

# Poznámky z Kombinatorických štruktúr

Peter Csiba, petherz@gmail.com, <https://github.com/Petrzlen/fmfi-poznamky>

17.01.2013

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Latinské štvorce</b>	<b>3</b>
2.1	Metrika medzi permutáciami . . . . .	3
2.1.1	Vseobecna metrika . . . . .	3
2.1.2	Metricky system permutácii . . . . .	3
2.2	Hallova veta . . . . .	3
2.3	Normalizovane LS . . . . .	4
2.4	Ortogonalne LS . . . . .	4
2.5	Polonormalizovane LS . . . . .	4
2.6	Uplna mnozina. . . . .	4
<b>3</b>	<b>Vyvazene blokovy plany</b>	<b>5</b>
3.1	Vlastnosti . . . . .	5
3.2	Bruck, Ryser . . . . .	5
3.3	Diferencne mnoziny . . . . .	5
3.3.1	Definovane na $\mathbb{Z}_v$ . . . . .	5
3.3.2	Definovane na grupach . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Hadamardove matice</b>	<b>6</b>
4.1	Vlastnosti . . . . .	6
4.2	Konstrukcie . . . . .	6
4.2.1	Sylvestrova . . . . .	6
4.2.2	Kroneckerov sucin . . . . .	7
4.3	Hadamardova hypoteza . . . . .	7
4.4	Ekvivalencia s blokovymi planmi . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Konecne projektivne roviny</b>	<b>7</b>
5.1	Desarguesova veta . . . . .	7
5.2	Vlastnosti . . . . .	7
5.3	$(v, k, \lambda)$ -konfiguracie . . . . .	8
5.4	Existencia projektivnej roviny . . . . .	8
5.5	Ortonormalne latinske stvorce . . . . .	8
5.5.1	LS a PR . . . . .	8
5.6	Singerove diferencne mnoziny . . . . .	8

<b>6</b>	<b>Nevyvážené blokové plány</b>	<b>8</b>
6.1	Vlastnosti . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Steinerovské systémy trojic</b>	<b>9</b>
7.1	Veta Kirkman . . . . .	9
7.2	Konstrukcie . . . . .	9
7.2.1	Projektívne SST . . . . .	9
7.2.2	Afinné SST . . . . .	10
7.2.3	Priamy súčin SST . . . . .	10
7.2.4	$2n + 1$ konštrukcia . . . . .	10
7.2.5	Wilsonova-Schreiberova konštrukcia . . . . .	10
7.3	Ciastocny SST . . . . .	10
7.4	T-design . . . . .	10
7.4.1	Steinerovské systémy stvoriť . . . . .	10
7.4.2	Steinerovské systémy petíc . . . . .	10
7.5	Projektívne špeciálne lineárne grupy . . . . .	11
7.5.1	Mathieuove grupy . . . . .	11
<b>8</b>	<b>Symetrické konfigurácie</b>	<b>11</b>
8.1	Napríklad . . . . .	11
<b>9</b>	<b>Matroidy</b>	<b>11</b>
9.1	Definícia . . . . .	11
9.2	Špeciálne matroidy . . . . .	12
9.3	Vlastnosti . . . . .	12
9.4	Hodnotová funkcia . . . . .	12

# 1 Úvod

Autor neabsolvoval prednášky ani skúšku z predmetu Kombinatorické štruktúry. Poznámky sú voľným prepisom poznámok Martina Šrámečka doplnených o komentár autora.

Nakoniec poznamenajme, že autor sa snažil písať pravdu a len pravdu, keďže jeho odpoveď na skúškach vychádza z tototo materiálu. Ak čitateľ chce prispieť ku kvalite textu, nech autorovi napíše a ten mu udelí prístup do repozitára.

## 2 Latinské štvorce

- $n \times n$
- $\{1, \dots, n\} = X$
- Každý riadok aj stĺpec je permutácia.
- $S_n$  sym. grupa  $n!$
- $\Phi, \Psi$  - permutacie na  $X$
- $\Phi, \Psi$  su *dis...ntne* na  $Y$  ak  $\forall x \in Y \Psi(x) \neq \Phi(x)$
- $\Phi, \Psi$  su *dis...ntne*  $\Leftrightarrow$  su *dis...ntne* na  $X$

**Poznamky.**

- Latinsky stvorec - maximalny latinsky obdlznik.
- Maximalna mnoznina navzajom maximalne vzdialenych permutacii.

