Содержание

1. Метрические пространства. Примеры

Определение 1. M – множество, $\qquad \rho : M \times M \to \mathbb{R}$
Говорят, что (M, ρ) – метрическое пространство, если:

1. $\rho(x,y) \geq 0, \qquad \rho(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

ρ называется метрикой

Примеры.

1. $\mathbb{R}, \quad \rho(x,y) = |x-y|$
2. $\mathbb{R}^2$
   (a) $\rho_2\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
   (b) $\rho_1\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$ – **манхэттенская** метрика
   (c) $\rho_n\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \Big(|x_1-x_2|^n + |y_1-y_2|^n\Big)^{\frac{1}{n}}$ – является метрикой, если $p \geq 1$

   Замечание. Неравенство треугольника следует из неравенства Минко́вского:
   $$\Big(\sum_i |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \Big(\sum_i |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_i |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

   (d) $\rho_\infty\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \max\{\ |\ x_1-x_2|, |y_1-y_2|\ \}$
3. Аналогично для $\mathbb{R}^n$
4. M – произвольное множество
   $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ – **дискретная** метрика
5. (M, ρ) – метрическое пространство
   $\rho'(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \qquad$ или $\qquad \rho'(x,y) = \min\{\,\rho(x,y), 1\,\}$
   Теперь $\rho'(x,y) < 1$
6. M – множество строчек из 0 и 1 длины n
   ρ – количество символов, в которых эти строки различаются
7. M – пространство (хороших) функций на $[a,b]$
   (a) $\rho_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}\, x$
   (b) $\rho_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2\, \mathrm{d}\, x}$
   (c) $\rho_p(f,g) = \Big(\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^p\, \mathrm{d}\, x\Big)^{\frac{1}{p}}$
   (d) $\rho_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$
8. M – множество (хороших) фигур на плоскости
   (a) $\rho(F,G) = S_{F \triangle G}$

(b) Метрика **Хаусдорфа**:

$$\rho(F,G) = \\ = \max\{\inf\{\varepsilon \mid \forall f \in F \quad \exists g \in G : \rho(f,g) \le \varepsilon\}, \inf\{\varepsilon \mid \forall g \in G \quad \exists f \in F : \rho(f,g) \le \varepsilon\}\}$$

9. $\mathbb{Z}$

Напоминание. $p \in \mathbb{P}, \qquad n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p^{\alpha_k} \qquad v_p(n) := \alpha_k$

Введём норму:

$$\|n\| := 2^{-v_p(n)}$$

Теперь можно ввести ***p*-адическую** метрику:

$$\rho_p(a,b) = \|a-b\|$$

Замечание. Это расширяется на Q, если ввести

$$v_p(\frac{m}{n}) := v_p(m) - v_p(n)$$

2. Внутренние точки в метрическом пространстве. Внутренность

Определение 2. (M,ρ) – метрическое пространство, $\qquad A \subset M, \qquad x_0 \in M$
Точка x_0 называется внутренней для A, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x_0,\varepsilon) \subset A$$

Определение 3. Множество внутренних точек называется внутренностью

Обозначение. $\operatorname{Int} A$

Определение 4. Множество A называется открытым, если оно совпадает с $\operatorname{Int} A$, т. е. не содержит ни одной граничной точки

Лемма 1. Объединение открытых является открытым, т. е.

$$\bigcup_{i\in I} U_i \text{ – откр.} \iff \forall i \quad U_i \text{ – откр.}$$

Доказательство.

$$x_0 \in \bigcup_{i\in I} U_i \implies \exists i : x_0 \in U_i \xRightarrow[Ui \text{ – откр.}]{} \exists \varepsilon : B(x_0,\varepsilon) \subset U_i \implies B(x_0,\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

