Содержание

1. Векторные пространства. Примеры

Определение 1. На множестве V определены две операции:

- $+ : V \times V \to V$ – сложение векторов
- $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ – умножение на скаляр,

обладающие следующими свойствами (для $\forall u, v, w \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

- ассоциативность: $(u + v) + w = u + (v + w)$
- коммутативность: $u + v = v + u$
- нейтральный элемент по сложению: $\exists \overrightarrow{0} : u + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + u = u$
- обратный элемент по сложению: $\forall u \ \exists (-u) : u + (-u) = \overrightarrow{0}$
- дистрибутивность: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- дистрибутивность: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
- ассоциативность: $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$
- нейтральный элемент по умножению: $1 \cdot u = u$

Тогда V называется вещественным векторным пространством. Элементы V называются векторами, элементы $\mathbb{R}$ – скалярами

Примеры.

1. $\mathbb{R}^n$
$$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$
$$x \cdot (a_1, ..., a_n) = (x \cdot a_1, ..., x \cdot a_n)$$
2. Множество многочленов
При этом, множество многочленов степени **ровно** n **не** образует векторное пространство $((x^n + 1) + (-x^n + 1) = 2)$
Множество многочленов степени **не больше** n образует векторное пространство
3. Множество (...) функций, например
   - определённые на [a,b]
   - непрерывные
   - имеющие непрерывную производную
4. Матрицы $k \times n$

Доказательство (единственность $\overrightarrow{0}$)**.** Пусть существуют $\overrightarrow{0_1} \neq \overrightarrow{0_2}$

$$\overrightarrow{0_1} = \overrightarrow{0_1} + \overrightarrow{0_2} = \overrightarrow{0_2}$$

□

Доказательство (единственность $-u$).

$$\begin{cases} u+v=\overrightarrow{0} \\ u+w=\overrightarrow{0} \end{cases}$$

$$v=v+0=v+(u+w)=(v+u)+w=0+w=w$$

□

Доказательство ($0\cdot u=0$).

$$0\cdot u+u=0\cdot u+1\cdot u=(0+1)\cdot u=1\cdot u=u$$

$$0\cdot u+u=u \quad \Big| +(-u)$$

$$0\cdot u+u-u=u-u$$

$$0\cdot u=0$$

□

Доказательство ($(-1)\cdot u=-u$).

$$(-1)\cdot u+u=(-1)\cdot u+1\cdot u=(-1+1)\cdot u=0\cdot u$$

Дальше – аналогично □

2. Линейная зависимость и независимость

Определение 2. $v_1,v_2,...,v_n\in V,\quad \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$
$\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+...+\alpha_n\cdot v_n$ – линейная комбинация (ЛК) $v_1,v_2,...,v_n$ (с коэффициентами $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$)

Определение 3. $v_1,...,v_n$ называются линейно независимыми (ЛНЗ), если

$$\alpha_1\cdot v_1\cdot ...\cdot\alpha_n\cdot v_n=\overrightarrow{0}\implies\alpha_1=...=\alpha_n=0$$

Иначе $v_1,...,v_n$ называются линейно зависимыми (ЛЗ)

Теорема 1. $v_1,...,v_n$ – ЛЗ $\iff$ один из векторов является ЛК остальных

Доказательство.

- $\implies$

$$\text{ЛЗ}\iff\begin{cases}\alpha_1\cdot v_1+...+\alpha_n\cdot v_n=\overrightarrow{0}\\ \exists\alpha_i\neq 0\end{cases}$$

  НУО скажем, что $\alpha_n\neq 0$ (иначе перенумеруем)

$$\alpha_n v_n=-\alpha_1\cdot v_1-...-\alpha_{n-1}v_{n-1}\quad\Big| :\alpha_n$$

$$v_n=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\cdot v_1-...-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\cdot v_{n-1}$$

- $\impliedby$

НУО скажем, что v_n является ЛК остальных (иначе перенумеруем)

$$v_n = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_{n-1} \cdot v_{n-1}$$

$$\alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_{n-1} \cdot v_{n-1} + \mathbf{(-1)} \cdot v_n = 0 \iff \text{ЛЗ}$$

$\square$

3. Равносильные определения базиса

Определение 4. $v_1, ..., v_n$ называются линейно независимыми (ЛНЗ), если

$$\alpha_1 \cdot v_1 \cdot ... \cdot \alpha_n \cdot v_n = \overrightarrow{0} \implies \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$$

Иначе $v_1, ..., v_n$ называются линейно зависимыми (ЛЗ)

Определение 5. Набор $v_1, ..., v_n$ называется порождающим, если $\forall w$ является ЛК $v_1, ..., v_n$. То есть

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n$$

Замечание. Если сузить ЛНЗ (“выкинуть” оттуда несколько векторов), получится ЛНЗ
Если расширить порождающий набор, получится порождающий набор

Определение 6. Базисом называется ЛНЗ порождающий набор векторов

Теорема 2. $v_1, ..., v_n \in V$
Равносильны следующие условия для базиса:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. максимальный ЛНЗ
3. минимальный порождающий набор
4. $\forall w \ \exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$

Замечание. Максимальный ЛНЗ можно понимать по-разному:

- Тот, который нельзя расширить – *мы понимаем так*
- Нельзя взять **другой** набор большей длины

Доказательство.

- $1 \implies 2$
  $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий
  Допустим $v_1, ..., v_n, w$ – ЛНЗ
  Порождающий $\implies \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ – $\lightning$ с ЛНЗ
  Значит, $v_1, ..., v_n, w$ – ЛЗ
- $2 \implies 1$

$$\begin{cases} v_1, ..., v_n \text{ – ЛНЗ} \\ v_1, ..., v_n, w \text{ – ЛЗ для } \forall w \end{cases} \iff \exists \beta : \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = 0$$

  Если $\beta = 0$, то $v_1, ..., v_n$ – ЛЗ
  Значит, $\beta \neq 0$
  Тогда $w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n \iff$ порождающий

- $1 \implies 4$
  $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий
  Существование следует из того, что набор порождающий. Докажем единственность:
  Допустим $w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$

  $$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

  Так как ЛНЗ, то коэффициенты должны быть равны нулю, то есть $\alpha_i - \beta_i = 0 \iff \alpha_i = \beta_i$ – $\lightning$

- $4 \implies 3$

  $$\forall w\ \exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

  Очевидно, что набор порождающий. Докажем, что он минимальный:
  НУО[a] предположим, что $v_1, ..., v_{n-1}$ – порождающий, то есть

  $$\begin{cases} v_n = \boldsymbol{\alpha_1} v_1 + ... + \boldsymbol{\alpha_{n-1}} v_{n-1} + \mathbf{0} \cdot v_n \\ v_n = \mathbf{0} \cdot v_1 + ... + \mathbf{0} \cdot v_{n-1} + \mathbf{1} \cdot v_n \end{cases}$$

  Мы смогли представить v_n через $v_1, ..., v_{n-1}$ двумя способами, что противоречит 4

- $3 \implies 1$
  $v_1, ..., v_n$ – минимальный порождающий набор
  Докажем, что он также ЛНЗ:
  Допустим, векторы ЛЗ
  Тогда НУО $v_n = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{n-1} v_{n-1}$
  Возьмём $\forall w$
  Так как набор порождающий,

  $$\begin{aligned} w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{n-1} v_{n-1}) = \\ = (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + ... + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1} \end{aligned}$$

  То есть, v_n не требуется для представления w, а значит набор не минимальный порождающий

□

[a] На самом деле, мы не можем "выкинуть" **именно** v_n. Однако, мы можем перенумеровать векторы так, чтобы нужный нам вектор имел индекс n

Следствие. Любой порождающий набор можно сузить до базиса

Доказательство.

- Если набор также ЛНЗ, то он базис
- Иначе можно последовательно "выкидывать" те векторы, которые можно выразить через остальные

□

Следствие. Любой ЛНЗ набор можно расширить до базиса

Доказательство (в предположении, что существует конечный порождающий набор).

- Если набор порождающий, то он базис
- Иначе: $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ
  Пусть $w_1, ..., w_k$ – порождающий, то есть любой вектор выражается через $w_1, ..., w_n$
  - Если любая w_i выражается через $v_1, ..., v_n$, то $v_1, ..., v_n$ – порождающий (любой век-

тор можно выразить через $w_1, ..., w_n$ и каждую из них выразить через $v_1, ..., v_n$)

- Иначе будем последовательно доавлять к $v_1, ..., v_n$ ту w_i, которая не выражается. Рано или поздно набор станет порождающим

> **Примечание.** Так как w_i (та, которую мы добавляли) не выражается через $v_1, ..., v_n$, то набор остаётся ЛНЗ

□

4. Размерность. Корректность определния

Определение 7. V – векторное пространство
Размерность V – количество элементов в базисе

Лемма 1.

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + ... + \alpha_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k$, то существует ненулевое решение

Доказательство. Индукция по k:

- База: $k = 1$

$$\alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0$$

Два случая:

  - $\alpha_{1n} \neq 0$

$$x_n = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{1n}} - ... - \frac{\alpha_{1(n-1)}}{\alpha_{1n}}x_{n-1}$$

    $x_1, ..., x_n$ – произвольные
  - $\alpha_{1n} = 0$
    $x_1 = ... = x_{n-1} = 0$
    x_n – произвольный

- Переход:
  НУО считаем, что $\alpha_{kn} \neq 0$

$$x_n = -\frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{kn}}x_1 - ... - \frac{\alpha_{k(n-1)}}{\alpha_{kn}}x_{n-1}$$

  Подставим x_n в первые $k-1$ уравнений. Получим систему из $k-1$ уравнений и с $n-1$ переменной. По индукционному предположению, она имеет ненулевое решение

□

Теорема 3 (о размерности). $v_1, ..., v_n$ – базис
$w_1, ..., w_k$ – базис
$\Longrightarrow n = k$

Доказательство. Допустим $n > k$
Так как $w_1, ..., w_k$ – порождающий, то можно выразить все $v_1, ..., v_n$ через них:

$$v_1 = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{21}w_2 + ... + \alpha_{k1}w_k$$

$$v_2 = \alpha_{12}w_1 + \alpha_{22}w_2 + ... + \alpha_{k2}w_k$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_n = \alpha_{1n}w_1 + \alpha_{2n}w_2 + \dots + \alpha_{kn}w_k$$

$v_1, \dots, v_n$ – ЛНЗ, то есть:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0 \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \tag{1}$$

Подставим $v_1, \dots, v_n$ в левую часть:

$$\begin{multline}(\alpha_{11}w_1 + \alpha_{21}w_2 + \dots + \alpha_{k1}w_k)x_1 + \\ + (\alpha_{12}w_1 + \alpha_{22}w_2 + \dots + \alpha_{k2}w_k)x_2 + \\ + \dots\dots\dots\dots + \\ + (\alpha_{1n}w_1 + \alpha_{2n}w_2 + \dots + \alpha_{kn}w_k)x_n = 0\end{multline}$$

Перегруппируем:

$$\begin{multline}w_1(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n) + \\ + w_2(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n) + \\ + \dots\dots\dots\dots + \\ + w_k(\alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \dots + \alpha_{kn}x_n) = 0\end{multline}$$

Это верно, в частности, при

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \dots + \alpha_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

По лемме, эта система имеет ненулевое решение, то есть не все из $x_1, \dots, x_n$ равны нулю, что противоречит (1). Значит, предположение, что $n > k$ неверно, и $n \leq k$.
Точно так же доказывается, что $n \geq k$. Значит $n = k$ □

Замечание. На самом деле, мы доказали, что любой порождающий набор содержит не меньше элементов, чем любой ЛНЗ набор

5. Скалярное произведение. Неравенство КБШ

Определение 8. V – веторное пространство
$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

1. $(v, v) \geq 0$
   $(v, v) = 0 \iff v = \overrightarrow{0}$
2. Дистрибутивность относительно сложения
   $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$
   $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$
3. Дистрибутивность относительно умножения на скаляр
   $\alpha \cdot (u, v) = (\alpha \cdot u, v) = (u, \alpha \cdot v)$
4. Коммутативность
   $(u, v) = (v, u)$

В таком случае V называется евклидовым пространством

Обозначение. Иногда обозначается $u \cdot v$

Примеры.

