Оглавление

0.1 О мультииндексах

Определение 1. Мультииндексом называется $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n\geq 2}, \qquad \alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Определение 2 (норма мультииндекса)**.** $|\alpha| \coloneqq \alpha_1 + ... + \alpha_n, \qquad |\alpha| > 0$

Обозначение. $\alpha! \coloneqq \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$

Обозначение. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha \coloneqq x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}, \qquad 0^0 \coloneqq 1$$

Обозначение.

$$C_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!}$$

Обозначение. $\{ v_\alpha(x) \}_{\alpha \in T}$

$$\sum_{\alpha \in T} v_\alpha(x)$$

0.2 Классы гладкости

Определение 3 ($\mathcal{C}^r(E)$)**.** $r \in \mathbb{N}, \qquad E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}, \qquad E$ открыто, $\qquad f \in \mathcal{C}\Big(E\Big)$

$$\forall x_1, ..., x_n \quad \forall X \in E \quad \exists\, f'_{x_j}(X)$$

- $f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}\Big(E\Big) \implies f \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$
- Пусть $f \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$

$$\forall 1 \leq k \leq r \quad \forall x_{i_1}, ..., x_{i_k} \quad \forall X \in E \quad \exists\, f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(X) \in \mathcal{C}\Big(E\Big)$$

Тогда говорят, что $f \in \mathcal{C}^r\Big(E\Big)$

Теорема 1. $r \geq 2, \qquad E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}, \qquad E$ открытое, $\qquad f \in \mathcal{C}^r\left(E\right), \qquad i_1, ..., i_r, \quad j_1, ..., j_r$

$$\forall X \in E \quad f^{(r)}_{x_{i_1}\dots x_{i_r}}(X) = f^{(r)}_{x_{j_1}\dots x_{j_r}}(X) \tag{1}$$

Доказательство. Докажем **по индукции**

- **База.** $r = 2$ – доказано в конце прошлой лекции
- **Переход.** Пусть $f \in \mathcal{C}^{r+1}\left(E\right)$
  $j_k \neq j_{k+1}$
  Рассмотрим частные производные:

$$f^{(r+1)}_{x_{j_1}\dots \boldsymbol{x_{j_k}} \boldsymbol{x_{j_{k+1}}}\dots x_{j_{r+1}}}(X), \qquad f^{(r+1)}_{x_{j_1}\dots \boldsymbol{x_{j_{k+1}}} \boldsymbol{x_{j_k}}\dots x_{j_{r+1}}}(X)$$

  Обозначим $g(X) \coloneqq f^{(k-1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_{k-1}}}(X)$

$$f^{(k+1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_{k-1}} x_{j_k} x_{j_{k+1}}}(X) = g''_{x_{j_k} x_{j_{k+1}}}(X) \tag{2}$$

$$f^{(k+1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_{k+1}} x_{j_k}}(X) = g''_{x_{j_{x+1}} x_{j_k}}(X) \tag{3}$$

  По следствию к теореме о смешанных производных, получаем

$$(2), (3) \implies g_{x_{j_k} x_{j_{k+1}}} = g''_{x_{j_{k+1}} x_{j_k}}(X) \tag{4}$$

$$(2) \implies f^{(r+1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_k} x_{j_{k+1}}\dots x_{j_{r+1}}}(X) = g^{(r-k+2)}_{x_{j_k} x_{j_{k+1}}\dots x_{j_{r+1}}} \quad \forall X \in E \tag{5}$$

$$(3) \implies f^{(r+1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_{k+1}} x_{j_k}\dots x_{j_{r+1}}}(X) = g^{(r-k+2)}_{x_{j_{k+1}} x_{j_k}\dots x_{j_{r+1}}} \quad \forall X \in E \tag{6}$$

$$(4), (5), (6) \implies f^{(r+1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_k} x_{j_{k+1}}\dots x_{j_{r+1}}}(X) = f^{(r+1)}_{x_{j_1}\dots x_{j_{k+1}} x_{j_k}\dots x_{j_{r+1}}}(X) \quad \forall X \in E \tag{7}$$

