Оглавление

1 Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной 2

1.1 Основные понятися и результаты . . . 2

1.1.1 Объект изучения . . . 2

1.1.2 Решения дифференциального уравнения . . . 2

1.1.3 Задача Коши . . . 3

1.1.4 О существовании решения внутренней задачи Коши . . . 4

1.1.5 Продолжимость решения . . . 4

1.1.6 Полное решение, интегральная кривая . . . 6

1.1.7 Вопросы, связанные с единственностью решения . . . 7

1.1.8 Достаточные условия единственности . . . 9

1.1.9 Частные и особые решения . . . 9

1.1.10 Понятие общего решения . . . 9

1.1.11 Поле направлений и метод изоклин . . . 9

Глава 1

Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

1.1 Основные понятися и результаты

1.1.1 Объект изучения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно проиводной:

$$\frac{\mathrm{d}\ y(x)}{\mathrm{d}\ x}, \qquad \text{или в краткой записи } y' = f(x,y) \tag{1.1}$$

где x – это независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, а $f(x,y)$, если не оговорено иное, – вещественная функция, определённая и непрерывная на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, где:

- $G \subset \mathbb{R}^2$ – область
- $\widehat{G} \subseteq \partial G$ – (возможно пустое) множество, на котором $f(x,y)$ непрерывна или может быть доопределена с сохранением непрерывности

Напоминание. Область – связное открытое множество

Обозначение. $G^* \coloneqq \partial G \setminus \widehat{G}$

1.1.2 Решения дифференциального уравнения

Обозначение. Символ $\langle$ подразумевает одну из скобок: (или [, а символ $\rangle$ – скобку) или]

На вещественной оси рассмотрим непустое связное множество, не являющееся точкой. Это будет промежуток $\langle a,b \rangle$

Определение 1. Функция $y = \varphi(x)$, заданная на промежутке $\langle a,b \rangle$ называется решением дифференциального уравнения (1.1), если для любого $x \in \langle a,b \rangle$ выполняются следующие три условия:

1. функция $\varphi(x)$ дифференцируема
2. точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in \widetilde{G}$
3. $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$

Замечание. График решения по определению не может состоять из одной точки

Замечание. Первые два условия являются вспомогательными и позволяют записать третье

Замечание. Любое решение является функцией не просто дифференцируемой а гладкой, т. е. $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1\Big(\langle a,b \rangle\Big)$

Доказательство. Функция $\varphi(x)$ дифференцируема (по условию 1). Значит, она непрерывна в любой точке $x \in \langle a, b \rangle$
Значит, правая часть тождества из условия 3 непрерывна (как композиция непрерывных функций)
Значит, и левая часть непрерывна
При этом, если решение задано на отрезке $[a, b]$, то на его концах существуют и непрерывны односторонние производные □

Определение 2. Поскольку решение – гладкая функция, то через люую точку $\big(x, \varphi(x)\big)$ плоскости можно провести касательную под таким углом $\alpha(x)$ с осью абсцисс, что $\operatorname{tg}\alpha(x) = f\big(x, \varphi(x)\big) = \varphi'(x)$
Поэтому графики решений, имеющие общую точку соприкасаются в ней ("пересекаются под нулевым углом")

Определение 3. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$ будем называть:

- внутренним, если $\big(x, \varphi(x)\big) \in G$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$
- граничным, если $\big(x, \varphi(x)\big) \in \widehat{G}$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$
- смешанным, если найдутся такие $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, что точка $\big(x_1, \varphi(x_1)\big) \in G$, а точка $\big(x_2 \varphi(x_2)\big) \in \widehat{G}$

Лемма 1 (о записи решения в интегральном виде)**.** Для того чтобы определённая на промежутке $\langle a, b \rangle$ функция $y = \varphi(x)$ была решением дифференциального уравнения (1.1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(x)$ была непрерывна на $\langle a, b \rangle$, её график лежал в $\widetilde{G}$ и при некотором $x_0 \in \langle a, b \rangle$ выполнялос тождество

$$\varphi(x) \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \tag{1.2}$$

Доказательство.