□

Лемма 2. $B(x_0,\varepsilon)$ открыто

Доказательство. Возьмём $\forall x_1 \in B(x_0,\varepsilon)$
Положим $\delta := \varepsilon - \rho(x_1,x_0)$
Докажем, что $B(x_1,\delta) \subset B(x_0,\varepsilon)$:

$$\forall x_2 \in B(x_1,\delta) \quad \rho(x_1,x_2) < \delta = \varepsilon - \rho(x_0,x_1)$$

$$\rho(x_0,x_2) \overset{\triangle}{\le} \rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) < \varepsilon$$

$$x_2 \in B(x_0,\varepsilon)$$

□

Теорема 1. Равносильны определения внутренности:

1. Множество внутренних точек
2. $\bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ откр.}}} U$
3. максимальное открытое подмножество A

Доказательство.

- $2 \iff 3$
  Очевидно из леммы 1
- $2 \implies 1$
$$x_0 \in \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ откр.}}} U \subset A \implies \exists\, \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ откр.}}} U \subset A \implies x_0 \text{ -- внутр. т. для } A$$
- $1 \implies 2$
$$x_0 \text{ -- внутр. т. для } A \implies \exists\, \varepsilon > 0 : \underset{\text{откр.}}{B(x_0, \varepsilon)} \subset A$$
  Применяем лемму 2

□

3. Граница и замыкание множества в метрическом пространстве

Определение 5. (M, ρ) – метрическое пространство, $A \subset M$, $x_0 \in M$
x_0 называется

- внешней для A, если
$$\exists\, \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$$
- граничной – если не внутренняя и не внешняя, т. е. если
$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} B(x_0, \varepsilon) \not\subset A \\ B(x_0, \varepsilon) \not\subset (M \setminus A) \end{cases}$$

Определение 6.

- Множество внешних точек называется внешностью

  Обозначение. $\operatorname{Ext} A$
- Множество граничных точек называется границей

  Обозначение. $\operatorname{Fr} A$, δA

Определение 7. Объединение внутренности и границы называется замыканием

Обозначение. $\operatorname{Cl} A$

Определение 8. Множество A называется замкнутым, если оно совпадает с $\operatorname{Cl} A$, т. е. если $M \setminus A$ открыто

Теорема 2. M – метрическое пространство, $A \subset M$
Равносильны определения замыкания:

1. Множество внутренних и граничных точек

2. $M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A)$

3. $\bigcap_{\substack{F \supset A \\ F\text{ – замкн.}}} F$

4. Минимальное замкнутое, содержащее A

Доказательство.

- $3 \iff 4$ – очевидно
- $1 \iff 2$

$$\operatorname{Int}(M \setminus A) = \operatorname{Ext} A$$

- $2 \iff 3$

$$M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A) = M \setminus \bigcup_{\substack{U \subset M \setminus A \\ U\text{ – откр.}}} U \underset{\text{(де Морган)}}{=} \bigcap_{\substack{U \subset M \setminus A \\ U\text{ – откр.}}} M \setminus U = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F\text{ – замкн.}}} F$$

□

4. Топологические пространства. Задание топологии замкнутыми множествами. Примеры

Определение 9. X – множество, $\quad \Omega \subset 2^X$
(X, Ω) называется топологическим пространством, если:

1. $\forall \{U_i\} \subset \Omega \quad \bigcup U_i \in \Omega$
2. $U_1, ..., U_n \in \Omega \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

Ω называется топологией на X
$U \in \Omega$ называется открытым

Определение 10. F называется замкнутым, если $X \setminus F$ – открыто

Теорема 3. (X, Ω) – топологическое пространство

1. $\{F_i\}_{i \in I}$ – замкн. $\implies \bigcap_{i \in I}$ замкн.
2. $F_1, ..., F_n$ – замкн. $\implies \bigcup_{i=1}^n F_i$ – замкн.
3. $\emptyset, X$ – замкн.

Доказательство. Уже доказано □

Замечание. Топологическое пространство можно задавать замкнутыми множествами

Примеры.