### 2.1 Metrika medzi permutaciami

#### 2.1.1 Vseobecna metrika

- $S(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $S(x, y) = S(y, x)$
- $S(x, y) + S(y, z) \geq S(x, z)$

1

#### 2.1.2 Metricky system permutacii

- $S(\Psi, \Phi)$  - max pocet prvkov mnoziny  $Y \subseteq X$  pri ktorej  $\Psi$  a  $\Phi$  su *dis...ntne*.
- $S(\Psi, \Phi) = |\{x \in X, \Psi(x) \neq \Phi(x)\}|$
- $S(\Psi, \Phi) = S(\Phi^{-1}\Psi, id)$

### 2.2 Hallova veta

Latinsky stvorec je maximalna mnozina *dis...permutacii* z  $S_n$ .  $L_n = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ .

---

<sup>1</sup> Podla pravidla o generalizacii kde nedavame kvantifikatory, tak su vseobecne.

**Hallova veta.** Nech  $(X_1, \dots, X_k)$  je system mnozin  $X_i \subseteq X$ .  $T \subseteq X$  je system rozlicnych reprezentantov ak  $T = [x_1, \dots, x_k], x_i \in X_i, x_i \neq x_j$  pre  $i \neq j$ . Potom system  $X$  ma system rozlicnych reprezentantov  $\Leftrightarrow$  pre kazdy system mnozin  $Y \subseteq X$  plati  $|\cup Y_i| \geq |Y|$ .

**Veta.** Kazdy latinsky obdlznik s  $k$  riadkami sa da doplnit na stvorec. Lebo Hallova veta. Presnejšie: Urobme si bipartitny graf, kde jednu particiu predstavuju stlpce a druhu cisla. Hrana je medzi cislami, ktoré mozeme dat do daneho stlpca. Tento graf je  $n-k$ -regularny (zo stlpcovej particie to je jasne a cislo sa mohlo vyskytnut v max  $k$  stlpcoch, takže ma este  $n-k$  volnych) a teda ma 1-faktor z ktoreho vieme doplnit dalsi riadok.

## 2.3 Normalizovane LS

1    2    ...  
2  
3  
...

## 2.4 Ortogonalne LS

- $L_n = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$  jeden LS
- $L'_n = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$  sruhy LS
- $L_n \perp L'_n \Leftrightarrow (i, j) \neq (k, l) \in X \times X$  plati  $(\Phi_i(j), \Phi'_i(j)) \neq (\Phi_k(l), \Phi'_k(l))$
- Tj. vsetky dvojice  $(i, j)$ .

### Vlastnosti 1-2.

- $L_n \perp L'_n \Leftrightarrow L_n \cdot L'_n$  je LS.
- Ak  $L_n \perp L'_n \Rightarrow \forall \Phi, \Psi \in S_n : \Psi L_n \perp \Phi L'_n \wedge L_n \Psi \perp L'_n \Phi$ .

## 2.5 Polonormalizovane LS

$[id, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ .

**Vlastnost 3.** Nech  $L_n^{(1)}, \dots, L_n^{(r)}$  je mnozina navzajom  $\perp$  LS. Potom  $r \leq n-1$ . TODO - polonormalizovane prelozene cez seba.

## 2.6 Uplna mnozina.

**Uplna mnozina.** Uplna mnozina  $L_n^{(1)}, \dots, L_n^{(n-1)}$  je mnozina  $n-1$  LS.

**Sievers.** Nech  $n = p^r$ , kde  $p$  je prvocislo a  $n \geq 1$ . Potom existuje uplna mnozina  $(n-1)$  navzajom ortogonalnych LS radu  $n$ . TODO -  $\exists GF(n) = F$ , technicky sporom.

Basic idea: Zobereme konečne pole  $GF(n)$  a položíme  $L_a(i, j) = a * i + j$ . Zbytok je technická dokazovacia otrava.

### 3 Vyvazene blokové plány

$(v, k, \lambda)$ -konfigurácia.

