Оглавление

0.1 Теорема Лагранжа для вектор-функций

Определение 1. Отображение $F : (a, b) \to \mathbb{R}^{n \geq 2}$ называют вектор-функцией, заданной на (a, b)

Замечание. $\mathbb{R}$ можно трактовать как пространство вектор-столбцов, состоящих из одного элемента

Утверждение 1. $F : (a, b) \to \mathbb{R}^{n \geq 2}, \qquad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \qquad t_0 \in (a, b)$

Напоминание. По теореме из прошлого семестра, F дифференцируема в t_0 тогда и только тогда, когда $f_j(t)$ дифф. в $t_0 \quad j = 1, ..., n$

Напоминание. $f_j(t)$ дифф. в t_0 тогда и только тогда, когда $\exists\, f_j'(t_0)$

$$\mathcal{D}F(t_0) = \begin{bmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathcal{D}F(t_0)\| \xlongequal[\text{как лин. отобр.}]{} \sup_{\substack{|h| \leq 1 \\ h \in \mathbb{R}}} \|\mathcal{D}F(t_0)h\|_n = \sup \|h\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \sup |h| \, \|\mathcal{D}F(t_0)\|_n =$$

$$= \|\mathcal{D}F(t_0)\| = \left\| \begin{bmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{bmatrix} \right\|_n$$

Теорема 1 (Лагранжа). $F : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \geq 2}, \qquad F \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$

Напоминание. $F \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big) \iff f_j \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big) \quad j = 1, ..., n$

$\forall t \in (a, b) \quad F$ дифф. в t

$$\implies \exists\, c \in (a, b) : \|F(b) - F(a)\|_n \leq \|\mathcal{D}F(c)\|_n (b - a) \tag{1}$$

Доказательство. Возьмём

$$\varphi(t) \coloneqq F(t)^T \Big(F(b) - F(a)\Big) = f_1(t)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + ... + f_n(t)\Big(f_n(b) - f_n(a)\Big) \tag{2}$$

Будем считать, что $F(b) \neq F(a)$ (иначе – очевидно)

По напоминанию из условия теоремы, $\varphi \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$. Значит, $\forall t \in (a,b) \quad \exists\, \varphi'(t)$

$$\varphi'(t) = f_1'(t)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + ... + f_n'(t)\Big(f_n(b) - f_n(a)\Big) \tag{3}$$

К φ можно применить теорему Лагранжа из первого семестра:

$$\exists\, c \in (a,b) : \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) \tag{4}$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) \underset{(2)}{=\!=} \Bigg(f_1(b)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + \dots\dots\dots\Bigg) - \Bigg(f_1(a)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + \dots\dots\dots\Bigg) =$$
$$= \Big(f_1(b) - f_1(a)\Big)^2 + ... + \Big(f_n(b) - f_n(a)\Big)^2 = \|F(b) - F(a)\|_n^2 \tag{5}$$

Применим к (3) неравенство КБШ:

$$|\varphi'(c)| \le \left(\Big(f_1'(c)\Big)^2 + ... + \Big(f_n'(c)\Big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big)^2 + ... + \Big(f_n(b) - f_n(a)\Big)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \|\mathcal{D}F(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\| \tag{6}$$

$$(5), (6) \implies \|F(b) - F(a)\|^2 \le \|\mathcal{D}F(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\| \implies (1)$$

□

0.2 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Теорема 2. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n\ge 2} \to \mathbb{R}^n$ – линейное, т. е. $\mathcal{A}(X) = AX, \quad X \in \mathbb{R}^n$
A обратимо, т. е. $\exists\, D : AD = I$ и $DA = I$ (D называется обратной матрицей и обозначается $D = A^{-1}$)
Вспомним две теоремы из алгебры:

Напоминание. A обратима $\iff$ $\det A \ne 0$

Напоминание. A обратима $\iff$ $AX \ne \mathbb{O}_n \quad \forall X \ne \mathbb{O}_n$

$\left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \qquad \|B - A\| = \beta, \quad 0 < \beta < \alpha$

Тогда B обратима и $\left\|A^{-1} - B^{-1}\right\| \le \dfrac{\beta}{\alpha(\beta - \alpha)}$

Доказательство.