1. (M, ρ) – метр. $\implies M$ – тополог. Открыты те множества, которые были открытыми в ρ
2. X – любое, $\quad \Omega = \{\emptyset, X\}$ – **антидискретная топология**
3. X – любое, $\quad \Omega = 2^X$ – **дискретная топология**
4. **"Топология Зарисского" (топология конечных дополнений)**:
   X – бесконечно, $\quad$ замкнутые – конечные и X
5. **Стрелка:**
   $X = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$, или ...)
   Открытые – открытые лучи $(a, +\infty)$, $\emptyset$, X

Примечание. Если открытыми считать замкнутые лучи $[a, +\infty)$, то это **не** топология:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, +\infty\right] = (0, +\infty)$$

6. **Топология Зарисского:**

   (a) $X = \mathbb{C}$
   Замкнутым будем называть множество корней некоторого многочлена

5. Расположение точки относительно множества в топологическом пространстве

Определение 11. (X, Ω) – топологическое пространство, $x_0 \in X$
Окрестностью x_0 будем называть любое открытое множество, содержащее x_0

Определение 12. $A \subset X, \qquad x_0 \in X$
x_0 называется

- внутренней, если
$$\exists \underset{(\text{окр. } x_0)}{U_{x_0}} \subset A$$
- внешней, если
$$\exists U_{x_0} \cap A = \emptyset$$
- граничной, если
$$\forall U_{x_0} \quad \begin{cases} U_{x_0} \not\subset A \\ U_{x_0} \neq \emptyset \end{cases}$$

Определение 13.

- $\operatorname{Int} A$ – множество внутренних точек
- $\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ = множество внешних точек
- $\delta A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$ – множество граничных точек

Теорема 4. Равносильны определения внутренности:

1. Множество внутренних точек
2. $\bigcup_{U\in\Omega} U$
3. максимальное открытое подмножество A

Доказательство. Точно так же, как теорема 1 □

Теорема 5. Равносильны следующие определения замыкания:

1. $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Ext} A$ – множество внутренних и граничных точек
2. $\bigcap_{\substack{F\supset A \\ F \text{ – замкн.}}} F$
3. минимальное замкнутое, содержащее A

Доказательство. Точно так же, как теорема 2 □

Утверждение 1. U – откр., $\quad F$ – замкн.
Тогда $U \setminus F$ – откр., $\quad F \setminus U$ – замкн.

Доказательство.

- $U \setminus F = \underset{\text{откр.}}{U} \cap \underbrace{(X \setminus F)}_{\text{откр.}}$
- $F \setminus U = F \cap (X \setminus U)$

$\square$

6. Непрерывные отображения в метрических и топологических пространствах

Определение 14. $f : M_1 \to M_2, \qquad (M_1, \rho_1), (M_2, \rho_2)$ – метические
f называется непрерывным в точке $x_0 \in M_1$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in M_1 \quad \rho_1(x, x_0) < \delta \implies \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Определение 15. $f : X \to Y, \qquad X, Y$ – топологические
f называется непрерывным в x_0, если

$$\forall \underset{\subset Y}{U_{f(x_0)}} \quad \exists \underset{\subset X}{U_{x_0}} : f(U_{x_0}) \subset U_{f(x_0)}$$

Определение 16. $f : M_1 \to M2$ – метрические
f называется непрерывным, если оно непрерывно на всём M_1, т. е.

$$\forall x_0 \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

Определение 17. X_1, X_2 – топологические, $\quad f : X_1 \to X_2$
f называется непр., если

$$\forall U \text{ – откр. в } X_2 \quad f^{-1}(U) \text{ откр. в } X_1$$

Теорема 6. $(X, \rho), (Y, d)$ – метр., $f : X \to Y$ f непр. $\iff$ прообраз открытого открыт

Доказательство.

