. Prepokladajte, že hyperkocka má zmysel pre orientáciu.

RIEŠENIE:

Majme n -rozmernú hyperkocku. Nech $v = (i_{n-1}, i_{n-2}, \dots, i_0)$ je vrchol tejto hyperkocky, potom d -rozmerná podkocka určená vrcholom v je podkocka pozostávajúca z vrcholov $(i_{n-1}, \dots, i_{d-1}, 0, \dots, 0)$ až $(i_{n-1}, \dots, i_{d-1}, 1, \dots, 1)$. Susedná podkocka tejto podkocky je tvorená vrcholmi $(i_{n-1}, \dots, 1 - i_{d-1}, 0, \dots, 0)$ až $(i_{n-1}, \dots, 1 - i_{d-1}, 1, \dots, 1)$.

Hlavná myšlienka riešenia je nasledovná: najskôr sa bude voliť šéf na 1-rozmerných podkockách, potom na 2-rozmerných, atď. Ak sa vrchol stane šéfom d -rozmernej hyperkocky, pošle správu šéfovi susednej d -rozmernej hyperkocky a čaká na správu od neho. Na základe obdržanej správy sa rozhodne, či sa stane šéfom celej $d+1$ -rozmernej hyperkocky, alebo prejde do neaktívneho stavu.

Vrcholy v neaktívnom stave musia routovať správy. Toto routovanie však musí byť dosť efektívne na to, aby bol celkový počet správ lineárny. Preto si každý neaktívny vrchol bude pamätať najkratšiu cestu k vrcholu, ktorý ho "zajal", t.j. od ktorého dostal správu, po ktorej prešiel do neaktívneho stavu.

Budeme používať správy, ktoré sú 4-ice $\langle id, l, path, to_go \rangle$. Takúto správu pošle aktívny vrchol s identifikátorom id po tom, čo sa stane šéfom l -rozmernej podkocky. Táto správa musí byť doručená šéfovi susednej l -rozmernej podkocky. Premenná $path$ bude zaznamenávať, po hranách ktorých dimenzií správa prešla. Na základe toho adresát zistí, aká je najkratšia cesta k odosielateľovi správy. Premenná to_go určuje, ako treba správu routovať v najbližších krokoch.

Ak dostane neaktívny vrchol správu $\langle id, l, path, 0 \rangle$, pošle ju po najkratšej ceste k vrcholu, ktorý ho zajal. Na ceste k tomuto vrcholu sa routuje iba podľa premennej to_go . Ak je tento vrchol neaktívny, opäť posielal správu po najkratšej ceste k vrcholu na vyššom leveli, až sa správa dostane k adresátovi.

Program:

```
var active : boolean;
    id : integer;
    level, chief_path : integer;
```

Initialization:

```
active = true;
level = 1;
send  $\langle id, level, 1, 0 \rangle$  to 0;
```

procedure Forward($\langle attacker_id, l, path, to_go \rangle$):

```
let  $i$ -th bit is set in  $to\_go$ 
send  $\langle attacker\_id, l, path \text{ xor } 2^i, to\_go \text{ xor } 2^i \rangle$  to  $i$ ;
```

```

On receipt  $\langle attacker\_id, l, path, to\_go \rangle$  from  $q$ :
  if  $to\_go \neq 0$  then
    Forward(  $\langle attacker\_id, l, path, to\_go \rangle$  );
  else if not active then  $\{l > level\}$ 
    Forward(  $\langle attacker\_id, l, path, chief\_path \rangle$  );
  else if  $l > level$  then
    process message later
  else  $\{l = level\}$ 
    if  $attacker\_id > id$  then
      active = false;
      chief_path = path;
    else
      level = level+1;
      if  $level < n$  then
        send  $\langle id, level, 2^{level-1}, 0 \rangle$  to  $level - 1$ ;
      else
        I am leader

```

Správnosť algoritmu je vidno z platnosti nasledujúcich tvrdení¹:

- v každej d -rozmernej podkocke je nanajvýš 1 vrchol na leveli d
- v každej d -rozmernej podkocke je aspoň 1 vrchol na leveli aspoň d
- každý vrchol buď postúpi na ďalší level, alebo prejde do neaktívneho stavu
- každý neaktívny vrchol pozná najkratšiu cestu k vrcholu, ktorý ho zajal (k svojmu šéfovi)
- správa na leveli d chodí len v rámci d -rozmernej podkocky

Analýza zložitosti:

Nech N je počet všetkých vrcholov hyperkocky. Na leveli d je $\frac{N}{2^d}$ aktívnych vrcholov. Každý pošle správu, ktorá sa routuje na nanajvýš d^2 hopov. Spolu sa teda pošle $\sum_1^n n \frac{d^2}{2^d} = O(n)$ správ.

¹Ktoré sa dajú dokázať indukciou vzhľadom na d .