  $i_1, ..., i_n, \qquad j_k = i_1, \qquad j_k$ – минимальный Рассмотрим две ситуации:

  - $k = 1$

$$i_1, ..., i_{r+1}$$

$$i_1, j_2, ..., j_{r+1}$$

    Тогда индексы $i_2, ..., i_{r+1}$ и $j_2, ..., j_{r+1}$ получаются друг из друга перестановкой. А тогда, по индукции,

$$f^{(r+1)}_{x_{i_1} x_{i_2}\dots x_{i_{r+1}}}(X) = \left(f'_{x_{i_1}}\right)^{(r)}_{x_{i_2}\dots x_{i_{r+1}}} \underset{\text{инд. предполож.}}{=} \left(f'_{x_{i_1}}\right)^{(r)}_{x_{j_2}\dots x_{j_{r+1}}}(X) = f^{(r+1)}_{x_{j_1} x_{j_2}\dots x_{j_{r+1}}}(X) \tag{8}$$

  - $k > 1$
    Тогда $j_1, ..., j_{k-1} \neq i_1$
    Тогда,

$$(7) \implies f^{(r+1)}_{\dots x_{j_{k-1}} x_{j_k}} = f^{(r+1)}_{\dots x_{j_k} x_{j_{k-1}}} = f^{(r+1)}_{\dots x_{j_k} x_{j_{k-2}} x_{j_{k-1}}} = \dots\dots\dots = f^{(r+1)}_{x_{j_k} x_{j_2}\dots}$$

    Теперь можно периминить первый случай

□

Обозначение. $i_1, ..., i_r, \qquad 1 \leq i_k \leq n$
Среди них есть:

- l_1 равных 1
- l_2 равных 2

  . . . .

- l_n равных n

$$l_1 + ... + l_n = r$$

Можно получить перестановку этих индексов:

$$\underbrace{1, ..., 1}_{l_1}, \underbrace{2, ..., 2}_{l_2}, \dots\dots\dots, \underbrace{n, ..., n}_{l_n}$$

$f \in \mathcal{C}^r\Bigl(E\Bigr)$
Тогда, по доказанной теореме,

$$f^{(r)}_{x_{i_1}...x_{i_r}}(X) = f^{(r)}_{\underbrace{x_1...x_1}_{l_1}...\underbrace{x_n...x_n}_{l_n}}(X) \tag{9}$$

Определим мультииндекс $\alpha \coloneqq (l_1, ..., l_n), \qquad |\alpha| = r$
Введём обозначение для частной производной:

$$(9) \coloneqq \partial^\alpha f(X)$$

0.3 Формулы для производной порядка r одной сложной функции

Теорема 2. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ – открытое, $\qquad f \in \mathcal{C}^{r \geq 1}\Bigl(E\Bigr), \qquad Y \in E, \qquad \underset{H \neq \mathbb{O}_n}{H \in \mathbb{R}^n}, \qquad t \in (-a, a)$
$Y + tH \in E \quad \forall t \in (-a, a)$

$$g(t) \coloneqq f(Y + tH) \tag{10}$$

$$\implies g^{(r)}(0) = \sum_{\alpha : |\alpha| = r} C_r^\alpha \partial^\alpha f(Y) H^\alpha \tag{11}$$

Доказательство. Докажем **по индукции**:

- **База.** $r = 1$
  То есть, $|\alpha| = 1$
  Если $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, то $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \geq 0$
  Значит,

$$\exists \, \nu : \begin{cases} \alpha_\nu = 1 \\ \alpha_j = 0, \quad j \neq \nu \end{cases}$$

$$\alpha = (0, ..., \underset{\nu}{1}, ..., 0) \coloneqq e_\nu, \qquad 1 \leq \nu \leq n$$

$$C_1^{e_\nu} = \frac{1!}{0! \cdot ... \cdot 1! \cdot ... \cdot 0} = 1 \tag{12}$$

$$\partial^{e_\nu} f(X) = f'_{x_\nu}(X) \tag{13}$$

Если $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$, то

$$H^{e_\nu} = h_\nu \tag{14}$$

$$(11), (12), (13), (14) \implies g'(0) = \sum_{\nu=1}^{n} f'_{x_\nu}(Y) h_\nu \tag{15}$$

