

0.1 Lectures 8+9: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Dokážte, že $f(x) = (\text{cifra rádu } 10^{-x} \text{ v desatinnom rozvoji čísla } \sqrt{2})$ je primitívne rekurzívna funkcia.
(Hint: Jedna možnosť je dokázať primitívnu rekurzívnosť $f(x) = \lfloor x\sqrt{2} \rfloor$.)

2. Dokážte vetu o *ohraničenej minimalizácii*:

Pre ľubovoľné primitívne rekurzívne funkcie $f(y, \bar{x})$ a $g(\bar{x})$ je funkcia

$$h(\bar{x}) = \begin{cases} \min\{i \mid i < g(\bar{x}) \wedge f(i, \bar{x}) > 0\} & \leftarrow \text{ak také } i \text{ existuje} \\ g(\bar{x}) & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$$

primitívne rekurzívna.

Slovne, $h(\bar{x})$ si môžeme predstaviť tak, že postupne počíta $f(0, \bar{x})$, $f(1, \bar{x})$, \dots , až kým buď prvýkrát nedostane nenulovú hodnotu, alebo nedosiahne vopred určenú hranicu $g(\bar{x})$.

3. Pomocou vety o ohraničenej minimalizácii vieme ľahšie ukázať primitívnu rekurzívnosť niektorých funkcií, pre ktoré je to priamo z definície neprijemné. Dokážte takto primitívnu rekurzívnosť nasledujúcich funkcií:

- $\text{ceil}(x, y) = \begin{cases} \lceil x/y \rceil & \leftarrow y > 0 \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$
- $\text{csqrt}(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$
- $\text{prvocislo}(x) = \begin{cases} 1 & \leftarrow x \text{ je prvočíslo} \\ 0 & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$

(Hint: ceil je primitívne rekurzívna, lebo ju môžeme definovať zhruba nasledovne: $\text{ceil}(x, y)$ je najmenšie také z , pre ktoré $yz \geq x$, pričom z stačí hľadať v rozsahu od 0 po x . Rozmyslite si, ako by tento argument vyzeral formálne. Pri testovaní prvočíselnosti budete pravdepodobne potrebovať niekoľko pomocných funkcií.)

4. Uvažujme nejaké konkrétne číslovanie $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ všetkých unárnych primitívne rekurzívnych funkcií. Funkcia U nech je univerzálna funkcia pre ne. (Tá z prednášky, t.j. $\forall n, x : U(n, x) = \varphi_n(x)$.)

Hovoríme, že binárna funkcia V sa podobá na univerzálnu, ak $\forall n, x : |U(n, x) - V(n, x)| \leq 10$.

Dokážte alebo vyvráťte: Neexistuje primitívne rekurzívna funkcia, ktorá sa podobá na univerzálnu.

5. Definujte univerzálnu funkciu pre všetky čiastočné rekurzívne funkcie. Zaujímá nás, či je táto funkcia čiastočne rekurzívna.

Dá sa použiť ten istý kontrapríklad ako pre univerzálnu primitívne rekurzívnu funkciu? Ak nie, kde to zlyhá?

6. Dá sa definovať efektívne číslovanie (a teda univerzálna funkcia) pre všetky (totálne) rekurzívne funkcie?