Gershgorin 圆盘定理与特征值定位

读 *Gershgorin Circles* 笔记

课程名称：矩阵论大作业

姓名：石梅鲜

学号：2025141315

专业：机械工程

学院：智能工程与自动化学院

日期：2025 年 12 月 21 日

摘要

Gershgorin 圆盘定理是定位矩阵特征值分布位置的一种经典且易于计算的方法。本文结合 Alen Alexanderian 的阅读材料《Gershgorin Circles》，整理了 Gershgorin 圆盘的定义与定理的基本陈述，并给出了“谱包含于圆盘并集”这一核心结论的证明。证明中采用最大分量法：在特征向量中选取模最大的分量，将向量比例项控制在 1 以内，从而推出 $|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$，实现对特征值的几何定位。最后，本文通过一个 3×3 算例计算圆盘中心与半径，展示如何据此快速给出特征值可能所在区域的估计。

关键词：Gershgorin 圆盘；特征值估计；谱定位；最大分量法

1 引言

1.1 背景与动机

矩阵特征值在稳定性分析、控制系统极点分布判别、微分方程/偏微分方程离散化后的动力系统分析，以及线性方程组迭代法收敛性研究中经常出现。很多时候，我们并不需要得到全部特征值的精确数值，而是更关心谱是否满足某种“区域条件”，例如是否全部位于左半平面、是否满足 $|\lambda| < 1$，即离散系统稳定性或迭代收敛性，是否远离某条分界线从而保证一定的鲁棒性等。对于大规模矩阵，直接计算完整谱往往代价较高；同时在实际计算中，数值误差与模型不确定性也使得“精确特征值”未必是最经济的目标。因此，能够以较低成本给出特征值的可靠外包络或粗定位（spectrum localization），在理论分析与工程计算中具有重要价值 [6, 7]。

Gershgorin 圆盘定理正是这种低成本谱定位工具中最经典且直观的一种：对任意复矩阵 $A = (a_{ij})$，以每个对角元 a_{ii} 为圆心、以该行或列非对角元绝对值之和为半径，可以在复平面上构造 n 个圆盘，并保证矩阵所有特征值都落在这些圆盘的并集中。该定理最早由 Gershgorin 于 1931 年提出 [4]，其几何刻画简洁明了，因而在矩阵分析与数值线性代数中被广泛采用 [6, 5]。进一步地，当若干圆盘与其余圆盘相互分离时，还可推出“分离圆盘簇中恰含对应数量的特征值”等强化结论，从而帮助我们对谱的聚类结构作初步判断 [5, 1]。

本文基于阅读材料《Gershgorin Circles》[1]，整理定理的表述与证明思路，并通过算例展示其基本用法与直观解释。

1.2 本文结构

本文主要内容如下：第 2 节给出记号与 Gershgorin 圆盘的定义；第 3 节陈述定理并解释其含义；第 4 节采用最大分量法证明“谱包含于圆盘并集”的结论，并补充个人理解；第 5 节给出一个 3×3 算例说明如何计算圆盘并进行定位；第 6 节作简要总结。

2 记号与定义

2.1 记号与矩阵设定

本文讨论复矩阵上的特征值定位问题。设

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

其中 a_{ij} 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素。若存在标量 $\lambda \in \mathbb{C}$ 与非零向量 $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 使得

$$Ax = \lambda x,$$

则称 λ 为 A 的一个特征值，x 为对应的特征向量，并称 (λ, x) 为一个特征对。Gershgorin 圆盘定理的目标是：在不直接求解特征方程的前提下，对所有特征值在复平面中的位置给出包含性估计。

2.2 行圆盘的定义

对每个行指标 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$，定义该行的“非对角元素绝对值和”为

$$R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

以对角元 a_{ii} 为圆心、以 R_i 为半径，在复平面 $\mathbb{C}$ 上定义第 i 个 Gershgorin 圆盘为

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\}.$$

3 Gershgorin 圆盘定理

3.1 定理陈述

设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$，并按上一节定义第 i 个行 Gershgorin 圆盘

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Gershgorin 圆盘定理指出：矩阵 A 的每一个特征值 λ 都落在这些圆盘的并集内，即

