

Диифференциальная геометрия

Курс Сольниина А. А.

Осень 2024

Содержание

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | Диифференциальная геометрия кривых | 2 |
| 1 | Вектор-функции. Пределы, производные | 2 |
| 2 | Лемма о производной вектор-функции с постоянным модулем | 4 |
| 3 | Касательная прямая к кривой. (Не)зависимость от параметризации | 4 |
| 4 | Касательная прямая к кривой. Степень приближения | 4 |
| 5 | Длина кривой | 5 |
| 6 | Длина кривой в различных координатах | 6 |
| 7 | Натуральная параметризация кривой | 7 |
| 8 | Репер Френе. Формулы Френе | 8 |
| 9 | Плоскости, связанные с кривой. Уравнения этих плоскостей | 9 |
| 10 | Соприкасающаяся плоскость. Порядок её приближения к кривой | 10 |
| 11 | Вычисление кривизны | 11 |
| 12 | Вычисление кривизны в явном виде и в полярных координатах | 11 |
| 13 | Вычисление кручения | 12 |
| 14 | Натуральные уравнения кривой | 13 |
| II | Диифференциальная геометрия поверхностей | 13 |
| 15 | Касательная плоскость к поверхности | 14 |
| 16 | Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма | 14 |
| 17 | Изометрия поверхностей. Внутренняя геометрия | 15 |
| 18 | Контрпример Шварца | 16 |
| 19 | Площадь поверхности. Модуль вектора $r_u \times r_v$ | 17 |
| 20 | Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма | 17 |
| 21 | Теорема Мёнье. Кривизна кривой на поверхности в произвольной параметризации | 18 |
| 22 | Соприкасающийся параболоид. Типы точек | 19 |

| | |
|---|----|
| 23 Совпадение характеристик у поверхности и соприкасающегося параболода | 19 |
| 24 Теорема Эйлера | 20 |
| 25 Следствия из теоремы Эйлера | 21 |
| 26 Вычисление главных кривизн. Формула для гауссовой кривизны | 21 |
| 27 Вычисление главных направлений | 21 |
| 28 Лемма о смешанных произведениях | 22 |
| 29 Блистательная теорема Гаусса | 22 |
| 30 Деривационные формулы | 23 |
| 31 Коэффициенты в разложении n_u, n_v | 24 |
| 32 Модуль $n_u \times n_v$ | 24 |
| 33 Уравнения Петерсона—Майнард—Кодацци | 25 |
| 34 Символы Кристоффеля относятся к внутренней геометрии | 25 |
| 35 Геодезическая кривизна относится к внутренней геометрии | 26 |
| 36 Вычисление геодезической кривизны | 26 |
| 37 Равносильные определения геодезической | 27 |
| 38 Существование геодезических в данном направлении | 27 |
| 39 Полугеодезическая параметризация | 28 |
| 40 Геодезические как локально кратчайшие | 28 |

Часть I

Дифференциальная геометрия кривых

1. Вектор-функции. Пределы, производные

Определение 1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — вектор-функция.
 $f([a, b])$ — кривая, $f(a)$ — начало, $f(b)$ — конец.

Определение 2. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = A \in \mathbb{R}^3$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |t - t_0| < \delta \implies |\vec{f}(t) - A| < \varepsilon$$

Операции с вектор-функциями.

- $(\vec{f} + \vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t)$
- $(\alpha \cdot \vec{f})(t) = \alpha \vec{f}(t)$
- - $(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = (\vec{f}(t), \vec{g}(t))$
 - $(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$
 - $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})(t) = (\vec{f}(t), \vec{g}(t), \vec{h}(t))$

Утверждение 1. Эти операции перестановочны с пределом.

Доказательство. Докажем для векторного произведения:

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \quad \vec{g}(t) = (\vec{g}_1(t), \vec{g}_2(t), \vec{g}_3(t))$$

$$f \times g = (f_2g_3 - f_3g_2, f_3g_1 - f_1g_3, f_1g_2 - f_2g_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f \times g)(t) \stackrel{?}{=} \left(\lim_{t \rightarrow t_0} (f_2g_3 - f_3g_2)(t), \dots, \dots \right) = (\tilde{f}_2\tilde{g}_3 - \tilde{f}_3\tilde{g}_2, \dots, \dots) = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3) \times (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t)) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t)}_{\tilde{f}_2} \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t) - \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t)$$

□

Утверждение 2. Предел можно брать по координатам:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = A = (A_1, A_2, A_3) \iff \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = A_i \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |f_i(t) - A_i| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Доказательство.

• \Leftarrow

$$|\vec{f}(t) - A| = \sqrt{\left(\underbrace{f_1(t) - A_1}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \right)^2 + \left(\underbrace{f_2(t) - A_2}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \right)^2 + \left(\underbrace{f_3(t) - A_3}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3}} < \varepsilon$$

• \Rightarrow

$$|\vec{f}(t) - A| = \sqrt{(f_1(t) - A_1)^2 + (f_2(t) - A_2)^2 + (f_3(t) - A_3)^2} \geq |f_i(t) - A_i|$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta : |f_i(t) - A_i| \leq |\vec{f}(t) - A| < \varepsilon$$

□

Определение 3. $\vec{f}(t)$ непрерывна в t_0 , если $f(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$

Определение 4.

$$\vec{f}'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Утверждения.

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

Доказательство. Аналогично произведению скалярных функций:

$$\begin{aligned} (f \times g)'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \times g(t) \right) + f(t_0) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0) \end{aligned}$$

□

$$5. (f, g, h)' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$$

2. Лемма о производной вектор-функции с постоянным модулем

Лемма 1. $|\vec{f}'| = \text{const} \iff \vec{f}' \perp \vec{f}$

Доказательство.

$$|\vec{f}'| = \text{const} \iff (\vec{f}', \vec{f}') = \text{const} \iff (f, f)' = 0 \iff 2(f, f') = 0 \iff f' \perp f$$

□

3. Касательная прямая к кривой. (Не)зависимость от параметризации

Определение 5 (перепараметризация). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 \vec{f}, \vec{g} — параметризации одной кривой, если

$$\begin{aligned} \exists \alpha : [a, b] \rightarrow [c, d] : f(t) = g(\alpha(t)) \quad \forall t \in [a, b] \\ \alpha(a)=c, \quad \alpha(b)=d \\ \alpha \text{ строго возрастает} \end{aligned}$$

Кривая — класс эквивалентности вектор-функций.

Определение 6. $\vec{f}'(t_0)$ называется касательным вектором.

Утверждение 3. $f \sim g \implies f'(t_0) \parallel g'(\alpha(t_0))$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \vec{f}(t) &= \vec{g}(\alpha(t)) \\ \vec{f}'(t) &= \vec{g}'(\alpha(t)) \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{>0} \implies \vec{f}'(t) \parallel \vec{g}'(\alpha(t)) \end{aligned}$$

□

Определение 7. Касательная — совокупность касательных векторов, противоположных им, и $\vec{0}$.

4. Касательная прямая к кривой. Степень приближения

Уравнение касательной $\vec{v}(t) = \vec{f}'(t_0) \cdot \tau + \vec{f}(t_0)$

Теорема 1. Если δ — расстояние от $f(t)$ до касательной, то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)|} = 0$$

Касательная — единственная прямая, обладающая таким свойством.

Замечание. Под пределом стоит синус зелёного угла на рис. 1

Доказательство.

$$\delta = \frac{\left| \left((f(t) - f(t_0)) \times f'(t_0) \right) \times f'(t_0) \right|}{|f'(t_0)|^2}$$

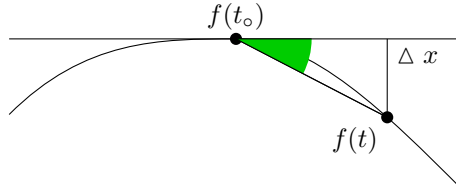


Рис. 1: Теорема о касательной.