1. $V = \mathbb{R}^n$

$$(a_1, ..., a_n) \cdot (b_1, ..., b_n) = a_1 b_1 + ... + a_n b_n = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

2. V – пространство функций, обладающих опредлёнными свойствами (например, непрерывные)

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Определение 9. V – евклидово пространство, $v \in V$

$$|v| \coloneqq \sqrt{(v, v)}$$

$$\cos \angle(u, v) \coloneqq \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}, \quad u, v \neq 0$$

Примечание. Так как угол между векторами лежит в диапазоне $[0, \pi]$, то, определяя cos, мы однозначно определяем и угол

Определение 10. V – евклидово пространство, $v \in V$

$$|v| \coloneqq \sqrt{(v, v)}$$

$$\cos \angle(u, v) \coloneqq \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}, \quad u, v \neq 0$$

Теорема 4 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца). $|(u, v)| \leq |u| \cdot |v|$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{u} + t \cdot \overrightarrow{v}$, $t \in \mathbb{R}$
Умножим его скалярно на себя:

$$0 \overset{\text{def}}{\leq} (\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}) = (u, u) + (u, tv) + (tv, u) + (tv, tv) = t^2(v, v) + wt(u, v) + (u, u)$$

$$\begin{cases} D \leq 0 \\ \frac{D}{4} = (u, v)^2 - (v, v) \cdot (u, u) \end{cases} \implies (u, v)^2 \leq (v, v) \cdot (u, u) \implies$$

$$\implies (u, v) \leq \sqrt{(u, u) \cdot (v, v)} \iff |(u, v)| \leq |u| \cdot |v|$$

□

Примечание. Эта теорема означает, что $\cos \angle(u, v) \in [-1, 1]$

6. Ортогонализация Грама-Шмидта

Определение 11. $u \perp v$, если $(u, v) = 0$

Определение 12. $v_1, ..., v_n$ – ортогональная система, если

$$\forall i \neq j \quad v_i \perp v_j$$

Теорема 5. $v_1, ..., v_n$ – ортогональная система, $v_i \neq 0 \implies v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ

Доказательство.

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \quad \Big| \ \underset{\text{скалярно}}{\cdot} \ v_i$$

$$\alpha_1 \underbrace{(v_1, v_i)}_{\substack{=0 \\ \text{(т. к. сист. ортогональная)}}} + ... + \alpha_i \underbrace{(v_i.v_i)}_{\neq 0} + ... + \alpha_n \underbrace{(v_n, v_i)}_{=0} = 0$$

$\alpha_i |v_i|^2 = 0$
$\alpha_i = 0$
В силу произвольности i, все α равны нулю. Значит, система ЛНЗ ☐

Определение 13. u – нормированный (единичный), если $|u| = 1$

Определение 14. $v_1, ..., v_n$ – ортонормированная система, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$

Определение 15. $v_1, ..., v_n$ – ортонормированный базис (ОНБ), если это ортонормированная система и базис

Теорема 6. ОНБ существует

Доказательство (ортогонализация Грама-Шмидта). $v_1, ..., v_n$ – базис

- $e_1 := \dfrac{v_1}{|v_1|}$ – единичный вектор
- $w_2 := v_2 - \alpha e_1$
  Хотим, чтобы $(w_2, e_1) := 0$
  $(w_2, e_1) = (v_2, e_1) - \alpha \cdot (e_1, e_1)$
  $\alpha = \dfrac{(v_2, e_1) - (w_2, e_1)}{|e_1|} := (v_2, e_1)$ (мы так захотели)
  Значит, $w_2 := v_2 - e_1 \cdot (v_2, e_1)$
  $e_2 := \dfrac{w_2}{|w_2|}$
  Таким образом, e_1, e_2 – ортонормированная система (ещё не базис)
- Индукционный переход: пусть $e_1, ..., e_k$ уже построены
  Строим e_{k+1}
  $w_{k+1} := v_{k+1} - \beta_1 e_1 - ... - \beta_k e_k$
  Хотим, чтобы $\forall i \quad w_{k+1} \perp e_i$, то есть

  $$0 = (w_{k+1}, e_i) = (v_{k+1}, e_i) - \beta_1 \underbrace{(e_1, e_i)}_{=0} + ... + \beta_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{=1} - ... - \beta_k \underbrace{(e_k, e_i)}_{=0}$$

  Получили, что $\beta_i = (v_{k+1}, e_i)$ и $e_{k+1} := \dfrac{w_{k+1}}{|w_{k+1}|}$

Так как система ортонормированная, то она ЛНЗ. При этом, в ней столько же векторов, сколько в базисе. Значит $e_1, ..., e_n$ – ОНБ ☐

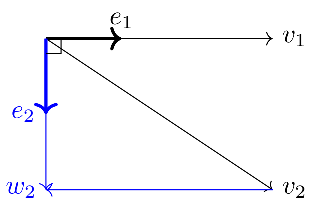


Рис. 1: Ортогонализация Грама-Шмидта для двух векторов

7. Ориентация базиса

Определение 16 (определитель матрицы).

- 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

- 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{21}a_{32}$$

Свойства.

1. $\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (то же самое для других строк и столбцов)

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (то же самое для других строк и столбцов)

3. $\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (то же самое для других строк и столбцов)

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Доказательство. Эти свойства доказываются по определению $\square$

Следствие. Если в матрице есть нулевая строка (столбец), то её определитель равен нулю

Доказательство. Воспользуемся 3 свойством при $\alpha = 0$ $\square$

Следствие. Если в матрице есть две одинаковые строки (столбца), то её определитель равен нулю

Доказательство. Вычтем из одной строки другую. По свойству 1, определитель не должен измениться. При этом, теперь в матрице есть нулевая строка, а, значит её определитель равен нулю $\square$

Теорема 7. $M_n(\mathbb{R})$ – множество матриц $n \times n$, состоящих из вещественных чисел
$\exists! f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам $1-4$

Доказательство. Рассмотрим векторы $a, b, \ldots$ и определитель $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$

Вспомним алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта:

1. Нормируем a (умножаем на k). При этом определитель умножается на k
2. Двигаем b на вектор, кратный a, то есть к b прибавляем вектор, кратный a. При этом определитель не меняется

3. Нормируем полученный вектор. Определитель ужножается на некоторый коэффициент ....

В итоге получаем ОНБ, который соответствует единичной матрице, определитель которой равен единице
Поскольку на каждом шаге определитель изменялся единственным образом, то и функция единственна ☐

Теорема 8. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Примечание. Для матриц 3×3 это можно доказать по определению

Матрица перехода. Имеем два базиса: e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' (не обязательно ОНБ). Выразим один через другой:

$$\begin{cases} e_1' = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \\ e_2' = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{33}e_3 \\ e_3' = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a - 33e_3 \end{cases}$$

Этому соответствует матрица перехода:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение 17. e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3'

- ориентированы одинаково, если $|A| > 0$
- ориентированы по-разному, если $|A| < 0$
- ЛЗ, если $|A| = 0$

8. Векторное произведение. Модуль, направление

Определение 18 (в кавычках). V – евклидово пространство, $\dim V = 3$
$\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ – ОНБ (будем называть правым)
$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$
Назовём $\overrightarrow{a \times b}$ векторным произведением, если выполняется:

1. $\overrightarrow{a \times b} \perp \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{a \times b} \perp \overrightarrow{b}$
2. $|\overrightarrow{a \times b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin \angle \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$
3. $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a \times b}$ образуют правую тройку (т. е. ориентированы так же, как $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$)

Перейдём к координатам. Мы хотим, чтобы выполнялись свойства:

- Дистрибутивность: $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} \overset{?}{=} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$
- “Псевдоассоциативность”: $(\alpha \cdot \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} \overset{?}{=} \alpha \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

Дальше будем действовать так, как будто они выполняются (тем самым введём координаты правильно)

Заметим, что $i \times i = 0$, $i \times j = k$, ...

	i	j	k
i	0	k	-j
j	-k	0	i
k	j	-i	0

Пусть $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$
Пользуясь таблицей, векторно перемножим их:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) =$$
$$= a_1b_1 \cdot i\times i + a_1b_2 \cdot i\times j + a_1b_3 \cdot i\times k + a_2b_1 \cdot j\times i + a_2b_2 \cdot j\times j + a_2b_3 \cdot j\times k + a_3b_1 \cdot k\times i + a_3b_2 \cdot k\times j + a_3b_3 \cdot k\times k =$$
$$= a_1b_1 \cdot 0 + a_1b_2 \cdot k + a_1b_3 \cdot (-j) + a_2b_1 \cdot (-k) + a_2b_2 \cdot 0 + a_2b_3 \cdot i + a_3b_1 \cdot j + a_3b_2 \cdot (-i) + a_3b_3 \cdot 0 =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot i + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot j + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot k = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot k =$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Определение 19. i, j, k – ОНБ
$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 9. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$
$(\alpha \cdot \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times (\alpha \cdot \overrightarrow{b})$

Доказательство.

- $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & k & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{vmatrix}$

□

Скалярно умножим $(a \times b)$ на c:

$$\Big((a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k\Big) \cdot (c_1 i + c_2 j + c_3 k) =$$
$$= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Определение 20. Смешанным произведением (a, b, c) веторов a, b, c называется $(a \times b) \cdot c$
В координатах оно равно определителю, полученому выше

Свойства.

