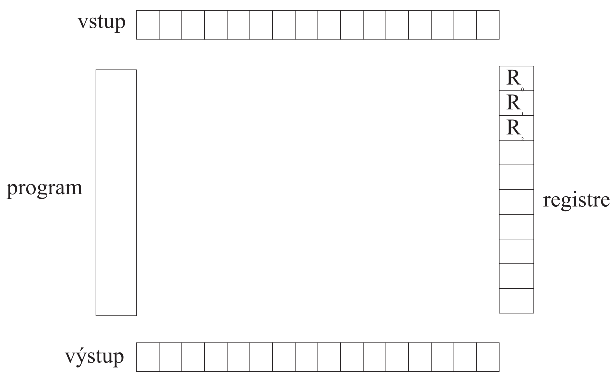
1 Paralelné RAM - PRAM

1.1 Základné definície

Označenie RAM je z "Random Access Machine". Vyzerá nasledovne:



Program je postupnosť inštrukcií, ktoré vyzerajú nasledovne:

COPY R_j	$< R_j > \to < R_0 >$
STORE R_j	$< R_0 > \to < R_j >$
IFZERO i	if $< R_0 > = 0$ then jump na i-ty riadok
GOTO i	jump na i-ty riadok
ADD R_j	$< R_j > + < R_0 > \to < R_0 >$
SUB R_j	$< R_0 > - < R_j > \to < R_0 >$
CONST c	$c \to < R_0 >$
HALT ACCEPT	
HALT REJECT	
READ	
WRITE	
MULT c	$c < R_0 > \to < R_0 >$
DIV c	$< R_0 > /c \to < R_0 >$

Môžeme používať aj nepriamu adresáciu.

Definícia 1.1.1 *Program pre PRAM je konečná postupnosť takýchto inštrukcií.*

Poznámka 1.1.2 *Vlastnosti:*

1. *V polynomiálnom čase nevyrobí čísla superpolynomiálnej dĺžky.*
2. *Miery zložitosti:*
   (a) *jednotková* $\left\langle \begin{array}{ll} \textit{TIME} & \text{- počet vykonávaných inštrukcií} \\ \textit{SPACE} & \text{- počet používaných registrov} \end{array} \right.$
   (b) *logaritmická - zohľadňuje veľkosť čísla, s ktorým RAM pracuje*

Veta 1.1.3 *RAM a DTS sú v polynomiálnom vzťahu vzhľadom na zložitosti.*

PRAM má neohraničený počet procesorov synchrónne pracujúcich ozn. P_0, P_1, P_2, ... Každý z nich je RAM s vlastnými registrami $R_{i0}, R_{i1}, R_{i2}, ...$ Ďalej má nekonečnú sadu globálnych registrov $C_0, C_1, C_2, ...$ Každý procesor má tiež svoje identifikačné číslo id a má priamy prístup ku svojim aj globálnym registrom. Vstup a výstup pre PRAM predpokladáme v globálnych registroch. [1] Tiež má inštrukciu `IDENT`, ktorá vloží id číslo procesora do jeho $< R_0 >$. Otázkou je, že ktoré procesory sú aktívne. Z P_0 urobíme generála. P_0 má špeciálny register C_{-1}, ktorý je dostupný aj ostatným a do ktorého na základe vstupu vloží index (index aktívneho procesora). Aktívne sú všetky procesory s $id \leq\ < C_{-1} >$. Tiež môžeme vyvolať inštrukciu `FORK`.

Súčasný prístup ku globálnym registrom:

1. **EREW-PRAM** (Exclusive Read Exclusive Write) - k registru môže pristupovať najviac jeden proces
2. **CREW-PRAM** (Concurent Read Exclusive Write) - viacerí môžu naraz čítať, ale iba jeden môže zapisovať.
3. **CRCW-PRAM** (Concurent Read Concurent Write)
   (a) *Priority* - stanovíme prioritu, pri zapisovaní uspeje procesor s najmenším id.
   (b) *Common* - všetky zapisujúce procesory zapisujú rovankú hodnotu.
   (c) *Arbitrary* - viacero procesorov sa snaží zapísať, zapíše sa len jedno z nich. Zvolenie toho, ktorý zapíše trvá $\log P(n)$, kde $P(n)$ je počet aktívnych procesorov na vstupe dĺžky n.

