

Оглавление

0.1	Продолжаем доказывать теорему об обратном отображении	1
0.2	Теорема об открытом отображении	7

0.1 Продолжаем доказывать теорему об обратном отображении

Лемма 1. $U = B_r(X_0)$, $X_1 \in U$, $0 < \rho < r - \|X_0 - X_1\|$, $S = B_\rho(X_1)$

Замечание. В силу последних двух условий, $S \subset U$ (т. к. $U \stackrel{\text{def}}{=} B_r(X_0)$)

$$Y_1 = F(X_1) \implies B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F(S) \quad (1)$$

Примечание. r, λ, X_0, F из теоремы и первых двух шагов доказательства

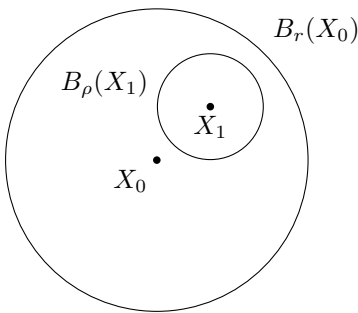


Рис. 1: Здесь $r = 2$, $\|X_0 - X_1\| = 1$, $\rho = 0.7$

Доказательство. $X \in U$, $X + H \in U$

$$\|F(X + H) - F(X)\| \geq 2\lambda \|H\| \quad (2)$$

(по последнему соотношению из второго шага доказательства)

$$(2) \iff \|F(X_2) - F(X_3)\| \geq 2\lambda \|X_2 - X_3\| \quad \forall X_2, X_3 \in U \quad (3)$$

По условию, $Y_1 \in F(S)$ (т. к. это образ X_1)

Возьмём $Y \neq Y_1$, $Y \in B_{\lambda\rho}(Y_1)$

S – открытый шар

Рассмотрим функцию $k(X) := \|F(X) - Y\|$, $X \in \bar{S}$

\bar{S} – замкнутый шар, а значит, компакт. Поэтому $k \in \mathcal{C}(\bar{S})$

По второй теореме Вейерштрасса, k достигает минимального значения:

$$\exists X_* \in \bar{S} : k(X_*) \leq k(X) \quad \forall X \in \bar{S} \quad (4)$$

Утверждение 1. X_* не принадлежит границе \bar{S} (т. е. $X_* \in S$)

Доказательство. Действительно, если $\|X_0 - X_1\| = \rho$ (т. е. X_0 лежит на границе \bar{S}), то

$$\implies \|F(X_0) - F(X_1)\| \underset{(3)}{\geq} 2\lambda \|X_1 - X_0\| = 2\lambda\rho$$

По определению, $F(X_1) = Y_1$. Подставим:

$$\|F(X_0) - Y_1\| \geq 2\lambda\rho \quad (5)$$

При этом, $Y \in B_{\rho\lambda}(Y_1)$. Значит,

$$\|Y - Y_1\| < \lambda\rho \quad (6)$$

$$\|F(X_0) - Y\| \stackrel{\Delta}{\geq} \|F(X_0) - Y_1\| - \|Y_1 - Y\| \underset{(5),(6)}{>} 2\lambda\rho - \lambda\rho = \lambda\rho$$

В обозначениях k можно записать:

$$\left. \begin{aligned} k(X_0) &\stackrel{\text{def } k}{=} \|F(X_0) - Y\| > \lambda\rho \\ k(X_1) &\stackrel{\text{def } k}{=} \|Y_1 - Y\| < \lambda\rho \end{aligned} \right\} \implies k(X_1) < k(X_0) \quad (7)$$

Взяли точку на границе диска (на сфере). Получили, что значение функции на границе строго больше, чем значение в центре. Значит, минимум (X_*) не может лежать на границе, т. е.

$$X_* \in S \quad (8)$$

□

Рассмотрим функцию $l(X) := k^2(X)$

Понятно, что её минимум совпадёт с минимумом k :

$$(4) \implies l(X_*) \leq l(X) \quad \forall X \in \bar{S} \quad (9)$$

$$l(X) \stackrel{\text{def } k}{=} \|F(X) - Y\|^2 \quad (10)$$

Пусть

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях,

$$(10) \implies l(X) = \sum_{i=1}^l \left(f_i(X) - y_i \right)^2 \quad (11)$$

По условию теоремы, F , а значит и его координатные функции гладкие ($\in \mathcal{C}^1$, т. е. имеют непрерывные частные производные). Нетрудно заметить, что

$$l \in \mathcal{C}^1(U) \quad (12)$$

Вспомним необходимое условие локального экстремума (из второго семестра):

Напоминание. Если функция имеет частный экстремум и она дифференцируема в этой точке, то все частные производные в этой точке равны нулю