Введём такую систему координат, чтобы касательная была осью OX :

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

$$f'(t) = (1, 0, 0), \quad f(t_0) = (0, 0, 0)$$

Посчитаем двойное векторное произведение:

$$(f(t) - f(t_0)) \times f'(t_0) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \times (1, 0, 0) = (0, f_3, -f_2)$$

$$(0, f_3, -f_2) \times (1, 0, 0) = (0, -f_2, f_3)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}}{1}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta^2}{|f(t) - f(t_0)|^2} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_2^2(t) + f_3^2(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)}$$

Неопределённость — $(0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \lim \dots & \xrightarrow{\text{Лопиталь}} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{2f_2f_2' + 2f_3f_3'}{2(f_1f_1' + f_2f_2' + f_3f_3')} \xrightarrow{\text{Лопиталь}} \\ & = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underbrace{f_2'^2 + f_2f_2'' + f_3'^2 + f_3f_3''}_{\rightarrow 1}}{\underbrace{f_1'^2 + f_1f_1'' + f_2'^2 + f_2f_2''}_{\rightarrow 0} + \underbrace{f_3'^2 + f_3f_3''}_{\rightarrow 0}} = 0 \iff \vec{f}'(t) \parallel (1, 0, 0) \end{aligned}$$

□

5. Длина кривой

T — разбиение:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Найдём длину ломаной:

$$\sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| \text{ — интегральная сумма}$$

Длина кривой — предел интегральных сумм:

Определение 8.

$$l := \lim_{\max\{t_i - t_{i-1}\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})|$$

$$l := \sup \sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})|$$

Утверждение 4. Определения равносильны (если предел существует)

Доказательство.

- $\sup \geq \lim$ — очевидно

- $\lim \geq \sup$
 \sup — тоже какой-то частичный предел.
 Пусть есть подпоследовательность разбиений таких, что длина ломаной стремится к \sup .
 Разобьём максимальную (по длине) t_i на n равных частей.
 При этом по неравенству треугольника, длина ломаной не уменьшилась, а $\max \{t_i - t_{i-1}\}$ теперь стремится к нулю.

□

Определение 9. Кривая называется спрямляемой, если $l < \infty$.

Теорема 2. $f \in C^1([a, b]) \implies f$ спрямляема и

$$l = \int_a^b |f'(t)| \, dt$$

Доказательство. Докажем формулу. Из неё будет следовать, что кривая спрямляема.
 Обозначим

$$\Delta_i t := t_i - t_{i-1}, \quad \Delta_i f := f(t_i) - f(t_{i-1}), \quad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b |f'(t)| \, dt - \sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| \right| & \stackrel{\text{H.-Л.}}{=} \left| \int_a^b |f'(t)| \, dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t + \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \\ & \leq \underbrace{\left| \int_a^b |f'(t)| \, dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t \right|}_I + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n (|f'(\tau_i)| \Delta_i t - |f(t_i) - f(t_{i-1})|) \right|}_II \end{aligned}$$

- $I < \varepsilon$ (фиксируем ε и по нему подбираем мелкость разбиения)

•

$$\begin{aligned} II &= \sum_{i=1}^n \left(|f'(\tau_i)| \Delta_i t - |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right) \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{i=1}^n \left| |f'(\tau_i)| \Delta_i t - |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| \stackrel{\text{H.-Л.}}{=} \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\tau_i) \, dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) \, dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(\tau_i) - f'(t)| \, dt < \quad \text{при достаточно мелком разбиении} \\ &< \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon \, dt = \sum \varepsilon \cdot \Delta_i t = \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

□

6. Длина кривой в различных координатах

Способы задания кривой

1. Явно:
 $y = f(x)$ (плоская кривая)

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$$

2. Явно в полярных координатах:

$$r = r(\varphi)$$

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$x'_\varphi = r' \cos \varphi - r \sin \varphi, \quad y'_\varphi = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2 + y'^2} &= \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi - 2r'r \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \varphi + 2r'r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{r'^2 + r^2} \end{aligned}$$

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2} \, d\varphi$$

3. Неявно:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$F(x, y) = 0$$

Воспользуемся теоремой о неявной функции:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{кроме } x = \pm 1, \, y = 0$$

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$$

$$f'(x) = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{F'^2_x}{F'^2_y}} \, dx$$

7. Натуральная параметризация кривой

Определение 10. Параметризация $\vec{f}(t)$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Теорема 3. Натуральная параметризация существует и единственна (с точностью до начальной точки и направления обхода кривой).

Доказательство.

- Существование

$$s(t) := \int_{t_0}^t |f'(\tau)| \, d\tau \implies s'(t) = |f'(t)|$$

$$\text{Пусть } t(s) := \varphi(s), \quad \varphi = s^{-1}$$

$$t'(s) = \varphi'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|f'(t)|}$$

$$\text{Пусть } \vec{g}(s) := \vec{f}(\varphi(s))$$

$$g'(s) = f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(t)|} = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(\varphi(s))|}$$

$$|g'(s)| = \left| \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \right| = 1 \implies s - \text{натур. параметр}, \quad g(s) - \text{натур. параметризация}$$

- Единственность

Пусть s и t — натуральные параметры

$$g(s) = f(\varphi(s)), \quad t = \varphi(s)$$

$$1 = |g'(s)| = |f'(t) \cdot \varphi'(s)| = |f'(t)| \cdot |\varphi'(s)|$$

При этом, $|f'(t)| = 1$, т. к. t — натур.

$$\implies |\varphi'(s)| = 1 \implies \varphi'(s) = \pm 1 \implies \varphi(s) = \pm s + \text{const}$$

□

8. Репер Френе. Формулы Френе

Пусть s — натуральный параметр

$$\vec{v} := f'(s), \quad |\vec{v}(s)| = 1$$

$$\vec{n} := \frac{\vec{v}'}{|\vec{v}'|} \text{ — единичный}$$

По полезной лемме (лемма 1) $n \perp v$

$$\vec{b} := v \times n$$

Определение 11. Репер Френе: $(\vec{v}, \vec{n}, \vec{b})$ (зависит от t или s)

- \vec{v} — касательный вектор;
- \vec{n} — вектор главной нормали;
- \vec{b} — вектор бинормали.

Замечание. Репер Френе существует только если $\dot{v} \neq \vec{0}$.

В таком случае говорят, что кривая бигулярна.

Из определения \vec{n} получаем первую формулу Френе:

$$\dot{v} = k \cdot \vec{n}$$

Определение 12. $k(s)$ называется кривизной.

Замечание. $k = |\dot{v}|$

Это верно **только** в натуральной параметризации.

Теорема 4. $\dot{b} \parallel n$

Доказательство. $n \perp v$, а $b \perp \dot{b}$ по полезной лемме.

Докажем, что $\dot{b} \perp v$:

$$\dot{b} = (v \times n)' = \underbrace{\dot{v} \times n}_0 + \underbrace{v \times \dot{n}}_{\perp v} \perp v$$

□

Получаем вторую формулу Френе:

$$\dot{b} = -\kappa n$$

Определение 13. κ называется кручением.

Теорема 5. Кривая плоская $\iff \kappa = 0$.

Доказательство.

$$\kappa = 0 \iff_{n \neq 0} \dot{b} = 0 \iff b = \text{const} \iff \text{репер свободно "крутится" вокруг кривой}$$

□

$$\dot{n} = (b \times v)' = \dot{b} \times v + b \times \dot{v} = -\underbrace{\varkappa n \times v}_{-b} + \underbrace{b \times kn}_{-kv} = \varkappa b - kv$$

Получаем третью формулу Френе:

$$\dot{n} = \varkappa b - kv$$

Все формулы Френе:

| | v | n | b |
|-----------|------|--------------|-------------|
| \dot{v} | 0 | k | 0 |
| \dot{n} | $-k$ | 0 | \varkappa |
| \dot{b} | 0 | $-\varkappa$ | 0 |

9. Плоскости, связанные с кривой. Уравнения этих плоскостей

- $\langle v, n \rangle$ — соприкасающаяся плоскость;
- $\langle b, n \rangle$ — нормальная плоскость;
- $\langle v, b \rangle$ — спрямляющая плоскость.