- Необходимость
  Пусть функция $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$ является решением уравнения (1.1)
  Тогда, по определению, справедливо тождество $f\big(x, \varphi(x)\big) \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} \varphi'(x)$
  Интегрируя его при любом фиксированном $x_0 \in \langle a, b \rangle$ по s от x до x_0 и перенося $\varphi(x_0)$ в правую часть, получаем тождество (1.2):
  $$\int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} \int_{x_0}^{x} \varphi'(s)\, \mathrm{d}\, s = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$
- Достаточность
  Пусть непрерывная на промежутке $\langle a, b \rangle$ функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет тождеству (1.2)
  Тогда $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ (поскольку по (1.2) она равна интегралу с переменным верхиним пределом от композиции непрерывных функций)
  Дифференцируя (1.2), заключаем, что выполняется и третье условие из определения решения

□

1.1.3 Задача Коши

Задача. Для любой точки $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ задача Коши с начальными данными x_0, y_0 заключается в том, чтобы найти все решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), заданные на промежутках $\langle a, b \rangle \ni x_0$, в том числе внутренние, граничные или смешанные, такие что $\varphi(x_0) = y_0$
При этом говорят, что задача Коши поставлена в точке (x_0, y_0), а найденные решения – это решения поставленной задачи Коши

Определение 4. Решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными анными x_0, y_0 существует, если существует такое решение $y = \varphi(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b \rangle \ni x_0$, что $\varphi(x_0) = y_0$

Определение 5. Внутреннее (граничное, смешанное) решение задачи Коши с начальными данными

x_0, y_0 существует, если точка $(x_0, y_0) \in G(\widehat{G}, \widetilde{G})$ и найдутся промежуток $\langle a, b \rangle \ni x_0$ и определённое на нём внутреннее (граничное, смешанное) решение $y = \varphi(x)$ такие, что $\varphi(x_0) = y_0$

Определение 6. Задачу Коши, поставленную в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ будем называть

- внутренней, если $(x_0, y_0) \in G$
- граничной, если $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$

1.1.4 О существовании решения внутренней задачи Коши

Напоминание. Компакт в $\mathbb{R}^n$ – замкнутое ограниченное множество

Алгоритм (Пеано)**.** Очевидно, что для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдутся такие константы $a, b > 0$, что прямоугольник

$$\overline{R} = \{\, (x, y) : |\, x - x_0| \le a,\ \ |y - y_0| \le b\, \}$$

являющийся компактом, лежит в области G

Сразу исключим из рассмотрения простейший случай, когда $f(x, y) \equiv 0$ на $\overline{R}$, в котором уравнение (1.1) имеет решение $y(x) \equiv y_0$ при $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$

По второй теореме Вейерштрасса, $f(x, y)$ достигает своего максимума на $\overline{R}$. Положим

$$M \coloneqq \max_{(x,y) \in \overline{R}} |f(x, y)| > 0, \qquad h = \min\left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (h > 0)$$

Определение 7. Отрезок $\overline{P_h}(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ называется отрезком Пеано, постоенным для точки $(x_0, y_0) \in G$

Отрезки $\overline{P_h^+}(x_0, y_0) = [x_0, x_0 + h]$ и $\overline{P_h^-} = [x_0 - h, x_0]$ называются соответственно правым и левым отрезками Пеано

Теорема 1 (Пеано, о существовании внутреннего решения)**.** Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области G.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство. Будет доказано в §2 □

1.1.5 Продолжимость решения

Определение 8. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1.1) на $\langle a, b \rangle$. Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция $y = \varphi(x)$ останется решением, которое называют сужением исходного решения

Определение 9. Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b)$ продолжимо вправо в точку b или на границу, если найдётся такое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b]$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b)$ совпадает с $\varphi(x)$

Определение 10. Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$ продолжимо вправо за точку b или за границу, если найдутся такие $\widetilde{b} > b$ и решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\left\langle a, \widetilde{b} \right\rangle$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b \rangle$ совпадает с $\varphi(x)$

Теорема 2 (о продолжимости решения на границу)**.** $\varphi(x)$ – решение уравнения (1.1) на промежутке $\langle a, b),\quad b < +\infty$

Для того чтобы это решение было продолжимо вправо в точку b необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и число $\eta \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\forall k \quad \begin{cases} x_k \in \langle a, b) \\ \Big(x_k, \varphi(x_k)\Big) \xrightarrow[k\to\infty]{} (b, \eta) \in \widetilde{G} \end{cases} \tag{1.3}$$

Аналогично формулируется условие для продолжиомсти влево

Доказательство.

- Достаточность
  Пусть выполняется условие (1.3)

  Утверждение 1. В силу того, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, найдутся такие $c > 0$ и $M \geq 1$, что

  $$\forall (x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_c}(b, \eta) \quad |f(x, y)| \leq M$$

  Доказательство.

