

Оглавление

0.1	Жорданова форма	1
0.1.1	Существование жордановой формы нильпотентного оператора	1
0.2	Многочлены от оператора	5

0.1 Жорданова форма

0.1.1 Существование жордановой формы нильпотентного оператора

Определение 1. Жордановой лкеткой порядка r с собств. знач. 0 называется квадратная матрица порядка r вида

$$\begin{pmatrix} 0 & - & . & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначение. $J_r(0)$

Определение 2. Жордановой матрицей с собств. знач. 0 называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{r_2}(0) & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & F_{r_k}(0) & 0 \end{pmatrix}$$

Пример.

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Пусть это матрица оператора в базисах e_1, e_2, e_3, e_4, e_5

$$Je_1 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 = e_2$$

$$Je_2 = e_3, \quad Je_3 = 0, \quad Je_4 = e_5, \quad Je_5 = 0$$

Обозначение. $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow 0, \quad e_4 \rightarrow e_5 \rightarrow 0$

Определение 3. \mathcal{A} – нильпотентный оператор

Жордановой цепочкой называется такой набор векторов e_1, e_2, \dots, e_r , что $\mathcal{A}(e_i) = e_{i+1}$ при $i < r$ и $\mathcal{A}(e_r) = 0$

Обозначение. $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots \rightarrow e_r \rightarrow 0$

Замечание. Вектор e_r является собственным вектором, соотв. $\lambda = 0$

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X \mapsto AX$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = 0$$

- $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow 0$ не бывает, т. к. $\mathcal{A}^2(e_1) = 0$

- Построим цепочку $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow 0$

Найдём $\ker \mathcal{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + 2y - 3z = 0$$

$$\dim \ker \mathcal{A} = 2$$

Найдём e_1 , такой что $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow 0$:

Любой вектор за 2 шага перейдёт в 0, т. к. $\mathcal{A}^2 = 0$

Найдём e_1 , который за 1 шаг **не** перейдёт в 0:

Возьмём $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$e_2 = \mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдём e'_1 , который перейдёт в 0:

Возьмём e'_1 , линейно независимый с e_2

Подойдёт $e'_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{e_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{e'_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e_1, e_2, e'_1 – жорданов базис

Жорданова форма:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Лемма 1 (ЛНЗ жордановых цепочек). Дано несколько жордановых цепочек:

$$e_1^{(1)} \rightarrow e_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow e_{r_1}^{(1)} \rightarrow 0$$

.....

$$e_1^{(k)} \rightarrow e_2^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow e_{r_k}^{(k)} \rightarrow 0$$

Если последние векторы цепочек, т. е. $e_{r_1}^{(1)}, \dots, e_{r_k}^{(k)}$ ЛНЗ, то объединение цепочек ЛНЗ

Доказательство. Индукция по $r := \max \{ r_1, \dots, r_k \}$

- **База.** $r = 1$

Все цепочки длины 1

Все векторы – последние и, по условию, ЛНЗ

- **Переход.** $r - 1 \rightarrow r$

$$\mathcal{A}(e_i^{(j)}) = \begin{cases} e_{i+1}^{(j)}, & i < r_j \\ 0, & i = r_j \end{cases}$$

Применим s раз:

$$\mathcal{A}^s(e_i^{(j)}) = \begin{cases} e_{i+s}^{(j)}, & i + s \leq r_j \\ 0, & i + s > r_j \end{cases}$$

Цепочки бывают двух видов: у некоторых длина r , а у некоторых – меньше (по определению r) НУО считаем, что цепочки с номерами $1, 2, \dots, m$ имеют длину r , а остальные – меньше, т. е.

$$r_1 = r_2 = \dots = r_m = r, \quad r_i < r \text{ при } i > m$$

От противного: пусть набор ЛЗ:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{r_j} a_i^{(j)} e_i^{(j)} = 0, \quad \text{не все } a_i^{(j)} \text{ равны } 0$$

Применим к этому равенству \mathcal{A}^{r-1} :