Теорема 6. $f(t)$ — произвольная регулярная параметризация бирегулярной кривой.

$$\implies f''(t) \in \langle v, n \rangle$$

Доказательство. Пусть s — натуральный параметр

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{r} \cdot s'$$

$$r'' = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{df}{dt} s' + \dot{f} \cdot s'' = \ddot{f} \cdot (s')^2 + \dot{f} s'' = k \vec{n} \cdot (s')^2 + v s''$$

$$f'' = k(s')^2 \cdot \vec{n} + s'' \vec{v}$$

То есть, f'' раскладывается по векторам v и n

Причём, если параметризация бирегулярна, то $k(s')^2 \neq 0$

□

Следствие. $\langle v, n \rangle = \langle f'(t), f''(t) \rangle$

Задача 1. Вычислить v, n, b и плоскости для произвольной параметризации $f(t)$.

☐

$$\vec{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}, \quad \vec{b} = \frac{f'' \times f'}{|f' \times f''|}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{v} = \frac{(f' \times f'') \times f'}{|f'| \cdot |f' \times f''|}$$

по следствию

Пусть $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{v} \parallel (x', y', z') = f'$ — вектор нормали к нормальной плоскости

Тогда нормальная плоскость пишется так:

$$\left[x' \Big|_{t_0} (x - x_0) + y' \Big|_{t_0} (y - y_0) + z' \Big|_{t_0} (z - z_0) \right] = 0$$

Соприкасающаяся плоскость — аналогично, но нормальный вектор параллелен \vec{b} , т. е. $f'' \times f'$:

$$\begin{vmatrix} x' \Big|_{t_0} & y' \Big|_{t_0} & z' \Big|_{t_0} \\ x'' \Big|_{t_0} & y'' \Big|_{t_0} & z'' \Big|_{t_0} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

(это — смешанное произведение)

Нормаль к спрямляющей плоскости параллельна \vec{n} , т. е. $(r' \times r'') \times r'$:

$$\left((f' \times f''), f', f \right) = 0$$

$$(f' \times f'') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = (y'z'' - y''z', z'x'' - z''x', x'y'' - x''y')$$

$$\begin{vmatrix} y'|_{t_0} z''|_{t_0} - y''|_{t_0} z'|_{t_0} & z'|_{t_0} x''|_{t_0} - z''|_{t_0} x'|_{t_0} & x'|_{t_0} y''|_{t_0} - x''|_{t_0} y'|_{t_0} \\ x'|_{t_0} & y'|_{t_0} & z'|_{t_0} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

10. Соприкасающаяся плоскость. Порядок её приближения к кривой

Теорема 7. $f(t)$ — бирегулярная параметризация, δ — расстояние от $f(t)$ до соприкасающейся плоскости.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|^2} = 0$$

Соприкасающаяся плоскость — единственная, обладающая таким свойством.

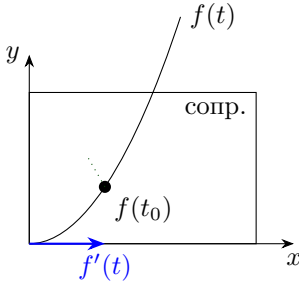


Рис. 2: Удобная система координат

Доказательство. Введём удобную систему координат (рис. 2):

- Соприкасающаяся плоскость — XOY ;
- Касательная — OX ;
- $f(t_0)$ — начало координат;
- $t_0 = 0$;
- $y''(t) \neq 0$;
- $x'(0) \neq 0$.

Пусть $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогда

- $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, т. к. $f(t_0) = r(0)$ — начало координат;
- $y'(0) = z'(0) = 0$, т. к. OX — касательная;
- $z''(0) = 0$, т. к. XOY — соприкасающаяся.

Нужно сосчитать предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(t)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Разложим по Тейлору:

$$x(t) = x'(0)t + \frac{x''}{2}t^2 + o(t^2), \quad y = \underbrace{y'(0)}_0 t + \frac{y''}{2}t^2 + o(t^2) = \frac{y''}{2}t^2 + o(t^2), \quad z(t) = \dots = o(t^2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(t)}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{x'^2(0)t^2 + o(t^2)} = 0$$

□

11. Вычисление кривизны

Задача 2. $f = \vec{f}(t)$

Вычислить кривизну в этой параметризации.

✉

Есть перепараметризация $\vec{f}(t) = \vec{g}(s)$, где s — натуральный параметр.

$$|g'(s)| = 1, \quad k \stackrel{\text{def}}{=} |g''(s)|$$

По теореме о натуральной параметризации (теор. 3),

$$s(t) = \int_{t_0}^t |f'(\tau)| d\tau \implies s'(t) = |f'(t)|$$

$$f(t) = g(s(t))$$

$$f'(t) = g'(s(t)) \cdot s'(t)$$

$$f''(t) = g'' \cdot s'^2 + g' \cdot s''$$

Это почти то, что нам нужно, но мешает $s'' = |f'|'$.

Домножим векторно на $f' = g's'$:

$$f'' \times f' = (g''s'^2) \times (g's') + \underbrace{(g's'') \times (g's')}_{=s'' \cdot s' \cdot (g' \times g') = 0}$$

s' — скалярная функция, её можно вынести за скобки:

$$f'' \times f' = s'^3 \cdot (g'' \times g')$$

$$|f'' \times f'| = |s'|^3 \cdot \underbrace{|g''|}_k \cdot \underbrace{|g'|}_1 \cdot \underbrace{\sin(\widehat{g'', g'})}_1$$

$$|f'' \times f'| = |f'|^3 \cdot k$$

$$K = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

12. Вычисление кривизны в явном виде и в полярных координатах

Примеры (общие формулы для разных способов задания кривой).

1. Кривая задана на плоскости, в явном виде: $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r} = (t, f(t), 0)$$

$$\vec{r}' = (1, f', 0), \quad \vec{r}'' = (0, f'', 0), \quad r' \times r'' = (0, 0, f'')$$

$$k = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

2. В полярных координатах: $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{f}(t) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0), \quad f' = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi, 0)$$

$$|f'| = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

Напоминание. $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + f'g''$

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)}g + \ln^1 f^{(n-1)}g' + \ln^2 f^{(n-2)}g'' + \dots$$

$$f'' = (r'' \cos \varphi - 2r' \sin \varphi - r \cos \varphi, r'' \sin \varphi + 2r' \cos \varphi - r \sin \varphi, 0)$$

Векторно умножаем два вектора с нулевой третьей координатой, получаем вектор с единственной третьей ненулевой координатой:

$$f' \times f'' = \begin{pmatrix} 0, 0, \end{pmatrix}$$

$$(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)(r'' \sin \varphi + 2r' \cos \varphi - r \sin \varphi) - (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)(r'' \cos \varphi - 2r' \sin \varphi - r \cos \varphi)$$

$$|f' \times f''| =$$

$$\begin{aligned} &= |\cancel{r' r'' \cos \varphi \sin \varphi} + 2r'^2 \cos^2 \varphi - \cancel{r' r \cos \varphi \sin \varphi} - r'' r \sin^2 \varphi - \cancel{2r' r \cos \varphi \sin \varphi} + \\ &+ r^2 \sin^2 \varphi - \cancel{r'' r' \cos \varphi \sin \varphi} + 2r'^2 \sin^2 \varphi + \cancel{r' r \sin \varphi \cos \varphi} - r r'' \cos^2 \varphi + \cancel{2r r' \cos \varphi \sin \varphi} + r^2 \cos^2 \varphi| = \\ &= 2r'^2 - r''r + r^2 \end{aligned}$$

$$k = \frac{r''r - 2r'^2 - r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

$$3. f(t) = \begin{pmatrix} x(t), y(t), z(t) \end{pmatrix}$$

$$f' = (x', y', z'), \quad f'' = (x'', y'', z''), \quad f'' \times f' = (y''z' - z''y'; z''x' - x''z'; x''y' - y''x')$$

$$k = \frac{\sqrt{(y''z' - z''y')^2 + (z''x' - x''z')^2 + (x''y' - y''x')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

