Оглавление

0.1 Производящие функции

0.1.1 Числа Фиббоначчи

$$\underset{1}{F_0}, \underset{1}{F_1}, \underset{2}{F_2}, ...$$

Наша цель – получить формулу для n-го числа Фиббоначчи

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = F_0 + F_1 \cdot x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k \underset{\text{применим реккурентную формулу}}{=}$$

$$= F_0 + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} + F_{k-2}) x^k = F_0 + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2} x^k \underset{\text{поменяем пределы суммирования}}{=}$$

$$= F_0 + F_1 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0} F_k \cdot x^{k+2} \underset{\text{вынесем } x}{=} F_0 + F_1 x + x \sum_{k=1}^{\infty} F_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} F_x x^k =$$

$$= F_0 + F_1 x + x\Big(\mathcal{F}(x) - F_0\Big) + x^2 \mathcal{F}(x)$$

$$\mathcal{F}(x) = 1 + \cancel{x} + x\mathcal{F}(x) - \cancel{x} + x^2 \mathcal{F}(x)$$

$$\mathcal{F}(x)(1 - x - x^2) = 1$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Положим $\alpha \coloneqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta \coloneqq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

Разложим дробь в сумму простейших:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x} = \frac{A - A\beta x + B - B\alpha x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\beta x + B\alpha x = 0 \end{cases}, \qquad A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{-\beta}{\alpha - \beta}$$

$$\frac{1}{1 - \gamma x} = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma x)^k$$

$$\mathcal{F}(x) = A \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k + B \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} x^k$$

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right]$$

0.1.2 Числа Каталана

$$S_0 + (S_1 + S_2) + ... + S_n = S_0 + S^* + S_3 + ... + S_n$$

Сколькими способами мы можем так сложить (т. е. сколько способов есть расставить скобки так, чтобы при раскрытии получилась данная сумма)?
Введём C_n – количество способов сложения $n+1$ числа

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, \qquad C_0 \coloneqq 1$$

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

$$\mathcal{C}^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = \sum_{k,m=0}^{\infty} C_k C_m x^{m+k} = \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^{r} C_m C_{r-m}}_{\text{похоже на } C_{r+1}} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+1} x^r$$

$$x\mathcal{C}^2(x) = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+1} x^{r+1} = \mathcal{C}(x) - 1$$

$$x\mathcal{C}^2(x) - \mathcal{C}(x) + 1 = 0$$

$$\mathcal{C}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Положим $f(x) \coloneqq \sqrt{1-4x}$
Разложим её в ряд:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \tag{1}$$

Найдём k-ю производную:

$$\frac{d^k}{dx^k}(\sqrt{1-4x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)...\left(\frac{1}{2} - k + 1\right)(1-4x)^{\frac{1}{2}-k} \cdot (-4)^k = (-2)^k \big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-3)\big)(1-4x)^{\frac{1}{2}-k} \tag{2}$$

$$C_{2k-2}^{k-1} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \underset{\text{выделим произведение нечётных чисел}}{=}$$

$$= \frac{\Big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-3)\Big) \cdot \Big(2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2k-2)\Big)}{(k-1)!(k-1)!} \underset{\text{вынесем двойки}}{=} \frac{\Big(1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-3)\Big) \cdot \Big(2^{k-1} \cdot \cancel{(k-1)!}\Big)}{(k-1)!\cancel{(k-1)!}}$$

$$1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-3) = \frac{(k-1)! \cdot C_{2k-2}^{k-1}}{2^{k-1}}$$

Подставим это в (2):

$$\frac{d^k}{dx^k}(\sqrt{1-4x}) = (-2)^{\cancel{k}} C_{2k-2}^{k-1}(k-1)! \frac{1}{\cancel{2^{k-1}}}(1-4x)^{\frac{1}{2}-k}$$

Подставим это в (1):

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-2)(k-1)! C_{2k-2}^{k-1} \frac{1}{k!} x^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} x^k$$

$$\mathcal{C}(x) = \frac{1 - \left(1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} x^k\right)}{2x} = \frac{\cancel{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} x^k}{\cancel{2}x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} x^{k-1} \underset{\text{поменяем пределы суммирования}}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k x^k$$

$$C_k = \frac{1}{k+1} C_{2k}^k$$

0.2 ε-приближённые алгоритмы

Задан некоторый ε – точность (отклонение), стараемся его достичь
При этом, трудоёмкость должна быть ограничена $O\left(n\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$\varepsilon > 0 \qquad \frac{F_A - F_{opt}}{F_{opt}} < \varepsilon$$

Задача. $m = 2$ процессоров, $\quad n$ заданий
Заданы $t_1, t_2, ..., t_n$ – времена выполнения

$$x_i \coloneqq 1 \vee 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{2}$$

Построим полное дерево перебора. Получим двоичное дерево (слева $x_i = 1$, справа – 0)
Выбираем некоторое $\delta > 0$
В каждой вершине считаем $f(x^k) = \sum_{i=1}^{k} t_i x_i$
$f(x^k) \geq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{2}$ – полное решение, обрезаем и сохраняем куда-нибудь
$f(x^k) + \sum_{i=1}^{n} t_i < \dfrac{\sum_{i=1}^{n}}{2}$ – недопустимое решение, обрезаем

$$\left| f(x_i^k) - f(x_j^k) \right| < \delta$$

Тз каждой группы берём решение с максимальным $f(x^K)$