Оглавление

Необыкновенные дифференциальные уравнения – относительно частных производных
Первого порядка – относительно первой производной

Определение 1. Область – непустое открытое связное подмножество

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной:

$$\frac{\mathrm{d}\ y(x)}{\mathrm{d}\ x} = f(x, y(x)), \qquad \text{или в краткой записи } y' = f(x, y) \tag{1}$$

где x – это независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, а $f(x, y)$, если не оговорено противное, – вещественная функция, определённая и непрерывная на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$
G – область в $\mathbb{R}^2$
$\widehat{G}$ – та часть (возможно, пустая) ∂G (границы G), где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна
К ней же относим те точки, в которых функция $f(x, y)$ может быть доопределена с сохранением непрерывности
Чаще всего будем рассматривать композиции элементарных функций

Определение 2. Функцией называется пара объектов (X, f), в которой X – это любое числовое множество, а f – правило, по которому каждому числу из множества X сопоставляется единственное число

Под непрерывностью будем понимать непрерывность по совокупности переменных

Обозначение. Символ $\langle$ подразумевает одну из скобок: (или [, а символ $\rangle$ – скобку) или]

Определение 3. Функция $y = \varphi(x)$, заданная на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$, называется решением дифференциального уравнения (1), если для всякого $x \in \langle a, b\rangle$ выполняются следующие три условия:

1. функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x
2. точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in \widetilde{G}$
3. $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$

Замечание. Фактически решение уравнения (1) – это пара: промежуток $\langle a, b\rangle$ и определённая на нём функция $\varphi(x)$

Замечание. Первые два условия вспомогательные – они позволяют подставить $y = \varphi(x)$ в обе части (1)

Замечание. Любое решение $y = \varphi(x)$ является функцией не просто дифференцируемой по условию 1, а непрерывно дифференцируемой или гладкой на $\langle a, b\rangle$, т. е. $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$

Доказательство. Функция $\varphi(x)$ дифференцируема, а значит, непрерывна в любой точке $x \in \langle a, b\rangle$, поэтому $f\big(x, \varphi(x)\big)$ непрерывна как композиция непрерывных функций, что влечёт непрерывность $\varphi'(x)$
При этом, если решение задано на отрезке $[a, b]$, то на его концах существуют и непрерывны односторонние производные $\square$

Определение 4. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b\rangle$ будем называть:

1. внутренним, если $\big(x, \varphi(x)\big) \in G$ для любого $x \in \langle a, b\rangle$

2. граничным, если $\big(x, \varphi(x)\big) \in \widehat{G}$ для любого $x \in \langle a, b\rangle$

3. смешанным, если найдутся такие $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, что точка $\big(x_1, \varphi(x_1)\big) \in G$, а точка $\big(x_2, \varphi(x_2)\big) \in \widehat{G}$

Чтобы узнать, является ли конкретная функция решением, достаточно её подставить

Лемма 1 (о записи решения в интегральном виде)**.** Для того чтобы определённая на промежутке $\langle a, b\rangle$ функция $y = \varphi(y)$ была решением дифференциального уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(x)$ была непрерывна на $\langle a, b\rangle$, её график лежал в $\widetilde{G}$ и при некотором $x_0 \in \langle a, b\rangle$ выполнялось тождество

$$\varphi(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(x)\big)\, \mathrm{d}\, s \tag{2}$$

Доказательство.

- Необходимость
  Пусть функция $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b\rangle$ является решением уравнения (1), тогда по определению справедливо тождество $f\big(x, \varphi(x)\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} \varphi'(x)$
  Интегрируя его при любом фиксированном $x_0 \in \langle a, b\rangle$ по s от x_0 до x и перенося $\varphi(x_0)$ в правую часть, получаем тождество (2)
  В самом деле,
  $$\int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} \int_{x_0}^{x} \varphi'(s)\, \mathrm{d}\, s = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

- Достаточность
  Пусть непрерывная на промежутке $\langle a, b\rangle$ функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет тождеству (2), тогда $\varphi(x)$ нерпрывно дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, поскольку в правой части (2) стоит интеграл с переменным верхним пределом от композиции непрерывных функций.
  Дифференцируя (2), заключаем, что выполняется и третье условие из определения решения уравнения (1)

$\square$

Задача (Коши)**.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ задача Коши с начальными данными x_0, y_0 заключается в том, чтобы найти все решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1), заданные на промежутках $\langle a, b\rangle \ni x_0$, в том числе внутренние, граничные или смешанные, такие, что $\varphi(x_0) = y_0$.
При этом говорят, что задача Коши поставлена в точке (x_0, y_0), а найденные решения – это решения поставленной задачи Коши

Обозначение. ЗК(x_0, y_0)