- Докажем, что B обратима:
  Возьмём $X \in \mathbb{R}^n$

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) \implies \|X\| = \left\|A^{-1}(AX)\right\| \le$$
$$\le \left\|A^{-1}\right\| \|AX\| \overset{\text{def }\alpha}{=\!=} \frac{1}{\alpha}\|AX\| \implies \|AX\| \ge \alpha\|X\| \tag{7}$$

$$BX = AX + (BX - AX) \implies \|BX\| \overset{\Delta}{\ge} \|AX\| - \|BX - AX\| \tag{8}$$

$$\|BX - AX\| = \|(B - A)X\| \le \|B - A\| \|X\|_n \tag{9}$$

$$\|BX\|_n \underset{(8)}{\ge} \underbrace{\alpha\|X\|}_{(7)} - \underbrace{\|B - A\| \|X\|}_{(9)} = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{>0}\|X\| \tag{10}$$

Это означает, что B обратима (по второй тереме из алгебры)

- Докажем соотношение для $\left\|A^{-1} - B^{-1}\right\|$:
  Возьмём $\forall\ Y \neq \mathbb{O}_n$ и $X := B^{-1}Y$

$$\left\|B(B^{-1}Y)\right\| \xlongequal{\text{def } Y} \|BX\| \underset{(10)}{\geq} (\alpha - \beta)\,\|X\| \xlongequal{\text{def } X} (\alpha - \beta)\left\|B^{-1}Y\right\| \tag{11}$$

$$B(B^{-1}Y) \underset{\text{асс.}}{=\!=} (BB^{-1})Y = IY = Y$$

$$(11) \implies \left\|B^{-1}Y\right\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta}\,\|Y\| \implies \left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \tag{12}$$

$$A(A^{-1} - B^{-1})B \underset{\text{асс.}}{=\!=} \Big(A(A^{-1} - B^{-1})\Big)B \underset{\text{дистр.}}{=\!=} (AA^{-1} - AB^{-1})B = (I - AB^{-1})B \underset{\text{дистр.}}{=\!=}$$
$$= IB - (AB^{-1})B \underset{\text{асс.}}{=\!=} B - A(B^{-1}B) = B - AI = B - A$$

$$\implies \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I}(A^{-1} - B^{-1})\underbrace{(BB^{-1})}_{=I} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \implies A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \tag{13}$$

$$\left\|A^{-1} - B^{-1}\right\| \underset{(13)}{\leq} \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|B - A\| \cdot \left\|B^{-1}\right\| \underset{\substack{(12)\\ \text{определения } \alpha \text{ и } \beta}}{\leq} \frac{1}{\alpha} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha - \beta}$$

$\square$

0.3 Обратимые отображения

Утверждение 2. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, X_0 – внутр. точка
$F : E \to \mathbb{R}^n$ – биекция, т. е. $\underset{X_1, X_2 \in E}{\forall X_1 \neq X_2}$ $F(X_1) \neq F(X_2)$, $G = F(E)$
В силу *какого-то свойства* F обратима
$\Phi : G \to E$, $\Phi\Big(F(X)\Big) = X \quad \forall X$, $F\Big(\Phi(X)\Big) = Y \quad \forall Y \in G$
F дифференцируемо в X_0, $Y_0 = F(X_0)$, Φ дифференцируемо в Y_0
Обозначим $I(X) = X \quad \forall X \in E$ – тождественное отображение

> **Замечание.** Тождественное отображение дифференцируемо. Его матрица Якоби: $\mathcal{D}I(X) = I_n$

Тогда $\Phi\Big(F(X)\Big) = I(X)$

Применим теорему о дифференцируемости суперпозиции (утверждение про матрицы Якоби из неё):

$$\Phi\Big(F(X)\Big) = I(X) \implies \mathcal{D}\Phi(Y_0)\mathcal{D}F(X_0) = \mathcal{D}I(X_0) = I_n$$

По определению, если произведение матриц является единичной матрицей, то они обратны друг другу:

$$\mathcal{D}\Phi(Y_0) = \Big(\mathcal{D}F(X_0)\Big)^{-1}$$

Получили необходимое условие для обратных отображений

Теорема 3 (об обратимом отображении). $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \to \mathbb{R}^1$
$F \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$, т. е. все координатные функции $\in \mathcal{C}^1$

$Y_0 = F(X), \qquad \mathcal{D}F(X_0)$ обратима

$$\Longrightarrow \exists \underset{U,V \text{ открыты}}{U \subset E, V} : \begin{cases} X_0 \in U, Y_0 \in V \\ F\Big|_U \quad \text{обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F\Big|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1\Big(V\Big) \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство.

