0.1 Lecture 9: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Zostrojte v našej predikátovej logike prvého rádu reťazec, ktorý bude zodpovedať predikátu „x je zložené číslo".

2. Zostrojte v našej predikátovej logike prvého rádu reťazec, ktorý bude zodpovedať výroku „existuje nekonečne veľa prvočísel".

3. Nájdite konkrétny formálny systém, v ktorom je množina dokázateľných tvrdení rekurzívna.

4. Množina axióm je *minimálna*, ak sa žiadna z nich nedá dokázať z ostatných.

   Uvažujme rozhodovací problém, ktorého inštanciou je dvojica (A, D), kde A je konečná množina axióm a $D(x, y, z)$ je ternárny rekurzívny predikát „reťazec y je dôkazom tvrdenia x z množiny axióm zakódovanej do z". Otázkou, ktorú treba zodpovedať, je, či je daná množina A minimálna pre daný predikát D.

   Dokážte, že tento rozhodovací problém nie je rozhodnuteľný, ale že jeho komplement (zistiť, že A minimálna nie je) je čiastočne rozhodnuteľný.

5. Dokážte, že ak pre rekurzívne vyčísliteľnú množinu platí $A \leq_m \overline{A}$, tak je rekurzívna.

6. Nájdite množinu B, pre ktorú platí $B \leq_m \overline{B}$, ale B nie je rekurzívna.

7. Nech φ_n je naše číslovanie unárnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

   Nech $MONOTONE = \{n \mid \varphi_n \text{ je totálna a } \forall x : \varphi_n(x) \leq \varphi_n(x+1)\}$.

   Dokážte, že $\overline{HALT} \leq_m MONOTONE$.

8. Nech A je jednoduchá množina. Uvažujme množinu $B = \{c(a, n) \mid a \in A \wedge n \in \mathbb{N}\}$, kde c je naša párovacia funkcia.

   O každom z nasledujúcich tvrdení rozhodnite, či platí vždy, nikdy, alebo niekedy:
   – B je rekurzívne vyčísliteľná.
   – B je rekurzívna.
   – B je kreatívna (t. j. m-úplná).
   – B je jednoduchá.