  – $(b, \eta) \in G$, т. е. является внутренней
    Тогда существует $\overline{B_c}(b, \eta) \subset G$ – компакт, и на нём функция ограничена
  – $(b, \eta) \subset \widetilde{G}$ и "вблизи" находятся точки "плохой" границы
    Приведём рассуждение **от противного**:
    Допустим, $|f(b, \eta)| = M - 1$ и существует последовательность $c_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $(c_m > 0)$ и последовательность точек $(x_m, y_m) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_{c_m}}(b, \eta)$ такие, что $|f(x_m, y_m)| > M$
    Тогда $(x_m, y_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} (b, \eta)$, а это значит, что функция $|f(x, y)|$ терпит разрыв в точке (b, η), так как $|f(x_m, y_m)| - |f(b, \eta)| > 1$ для любого m

  □

  Докажем, что существует $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$ и он равен η:
  Для этого покажем, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta \in \langle a, b)$, что

  $$\forall x \in [\delta, b) : |\varphi(x) - \eta| < \varepsilon \tag{1.4}$$

  Зафиксируем произвольный $0 < \varepsilon \leq c$
  Тогда $|f(x, y)| \leq M$ для любой точки $(x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_\varepsilon}(b, \eta)$ и по условию (1.3) найдётся такой номер m, что выполняются равентсва

  $$b - x_m > \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |\varphi(x_m) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.5}$$

  По формуле Ньютона-Лейбница для всякого $x \in [x_m, b)$ имеем:

  $$|\varphi(x) - \varphi(x_m)| = \left| \int_{x_m}^{x} \varphi'(s)\, \mathrm{d}\, s \right| = \left| \int_{x_m}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \right| \leq \int_{x_m}^{x} |f\big(s, \varphi(s)\big)|\, \mathrm{d}\, s \leq$$
  $$\leq M(x - x_m) < M(b - x_m) \underset{(1.5)_1}{<} \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x_m \leq x < b)$$

  Поэтому

  $$|\varphi(x) - \eta| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_m)| + |\varphi(x_m) - \eta| \underset{(1.5)_2}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  Неравенство (1.4) верно при $\delta = x_m$, а занчит, $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b^{-0}]{} \eta$
  Доопределим функцию $y = \varphi(x)$ в точке b, положив $\varphi(b) = \eta$
  Согласно (1.2) $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s$ для любых $x_0, x \in \langle a, b)$
  В этом тождестве можно перейти к пределу при $x \to b^{-0}$, получая равенство $\eta = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s$, так как по условию точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$, а занчит, функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в этой точке

В результате функция

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b) \\ \eta & x = b \end{cases}$$

по определению является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b]$

- Необходимость
  Допустим, что на промежутке $\langle a, b]$ существует решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ такое, что $\widetilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ на $\langle a, b)$
  Поскольку $\widetilde{\varphi}(x)$ непрерывна, то $\widetilde{\varphi}(x) = \eta = \lim\limits_{x \to b} \widetilde{\varphi}(x)$
  Но тогда $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и требуемая послеовательность точек x_k существует, причём по определению решения точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$

$\square$

Лемма 2 (о продолжимости решения за границу отрезка)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, b]$ и точка $\big(b, \varphi(b)\big) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку b на полуотрезок Пеано, построенный для точки $\big(b, \varphi(b)\big)$

Доказательство. По теореме Пеано (теор. 1) на отрезке Пеано $\overline{P_h}\big(b, \varphi(b)\big)$ существует внутреннее решение $y = \psi(x)$ задачи Коши с начальными данными $\big(b, \varphi(b)\big)$
Тогда функция $y = \widetilde{\varphi}(x)$, где

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b] \\ \psi(x), & x \in [b, b + h] \end{cases}$$

по определению является решением уравнения (1.1) на $\langle a, b + h]$
В самом деле, в точке b производная функции $\widetilde{\varphi}(x)$ существует, так как

$$\widetilde{\varphi}'_-(b) = \varphi'_-(b) = f\big(b, \varphi(b)\big) = \psi'_+(b) = \widetilde{\psi}'_+(b)$$

А выполнение других условий из определения решения для $\widetilde{\varphi}(x)$ очевидно $\square$

Утверждение о продолжимости решения, определённого на промежутке $[a, b\rangle$, влево за точку a формулируется аналогично

Следствие. Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, b]$ и не продолжимо вправо за точку b, то $\big(b, \varphi(b)\big) \in \widehat{G}$
А если оно определено на промежутке $[a, b\rangle$ и не продолжимо влево за точку a, то $\big(a, \varphi(a)\big) \in \widehat{G}$

Доказательство. Предположение противного противоречит лемме $\square$

Из теоремы о продолжимости решения на границу и последней леммы вытекает следующее утверждение:

Лемма 3 (о продолжимости решения на границу интервала)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, b)$, существует число $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и точка $(b, \eta) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку b

