Оглавление

Глава 1

Жорданова форма оператора

V – векторное пространство, $\mathcal{A} : V \to V$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{e_1,\dots,e_n} A, \qquad \mathcal{A} \xrightarrow{e'_1,\dots,e'_n} A'$$

Жорданова клетка:

$$Jr(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & . \\ 1 & \lambda & 0 & . \\ 0 & 1 & \lambda & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Жорданова форма – матрица, у которой на главной диагонали жордановы клетки

$$\begin{pmatrix} Jr(\lambda_1) & 0 & 0 & . \\ 0 & Jr(\lambda_2) & 0 & . \\ 0 & 0 & Jr(\lambda_3) & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

1.0.1 Напоминание: собственные числа

Определение 1. $\mathcal{A}$ – оператор на V
Число λ называется собственным для $\mathcal{A}$, если

$$\underset{v \neq 0}{\exists\, v \in V} : \mathcal{A}v = \lambda v$$

v называется собственным вектором, соответствующим λ

Определение 2. A – квадратная матрица
Число λ называется собственным, если

$$\underset{X \neq 0}{\exists \text{ столбец } X} : AX = \lambda X$$

X называется собственным столбцом

Определение 3. A – квадратная матрица
Характеристическим многочленом A называется $\chi_A(t) = \det(A - tE)$

Теорема 1. Собственные числа A – корни $\chi_A(t)$

Определение 4. $\mathcal{A}$ – оператор, A – его матрица в некотором базисе
Характеристическим многочленом $\mathcal{A}$ называется $\chi_A(t)$

1.1 Собственные подпространства

Определение 5. V – векторное пространство, $\mathcal{A}$ – оператор на V, λ – с. ч.
Собственным подпространством, соответствующим λ, называется множество с. в., соответствующих λ

Обозначение. V_λ

Определение 6. U – подпространство V
U называется инвариантным относительно $\mathcal{A}$, если

$$\forall x \in U \quad \mathcal{A}x \in U$$

Утверждение 1. V_λ – инвариантное подпространство

Доказательство.

- Подпространство
  - $u, v \in V_\lambda \implies \begin{Bmatrix} \mathcal{A}u = \lambda u \\ \mathcal{A}v = \lambda v \end{Bmatrix} \implies \mathcal{A}(u+v) \underset{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}u + \mathcal{A}v = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v) \implies u+v \in V_\lambda$
  - $u \in V_\lambda, k \in K \implies \mathcal{A}(ku) = k\mathcal{A}(u) = k\lambda u = \lambda(ku) \implies ku \in V_\lambda$
- Инвариантность
$$u \in V_\lambda \implies \mathcal{A}u = \lambda u \in V_\lambda$$

□

Теорема 2 (о сумме собственных подпространств). $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные собственные числа
Тогда сумма $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k}$ является прямой

Доказательство. **Индукция** по k

- **База.** $k = 1$ – очевидно
- **Переход.** $k-1 \to k$
Пусть $U_1 + \ldots + U_{k-1} + U_k = 0, \qquad U_i \in V_{\lambda_i}$

$$0 = \mathcal{A}(\underbrace{U_1 + \ldots + U_{k-1} + U_k}_{=0}) - \lambda_k(\underbrace{U_1 + \ldots + U_{k-1} + U_k}_{=0}) =$$
$$= \lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_{k-1}U_{k-1} + \lambda_k U_k - \lambda_k U_1 - \ldots - \lambda_k U_{k-1} - \lambda_k U_k = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} U_1 + \ldots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} U_{k-1}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_k)U_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, (\lambda_{k-1} - \lambda_k)U_{k-1} \in V_{\lambda_{k-1}}$$

$V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_{k-1}}$ – прямая

$$\implies (\lambda_1 - \lambda_k)U_1 = \ldots = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)U_{k-1} = 0 \implies U_1 = \ldots = U_{k-1} = 0 \implies U_k = 0$$

□

Следствие. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные с. ч., $U_i \in V_{\lambda_i}$, $U_i \neq 0$
Тогда $U_1, \ldots, U_k$ ЛНЗ

Доказательство. Пусть $a_1 U_1 + \ldots + a_k U_k = 0$

$$a_1 U_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, a_k U_k \in V_{\lambda_k} \implies a_1 U_1 = \ldots = a_k U_k = 0 \implies a_1 = \ldots = a_k = 0$$

□

1.2 Операторы с диагональными и блочно-диагональными матрицами

В этом параграфе рассматриваем конечномерные пространства

Определение 7. Оператор $\mathcal{A}$, действующий на V называется диагонализуемым, если его матрица в некотором базисе диагональна

Определение 8. $\mathcal{A}$ – оператор, λ – с. ч.

