Poznámky z Úvodu do diskrétnych štruktúr - materiál na štátnice

Peter Csiba, petherz@gmail.com, https://github.com/Petrzlen/fmfi-poznamky/diskretka/

18.06.2012

Obsah

Úvod

Tento text vysvetľuje netriviálne a nejasné pasáže z predmetu Úvod do diskrétnej matematiky, prípadne patchuje chyby v skriptách.

Autor si v matematike a hlavne jej diskrétnej a kombinatorickej časti naozaj verí.

Nakoniec poznamenajme, že autor sa snažil písať pravdu a len pravdu, keďže jeho odpoveď na záverečných skúškach vychádza z tototo materiálu. Ak čitateľ chce prispieť ku kvalite textu, nech autorovi napíše a ten mu udelí prístup do repozitára.

1 Cantor-Bernstein

Po analýze dôkazu z Olejár-Škoviera sme dospeli k jednoznačnému názoru, že je tam chyba (resp. preklep). Dôkaz vystihujúci podstatu je možné nájsť na Wikipédií. Ja som sa snažil formulovať čo najnázornejšie.

Veta. Nech sú A a B ľubovoľné množiny a nech existujú injektívne zobrazenia $f : A \mapsto B$ a $g : B \mapsto A$. Potom množiny A a B majú rovnakú mohutnosť.

Dôkaz. Ku každému prvku $a \in A$ priradíme nasledujúcu postupnosť

$$(\ldots, g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(a))), f^{-1}(g^{-1}(a)), g^{-1}(a), a, f(a), g(f(a)), \ldots),$$

ktorú nazveme *reťazou* pre a. Prvky vľavo od a nazveme *predkami* a a vpravo *potomkami* a. Všimnime si, že a má vždy nekonečno potomkov (môžu sa opakovať). Na druhej strane, môže sa stať, že a má iba konečný počet predkov. Určite si to skúste nakresliť ako dve množiny A a B s prvkami a šípkami reprezentujúce f a g (potom vlastne hľadáme párovanie množiny vrcholov, tj. bijekciu).

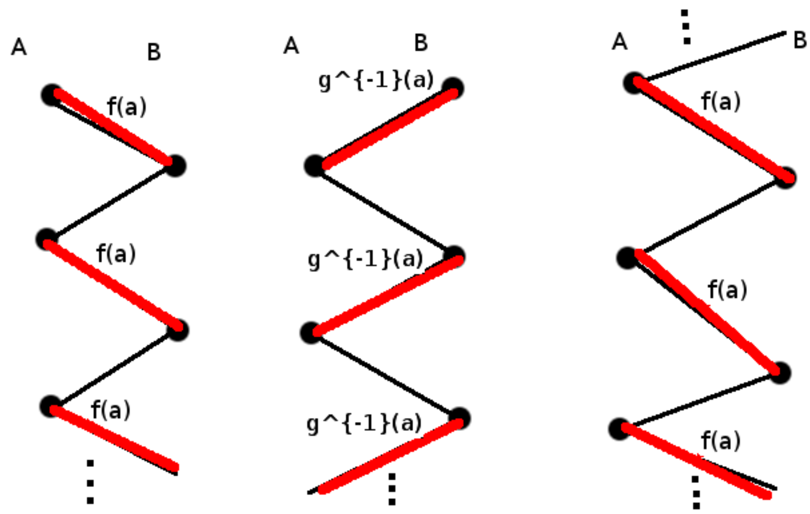
Reťaze sú troch disjunktných typov. Nemajú prvý prvok (nekonečné, resp. cyklické), alebo začínajú v A, alebo začínajú v B. Definujeme funkciu $h : A \mapsto B$ pre každé $a \in A$ nasledovne

- $h(a) = f(a)$, ak reťaz prislúchajúca k a a začína v A
- $h(a) = g^{-1}(a)$, ak reťaz prislúchajúca k a a začína v B
- $h(a) = f(a)$, ak má a nekonečno veľa predkov.

Tvrdíme, že h je bijektívne zobrazenie. Je zrejmé, že je dobre definované (každý prvok má iba jeden obraz). Je injektívne, lebo keby $h(a) = h(b) \wedge a \neq b (a, b \in A)$, tak by a a b museli mať rôzne typy reťazí, a teda

$$f(a) = h(a) = h(b) = g^{-1}(b).$$

Potom ale $a, f(a), b$ sú v spoločnej reťazi v tomto poradí, čo je spor s definíciou h (prepokladaly sme rôzne typy reťazí, ale sú rovnaké). Surjektívne je preto, lebo ak uvažujeme reťaz pre každý prvok $b \in B$ (s podobnou definíciou reťaze pre B), tak k nej existuje rovnaká reťaz nejakého prvku $a \in A$. Keďže sme všetky reťaze pre $a \in A$ spárovali (ako na obrázku), tak sme nevynechali žiadne b z oboru hodnôt.



Referencie a odporúčaná literatúra

Obe skriptá sú v repozitáry.

- Úvod do diskrétnych matematických štruktúr. Daniel Olejár a Martin Škoviera.
- Úvod do diskrétnych štruktúr. Eduard Toman, BRATISLAVA 2008.