0.1 Lecture 5: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Uvažujme nasledujúcu funkciu:
$$B(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \leftarrow A(x,y) = z \\ 0 & \leftarrow A(x,y) \neq z \end{cases}$$
kde A je Ackermannova funkcia.

   Rozhodnite a dokážte, či je B primitívne rekurzívna.

2. Ľubovoľnými prostriedkami dokážte primitívnu rekurzívnosť 2D primitívnej rekurzie.

   T. j., dokážte, že pre ľubovoľné primitívne rekurzívne g_1, g_2 a h je primitívne rekurzívna aj nasledovne definovaná f:
$$\begin{aligned} f(0,y) &= g_1(y) \\ f(x+1,0) &= g_2(x) \\ f(x+1,y+1) &= h(\, f(x,y+1),\, f(x+1,y),\, x,\, y) \end{aligned}$$

3. Videli sme, že vyhodnocovanie Ackermannovej funkcie je konečné preto, že pri každom rekurzívnom volaní sa buď zmenší prvý parameter, alebo prvý ostane nezmenený a druhý sa zmenší.

   Nájdite rekurzívnu funkciu B dvoch premenných, ktorá nebude mať túto vlastnosť, a napriek tomu bude pre každé x, y vyhodnocovanie $B(x,y)$ konečné.

   (Jemne ťažšia verzia: Nájdite rekurzívnu funkciu C, ktorá spĺňa to čo B a navyše platí: nech si povieme ľubovoľne veľké p, q, vždy budú existovať x, y také, že na vyhodnotenie $C(x,y)$ potrebujeme nejakú hodnotu $C(x', y')$, kde $x' > x + p$ a $y' > y + q$.)

4. Pre unárnu funkciu f definujme $H(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

   Dokážte alebo vyvráťte: ku každej primitívne rekurzívnej unárnej funkcii f existuje primitívne rekurzívna unárna funkcia g taká, že $H(g) = H(f)$ a navyše g nadobúda každú hodnotu z $H(g)$ nekonečne veľa krát.

5. Dokážte alebo vyvráťte: Nech f je prostá unárna primitívne rekurzívna funkcia. Potom existuje primitívne rekurzívna funkcia g taká, že $\forall n : g(f(n)) = n$.