- Геометрической кратностью λ называется $\dim V_\lambda$
- Арифметической кратностью λ называется кратность λ как корня $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

Теорема 3 (критерий диагонализуемости в терминах геометрической кратности)**.** (I) $\mathcal{A}$ диагонализуем $\iff$ (II) сумма геометрических кратностей всех с. ч. равна $\dim V$

Доказательство. $\mathcal{A}$ диагонализуем $\iff$ в нек. базисе $e_1, ..., e_n$ матрица $\mathcal{A}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & . \\ 0 & a_2 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$

$\iff$ для некоторого базиса $e_1, ..., e_n$ выполнено

$$\mathcal{A}e_i = 0e_1 + ... + a_ie_i + ... + 0e_n = a_ie_i$$

$\iff$ (I') сущ. базис из с. в.
Докажем, что (I) $\iff$ (I'):
Пусть $U = V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_k}$

$$n := \dim V, \qquad d_i := \dim V_{\lambda_i}$$

- (II) $\implies$ (I')
  Докажем, что $d_1 + ... + d_k = n$

  $$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_k} \text{ прямая } \implies \dim U = n \implies U = V$$

  $$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_k} \text{ прямая } \implies \text{ объединение базисов является базисом } U = V$$

  Эти базисы состоят из с. в.
  Объединение базисов состоит из с. в.
  Это базис V

- (I') $\implies$ (II)
  Сущетсвует базис V из с. в.

  $$\underbrace{e_1^{(1)}, ..., e_{t_1}^{(1)}}_{\substack{\text{соотв. } \lambda_1 \\ \in V_{\lambda_1}}}, \underbrace{e_1^{(2)}, ..., e_{t_2}^{(2)}}_{\substack{\text{соотв. } \lambda_2 \\ \in V_{\lambda_2}}}, \dots\dots\dots\dots$$

  $$e_1^{(1)}, ..., e_{t_1}^{(1)} \text{ ЛНЗ } \implies t_1 \le d_1$$
  $$\dots\dots\dots\dots \implies t_2 \le d_2$$
  $$\dots\dots\dots\dots$$
  $$d_1 + d_2 + ... + d_k \ge n$$
  $$n \ge \dim U = d_1 + ... + d_k$$

$\square$

Следствие (достаточное условие диагонализуемости)**.** Пусть $\dim V = n$
Если у $\mathcal{A}$ есть n различных с. ч., то $\mathcal{A}$ диагонализуем

Доказательство. $\dim V_{\lambda_i} \geq 1$

$$n \geq \dim(V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_k}) \underset{\text{пр. сумма}}{=} \dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_k} \geq n$$

Значит, достигается равенство $\square$

Напоминание (определитель ступенчатой матрицы).

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, A, C \text{ – кв.} \implies |M| = |A| \cdot |C|$$

Теорема 4 (арифм. и геом. кратности). λ – с. ч. $\mathcal{A}$
Геом. кратность $\lambda \leq$ арифм. кратности λ

Доказательство. Пусть $n = \dim V, \quad k$ – геом. кр. λ
Выберем базис $e_1, ..., e_k$ пространства V_λ
Дополним его до базиса V: $e_1, ..., e_k, ..., e_n$
При $i \leq k$ выполнено $\mathcal{A}e_i = \lambda e_i = 0e_1 + ... + \lambda e_i + ... + 0e_n$
Матрица $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, ..., e_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & . & & B \\ . & \lambda & & \\ & & & \\ 0 & 0 & & C \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Для некоторых $B_{k \times n-k}$, $C_{n-k \times n-k}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} (\lambda - t)E_k & B \\ 0 & C - tE_{n-k} \end{vmatrix} = \det\Big((\lambda - t)E_k\Big) \cdot \det(C - tE_{n-k}) = (\lambda - t)^k \cdot \det(C - tE_{k-n})$$

$\square$

Следствие (критерий диагонализуемости в терминах арифметических и геометрических кратностей).
Опреатор $\mathcal{A}$ диагонализуем $\iff$

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ раскладывается на линейные множители
2. $\forall$ с. ч. $\lambda \quad$ арифм. кр. $=$ геом. кр.

Доказательство. Пусть λ_i – с. ч., d_i – геом. кр., a_i – арифм. кр., $n = \dim C$

$$\chi(t) - (t - \lambda_1)^{a_1} ... (t - \lambda_k)^{a_k} \cdot f(t)$$

$$n = \deg \chi(t) \geq a_1 + ... + a_k \geq d_1 + ... + d_k$$

Диагонал. $\iff n = d_1 + ... + d_k \iff$ везде достигаются равенства $\square$