# Оглавление

# Глава 1

# Дифференциальная геометрия кривых

## 1.1 Вектор-функция

**Замечание.** Все функции, которые будут в курсе, будут предполагаться достаточно гладкими (т. е. нужная производная всегда существует и непрерывна)

**Определение 1.** $f : [a, b]$ (можно считать $[0, 1]$) $\to \mathbb{R}^3$ (непр.; дифф. настолько, насколько нам надо) – вектор-функция
$f([a, b])$ – кривая; $f(a)$ – начало; $f(b)$ – конец

**Определение 2.** $A = \lim\limits_{t \to t_0} f(t), \quad A \in \mathbb{R}^3$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |\overrightarrow{f}(t) - A| < \varepsilon$$

**Операции с вектор-функциями.**

- $\left(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}\right)(t) := \overrightarrow{f}(t) + \overrightarrow{g}(t)$
- $(\alpha \cdot \overrightarrow{f})(t) = \alpha \overrightarrow{f}(t)$
- 
  - $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}(t) = \left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t)\right)$ – скалярное произведение
  - $\overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g}(t) = \overrightarrow{f}(t) \times \overrightarrow{g}(t)$ – векторное произведение
  - $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h})(t) = \left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t)\right)$ – смешанное произведение

**Утверждение 1.** Эти операции перестановочны с пределом:

$$\lim_{t \to t_0} (f \times g)(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right) \times \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right)$$

**Доказательство.**

$$\overrightarrow{f}(t) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big), \qquad \overrightarrow{g}(t) = \Big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\Big)$$

$$f \times g = (f_2g_3 - f_3g_2; f_3g_1 - f_1g_3; f_1g_2 - f_2g_1)$$

$$\lim_{t\to t_0}(f\times g)(t) \overset{?}{=} \Big(\lim_{t\to t_0}(f_2g_3 - f_3g_2)(t); \ldots\ldots\ldots\ldots\Big) = (\widetilde{f_2}\widetilde{g_3} - \widetilde{f_3}\widetilde{g_2}; \ldots\ldots\ldots\ldots) =$$
$$= (\widetilde{f_1}; \widetilde{f_2}; \widetilde{f_3}) \times (\widetilde{g_1}; \widetilde{g_2}; \widetilde{g_3})$$

$$\lim_{t\to t_0}\Big(f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t)\Big) = \underbrace{\lim_{t\to t_0} f_2(t)}_{=\widetilde{f_2}} \lim_{t\to t_0} g_3(t) - \lim_{t\to t_0}(t) \lim_{t\to t_0} f_3g_3(t)$$

$\square$

**Почему предел можно брать по координатам?.** $f(t) = \Big(f_1(t); f_2(t); f_3(t)\Big)$

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = A = (A_1, A_2, A_3) \iff \lim_{t\to t_0} f_i(t) = A_i \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |f_i(t) - A_i| < \frac{\varepsilon}{3}$$

**Доказательство.**

- $\Longleftarrow$

$$|\overrightarrow{f(t)} - A| = \sqrt{\Big(\underbrace{f_1(t) - A_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{f_2(t) - A_2}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{f_3(t) - A_3}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3}} < \varepsilon$$

- $\Longrightarrow$

  Допустим противное:

$$\exists\,\varepsilon_0 : \forall\delta > 0 \quad \exists\,t_\delta : |t_\delta - t_0| < \delta; \quad |f_1(t_\delta) - A_1| \geq \varepsilon_0$$

$\square$

**Определение 3.** $f(t)$ непр. в $t_0$, если $f(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t)$

**Определение 4.** $\overrightarrow{f}'(t_0) \coloneqq \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

**Утверждения.**

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(\alpha\overrightarrow{f})' = \alpha'\overrightarrow{f} + \alpha\overrightarrow{f}'$
3. $(\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{g})' = \overrightarrow{f}'\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{g}'$
4. $(\overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g})' = \overrightarrow{f}' \times \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f} \times \overrightarrow{g}'$

**Доказательство.**

$$(f \times g)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} =$$
$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} =$$
$$= \lim_{t \to t_0} \left( \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \times g(t) \right) + f(t_0) \times \lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)$$

□

5. $(f, g, h)' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

**Утверждение, которое не переносится на вектор-функции.**

**Теорема 1** (Лагранжа). $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \qquad \exists\, c \in [a, b]$

Не работает в векторном случае

**Лемма 1.** $|\vec{f}\,| = \text{const} \iff \vec{f}\,' \perp \vec{f}$

**Доказательство.**

$$|\vec{f}\,| = \text{const} \iff (\vec{f}, \vec{f}\,) = \text{const} \iff \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t}(f, f) = 0 \iff 2(f, f') = 0 \iff f \perp f'$$