13. Вычисление кручения

Вычисление кручения в натуральной параметризации.

$$g' = v, \quad g'' = v' = k\vec{n}, \quad g''' = k'n + kn' \stackrel{\text{III Френе}}{=} k'n + k(-k\vec{v} + \kappa\vec{b})$$

$$(g', g'', g''') = (\vec{v}, k\vec{n}, \cancel{k'\vec{n}} - k^2\vec{v} + k\kappa\vec{b}) = k^2 \underbrace{\kappa}_{=1}(v, n, b)$$

$$\kappa = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

$$v = \vec{f}(t) = \vec{g}(s) = g(s(t))$$

$$f' = g' \cdot s'$$

$$f'' = g'' s'^2 + g' s''$$

Напоминание. $(g')' = g'' s'$ (как сложная функция)

$$f''' = g''' \cdot s'^3 + g'' 2s' \cdot s'' + g' s' s'' = g''' s'^3 + 3g'' s' s'' + g' s'''$$

Избавимся от s'' и s''' :

Напоминание. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} + \lambda \vec{c}, \vec{c})$

$$(f', f'', f''') = \left(\vec{g}' s', g'' s'^2 + \cancel{g' s''}, g''' s'^3 + 3\cancel{g'' s' s''} + g' s''' \right) = \underbrace{|f'|}_{s'}^6 (g', g'', g''') = |f'|^6 k^2 \varkappa$$

$$\varkappa = \frac{(f', f'', f''')}{k^2 |f'|^6}$$

Напоминание.

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

$$\varkappa = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

Замечание. Кручение определено только для бирегулярной кривой ($\iff k \neq 0$)

14. Натуральные уравнения кривой

Теорема 8. Кривая задаётся кривизной и кручением (с точностью до положения в пространстве)

Доказательство. Пусть есть две кривые, у которых $k_1 = k_2$ и $\varkappa_1 = \varkappa_2$

Рассмотрим $\vec{g}_1(s); \vec{g}_2(s)$ – натуральные параметризации

Совместим так, чтобы

$$\begin{cases} v_1(s_0) = v_2(s_0) \\ n_1(s_0) = n_2(s_0) \\ b_1(s_0) = b_2(s_0) \end{cases}$$

Это и означает “с точностью до положения в пространстве”

Рассмотрим функцию

$$f(s) = \vec{v}_1(s) \cdot \vec{v}_2(s) + \vec{n}_1(s) \cdot \vec{n}_2(s) + \vec{b}_1(s) \cdot \vec{b}_2(s)$$

$f(s_0) = 3$ (скалярное произведение соотв. функций равно 1)

При этом, $f(s) \leq 3$ (по тем же соображениям)

$f(s) = 3 \iff v_1 = v_2, n_1 = n_2, b_1 = b_2$ в точке s

Хотим доказать, что $f(s) = 3$ везде

Возьмём производную:

$$f'(s) = v'_1 v_2 + v_1 v'_2 + n'_1 n_2 + n_1 n'_2 + b'_1 b_2 + b_1 b'_2$$

Распишем по формуле Френе:

$$f'(s) = k_1 n_1 v_2 + k_2 v_1 n_2 - k_1 v_1 n_2 + \varkappa_1 b_1 n_2 - k_2 n_1 v_2 + \varkappa_2 n_1 b_2 - \varkappa_1 n_1 b_2 - \varkappa_2 b_1 n_2 \stackrel{k_1=k_2}{\varkappa_1=\varkappa_2} = 0$$

□

Часть II

Дифференциальная геометрия поверхностей

15. Касательная плоскость к поверхности

Задание кривой на поверхности. Любая точка кривой лежит на поверхности. Тогда мы можем применить к ней r^{-1} и “спустить” её на D . Получим координаты $u(t), v(t)$. Они называются внутренними координатами кривой на поверхности.

Определение 14. Пусть $u(t), v(t)$ – внутренние координаты кривой на поверхности. $\vec{f}(u(t), v(t))$ – кривая на поверхности. $\frac{d\vec{f}}{dt}\big|_{t=t_0}$ – касательный вектор.

Определение 15. Касательная плоскость к поверхности – множество касательных векторов в данной точке.

Утверждение 5. Это плоскость с базисом $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Доказательство. Распишем и всё получится:

Касательный вектор – $\frac{d\vec{f}}{dt}\big|_{t=t_0}$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}\big|_{t=t_0} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Это ЛК $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$

Верно ли, что $\alpha f_u + \beta f_v$ является касательным вектором?

Верно, для кривой

$$\begin{cases} u = \alpha(t + t_0) \\ v = \beta(t + t_1) \end{cases} \quad \begin{cases} u_t = \alpha \\ v_t = \beta \end{cases}$$

□

16. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма

Пусть кривая задана регулярной параметризацией:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad u = u(t), \quad v = v(t)$$

$$r'_t = (x'_u u' + x'_v v', y'_u u' + y'_v v', z'_u u' + z'_v v') = r'_u u' + r'_v v'$$

$$|r'_t| = \sqrt{(r'_u u' + r'_v v') \cdot (f'_u u' + f'_v v')} = \sqrt{(r'_u)^2 (u')^2 + 2r'_u r'_v u' v' + (r'_v)^2 (v')^2}$$

Определение 16. Обозначим:

$$\begin{cases} E := |r_u|^2 = (r_u, r_u) \\ F := (r_u, r_v) \\ G := |r_v|^2 = (r_v, r_v) \end{cases}$$

Эти коэффициенты зависят от поверхности, а не от кривой.

Найдём длину кривой:

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \left| \frac{dr}{dt} \right| dt = \int_a^b |r_u u_t + r_v v_t| dt = \int_a^b \sqrt{(r_u u_t + r_v v_t, r_u u_t + r_v v_t)} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{(r_u, r_u) u_t^2 + 2(r_u, r_v) u_t v_t + (r_v, r_v) v_t^2} dt = \int_a^b \sqrt{E u_t^2 + 2F u_t v_t + G v_t^2} dt \end{aligned}$$

Определение 17. I форма:

$$I(u', v') = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

17. Изометрия поверхностей. Внутренняя геометрия

Определение 18. Даны поверхности:

$$r_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\Phi : D_1 \rightarrow D_2$ называется изометрией, если длина кривой на $r_1(D_1)$ равна длине кривой на $r_2(\Phi(D_1))$.

Теорема 9. Поверхности изометричны **тогда и только тогда**, когда в некоторой параметризации у них совпадают коэффициенты E, F, G .

Доказательство.

• \Leftarrow :

Формула длины кривой:

$$l = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt$$

Они должны совпасть

$$\bar{\Phi} := r_2 \circ r_1^{-1}$$

• \Rightarrow :

Возьмём кривую

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t_0 \end{cases}$$

Можно НУО считать, что поверхности параметризованы одинаково (иначе перепараметризуем).

$$l_1 = \int_a^b \sqrt{E_1} dt = \sqrt{E_1}(b-a)$$

$$l_2 = \int_a^b \sqrt{E_2} dt = \sqrt{E_2}(b-a)$$

По предположению, они равны

Тем самым $E_1 = E_2$

Аналогично, взяв

$$\begin{cases} u(t) = t_0 \\ v(t) = t \end{cases}$$

получаем $G_1 = G_2$

Взяв

$$\begin{cases} u(t) = t + t_0 \\ v(t) = t + t_1 \end{cases}$$

получаем

$$\int_a^b \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1} dt = \int_a^b \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2} dt \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2$$

□

Замечание. То, что поверхности изометричны, **не** означает, что первые квадратичные формы совпадают. Это лишь значит, что **существует** параметризация, в которой они совпали

Определение 19. Говорят, что характеристика поверхности относится к внутренней геометрии поверхности, если он не меняется при изометрии.

