Оглавление

0.1 Длина кривой

Разделим кривую на кусочки:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

Найдём длину ломаной:

$$\sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{f}(t_i) - \overrightarrow{f}(t_{i-1})| \text{ – интегральная сумма}$$

Длина кривой – предел интегральных сумм

Определение 1.

$$\int := \lim_{\max t_i - t_{i-1} \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{f}(t_i) - \overrightarrow{f}(t_{i-1})$$

$$\int := \sup \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{f}(t_i) - \overrightarrow{f}(t_{i-1})$$

Замечание. Определения равносильны (в предположении, что предел существует)

Доказательство.

- $\sup \geq \lim$ – очевидно
- $\lim \geq \sup$
  $\sup$ – тоже какой-то частичный предел
  Пусть есть последовательность разбиений таких, что длина ломаной стремится к $\sup$
  Разобьём максимальную (по длине) t_i на n равных частей
  При этом, по неравенству треугольника, длина ломаной не уменьшилась, а $\max |t_i - t_{i-1}|$ теперь стремится к нулю

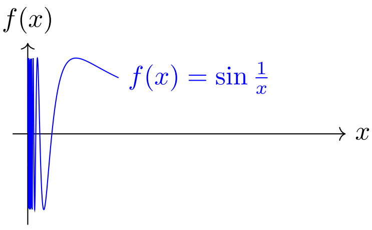
□

Определение 2. Кривая называется спрямляемой, если $\int < \infty$

Замечание. Тогда $\sup$ можно заменить на $\overline{\lim}$
Для верхнего предела верно рассуждение о равносильности

Пример (неспрямляемой кривой).

$$y = \sin \frac{1}{x}, \qquad x \in (0, 1)$$



Теорема 1. f непр. дифференц. на $[a,b]$ $\implies$ f спрямляема и

$$\int = \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

Доказательство.

$$\left|\int_a^b |\overrightarrow{f}'(t)|\,\mathrm{d}\,t - \sum_{i=1}^n |\overrightarrow{f}(t_i) - \overrightarrow{f}(t_{i-1})|\right| \coloneqq A \tag{1}$$

Хотим доказать, что это меньше 2ε

Напоминание. Неравенство треугольника:

$$|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \geq |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|, \qquad |\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$$

Обозначим

$$\Delta_i t \coloneqq t_i - t_{i-1}, \qquad \Delta_i f \coloneqq f(t_i) - f(t_{i-1}), \qquad a_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$(1) = \left|\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}\,t - \sum_{i-1}^n |f'(\tau_i)|\Delta_i t + \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|\Delta_i t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|\right| \overset{\Delta}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\left|\int_a^b |f'(t)\,\mathrm{d}\,t - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)\Delta_i t\right|}_{\coloneqq I} + \underbrace{\left|\sum_{i=1}^n \big(f'(\tau_i)\Delta_i t - |\Delta_i f|\big)\right|}_{\coloneqq II}$$

- $I < \varepsilon$ (фиксируем ε и по нему подбираем мелкость разбиения)
-

$$II = \sum_{i=1}^n \Big(\big|f'(\tau_i)\big|\Delta_i t - |\Delta_i f|\Big) \leq \sum_{i=1}^n \Big|f'(\tau_i)\Delta_i t - \Delta_i f\Big| =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\tau_i)\,\mathrm{d}\,t - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big|f'(\tau_i) - f'(t)\Big|\,\mathrm{d}\,t \underset{(2)}{<} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon\,\mathrm{d}\,t = \sum \varepsilon \cdot \Delta_i t =$$

$$= \varepsilon(b-a)$$

$$\Big|f'(\tau_i) - f'(t)\Big| < \varepsilon \text{ при достаточно мелком разбиении} \tag{2}$$

Воспользовались равномерной непрерывностью $f'(t)$:

$$\left|\int f(t)\,\mathrm{d}\ t\right| \leq \int |f(t)|\,\mathrm{d}\ t$$

$\square$

Способы задания кривой.

1. Явно:
   $y = f(x)$ (плоская кривая)

$$\int = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

2. Явно в полярных координатах:

$$r = r(\varphi)$$
$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \qquad y = r(\varphi)\sin\varphi$$
$$x'_\varphi = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \qquad y'_\varphi = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{r'^2\cos^2 \cancel{-2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + \cancel{2r'r\sin\varphi\cos\varphi} + r^2\cos^2\varphi} = \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$\int = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

3. Неявно:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$F(x, y) = 0$$

Воспользуемся теоремой 2:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \qquad \text{кроме } x = \pm 1,\ y = 0$$
$$\int = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}\,x$$
$$f'(x) = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$
$$\int = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{F'^2_x}{F'^2_y}}\,\mathrm{d}\,x$$

Теорема 2 (о неявной функции). Если $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ в окрестности какой-то точки, то

$$\text{в нек. } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \exists f : F(x, f(x)) = 0$$

То есть $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$

$$f(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$$
$$\int = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}\,t$$

0.2 Натуральная параметризация

Определение 3. Параметризация $\overrightarrow{f}(t)$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Теорема 3. Натуральная параметризация существует и единственна (с точностью начального момента времени и направления обхода кривой)

Доказательство.

- Существование

$$s(t) := \int_{t_0}^{\boldsymbol{t}} |f'(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \implies s'(t) = |f'(t)|$$

Пусть $t(s) \coloneqq \varphi(s), \qquad \varphi = s^{-1}$

$$t'(s) = \varphi'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|f'(t)|}$$

Пусть $\overrightarrow{g}(s) \coloneqq \overrightarrow{f}(\varphi(s))$

$$g'(s) = f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(t)|} = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(\varphi(s))|}$$

$$|g'(s)| = \Big|...\Big| = 1 \implies s - \text{натур. параметр }, \quad g(s) - \text{натур. параметризация}$$

- Единственность
  Пусть s и t – натуральные параметры

$$g(s) = f\big(\varphi(s)\big), \qquad t = \varphi(s)$$

$$1 = |g'(s)| = |f'(t) \cdot \phi'(s)| = |f'(t)| \cdot |\varphi'(s)|$$

  При этом, $|f'(t)| = 1$, т. к. t – натур.

$$\implies |\varphi'(s)| = 1 \implies \varphi'(s) = \pm 1 \implies \varphi(s) = \pm s + \text{const}$$

□

0.3 Репе́р Френе

Репер $\equiv$ правая тройка ортонормированных векторов (зависит от t)
Пусть s – натуральный параметр

$$\overrightarrow{v} \coloneqq f'(s), \qquad |\overrightarrow{v}(s)| \equiv 1$$

Лемма 1. Если ветор постоянной длины, то $v'(s) \perp v(s)$

$$\overrightarrow{n} \coloneqq \frac{v'}{|v'|} - \text{единичный}$$

$$\overrightarrow{b} \coloneqq v \times n$$

Определение 4. Репер Френе: $(v,\, n,\, b)$ (зависит от t или от s)

- $\overrightarrow{v}$ – касательный вектор
- $\overrightarrow{n}$ – вектор главной нормали
- $\overrightarrow{b}$ – вектор бинормали