Его можно применять только к внутренним точкам (именно для этого мы и проверяли, что $X_* \in S$)

$$(8), (9), (12) \implies l'_{x_j}(X_*) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (13)$$

Из соотношения (11) понятно, как выглядят частные производные:

$$l'_{x_j}(X_*) \stackrel{(11)}{=} \sum_{i=1}^n 2 \left(f_i(X_*) - y_i \right) f'_{ix_j}(X_*) \stackrel{(13)}{=} 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Поделим на 2:

$$\sum_{i=1}^n \left(f_i(X_*) - y_i \right) f'_{ix_j}(X_*) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

Заметим, что здесь фигурирует матрица Якоби. Чтобы её записать, введём обозначение:

$$A := \left(f_1(X_*) - y_1, \dots, f_n(X_*) - y_n \right)$$

Очевидно, что.

$$A = \left(F(X_*) - Y \right)^T \quad (15)$$

Имеется n равенств. В них фигурируют элементы матрицы Якоби:

Утверждение 2.

$$(14) \iff ADF(X_*) = \mathbb{O}_n^T \quad (16)$$

Доказательство.

$$\mathcal{D}F(X_*) = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}(X_*) & \dots & f'_{1x_n}(X_*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{nx_1}(X_*) & \dots & f'_{nx_n}(X_*) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ADF(X_*) &= \left[\left(f_1(X_*) - y_1 \right) f'_{1x_1}(X_*) + \dots + \left(f_n(X_*) - y_n \right) f'_{nx_1}(X_*) , \dots \right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \left(f_i(X_*) - y_i \right) f'_{ix_1}(X_*) , \dots \right] = (14) \end{aligned}$$

□

Утверждение 3.

$$\det \mathcal{D}F(X) \neq 0 \quad \forall X \in U \quad (17)$$

Доказательство. Вспомним соотношение из теоремы об отображении, близком к обратимому:

$$\|A\| = \frac{1}{\alpha}, \quad \|A - B\| = \beta < \alpha \quad \implies \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{2\alpha}$$

Применим это к $\alpha = 4\lambda, \quad \beta = 2\lambda$:

$$\|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| < 2\lambda$$

$$\|\mathcal{D}F(X_0)\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{D}F(X_0)$ обратима и для неё выполняется неравенство:

$$\left\| \left(\mathcal{D}F(X) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{2\lambda}$$

Это значит, что она она неособенна ($\det \neq 0$)

□

(17) позволяет нам взять обратную матрицу к $\mathcal{D}F(X_*)$:

$$\left. \begin{aligned} \left(ADF(X_*) \right) \left(\mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} &\stackrel{(16)}{=} \mathbb{O}_n^T \left(\mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} = \mathbb{O}_n^T \\ \left(ADF(X_*) \right) \left(\mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} &\stackrel{\text{acc.}}{=} A \left(\mathcal{D}F(X_*) \right) \left(\mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} = AI = A \end{aligned} \right\} \implies A = \mathbb{O}_n^T$$

При этом, $A \stackrel{(15)}{=} \left(F(X_*) - Y \right)^T$, то есть $F(X_*) - Y = \mathbb{O}_n$
 Значит, $F(X_*) = Y$ и $Y \in F(S)$ □

Определение 1. $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – открытое, $M : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$
 Будем говорить, что M – открытое отображение, если

$$\forall \omega \subset \Lambda \quad \omega - \text{откр.} \quad M(\omega) \text{ открытое}$$

(то есть, открытые отображения переводятся в открытые)

Приведём определение непрерывного отображения, которое используется в топологии (частный его случай для евклидова пространства):

Определение 2. $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – открытое, $M : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$
 M непрерывно, если прообраз любого открытого множества открыт

Примечание. Пустое множество открыто. Если прообраза у какого-то множества нет, то считаем, что прообраз пуст (а значит, открыт)

Определение 3 (из второго семестра). $M : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке Λ , то есть

$$\forall X_0 \in \Lambda \quad \exists \lim_{X \rightarrow X_0} M(X) = M(X_0)$$

То есть, в терминах шаров,

$$\forall X_0 \in \Lambda \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall X \in B_\delta(X_0) \setminus \{X_0\} \quad M(X) \in B_\varepsilon(M(X_0))$$

То есть,

$$\forall X_0 \in \Lambda \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : M(B_\delta(X_0)) \subset B_\varepsilon(M(X_0))$$

Утверждение 4. Приведённое определение непрерывности эквивалентно определению непрерывности, приведённому во втором семестре

Доказательство.