1. $\overrightarrow{a \times b} \perp \overrightarrow{a}$, $\quad \overrightarrow{a \times b} \perp \overrightarrow{b}$

Доказательство. Хотим доказать, что $(a\times b)\overset{?}{\perp} a \iff (a\times b)\cdot a \overset{?}{=} 0 \iff (a,b,a) \overset{?}{=} 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0$

Вспомним, что, если в матрице есть две одинаковые строчки, то её определитель равен нулю

Аналогично $(a\times b)\perp b$ □

2. $|\overrightarrow{a\times b}| = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\angle\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$

Доказательство. Нужно доказать, что $|a\times b|^2 \overset{?}{=} |a|^2\cdot|b|^2\cdot(1-\cos^2\alpha)$

Вспомним, что $\cos^2\alpha = \dfrac{(ab)^2}{|a|^2\cdot|b|^2}$, то есть $|a|^2\cdot|b|^2\cdot\cos^2\alpha = (ab)^2$:

$$\begin{aligned}
|a|^2\cdot|b|^2\cdot(1-\cos^2\alpha) &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = \\
&= a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2 - \\
&- a_1^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 = \\
&= a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3 = \\
&= (a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2) + (a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_3^2b_1^2) + (a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2) = \\
&= (a_1b_2-a_2b_1)^2 + (a_1b_3-a_3b_1)^2 + (a_2b_3-a_3b_2)^2 = |a\times b|^2
\end{aligned}$$

□

3. $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a\times b}$ образуют правую тройку (т. е. ориентированы так же, как $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$)

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot(a_2b_3-a_3b_2) + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\cdot(a_3b_1-a_1b_3) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\cdot(a_1b_2-b_1a_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \geq 0$$

Если $a \neq b$, то неравенство строгое, а, значит, тройка правая □

Следствие. Мы доказали, что определения 18 и 19 равносильны (мы доказали, что 19 $\implies$ 18. При этом оба определения задают вектор однозначно, а значит, в обратную сторону тоже верно)

Следствие. i', j', k' – ОНБ, образующий правую тройку и $\overrightarrow{a} = a_1'i' + a_2'j' + a_3'k'$, $\overrightarrow{b} = b_1'i' + b_2'j' + b_3'k'$

Тогда $a\times b = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{vmatrix}$

Примечание. Это следствие означает, что определение 19 верно не только для i, j, k, а для любого базиса

Мы это уже доказали, т. к. определение 18 не зависит от базиса, а они теперь равносильны

Свойство ("Антикоммутативность"). $a\times b = -b\times a$

Доказательство. Это свойство напрямую следует из свойства определителя матрицы с переставленными строками ☐

Замечание. $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$ – площадь параллелограмма на ветoрах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$

9. Формула $bac - cab$, тождество Якоби

Теорема 10 (формула $bac - cab$). $a \times (b \times c) = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b)$

Доказательство. Введём такую систему координат, чтобы:

- $\overrightarrow{c} = c_1 \overrightarrow{i}$
- $\overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}$

Получили, что i, j, k – правый ОНБ
В новой системе координат $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}$

$$b \times c = (b_1 i + b_2 j) \times c_1 i = -c_1 b_2 k$$

$$a \times (b \times c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -c_1 b_2 \end{vmatrix} = -a_2 c_1 b_2 i + a_1 c_1 b_2 j \tag{2}$$

$$(a, c) = a_3 c_1, \quad (a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b) = b_1 i \cdot a_1 c_1 + b_2 j \cdot a_1 c_1 - c_1 i \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2) = -a_2 b_2 c_1 i + a_1 b_2 c_1 j = (2)$$

☐

Теорема 11 (тождество Якоби). $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$

Доказательство.

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) \underset{(bac-cab)}{=} b(a, c) - c(a, b) + c(b, a) - a(b, c) + a(c, b) - b(c, a) = 0$$

☐

10. Смешанное произведение

Определение 21 (смешанное произведение). $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) := (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$

Геометрический смысл. $|(a, b, c)| = |a \times b| \cdot |c| \cdot |\cos \angle(\overrightarrow{a \times b}, \overrightarrow{c})| = V$ параллелепипеда на векторах a, b, c

В координатах.

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \Big((a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k\Big) \cdot (c_1 i + c_2 j + c_3 k) =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойства.

1. $(a, b, c) > 0 \iff a, b, c$ правая
   $(a, b, c) < 0 \iff a, b, c$ левая
   $(a, b, c) = 0 \iff a, b, c$ ЛЗ

   Доказательство. Смешанное произведение совпадает с определителем матрицы перехода от i, j, k к a, b, c, следовательно, его знак и определяет ориентацию этой тройки □

2. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, аналогично с остальными переменными

   Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & a_2 + a'_2 & a_3 + a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

   □

3. $(\alpha a, b, c) = \alpha(a, b, c)$, аналогично с остальными переменными

   Доказательство.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

   □

4. $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(a, c, b) = -(c, b, a)$

   Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

   Остальное – аналогично □

11. Аффинное пространство

Определение 22. E – некоторое множество, V – векторное пространство
Говорим, что E образует точечное (аффинное) пространство, ассоциированное с V, если задана операция $+ : E \times V \to E$, для которой выполняются свойства:

- "Псевдоассоциативность":
  $(e + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} = e + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u})$
- $\forall e_1, e_2 \in E \ \exists! \overrightarrow{v} : e_1 + \overrightarrow{v} = e_2$

  Обозначение. $\overrightarrow{v} = e_2 - e_1$
- $\forall e \quad e + \overrightarrow{0} = e$

Координаты точки. e_0 – некоторая фиксированная точка
$v_1, ..., v_n$ – базис V
Тогда $\forall e \in E \ \exists! \overrightarrow{w} : e = e_0 + \overrightarrow{w}$
Тогда $\exists! \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$
Тогда говорят, что $e = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (e имеет координаты $\alpha_1, ..., \alpha_n$)
$u = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$
$e + u = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$

Определение 23. $e_1, e_2 \in E$
$\operatorname{dist}(e_1, e_2) := |\overrightarrow{e_2 - e_1}|$

Расстояние между точками. $v_1, ..., v_n$ – ОНБ в V, e_0 – начало координат

$$e_1 = e_0 + \overrightarrow{u}$$

$$e_2 = e_0 + \overrightarrow{w}$$

$$e_2 = e_1 + (\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u})$$

$$\overrightarrow{u} = (u_1, ..., u_n)$$

$$\overrightarrow{w} = (w_1, ..., w_n)$$

$$\operatorname{dist}(e_1, e_2) = |\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}| = |(w_1 - u_1, ..., u_n - w_n)| = \sqrt{(w_1 - u_1)^2 + ... + (w_n - u_n)^2}$$

Алгоритм (переход от одного начала координат к другому (сдвиг)). $e_0 \rightsquigarrow e_0'$

$$e_0' - e = \overrightarrow{w} = (w_1, ..., w_n) \tag{3}$$

$$e = (e_1, ..., e_n) \text{ – координаты в коорд. сист. с началом } e_0 \tag{4}$$

$e = (e_1', ...e_n')$ – координаты в коорд. сист. с началом e_0'

$$(4) \text{ означает, что } e = e_0 + e_1\overrightarrow{v_1} + ... + e_n\overrightarrow{v_n} \tag{5}$$

(3) означает, что $e_0' = e_0 + w_1\overrightarrow{v_1} + ... + w_n\overrightarrow{v_n}$
Выразим отсюда e_0:
$e_0 = e_0' - w_1\overrightarrow{v_1} - ... - w_n\overrightarrow{v_n}$
Подставим это в (5):
$e = e_0' - w_1\overrightarrow{v_1} - ... - w_n\overrightarrow{v_n} + e_1\overrightarrow{v_1} + ... + e_n\overrightarrow{v_1} = e_0' + (e_1 - w_1)\overrightarrow{v_1} + ... + (e_n - w_n)\overrightarrow{v_n}$
Получили, что:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - w_1 \\ e_2' = e_2 - w_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ e_n' = e_n - w_n \end{cases}$$

Определение 24. V – двумерное векторное пространство, i, j – ОНБ
Ассоциированное с V точечное пространство E называется плоскостью

12. Прямые на плоскости

Определение 25. V – двумерное векторное пространство, i, j – ОНБ
Ассоциированное с V точечное пространство E называется плоскостью

Определение 26. $l \subset E$
l называется прямой, если $\exists e \in E, \overrightarrow{v} \underset{v \neq 0}{\in} V : l = \{\, e + \alpha\overrightarrow{v} \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$
$\overrightarrow{v}$ – направляющий

Параметрическое уравнение. $O \in E$ – считаем началом координат
$e = (e_1, e_2)$
$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$
$e + t\overrightarrow{v} = (e_1 + tv_1, e_2 + tv_2) := (x, y)$ – произвольная точка на прямой

$\begin{cases} x = e_1 + tv_1 \\ y = e_2 + tv_2 \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой

Каноническое уравнение. Выразим t из параметрического уравнения

$\begin{cases} t = \dfrac{x - e_1}{v_1} \\ t = \dfrac{y - e_2}{v_2} \end{cases}$

$\dfrac{x - e_1}{v_1} = \dfrac{y - e_2}{v_2}$ – каноническое уравнение прямой

Замечание. Если $v_1 = 0$, то $x = e_1$ (см. параметрическое уравнение). Тогда $x - e_1 = 0$.

Одновременно $v_1 = 0$ и $v_2 = 0$ быть не может, так как $\overrightarrow{v} \overset{\text{def}}{\neq} 0$

Прямая, проходящая через 2 точки. Пусть есть точки $e = (x_0, y_0)$ и $e' = (x_1, y_1)$. Проведём через них прямую:

Для начала проведём через них вектор $\overrightarrow{ee'} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$

Назовём e начальной точкой прямой. Тогда $\overrightarrow{ee'}$ – направляющий вектор

Получаем уравнение:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Приведём каноническое уравнение к общему знаменателю:

$v_2x - v_2e_1 = v_1y - e_2v_1$

Обозначим A, B и C:

$Ax + By + C = 0$

Замечание. Тем самым мы доказали, что любая прямая задаётся таким уравнением. Докажем обратное

Доказательство. Докажем, что любое уравнение $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$, задаёт прямую

$Ax + C = -By$

Разделим на AB:

$$\frac{x + \frac{C}{A}}{B} = \frac{y - 0}{-A}$$

Получили каноническое уравнение прямой, в случае, когда $A \neq 0$ $\square$

Теорема 12. $(A, B) \perp \overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{n} = (A, B)$ называется вектором нормали

Доказательство. $(A, B) = (v_2, -v_1) \perp (v_1, v_2) = \overrightarrow{v}$ $\square$

Уравнение в отрезках. $Ax + By + C = 0, \quad C \neq 0$ (т. е. прямая не проходит через начало координат)

Тогда можно разделить на C:

$$x \cdot \frac{A}{C} + y \cdot \frac{B}{C} = 1$$

Обозначим $p := \dfrac{C}{A}$ и $q := \dfrac{C}{B}$

Получим уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Угол между прямыми. Рассмотрим две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