Утверждение о продолжимости решения, заданного на $(a, b\rangle$, влево за точку a формулируется аналогично

1.1.6 Полное решение, интегральная кривая

Определение 11. Решение называется полным, или максимально продолженным, или непродолжимым в случае, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо, или что то же самое, когда оно не является сужением никакого другого решения

Определение 12. Внутреннее (граничное) решение называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо так, чтобы оно осталось внутренним (граничным)

Определение 13. Промежуток, на котором определено полное решение, бедм называть максимальным интервалом существования и обозначим $I_{\max}$, а если для полного решения была поставлена задача Коши с начальными данными x_0, y_0, то $I(x_0, y_0)$

Из леммы о продолжимости решения за границу отрезка с очевидностью вытекает следующий факт:

Утверждение 2. Максимальный интервал существования любого внутреннего решения – это интервал

Теорема 3 (о существовании полного решения)**.** Любое решение уравнения (1.1) может быть продолжено до полного решения

Другая формулировка. Любое решение уравнения (1.1), не являющееся полным, является сужением некоторого полного решения

Доказательство. Приведено в дополнении 1_4 □

Определение 14. График полного решения будем называть интегральной кривой уравнения (1.1)
Дуга интегральной кривой – это график решения, заданного на любом промежутке $\langle a, b\rangle \subsetneq I_{\max}$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.1) лежат в $\widetilde{G}$, не могут иметь вертикальных касательных и не могут пересекаться под ненулевым углом, т. е. могут только соприкасаться

Теорема 4 (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения)**.** Предположим, что внутреннее решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, \beta)$ и не продолжимо вправо. Тогда для любого компакта $\overline{H} \subset G$ найдётся такое число $\delta \in \langle a, \beta)$, что для всякого $x \in (\delta, \beta)$ точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in G \setminus \overline{H}$

Другая формулировка. При стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования дуга интегральной кривой покидает любой компакт, лежащий в области G, и никогда в него не возвращается

Доказательство. Переходя в условиях теоремы на язык последовательностей, докажем, что для любого компакта $\overline{H} \subset G$ и для любой последовательности $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ существует $K > 0$ такое, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in G \setminus \overline{H}$ при всех $k > K$
Рассуждая **от противного**, допустим, что существуют компакт $\overline{H}_* \subset G$ и последовательность $x_k \to \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ такие, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in \overline{H}_*$ для $k = 1, 2, \ldots$
Отсюда сразу же вытекает, что $\beta < +\infty$, так как в противном случае найдётся такой индекс k^*, что точка $\big(x_{k^*}, \varphi(x_{k^*})\big)$ будет лежать вне компакта в силу его ограниченности
НУО считаем, что последовательность x_k – сходящаяся (иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности)
Пусть $(\beta, \eta) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(x_k, \varphi(x_k)\big)$
Тогда предельная точка (β, η) также принадлежит компакту $\overline{H}_*$, а значит, выполняются условия теоремы о продолжимости решения (теор. 2), согласно которой решение $y = \varphi(x)$ продолжимо на промежуток $\langle a, \beta]$ – $\lightning$ с условием теоремы □

Аналогичный результат имеет место для внутреннего решения, определённого на $(\alpha, b\rangle$ и непродолжимого влево

1.1.7 Вопросы, связанные с единственностью решения

Определение 15. Точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ называется точкой неединственности, если существуют такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, определённые на промежутке $\langle a, b\rangle$, и такая последовательность $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $x_k \in \langle a, b\rangle$, что $\varphi_1(x_k) \neq \varphi_2(x_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$
В противном случае точка (x_0, y_0) называется точкой единственности

Замечание. Любая точка граничного множества $\widehat{G}$, в которой решение задачи Коши отсутствует, по определению будет точкой единственности

Определение 16. Точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ называется точкой неединственности, если найдутся такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, определённые на $\langle a, b \rangle$, что

$$\forall (\alpha, \beta) \ni x_0 \quad \exists x^* \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b \rangle : \quad \varphi_1(x^*) \neq \varphi_2(x^*)$$

Утверждение 3. Определения точки неединственности равносильны

Доказательство.

