Оглавление

Глава 1

Определённый интеграл

1.1 Продолжение несобственных интегралов

Свойство. $c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \implies \int_a^\beta cf(x)\,\mathrm{d}\,x = c\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \implies \int_\alpha^b cg(x)\,\mathrm{d}\,x = c\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Следует из свойств пределов □

Утверждение 1.

- $\forall x \in [a, \beta) \quad f(x) \geq 0, \qquad a < x_1 < x_2 < \beta$

$$\int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \geq 0 \tag{1.1}$$

  Положим $F(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y$

$$(1.1) \implies F \text{ возрастает} \tag{1.2}$$

> **Напоминание.**
>
> $$\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \iff \exists\, M > 0 : \forall x \in [a, \beta) \quad F(x) \leq M \tag{1.3}$$

- Рассмотрим $\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$, где $\forall x \in (\alpha, b] \quad g(x) \geq 0$ и $\alpha < x_1 < x_2 < b$
  Положим $G(x) := \int_x^b g(y)\,\mathrm{d}\,y$

$$G(x_1) - G(x_2) = \int_{x_1}^b g(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_{x_2}^b g(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_1}^{x_2} g(y)\,\mathrm{d}\,y \geq 0 \tag{1.4}$$

  $(1.4) \implies G(x)$ убывает на $(\alpha, b]$

> **Напоминание.**
>
> $$\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \iff \exists\, L : \forall x \in (\alpha, b] \quad G(x) \leq L$$

Теорема 1 (признаки сравнения несобственных интегралов от неотрицательных функций)**.**

$$f_1, f_2 : [a, \beta), \qquad \forall x \in [a, \beta) \quad f_1(x) \geq 0,\ f_2(x) \geq 0$$

$$\exists\, c > 0 : \forall x \in [a, \beta) \quad f_1(x) \leq cf_2(x) \tag{1.5}$$

1. $\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x$ сходится

$$\implies \begin{cases} \int_a^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \\ \int_a^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}\,x \le c\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x \end{cases} \tag{1.6}$$

Доказательство.

$$\exists\, M : F_2(x) := \int_a^x f_2(y)\,\mathrm{d}\,y \le M \tag{1.7}$$

$$(1.5) \implies F_1(x) := \int_a^x f_1(y)\,\mathrm{d}\,y \le \int_a^x cf_2(y)\,\mathrm{d}\,y = c\int_a^x f_2(y)\,\mathrm{d}\,y = cF_2(x) \le cM \tag{1.8}$$

$$F_1(x) \le cF_2(x) \implies \lim_{x\to\beta} F_1(x) \le \lim_{x\to\beta} cF_2(x) \implies (1.6)$$

□

2. $\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x$ расходится $\implies$ $\int_a^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}\,x$ расходится

Доказательство. Пусть это неверно, т. е. $\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x$ сходится $\underset{1}{\Rightarrow}$ $\int_a^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}\,x$ сходится □

Аналогичная теорема для $\int_\alpha^b$

1.2 Абсолютная сходимость несобственных интегралов

Определение 1. Говорят, что $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$ абсолютно сходится, если сходится $\int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$
Говорят, что $\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$ абсолютно сходится, если сходится $\int_\alpha^b |g(x)|\,\mathrm{d}\,x$

Теорема 2. Абсолютно сходящийся интеграл сходится

Доказательство. Будем рассматривать только $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$ (второй – аналогично)
Будем пользоваться критерием Коши
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \implies \exists\,\omega(\beta) : \forall x_1, x_2 \in \omega(\beta) \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(y)|\,\mathrm{d}\,y\right| < \varepsilon \tag{1.9}$$

В силу одного из свойств,

$$0 \le \int_{x_1}^{x_2} |f(y)|\,\mathrm{d}\,y < \varepsilon \tag{1.10}$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \le \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \underset{(1.10)}{<} \varepsilon \implies \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{1.11}$$

□

Определение 2. Говорят, что $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$ неабсолютно (условно) сходится, если он сходится, а $\int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$ расходтся
Аналогично для $g(x)$

Теорема 3 (признак Абеля сходимости несобственных интегралов)**.**

$$\int_a^\beta f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1.12}$$

$f, g \in C([a, \beta)), \qquad f'(x), g'(x) \in C([a, \beta))$

$$g(x) \text{ мнотонна} \tag{1.13}$$

$$\exists\, M : \forall x \in [a, \beta) \quad |g(x)| \le M \tag{1.14}$$

$$\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{1.15}$$

$\implies$ (1.12) сходится

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega(\beta) : \forall x_1, x_2 \in \omega(\beta) \quad \left| \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| < \varepsilon \tag{1.16}$$

Рассмотрим $\int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y$

Применим вторую теорему о среднем:

$$\exists\, c \text{ между } x_1 \text{ и } x_2 : \int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y = g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y + g(x_2)\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \tag{1.17}$$

$$(1.14), (1.16), (1.17) \implies \left| g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y + g(x_2)\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| \le$$
$$\le |g(x_1)| \left| \int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| + |g(x_2)| \left| \int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| < M\cdot\varepsilon + M\cdot\varepsilon \tag{1.18}$$