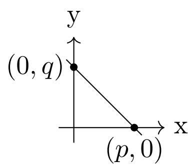


Рис. 2: Смысл уравнения в отрезках

Угол между ними получим из скалярного произведения векторов нормали:

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + b_2^2}}$$

- Прямые перпендикулярны, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
- Прямые параллельны, если $A_1B_2 = A_2B_1$

Нормальное уравнение. Рассмотрим уравнение $Ax+By+C = 0$ и разделим его на $\sqrt{A^2 + B^2}$
Обозначим

$$\begin{cases} \widetilde{A} := \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \widetilde{B} := \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \widetilde{C} := \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{cases}$$

Получим уравнение $\widetilde{A}x + \widetilde{B}y + \widetilde{C}$, причём $\widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2 = 1$
Так как вектор нормали имеет координаты $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$, то $|n| = 1$
Возьмём $\overrightarrow{x} = (1, 0)$, $\overrightarrow{y} = (0, 1)$

$$\begin{cases} \widetilde{A} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} = \cos\alpha \\ \widetilde{B} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{y} = \sin\alpha := \cos\beta \end{cases}$$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, где α – угол между $\overrightarrow{n}$ и осью OX, β – угол между $\overrightarrow{n}$ и осью OY

Получили нормальное уравнение прямой:

$$\widetilde{A}x + \widetilde{B}y + \widetilde{C} = 0$$

$\widetilde{A}, \widetilde{B}$ называются направляющими косинусами
$|\widetilde{C}|$ – расстояние от начала координат до прямой

Теорема 13. Если прямая задаётся уравнением $Ax+By+C = 0$ (не обязательно нормальным), (x_0, y_0) – точка, то расстояние от точки до прямой равно

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство. Обозначим прямую l, точку M
Очевидно, что $\exists\lambda : M + \lambda\overrightarrow{n} \in l$, где $\overrightarrow{n}$ – вектор нормали.
Тогда $\operatorname{dist}(M, l) = |\lambda M| = |\lambda| \cdot |M|$
Вспомним, что $M = (x_0, y_0)$, а $\overrightarrow{n} = (A, B)$:

$$M + \lambda\overrightarrow{n} = (x_0 + \lambda A, y_0 + \lambda B) \in l \iff A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + C + \lambda(A^2 + B^2) = 0$$

Отсюда $\lambda = \dfrac{-Ax_0 - By_0 - C}{A^2 + B^2}$, то есть $\operatorname{dist}(M, l) = \left|\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$ $\square$

Теорема 14. Даны прямые $A_1x + b_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
Прямая, проходящая через точку их пересечения задаётся уравнением

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

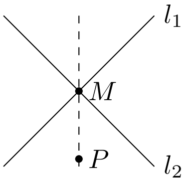


Рис. 3: Теорема 14

Примечание. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, прямую мы не получим
При $\lambda_1 = 0$ это уравнение описывает первую прямую
При $\lambda_2 = 0$ это уравнение описывает вторую прямую

Доказательство.

- Очевидно, что это прямая
- Докажем, что эта прямая проходит через M:
Если подставить координаты M, то первая скобка обратится в ноль (т. к. $M \in l_1$) и вторая скобка тоже обратится в ноль (т. к. $M \in l_2$)
- Докажем, что это уравнение описывает все прямые, проходящие через M:
Возьмём произвольную точку $P(x_0, y_0) \neq M$ и проверим, что наша прямая проходит через неё:
НУО скажем, что $P \notin l_2$ (иначе скажем, что $P \notin l_1$)

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 + \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$$

$$\lambda = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2} = 0$$

Знаменатель не обращается в ноль (так как $P \notin l_2$), а значит такая λ существует всегда

$\square$

13. Плоскость в пространстве

Дальше $\dim V = \dim E = 3$

Определение 27. $M_0 \in E, \quad \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \in V, \quad \overrightarrow{p} \nparallel \overrightarrow{q}$
Плоскостью будем называть $\{\, M_0 + \alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q} \,\}$

Теорема 15. Плоскость задётся уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, причём $(A, B, C) \perp p, \perp q$

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{n} = (a, b, c) : \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{p}, \perp \overrightarrow{q}$
Пусть точка M_0 имеет координаты $M_0(x_0, y_0, z_0)$
Возьмём $D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Теперь нужно доказать, что $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) \overset{?}{=} 0$

$$(A,B,C)\cdot \underbrace{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}_{:=\overrightarrow{v}} \overset{?}{=} 0$$

То есть $(A,B,C) \overset{?}{\perp} \overrightarrow{v}$
Вспомним, что $(A,B,C) \perp \overrightarrow{p}, \perp \overrightarrow{q}$, то есть $\overrightarrow{v}$ – ЛК p и q. То есть $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q}$
Значит, $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q} = M$ □

Примечание. Все эти преобразования равносильны, то есть уравнение однозначно задаёт плоскость, и плоскость однозначно задаёт уравнение

Нормальное уравнение. Обозначим

$$\begin{cases} \widetilde{A} := \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \widetilde{B} := \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \widetilde{C} := \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \widetilde{D} := \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

Получим уравнение $\widetilde{A}x + \widetilde{B}y + \widetilde{C}z + \widetilde{D} = 0$
$\overrightarrow{n} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}), \quad |\overrightarrow{n}| = 1$ (т. к. $\widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2 + \widetilde{C}^2 = 1$)

$$\begin{cases} \widetilde{A} = \cos\alpha \\ \widetilde{B} = \cos\beta \\ \widetilde{C} = \cos\gamma \end{cases}$$

$\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ – косинусы углов между OX, OY, OZ и $\overrightarrow{n}$

Уравнение в отрезках. Разделим $Ax+By+Cz+D=0$ на D и переобозначим:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

Плоскость проходит через 3 точки: $(p,0,0)$, $(0,q,0)$ и $(0,0,r)$

Угол между плоскостями. Даны плоскости $A_1x+B_1x+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2x+C_2z+D_2=0$
Найдём угол α между ними:

$$\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_3}|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

- $\perp$, если $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
- $\parallel$, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

14. Расстояние от точки до плоскости

Теорема 16. Пусть плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ (не обязательно нормальным), (x_0,y_0,z_0) – точка
Тогда расстояние от точки до плоскости равно $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Доказательство. Обозначим плоскость α, точку M
Очевидно, что $\exists\lambda : M+\lambda\overrightarrow{n}\in\alpha$, где $\overrightarrow{n}$ – вектор нормали
Тогда $\operatorname{dist}(M,\alpha)=|\lambda M|=|\lambda|\cdot|M|$
Вспомним, что $M=(x_0,y_0,z_0)$, а $\overrightarrow{n}=(A,B,C)$:

$$M+\lambda\overrightarrow{n}=(x_0+\lambda A,y_0+\lambda B,z_0+\lambda C)\in\alpha \iff A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+C(z_0+\lambda C)+D=0$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0$$

Отсюда $\lambda=\dfrac{-Ax_0-By_0-Cz_0}{A^2+B^2+C^2}$, то есть $\operatorname{dist}(M,\alpha)=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\right|\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

□

15. Прямая в пространтсве

Определение 28. $M\in E$, $\overrightarrow{v}\in V$ $(\dim V=3)$
Прямой в E будем называть $\{\, M+t\overrightarrow{v}\,\}$

Параметрическое уравнение. Обозначим $M=(x_0,y_0,z_0)$, $\overrightarrow{v}=(p,q,r)$
$(x,y,z)\in l \iff (x,y,z)=(x_0+tp,y_0+tp,z_0+tr)$, то есть

$$\begin{cases} x=x_0+tp\\ y=y_0+tq\\ z=z_0+rq\end{cases}$$

Эта система называется **параметрическим уравнением** прямой.

Каноническое уравнение. Выразим из параметрического уравнения t:

$$t=\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

Это называется **каноническим уравнением** прямой
$\overrightarrow{v}=(p,q,r)$ называется направляющим ветором

Теорема 17. Любая прямая является пересечением двух плоскостей (не параллельных)
Любое пересечение двух не параллельных плоскостей является прямой

Доказательство.

- Каноническое уравнение равносильно такой системе:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}\\ \frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}\end{cases}$$

  Первое уравнение домножим на pq:

$$q(x-x_0)=p(y-y_0)$$

$$qx-py+(y_0-x_0)=0$$

  Получили уравнение плоскости (оно не содержит z, значит плоскость параллельна оси OZ)
  Аналогично со вторым уравнением (эта плоскость парллельна OX)

- Возьмём уравнения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, что можно через одну переменную выразить две другие
Пусть система (6) равносильна следующей:

$$\begin{cases} x = pz + x_0 \\ y = qz + y_0 \end{cases}$$

Выразим z из обоих уравнений:

$$\begin{cases} z = \frac{x - x_0}{p} \\ z = \frac{y - y_0}{q} \end{cases}$$

Получам каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - 0}{1}$$

□

Утверждение 1. Даны точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)
Прямая, проходящая через них:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Доказательство. $\overrightarrow{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ – вектор, соединяющий эти две точки
Проведём прямую из первой точки, используя $\overrightarrow{v}$ как направляющий □

Угол между прямыми. Даны две прямые: $\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}$ и $\frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}$
Угол между ними равен углу между направляющими векторами, значит

$$\cos\alpha = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

Эти прямые

- $\perp$, если $p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$
- $\|$, если $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$

16. Эллипс, равносильные определения

Определение 29. F_1, F_2 – точки на плоскости
$F_1F_2 = 2c$ – некоторая константа
геометрическое место точек (ГМТ) $M : F_1M + F_2M = 2a$, где $a > c$, называется эллипсом

Определение 30. l – прямая, F – точка, задано число $0 \leq e < 1$
ГМТ $M : \dfrac{FM}{\mathrm{dist}(M, l)} = e$ называется эллипсом

Определение 31. В подходящих координатах $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс

Примечание. “В подходящих координатах” означает, что существует такая система координат и существуют такие $a > 0$, $b > 0$, что кривая задаётся таким уравнением

Единая система обозначений. F_1, F_2 – фокусы. $F_{1,2} = (\mp c, 0)$
a – большая полуось
b – малая полуось ($b \le a$)
c – фокусное расстояние ($c < a$)
$a^2 := b^2 + c^2$
$e := \dfrac{c}{a}$ – эксцентриситет ($e < 1$)
l_1, l_2 – директрисы. Имеют уравнение $x = \pm\dfrac{a}{e}$

Алгоритм (вывод всех этих величин).