- $X = \{x_1, \dots, x_v\}$  - body.
- System podmnožín  $B = X_1, \dots, X_n$  - bloky.
- 1.  $|X_i| = k$  (konst)
- 2.  $X_i \cap X_j = \lambda$  (konst)  $i \neq j$ .
- 3.  $0 < \lambda < k < v - 1$

**Incidenčná matica.**  $A = (a_{ij}), a_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_j \in X_i$

**Jednotková matica.**  $J = (1)$

#### 3.1 Vlastnosti

1.  $AJ = kJ$
2.  $AA^T = \lambda J + (k - \lambda)I$
3.  $\det(AA^T) = (\det A)^2 = [k + \lambda(v - 1)](k - \lambda)^{v-1} > 0$ , TODO, rozvoj podľa riadka
4.  $k(k - 1) = \lambda(v - 1)$ , TODO, z  $AA^T$  na  $JAJ$ .
5.  $JA = AJ = kJ$ , TODO
6.  $AA^T = A^T A$ , zameniteľnosť blokov a bodov, TODO

#### 3.2 Bruck, Ryser

Nutné podmienky na existenciu  $(v, k, \lambda)$  konfigurácie:

- $v$  je párne, tak  $k - \lambda$  je stvorec
- $v$  je nepárne,  $z^2 = (k - \lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} \lambda yz$  má nenulové riešenie v  $\mathbb{Z}$ .

#### 3.3 Diferenčné množiny

Špeciálny prípad.

##### 3.3.1 Definované na $\mathbb{Z}_v$

$\mathbb{Z}_v \supseteq D = \{d_1, \dots, d_k\}$ , ak každý prvok  $a \in \mathbb{Z}_v - 0$  sa dá vyjadriť  $\lambda$  rôznymi spôsobmi ako rozdiel dvoch prvkov z  $D$ .

**Konstrukcia.**

- $X = \mathbb{Z}_v$
- $X_i = D + i$

Napríklad  $X = \mathbb{Z}_7, D = \{1, 2, 4\}$  dáva  $[1, 2, 4], [2, 3, 5], [3, 4, 6], [4, 5, 0], [5, 6, 1], [6, 0, 2], [0, 1, 3]$  - Fannova rovina  $(7, 3, 1)$ .

### 3.3.2 Definované na grupach

Nech  $G$  je konečná grupa radu  $v$ , nie nutne komutatívna. Množina  $D = \{d_1, \dots, d_k\} \subseteq G$  sa nazýva DM založená na  $G$ , ak je splnená jedna z dvoch podmienok:

- $\forall a \neq e \exists \lambda (d_i, d_j), i \neq j : a = d_i d_j^{-1}$
- $\forall a \neq e \exists \lambda (d_i, d_j), i \neq j : a = d_i^{-1} d_j$

**Tvrdenie.** Každá  $(v, k, \lambda)$  dif. množina založená na  $G$  definuje  $(v, k, \lambda)$  konfiguráciu:

- $X = G$
- $B = \{Dg, g \in G\}$

TODO

**Priklad.**  $(16, 6, 2)$ -konfigurácia.

- $G = \mathbb{Z}_4$
- $D = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

## 4 Hadamardove matice

Len stručne. Nechcelo sa mi texovať matice.  $H_n = (a_{ij})$

- (i)  $a_{ij} = \pm 1$
- (ii)  $HH^T = nI$  - navzájom ortogonálne, maximálny objem spomedzi jednotkových

### 4.1 Vlastnosti

**Základné.**

1.  $\langle H_i, H_j \rangle = n$  ak  $i = j$ , 0 ak  $i \neq j$ . Len iný zápis (ii)
2.  $H$  je uzavretá na výmenu riadkov a stĺpcov, násobenie  $-1$
3. Každá  $H$  je normálna, tj.  $HH^T = H^T H$ .
4. Každú  $H$  maticu je možné previesť na normálnu - prvý riadok a prvý stĺpec má samé 1.

**Deliteľnosť 4.**  $n = 1$  or  $n = 2$  or  $4 \mid n$ . Normalizácia. Spočítame koľko je typov stĺpcov podľa prvých torč riadkov.