18. Контрпример Шварца

Пример (сапог Шварца). Есть цилиндр

Его можно развернуть в прямоугольник и посчитать площадь:

$$S = 2\pi RH$$

Разобьём на треугольники:

1. Порежем на слои
2. В каждый слой впишем правильный n -угольник
3. Построим антипризму
Антипризма:
 - (а) Берём в верхнем и нижнем основании правильный n -угольник
 - (б) Поворачиваем одно из оснований так, чтобы напротив вершины оказалась середина стороны
 - (с) Соединим вершины
4. Считаем, что высоту мы разбили на k частей, каждая часть представляет собой n -угольную антипризму

Вопрос 1. Сколько в одном слое треугольников?

Ответ. $2n$

Всего $2kn$ треугольников

5. Посчитаем площадь каждого треугольника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}lh$$

Найдём l :

Есть круг радиуса R , мы в него вписали правильный n -угольник, хотим посчитать его сторону.

Угол в центре будет равен $\frac{2\pi}{n}$. Применим теорему косинусов:

$$l^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$l = R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right)} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

Найдём h :

Замечание. Треугольник немножко наклоняется. Направление его высоты не совпадает с направлением образующей цилиндра. $h \neq \frac{H}{k}$

$$a = R - R \cos \frac{\pi}{n}$$

$$h = \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2 \cdot 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$$

$$S \stackrel{?}{=} \lim_{\pi n \rightarrow \infty} 2kn \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2R \sin \frac{\pi}{n}}_{\sim \pi/n} \cdot \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = 2\pi RH \lim \sqrt{1 + \frac{k^2}{H^2} \cdot 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$$

Это равно $2\pi RH$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{k^2}{H^2} \cdot 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\frac{\pi^4 R^2}{4H^2} \cdot \frac{k^2}{n^4} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

То есть, $k \stackrel{?}{=} o(n^2)$

Значит, разбивая на много низких, крупно нарезанных антипризм, получаем неправильную площадь

19. Площадь поверхности. Модуль вектора $r_u \times r_v$

Определение 20. Разбиваем поверхность на многоугольники и проецируем их на свои касательные плоскости. Складываем площади и переходим к пределу.

Теорема 10.

$$S = \iint_D \sqrt{r_u \times r_v} \, du \, dv$$

Без доказательства. На самом деле, это определение двойного интеграла. \square

Теорема 11.

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

Доказательство. Следует из леммы: \square

Лемма 2. $|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}$

Доказательство.

$$(r_u \times r_v, r_u \times r_v) = |r_u \times r_v|^2 \stackrel{?}{=} EG - F^2$$

$$r_u = (x_u, y_u, z_u), \quad r_v = (x_v, y_v, z_v)$$

$$r_u \times r_v = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

$$(r_u \times r_v)^2 = (y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2$$

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 = \\ &= \underbrace{x_u^2 x_v^2 + x_u^2 y_v^2 + \dots + z_u^2 z_v^2}_{9 \text{ слагаемых}} - x_u^2 x_v^2 - y_u^2 y_v^2 - z_u^2 z_v^2 - 2x_u x_v y_u y_v - 2x_u x_v z_u z_v - 2y_u y_v z_u z_v \end{aligned}$$

Подчёркнутые (вместе с ещё одним) запаковываются в квадрат разности. Остальные – аналогично. \square

20. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма

Кривая задана внутренним уравнением в натуральной параметризации:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$$

$$\vec{k} = \vec{r}''(s) \quad (k = |\vec{k}|)$$

$$r'_s = r'_u u'_s + r'_v v'_s$$

$$r''(s) = r_{uu} u'^2 + 2r_{uv} u' v' + r_{vv} v'^2 + r_u u'' + r_v v''$$

Хотим избавиться от подчёркнутых слагаемых. Домножим равенство на вектор нормали ($n \perp r_u$, $n \perp r_v$)

$$k \cos \theta = \vec{r}''(s) \cdot \vec{n} = \underbrace{(r_{uu}, n)}_L \cdot u'^2 + 2 \underbrace{(r_{uv}, n)}_M \cdot u' v' + \underbrace{(r_{vv}, n)}_N \cdot v'^2$$

где θ – угол между вектором кривизны кривой и вектором нормали к поверхности
 Получили проекцию кривизны на вектор нормали
 L, M, N зависят только от поверхности (не от кривой)
 Получаем следующую формулу:

Теорема 12. $k \cos \theta = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$, если кривая в натуральной параметризации

Определение 21. L, M, N – коэффициенты второй квадратичной формы

Определение 22. $k \cos \theta$ называется нормальной кривизной поверхности в направлении (u', v')

21. Теорема Мёнье. Кривизна кривой на поверхности в произвольной параметризации

Теорема 13.

$$k \cos \theta = \frac{\Pi(u', v')}{I(u', v')} = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$$

Доказательство. Будем действовать в натуральной параметризации

Пусть $s = \varphi(t)$

$$\varphi'(t) = |r'_t| = |r_u u'_t + r_v v'_t|$$

$$u'_t = u'_s s'_t = u'_s \cdot |r'_t|$$

$$u'_s = \frac{u'_t}{|r'_t|}, \quad v'_s = \frac{v'_t}{|r'_t|}$$

$$k \cos \theta = L \frac{u_t'^2}{|r'_t|^2} + 2M \frac{u'_t v'_t}{|r'_t|^2} + N \frac{v_t'^2}{|r'_t|^2} = \frac{\Pi(u'_t, v'_t)}{|r'_t|^2}$$

Мы знаем, что $|r'_t|^2 = I(u'_t, v'_t)$, так как

$$\int |r'_t| \, dt - \text{длина кривой} = \int \sqrt{Eu_t'^2 + 2Fu'_t v'_t + Gv_t'^2} \, dt$$

□

Определение 23. Сечение поверхности плоскостью, содержащей нормаль поверхности в заданной точке, образует кривую, которая называется нормальным сечением.

Определение 24. Пусть l – прямая, лежащая в касательной плоскости.

Сечение плоскостью, содержащей нормаль и прямую l образует некую кривую на поверхности.
 Её кривизна $k_n(l)$ – *нормальная кривизна* поверхности по направлению l .

Определение 25. Минимальная и максимальная нормальные кривизны на поверхности называются *главными кривизнами*.

Обозначение. k_1, k_2

Определение 26. Направления, по которым эти кривизны достигаются, называются *главными направлениями*.

Определение 27. Гауссова кривизна – $K = k_1 k_2$.

Определение 28. Средняя кривизна:

$$\frac{k_1 + k_2}{2}$$

Теорема 14 (Мёнье). Если θ — угол между нормалью к кривой и нормалью к поверхности, то

$$k_n(l) = k \cos \theta$$

TODO:

22. Соприкасающийся параболоид. Типы точек

В этом параграфе рассматриваем локальное поведение поверхности в окрестности какой-то точки.

Рассмотрим векторы $r, r_u, r_v, r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}$.

Введём точку $M = (0, 0, 0)$.

Касательная плоскость — XOY .

$$\vec{n} \parallel OZ$$

По теореме о неявной функции поверхность в окрестности M задаётся $z = f(x, y)$.

Разложим по Тейлору:

$$z = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{f_{xx}(0, 0)}{2}x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{f_{yy}(0, 0)}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$$

$$f(0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

Определение 29.

$$z = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2$$

$$A = f_{xx}(0, 0), \quad B = f_{xy}(0, 0), \quad C = f_{yy}(0, 0)$$

Это называется соприкасающийся параболоид

Можем сделать поворот XOY и тогда:

$$z = \tilde{A}\tilde{x}^2 + \tilde{C}\tilde{y}^2$$

$$2\tilde{A} = f_{xx}(0, 0), \quad 2\tilde{C} = f_{yy}(0, 0)$$

Определение 30 (классификация).