1.2 Miery zložitosti

TIME T(N)	čas výpočtu P_0 na vstupe dĺžky n
PROCESSORS P(n)	počet aktívnych procesorov

Pre T(n)$\geq \log n$ žiadne číslo nemôže mať viac ako $O(T(n))$ bitov. Pre $P(n)$ procesorov je to $P(n)T(n)T(N)$ bitov, teda priestor je ohraničený a netreba ho uvažovať.

1.3 Príklady výpočtov PRAM

Príklad 1.3.1 *Výpočet MAX na CRCW-PRAM. Vstup je v globálnej pamäti uložený nasledovne: v* $C_0 = n$ *je počet hodnôt a v* $C_1, ..., C_n$ *sú jednotlivé hodnoty. Výstup bude v* C_0*, čo bude* $\max\{C_1, ..., C_n\}$*. PRAM používa* n^2 *procesorov a procesor* P_0.

[1]Napríklad dĺžka vstupu je v C_0 a jednotlivé bity v $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$

Algoritmus:

1. *Inicializácia:* $C_{n+1}, ..., C_{n+n}$ *na* 0. *Napríklad* P_{1j} *inicializuje* C_{n+j}.
2. *Procesor* P_{ij} *zapíše* $C_{n+i} = 1$, *ak* $C_i < C_j$
3. *Procesor* P_{i1} *zapíše do* C_0 *hodnotu* C_i, *ak* $C_{n+i} = 0$

Poznámka 1.3.2 *Po kroku 2 je* $C_{n+i} = 0 \iff x_i$ *je maximálne. Všetky procesory zapisujú rovnakú hodnotu a používame konštantný čas. Algoritmus by fungoval aj na modeloch Priority a Arbitrary.*

Príklad 1.3.3 *Výpočet MAX na EREW-PRAM. Výška rozhodovanieho stromu bude* $\log n$.

Príklad 1.3.4 *Sčítanie n čísel. Analogicky* $T(n) = \log n$.

Veta 1.3.5 *Nech* $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je* U_{BC} *uniformná trieda boolovských obvodov počítajúca funkciu* $f_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{m(n)}$. *DEPTH(C(n))=*$(\log n)^{O(1)}$ *a SIZE(*C_n*)=*$n^{O(n)}$. *Potom existuje CREW-PRAM taký, ktorý počíta f v čase* $(\log n)^{O(1)}$ *na* $n^{O(1)}$ *procesoroch.*

Veta 1.3.6 *Nech M je CREW-PRAM, ktorý počíta v polylog čase na* $P(n) = n^{O(1)}$. *Potom existuje konštanta k a BC uniformná postupnosť obvodov* $\{C_i\}_{n=1}^{\infty}$ *taká, že* C_n *počíta na vstupe* $x_1, ..., x_n$ *výstupy* $y_{11}, y_{21}, .., y_{ij}$, *kde* y_{ij} *je hodnota j-teho bitu registra* C_i *v čase* $T(n)$ *pre* $1 \leq i \leq T(n)T(n)$ *a je* $1 \leq j \leq kT(n)$. *Navyše DEPTH(*C_n*)=*$(\log n)^{O(1)}$ *a SIZE(*C_n*)=*$n^{O(1)}$

Záver 1.3.7 *PRAM-y sú v druhej počítačovej triede.*

Záver 1.3.8 *NC je PRAM TIMEPROC(*$(\log n)^{O(1)} n^{O(1)}$*).*

Príklad 1.3.9 *Triedenie je v NC. Vieme, že* $NP \subset P$.