- опр. 3 \implies опр. 2
 Возьмём $V \subset \Lambda : U = M(V)$ открыто
 Возьмём $X_0 \in V$. Тогда $M(X_0) \in U$
 Т. к. U открыто, $M(X_0)$ содержится в нём вместе с каким-то шаром:

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(M(X_0)) \subset U$$

По определению 3,

$$\exists \delta > 0 : M(B_\delta(X_0)) \subset B_\varepsilon(M(X_0))$$

То есть, $B_\delta(X_0) \subset V$

- опр. 2 \implies опр. 3
 Возьмём $X_0 \in \Lambda$ и $\varepsilon > 0$
 Обозначим $U = B_\varepsilon(M(X_0))$
 При этом, $X_0 \in M^{-1}(U)$
 По определению 2, $M^{-1}(U)$ открыто, то есть

$$\exists \delta : B_\delta(X_0) \subset M^{-1}(U) \stackrel{\text{def } U}{=} M^{-1}(B_\varepsilon(M(X_0)))$$

Применим M :

$$M\left(B_\delta(X_0)\right) \subset B_\varepsilon\left(M(X_0)\right)$$

В силу произвольности ε , это и есть определение 3

□

Теорема 1 (об обратном отображении). $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \rightarrow \mathbb{R}^1$
 $F \in \mathcal{C}^1(E)$, т. е. все координатные функции $\in \mathcal{C}^1$, $Y_0 = F(X_0)$, $\mathcal{D}F(X_0)$ обратима

$$\implies \exists U - \text{окрестность } X_0, V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

Доказательство (продолжение).

1. Определили $U := B_r(X_0)$

2. Доказали инъективность $F|_U$

3. Применяем лемму

4. Докажем, что F – открытое отображение:

- По условию, $V = F(U)$. Докажем, что V – открытое множество:
 Возьмём $Y_1 \in F(U)$. Тогда $\exists X_1 \in U : F(X_1) = Y_1$
 Возьмём $0 < \rho < r - \|X_1 - X_0\|$
 Пусть $S := B_\rho(X_1)$
 Тогда, по шагу 3,

$$B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F\left(B_\rho(X_1)\right) \subset V = F(U)$$

Это и есть определение открытого множества

$$\implies V - \text{откр.}$$

- Возьмём $\omega \in U$ – открытое. Нужно доказать, что $F(\omega)$ открыто:
 Возьмём $Y_2 \in F(\omega)$
 Тогда $\exists X_2 : F(X_2) = Y_2$
 Поскольку $X_2 \in \omega$,

$$\exists \rho_1 > 0 : B_{\rho_1}(X_2) \subset \omega \subset U$$

Снова применяем шаг 3:

$$B_{\lambda\rho_1}(Y_2) \subset F\left(B_{\rho_1}(X_2)\right) \subset F(\omega)$$

Получили, что некоторый открытый шар полностью содержится в $F(\omega)$. Это и есть то, что требовалось доказать

5. Непрерывность обратного

На втором шаге мы выяснили, что $F|_U$ – биекция. Для любой биекции можно определить обратное отображение:

$$\exists \Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n : \begin{cases} \Phi(V) = U \\ F\left(\Phi(Y)\right) = Y \quad \forall Y \in V \\ \Phi\left(F(X)\right) = X \quad \forall X \in V \end{cases}$$

Проверим, что $\Phi \in \mathcal{C}(V)$:

По определению 2, нужно доказать, что $\forall \omega \subset U$ – откр. прообраз ω открыт. Напишем определение прообраза ω при Φ :

$$\omega^{-1} = \{ Y \in V : \Phi(Y) \in \omega \}$$

Если F – биекция, то и Φ – биекция:

$$\Phi(Y) \in \omega \xleftrightarrow[\text{биективность } \Phi]{} F(\Phi(Y)) \in F(\omega) \iff Y \in F(\omega)$$

Теперь можно переписать определение прообраза:

$$\omega^{-1} = \{ Y : Y \in F(\omega) \}$$

По шагу 4, $F(\omega)$ открыто (как образ открытого при открытом отображении)

6. Φ дифференцируема в $Y \quad \forall Y \in V$

Зафиксируем K такое, что $Y + K \in V$, $K \neq \mathbb{O}_n$

Обозначим $\Phi(Y) := X$, $\Phi(Y + K) := X + H$

Это эквивалентно тому, что $Y = F(X)$, $Y + K = F(X + H)$

$$K = Y + K - Y = F(X + H) - F(X) \quad (18)$$

На основании шага 5,

$$K \xrightarrow[H \rightarrow \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n, \quad H \xrightarrow[K \rightarrow \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n$$

Также, по соотношению (20) из шага 2, $\|F(X + H) - F(X)\| \geq 2\lambda \|H\|$, то есть

$$\|K\| \geq 2\lambda \|H\| \quad (19)$$

Напоминание. По условию, $\mathcal{D}F(X)$ обратима и

$$\left\| \left(\mathcal{D}F(X) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{2\lambda} \quad (20)$$

(это мы выяснили в лемме, при доказательстве соотношения (17))

