Оглавление

Глава 1

Производные и дифференцируемость

1.1 Свойства производных (продолжение)

Свойства (Производные тригонометрических функций).

1. e^x
$$(e^x)' = e^x, \quad (e^x)'' = ((e^x)')' = (e^x)' = e^x$$
Индукция: $(e^x)^{(n)} = e^x \quad (e^x)^{(n+1)} = ((e^x)^{(n)})' = (e^x)' = e^x$

2. $\sin x$
$$(\sin x)' = \cos x \quad (\sin x)'' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)''' = ((\sin x)'')' = (-\sin x)' = -\cos x$$
$$(\sin x)^{(n)} = ((\sin x)''')' = (-\cos x)' = \sin x$$
То есть, $(\sin x)^{(4n)} = \sin x, \quad (\sin x)^{(4n+r)} = (\sin x)^{(r)}, \quad 1 \le r \le 3$

3. $\cos x$
$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\cos x)'' = ((\cos x)')' = (-\sin x)' = -\cos x$$
$$(\cos x)''' = ((\cos x)'')' = (-\cos x)' = \sin x$$
То есть, $(\cos x)^{(4n)} = \cos x, \quad (\cos x)^{(4n+r)} = (\cos x)^{(r)}, \quad 1 \le r \le 3$

4. $(x+a)^r, \quad r \notin \mathbb{N}$
   - Если $r \notin \mathbb{Z}$, то $x > -a$
   - Если $r \in \mathbb{Z}$, то $x \neq -a$
$$((x+a)^r)' = r(x+a)^{r-1}$$
$$((x+a)^r)'' = (r(x+a)^{r-1})' = r \cdot (r-1) \cdot (x+a)^{r-2}$$
$$((x+a)^r)''' = (r(r-1)(x+a)^{r-2})' = r(r-1)(r-2)(x+a)^{r-3}$$
$$r-1 \neq 0, \quad r-2 \neq 0$$
$$((x+a)^r)^{(n)} = r(r-1)(r-2)...(r-n+1)(x+a)^{r-n}, \quad r-k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

5. $\ln(x+a)$
$$(\ln(x+a))' = \frac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}$$
$$(\ln(x+a))^{(n)} = ((x+a)^{-1})^{(n-1)} = (-1) \cdot (-2) \cdot (-1-(n-1)+1) \cdot (x+a)^{-n} =$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)' \cdot (x+a)^{-n}$$

6. $(x+a)^k$

$$(x+a)'=1$$
$$(x+a)''=1'=0$$
$$(x+a)^{(n)}=0,\quad n\geq 2$$
$$((x+a)^2)'=2(x+a)$$
$$((x+a)^2)''=(2(x+a))'=2$$
$$((x+a)^2)'''=0$$
$$((x+a)^2)^{(n)}=0,\quad n\geq 3$$
$$k\geq 3$$
$$((x+a)^k)'=k(x+a)^{k-1}((x+a)^k)''=(k(x+a)^{k-1})'=k(k-1)(x+a)^{k-2}$$
$$((x+a)^k)'''=k(k-1)(k-2)(x+a)^{k-3}$$

Если $l<k-1$, то $((x+a)^k)^{(l)}=k(k-1)...(k-l+1)(x+a)^{k-l}$

$$((x+a)^k)^{k-1}=k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(x+a)$$
$$((x+a)^k)^{(k)}=k!\cdot(x+a)'=k!$$
$$((x+a)^k)^{(k+1)}=0,\quad ((x+a)^k)^{(n)}=0,\ n\geq k+1$$

При $l<k$, $((x+a)^k)^{(l)}\big|_{x=-a}=0$ При $l>k$, $((x+a)^k)^{(l)}\big|_{x=-a}=0$

Вывод.

$$(\frac{1}{k!}(x+a)^k)^{(l)}\big|_{x=-a}=\begin{cases}0,\ l\neq k\\ 1,\ l=k\end{cases}$$