1.4 Redukovateľnosť

Definícia 1.4.1 *Many-One redukovateľnosť.* $L_1 \leq_m L_2$ *ak* $\exists$ *funkcia, taká, že* $x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$. *Pre použiteľnosť v otázkach rozhodnuteľnosti* $f \in REC$ *.... [TODO]*

Definícia 1.4.2 L_1 *a* L_2 *sú ekvivalentné, ak* $L_1 \leq L_2$ *a* $L_2 \leq L_1$.

Lema 1.4.3 $L' \in P$ *a* $L \leq_m^P L'$, *potom* $L \in P$. $L' \in NC$ *a* $L \leq_m^{NC} L'$, *potom* $L \in NC$.

Poznámka 1.4.4 $\leq_{m1}, \leq_m^P, \leq_m^{NC}, \leq_m^{NC^*}$ *sú tranzitívne.*

Definícia 1.4.5 *Turingova redukovateľnosť.* $L_1 \leq_R L_2$, *ak existuje DTS s orákulom* L_2 *akceptujúci* L_1.

2 Úplnosť

Definícia 2.0.6 *Jazyk L je P-ťažký (P-hard), pri turingovej NC[2] redukovateľnosti, ak pre každý $L' \in P$ platí, že $L' \leq_T^{NC} L$.*

Definícia 2.0.7 *Jazyk L je P-úplný (P-complete), ak pri turingovej NC redukovateľnosti, ak L je P-ťažký a $L \in P$.*

Poznámka 2.0.8 *Otvorený problém je $NC \stackrel{?}{=} P$. Vieme však, že $NC \subseteq P$.*

Lema 2.0.9 *Ak nejaký P-úplný (pri NC redukcii) problém (jazyk) patrí do NC, potom $NC = P$.*

Poznámka 2.0.10 *Všeobecne panuje domnienka, že $NC \neq P$.*

2.1 Základné problémy

Problém 2.1.1 *Generický problém simulácie TS.*
Vstup: Slovo w, kód DTS $< M >$, číslo t (unárne kódované). (Máme teda reťazec $w\# < M > \#t$).
Otázka: Akceptuje M slovo w v priebehu t krokov ?

Veta 2.1.2 *Generický problém simulácie TS je P-úplný pri $\leq_m^{NC^1}$ redukcii.*

Dôkaz:

1. $\in P$. Štandardná simulácia z konštruckie univerzálneho TS prebieha v polynomiálnom čase vzhľadom na maximálnu dĺžku pásky $\leq D(t)$
2. je potrebné ukázať, že ľubovoľný $L' \in P$ vieme redukovať na generický problém simulácie. Nech M je DTS pracujúci v čase $p(n)$ pre polynóm n. Keď máme pre vstup w dané M, treba vyrobiť vstup pre generický problém simulácie. Vstup vyzerá $w\# < M > \#^{p(|W|)}$. Stačí však $w\# < M > \#^{f(|W|)}$, pre ľahko počítateľnú funkciu f, $p(n) \leq f(n)$. Napríklad $f(n) = 2^{k \log(|w|+2)}$. Transformácia sa dá urobiť z w na $w\# < M > \#^{f(|w|)}$. Vyrobíme ju takto: najprv w skopíruje bez zmeny, potom zapíše $< M >$ čo je konštanta natvrdo, a potom vyrobí $f(|w|).VyhodnotreieBoo$

$\square$

Problém 2.1.3 *Vyhodnotenie Booleovského obvodu (Circuit Value Problem - CVP)*
Vstup: kód obvodu C_n, vstupy $x_1, \ldots, x_n$ a vyznačený výstupný vrchol y.
Otázka: Je výstup y pri vstupoch $x_1, \ldots, x_n$ TRUE ?