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

其中 $\sigma(A)$ 表示 A 的谱，即全体特征值集合 [1, 2, 3]。

3.2 定理的直观解释

从几何与结构角度看，Gershgorin 圆盘定理可以理解为对角项主导加非对角项扰动的可视化表达：对角元 a_{ii} 给出第 i 个圆盘的中心，描述了在仅保留对角部分 $D = \mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$ 时特征值应落在的位置；而半径 $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ 则刻画该行非对角项对谱位置可能造成的最大偏移量。

4 定理证明

4.1 证明思路

本节证明 Gershgorin 圆盘定理的谱包含结论，证明思路与阅读材料中的论证一致 [1]。。证明从特征值与特征向量的关系式

$$Ax = \lambda x$$

出发。在特征向量 $x \neq 0$ 的分量中选取一个“模最大”的分量 x_i，并利用这一选择使得所有比例 $|x_j|/|x_i| \leq 1$，从而把向量因素“吸收掉”，最终仅用矩阵元素的绝对值和来界定 $|\lambda - a_{ii}|$ 的上界。

4.2 证明步骤

设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是矩阵 A 的一个特征值，$x = (x_1,\ldots,x_n)^\top \neq 0$ 为其对应特征向量，即 $Ax = \lambda x$。

1. **选取最大分量下标**
   由于 $x \neq 0$，必存在某个下标 i 使得
   $$|x_i| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|.$$
   特别地，$|x_i| > 0$。

2. **取第 i 行并分离对角项**
   由 $Ax = \lambda x$ 的第 i 个分量可得
   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i.$$
   将对角项移到左侧，得到
   $$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j.$$

3. **取绝对值并使用三角不等式**
   对上式两边取模并应用三角不等式：
   $$|\lambda - a_{ii}| \cdot |x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot |x_j|.$$

4. **利用最大分量性质压缩向量因素**
   由 $|x_i| = \max_j |x_j|$，可知对任意 j 都有 $|x_j| \le |x_i|$。因此
   $$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot |x_j| \le \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot |x_i| = \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) |x_i|.$$
   代回上一步不等式并两边同除以 $|x_i| > 0$，得到
   $$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j \neq i} |a_{ij}| =: R_i.$$

5. **落入 Gershgorin 圆盘**
   上式等价于 $\lambda \in D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le R_i\}$。从而任意特征值 λ 必属于某个 D_i，即
   $$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

这就完成了 Gershgorin 圆盘定理的证明。

4.3 本人理解

我对上述证明的理解是,Gershgorin 圆盘定理本质上是在解决当我们只知道矩阵元素的大小时，特征值最多会偏离对角元多远的这个问题？证明中“最大分量法”正是把这个问题转化为一个可控的不等式估计。

首先，选取特征向量 x 中模最大的分量 x_i，为了在不清楚 x 的具体方向时，仍能得到统一的上界。因为一旦 $|x_i| = \max_j |x_j|$，就立刻得到对所有 j 成立的比例约束：
$$\frac{|x_j|}{|x_i|} \le 1.$$

特征向量本身是未知的，直接处理 $\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$ 会被 x_j 的大小牵着走；而通过“最大分量归一化”，我们把所有 x_j 相对于 x_i 的放大效应压到 1 以内，从而消除了向量带来的不确定性，使估计只依赖矩阵元素本身。

其次，从代数结构看，第 i 行方程

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$$

说明 $\lambda - a_{ii}$ 的大小由右侧非对角项的“加权叠加”决定。对右侧取模后使用三角不等式，等价于用最坏情况来估计线性组合的幅值：

$$\left|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j|.$$

再结合 $|x_j| \leq |x_i|$，最终得到

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| = R_i.$$

我理解这里的几何含义是把右侧所有非对角作用看作“可能把特征值从 a_{ii} 往外推”的扰动，而 R_i 就是这些扰动在最坏情况下能造成的最大偏移量，因此特征值必被限制在以 a_{ii} 为中心、半径为 R_i 的圆盘内。

Gershgorin 圆盘的“紧或松”与矩阵的结构高度相关，若矩阵呈现明显的对角占优（即 $|a_{ii}|$ 相对较大且 R_i 相对较小），那么圆盘半径小，定位就会更紧，甚至可能出现互不相交的圆盘簇；此时不仅能给出包含区域，还能利用“分离圆盘簇包含特征值个数”的结论，对谱的分布进行更细的计数判断。相反，如果某些行的非对角元素较大导致 R_i 很大，则圆盘会变得非常宽，包含性仍然成立，但定位会较为保守，更多体现为一种快速的粗筛查。