□

### 1.1.1 Параметризация и перепарамаетризация

$\vec{f}$ называется параметризацией кривой

**Определение 5** (перепараметризация). $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad g : [c, d] \to \mathbb{R}^3$
$\vec{f}$ и $\vec{g}$ – параметризации одной кривой, если

$$\exists \underset{\substack{\alpha \text{ непр.} \\ \alpha(a) = c \\ \alpha(b) = d \\ \alpha \text{ строго возрастает}}}{\alpha : [a, b] \to [c, d]} : f(t) = g\big(\alpha(t)\big) \quad \forall t \in [a, b]$$

**Замечание.**

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(a) = c \\ &\alpha(b) = d \\ &\alpha \text{ строго возрастает} \end{aligned}\right\} \implies \alpha - \text{биекция}$$

Кривая $\equiv$ класс эквиваентности вектор-фукнций

## 1.2 Касательный вектор

**Определение 6.** $\vec{f'}(t_0)$ называется касательным вектором

**Утверждение 2.** $f \sim g \implies f'(t_0) \parallel g'\big(\alpha(t_0)\big)$

**Доказательство.**

$$\vec{f}(t) = \vec{g}\big(\alpha(t)\big)$$
$$\vec{f'}(t) = \vec{g'}\big(\alpha(t)\big) \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{>0} \implies \vec{f}\,'(t) \upuparrows \vec{g}\,'\big(\alpha(t)\big)$$

□

**Определение 7.** Касательная – совокупность касательных векторов и противоположных им и $\overrightarrow{0}$

**Определение 8.** Регулярная параметризация – параметизация с требованием, чтобы $\overrightarrow{f}'(t) \neq \overrightarrow{0} \quad \forall t$

**Пример.** $f(t) = (t^2, t^3, t^4)$ – не регулярная

**Определение 9.** Кривая называется регулярной, если она допускает регулярную параметризацию

**Теорема 2.** $\delta$ – расстояние от $f(t)$ до касательной прямой

$$\implies \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0)|} = 0$$

Касательная – единственная прямая, обладающая таким свойством

**Замечание.** Предел – синус зелёного угла на рис. 1.1

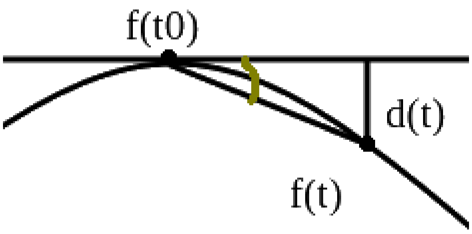


Рис. 1.1: Теорема о касательной

**Уравнение касательной к прямой.**

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{f}'(t_0) \cdot \tau + \overrightarrow{f}(t_0)$$

**Доказательство** (теоремы).

$$\delta(t) = \frac{\left|\Big(\big(f(t) - f(t_0)\big) \times f'(t_0)\Big) \times f'(t_0)\right|}{|f'(t_0)|^2}$$

Введём такую систему координат, чтобы касательная была осью $OX$:

$$\overrightarrow{f}(t) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big)$$

$$f'(t) = (1, 0, 0)$$

$$f(t_0) = (0, 0, 0)$$

Посчитаем двойное векторное произведение:

$$\Big(f(t) - f(t_0)\Big) \times f'(t_0) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \times (1, 0, 0) = (0, f_3, -f_2)$$

$$(0, f_3, -f_2) \times (1, 0, 0) = (0, -f_2, f_3)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}}{1}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\delta^2}{|f(t) - f(t_0)|^2} = \lim_{t \to t_0} \frac{f_2^2(t) + f_3^2(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)}$$

Неопределённость – $(0,0,0)$

$$f_1(t_0) = f_2(t_0) = f_3(t_0)$$

$$\lim \ldots \underset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{t \to t_0} \frac{\cancel{2} f_2 f_2' + \cancel{2} f_3 f_3'}{\cancel{2}(f_1 f_1' + f_2 f_2' + f_3 f_3')} \underset{\text{Лопиталь}}{=}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f_2'^2 + f_2 f_2'' + f_3'^2 + f_3 f_3''}{\underbrace{f_1'^2}_{\to 1} + \underbrace{f_1 f_1'' + f_2'^2 + f_2 f_2''}_{\to 0} + \underbrace{f_3'^2}_{\to 0} + \underbrace{f_3 f_3''}_{\to 0}} = 0 \iff \overrightarrow{f}'(t) \parallel (1,0,0)$$

$\square$