1.2 Формула Тейлора

$$(\frac{1}{k!}(x-a)^k)^{(l)}\big|_{x=a}=\begin{cases}0, & l\neq k\\ 1, & l=k\end{cases}$$
$$b_0,\ldots,b_n\in\mathbb{R},\quad a\in\mathbb{R}$$
$$P(x)=b_0+b_1(x-a)+\frac{b_2}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{b_n}{n!}(x-a)^n$$
$$P(a)=b_0\quad P'(a)=b_0'+(b_1(x-a)')'\big|_{x=a}+\ldots+\left(\frac{b_n}{n!}(x-a)^n\right)\big|_{x=a}=b_1$$
$$1\leq k\leq n$$
$$P^{(k)}(a)=b_0^{(k)}+(b(x-a))^{(k)}\big|_{x=a}+\ldots+\left(\frac{b_k}{k!}(x-a)^k\right)\big|_{x=a}+\ldots+\left(\frac{b_n}{n!}(x-a)^n\right)^{(k)}\big|_{x=a}=b_k$$

Утверждение (Формула Тейлора для многочлена).

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.1}$$

Теорема 1 (Тейлора).

$$f\in C((p,q)),\quad a\in(p,q)$$

- Если $n=1$, то $\exists f'(a)$

- Если $n > 1$, то $\forall x \in (p, q)\ \exists f^{(n-1)}(x)$ и $\exists f^{(n)}(a)$

$$\implies f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x) \tag{1.2}$$

$$\frac{r(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \tag{1.3}$$

Лемма 1.

$$g \in C((p,q)), \quad g'(a) = 0,\ g(a) = 0$$

- Если $n = 1$, то $g'(a) = 0$
- Если $n > 1$, то $\forall x \in (p, q)\ \exists g^{(n-1)}(x)$ и $\exists g^{(n)}(a)$. При этом $g(a) = 0,\ g'(a) = 0, ..., g^{(n-1)}(a) = 0,\ g^{(n)}(a) = 0$

$$\implies \frac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \tag{1.4}$$

Доказательство (Леммы). По индукции:

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + r(x) = r(x) \tag{1.5}$$

$$\frac{r(x)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

$$n \geq 1 \quad h(a) = 0,\ h'(a) = 0, ..., h^{(n-1)}(a) = 0 \text{ и } \forall x \in (p,q)\ \exists h^{(n-2)}(x)\text{, то}$$

$$\frac{h(x)}{(x-a)^{n-1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \tag{1.6}$$

$$h(x) \coloneqq g'(x), \quad (g')^{(n-1)}(x) = g^{(n)}(x)$$

$$\delta(x) \coloneqq \frac{g'(x)}{(x-a)^{n-1}}, \quad \delta(a) \coloneqq 0$$

Тогда (1.6) $\implies \delta(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
Применим теорему Лагранжа:

$$g(x) \underset{(g(a)=0)}{=} g(x) - g(a) = g'(c)(x-a) \tag{1.7}$$

$$\exists c = c(x),\ c \text{ между } x \text{ и } a$$

$$(1.7) \implies g(x) = \delta(c)(c-a)^{n-1}(x-a) \tag{1.8}$$

$$(1.8) \implies \frac{g(x)}{(x-a)^n} = \delta(c(x))\frac{(c(x)-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}} \implies$$

$$\implies \left|\frac{g(x)}{(x-a)^n}\right| \leq |\delta(c(x))| \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff \frac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

□

Доказательство. Рассмотрим полином:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.9}$$

$$(1.9) \implies \begin{cases} P(a) = f(a) \\ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \end{cases} \tag{1.10}$$

$$g(x) = f(x) - P(x) \tag{1.11}$$

$$\forall x \in (p, q)\ \exists g^{(n-1)}(x),\ \exists g^{(n)}(a)$$

$$(1.10), (1.11) \implies g(a) = 0,\ g'(a) = 0, ..., g^{(n)}(a) = 0$$

По Лемме получаем:

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

$$(1.2), (1.11) \implies r(x) \equiv g(x)$$

□

Теорема 2.

$$f : (p, q) \to \mathbb{R}, \quad \text{для } n \geq 1\ \forall x \in (p, q)\ \exists f^{(n+1)}(x)$$

$$a \in (p, q), \quad x \in (p, q), \quad x \neq a$$

$$\implies \exists c \text{ между } a \text{ и } x : f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{a+1} \tag{1.12}$$

Доказательство. Фиксируем x, рассмотрим функцию от y:

$$\varphi(y) \coloneqq f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) - \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 - ... - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n \tag{1.13}$$

$$(1.13) \implies \forall y \in (p, q)\ \exists \varphi'(y)$$

$$(1.13) \implies \varphi'(y) = \underset{\text{(производная по } y\text{, а не по } x)}{(f(x))'_y} - f'(y) - (f'(y)(x-y))' - \left(\frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2\right)' - ... -$$

$$- \left(\frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n\right)' = 0 - f'(y) - \Big(f''(y)(x-y) - f'(y) \cdot 1\Big) - \left(\frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 - 2 \cdot \frac{f''(y)}{n!}(x-y)\right) -$$

$$- \left(\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{n}{n!} f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1}\right) \underset{\left(\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}\right)}{=} - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \tag{1.14}$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(a) \coloneqq r$$

Рассмотрим функцию $\psi(y) \coloneqq (x-y)^{n+1}$, $y \in [\min(a, x), \max(a, x)]$

$$\psi(x) = 0, \quad \psi(a) = (x-a)^{n+1}$$

$$\psi'(y) = -(n+1)(x-y)^n, \quad \psi'(y) \neq 0 \text{ при } y \in (\min(a, x), \max(a, x))$$

Применим теорему Коши:

$$\exists c \text{ между } a \text{ и } x : \frac{\varphi(a) - \varphi(x)}{\psi(a) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \tag{1.15}$$

$$\frac{r - 0}{(x-a)^{n+1} - 0} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n1)}(c)}{(n+1)!} \implies r = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{1.16}$$

$$(1.13), (1.16) \implies (1.12)$$

□

1.2.1 Применение формулы Тейлора к элементарным функциям

Будем пользоваться выражениями для производных (из параграфа 1.1)

$$a = 0$$

Обозначение: $\underset{T}{=}$ – по формуле Тейлора. c везде из теоремы Телора

Утверждения.

1. e^x

$$(e^x)^{(n)}\big|_{x=0} = 1$$

$$e^x \underset{T}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \begin{cases} cx > 0 \\ |c| < |x| \end{cases}$$

2. $\sin x$

$$(\sin x)^{(2n)}\big|_{x=0} = 0$$

$$(\sin x)^{(2n-1)}\big|_{x=0} = (-1)^{n-1}$$

$$\sin x \underset{T}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \sin c \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3. $\cos x$

$$(\cos x)^{(2n-1)}\big|_{x=0} = 0$$

$$(\cos x)^{(2n)}\big|_{x=0} = (-1)^n$$

$$\cos x \underset{T}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \sin c \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Дальше: $r \neq 0$, $r \notin \mathbb{N}$, $x \in (-1, 1)$

4. $(1+x)^r$

$$((1+x)^r)^{(n)}\big|_{x=0} = r(r-1)\ldots(r-n+1)$$

$$(1+x)^r \underset{T}{=} 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n + \\ + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!}(1+c)^{r-n-1}x^{n+1}$$

5. $\ln(1+x)$

$$(\ln(1+x))'\big|_{x=0} = 1$$

$$n \geq 2 \quad (\ln(1+x))^{(n)}\big|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Вспомним, что $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

$$\ln(1+x) \underset{T}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (1+c)^{-n-1} \cdot x^{n+1}$$