

0.1 Lecture 7: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Nech A je Ackermannova funkcia dvoch premenných. Uvažujme funkcie B a C definované nasledujúcim predpisom:

$$B(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \leftarrow A(x, y) < z \\ 0 & \leftarrow A(x, y) \geq z \end{cases}$$

$$C(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \leftarrow A(x, y) > z \\ 0 & \leftarrow A(x, y) \leq z \end{cases}$$

Rozhodnite a dokážte, či sú B a C primitívne rekurzívne.

2. Ľubovoľnými prostriedkami dokážte primitívnu rekurzívnosť 2D primitívnej rekurzívie.

T. j., dokážte, že pre ľubovoľné primitívne rekurzívne g_1, g_2 a h je primitívne rekurzívna aj nasledovne definovaná f :

$$f(0, y) = g_1(y)$$

$$f(x + 1, 0) = g_2(x)$$

$$f(x + 1, y + 1) = h(f(x, y + 1), f(x + 1, y), x, y)$$

3. Videli sme, že vyhodnocovanie Ackermannovej funkcie je konečné preto, že pri každom rekurzívnom volaní sa buď zmenší prvý parameter, alebo prvý ostane nezmenený a druhý sa zmenší.

Nájdite rekurzívnu funkciu B dvoch premenných, ktorá nebude mať túto vlastnosť, a napriek tomu bude pre každé x, y vyhodnocovanie $B(x, y)$ konečné.

(Jemne ťažšia verzia: Nájdite rekurzívnu funkciu C , ktorá spĺňa to čo B a navyše platí: nech si povieme ľubovoľne veľké p, q , vždy budú existovať x, y také, že na vyhodnotenie $C(x, y)$ potrebujeme nejakú hodnotu $C(x', y')$, kde $x' > x + p$ a $y' > y + q$.)

4. Pre unárnu funkciu f definujme $H(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Dokážte alebo vyvráťte: ku každej primitívne rekurzívnej unárnej funkcii f existuje primitívne rekurzívna unárna funkcia g taká, že $H(g) = H(f)$ a navyše g nadobúda každú hodnotu z $H(g)$ nekonečne veľa krát.

5. Dokážte alebo vyvráťte: Nech f je prostá unárna primitívne rekurzívna funkcia. Potom existuje primitívne rekurzívna funkcia g taká, že $\forall n : g(f(n)) = n$.