5 算例

为展示 Gershgorin 圆盘在“特征值定位”中的具体用法，下面构造一个 3×3 实矩阵，并逐行计算其圆盘。令

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0.5 \\ 0.2 & 2 & 0 \\ -0.1 & 0.4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. 逐行计算圆盘中心与半径 第 1 行：圆心 $a_{11} = 5$，半径

$$R_1 = |a_{12}| + |a_{13}| = |-1| + |0.5| = 1.5,$$

因此

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| \leq 1.5\}.$$

第 2 行：圆心 $a_{22} = 2$，半径

$$R_2 = |a_{21}| + |a_{23}| = |0.2| + |0| = 0.2,$$

因此

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 0.2\}.$$

第 3 行：圆心 $a_{33} = -3$，半径

$$R_3 = |a_{31}| + |a_{32}| = |-0.1| + |0.4| = 0.5,$$

因此

$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z+3| \leq 0.5\}.$$

2. 由圆盘并集得到特征值定位 根据 Gershgorin 圆盘定理，矩阵 A 的所有特征值 λ 必满足

$$\lambda \in D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

也就是说，所有特征值都被限制在以 $5, 2, -3$ 为圆心、半径分别为 $1.5, 0.2, 0.5$ 的三个圆盘并集中。

3. 定位结果的讨论 从计算结果看，D_2 的半径最小，因此它提供了最“紧”的局部可能区域：也就是说，若某个特征值落在以 2 为中心的圆盘 D_2 中，则该特征值会被限制在半径为 0.2 的很小邻域内。相比之下，D_1 的半径较大，对应的可能区域更宽，从而定位相对粗略。该算例体现了 Gershgorin 圆盘定理的基本作用，通过计算各行圆盘，快速给出谱的包含区域

$$\sigma(A) \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

6 结论

本文围绕 Gershgorin 圆盘定理对矩阵特征值的定位问题进行了整理与说明。首先，本文给出了行 Gershgorin 圆盘的定义，并陈述了定理的核心结论，即矩阵的全部特征值必落在由对角元为圆心、相应行非对角元绝对值和为半径所构成的圆盘并集内，从而在不显式求解特征方程的情况下给出谱的包含性估计。

其次，本文基于阅读材料中的思路给出了“谱包含于圆盘并集”的证明。证明的关键在于最大分量法：在特征向量中选取模最大的分量，使得所有比例项满足 $|x_j|/|x_i| \leq 1$，从而把未知的向量因素吸收进不等式上界，使估计仅依赖矩阵元素本身，最终得到：

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

并据此完成特征值在复平面中的几何定位。该过程也同时表明 Gershgorin 圆盘可以理解为“对角主导 + 非对角扰动”的可视化表达，即对角元给出中心，而非对角项的绝对值和给出可能偏移的最大幅度。

最后，本文通过一个 3×3 算例展示了圆盘中心与半径的具体计算过程，并说明了如何利用圆盘并集快速得到特征值可能所在区域的粗定位。总体而言，Gershgorin 圆盘定理计算简单、适合作为谱分析的初步工具；但其定位也可能较为保守，尤其当非对角元素较大或圆盘大量重叠时，圆盘并集会显得较宽。后续若需要更精细的谱信息，可结合圆盘分离条件得到特征值个数的进一步判断，或与其他谱定位与数值方法配合使用。

参考文献

[1] Alen Alexanderian, *Gershgorin Circles*. Available online: https://aalexan3.math.ncsu.edu/articles/gershgorin-report.pdf.

[2] Kendall E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.

[3] James M. Ortega, *Numerical Analysis: A Second Course*, Academic Press, New York, 1972 (Computer Science and Applied Mathematics).

[4] S. A. Gershgorin. Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix[J]. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des sciences mathématiques et naturelles*, 1931(6): 749–754.

[5] R. S. Varga. *Geršgorin and His Circles*[M]. Berlin/Heidelberg: Springer, 2004.

[6] R. A. Horn, C. R. Johnson. *Matrix Analysis*[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[7] G. H. Golub, C. F. Van Loan. *Matrix Computations*[M]. 4th ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.