- Допустим, дано определение 29
  Тогда у нас есть a и c, через которые мы можем выразить всё остальное
- Допустим, дано определние 30
  Обозначим $d := \operatorname{dist}(F, l)$
  $d = \dfrac{a}{e} - c \quad \Big| : c$
  $\dfrac{d}{c} = \dfrac{a/c}{e} - 1$
  $\dfrac{d}{c} = \dfrac{1}{e^2} - 1$
  $c = \dfrac{d}{1/e^2 - 1}$
- Допустим, дано определение 31
  Тогда у нас есть a и b, через которые можно выразить всё остальное

Теорема 18. Определения 29, 30 и 31 равносильны

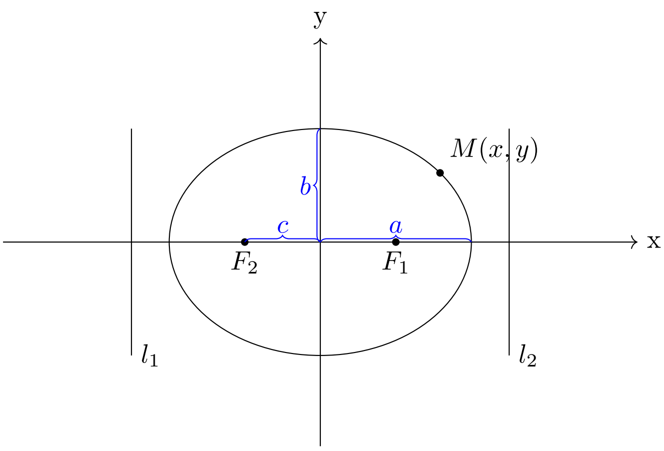


Рис. 4: Эллипс

Доказательство.

- 29 $\iff$ 31

$$F_1M + F_2M = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-ex$$

Возведём в квадрат:

$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2aex+e^2x^2$$
$$x^2(1-e^2)+y^2=a^2-c^2=b^2$$

При этом $1-e^2=1-\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$

$$\frac{x^2}{a^2}b^2+y^2=b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

> **Примечание.** Все преобразования равносильны, так как $-a\le x\le a$

- $30 \iff 31$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \sqrt{\underbrace{(x-c)^2+y^2}_{=F_2M}}=a-ex$$
$$\mathrm{dist}(M,l)=\text{абсцисса } l-\text{абсцисса } M=\frac{a}{e}-x=\frac{1}{e}(a-ex)$$
$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\mathrm{dist}(M,l)}=\frac{a-ex}{\frac{a}{e}-x}=e$$

□

17. Касательные к эллипсу

Определение 32. Касательной называется прямая, которая пересекает эллипс в одной точке

Теорема 19. Прямая $Ax+By+C=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff A^2a^2+B^2b^2=C^2$

Доказательство.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ Ax+By+C=0\end{cases}$$

Считаем, что $B\ne 0$ (иначе выражаем x):

$$y=\frac{-Ax-C}{B}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-Ax-C)^2}{B^2b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{C^2+2ACx+A^2x^2}{B^2b^2}=1$$

Домножим на общий знаменатель:

$$B^2b^2x^2 + C^2a^2 + 2ACa^2x + A^2a^2x^2 = B^2b^2a^2$$

$$x^2 \cdot (b^2B^2 + a^2A^2) + x \cdot 2a^2AC + a^2C^2 - a^2b^2B^2 = 0$$

Это уравнение должно иметь единственный корень, то есть $D = 0$

$$\frac{D}{4} = a^4A^2C^2 - (a^2C^2 - a^2b^2B^2) \cdot (b^2B^2 + a^2A^2) = 0$$

$$a^2A^2C^2 - (C^2 - b^2B^2) \cdot (b^2B^2 + a^2A^2) = 0$$

$$a^2A^2C^2 - b^2B^2C^2 - a^2A^2C^2 + b^4B^4 + a^2b^2A^2B^2 = 0$$

$$a^2b^2A^2B^2 + b^4B^4 - b^2B^2C^2 = 0$$

$$a^2A^2 + b^2B^2 - C^2 = 0$$

□

Теорема 20. (x_0, y_0) – точка на эллипсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Касательная к эллипсу в точке (x_0, y_0) выражается формулой $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

Доказательство.

- Очевидно, что это прямая
- Проверим, что эта прямая проходит через (x_0, y_0). Подставим $y = y_0$ и $x = x_0$:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

- Докажем, что эта прямая касается эллипса:

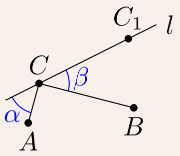
$$A := \frac{x_0}{a^2}, \quad B := \frac{y_0}{b^2}, \quad C := -1$$

$$A^2a^2 + B^2b^2 = \frac{x_0^2}{a^4} \cdot a^2 + \frac{y_0^2}{b^4} \cdot b^2 = 1 = C^2$$

□

18. Оптическое свойство эллипса

Лемма 2.



Чтобы $AC + BC \to \min$, нужно, чтобы $\alpha = \beta$
То есть, если C_1 – любая другая точка на прямой и $\alpha = \beta$, то $AC + BC < AC_1 + BC_1$

Доказательство. Отразим A от l. Получим точку A'. Тогда $AC = A'C$ и $AC_1 = A'C_1$, $\alpha' = \alpha$
Получили, что $AC + BC = A'B$ и $AC_1 = A'C_1$, то есть нужно доказать, что $A'B < A'C_1 + BC_1$, а это неравенство треугольника □

Теорема 21. Лучи, пущенные из одного фокуса, отразившись от эллипса, приходят в другой фокус, то есть $\angle(\overrightarrow{F_1M}, \overrightarrow{n}) = \angle(\overrightarrow{F_2M}, \overrightarrow{n})$

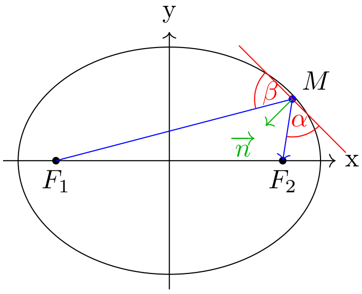


Рис. 5: Оптическое свойство эллипса

Доказательство. M_1 – произвольная точка на касательной
$F_1M + F_2M \overset{\text{def}}{=} 2a$
$F_1M_1 + f_2M_1 > 2a$ (т . к. точка M_1 лежит вне эллипса). Значит, по лемме 2 нужные нам углы равны □

19. Гиперболы, равносильные определения

Определение 33. Гипербола – ГМТ $M : |F_1M - F_2M| = 2a$

Определение 34. Гипербола – ГМТ $M : \dfrac{FM}{\text{dist}(M, l)} = e > 1$

Определение 35. В подходящих координатах гипербола задаётся как $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Единая система обозначений. $a^2 + b^2 = c^2$
$e = \dfrac{c}{a} > 1$
Остальное – то же самое, как и для эллипса, в том числе:
Директрисы: $x = \pm\dfrac{a}{e}$
Фокусы: $F_{12} = (\mp c, 0)$

Теорема 22. Все три определения равносильны

Доказательство.

- 33 $\iff$ 35

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = ex - a$$

Возведём в квадрат:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$
$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2 - c^2 = -b^2$$

При этом $1-e^2 = 1-\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2-c^2}{a^2} = \dfrac{-b^2}{a^2}$

$$-\frac{x^2}{a^2}b^2 + y^2 = -b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

> **Примечание.** Все преобразования равносильны, так как $-a \le x \le a$

- $34 \iff 35$

  Мы уже выяснили, что:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \sqrt{\underbrace{(x-c)^2+y^2}_{=F_2M}} = ex - a$$

$$\operatorname{dist}(M,l) = \underset{\text{(так как у гиперболы фокусы “внутри” от дирекрис)}}{\text{абсцисса } M - \text{абсцисса } l} = x - \frac{a}{e} = \frac{1}{e}(ex-a)$$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\operatorname{dist}(M,l)} = \frac{ex-a}{\frac{1}{e}(ex-a)} = e$$

□

20. Асимптоты гиперболы

Вспомним, что наклонные асимптоты находятся по следующим формулам:

$$\begin{cases} k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ l = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) \end{cases}$$

Гипербола имеет уравнение $y = \pm b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \pm\tfrac{b}{a}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \pm\tfrac{b}{a}\underbrace{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}_{\to 1}$$

$$l = \lim\left(\pm b\sqrt{\tfrac{x^2}{a^2}-1} \mp \tfrac{b}{a}x\right) = \pm\tfrac{b}{a}\lim(\sqrt{x^2-a^2}-x) = \pm\tfrac{b}{a}\lim\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = 0$$

Значит, асимптоты задаются как $y = \pm\frac{b}{a}x$

21. Касательные к гиперболе

Теорема 23. Прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$

Доказательство.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Считаем, что $B \ne 0$ (иначе выражаем x):

$$y = \frac{-Ax - C}{B}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{({}_A x - C)^2}{B^2b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{C^2 + 2ACx + A^2x^2}{B^2b^2} = 1$$

Домножим на общий знаменатель:

$$B^2b^2x^2 - C^2a^2 - 2ACa^2x - A^2a^2x^2 = B^2a^2b^2$$
$$(B^2b^2 - A^2a^2)x^2 - 2ACa^2x - (B^2a^2b^2 + C^2a^2) = 0$$

Это уравнение должно иметь единственный корень, то есть $D = 0$

$$\frac{D}{4} = A^2C^2a^4 + (B^2b^2 - A^2a^2) \cdot (B^2a^2b^2 + C^2a^2) = 0$$

Сократим на a^2:

$$A^2C^2a^2 + (B^2b^2 - A^2a^2) \cdot (B^2b^2 + C^2) = 0$$
$$A^2C^2a^2 + B^4b^4 + B^2C^2b^2 - A^2B^2a^2b^2 - A^2C^2a^2 = 0$$
$$B^4b^4 + B^2C^2b^2 - A^2B^2a^2b^2 = 0$$

Сократим на B^2b^2:

$$B^2b^2 + C^2 - A^2a^2 = 0$$

□

Примечание. Прямая может иметь одну общую точку с гиперболой, но не быть касательной, если это асимптота, сдвинутая по-горизонтали

Предположим, что так и есть. Вспомним, что сдвиг прямой осуществляется изменением свободного члена, а асимптота задаётся как $y = \pm\frac{b}{a}x$, то есть имеем:

$$\begin{cases} Ax + By + C_1 = 0 \\ y = \pm\frac{b}{a}x \\ A^2a^2 - B^2b^2 = C_1^2 \end{cases}$$

Подставим y из второго уравнения в первое (предполагая, что знак второго уравнения – "+"):

$$\begin{cases} Ax + \frac{Bb}{a}x + C_1 = 0 \\ A^2a^2 - B^2b^2 = C_1^2 \end{cases}$$

Выразим C_1 из первого уравнения и подставим во второе:

$$A^2a^2 - B^2b^2 + Ax + \frac{Bb}{a}x = 0$$
$$(A + \frac{Bb}{a})x = B^2b^2 - A^2a^2$$
$$x = \frac{B^2b^2 - A^2a^2}{\frac{Aa+Bb}{a}}$$
$$x = \frac{a(Bb - Aa)(Bb + Aa)}{Aa + Bb}$$
$$x = a(Bb - Aa)$$

Подставим x во второе уравнение изначальной системы:

$$\begin{cases} x = a(Bb - Aa) \\ y = b(Bb - Aa) \end{cases}$$

Подставим это в уравнение гиперболы:

$$\frac{a^2(Bb-Aa)^2}{a^2}-\frac{b^2(Bb-Aa)^2}{b^2}=1$$

$$(Bb-Aa)^2-(Bb-Aa)^2=1$$

Получается, такая прямая не пересекается с гиперболой

Теорема 24. (x_0,y_0) – точка на гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Тогда касательная к гиперболе в точке (x_0,y_0) задаётся как $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

Доказательство.