- $\tilde{A} = \tilde{C} > 0$
Эллиптический параболоид
Эллиптическая точка
- $\tilde{A} \cdot \tilde{C} < 0$
Гиперболический параболоид
Гиперболическая точка
- $\tilde{A} \cdot \tilde{C} = 0$
 - Параболический параболоид
Параболическая точка
 - Плоскость
Точка уплощения
- $\tilde{A} = \tilde{C}$
Параболоид вращения
Точка округления

23. Совпадение характеристик у поверхности и соприкасающегося параболоида

Теорема 15. У поверхности и соприкасающегося параболоида одинаковые E, F, G, L, M, N в точке

Доказательство. $z = f(x, y)$ в окрестности точки

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} u, v, f(u, v) \end{pmatrix}$$

$$r_u = (1, 0, f_u), \quad r_v = (0, 1, f_v), \quad r_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad \dots$$

Это верно как для соприкасающегося параболоида, так и для поверхности

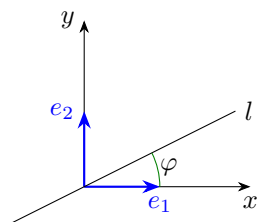
$$\vec{n} = (0, 0, 1) \text{ для обеих поверхностей}$$

□

24. Теорема Эйлера

Теорема 16 (Эйлера). Если θ — угол между l и главным направлением e_1 , то

$$k_n(l) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$



Доказательство. Выберем такую систему координат, что k_1, k_2 — кривизны в направлениях OX и OY соответственно. Тогда l задаётся как

$$\begin{cases} x(t) = t \cos \theta \\ y(t) = t \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \cos \theta \\ y' = \sin \theta \end{cases}$$

NB. θ фиксированный.

$$k_n(l) \stackrel{\text{т. Мёнье}}{=} k \cos \theta \stackrel{\text{т. 13}}{=} \frac{\Pi(x', y')}{\text{I}(x', y')} = \frac{\Pi(\cos \theta, \sin \theta)}{\text{I}(\cos \theta, \sin \theta)} = \frac{L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta}{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta}$$

Заменим поверхность на соприкасающийся параболоид:

$$k_n(l) = \frac{2A \cos^2 \theta + 2C \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 2A \cos^2 \theta + 2C \sin^2 \theta$$

При разных значениях θ :

- $\theta = 0 \implies 2A = k_1$
- $\theta = \frac{\pi}{2} \implies 2C = k_2$

Докажем, что k_1, k_2 — главные кривизны:
 Для этого исследуем $k_n(l)$ на минимум и максимум:

$$k_n(l) = k_1 \cos^2 \theta + k_2(1 - \cos^2 \theta) = (k_1 - k_2) \cos^2 \theta + k_2$$

- Если $k_1 \geq k_2$:
 - минимум при $\cos^2 \theta = 0$, $k_n = k_2$;
 - максимум при $\cos^2 \theta = 1$, $k_n = k_1$.
- Если $k_1 < k_2$, то максимум и минимум меняются местами.

□

25. Следствия из теоремы Эйлера

Следствие. Главные направления перпендикулярны

Следствие. Направления θ и $\pi - \theta$ имеют одинаковые нормальные кривизны.

26. Вычисление главных кривизн. Формула для гауссовой кривизны

Пусть $k := k_n(l)$ для некоторого l
 Введём замену $x = \frac{\xi}{\mu}$ (см следующий вопрос):

$$k = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}$$

$$Lx^2 + 2Mx + N = k(Ex^2 + 2Fx + G)$$

При фиксированном k это — квадратное уравнение:

$$(L - kE)x^2 + 2(M - kF)x + (N - kG) = 0$$

- Если k — не главная кривизна, то у уравнения 2 решения.
- Если k — главная кривизна, то у уравнения 1 решение.
- Если k не кривизна, то у уравнения нет решений.

Мы ищем главные кривизны, так что $D/4 = 0$, то есть

$$(M - kF)^2 - (L - kE)(N - kG) = 0$$

$$k^2(F^2 - EG) - k(2MF - LG - EN) + (M^2 - LN) = 0$$

k_1, k_2 — корни соответствующего уравнения

$$K = k_1 k_2 = \frac{M^2 - LN}{F^2 - EG} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det \Pi}{\det \Gamma}$$

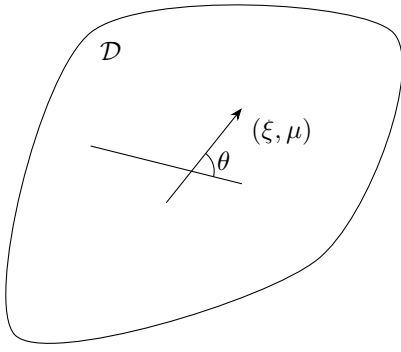
$$H = \frac{2MF - LG - EN}{2(F^2 - EG)}$$

27. Вычисление главных направлений

Выберем направление (ξ, μ) в области \mathcal{D} :

Введём замену $x := \frac{\xi}{\mu}$

$$k_n(\xi, \mu) \stackrel{\text{т. Мёнье}}{=} \frac{\Pi(\xi, \mu)}{\Gamma(\xi, \mu)} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\mu + N\mu^2}{E\xi^2 + 2F\xi\mu + G\mu^2} = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}$$



Хотим вычислить главные направления, то есть понять, при каких x параметры ξ, μ задают главные направления, т. к. $x = \operatorname{tg} \theta$. Найдём максимум и минимум:

$$(k_n(x))' = \frac{(2Lx + 2M)(Ex^2 + 2Fx + G) - (2Ex + 2F)(Lx^2 + 2Mx + N)}{(Ex^2 + 2Fx + G)^2} = 0$$

$$Ex^2 + 2Fx + G > 0, \quad \text{т. к. } \frac{D}{4} = F^2 - EG < 0, \quad \text{т. к. } \sqrt{EG - F^2} = |r'_u \times r'_v|$$

Значит, нас интересует

$$(Lx + M)(Ex^2 + 2Fx + G) - (Ex + F)(Lx^2 + 2Mx + N) = 0$$

$$2LFx^2 + LGx + MEx^2 + 2MFx + MG - 2MEx^2 - NEx - FLx^2 - 2FMx - FN = 0$$

$$(FL - ME)x^2 + (LG - NE)x + (MG - FN) = 0$$

Сделаем обратную замену и домножим на μ^2 :

$$(FL - ME)\xi^2 + (LG - NE)\xi\mu + (MG - FN)\mu^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & -\xi\mu & \mu^2 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0$$

28. Лемма о смешанных произведениях

Лемма 3 (о смешанных произведениях).

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot (\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}) = \begin{vmatrix} u \cdot l & u \cdot m & u \cdot n \\ v \cdot l & v \cdot m & v \cdot n \\ w \cdot l & w \cdot m & w \cdot n \end{vmatrix}$$

(в правой части стоят скалярные произведения)

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot (\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left| \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} u \cdot l & u \cdot m & u \cdot n \\ v \cdot l & v \cdot m & v \cdot n \\ w \cdot l & w \cdot m & w \cdot n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Второй определитель транспонирован, т. к. он при этом не меняется. \square

29. Блистательная теорема Гаусса

Теорема 17 (Egregium). Гауссова кривизна зависит только от E, F, G и их производных.

