Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

1.1. Семейства функций

Определение 1. $E \neq \emptyset$ – произвольное множество, $\quad Y \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$
Функции $f : E \times Y \to \mathbb{R}$ будем называть семейством функций, заданных на E

Обозначение. $f(x, y), \quad x \in E, \quad y \in Y$

Пример. Функциональная последовательность $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ является частным случаем семейства функций при $Y = \mathbb{N}$

Определение 2. y_0 – т. сг. Y, $\quad f : E \times Y \to \mathbb{R}, \quad f_0 : E \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что семейство функций **равномерно** сходится к f_0 при $y \to y_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{окрест. } U(y_0) : \quad \forall x \in E \quad \forall y \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{ y_0 \} \quad |f(x, y) - f_0(x)| < \varepsilon \tag{1.1}$$

Обозначение. $f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{x \in E} f_0(x)$

Теорема 1 (Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций)**.** $f : E \times Y \to \mathbb{R}, \quad y_0$ – т. сг. Y
Для того, чтобы семейство функций равномерно сходилось к некоторой функции f_0 **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{окрест. } U(y_0) : \quad \forall y_1, y_2 \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{ y_0 \} \quad \forall x \in E \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| < \varepsilon \tag{1.2}$$

Доказательство.

- Необходимость:
  Пусть семейство функций $f : E \times Y \to \mathbb{R}$ равномерно сходится к f_0 при $y \to y_0$
  По определению это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{окр. } U(y_0) : \quad \forall y_1, y_2 \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{ y_0 \} \quad |f(x, y_{1,2}) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \overset{\triangle}{\leq} |f(x, y_2) - f_0(x)| + |f_0(x) - f(x, y_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Достаточность
  Фиксируем $x \in E$
  Применяя критерий Коши к функции одного аргумента $f(x, y)$, получаем, что $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \coloneqq$

$f_0(x)$
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, выберем окрестность $U(y_0)$
Возьмём $\forall y_1, y_2 \in \big(U(y_0), \cap Y\big) \setminus \{ x_0 \}$ и зафиксируем y_1

$$\lim_{y_2 \to y_0} |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le \varepsilon$$

$$|f_0(x) - f(x, y_1)| \xlongequal{\text{def } f_0} \left| \lim_{y_2 \to y_0} \Big(f(x, y_2) - f(x, y_1) \Big) \right| \xlongequal[\text{непр. } |\cdot|]{} \lim_{y_2 \to y_0} |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le \varepsilon$$

Значит, $f(x, y)$ равномерно сходится к $f_0(x)$ при $y \to y_0$

□

1.1.1. Переход к пределу в равномерно сходящемся семестве функций

Теорема 2. $f : E \times Y \to \mathbb{R}, \quad Y \subset \mathbb{R}^{n \ge 1}, \qquad y_0 \in \mathbb{R}^n$ – т. сг. Y

$$f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{x \in E}{\rightrightarrows}} f_0(x) \tag{1.3}$$

$E, d(x_1, x_2)$ – метрическое пространство, $\qquad x_0 \in E$ – т. сг. E

$$\forall y \in Y \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

Тогда $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_0(x)$ и справедливо

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f_0(x) \tag{1.4}$$

Доказательство. Возьмём любую последовательность $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad y_n \in Y, \quad y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y_0$
Положим $f_n(x) \coloneqq f(x, y_n)$

$$f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{x \in E}{\rightrightarrows}} f_0(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f_n(x) \underset{n \to \infty}{\overset{x \in E}{\rightrightarrows}} f_0(x) \tag{1.5}$$

При этом, по условию теоремы для любого n имеем

$$\varphi(y_n) = \lim_{x \to x_0} f(x, y_n) \xlongequal{\text{def } f_n} \lim_{x \to x_0} f_n(x) \tag{1.6}$$

Значит, можно применить теорему о переходе к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности:

$$\exists \lim_{n \to \infty} \varphi(y_n) \in \mathbb{R}, \qquad \exists \lim_{x \to x_0} f_0(x), \qquad \lim_{n \to \infty} \varphi(y_n) = \lim_{x \to x_0} f_0(x)$$

В силу произвольности $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ и условий, наложенных на y_n в начале, последнее утверждение доказывает теорему □

1.1.2. Непрерывность предельной функции

Теорема 3. E, d – метрическое пространство, $\qquad x_0 \in E$ – т. сг., $\qquad y_0$ – т. сг. $Y \subset \mathbb{R}^n$
$f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{x \in E}{\rightrightarrows}} f_0(x), \qquad \forall y \in Y \quad f(x, y)$ непр. в x_0
Тогда $f_0(x)$ непр. в x_0

Доказательство. Применим предыдущую теорему:
По условию имеем $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \coloneqq \varphi(y) \quad \forall y \in Y$, при этом $\varphi(y) = f(x_0, y)$

По предыдущей теореме $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_0(x)$ и тогда

$$\lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f_0(x)$$

Но $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = f_0(x_0)$, что и даёт непрерывность f_0 в x_0 $\square$