### 4.2 Konštrukcie

#### 4.2.1 Sylvestrova

$$\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$$

#### 4.2.2 Kroneckerov sucin

$$\begin{array}{ccc} a_{11}H & \dots & a_{1n}H \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}H & \dots & a_{nn}H \end{array}$$

#### 4.3 Hadamarova hypoteza

Pre kazde  $n$  delitene 4 existuje matica. Nezname su pre 168,224,284,312. (Najdi bug). Usamec: Skoviera je outdated, podla tohoto <http://designtheory.org/library/encyc/topics/had.pdf> je najmensia neznama 668.

#### 4.4 Ekvivalencia s blokovymi planmi

Normalizovane  $H$  matice su ekvivalentne s  $(4n-1, 2n-1, n-1)$ -konfiguraciami. TODO: Trivialne.

**Kvadraticke rezidua.** TODO. Kvadraticke rezidua - $\mathbb{F}_q$  Diferencna mnozina - $\mathbb{F}_q$  Hadamardova matica.

### 5 Konecne projektivne roviny

Uz len to najdolezitejsie.

- $V_{n+1}(F) = F^{n+1} - 0$
- (PP1) Kazdymi dvoma bodmi vedie prave jedna priamka.
- (PP2) Kazde dve priamky maju prave jeden spolocny bod.
- (PP3) Existuju styri rozne body vo vseobecnej polohe (ziadne tri z nich nie su kolinearne)

**Priklady.**

- Polgula kde stotoznime priamky cez s bodmi na obale.
- $\mathbb{Z}_2^3 - 0$
- Znizenim dimenzie. Stotoznime body  $y = kx, k \in F$ .

#### 5.1 Desarguesova veta

Ak sú trojuholníky  $T_1, T_2$  perspektívne z bodu  $S$ , tak su perspektívne aj z priamky.

#### 5.2 Vlastnosti

Nech  $n \geq 2$ ,  $\Pi$  je projektivna geometria. NPSE:

1. Nejaka priamka obsahuje prave  $n+1$  bodov.
2. Nejakym bodom prechadza prave  $n+1$  priamok.
3. Kazda priamka obsahuje presne  $n+1$  bodov.
4. Kazdym bodom prechadza  $n+1$  priamok.
5. V  $\Pi$  sa nachadza presne  $n^2 + n + 1$  bodov.
6. V  $\Pi$  sa nachadza presne  $n^2 + n + 1$  priamok.

**Oznacenie.**  $n$ -rad projektívnej roviny

### 5.3 $(v, k, \lambda)$ -konfigurácie

Kazda projektívna rovina, ktorá má na nejakej priamke konečný počet bodov definuje  $(v, k, \lambda)$ -konfiguráciu:

- $v = n^2 + n + 1$  - body
- $k = n + 1$  - priamka obsahujúca body
- $\lambda = 1$  - priesečníky priamok

### 5.4 Existencia projektívnej roviny

**Tvrdenie.** Pre existenciu proj. roviny radu  $n$  je nutné, aby pre  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  existovali  $a, b$ , také, že  $n = a^2 + b^2$ . Bez dokazu.

**Hypoteza.** PR radu  $n$  existuje iba pre  $n = p^r$ .

### 5.5 Ortonormalne latinske stvorce

**Latinska vlastnosť.** Matica  $C = (c_{ij})$  rozmerov  $n \times (t + 2)$  má *latinsku vlastnosť*, ak  $(c_{ik}, c_{il}) \neq (c_{jk}, c_{jl})$ .

**Lema.** Nech  $n \geq 3$  a  $t \geq 2$  sú z  $\mathbb{N}$ . Potom množina  $t$  navzájom roznych ortogonálnych latinských stvorcov radu  $n$  existuje  $\Leftrightarrow$  existuje matica  $C = (c_{ij})$ ,  $n \times (t + 2)$  s latinskou vlastnosťou. TODO. Aké sú rozmery matice v dokaze?

**Veta.** Ak existuje množina  $t$  navzájom ortogonálnych LS radu  $n$  a množina  $t$  ortogonálnych LS radu  $m$ , tak existuje aj množina  $t$  OLS radu  $nm$ .

**Dosledok.**  $n = p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_k}$ .

#### 5.5.1 LS a PR

**Veta.** Nech  $n \geq 3$ . Potom PR radu  $n$  existuje  $\Leftrightarrow$  existuje  $n - 1$  navzájom ortogonálnych LS radu  $n$ .