- Очевидно, что это прямая
- Проверим, что эта прямая проходит через (x_0,y_0). Подставим $y=y_0$ и $x=x_0$:

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

- Докажем, что эта прямая касается эллипса:

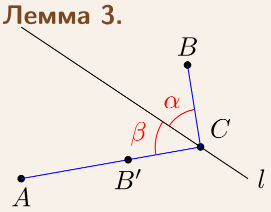
$$A=\frac{x_0}{a^2},\quad B=\frac{y_0}{b^2},\quad C=-1$$

$$A^2a^2-B^2b^2=\frac{x_0^2}{a^4}a^2-\frac{y_0^2}{b^4}b^2=1=C^2$$

□

22. Оптическое свойство гиперболы

Лемма 3.



Чтобы $|AC-BC|\to\max$, нужно, чтобы $\alpha=\beta$

Доказательство. B отразим от прямой, получим B'

$$|AC-BC|=|AC-B'C|\underset{\text{(нер-во треуг.)}}{\leq}AB'$$

Причём равенство достигается, когда B' попадает на отрезок AC (или его продолжение). А тогда углы равны □

Теорема 25. Лучи, пущенные из одного фокуса, отразившись от гиперболы, собираются в расходящийся пучок. При этом их продолжения сходятся в другом фокусе.
Иными словами, углы α и β равны

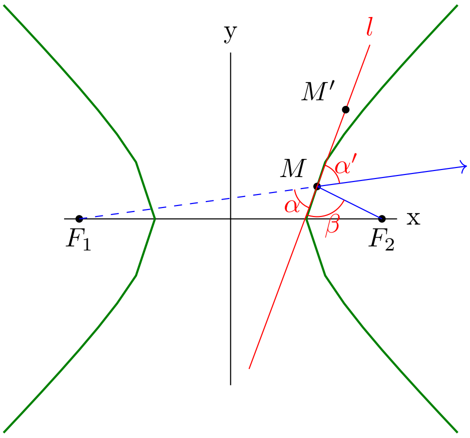


Рис. 6: Оптическое свойство гиперболы

Доказательство. Отметим точку M' на касательной
$|F_1M - F_2M| \overset{\text{def}}{=} 2a$
$|F_1M' - F_2M'| < 2a$ (т. к. M' не лежит на гиперболе)
Тогда, по лемме 3, $\alpha = \beta$ □

23. Парабола, равносильные определения

Определение 36. Заданы точка F и прямая l
ГМТ $M : \dfrac{FM}{\text{dist}(M, l)} = e = 1$ называется параболой

Определение 37. В подходящих координатах, парабола задаётся уравнением $y^2 = 2px$

Примечание. Подходящие координаты:
Ось x перпендикулярна директрисе l и проходит через фокус F
Ось y проходит через середину отрезка от F до l
Фокус F будет иметь координаты $(\frac{p}{2}, 0)$
Директриса l будет иметь уравнение $x = -\frac{p}{2}$

Теорема 26. Определения равносильны

Доказательство. $F(\frac{p}{2}, 0)$, $l : x = -\frac{p}{2}$, $M(x, y)$
По определению 36: $FM = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \overset{\text{def}}{=} \text{dist}(M, l) = x + \frac{p}{2}$
Возведём левую часть в квадрат и раскроем скобки:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

Получили определение 37 □

Очевидно, что. Преобразования равносильны

24. Касательные и оптическое свойство параболы

Теорема 27 (касательная к параболе). $y^2 = 2px$ – парабола
(x_0, y_0) – точки на параболе
Касательная к параболе в точке (x_0, y_0) имеет уравнение $yy_0 = p(x + x_0)$

Доказательство.

- Очевидно, что $yy_0 = p(x + x_0)$ – прямая
- Подставим x_0 и y_0 в уравнение касательной:

$$y_0^2 = 2px_0$$

  Получили уравнение параболы, значит это действительно касательная
- Докажем, что касательная в точке (x_0, y_0) единственна:

$$\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

  Из первого уравнения получаем $px = yy_0 - px_0$
  Значит, $y^2 = 2yy_0 - 2px_0 = 2yy_0 - y_0^2$
  $y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = 0$
  $(y - y_0)^2 = 0$
  $\begin{cases} y = y_0 \\ x = x_0 \end{cases}$
  Получили, что система имеет одно решение

□

Теорема 28 (оптическое свойство параболы). Луч, пущеный из фокуса, отразившись от параболы, становится параллельным оси параболы
Другими словами, $\angle PMG = \angle TMF$

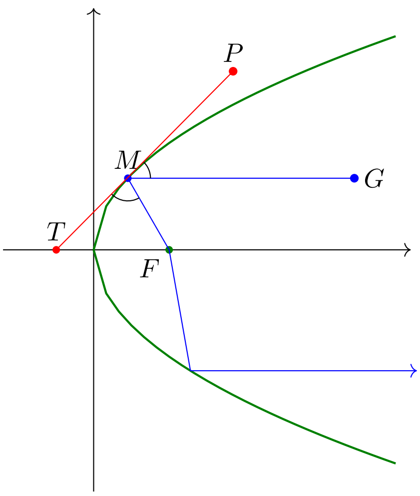


Рис. 7: Оптическое свойство параболы

Доказательство. Обозначим координаты $M(x_0, y_0)$

Подставим $y = 0$ в уравнение касательной:

$$0 = p(x + x_0)$$

$$x = -x_0$$

Получили координаты точки $T(-x_0, 0)$
$\angle MTF = \angle PMG$ (так как прямые TF и MG параллельны, TM – секущая)
$TF \stackrel{?}{=} FM$
$TF = x_0 + \dfrac{p}{2}$
$FM = \text{dist}(M, \text{директр.}) = x_0 + \dfrac{p}{2}$ (по основному свойству параболы)
$\implies TF = FM \implies \angle TMF \underset{\triangle TMF\text{ – р/б}}{=} \angle MTF$ □

25. Полярная система координат, поворот плоскости

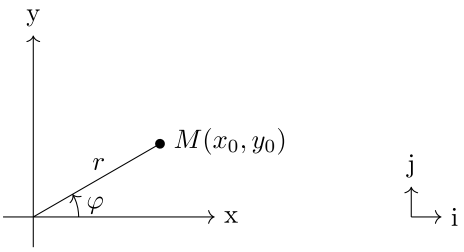


Рис. 8: Полярная система координат

i, j – базис
Отмечаем две точки: одну на оси x, другую – на оси y. Теперь, при повороте в одном направлении, мы проходим π от одной точки до другой, а в другом – 3π. Считаем, что против часовой стрелки – это первое направление, и φ откладываем в нём
Параметры (r, φ) будем называть полярными координатами точки M
Переход от полярных координат к прямоугольным осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ r = r\sin\varphi \end{cases}$$

Алгоритм (поворот на угол φ). Была точка $M(r, \varphi)$
В новой системе координат она имеет координаты $M(r', \varphi')$, где

$$\begin{cases} r' = r \\ \varphi' = \varphi - \alpha \end{cases}$$

При этом её прямоугольные координаты:

$$\begin{cases} x' = r'\cos\varphi' = r\cos(\varphi - \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = r'\sin\varphi' = r\sin(\varphi - \alpha) = r\sin\varphi\cos\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

26. Прямые второго порядка: поворот системы координат

Уравнение II порядка:

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная форма}(\neq 0)} + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0$$

Мы хотим повернуть систему координат так, чтобы избавиться от $2a_{12}xy$, то есть, чтобы $a_{12} = 0$
Вспомним, что при повороте:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Перепишем уравнение II порядка, подставив эти x и y:

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_{22}\cdot(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + \ldots =$$
$$= a_{11}x'^2\cos^2\alpha - \mathbf{2a_{11}x'y'\cos\alpha\sin\alpha} + a_{11}y'^2\sin^2\alpha + 2a_{12}x'^2\cos\alpha\sin\alpha + \mathbf{2a_{12}x'y'\cos^2\alpha} -$$
$$- \mathbf{2a_{12}x'y'\sin^2\alpha} + y'^2\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}x'^2\sin^2\alpha + \mathbf{2a_{22}x'y'\cos\alpha\sin\alpha} + 2a_{22}y'^2\cos^2\alpha + \ldots$$

Мы прекратили, потому что остались слагаемые I порядка (а наша цель – избавиться от $x'y'$), а не потому что задолбались
Сосчитаем коэффициент при $x'y'$:

$$x'y'\cdot(-2a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha) \overset{?}{=} 0$$

Воспользуемся формулами $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$:

$$(a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha = 0$$

Поделим на $\sin 2\alpha$ (если $\sin 2\alpha = 0$, то делим на $\cos 2\alpha$):

$$a_{22} - a_{11} + 2a_{12}\operatorname{ctg} 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Мы исходили из предположения, что $a_{12} \neq 0$ (иначе зачем мы всё это делали?). Котангенс может принимать любые значения, значит мы доказали, что $\exists\alpha$

27. Классификация КВП: эллиптический и гиперболический типы

Уравнение II порядка:

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная форма}(\neq 0)} + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0$$

Алгоритм.