1. Определение множества U
   Обозначим $A := \mathcal{D}F(X_0)$. По условию, она обратима
   Положим $\lambda := \dfrac{1}{4\,\|A^{-1}\|}$
   Обозначим $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$
   $$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) & \dots & f'_{1x_n}(X) \\ . & . & . \\ f'_{1x_1}(X) & \dots & f'_{nx_n}(X) \end{bmatrix}$$
   $$\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) - f'_{1x_1}(X_0) & \dots & f'_{1x_n}(X) - f'_{1x_n}(X_0) \\ . & . & . \\ f'_{nx_1}(X) - f'_{nx_1}(X_0) & \dots & f'_{nx_n}(X) - f'_{nx_n}(X_0) \end{bmatrix}$$
   По свойству 6 нормы матрицы (лекция от 05.09.2024),
   $$\|\mathcal{D}F(X) - A\| \overset{\text{def } A}{=\!=\!=} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \le \left(\sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \Big(f'_{ix_j}(X) - f'_{ix_j}(X_0) \Big)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
   $$\xrightarrow[F \in \mathcal{C}^1]{} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \xrightarrow[X \to X_0]{} 0$$
   $$\Longrightarrow \exists r > 0 : \forall X \in B_r(X_0) \quad \|\mathcal{D}F(X) - A\| < 2\lambda$$
   Положим $U := B_r(X_0)$

2. Инъективность F
   Далее будем рассматривать F только на U (т. е. будем писать $F := F\Big|_U$)

   Замечание (о выпуклости шара)**.** $X_1, X_2 \in U, \qquad 0 < t < 1$
   $$\Longrightarrow tX_1 + (1-t)X_2 \in U$$
   Доказательство.
   $$\|tx_1 + (1-t)X_2 - x_0\| = \|t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - x_0)\|_n \overset{\triangle}{\le}$$
   $$\le \|t(X_1 - X_0)\| + \|(1-t)(X_2 - X_0)\| < t \cdot r + (1-t) \cdot r = r$$
   □

   Следствие. $X \in U, \qquad X + H \in U, \qquad 0 < t < 1$
   $$\Longrightarrow X + tH \in U$$
   Доказательство. $X_1 := X + H, \qquad X_2 := X$
   $$tx_1 + (1-t)X_2 = tX + tH + (1-t)X = X + tH$$
   □

Возьмём $X \in U$ и $H \neq \mathbb{O}_n$, такие что $X + H \in U$

Докажем, что $F(X+H) - F(X) \overset{?}{\neq} \mathbb{O}_n$. Это и будет означать инъективность

Возьмём $t \in [0,1]$ и $P(t) \coloneqq F(X+tH) - tAH$

Это вектор-функция $P : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}\Big(F(X+tH)\Big) - \mathcal{D}(tAH) \tag{15}$$

Положим $q(t) \coloneqq X + tH$

Теперь можно переписать (15):

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}\Big(F\big(q(t)\big)\Big) - \mathcal{D}(tAH) \tag{16}$$

Напоминание. Мы сегодня уже доказали, что для $Y \in \mathbb{R}^n$ и отображения $t \mapsto tY$, $\mathcal{D}(tY) = Y$

$$\mathcal{D}(tAH) = AH, \qquad \mathcal{D}q(t) = H$$

$$\mathcal{D}F\Big(q(t)\Big) = \mathcal{D}F\Big(q(t)\Big)\mathcal{D}q(t) = \mathcal{D}F(X+tH)H$$

Подставим это в (16):

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}F(X+tH)H - AH \tag{17}$$

$$\lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4\left\|A^{-1}\right\|} \implies \left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём $H \neq \mathbb{O}_n$

$$H = (A^{-1}A)H = A^{-1}AH \implies \|H\| = \left\|A^{-1}(AH)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|AH\| = \frac{1}{4\lambda}\|AH\| \implies$$
$$\implies \|AH\| \geq 4\lambda\|H\| \tag{18}$$

$$P(1) - P(0) \overset{\text{def}}{=} F(X+H) - AH - F(X) = F(X+H) - F(X) - AH \tag{19}$$

Применим к P теорему Лагранжа для вектор-функции:

$$\exists c \in [0,1] : \|P(1) - P(0)\| \leq \|\mathcal{D}P(c)\| \cdot = \|\mathcal{D}P(c)\| \underset{(17)}{=} \left\|\Big(\mathcal{D}F(X+cH) - A\Big)H\right\| \leq$$
$$\leq \left\|\mathcal{D}F\underbrace{(X+tH)}_{\in U} - A\right\| \|H\| < 2\lambda\|H\| \overset{\text{def}}{\leq} \frac{1}{\|AH\|} \tag{20}$$

$$(19),(20) \implies \|F(X+H) - F(X) - AH\| < \frac{1}{2}\|AH\| \tag{21}$$

$$(21) \implies \|F(X+H) - F(X)\| = \left\|AH + \Big(F(X+H) - F(X) - AH\Big)\right\| \geq$$
$$\geq \|AH\| - \|F(X+H) - F(X) - AH\| > \|AH\| - \frac{1}{2}\|AH\| = \frac{1}{2}\|AH\| \underset{(18)}{\geq} 2\lambda\|H\| > 0$$

$\square$