Доказательство. Достаточно доказать, что $LN - M^2$ зависит только от I, т. к.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

По лемме 2, $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = EG - F^2$

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = \frac{(r_{uu}, r_u, r_v)}{EG - F^2}$$

Аналогично,

$$M = \frac{(r_{uv}, r_u, r_v)}{EG - F^2}, \quad N = \frac{(r_{vv}, r_u, r_v)}{EG - F^2}$$

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \cdot \left((r_{uu}, r_u, r_v) \cdot (r_{vv}, r_u, r_v) - (r_{uv}, r_u, r_v)^2 \right) \stackrel{\text{ЛЕММА}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} r_{uu}r_{vv} & r_{uu}r_u & r_{uu}r_v \\ r_u r_{vv} & r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_{vv} & r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}r_{uv} & r_{uv}r_u & r_{uv}r_v \\ r_u r_{uv} & r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_{uv} & r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{uu}r_{vv} & r_{uu}r_u & r_{uu}r_v \\ \cdot & E & F \\ \cdot & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & E & F \\ \cdot & F & G \end{vmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

$$E_u = (r_u \cdot r_u)_u = 2r_u r_{uu}$$

$$G_v = (r_v \cdot r_v)_v = 2r_v r_{vv}$$

$$E_v = 2r_u r_{uv}$$

$$G_u = 2r_v r_{vu}$$

$$F_u = (r_u \cdot r_v)_u = r_{uu}r_v + r_u + r_{uv}$$

$$r_v r_{uu} = F_u - r_u r_{uv} = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$F_v = r_{uv}r_v + r_u r_{vv}$$

$$r_u r_{vv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$(1) = \begin{vmatrix} r_{uu}r_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} =$$

$r_{uu}r_{vv}$ и r_{uv}^2 не вычисляются по-отдельности. Распишем определители по первой строке:

$$= r_{uu} \cdot r_{uv} \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \dots - r_{uv}^2 \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} + \dots = (r_{uu}r_{vv} - r_{uv}^2) \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \dots$$

Пропущенные члены зависят только от II. Осталось доказать, что скобка зависит только от II:

$$F_{uv} = r_{uuv}r_v + r_{uu}r_{vv} + r_{uv}r_{uv} + r_u r_{uvv}$$

$$G_{uu} = 2r_{uv}r_{uv} + 2r_v r_{uuv}$$

$$E_{vv} = 2r_{uv}r_{uv} + 2r_u r_{uvv}$$

$$F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} - \frac{1}{2}E_{vv} = r_{uu}r_{vv} - r_{uv}r_{uv}$$

□

30. Деривационные формулы

Разложим вторые производные по базису из первых и \vec{n} :

$$r_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_v + L \vec{n}$$

$$r_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_v + M \vec{n}$$

$$r_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + N \vec{n}$$

Коэффициенты при \vec{n} находятся скалярным умножением на \vec{n} , например,

$$\underbrace{r_{uu} \cdot \vec{n}}_L = \underbrace{\Gamma_{11}^1 \vec{r}_u \cdot \vec{n}}_0 + \underbrace{\Gamma_{11}^2 \vec{r}_v \cdot \vec{n}}_0 + \underbrace{A \vec{n} \cdot \vec{n}}_1 \implies A = L$$

Γ_{ij}^k — функции u и v . Они называются *символами Кристоффеля*.

31. Коэффициенты в разложении n_u, n_v

Разложим производные \vec{n} по базису из производных \vec{r} и \vec{n} :

Производная единичного вектора перпендикулярна самому вектору, так что n_u, n_v не зависят от \vec{n} :

$$n_u = ar_u + br_v, \quad n_v = cr_u + dr_v$$

Домножим первое уравнение на r_u и r_v :

$$\begin{cases} n_u \cdot r_u = ar_u^2 + br_ur_v = aE + bF \\ n_u \cdot r_v = ar_ur_v + br_v^2 = aF + bG \end{cases}$$

Решим методом Крамера:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} n_ur_u & F \\ n_ur_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} E & n_ur_u \\ F & n_ur_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} n_v \cdot r_u = cE + dF \\ n_v \cdot r_v = cF + dG \end{cases}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} n_vr_u & F \\ n_vr_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}, \quad d = \frac{\begin{vmatrix} E & n_vr_u \\ F & n_vr_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

32. Модуль $n_u \times n_v$

Теорема 18.

$$|n_u \times n_v| = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Доказательство.

$$n_u = Ar_u + Br_v$$

$$n_v = Cr_u + Dr_v$$

$$n_u \times n_v = (Ar_u + Br_v) \times (Cr_u + Dr_v) = r_u \times r_v (AD - BC)$$

$$|n_u \times n_v| = \underbrace{|r_u \times r_v|}_{\sqrt{EG-F^2}} \cdot |AD - BC|$$

$$0 \stackrel{\text{касательный вектор на нормальный}}{=} (\vec{r}_u \cdot \vec{n})_u = r_{uu} \cdot n + r_u \cdot n_u \stackrel{\text{def } L}{=} L + r_u \cdot n_u$$

Аналогично,

$$0 = (r_v \cdot n)_u \stackrel{\text{def } M}{=} M + r_v \cdot n_u$$

$$\implies \begin{cases} AE + DF = n_u \cdot r_u = -L \\ AF + BG = n_u \cdot r_v = -M \end{cases}$$

$$A = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, \quad B = \frac{FL - EM}{EG - F^2}$$

Аналогично найдём C и D :

$$\begin{cases} CE + DF = n_v \cdot r_u = -M \\ CF + DG = n_v \cdot r_v = -N \end{cases}$$

$$C = \frac{FN - GM}{EG - F^2}, \quad D = \frac{FM - EN}{EG - F^2}$$

$$\begin{aligned} AD - BC &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left((FM - GL)(FM - FN) - (FL - EM)(FN - GM) \right) = \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left(F^2 M^2 - \cancel{FMEN} - \cancel{GFELM} + GLEN - F^2 LN + \cancel{EGLM} + \cancel{EFMN} - EGM^2 \right) = \\ &= \frac{(EG - F^2)(LN - M^2)}{(EG - F^2)^2} \end{aligned}$$

□

33. Уравнения Петерсона—Майнард—Кодацци

Вспомним, как мы вводили симолы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + Ln \\ r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + Mn \\ r_{uvv} &= \Gamma_{11v}^1 r_u + \Gamma_{11}^1 r_{uv} + \Gamma_{11v}^2 r_v + \Gamma_{11}^2 r_{vv} + L_v n + L n_v \\ &\parallel \\ r_{uvv} &= \Gamma_{12u}^1 r_u + \Gamma_{12}^1 r_{uu} + \Gamma_{12u}^2 r_v + \Gamma_{12}^2 r_{uv} + M_u n + M n_u \end{aligned}$$

Домножим последние два выражения скалярно на n и приравняем:

$$\Gamma_{11}^1 \cdot M + \Gamma_{11}^2 \cdot N + L_v = \Gamma_{12}^1 \cdot L + \Gamma_{12}^2 M + M_u$$

Обычно это записывается как

$$L_v - M_u = \Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M - \Gamma_{11}^1 M - \Gamma_{11}^2 N$$

Аналогично,

$$r_{uv} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + M_n, \quad r_{vv} = \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + M_n$$

Дифференцируем первое по v , второе — по u , домножаем оба на n , приравниваем:

$$\Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N + M_v = \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M + N_u$$

$$M_v - N_u = \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M - \Gamma_{12}^1 M - \Gamma_{12}^2 N$$

34. Символы Кристоффеля относятся к внутренней геометрии

Теорема 19. Γ_{ij}^k относятся к внутренней геометрии.

Доказательство.

$$r_{uu} = \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + Ln \quad \left| \cdot r_u \right| \quad \left| \cdot r_v \right|$$

$$\begin{cases} r_{uu} \cdot r_v = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ r_{uu} \cdot r_v = \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G \end{cases}$$

$$E_u = (r_u \cdot r_u)_u = 2r_{uu} \cdot r_u$$

$$F_u = (r_u \cdot r_v)_u = r_{uu} r_v + r_u r_{uv}$$

$$E_v = (r_u \cdot r_u)_v = 2r_{uv} r_u$$

$$r_{uu}r_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}$$

Остальные — аналогично. □

35. Геодезическая кривизна относится к внутренней геометрии

Есть поверхность. На ней есть кривая. Есть вектор кривизны — $\vec{k} = k \cdot \vec{n}_1$ (n_1 — вектор нормали к кривой).