1. Поворотом плоскости избавляемся от $2a_{12}xy$
   Получаем $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + b'_3 = 0$

2. Сдвигом избавляемся от одной из b:

   - Если $a'_{11} \neq 0$, то считаем $b'_1 = 0$
     Мы можем так считать, потому что можно записать в таком виде:

     $$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + b'_3 = a'_{11}\underbrace{\left(x'^2 + 2\frac{b'_1}{a'_{11}}x' + \frac{b'^2_1}{a'^2_{11}}\right)}_{=(x'+\frac{b'_1}{a'_{11}})^2 := x''^2} + \underbrace{b'_3 - \frac{b'^2_1}{a'_{11}}}_{:=b''_3}$$

     Получаем уравнение $a'_{11}x''^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_2y' + b''_3 = 0$

- Если $a'_{22} \neq 0$, то делаем аналогичный сдвиг по y' и считаем $b'_2 = 0$
  Получаем уравнение $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y''^2 + 2b'_1 x' + b''_3 = 0$
- Если $a'_{11} = 0$, $b'_1 \neq 0$, то считаем, что $b'_3 = 0$

$$2b'_1 x' + b'_3 = 2b'_1 \underbrace{\left(x' + \frac{b'_3}{2b'_1}\right)}_{:=x''}$$

  Получаем уравнение $a'_{22}y'^2 + 2b'_1 x'' + 2b'_2 y' = 0$
- Если $a_{22} = 0$, $b_2 \neq 0$, то, аналогично, считаем, что $b_3 = 0$
  Получаем уравнение $a'_{11}x'^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y'' = 0$

3. Возникает несколько случаев (рассматриваем эллиптический и гиперболический):
   Далее штрихи подразумеваются
   Считаем, что $a_{11}, a_{22} \neq 0$
   Сдвигами избавляемся от b_1 и b_2
   Получаем уравнение $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + b_3 = 0$
   Делим на b_3:
   $$\frac{a_{11}x^2}{b_3} + \frac{a_{22}y^2}{b_3} = -\frac{b_3}{b_3}$$
   Переобозначим:
   $$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{x^2}{b^2} = \pm 1$$
   Знаки зависят от знаков $a_{11} \cdot a_{22}$ и b_3:
   (a) $a_{11} > 0$ и $a_{22} > 0$ (или $a_{11} < 0$ и $a_{22} < 0$) – эллиптический тип
      i. $b_3 > 0$
         $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс
      ii. $b_3 = 0$
         $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 0$ – точка
      iii. $b_3 > 0$
         $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс ($\emptyset$)
   (b) $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ (или $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$) – гиперболический тип
      i. $b_3 < 0$
         $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола
      ii. $b_3 = 0$
         $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся прямых
      iii. $b_3 > 0$
         $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ – гипербола ($x' = y$, $y' = -x$)

Примечание. Квадратичная форма не может обнулиться при повороте (т. е. не может быть $a'_{11} = a'_{22} = 0$)

Доказательство. Допустим, в результате поворота все a обнулились. Сделаем обратный поворот. Мы должны получить исходное уравнение, но порядок не может повыситься при повороте. Получаем противоречие □

28. Классификация КВП: параболический тип

Уравнение II порядка:

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная форма}(\neq 0)} + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0$$

Алгоритм.

1. Поворотом плоскости избавляемся от $2a_{12}xy$
   Получаем $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + b'_3 = 0$

2. Сдвигом избавляемся от одной из b:

   - Если $a'_{11} \neq 0$, то считаем $b'_1 = 0$
     Мы можем так считать, потому что можно записать в таком виде:

     $$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + b'_3 = a'_{11}\underbrace{\left(x'^2 + 2\frac{b'_1}{a'_{11}}x' + \frac{b'^2_1}{a'^2_{11}}\right)}_{=(x'+\frac{b'_1}{a'_{11}})^2 := x''^2} + \underbrace{b'_3 - \frac{b'^2_1}{a'_{11}}}_{:=b''_3}$$

     Получаем уравнение $a'_{11}x''^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_2y' + b''_3 = 0$
   - Если $a'_{22} \neq 0$, то делаем аналогичный сдвиг по y' и считаем $b'_2 = 0$
     Получаем уравнение $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y''^2 + 2b'_1x' + b''_3 = 0$
   - Если $a'_{11} = 0$, $b'_1 \neq 0$, то считаем, что $b'_3 = 0$

     $$2b'_1x' + b'_3 = 2b'_1\underbrace{\left(x' + \frac{b'_3}{2b'_1}\right)}_{:=x''}$$

     Получаем уравнение $a'_{22}y'^2 + 2b'_1x'' + 2b'_2y' = 0$
   - Если $a_{22} = 0$, $b_2 \neq 0$, то, аналогично, считаем, что $b_3 = 0$
     Получаем уравнение $a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y'' = 0$

3. Возникает несколько случаев (рассматриваем параболический):
   Далее штрихи подразумеваются
   Считаем, что $a_{11} = 0$ или $a_{22} = 0$ (см. примечание)

   (a) $a_{11} = 0$ и $a_{22} \neq 0$ (или наоборот) – параболический тип
   Сдвигом избавляемся от b_2:

   $$a_{22}y^2 + 2b_1x + b_3 = 0$$

   i. $b_1 \neq 0$
   Сдвигом избавляемся от b_3:

   $$a_{22}y^2 + 2b_1x = 0$$

   Делим на a_{22} и получаем $y^2 = 2px$ – парабола

   ii. $b_1 = 0$

   $$a_{22}y^2 + b_3 = 0$$

   Делим на b_3:

   $$\frac{a_{22}y^2}{b_3} = -\frac{b_3}{b_3}$$

Переобозначаем:

$$\pm\frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Знаки зависят от знаков $a_{22} \cdot b_3$ и b_3

Считаем, что знак a_{22} совпадает со знаком b_3 (иначе ничего не меняется):

A. b_3 и a_{22} одного знака
   $\frac{y^2}{b^2} = 1$ – пара параллельных прямых

B. $b_3 = 0$
   $\frac{y^2}{b^2} = 0$ – прямая

C. b_3 и a_{22} разных знаков
   $\frac{y^2}{b^2} = -1$ – пара мнимых прямых ($\emptyset$)

Примечание. Квадратичная форма не может обнулиться при повороте (т. е. не может быть $a'_{11} = a'_{22} = 0$)

Доказательство. Допустим, в результате поворота все a обнулились. Сделаем обратный поворот. Мы должны получить исходное уравнение, но порядок не может повыситься при повороте. Получаем противоречие $\square$

29. Поверхности второго порядка. Эллиптический и гиперболический типы

Уравнение II порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + b_4 = 0$$

Алгоритм (классификация ПВП).

1. Поворотом избавляемся от a_{12}, a_{13}, a_{23} (докажем позже)

2. Сдвиги:

   - Если $a_{11} \neq 0$, то считаем $b_1 = 0$ (аналогично с a_{22} и a_{33})
   - Если $a_{11} = 0$ и $b_1 \neq 0$, то считаем $b_4 = 0$

3. Возникает несколько случаев (рассмотрим эллиптический и гиперболический):

   - Эллиптический ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$, или одна отрицательная, две положиетльных):
     $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + b_4 = 0$$
     (a) $b_4 < 0$
     $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – эллипсоид}$$
     (b) $b_4 = 0$
     $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ – точка}$$
     (c) $b_4 > 0$
     $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ – мнимый эллипсоид}$$
   - Гиперболический ($a_{11}, a_{12} > 0$, $a_{33} < 0$):
     Тоже 3 случая, в зависимости от знака b_4:
     (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид

Доказательство (Что он выглядит как на рисунке 9b). Будем исследовать сечения:

- Горизонтальное ($z = \text{const} := \widetilde{c}$):
  Перенесём $\frac{z^2}{c^2}$ в правую часть и обозначим $A^2 := 1 + \frac{\widetilde{c}^2}{c^2}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = A^2$$

  Поделим на A^2:

$$\frac{x^2}{(Aa)^2} + \frac{y^2}{(Ab)^2} = 1$$

  Это означает, что любое горизонтальное сечение однополостного гиперболоида будет эллипсом (меняются только радиусы)
- Вертикальное ($y = \text{const}$, для x то же самое):
  Аналогичным образом получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

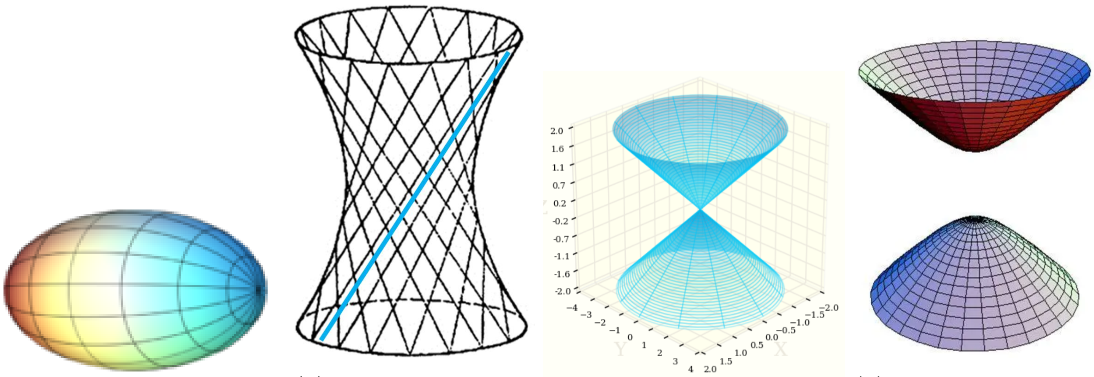
  * Если $y^2 = 0$, то получаем гиперболу
  * Если $0 < y^2 < b^2$, то у гиперболы уменьшаются полуоси
  * Если $y^2 = b^2$, то получаем пару пересекающихся прямых
  * Если $y^2 > b^2$, то опять получаем гиперболу (с ветвями в другую сторону)

□

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – конус

Примечание. Можно получить параболу, если рассечь конус наклонной плоскостью, параллельной одной из образующих

(c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двухполостный гиперболоид



(a) Эллипсоид (b) Однополостный гиперболоид (c) Конус (d) Двуполостный гиперболоид

Рис. 9: Кривые II порядка: эллиптический и гиперболический типы

30. Поверхности второго порядка: параболический тип

Уравнение II порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + b_4 = 0$$

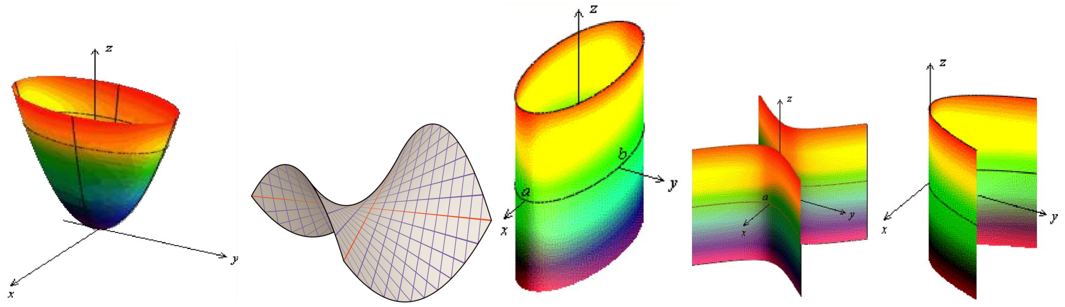
Алгоритм (классификация ПВП).