По условию, $f \in \mathcal{C}^1\Bigl(E\Bigr)$, а значит, применяя теорему о достаточном условии дифференцируемости, f дифф. в $X \quad \forall X \in E$
Рассмотрим отображение

$$\Psi : (-a, a) \to \mathbb{R}^n, \qquad \Psi(t) = Y + tH \tag{16}$$

$$g(t) \overset{\text{def}}{=} f(\Psi(t)), \qquad f : E \to \mathbb{R}^1 \tag{17}$$

То есть, $g : (-a, a) \to \mathbb{R}^1$ и можно применить теорему о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемых отображений:

$$\mathcal{D}g(t) = \mathcal{D}f(V)\Big|_{V=Y+tH} \cdot \mathcal{D}\Psi(t) \tag{18}$$

Матрица Якоби для отображения $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – матрица 1×1:

$$\mathcal{D}g(t) = g'(t) \tag{19}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, значит, её матрица Якоби – это вектор-строка:

$$\mathcal{D}f(V)\Big|_{V=Y+tH} = \Big(f'_{x_1}(Y+tH), ..., f'_{x_n}(Y+tH)\Big) \tag{20}$$

$$\mathcal{D}\Psi(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$(18), (19), (20), (21) \implies g'(t) = \sum_{\nu=1}^{n} f'_{x_\nu}(Y+tH)h_\nu, \qquad t \in (-a, a) \tag{22}$$

Подставляя $t = 0$, получаем (15)

- **Переход.**
  $f \in \mathcal{C}^{r+1}\Big(E\Big)$
  Рассмотрим мультииндекс $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n), \qquad |\beta| = r+1$

$$\beta = (0, ..., \beta_{i_1}, 0, ..., \beta_{i_l}, ..., 0), \qquad \beta_{i_k} \neq 0, \qquad 1 \leq k \leq l$$

То есть, некоторые члены не равны нулю, остальные – нули
Пусть

$$\alpha^{(1)} = (0, ..., 0, \beta_{i_1} - 1, \beta_{i_2}, ..., \beta_{i_l}, ..., 0)$$
$$\alpha^{(2)} = (0, ..., \beta_{i_1}, 0, ..., \beta_{i_2} - 1, ..., \beta_{i_l}, ..., 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha^{(l)} = (0, ..., \beta_{i_1}, 0, ..., \beta_{i_2}, ..., \beta_{i_l} - 1, ..., 0)$$

$|\alpha| = r, \qquad \alpha + e_\nu = \beta$ для некоторого ν

$$\nu \in \{\, i_1, ..., i_l \,\} \ \text{(иначе на месте одного из нулей была бы 1)} \tag{23}$$

По индукционному предположению,

$$g^{(r)}(Y+tH) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^{(\alpha)} \partial^\alpha f(Y+tH) H^\alpha \tag{24}$$

$$(22), (24) \implies g^{(r+1)}(Y+tH) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha H^\alpha \Big(\underbrace{\partial^\alpha f(Y+tH)}_{:= f_\alpha \in \mathcal{C}^1 \left(E\right)}\Big)' := F \tag{25}$$