- опр. 15 $\implies$ опр. 16
  Из опр. 15 вытекает, что для всякого интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$ найдётся такой индекс k^*, что $x_{k^*} \in (\alpha, \beta)$, поэтому в опр. 16 $x^* = x_{k^*}$

- опр. 16 $\implies$ опр. 15
  Можно выбрать последовательность интервалов (α_k, β_k), которая с ростом k стягивается в точку x_0. Тогда по опр. 16 для всякого k найдётся $x_k^* \in (\alpha_k, \beta_k) \cap \langle a, b \rangle$, что $\varphi_1(x_k^*) \neq \varphi_2(x_k^*)$, т. е. x_k^* – последовательность из опр. 15

□

Отрицая опр. 16, получаем "прямое" определение точки единственности:

Определение 17. Точку $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ будем называть точкой единственности в следующих случаях:

1. задача Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0 не имеет решений
2. для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ этой задачи Коши, определённых на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$, найдётся интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такой, что

$$\forall x \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b \rangle \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$

Примечание. Здесь надо иметь в виду следующее:

- Если $(x_0, y_0) \in G$:
  - Случай 1 не может возникнуть
  - По теореме Пеано (теор. 1) все решения задачи Коши определены на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$ $(h > 0)$
    Поэтому в определении точки единственности для любых двух решений достаточно требовать наличия интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$, на котором они совпадают
- Если $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$ и, например, решение нельзя продолжить за точку x_0 вправо, то в определнии для любых двух решений задач Коши при их наличии надо потребовать существования промежутка $(\alpha, x_0]$, на котором они совпадают

Определение 18. Решение задачи Коши уравнения (1.1), поставленной в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ называется:

- неединственным, если (x_0, y_0) – точка неединственности
- единственным в точке, если оно сущетвует и (x_0, y_0) – точка единственности

Определение 19. Решение внутренней задачи Коши уравнения (1.1), поставленной в точке (x_0, y_0) называется локально единственным, если существует интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такой, что все решения этой задачи продолжимы на (α, β) и для любых двух её решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, при необходимости произвольным образом продолженных на (α, β), имеем $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ на (α, β)

Теорема 5. ро локальной единственности решения внутренней задачи Коши] Пусть $(x_0, y_0) \in G$ – это точка единственности
Тогда решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0 является локально единственным

Доказательство. Будет доказано в §4, п. 1^0 □

Следствие. Из этой теоремы вытекает, что для внутренней задачи Коши понятия единственности решения в точке и локальной единственности равносильны

1.1.8 Достаточные условия единственности

Определение 20. Будем говорить, что решение задачи Коши $y = \varphi(x)$, поставленное в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ и определённое на промежутке $\langle a, b\rangle \ni x_0$, единственно на этом промежутке, или, просто, единственно, если для любого $x \in \langle a, b\rangle$ точка $\big(x, \varphi(x)\big)$ является точкой локальной единственности

Определение 21. Область $G^0 \subset G$ будем называть областью единственности для уравнения (1.1), если каждая точка G^0 является точкой единственности. Множество $\widetilde{G^0} = G^0 \cup \widehat{G^0}$, в котором $\widehat{G^0}$ – это множество граничных точек G^0, являющихся точками единственности, будем называть множеством единсвтенности

Теорема 6 (о единственности; слабая). Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области G, а частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области $G^0 \subset G$
Тогда G^0 является областью единственности

Доказательство. Эта теорема является следствием более сильных теорем о единственности, которые будут свормулированы и доказаны в §4, п. 4^0, причём не только для области G, а для всего множества $\widetilde{G}$ □

1.1.9 Частные и особые решения

Определение 22. Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b\rangle$, будем назвывать частным (особым), если его график состоит только из точек единственности (неединственности) и это решение является полным в том смысле, что не может быть продолжено ни влево, ни вправо так, чтобы его график состоял только из точек единственности (неединственности). В этом случае промежуток $\langle a, b\rangle$ будем называть максимальным интервалом существования частного (особого) решения

1.1.10 Понятие общего решения

Определение 23. Общим решением уравнения (1.1) на некотором связном множестве A^*, лежащем в области единственности G^0, называется функция $y = \varphi(x, C)$, определённая и непрерывная по совокупности аргументов на множестве $Q_{A^*} = \{\, (x, C) \mid x \in \langle a(C), b(C)\rangle\,, \quad C \in \langle C_1, C_2\rangle \,\}$, если выполняются следующие два условия:

1. для любой точки $(x_0, y_0) \in A^*$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C = C_0$
2. функция $y = \varphi(x, C_0)$ – это решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, определённое на промежутке $\langle a(C_0), b(C_0)\rangle$

Теорема 7 (о существовании общего решения). Для произвольной точки (x_0^*, y_0^*) из области единственности G^0 уравнения (1.1) найдётся связное множество $A^* : (x_0^*, y_0^*) \in A^* \subset G^0$, на котором существует общее решение

Доказательство. Приведено в §5 □

1.1.11 Поле направлений и метод изоклин