Следствие. $f : E \times Y \to \mathbb{R}$, $\quad f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{x \in E}{\rightrightarrows}} f_0(x)$, $\quad \forall y \in Y \quad f(x, y) \in \mathcal{C}\Big(E\Big)$

$$\implies f_0 \in \mathcal{C}\Big(E\Big)$$

1.2. Интегралы, зависящие от параметра

Определение 3. $f : [a, b] \times Y \to \mathbb{R}$ – семейство функций, $\quad Y \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$, $\quad \forall y \in Y \quad f(x, y) \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$
Интегралом, зависящим от параметра, будем называть функцию $I : Y \to \mathbb{R}$:

$$I(y) := \int_a^b f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$$

1.2.1. Непрерывность интеграла от параметра

Теорема 4. y_0 – т. сг. Y, $\quad f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{x \in [a,b]}{\rightrightarrows}} f_0(x)$
Тогда $f_0 \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$ и

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) \,\mathrm{d}\, x \xrightarrow[y \to y_0]{} \int_a^b f_0(x) \,\mathrm{d}\, x \tag{1.7}$$

Доказательство. Непрерывность f_0 следует из следствия к предыдущей теореме, поэтому интеграл в правой части (1.7) определён
По определению равномерной сходимости,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(y_0) : \quad \forall y \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{\, y_0 \,\} \quad |f(x, y) - f_0(x)| < \varepsilon$$

При таких y имеем

$$|I(t) - \int_a^b f_0(x) \,\mathrm{d}\, x| = \left| \int_a^b \Big(f(x, y) - f_0(x)\Big) \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f_0(x)| \,\mathrm{d}\, x \leq \int_a^b \varepsilon \,\mathrm{d}\, x = \varepsilon(b - a)$$

$\square$

Следствие. $Y = [p, q]$, $\quad f : [a, b] \times Y \to \mathbb{R}$, $\quad f \in \mathcal{C}\Big([a, b] \times Y\Big)$

$$\implies I(y) \in \mathcal{C}\Big([p, q]\Big)$$

1.2.2. Производная интеграла от параметра

Теорема 5. $f : [a, b] \times Y \to \mathbb{R}, \qquad Y = [p, q], \qquad f \in \mathcal{C}\Big([a, b] \times Y\Big)$

$$\forall\ (x, y) \in [a, b] \times Y \quad \exists\, f'(x, y), \qquad f'_y(x, y) \in \mathcal{C}\Big([a, b] \times Y\Big)$$

$$\implies \quad \forall y \in [p, q] \quad \exists\, I'(y), \qquad I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\ \mathrm{d}\, x$$

Доказательство. Поскольку f'_y непрерывна, к нейц применима терема Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) : \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta \qquad |f'_y(x_2, y_2) - f'_y(x_1, y_1)| < \varepsilon$$

Пусть $0 < |h| < \delta$, тогда

$$\exists\, c \in (y \between y + h) : \quad f(x, y + h) - f(x, y) = f'_y(x, c)h$$

$$f(x, y + h) - f(x, y) = f'_y(x, y)h + \Big(f'_y(x, c) - f'_y(x, y)\Big)h \coloneqq f'_y(x, y)h + r_h(x, y)h, \qquad |r_h(x, y)| < \varepsilon \quad (1.8)$$

$$I(y + h) - I(y) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \Big(f(x, y + h) - f(x, y)\Big)\ \mathrm{d}\, x \xlongequal[18]{}$$

$$= \int_a^b f'_y(x, y)h\ \mathrm{d}\, x + \int_a^b r_h(x, y)h\ \mathrm{d}\, x = h\int_a^b f'(x, y)\ \mathrm{d}\, x + h\int_a^b r_h(x, y)\ \mathrm{d}\, x$$

$$\left|h\int_a^b r_h(x, y)\ \mathrm{d}\, x\right| \le |h|\int_a^b |r_h(x, y)|\ \mathrm{d}\, x \le |h|\int_a^b \varepsilon\ \mathrm{d}\, x = |h|\varepsilon(b - a)$$

Отсюда следует, что $I(y)$ дифференцируема в y и выполнено утверждение теоремы $\square$

1.2.3. Интегрирование интеграла от параметра

Теорема 6. $f \in \mathcal{C}\Big([a, b] \times [p, q]\Big), \qquad I(y) \coloneqq \int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}\, x, \quad K(x) \coloneqq \int_p^q f(x, y)\ \mathrm{d}\, y$

$$\implies \int_p^q I(y)\ \mathrm{d}\, y = \int_a^b K(x)\ \mathrm{d}\, x$$

Доказательство. По теореме о непрерывности интеграла, $I(y) \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$
Положим

$$\varphi(y_0) \coloneqq \int_p^{y_0} I(y)\ \mathrm{d}\, y, \qquad v(y) \coloneqq \int_a^b l(x, y_0)\ \mathrm{d}\, x, \qquad l(x, y_0) \coloneqq \int_p^{y_0} f(x, y)\ \mathrm{d}\, y$$

