

0.1 Lecture 7: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Dokážte alebo vyvráťte: Busy Beaver funkcia B rastie rýchlejšie ako hociktorá rekurzívna funkcia.
2. Uvažujme analógiu Busy Beavera pre registrové stroje (pri použití formalizmu z <http://foja.dcs.fmph.uniba.sk/tvyp/skripta/01register.pdf>): Aké najväčšie číslo vie v niektorom registri vyrobiť program s n inštrukciami v okamihu, keď zastane?

Dokážte, že príslušná funkcia BM nie je vypočítateľná.

3. Nájdite čo najviac presných hodnôt funkcie BM .
4. Uvažujme Turingove stroje z prednášky. Nech $R(A) = 0$ ak stroj A na prázdnom vstupe nezastaví, inak nech $R(A)$ je počet políčok, o ktoré je čítacia hlava napravo od políčka, kde začínala. Nech $R(n)$ je maximum z $R(A)$ cez všetky n -stavové A .

Teda $R(n)$ hovorí, že každý n -stavový TS, ktorý na prázdnom vstupe zastane, zastane s hlavou nanaajvýš $R(n)$ políčok napravo od miesta, kde začínal.

Je funkcia $R(n)$ vypočítateľná?

5. Zovšeobecňime úlohu 5.1 nasledovne: Pre ľubovoľnú (aj čiastočnú) funkciu $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nazveme grafom f množinu $\text{Graf}_f = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y = f(x) \}$.

Dokážte alebo vyvráťte každé z nasledujúcich tvrdení:

- a) Ak je funkcia f primitívne rekurzívna, tak jej graf je primitívne rekurzívny.
- b) Ak je funkcia f totálna a jej graf je primitívne rekurzívny, tak je f primitívne rekurzívna.
- c) Ak je funkcia f rekurzívna, tak jej graf je rekurzívny.
- d) Ak je funkcia f totálna a jej graf je rekurzívny, tak je f rekurzívna.
- e) Ak je funkcia f totálna a jej graf je rekurzívne vyčísliteľný, tak je f rekurzívna.

6. Dokážte alebo vyvráťte: Pre každú čiastočne rekurzívnu funkciu je jej definičný obor rekurzívne vyčísliteľná množina.

7. Uvažujme nasledujúcu definíciu *alternatívnej minimalizácie*:

Alternatívnou minimalizáciou (možno čiastočnej) funkcie $f(y, \bar{x})$ vzniká funkcia $MIN[f] = g$ taká, že

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} \min\{i \mid f(i, \bar{x}) > 0\} & \leftarrow \text{ak také } i \text{ existuje} \\ \perp & \leftarrow \text{inak} \end{cases}$$

Na rozdiel od klasickej minimalizácie teda nepožadujeme, aby $\forall j < i : f(j, \bar{x}) = 0$, v tomto prípade niektoré z týchto hodnôt môžu byť aj nedefinované.

Dokážte alebo vyvráťte: Trieda čiastočne rekurzívnych funkcií je uzavretá na alternatívnu minimalizáciu.

8. Nech $A \subseteq \mathbb{N}$, pričom $A \neq \emptyset$ a $A \neq \mathbb{N}$. Dokážte alebo vyvráťte: A je rekurzívna práve vtedy, keď $A \leq_m \{47\}$.