1. Поворотом избавляемся от a_{12}, a_{13}, a_{23} (докажем позже)
2. Сдвиги:
   - Если $a_{11} \neq 0$, то считаем $b_1 = 0$ (аналогично с a_{22} и a_{33})
   - Если $a_{11} = 0$ и $b_1 \neq 0$, то считаем $b_4 = 0$
3. Возникает несколько случаев (рассмотрим параболический):
   - Параболический ($a_{33} = 0$):

     (a) $b_3, a_{11}, a_{22} \neq 0$ ($\implies$ $b_4 = 0$)
     $$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2b_3z = 0$$
     i. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ – эллиптический параболоид
     ii. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ – гиперболический параболоид

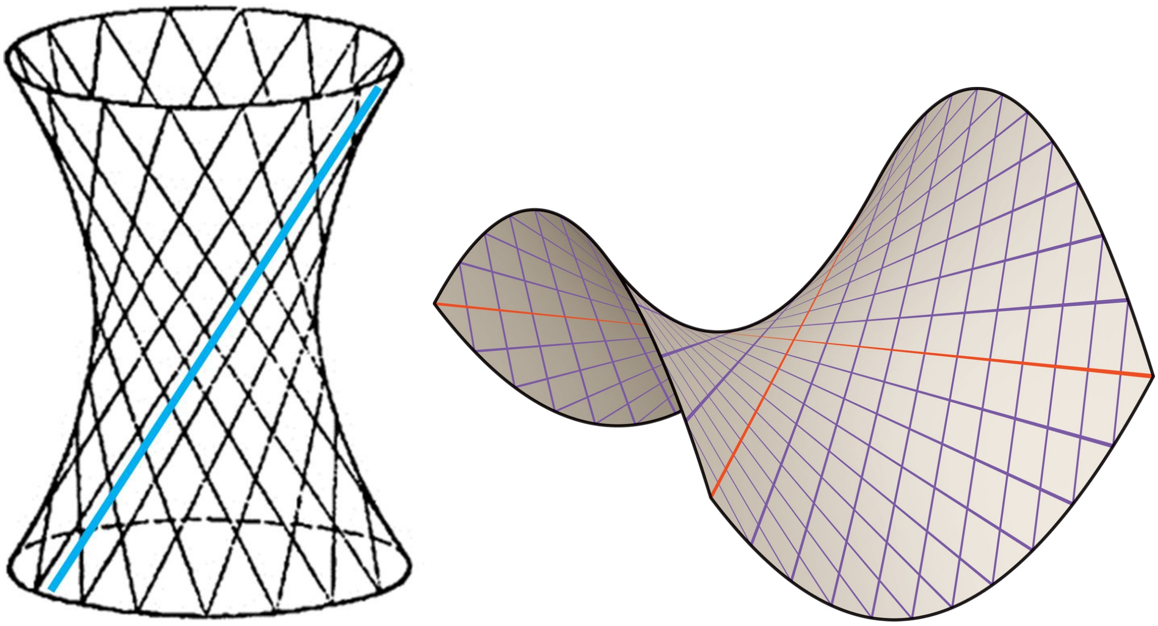
     (b) $b_3 = 0$. Нет зависимости от z
     Если бы мы находились на плоскости, то получили бы КВП. Но мы в пространстве, а это значит, что у нас есть некая плоскость, на которой “нарисована” какаая-то КВП, и эта плоскость бесконечно “движется” вверх и вниз. Получаем бесконечный цилиндр, в основании которого лежит какая-то КВП
     i. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр
     ii. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – прямая
     iii. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – тоже прямая
     iv. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр
     v. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся плоскостей
     vi. $y^2 = 2px$ – параболический цилиндр
     vii. $\frac{x^2}{a^2} = 1$ – пара параллельных плоскостей
     viii. $\frac{x^2}{a^2} = 0$ – плоскость
     ix. $\frac{x^2}{a^2} = -1$ – $\emptyset$

     (c) $b_3 \neq 0$, $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ (или a-шки поменяны местами)
     i. Если $b_2 = 0$, то получаем “лежачие” цилиндры
     ii. $b_2 \neq 0$
     $$a_{11}x^2 + 2b_2y + 2b_3z = 0$$
     Сделаем замену координат:
     $$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b_2y + b_3z}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} \text{ (делим на корень, чтоб сохранить масштаб)} \\ z' = \pm\frac{b_3y - b_2z}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} \text{ (так, чтобы } z' \perp x', y' \text{ и сохранялась ориентация)} \end{cases}$$
     Получаем уравнение:
     $$a_{11}x'^2 + 2\sqrt{b_2^2 + b_3^2} \cdot y' = 0$$
     z исчезла, а значит опять получили цилиндрическую поверхность



(a) Эллиптический параболоид (b) Гиперболический параболоид (c) Эллиптический цилиндр (d) Гиперболический цилиндр (e) Параболический цилиндр

Рис. 10: Плоскости II порядка: параболический тип



(a) Однополостный гиперболоид (b) Гиперболический параболоид

Рис. 11: Прямые на ПВП

31. Прямые на однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде

- Однополостный гиперболоид
  Его уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \Longleftarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \cdot \lambda_1 = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \cdot \lambda_2 \\ \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \lambda_2 = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \lambda_1 \end{cases}$$

  (из системы следует уравнение, обратно – нет)
  Обратим внимание, что получилось два уравнения плоскостей. Они не параллельны (коэффициенты при x и z будут в первом случае разных знаков, во втором – одного), а значит пересекаются по прямой
  Если x, y и z удовлетворяют системе (т. е. лежат на прямой), то они удовлетворяют и уравнению (т. е. лежат на гиперболоиде)

Значит, при каждом $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, есть прямая, принадлежащая гиперболоиду
Теперь напишем другую систему, из которой тоже следует уравнение гиперболоида:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \lambda_2 \cdot \left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda_2 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \lambda_1 \left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

Несложно видеть, что эта система тоже описывает прямые, не параллельные первым

- Гиперболический параболоид
  Его уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2 \cdot z$$

Дальше рассуждения аналогичные, с двумя системами:

$$\begin{cases} \lambda_1 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \lambda_1 z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda_1 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \lambda_2 z \\ \lambda_2 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\lambda_1 \end{cases}$$

32. Приведение квадратичной формы к диагональному виду

У нас есть квадратичная форма $Q(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$
Мы хотим избавиться от a_{12}, a_{13}, a_{23}
При этом, квадратичная форма удовлетворяет такому свойству:

$$Q(tx, ty, tz) = t^2 \cdot Q(x, y, z)$$

Примечание. Это легко проверяется подстановкой

Сузим действие Q на двумерную сферу:

$$Q : S^2 \to \mathbb{R}, \quad S^2 := \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

Утверждение 2. Никакая информация при этом не теряется

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$
Разделим каждую её координату на $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$M\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

При этом мы попадём на единичную сферу, так как

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

По свойству квадратичной формы, нужно домножить квадратичную форму от новых координат на $x^2 + y^2 + z^2$, чтобы получить $Q(M)$ □

Отметим такую точку $M_0 \in S^2 : Q(M_0) = \max Q(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S^2$
Такая точка будет существовать по второй теореме Вейерштрасса:

Теорема 29 (Вейерштрасса). M – замкнутое ограниченное подмножество R^n
$f : M \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция
$\implies \exists \max\limits_{x \in M} f(x)$

Доказательство. Пусть $\nexists \max\limits_{(x_1,...,x_n) \in M} f(x_1, ..., x_n)$
Рассмотрим $E = f(M)$. M ограничено, значит, по первой теореме Вейерштрасса, и E ограничено. То есть, у него есть супремум

$$t_0 \coloneqq \sup E \implies \forall (x_1, ..., x_n) \in M \quad f(x_1, ..., x_n) \le t_0$$

При этом, мы предположили, что $\nexists \max\limits_{(x_1,...,x_n) \in M} f(x_1, ..., x_n)$, а значит:

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in M \quad f(x_1, ..., x_n) < t_0$$

Рассмотрим $\varphi(x_1, ..., x_n) \coloneqq t_0 - f(x_1, ..., x_n)$

$$\left.\begin{array}{l} \forall (x_1, ..., x_n) \in M \quad \varphi(x_1, ..., x_n) = t_0 - f(x_1, ..., x_n) > 0 \\ \varphi \overset{\text{def}}{\in} C(M) \end{array}\right\} \implies \frac{1}{\varphi} \in C(M)$$

Тогда можно применить к $\frac{1}{\varphi}$ первую теорему Вейерштрасса:

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in M \quad \exists Q : \frac{1}{\varphi(x_1, ..., x_n)} \le Q \iff \frac{1}{Q} \le t_0 - f(x_1, ..., x_n) \iff$$
$$\iff f(x_1, ..., x_n) \le t_0 - \frac{1}{Q} \iff t_0 - \frac{1}{Q} \text{ верхняя граница } E \lightning \ t_0 = \sup E$$

□

Через M_0 проведём новую ось OX. OY и OZ проводим перпендикулярно, так чтобы ориентация сохранялась. На каждой из осей откладываем единичный отрезок
В новых координатах:

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

Теперь выпишем $Q(x, y, z)$ в новых координатах:

$$Q(y, z) = a_{11}(1 - y^2 - z^2) + 2a_{12}\sqrt{1 - y^2 - z^2} \cdot y + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}\sqrt{1 - y^2 - z^2} \cdot z + a_{33}z^2$$

В новых координатах, M_0 будет иметь координаты $(1, 0, 0)$. При этом, это – точка максимума, то есть $y = 0$, $z = 0$ – точка максимума
Возьмём функцию $f(y) \coloneqq Q(y, 0)$

$$f(y) = a_{11}(1 - y^2) + a_{12}\sqrt{1 - y^2} + a_{22}(1 - y^2)$$

То, что $y = 0$ – точка максимума, означает, что:

$$f'(0) = 0 \text{ или не существует}$$

$$f'(y) = -2a_{11}y + a_{22}y + a_{12}\sqrt{1 - y^2} + 2a_{12}y \cdot \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Подставим $y = 0$:

$$f'(0) = 2a_{12}$$

Вспомним, что $f'(0) = 0$ (очевидно, что она существует):

$$a_{12} = 0$$

Аналогично, если взять $g(z) = Q(0, z)$, получим $a_{13} = 0$
Перепишем квадратичную форму, подставив $a_{12} = 0$ и $a_{13} = 0$:

$$Q(y, z) = a_{11}(1 - y^2 - z^2) + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

Избавиться от a_{23} можно двумя способами:

- Повернуть плоскость YOZ, так же, как мы делали для КВП
- Взять в плоскости OYZ единичную окружность и проделать аналогичные действия для двух переменных:

$$Q : S \to \mathbb{R}, \quad S = \{\, (y, z) \mid y^2 + z^2 = 1 \,\}$$

$$M_0 \in S : Q(M_0) = \max(y, z), \quad (y, z) \in S$$

Проведём новую OY через M_0

$$y = \sqrt{1 - z^2}$$

$$Q(z) = a_{11}(1 - (1 - z^2) - z^2) + a_{22}(1 - z^2) + 2a_{23}\sqrt{1 - z^2} \cdot z + a_{33}z^2 = \\ = a_{22}(1 - z^2) + 2a_{23}\sqrt{1 - z^2} \cdot z + a_{33}z^2$$

$$M_0(1, 0)$$

$$Q'(0) = 0$$

$$Q'(z) = -2a_{22}z + 2a_{33}z + 2a_{23}\sqrt{1 - y^2} + 2a_{12}z\frac{-z}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$Q'(0) = 2a_{23} = 0 \implies a_{23} = 0$$