$\varphi \in \mathcal{C}\Big([p, q]\Big)$, поскольку $I(y) \in \mathcal{C}\Big([p, q]\Big)$
Поскольку $f \in \mathcal{C}\Big([a, b] \times [p, q]\Big)$, то она ограничена (по первой теореме Вейерштрасса), т. е.

$$\exists\, M : \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [p, q] \quad |f(x, y)| \le M$$

Поэтому при $y_1, y_2 \in [p, q]$ имеем

$$|f(x, y_2) - l(x, y_1)| = \left|\int_p^{y_2} f(x, y)\ \mathrm{d}\, y - \int_p^{y_1} f(x, y)\ \mathrm{d}\, y\right| = \left|\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\ \mathrm{d}\, y\right| \le$$

$$\le \left|\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\ \mathrm{d}\, y\right| \le |M(y_2 - y_1)| = M|y_2 - y_1| \quad (1.9)$$

При фиксированном y_0 функция $l(x, y_0) \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$, поэтому, с учётом (1.9) имеем

$$l(x, y_0) \in \mathcal{C}\Big([a, b] \times [p, q]\Big)$$

По определению l, при фиксированном x получаем

$$l'_{y_0}(x, y) = f(x, y_0)$$

$$\implies l'_{y_0}(x, y) \in \mathcal{C}\Big([a, b] \times [p, q]\Big)$$

$$\implies \exists\, v'(y_0), \qquad v'(y_0) = \int_a^b l'_{y_0}(x, y_0)\, \mathrm{d}\, x = \int_a^b f(x, y_0)\, \mathrm{d}\, x = I(y_0)$$

По определению φ,

$$\exists\, \varphi'(y_0), \qquad \varphi'(y_0) = I(y_0)$$

Из последних двух выражений следует, что

$$v'(y_0) = \varphi'(y_0), \qquad y_0 \in [p, q]$$

Подставляя p вместо y_0 получаем

$$\varphi(p) = \int_p^p I(y)\, \mathrm{d}\, y = 0, \qquad v(p) = \int_a^b l(x, p)\, \mathrm{d}\, x$$

$$f(x, p) = \int_p^p f(x, y)\, \mathrm{d}\, y = 0 \qquad \implies \qquad v(p) = 0$$

$$\implies \int_p^q I(y)\, \mathrm{d}\, y = \varphi(q) = \varphi(q) - \varphi(p) = \int_p^q \varphi'(y_0)\, \mathrm{d}\, y_0 = \int_p^q v'(y_0)\, \mathrm{d}\, y_0 =$$
$$= v(q) - v(p) = v(q) = \int_a^b l(x, q)\, \mathrm{d}\, x = \int_a^b K(x)\, \mathrm{d}\, x$$

□

1.2.4. Несобственные интегралы, зависящиеся от параметра

Пусть $Y \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}, \qquad f : [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ – семейство функций

Предположим, что $f \in \mathcal{C}\Big([a, \infty) \times Y\Big)$ и пусть $A > a$

Определим функцию $F : Y]times[a, \infty)$:

$$f(y, A) \coloneqq \int_a^A f(x, y)\, \mathrm{d}\, x, \qquad y \in Y, \quad A > a$$

Пусть

$$\forall y \in Y \quad \exists \lim_{A \to \infty} F(y, A) =: F_0(y)$$

Определение 4. Будем говорить, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}\, x$ равномерно сходится при $y \in Y$, если

$$F(y, A) \xrightarrow[A \to \infty]{y \in Y} F_0(y)$$

Применяя критерий Коши равномерной сходимости семейства функций, получаем следующее утверждение:

Теорема 7. Для того, чтобы несобственнный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)\, \mathrm{d}\, x$, зависящий от параметра, равномерно сходился при $y \in Y$, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > a: \quad \forall A_1, A_2 > L \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Заметим, что

$$F(y, A_2) - F(y, A_1) = \int_a^{A_2} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x - \int_a^{A_1} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x = \int_{A_1}^{A_2} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x$$

□

1.2.5. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

Теорема 8. $f \in \mathcal{C}\Big([a, \infty) \times Y\Big)$

$$\forall y \in Y \quad |f(x,y)| \leq g \tag{1.10}$$

$$\int_a^{\infty} g(x) \,\mathrm{d}\, x < \infty$$

Тогда несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x$ сходится равномерно при $y \in Y$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, выберем L так, чтобы $\int_L^{\infty} g(x) \,\mathrm{d}\, x < \varepsilon$. Тогда

$$\forall A_1, A_2 > L \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x,y)| \,\mathrm{d}\, x \right| \underset{(1.10)}{\leq} \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x) \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \int_L^{\infty} g(x) \,\mathrm{d}\, x < \varepsilon$$

при любом $y \in Y$
По предыдущей теореме

$$\int_a^{A} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x \xrightarrow[A \to \infty]{y \in Y} \int_a^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}\, x$$

□