- $\implies$
  f непр. $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x_0 \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$
  Пусть U – откр. в Y. Нужно доказать, что $f^{-1}(U)$ откр. в X
  Возьмём $\forall x_0 \in f^{-1}(U)$
  Тогда, по опр. прообраза, $f(x_0) \in U$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : B(f(x_0), \varepsilon) \in U \implies \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset U \iff B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$$

- $\impliedby$
  Знаем, что прообраз открытого открыт. Хотим доказать непрерывность
  Возьмём $\forall x_0 \in X$ и $\forall \varepsilon > 0$
  Обозначим $U := B(f(x_0), \varepsilon)$ Знаем, что $f^{-1}(U)$ открыт, и $x_0 \in f^{-1}(U)$
  Воспользуемся определением открытого множества:

$$\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U) = f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$$

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big) \implies f\big(B(x_0, \delta)\big) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

$\square$

7. Гомеоморфизм

Определение 18. $(X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y), \qquad f : X \to Y$
Говорят, что f – гомеоморфизм, если

1. f непрерывно
2. f – биекция
3. f^{-1} непрерывно

X и Y называются гомеоморфными

Обозначение. $X \simeq Y$

Утверждение 2. Гомеоморфизм – отношение эквивалентности

Доказательство.

- Рефлексивность: $X \simeq Y, \quad f(x) = x$
- Симметричность: $f : X \to Y$ – гомеоморфизм $\implies f^{-1} : Y \to X$ – гомеоморфизм
- Транзитивность:

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z \text{ – гомеоморфизмы } \implies g \circ f : X \to Z \text{ – гомеоморфизм}$$

□

8. База топологии. Примеры. Критерий базы

Определение 19. (X, Ω) – тополог., $\mathcal{B} \subset \Omega$
$\mathcal{B}$ называется базой Ω, если

$$\forall U \in \Omega \quad \exists \{ B_i \}_{i \in I} \subset \mathcal{B} : U = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Пример. (X, ρ) – метр. пр-во
$\mathcal{B} := \{ B(x_0, \varepsilon) \mid x_0 \in X, \varepsilon > 0 \}$ – база метрической топологии

Доказательство.

$$U \subset X \text{ откр. } \overset{\text{def}}{\iff} \forall x_0 \in U \quad \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U \iff \bigcup_{x_0 \in U} B(x_0, \varepsilon) = U$$

□

Теорема 7 (критерий базы). X – множество, $\mathcal{B} \subset 2^X$
$\mathcal{B}$ – база некоторой топологии $\Omega \iff$

1. $\bigcup_{B_i \subset \mathcal{B}} B_i = X$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \forall x_0 \in (B_1 \cap B_2) \quad \exists B_3 \in \mathcal{B} : x_0 \in B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$

Доказательство.

- $\implies$
  1. По определению
  2. $$B_1, B_2 \subset \mathcal{B} \implies B_1, B_2 \text{ – открытые } \implies (B_1 \cap B_2) \text{ – откр.}$$

     Значит, (B_1, B_2) – это объединение некоторых открытых
     B_3 – одно из них
- $\impliedby$

Пусть $\Omega \coloneqq \{\bigcup_{i\in I} B_i\}$
Докажем, что Ω – топология:

1. Возьмём $U_j \in \Omega \quad (j \in J)$
$$U_j = \bigcup_{i\in I_j} B_{ij}$$
$$\bigcup_{j\in J} U_j = \bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in I_j} B_{ij}$$

2. Докажем, что если $U_1, U_2 \in \Omega$, то $U_1 \cap U_2 \in \Omega$:
$$U_1 = \bigcup_{i\in I_j} B_{ij}, \qquad U_2 = \bigcup_{i\in I_2} B_{ij}$$
$$\forall x_0 \in (U_1 \cap U_2) \quad \begin{cases} \exists\, B_{1i_1} \ni x_0 \\ \exists\, B_{2i_2} \ni x_0 \end{cases} \implies \exists\, B_{x_0} \quad (B_3 \text{ из формулировки})$$
$$B_{x_0} \in \mathcal{B}$$
$$x_0 \in B_{x_0} \subset (B_{1i_1} \cap B_{2i_2}) \subset (U_1 \cap U_2)$$
$$\bigcup_{x_0\in(U_1\cap U_2)} B_{x_0} = U_1 \cap U_2$$