$\Rightarrow$ . Fixujeme jednu priamku  $X = x_1, \dots, x_{n+1}$ . Zvyšných  $n^2$  bodov označíme  $y_1, \dots, y_{n^2}$ . Priamky prechádzajúce  $x_j$  označíme postupne  $L_{j1}, \dots, L_{jn}$ . Potom  $c_{ij} = k \Leftrightarrow y_i \in L_{jk}$ . Sporom.  $\Leftarrow$ . Majme  $n - 1$  OLS radu  $n$  a skonstruujeme  $C$  rozmerov  $n^2 \times (n + 1)$  s LV. Bod a hodnota v  $C$  určujú na ktorej priamke leží  $y_i \in L_{jk}$ . TODO.

### 5.6 Singerove diferenčné množiny

PG. Kvadraticke rezidua. Bikvadraticke rezidua. Tetrakvadraticke rezidua.

## 6 Nevyvážene blokove plány

Nevyvážena  $(b, r, v, k, \lambda)$ -konfigurácia je systém podmnožín-blokov  $\{X_1, \dots, X_b\}$ ,  $X_i \subseteq X$ , kde  $X = \{x_1, \dots, x_v\}$  a platí:

1.  $|X_i| = k$



2.  $x_i$  sa vyskytuje prave v  $r$  blokoch
3.  $x_i, x_j$  sa spolocne vyskytuju v  $\lambda$  blokoch
4.  $0 < \lambda, k < v - 1$  (netrivialnost)

**Steinerovske systémy trojíc.**  $k = 3, \lambda = 1$ .

**Graf  $K_v^\lambda$ .** Kompletný graf o  $v$  vrcholoch s  $\lambda$  násobnými hranami.  $(b, r, v, k, \lambda)$ -konfigurácia odpovedajú jej rozkladu.

## 6.1 Vlastnosti

Incidenčná matica  $b \times v$ .

1.  $AJ_v = kJ_{b,v}$
2.  $J_bA = rJ_{b,v}$
3.  $AA^T = \lambda J_v - (r - \lambda)I_v$
4.  $bk = vr$ . Zratame dvojice dvoma rôznymi spôsobmi.
5.  $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$ . Zratame dvojice s fixným prvkom.
6.  $\det(A^T A) = (r + \lambda(v - 1))(r - \lambda)^{v-1}$
7.  $b \geq v$  (Fischerova nerovnosť). Dokaz z predoslych dvoch. Dosledok  $r \geq k$ .

## 7 Steinerovske systémy trojíc

SST je dvojica  $S = (P, B)$  kde

- $|P| = v$
- $B$  ke system trojprvkových podmnozin  $P$  takych, ze  $\forall \{x_i, x_j\} \in \frac{P}{2}$  patri prave do jednej trojice.

Zjavne blokový plan je  $k = 3$  a  $\lambda = 1$ . Možeme nahliadnuť na SST ako na rozklad  $K_v$  na  $K_3$ .

### 7.1 Veta Kirkman

**Tvrdenie.** Nutné  $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$

**Veta.** Pre každé  $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$  existuje SST.  $N(v) \geq (e^{-5}v) \frac{v^2}{6}$ . Bez dokazu.

### 7.2 Konstrukcie

#### 7.2.1 Projektívne SST

- $\mathbb{Z}_2^{n+1} - 0$ -i body  $PG(2, n)$
- bloky  $\{x, y, z\}$ ,  $x + y + z = 0$  -i priamky v  $PG(2, n)$

TODO

### 7.2.2 Afinne SST

- $\mathbb{Z}_3^n$  - body  $AG(3, n)$
- bloky  $\{x, y, z\}$  - priamky v  $PG(2, n)$

TODO

### 7.2.3 Priamy sucin SST

- $R = (P, B)$
- $S = (Q, C)$
- $R \times S = (P \times Q, D)$

D obsahuje bloky v jednom z troch tvarov. TODO

### 7.2.4 $2n + 1$ konstrukcia

TODO

### 7.2.5 Wilsonova-Schreiberova konstrukcia

- Abelovska grupa  $A$  radu  $n$ .
- $P = A \cup \{\alpha, \beta\}$
- TODO
- TODO

## 7.3 Ciastocny SST

Pozadujeme, aby kazda dvojica bodov bola nanajvys v jednej trojici.