(1.18) $\implies$ (1.12) сходится □

Теорема 4 (признак Абеля сходимости несобственных интегралов)**.**

$$\int_\alpha^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1.19}$$

$f, g \in C((\alpha, b])$, $\quad f'(x), g'(x) \in C((\alpha, b])$, $\quad g(x)$ монотонна

$\exists\, M : \forall x \in (\alpha, b] \quad |g(x)| \le M$, $\quad \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ сходится $\implies$ (1.19) сходится

Теорема 5 (признак Дирихле сходимости несобственных интегралов)**.**

$$\int_a^\beta f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1.20}$$

$f, g \in C([a, \beta))$, $\quad g' \in C([a, \beta))$

$$f(x) \xrightarrow[x\to\beta]{} 0 \tag{1.21}$$

$$g \text{ монотонна} \tag{1.22}$$

$$\exists\, M : \forall x \in (a, \beta] \quad \left| \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| \le M \tag{1.23}$$

$\implies$ (1.20) сходится

Доказательство.

$$(1.21) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega(\beta) : \forall x \in \omega(\beta) \quad |g(x)| < \varepsilon \tag{1.24}$$

Возьмём $x_1, x_2 \in \omega(\beta)$

$$(1.23) \implies \left| \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| = \left| \int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| \underset{\triangle}{\le} \left| \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| + \left| \int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| \le$$
$$\le M + M = 2M \tag{1.25}$$

$$\exists c \text{ между } x_1 \text{ и } x_2 : \int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y = g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y + g(x_2)\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \xRightarrow[(1.24),(1.25)]{}$$

$$\Longrightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y \le |g(x_1)|\right|\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| + |g(x_2)|\left|\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| < \varepsilon\cdot 2M + \varepsilon\cdot 2M = 4M\varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (1.20) \text{ сходится}$$

□

Аналогичная теорема для $\int_\alpha^b$

Утверждение 2.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$\left|\int_1^x \sin x\,\mathrm{d}\,x\right| = |\cos 1 - \cos x| \le 2 \Longrightarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

$$\text{Предположим, что } \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{1.26}$$

$$\forall x \quad |\sin x| \ge \sin^2 x$$

$$(1.26) \Longrightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{1.27}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\big)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{1.28}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{1.29}$$

$$(1.28),(1.29) \Longrightarrow \int_1^\infty \left[\frac{1}{x}\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\big) + \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{x}\right]\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \Longrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{2}\frac{x}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x} \text{ сходится}$$

1.3 Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 6. $\varphi \in C([P,Q))$, $\forall t \in [P,Q)$ $\varphi(t) \in [a,\beta)$, φ монотонна, $\varphi' \in C([P,Q))$, $f \in C([a,\beta))$, $\varphi(P) = a$, $\varphi(Q) = \beta$, $Q \le +\infty$, $\beta \le +\infty$
Если сходится один из $I_1 := \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$, $I_2 := \int_P^Q f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$, то сходится и второй
При этом верно равенство $I_1 = I_2$

Доказательство. Положим $P < q < Q$

$$\int_a^{\varphi(q)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_P^q f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$q \to Q \iff \varphi(q) \to \beta$$

□

Пример.

$$\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^p x}$$

Положим $x \coloneqq e^t$. Тогда $\ln x = t$ и $x' = e^t$

$$\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x \ln^p x} = \int_1^\infty \frac{e^t}{e^t} t^p \, \mathrm{d}\,t = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,t}{t^p}$$

Этот интеграл:

- сходится при $p > 1$
- расходится при $p \leq 1$

Глава 2

Числовые ряды

Определение 3. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \qquad a_n \in \mathbb{R}, \qquad k \geq 0$
Чисовым рядом будем называть **символ**

$$\sum_{m=k}^{\infty} a_m \tag{2.1}$$

Ему эквивалентен **символ**

$$a_k + a_{k+1} + \ldots \tag{2.2}$$

Возьмём $N \in \mathbb{N}$
Частичной суммой ряда (2.1) будем называть

$$S_N = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+N-1} \tag{2.3}$$

Определение 4. Будем говорить, что ряд (2.1) сходится, если

$$\exists \lim_{N\to\infty} S_N \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Если ряд сходится, то будем называть этот предел суммой ряда
Ряду в таком случае придаётся числовое значение:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{m=k}^{\infty} = a_k + a_{k+1} + \ldots$$

Определение 5. Если этот предел не существует или бесконечен, говорят, что ряд расходится
В таком случае ряду не придаётся никакого числового значения

Свойства.