Определение 31. k_g — проекция \vec{k} на касательную плоскость.
Можно рассматривать вектор или скаляр.

Утверждение 6. $k^2 = k_n^2 + k_g^2$

Доказательство. $k_n = \text{Пр}_{n_2} k$, где n_2 — вектор нормали к поверхности.
Тогда утверждение получается по теореме Пифагора. □

Теорема 20. k_g относится к внутренней геометрии.

Доказательство.

$$u = u(s), \quad v = v(s)$$

S — постоянный параметр

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{d^2 r(u(s); v(s))}{ds^2} = \frac{d}{ds}(r_u \cdot u_s + r_v \cdot v_s) = \vec{r}_{uu}u_s^2 + 2\vec{r}_{uv}u_s v_s + \vec{r}_{vv}(v_s)^2 = \\ &= (\Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + Ln)u_s^2 + 2(\Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + Mn)u_s v_s + (\Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + Nn)v_s^2 \\ \vec{k}_g &= \underbrace{(\Gamma_{11}^1 u_s^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_s v_s + \Gamma_{22}^1 v_s^2)}_{\text{зависит от I}} \cdot r_u + \underbrace{(\Gamma_{11}^2 u_s^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_s v_s + \Gamma_{22}^2 v_s^2)}_{\text{зависит от II}} \cdot r_v \end{aligned}$$

□

36. Вычисление геодезической кривизны

Теорема 21.

$$k_g = \frac{(r''_{tt}, r'_t, n)}{|r'_t|^3}$$

Доказательство. Пусть $r''_{tt} = r''_1 + r''_2$, где $r''_1 \perp n$, $r''_2 \parallel n$

$$r' \perp n$$

$$r''_{tt} \times r'_t = \underbrace{r''_1 \times r'_t}_{\parallel n} + \underbrace{r''_2 \times r'_t}_{\perp n}$$

$$k = \frac{|r'' \times r'|}{|r'|^3}$$

Утверждение 7.

$$k_g \stackrel{?}{=} \frac{\text{Пр}_{\vec{n}}(r'' \times r')}{|r'|^3} = \frac{(r'' \times r') \cdot n}{|n| \cdot |r'|^3} = \frac{(r'', r', n)}{|r'|^3}$$

Доказательство. Кривизна — проекция r'' на вектор нормали к кривой, а значит,

$$\begin{aligned} r'' \times r' \parallel \vec{b} &\implies (r'' \times r') \times r' \perp \vec{b}, \perp \vec{v} \implies \perp \vec{n} \\ &\implies \vec{k} = \frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4} \\ |(r'' \times r') \times r'| &= |r'' \times r'| \cdot |r'| \cdot \underbrace{\sin \alpha}_{1, \text{ т. к. } \alpha = \pi/2} \\ &\implies k = \frac{|r'' \times r'|}{|r'|^3} = \frac{|(r'' \times r') \times r'|}{|r'|^4} \\ \text{Пр}_{\text{кас. пл.}} \vec{k} &= \frac{\left((r_1'' + r_2'') \times r' \right) \times r'}{|r'|^4} = \underbrace{\frac{(r_1'' \times r') \times r'}{|r'|^4}}_{\perp n} + \underbrace{\frac{(r_2'' \times r') \times r'}{|r'|^4}}_{\parallel n} = \frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4} \\ k_g &= \left| \text{Пр}_{\text{кас. пл.}} \vec{k} \right| = \frac{|r_1'' \times r'| \cdot |r'|}{|r'|^4} = \frac{|r_1'' \times r'|}{|r'|^3} = \frac{(r'', r', r)}{|r'|^3} \end{aligned}$$

□

□

37. Равносильные определения геодезической

Теорема 22. Задана кривая на поверхности. Следующие определения геодезических линий равносильны:

1. $k_g = 0$;
2. вектор главной нормали к кривой параллелен нормали к поверхности;
3. соприкасающаяся плоскость кривой содержит нормаль к поверхности;
4. спрямляющая плоскость кривой является касательной плоскостью к поверхности;
5. k — min для всех кривых в данном направлении;
- (6). локально кратчайшие линии.

Доказательство. **TODO:** Очевидно (действительно 😊)
Шестое — пока что не доказываем.

□

38. Существование геодезических в данном направлении

Утверждение 8 (из дифуров). $y'' = f(x, y, y')$, f непр. по каждому аргументу
 \implies решение существует и единственно (локально).

Теорема 23. В любой точке в любом направлении можно провести ровно одну геодезическую (локально).

Доказательство. Условие геодезической — $k_g = 0$, т. е. $(r_{tt}'', r_t', n) = 0$ — это дифур второго порядка. Надо доказать, что у него существует единственное решение.

Нам надо разрешить дифур относительно r'' .

$$\begin{cases} u = t \\ v = \varphi(t) \end{cases}$$

Нужно доказать, что существует такая φ .

$$r'_t(u, v) = r_u \cdot u' + r_v \cdot v' = r_u + r_v \varphi'$$

$$r''_{tt} = r_{uu}u'^2 + 2r_{uv}u'v' + r_{vv}v'^2 + r_u u'' + r_v v'' = r_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2 + r_v \varphi''$$

$$\begin{aligned} 0 = (r'', r', n) &= (r_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2 + r_v \varphi'', r_u + r_v \varphi', n) = \\ &= \underbrace{(r''_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2, r_u + r_v \varphi', n)}_I + \underbrace{(r_v \varphi'', r_u + r_v \varphi', n)}_{II} \end{aligned}$$

$$II = \varphi'' \cdot (r_v, r_u + r_v \varphi', n) = -\varphi'' \cdot (r_u, r_v, n)$$

$$\begin{aligned} (\text{т. к. } (r_v, r_u + r_v \varphi', n) &= (r_v, r_u, n) + \underbrace{(r_v, r_v \varphi', n)}_{0, \text{ т. к. } r_v \parallel r_v \varphi'} \\ &= (r_v, r_u, n) \end{aligned}$$

$$\varphi'' = \frac{I}{(r_u, r_v, n)}$$

$(r_u, r_v, n) \neq 0$ (т. к. r_u, r_v, n — базис, т. к. поверхность регулярная).

Значит, у такого дифура есть ровно одно решение с начальными данными

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \varphi'(t_0) = \varphi_1 \end{cases}$$

□

39. Полугеодезическая параметризация

Полугеодезическая параметризация: $E = 1, F = 0, G > 0$

Теорема 24. Полугеодезическая параметризация всегда существует (локально).

Доказательство.

$$(r_u \cdot r_v)_u = \underbrace{r_{uu} \cdot r_v}_0 + r_u \cdot r_{uv} = \cancel{f'' \cdot g'} + f' \cdot r_{uv} = \underbrace{f' \cdot (f')_v}_0 = 0$$

$r_{uu} = f''$ — вектору главной нормали для f (т. к. f в натуральной параметризации) \parallel нормали к поверхности (т. к. f — геодезическая)

r_v — касательный вектор.

На первой лекции доказывали полезную лемму:

$$|f'| = 1 \implies \frac{\partial f'}{\partial v} \perp f'$$

$$F = r_u \cdot r_v = \text{const}$$

Но при $u = 0 \quad F = 0$

$$\implies F = 0 \text{ всюду}$$

□

40. Геодезические как локально кратчайшие

Доказательство.

Рассмотрим полугеодезическую параметризацию.

Возьмём точки A, B на геодезической.

Пусть $(u(t), v(t))$ — внутренние координаты некоторой кривой, соединяющей A и B . Её длина:

$$\begin{aligned} l &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} u'^2 + G v'^2 \, dt \geq \int_{t_0}^{t_1} u'^2 \, dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} u' \, dt = u(t_1) - u(t_0) = \text{длина геодезической} \end{aligned}$$

Мы доказали, что геодезическая — кратчайшая. В другую сторону — без доказательства. \square