**Tvrdenie.** Kazdy SST sa da (s pridaním nejakého počtu bodov) doplniť na SST. TODO: niekde chyba ciastocny.

## 7.4 T-design

Steinerovský systém  $S(t, k, n)$  je  $t$ -blokový plán, taký, že  $\lambda = 1$ . (Systém  $k$ -prvkových podmnožín  $n$ -prvkovej množiny taký, že každá  $t$ -prvková podmnožina je obsiahnutá v práve jednom bloku.) Navyše musí platiť  $1 < t < k < n$ .

### 7.4.1 Steinerovské systémy stvoriť

$S(3, 4, n)$

### 7.4.2 Steinerovské systémy petič

$S(4, 5, n)$

## 7.5 Projektívne špeciálne lineárne grupy

$k$ -tranzitivita, ostrá  $k$ -tranzitivita. TODO.

**Tvrdenie (Klasifikácia  $K \cup G$ ).** TODO

### 7.5.1 Mathieuove grupy

TODO

## 8 Symetrické konfigurácie

- Každým bodom prechádza  $k$  priamok (každý bod je v  $k$  blokoch)
- Každá priamka prechádza  $k$  bodmi (veľkosť bloku je  $k$ )

### 8.1 Napríklad

- $7_3$  - Fannova rovina
- $8_3$  - Möbius-Kantor
- $9_3$  - Pappus z Alexandrie
- $10_3$  - Desargues
- $15_3$  - Cremona-Richmond

TODO

## 9 Matroidy

Axiomatizácia lineárnej nezávislosti.

### 9.1 Definícia

- $X$  - konečnorozmerný vektorový priestor.
- $A \subseteq X$  - nezávislá množina vektorov.
- (i)  $|A| < \aleph_0$
- (ii)  $A$  je LN  $\Rightarrow A' \subseteq A$  je LN
- (iii)  $\emptyset$  je LN (triviálny dôsledok (ii))
- (iv)  $|A_1| < |A_2| \Rightarrow \exists x \in A_2 - A_1 : A_1 \cup \{x\}$  je LN

**Matroid.** Nech  $X$  je konečná množina,  $N \subseteq P(X)$ . Potom  $(X, N)$  je matroid, ak platí:

- N0)  $\emptyset \in N$
- N1)  $\forall A \in N : A' \subseteq A \Rightarrow A' \in N$  (dedičnosť)
- N2)  $\forall A, B \in N : |A| < |B| \Rightarrow \exists x \in B - A : A \cup x \in N$ .

## 9.2 Specjalne matroidy

**Linearny matroid.**

- $V = \{R_1, \dots, R_n\}$  vektory nad polem  $F$ .
- Nech  $X = \{1, \dots, n\}$
- $\forall A : A \subseteq X \Rightarrow (A \in N \Leftrightarrow \{R_i, i \in A\} \text{ je LN})$
- Potom  $(X, N)$  je *linearny matroid*.

**Grafovy matroid.**

- $X = E(G)$
- $A$  je acyklicka

## 9.3 Vlastnosti

**Tvrdenie.** Nech  $N_1, N_2$  su maximalne matroidy vzhľadom na inklúziu. Potom  $|N_1| = |N_2|$ .

**Baza matroidu.** Bazou matroidu nazývame každú maximálnu nezávislú množinu vzhľadom na inklúziu.

**Veta.** Nech  $(X, S)$  je ľubovoľný systém (asi že  $S \subseteq P(X)$ ). NPSE:

- $(X, S)$  je matroid.
- $S$  je neprázdny dedičný systém (t.j. N0, N1) spĺňajúci podmienku N2':  $\forall A \subseteq X : \forall$  maximálne  $B \subseteq A, B \in S$  majú rovnakú mohutnosť. Dokaz: keď nie, tak vieme doplniť.

## 9.4 Hodnotová funkcia

$r_u : P(X) \rightarrow \mathbb{N}, r_u(A) =$  najväčšia mohutnosť nezávislej množiny v  $A$ .

**Veta.** Nech  $M = (X, N)$  je matroid,  $r$  je hodnotová funkcia. Potom platí:

- 
- 
- 
- 
- 
- 
-