Оглавление

Глава 1

Дифферинциальная геометрия поверхностей

Пример (сфера).

Почему сфера параметризуется именно так? Как параметризуется любая поверхность вращения:
Есть кривая на плоскости XOZ (рис. 1.1a):

$$\begin{cases} x = f(t) \\ z = g(t) \end{cases}$$

Начали вращать – получили “кувшин” (рис. 1.1b). Как его запараметризовать?

$$\begin{cases} x = f(t) \cdot \cos\alpha \\ y = f(t) \cdot \sin\alpha z = g(t) \end{cases}$$

Сфера – продукт вращения полуокружности:

$$\begin{cases} x = R\cos\psi \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

Сфера:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\psi \\ y = R\sin\varphi\cos\psi \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

где ψ – “широта”, т. е. угол подъёма над экватором, ψ – “долгота” (то, что было α)

$$r_\varphi = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\cos\psi \\ R\cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r_\psi = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\psi \\ -R\sin\varphi\sin\psi \\ R\cos\psi \end{pmatrix}$$

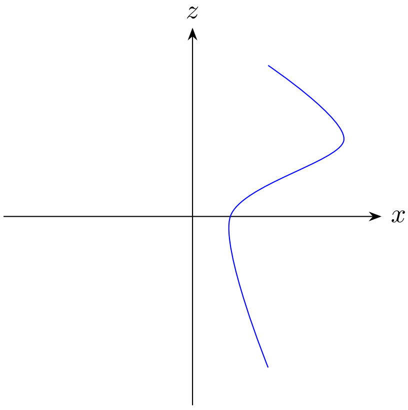
$$E = R^2\cos^2\psi$$

$$F = r_\varphi \cdot r_\psi = 0$$

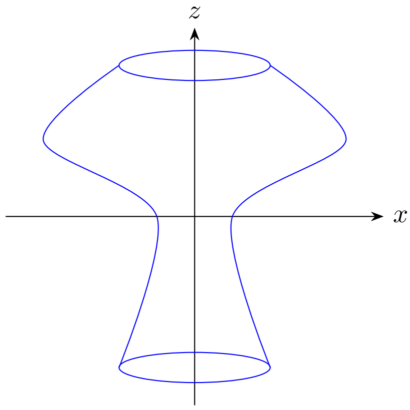
$$G = r_\psi^2 = R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + R^2\cos^2\psi = R^2$$

1.1 Угол между кривыми на поверхности

Есть параметризация поверхности $r(u,v)$ и внутренние параметризации кривых: $(u,v) = \big(u_1(t), v_1(t)\big)$ и $(u,v) = \big(u_2(t), v_2(t)\big)$



(a) Кривая



(b) Кувшин

Пусть касательный вектор к первой кривой будет $\overrightarrow{V}_1$, ко второй – $\overrightarrow{V}_2$

$$\overrightarrow{V}_1 = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{r}\big(u_1(t), v_1(t)\big)}{\mathrm{d}\,t} = r_u' \cdot u_1' + r_v \cdot v_1'$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{V}_2 = r_u u_2' + r_v v_2'$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2}{|V_1| \cdot |V_2|} = \frac{Eu_1'u2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Fv_1'^2} \cdot \sqrt{Eu_2'^2 + Fu_2'v_2' + Gv_2'^2}}$$

1.2 Внутренняя геометрия поверхности

Есть лист бумаги, на нём живут бумажные клещи. Они не видят ничего, кроме своего листа

Определение 1. Изометрия поверхностей:

$$r_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3, \qquad r_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$$

$\Phi : D_1 \to D_2$ назыается изометрией, если длина кривой на $r_1(D_1)$ равна длине образа
Тут нужна картинка

С учётом некоторой перепараметризации рассмотрим в некотором роде одинаковые параметризации

Теорема 1. Поверхности изометричны **тогда и только тогда**, когда в некоторой параметризации у них совпадают коэффициенты E, F, G

Доказательство.