Veta 2.1.4 *CVP je P-úplný pri $\leq_m^{NC^1}$ redukcii*

[2] vždy treba spomenúť o ktorej redukovateľnosti sa bavíme

Dôkaz:

1. CVP$\in$P. viď simulácia bool. obvodu na DTS.
2. CVP je P-ťažký. Stačí ukázať, že obvod pre simuláciu DTS vieme zostrojiť v NC^1

□

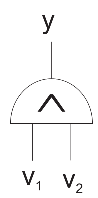
Veta 2.1.5 *Problém vyhodnotenia monotónnych boolovských obvodov*[3] *je P-úplný.*

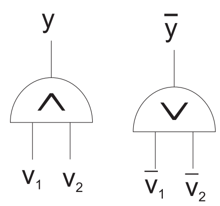
Dôkaz:

1. $\in P$ - zrejmé
2. CVP sa dá redukovť na monotónne CVP takto
   (a) Ak sa dohodneme, že uvažujeme boolovské obvody s negáciou len na vstupe (tj. vstup $x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_n, \overline{x_n}$), tak je to zrejmé. Pre daný obvod a vstup $x_1, \ldots, x_n$ vyrobíme monotónny obvod C'_{2n} tak, že, zdvojíme vstupy.

vstup	1	0	1	1	0	1
monotónny vstup	10	01	10	10	01	10

   (b) Ak trváme na všeobecnom použití negácie, tak vyrobíme pre každé hradlo tieňové hradlo počítajúce negáciu (opäť na zvojenom vstupe).

Máme: 

v našej konštrukcii 

□

Problém 2.1.6 *Maximálna nezávislá množina (maximal independent set).*
Vstup: konečný graf
Výstup: množina vrcholov B taká, že žiadne dva nie sú spojené hranou a každý vrchol z $V - B$ je spojený hranou s niektorým z vrcholov v B.

Poznámka 2.1.7 *Maximum independent set je NP-úplný.*

Problém 2.1.8 *LFMIS (Lexicografically first maximal independent set)*
Vstup: Graf G a vrchol v
Otázka: Je v v LFMIS ?

[3] obvody len s $\vee, \wedge$ a neobsahujúce negáciu

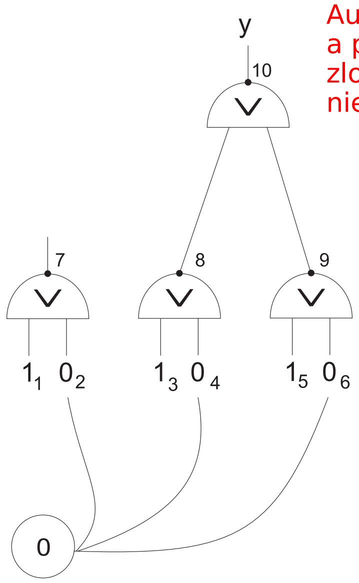
Veta 2.1.9 *LFMIS je ~~N~~P-úplný pri NC^1 redukcii.*

Dôkaz:

1. Problém je v P. Funguje totiž greedy algoritmus.

2. Je P-ťažký. Ukážeme tak, ze naň budeme redukovať CVP. Budeme uvažovať NOR obvody. Konštrukcia bude vyzerať tak, že očíslujeme hradlá od 1 topologicky, od vstupov začínajúc. Pridáme vrchol 0 a spojíame ho so vstupnými vrcholmi so vstupnou hodnotou 0. Za vrchol v LFMIS zvolíme výstupný vrchol obvodu. Tvrdíme, že okrem 0 bude v LFMIS vrchol i práve vtedy, keď jeho hodnota je 1.

Autor asi trpel nedostatkom spánku a prebytkom Ďurišovej výpočtovej zložitosti, zjavne dokazuje P-úplnosť, nie NP.



□

Problém 2.1.10 *Problém prázdnosti pre CFG (bezkontextové gramatiky)*
Vstup: CFG gramatika G
Otázka: Je $L(G) = \emptyset$?

Veta 2.1.11 *Problém prázdnosti pre CFG je P-úplný.*

Dôkaz:

1. $\in P$ viď FOJA 2. ročník.