- Если цепочка короче r , то она вся перейдёт в 0
- Иначе – останется только последний вектор

То есть,

$$e_1^{(j)} \rightarrow e_r^{(j)}, \quad a_1^{(j)} e_1^{(j)} \rightarrow a_1^{(j)} e_r^{(j)}, \quad \text{остальные} \rightarrow 0$$

Получится сумма:

$$\sum_{j=1}^m a_1^{(j)} e_r^{(j)}$$

Заметим, что это ЛК последних векторов (которые, по условию, ЛНЗ)

$$\implies a_1^{(j)} = 0 \quad \text{при } j \leq m$$

Уберём слагаемые $0 \cdot e_1^{(j)}$ при $j \leq m$

$$\sum_{j \leq m} \sum_{i=2}^r a_i^{(j)} e_i^{(j)} + \sum_{j > m} a_i^{(j)} e_i^{(j)} = 0$$

Это – ЛК векторов из цепочек длины $r - 1$ с теми же последними векторами

Применим **индукционное предположение**. Вместе с условием, что последние векторы ЛНЗ, получаем, что все они ЛНЗ

□

Лемма 2 (базис из жордановых цепочек). \mathcal{A} – оператор на V , базис e_1, e_2, \dots, e_n – базис, являющийся объединением жордановых цепочек (в естественном порядке):

$$e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots \rightarrow e_{r_1} \rightarrow 0$$

$$e_{r_1+1} \rightarrow e_{r_2+2} \rightarrow \dots \rightarrow e_{r_1+r_2} \rightarrow 0$$

.....

$$e_{r_1+\dots+r_{k-1}+1} \rightarrow \dots \rightarrow e_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+r_k} \rightarrow 0$$

Тогда матрица \mathcal{A} в этом базисе

$$A = \begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & J_{r_2}(0) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & J_{r_k}(0) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(e_{r_1}) = \mathcal{A}(e_{r_1+r_2}) = \dots = \mathcal{A}(e_{r_1+\dots+r_k}) = 0$$

Значит, при $i = r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \dots + r_k$, i -й столбец – нулевой

При $i \neq r_1, \dots, r_1 + \dots + r_k$, $\mathcal{A}(e_i) = e_{i+1} \implies i$ -й столбец:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i \\ i+1 \end{matrix}$$

□

Теорема 1 (жорданова форма нильпотентного оператора). Для любого нильпотентного оператора на конечномерном векторном пространстве существует жорданов базис

Доказательство. Будем доказывать, что существует базис из жордановых цепочек

Положим $W := \ker \mathcal{A}$

Если мы возьмём ЛНЗ векторы из ядра и построим (слева от них) цепочки, то получим жорданов базис

Положим $U_i := \operatorname{Im} \mathcal{A}^i$

$$V = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_{k-1} \supset U_k = \{0\}$$

где k – степень нильпотентности

Заметим, что если $v \in U_t \cap W$, то существует цепочка длины $t+1$ с концом v

Построим базис W (такой, чтобы можно было достроить цепочки):

Будем пересекать W с U_i

Выберем базис $W \cap U_{k-1}$. Он ЛНЗ, значит его можно дополнить до базиса $W \cap U_{k-2}$

В итоге получим базис $W \cap U_0 = W$

Получили базис e_1, e_2, \dots пространства W

Для $e_i \in W \cap U_t$ построим цепочку длины $t+1$ с концом e_i :

$$e_1^{(i)} \rightarrow e_2^{(i)} \rightarrow \dots \rightarrow e_{t+1}^{(i)} = e_i \rightarrow 0$$

Объединение цепочек – ЛНЗ (по лемме)

Докажем, что это базис, т. е. что набор порождающий:

Докажем, что если $\mathcal{A}^s(v) = 0$, то v является ЛК векторов цепочек

Докажем **индукцией** по s :

