0.1 Lecture 4: nepovinné cvičenia

Riešenie nasledujúcich úloh je dobrovoľné. Pomôže vám overiť si, či problematike dostatočne rozumiete.

1. Dokážte, že n-té prvočíslo (číslované od 0) je menšie alebo rovné ako 2^{2^n}.

2. Uvažujme konštantnú funkciu $t(x) = 1000$. Táto funkcia je primitívne rekurzívna, teda k nej existuje „recept“: postupnosť funkcií $f_1, f_2, \dots, f_k = t$ taká, že každá f_i je nulárna nula, successor, niektorá projekcia, alebo vzniká z niektorých predchádzajúcich f_j operáciou kompozície alebo operáciou primitívnej rekurzie.

   Dokážte alebo vyvráťte: v každom recepte pre t je $k \geq 1000$.

3. Dokážte, že $f(x) =$ (cifra rádu 10^{-x} v desatinnom rozvoji čísla $\sqrt{2}$) je primitívne rekurzívna funkcia. (Hint: Jedna možnosť je dokázať primitívnu rekurzívnosť $f(x) = \lfloor x\sqrt{2} \rfloor$.)

4. Nájdite vzorec v uzavretom tvare pre funkciu $l(x)$ zo skrípt.

5. Dokážte, že pre kódovanie konečných postupností z prednášky (do mocnín prvočísel) je funkcia $reverz$ primitívne rekurzívna. Teda pre ľubovoľnú postupnosť $a_1, \dots, a_n$ má platiť: ak K je kód $a_1, \dots, a_n$ a $\overline{K}$ je kód $a_n, \dots, a_1$, tak $reverz(K) = \overline{K}$.

6. Postupnosti môžeme do čísel kódovať aj ináč. Ukážeme si postup, ktorý je bežne používaný vo funkcionálnych programovacích jazykoch: reprezentovať zoznam ako usporiadanú dvojicu (prvý prvok, zvyšok zoznamu).

   Nech s je successor a c párovacia funkcia z prednášky. Ich kompozíciou dostaneme párovaciu funkciu $\overline{c}$, ktorá nikdy nevráti 0. Teraz môžeme kód postupnosti definovať rekurzívne podľa jej dĺžky: prázdna postupnosť má kód 0, postupnosť $a_1, \dots, a_n$ má kód $\overline{c}(a_1, k)$, kde k je kód $a_2, \dots, a_n$.

   Upravte dôkaz vety o primitívne rekurzívnej časovej zložitosti tak, aby použil takéto kódovanie.

7. Dokážte, že k ľubovoľnej primitívne rekurzívnej funkcii f existuje primitívne rekurzívna funkcia g taká, že $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$.