2. je P-ťažký. Dokazujeme to redukciou CVP na problém prázdnosti pre CFG. Pre daný obvod zostrojíme CFG takto:
   $N = \{i | i \text{ je hradlo v booleovskom obvode}\}$

$$T = \{a\}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{ll} i \to jk & \text{ak } i \text{ je } \wedge \text{ hradlo so vstupmi } j,k \\ i \to j|k & \text{ak } i \text{ je } \vee \text{ hradlo so vstupmi } j,k \\ i \to a & \text{ak } i \text{ je vstup s hodnotou 1} \\ \sigma \to j & j \text{ je výstupný vrchol} \end{array} \right\}$$

□

3 Dodatok

3.1 Faq

Tam asi chcelo byť T(n)/\sqrt{n}, nie \sqrt{T(n)}.

Otázka 3.1.1 *Prečo asi platí $P \neq NC$?*

Odpoveď 3.1.2 *Jeden dôvod je, že všeobecné simulácie sú pomalé. Najlepšie známe simulácie sekvenčných modelov redukujú sekvenčný čas $T(n)$ na paralelný $T(n)/\log n$. Niekedy vieme urobiť $\sqrt{T(n)}$ v závislosti od modelu. Pritom sa používa $2^{T(n)^{O(1)}}$ procesorov. Rýchle simulácie sú známe len pre slabé modely*[4]*. Pre DTS platí*

1. *Ak čas $T(n)$ je $n^{O(1)}$ a $SPACE(n) \leq \log n$ potom $\subseteq NC$.*
2. *Otvorený problém že čo sa nachádza tu.*
3. *Ak $T(n) = n^{O(1)}$ a $SPACE(n) = n^{O(1)} \supseteq P$*

Pre PRAM platí:

1. *Ak $n^{O(1)}$ procesorov a $\log^{O(1)} n$ čas, tak $\subseteq NC$.*
2. *Ak $n^{O(1)}$ procesorov a $n^{O(1)}$ čas, tak $\supseteq NC$* Tu asi chceme tiež P...

Otázka 3.1.3 *Kedy je paralelný algoritmus optimálny ?*

Odpoveď 3.1.4 *Optimálny je vtedy, ak platí $\underbrace{\text{paralelný čas} * \text{počet procesorov}}_{\text{práca, ktorú vynaloží paral. algoritmus}} \geq$ sekvenčný čas. Pre systém s P procesormi je najlepší možný čas rovný $\frac{\text{Sekvenčný čas}}{P}$, čo je to najlepšie, čo sa podarí. Keď je to $\frac{1}{2}$, tak je to dobré. Problém býva udržať všetky procesory v BUSY stave.*

Otázka 3.1.5 *Je NC dobre zvolená?*

Odpoveď 3.1.6 *Čo ak vezmeme polynomiálne zrýchlenie na polynomiálne veľa procesoroch...*

Otázka 3.1.7 *Čo tak pripustiť malú neefektívnosť, teda dovoliť aby práca bola rovná sekvenčný čas $* \log n$.*

[4] napríklad konečné automaty

3.2 Niektoré ďalšie modely

- PRAM-y ktorých komunikačný čas nie je zadaný
- Iteratívne a systolické polia. Je to mriežka a stav každého nódu v každom takte závisí od susedov.
  - von Neumann 4 susedia (hore, dole, vľavo, vpravo)
  - Moore 8 susedov (aj tie na diagonále)

Odpoveď 3.1.2, dodatok:
CVP sa obvykle modeluje pomocou peblovania (viď Prívarove materiály ku ZTP – tretie PDF pre schémy); počet peblov potrebných na vyhodnotenie BO udáva minimálny počet registrov potrebných na jeho odsimulovanie. Ukazuje sa, že existujú grafy, ktoré vyžadujú n/log n peblov, čo je viac, ako si môžeme dovoliť na simuláciu v NC.
Bolo by teda treba nájsť nejaký úplne iný prístup ku simulácii.

Ešte boli na prednáške aj miery pre BO:
SIZEDEPTH(n^{O(1)}, \log^{O(1)} n) = NC
SIZEDEPTH(n^{O(1)}, n^{O(1)}) \supseteq P