Оглавление

Глава 1

1.1 Эллипс (продолжение)

Теорема 1.

$$(x_0, y_0) \text{ лежит на эллипсе } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\implies \text{касательная в точке } (x_0, y_0) \text{ выражается формулой } \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Доказательство. Прямая проходит через точку (x_0, y_0)

$$A = \frac{x_0}{a^2} \qquad B = \frac{y_0}{b^2} \qquad C = -1$$

$$A^2a^2 + B^2b^2 = \frac{x_0^2}{a^2}a^2 + \frac{y_0^2}{b^2}b^2 = 1 = C^2$$

□

Теорема 2 (Оптическое свойтсво эллипса)**.** F_1, F_2 – фокусы, M – точка на эллипсе, $\vec{n}$ – вектор нормали к касательной в точке M

$$\implies \angle(\overrightarrow{F_1M}; \vec{n}) = \angle(\overrightarrow{F_2M}; \vec{n})$$

Доказательство.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$\vec{n} = \frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2})$$

$$\overrightarrow{F_1M} = (x_0 + c; y_0)$$

$$\overrightarrow{F_2M} = (x_0 - c; y_0)$$

$$\frac{(x_0 + c; y_0) \cdot (\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{a^2})}{|F_1M| \cdot |M|} \stackrel{?}{=} \frac{(x_0 - c; y_0) \cdot (\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2})}{|F_2M| \cdot |M|}$$

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{cx_0}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}{a + ex_0} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{cx_0}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}{a - ex_0}$$

$$\frac{1 + \frac{ex_0}{a}}{a + ex_0} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{ex_0}{a}}{a - ex_0}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

□

1.2 Гипербола

Определение 1. ГМТ $M : |F_1M - f_2M| = 2a$ называется гиперболой

Определение 2. ГМТ $M : \frac{FM}{|M,l|} = e > 1$ называется гиперболой. e называется эксцентриситетом

Определение 3. В подходящих координатах гипербола задаётся как $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Теорема 3. Все три определения равносильны

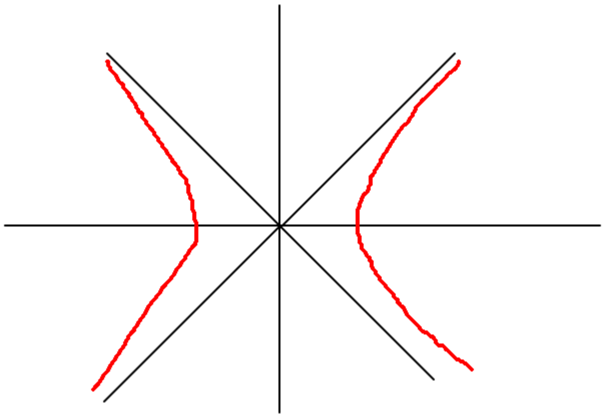


Рис. 1.1: Гипербола

Утверждение. Асимптоты: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Доказательство.

$$y = \pm b\sqrt{-1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}$$

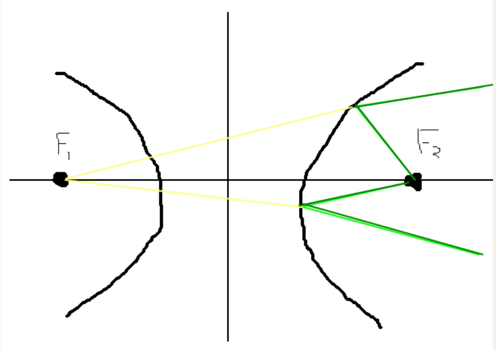
$$l = \lim_{x\to\infty} (\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \mp \frac{b}{a}x) = \pm\frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \pm\frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{-a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$$

□

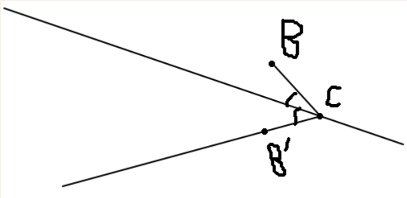
Теорема 4. $Ax + By + C = 0$ касается в точке (x_0, y_0) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$$

Теорема 5 (Оптическое свойство гиперболы).



Лемма 1.



$$|AC - BC| \to \max$$

$$|AC - B'C| \leq AB'$$

1.3 Парабола

Определение 4. Есть точка F и прямая l
ГМТ $M : \frac{FM}{|M,l|} = l = 1$ называется параболой

Определение 5. В подходящих координатах парабола задаётся как $y^2 = 2px$

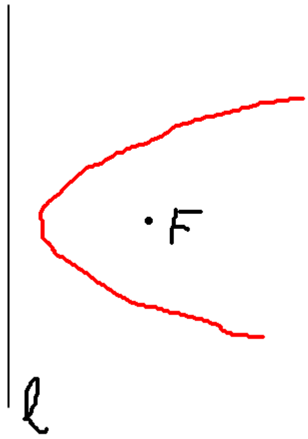


Рис. 1.2: Парабола

Фокус $F(\frac{p}{2};0)$, $l : x = -\frac{p}{2}$

Теорема 6. Определения равносильны

Доказательство.

$$F(\frac{p}{2}) \qquad l : x = -\frac{p}{2} \qquad M(x, y)$$

$$FM = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \stackrel{?}{=} |M, l| = x + \frac{p}{2}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

□