- $\Longleftarrow$:
  Формула длины кривой:
  $$l = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,\mathrm{d}\,t$$
  Они должны совпасть
  $$\overline{\Phi} := r_2 \circ r_1^{-1}$$
- $\Longrightarrow$:
  Возьмём кривую
  $$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t_0 \end{cases}$$
  Можно НУО считать, что параметризованы одинаково (иначе перепараметризуем)
  $$l_1 = \int_a^b \sqrt{E_1}\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{E_1}(b-a)$$

$$l_2 = \int_a^b \sqrt{E_2}\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{E_2}(b-a)$$

По предположению, они равны
Тем самым $E_1 = E_2$
Аналогично, взяв

$$\begin{cases} u(t) = t_0 \\ v(t) = t \end{cases}$$

получаем $G_1 = G_2$
Взяв

$$\begin{cases} u(t) = t + t_0 \\ v(t) = t + t_1 \end{cases}$$

получаем

$$\int_a^b \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2}\,\mathrm{d}\,t \qquad \Longrightarrow F_1 = F_2$$

□

Замечание. То, что поверхности изометричны, **не** означает, что первые квадратичные формы совпадут. Это лишь значит, что **сущетсвует** параметризация, в которой они совпали

1.2.1 Рецепт использования

Определение 2. k – характеристика поверхности
Говорят, что k относится к внутренней геометрии поверхности, если k не меняется при изометрии

Другая формулировка. k зависит только от E, F, G

Замечание. E, F, G – функции. Так что зависимость от их производны тоже пойдойдёт

Задача (поставленная Гауссу)**.** Можно ли нарисовать карту, не искажающую расстояния?

Другая формулировка. Изометрична ли сфера плоскости?

Ответ. Нет

В дальнейшем это будет доказано

1.3 Площадь поверхности

1.3.1 Интуиция

Наверное, площадь не должна меняться при изометрии

Как хосется определить площадь поверхности: Натыкать много точек, соединить их треугольничками, взять предел суммы их площадей

Оказывается, так сделать нельзя:

Пример (сапог Шварца)**.** Есть цилиндр
Его можно развернуть в прямоугольник и посчитать площадь:

$$S = 2\pi RH$$

Разобъём на треугольники:

1. Порежем на слои

2. В каждый слой впишем правильный n-уголькик

3. Построим антипризму
   Антипризма:
   (a) Берём в верхнем и нижнем основании правильный n-угольник
   (b) Поворачиваем одно из оснований так, чтобы напротив вершины оказалась середина стороны
   (c) Соединим вершины
4. Считаем, что высоту мы разбили на k частей, каждая часть представляет собой n-угольную антипризму

   Вопрос 1. Сколько в одном слое треугольников?

   Ответ. $2n$

   Всего $2kn$ треугольников
5. Посчитаем площадь каждого треугольника:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}lh$$

Найдём l:
Есть круг радиуса R, мы в него вписали правильный n-угольник, хотим посчитать его сторону. Угол в центре будет равен $\frac{2\pi}{n}$. Применим теорему косинусов:

$$l^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\frac{2\pi}{n}$$

$$l = R\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

Найдём h:

Замечание. Треугольник немножко искривляется. Направление его высоты не совпадает с напрвлением образующей цилиндра. $h \neq \frac{H}{k}$

$$a = R - R\cos\frac{\pi}{n}$$

$$h = \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2\cdot 4\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$

$$S \overset{?}{=} \lim_{\pi n\to\infty} 2kn\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\underbrace{\sin\frac{\pi}{n}}_{\sim\pi/n}\cdot\sqrt{\frac{H^2}{k^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} = 2\pi RH\lim\sqrt{1+\frac{k^2}{H^2}\cdot 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$

Это равно $2\pi RH$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{k^2}{H^2}\cdot 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n} \overset{?}{\to} 0$$

$$\frac{\pi^4R^2}{4H^2}\cdot\frac{k^2}{n^4} \overset{?}{\to} 0$$

То есть, $k \overset{?}{=} o(n^2)$
То есть, разбивая на много низких, крупно нарезанных антипризм, получаем неправильную площадь

Исправить k и n мы не можем. Так что проблема в том, что треугольники не совпадают с касательными плоскостями

1.3.2 Правильное определение

Рассмотрим разбиение координатными линиями. Каждый полученный криволинейный четырёхугольник проецируем на касательные плоскости
Берём предел суммы площадей этих проекций

Надо это нормально записать

Теорема 2. $S = \iint \sqrt{r_u \times r_v} \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v$

Доказательство. Без доказательства (на самом деле, это и есть определение двойного интеграла) $\square$

Теорема 3. $S = \iint \sqrt{EG - F^2} \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v$

Следует из леммы:

Лемма 1. $|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}$