- **База.** $s = 1$

$$\mathcal{A}^1(v) = 0, \quad v \in W, \quad e_1, e_2, \dots - \text{базис } W$$

- **Переход.** $s \rightarrow s+1$

Пусть $\mathcal{A}^{s+1}(v) = 0$, $\mathcal{A}^s(v) \neq 0$

Положим $u = \mathcal{A}^s(v) \implies u \in U_s$

$$\underbrace{v \rightarrow \dots \rightarrow u}_{s+1} \rightarrow 0$$

Значит, $\mathcal{A}(u) = 0 \implies u \in W$

Значит, $u \in U_s \cap W$

Представим его в виде ЛК базиса $U_s \cap W$ (того, до которого мы дошли на каком-то очередном шагу дополнения базисов):

$$u = \sum_i a_i e_i$$

$\forall e_i$ из этого базиса выбрана цепочка длины хотя бы $s+1$

$e_i = e_{s+t_i}^{(i)}$ – последний вектор цепочки

Пусть e'_i – вектор цепочки, такой что $\mathcal{A}^s(e'_i) = e_i$ (вектор, который на s шагов раньше)

$$\mathcal{A}^s\left(\sum a_i e'_i\right) = \sum a_i e_i = u$$

При этом, $\mathcal{A}^s(v) \stackrel{\text{def}}{=} u$

Получили 2 линейных представления u , значит,

$$\mathcal{A}^s(v) = \mathcal{A}^s\left(\sum a_i e'_i\right) \implies \mathcal{A}^s\left(v - \sum a_i e'_i\right) = 0$$

Тогда, по индукционному предположению, $v - \sum a_i e'_i$ представляется в виде ЛК векторов из цепочек

Значит, v представляется в виде ЛК векторов цепочек

□

0.2 Многочлены от оператора

Обозначение. V – векторное пространство над K , \mathcal{A} – оператор на V , $P \in K[x]$

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

Тогда $P(\mathcal{A}) = a_n \mathcal{A}^n + \dots + a_1 \mathcal{A} + a_0 \mathcal{E}$, т. е. такой оператор \mathcal{B} , что

$$\mathcal{B}(v) = a_n \mathcal{A}^n(v) + \dots + a_2 \mathcal{A}^2(v) + a_1 \mathcal{A}(v) + a_0 v$$

Лемма 3 (произведение многочленов от оператора). P, Q – многочлены, \mathcal{A} – оператор

$$\implies (PQ)(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}) \circ Q(\mathcal{A})$$

Доказательство. Пусть $P(t) = \sum p_i t^i$, $Q(t) = \sum q_i t^i$, $R(t) = P(t)Q(t)$

$$R(t) = \sum p_i q_j t^{i+j}$$

Положим $\mathcal{B} = P(\mathcal{A})$, $\mathcal{C} = Q(\mathcal{A})$, $\mathcal{D} = R(\mathcal{A})$

Нужно доказать, что $\mathcal{B}(\mathcal{C}(v)) = \mathcal{D}(v) \quad \forall v$

Пусть $w = \mathcal{C}(v)$

$$\implies \mathcal{B}(w) = \sum p_i \mathcal{A}^i(w), \quad \mathcal{C}(v) = \sum q_j \mathcal{A}^j(v), \quad \mathcal{D}(v) = \sum p_i q_j \mathcal{A}^{i+j}(v)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{C}(v)) &= \mathcal{B}(w) = \mathcal{B}\left(\sum p_j \mathcal{A}^j(v)\right) = \sum q_j \mathcal{B}\left(\mathcal{A}^j(v)\right) = \sum q_j \left(\sum p_i \mathcal{A}^i(\mathcal{A}^j(v))\right) = \\ &= \sum q_j \left(\sum p_i \mathcal{A}^{i+j}\right) = \sum q_j p_i \mathcal{A}^{i+j} = \mathcal{D}(v) \end{aligned}$$

□

Следствие. P, Q – многочлены, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – операторы, $\mathcal{B} = P(\mathcal{A})$, $\mathcal{C} = Q(\mathcal{A})$

$$\implies \mathcal{B} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{B}$$

Доказательство. $PQ = QP \implies (PQ)(\mathcal{A}) = (QP)(\mathcal{A})$

□