Обозначим $B := \left(\mathcal{D}F(X) \right)^{-1}$

$$K = (18) = \mathcal{D}F(X)H + t(H) \quad (21)$$

$$\text{где } \frac{1}{\|H\|} t(H) \xrightarrow[H \rightarrow \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n$$

Домножим (21) на B слева:

$$\begin{aligned} BK &= B \left(\mathcal{D}F(X)H \right) + Bt(H) \stackrel{\text{def } B}{=} IH + Bt(H) = H + Bt(H) \\ \implies BK - Bt(H) &= H \stackrel{(18)}{=} \Phi(Y + K) - \Phi(Y) \end{aligned} \quad (22)$$

В силу биективности F и Φ ,

$$K \neq \mathbb{O}_n \iff H \neq \mathbb{O}_n$$

$$\text{Значит, можно делить на } \|H\| \quad (23)$$

$$\frac{\|Bt(H)\|_n}{\|K\|_n} \leq \frac{\|B\| \cdot \|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \stackrel{(20)}{\leq} \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \stackrel{(23)}{=} \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\|t(H)\|}{\|H\|} \cdot \frac{\|H\|}{\|K\|} \stackrel{(19)}{\leq} \frac{1}{4\lambda^2} \frac{\|t(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow{K \rightarrow 0_n} 0 \quad (24)$$

$$(22), (24) \implies \Phi \text{ дифф. в } Y$$

Напоминание. Дифф. Φ означает, что

$$\Phi(Y + K) - \Phi(Y) = \mathcal{D}\Phi(Y)K + r(K), \quad \frac{\|r(K)\|}{\|K\|} \xrightarrow{K \rightarrow 0_n} 0$$

(важно, что матрица Якоби единственна)

Значит, кроме дифференцируемости, мы установили, что

$$(22) \implies \mathcal{D}\Phi(Y) = \left(\mathcal{D}\Phi(X) \right)^{-1}, \quad X = \Phi(Y) \quad (25)$$

$$7. \Phi \in \mathcal{C}^1(V)$$

Пользуясь формулой (25), запишем матрицу Якоби Φ в следующем виде:

$$\mathcal{D}\Phi(Y) = \left(\mathcal{D}\Phi(\Phi(Y)) \right)^{-1} \quad (26)$$

Из курса алгебры знаем, что обратимы только неособенные матрицы:

$$\det \mathcal{D}\Phi(X) \neq 0 \quad \forall X \in U$$

Матрица Якоби состоит из частных производных. Все они непрерывны по условию. Значит,

$$\det \mathcal{D}\Phi(X) \in \mathcal{C}(U)$$

Два последних выражения означают, что

$$\frac{1}{\det \mathcal{D}\Phi(X)} \in \mathcal{C}(U) \quad (27)$$

В силу шага 5,

$$(27) \implies \frac{1}{\det \mathcal{D}\Phi(\Phi(Y))} \in \mathcal{C}(V) \quad (28)$$

Алгебраические дополнения состоят из сумм и произведений частных производных в точке Y . Значит, они (дополнения) непрерывны, а значит

$$(26), (28) \implies \mathcal{D}\Phi(Y) \in \mathcal{C}(V) \iff \Phi \in \mathcal{C}^1(V)$$

□

0.2 Теорема об открытом отображении

Теорема 2. $G \subset \mathbb{R}^n$ – открыто, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(G)$, $\det \mathcal{D}F(X) \neq 0 \quad \forall X \in G$

Тогда F открыто

Замечание. Ничего о взаимной однозначности F не говорится

Доказательство. Пусть $\omega \subset G$ – открыто

Пусть $S = F(\omega)$

Нужно доказать, что S открыто

Возьмём $\forall Y \in S$

Поскольку S – это образ ω ,

$$\exists X \in \omega : F(X) = Y \quad (X \text{ не обязательно единственный – берём любой})$$

Поскольку ω открыто,

$$\exists r_0 > 0 : B_{r_0}(X) \subset \omega$$

Определим λ такое, что

$$\left\| \left(\mathcal{D}F(X) \right)^{-1} \right\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём r , такое что

$$\forall X_1 \in \underbrace{B_r(X)}_{\subset G} \quad \|\mathcal{D}F(X_1) - \mathcal{D}F(X)\| < 2\lambda$$

Возьмём $0 < \rho < \min(r, r_0)$

Если мы проведём для $B_\rho(X)$ рассуждения из шага 4, то получим, что

$$F\left(B_\rho(X)\right) \supset B_{\lambda\rho}\left(F(X)\right) = B_{\lambda\rho}(Y)$$

Понятно, что $B_\rho(X) \subset \omega$

Таким образом, $B_{\lambda\rho}(Y) \subset F(\omega)$

В силу произвольности Y , это означает, что S открыто

□