Воспользуемся базой индукции для f_α:

$$(25) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha H^\alpha \Big(\sum_{\nu=1}^{n} f'_{\alpha x_\nu}(Y+tH)h_\nu\Big) = \sum_{|\alpha|=1} \sum_{\nu=1}^{n} C_r^\alpha H^\alpha h_\nu \Big(\partial^\alpha f(Y+tH)\Big)'_{x_\nu} \tag{26}$$

$$\alpha = (l_1, ..., l_\nu, ..., l_n)$$

$$\left(\partial^\alpha f(X)\right)'_{x_\nu} \overset{\text{def}}{=} f^{(r+1)}_{\underbrace{x_1\dots x_1}_{l_1}\dots\underbrace{x_\nu\dots x_\nu}_{l_\nu}\dots\underbrace{x_n\dots x_n}_{l_n}\boldsymbol{x_\nu}}(X) \xlongequal[\text{т. о классах } \mathcal{C}^r]{}$$

$$= f^{(r+1)}_{\underbrace{x_1\dots x_1}_{l_1}\dots\underbrace{x_\nu\dots x_\nu}_{l_\nu+1}\dots\underbrace{x_n\dots x_n}_{l_n}}(X) \overset{\text{def}}{=} \partial^{\alpha+e_\nu} f(X) \quad (27)$$

$$H^\alpha h_\nu = h_1^{e_1}\dots h_\nu^{e_\nu}\dots h_n^{e_n}\boldsymbol{h_\nu} = h_1^{e_1}\dots h_\nu^{e_\nu\mathbf{+1}}\dots h_n^{e_n} = H^{\alpha+e_\nu} \quad (28)$$

$$(26) \underset{(24),(27)}{=} \sum_{|\alpha|=r}\sum_{\nu=1}^{n} C_r^\alpha H^{\alpha+e_\nu}\partial^{\alpha+e_\nu} f(Y+tH) \quad (29)$$

При этом, $\alpha + e_\nu = \beta, \qquad |\beta| = r+1$

$$(29) = \sum_{|\beta|=r+1} \partial^\beta f(Y+tH)H^\beta \sum_{\alpha,\nu:\alpha+e_\nu=\beta} C_r^\alpha \quad (30)$$

$$\alpha^{(\mu)} := (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_\mu} - 1, 0, \dots, \beta_{i_l}, 0, \dots)$$

$$\alpha^{(\mu)} + e_{i_\mu} = \beta, \qquad 1 \le \mu \le l \quad (31)$$

$$(31) \implies \sum_{\alpha+e_\nu=\beta} C_r^\alpha = \sum_{\mu=1}^{l} C_r^{\alpha^{(\mu)}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^{l} \frac{r!}{\beta_{i_1}!\dots(\beta_{i_\mu}-1)!\dots\beta_{i_l}!} = \frac{r!}{\beta_{i_1}!\dots\beta_{i_l}!}\sum_{\mu=1}^{l}\beta_{i_\mu} \overset{\text{def}}{=}$$

$$= \frac{r!}{\beta!}|\beta| = \frac{r!}{\beta!}(r+1) = \frac{(r+1)!}{\beta!} = C_{r+1}^\beta \quad (32)$$

$$(30) \underset{(32)}{=} g^{(r+1)}(t) = \sum_{|\beta|=r+1} \partial^\beta f(Y+tH)H^\beta C_{r+1}^\beta$$

$\square$

0.4 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции n переменных

Теорема 3. $E \subset \mathbb{R}^{n\ge 2}$ – открытое, $\quad X_0 \in E, \quad B_\delta(X_0) \subset E, \quad f \in \mathcal{C}^{r+1}\Big(E\Big)$

$H \in \mathbb{R}^n, \quad \|H\| < \delta$

$$\implies \exists\, 0 < c < 1 : f(X_0+H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0+cH)H^\alpha \quad (33)$$

Доказательство. Рассмотрим $g(t) := f(X_0 + tH)$

$$g(1) = f(X_0+H), \qquad g(0) = f(X_0)$$

$$g \in \mathcal{C}^{r+1}\Big((-a,a)\Big), \qquad a > 1$$

так как $\|H\| < \delta \implies$ для некоторого $a > 1 \quad \|aH\| = a\|H\| < \delta$

Для функции g можно применить теорему Лагранжа для одной переменной:

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot 1^k + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) \cdot 1^{r+1} =$$

$$= g(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) \underset{\text{формула для k-й производной}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} C_k^\alpha \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} C_{r+1}^\alpha \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha =$$

$$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha$$

$\square$