1. Ряд (2.1) сходится, $\quad c \in \mathbb{R}$

$$\sum_{m=k}^{\infty} ca_m = c\sum_{m=k}^{\infty} a_m$$

Доказательство.

$$ca_k + ca_{k+1} + \ldots + ca_{k+N-1} = c\big(a_k + \ldots + a_{k+N-1}\big)$$

□

2. Ряд (2.1) сходится

$$\sum_{m=k}^{\infty} b_m \text{ сходится } \implies \sum_{m=k}^{\infty} (a_m + b_m) = \sum_{m=k}^{\infty} a_m + \sum_{m=k}^{\infty} b_m$$

Теорема 7 (необходимость *сходимости*).

$$\sum_{m=k}^{\infty} \text{сходится} \implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2.5}$$

Доказательство. Положим $\sum_{m=k}^{\infty} a_m := S \in \mathbb{R}$
Возьмём $n > k$

$$\left.\begin{aligned} a_k + a_{k+1} + ... + a_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S \\ a_k + a_{k+1} + ... + a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$(2.6) \implies a_n = \big(a_k + a_{k+1} + ... + a_n\big) - \big(a_k + a_{k+1} + ... + a_{n-1}\big) \to S - S = 0$$

□

Определение 6. Возьмём $l > k$
Ряд

$$\sum_{m=l}^{\infty} a_m \tag{2.7}$$

называется остатком ряда (2.1)

Утверждение 3. Для того чтобы ряд (2.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы любой его остаток сходился
При этом справедливо следующе соотношение:

$$\sum_{m=l}^{\infty} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \tag{2.8}$$

Доказательство. Возьмём $N > l$

- $$a_k + a_{k+1} + ... + a_{l-1} + a_l + ... + a_{N-1} = \big(a_k + a_{k+1} + ... + a_{l-1}\big) + \big(a_l + ... + a_{N-1}\big) \tag{2.9}$$

  Доказано, что любой остаток сходится вместве с самим рядом

- Докажем соотношение (2.8):
  Обозначим $\sum_{m=k}^{\infty} a_m := S$

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L : \forall l_0 > L \quad |a_k + a_{k+1} + ... + a_{l_0} - S| < \varepsilon$$

  Положим $l := l_0 + 1$ и выберем $\forall N > l$

  $$a_l + a_{l+1} + ... + a_{N-1} = \big(a_k + a_{k+1} + ... + a_{l-1} + a_l + ... + a_{N-1}\big) - \big(a_k + a_{k+1} + ... + a_{l-1}\big) \tag{2.10}$$

  $$(2.10) \implies |a_l + a_{l+1} + ... + a_{N-1}| \leq |a_k + a_{k+1} + ... + a_{N-1} - S| + |a_k + a_{k+1} + ... + a_{l-1} - S| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

Теорема 8 (критерий Коши сходимости ряда). Для того чтобы ряд (2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n_2 > n_1 > N \quad |a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}| < \varepsilon \tag{2.11}$$

Доказательство.

$$S_{n_2+1} = a_k + a_{k+1} + ... + a_{n_2}$$
$$S_{n_1+1} = a_k + a_{k+1} + ... + a_{n_1}$$

Вспомним критерий Коши для последовательностей:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n_2 > n_1 > N \quad |S_{n_2+1} - S_{n_1+1} < \varepsilon \tag{2.12}$$

$$S_{n_2+1} - S_{n_1+1} = a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}$$
$$(2.12) \implies (2.11)$$

□

2.1 Ряды с неотрицательными слагаемыми

Будем рассматривать ряды вида
$$\sum_{m=1}^{\infty} a_n, \qquad \forall n \quad a_n \geq 0 \tag{2.13}$$
$$S_n = a_1 + ... + a_n$$
$$S_{n+1} - S_n = \big(a_1 + ... + a_n + a_{n+1}\big) - \big(a_1 + ... + a_n\big) = a_{n+1} \geq 0$$
То есть, последовательность S_n возрастает

Теорема 9 (критерий сходимости рядов с неотрицательными слагаемыми)**.** Для того что бы ряд (2.13) сходился, необходимо и достаточно, чтобы
$$\exists\, M : \forall n \quad S_n \leq M \tag{2.14}$$

Теорема 10 (признаки сравнения рядов с неотрицательными слагаемыми)**.** Рассмотрим также ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \forall n \quad b_n \geq 0 \tag{2.15}$$
$$\exists\, c : \forall n \quad a_n \leq c b_n \tag{2.16}$$

- Если (2.15) сходится, то (2.13) сходится, и выполнено
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq c \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.17}$$

Доказательство.
$$\forall n \quad b_1 + ... + b_n \leq M \tag{2.18}$$
$$(2.18), (2.16) \implies a_1 + ... + a_n \leq c b_1 + ... + c b_n = c\big(b_1 + ... + b_n\big) \leq cM \implies (2.13) \text{ сходится}$$

□

- Если (2.13) расходится, то (2.15) сходится

Теорема 11 (признак Коши *чего-то*)**.**
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \forall n \quad a_n \geq 0 \tag{2.19}$$
$$q \coloneqq \overline{\lim}\, n \to \infty \sqrt[n]{a_n} \geq 0$$

$q < 1 \implies$ (2.19) сходится

- $q > 1 \implies$ (2.19) расходится
- $q = 1 \implies$ ....

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0 : q + \varepsilon \coloneqq r < 1$

$$\exists N : \forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \tag{2.20}$$

То есть,

$$\sqrt[n]{a_n} < r \iff a_n < r^n \tag{2.21}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \text{ сходится} \tag{2.22}$$

По признаку сравнения,

$$(2.21), (2.22) \implies \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

$\square$