

0.1 Prerekvizity: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pokrývajú témy, u ktorých by ma potešilo, aby ste im rozumeli skôr, než začneme s našim predmetom.

Úlohy zjavné

Toto sú úlohy, na ktoré by ste mali pozrieť a vedieť, aká je odpoveď, resp. ako sa k nej dopracovať.

- $\alpha 1$. Majú množiny \mathbb{N} a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rovnakú mohutnosť?
- $\alpha 2$. Aká je mohutnosť množiny $\{a, b\}^*$ (teda množiny všetkých konečných reťazcov z písmen a a b)?
- $\alpha 3$. Ku každému nedeterministickému zásobníkovému automatu sa dá mechanicky zostrojiť ekvivalentný nedeterministický Turingov stroj.
- $\alpha 4$. Predchádzajúce tvrdenie platí aj ak druhý výskyt slova „nedeterministický“ zmeníme na „deterministický“.

Úlohy trochu náročnejšie

U týchto úloh môže byť potrebná trocha zamyslenia, prípadne môže byť treba vytiahnuť a použiť pero a papier. Ale nemalo by to zase príliš bolieť.

- $\beta 1$. Nech χ a φ sú čiastočné funkcie jednej premennej na \mathbb{N} , t. j., ich definičný obor je podmnožinou \mathbb{N} . Pritom nech $\chi \circ \varphi$ je totálna funkcia, t. j., funkcia definovaná na celom \mathbb{N} .
Musí byť χ totálna? Musí byť φ totálna?
(Ak je funkcia f nedefinovaná pre vstup x , značíme to $f(x) = \perp$. Pre konzistenciu sa dohodneme, že pre ľubovoľnú čiastočnú funkciu f platí $f(\perp) = \perp$. Potom $f \circ g$ je funkcia definovaná predpisom $\forall x : (f \circ g)(x) = f(g(x))$.)
- $\beta 2$. Dokážte alebo vyvráťte: pre každý ε -free nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je jazyk

$$\{w \mid \text{ak } (q_0, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon) \text{ tak } q \in F\}$$
 regulárny. (Slovne: ide o jazyk slov, na ktorých sú všetky výpočty, ktoré dočítajú vstup, akceptačné.)
- $\beta 3$. Je rozhodnuteľné, resp. aspoň čiastočne rozhodnuteľné, či pre daný nedeterministický konečný automat A platí $L(A) = L(A)^R$?
- $\beta 4$. Máme *nedeterministický* Turingov stroj s jednosmerne nekonečnou páskou, ktorý nevie hýbať hlavou klasicky. Namiesto toho vie robiť dva druhy pohybov: krok o políčko doprava a skok doľava na začiatok pásky. Popíšte, ako na takomto NTS simulovať klasický.
- $\beta 5$. Nech $\Sigma = \{0, 1\}$. Definujme reláciu $<$ na Σ^* nasledovne: $u < v$ platí, ak buď $|u| < |v|$ alebo $(|u| = |v|$ a existuje w také, že u má prefix $w0$ a v má prefix $w1$).
Dokážte alebo vyvráťte: jazyk L je rekurzívny práve vtedy, ak existuje Turingov stroj, ktorý enumeruje slová L usporiadané podľa $<$.

Úlohy ešte náročnejšie

U týchto úloh už nie je potrebné, aby ste ich vedeli vyriešiť – stačí, keď rozumiete zadaniu. Ich riešenie môže byť aj bolestivé, ale o to lepší je pocit, keď si s niektorou z nich poradíte :-).

γ1. Je nasledujúci jazyk regulárny?

$$L = \{x_1y_1x_2y_2 \dots x_ny_n \mid n > 0 \wedge 3 \cdot (x_1x_2 \dots x_n)_2 = (y_1y_2 \dots y_n)_2\}$$

(Slovne: keď sa na $x_1x_2 \dots x_n$ a $y_1y_2 \dots y_n$ dívame ako na binárne zápisy čísel X a Y , tak $3X = Y$. Čísla X aj Y môžu začínať niekoľkými nulami.)

γ2. Čo sa stane, keď v úlohe β4 zmeníme slovo „nedeterministický“ na „deterministický“? Bude takýto DTS vôbec ešte mať rovnakú výpočtovú silu ako klasický?

γ3. Je rozhodnuteľné, resp. aspoň čiastočne rozhodnuteľné, či sú všetky výpočty daného nedeterministického Turingovho stroja A na slove w konečné?

γ4. Toto je zovšeobecnenie úlohy β5. Dokážte alebo vyvráťte: Pre každý total order $<$ na Σ^* platí, že jazyk L je rekurzívny práve vtedy, ak existuje Turingov stroj, ktorý enumeruje slová L usporiadané podľa $<$.

γ5. Uvažujme deterministický Turingov stroj s jednosmerne nekonečnou páskou (na ľavom konci so zarážkou \$), ktorý môže písať blanky, ale nemôže písať nič iné, lebo má prázdnu pracovnú abecedu. Je pre takýto TS rozhodnuteľný problém zastavenia?