3. $\emptyset, X \in \Omega$

$\square$

9. Топология произведения, заданная базой

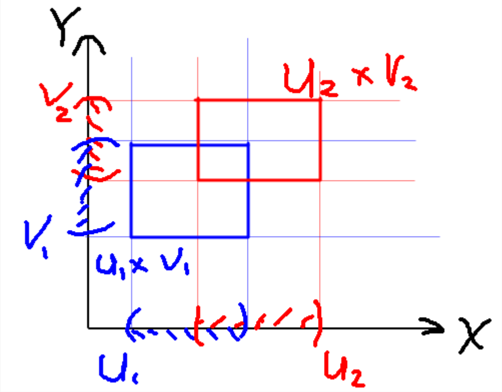
Пример. $(X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ – топ. пр-ва
Хотим ввести топологию на $X \times Y$

В чём проблема?.

$$U_1, U_2 \subset X, \qquad V_1, V_2 \subset Y$$

Будут ли верны равенства:

- $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \stackrel{?}{=} (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$
- $(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2) \stackrel{?}{=} (U_1 \cup U_2) \times (V_1 \cup V_2)$



По рисунку видно, что верно только первое равенство

Как мы хотим задать топологию:

$$\left.\begin{array}{l} U \subset X \text{ откр.} \\ V \subset Y \text{ откр.} \end{array}\right\} \implies U \times V \text{ открыто в } (X \times Y)$$

$\mathcal{B} := \{\, U \times V \mid U \in \Omega_X, \Omega \in \Omega_Y \,\}$ – **не** топология (т. к. есть проблемы с объединением)
Однако, $\mathcal{B}$ – база топологии

10. Прообраз топологии. Индуцированная топология

Определение 20. X – множество, $\qquad (Y, \Omega_Y)$ – топ. пр-во, $\qquad f : X \to Y$
Хотим ввести самую слабую топологию на X, такую, чтобы f была непрерывной
Такая топология называется прообразом топологии Y

Доказательство (корректности). Нужно доказать, что прообраз топологии существует и единственен
$f^{-1}(u)$ хотим считать открытыми, если $U \in \Omega_Y$
$\{\, f^{-1}(U) \,\} = \Omega_X$ – топология на X (меньше взять не можем, больше – не должны) □

Определение 21. (X, Ω) – топ. пр-во, $\qquad Y \subset X$
Определим Ω_Y:

$$\Omega_Y := \{\, U \cap Y \mid U \subset \Omega \,\}$$

Ω_Y называется индуцированной топологией

Доказательство (корректности).

- Проверим, что объединение открытых открыто:

$$\bigcup_{U_i \in \Omega} (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{U_i \in \Omega} U_i \right) \cap Y \subset \Omega_Y$$

- Проверим, что пересечение конечного набора открытых открыто:

$$\bigcap_{U_i \in \Omega} (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{U_i \in \Omega} U_i \right) \cap Y \subset \Omega_Y$$

- $\emptyset, Y \in \Omega_Y$

$\square$

11. Инициальная топология. Топология проиведения как инициальная

Определение 22. $\{ (Y_i, \Omega_{Y_i}) \}_{i \in I}$ – топ. пр-ва, X – множество
$\forall i$ задано отобр. $f_i X \to Y_i$
Хотим задать Ω_X – самую слабую, такую, чтобы все f_i были непрерывными

Доказательство (коректности). Докажем, что инициальная топология существует и единственна:
$f^{-1}(U)$ будем считать открытым в X
Положим $\mathcal{B} \coloneqq \{ f_{ij}^{-1} U_{i1} \cap \ldots \cap f_{ik}^{-1} U_{ik} \}$ – база некоторой топологии на X $\square$

Теорема 8. На $X \times Y$ совпадают две топологии:

- как $B = \{ U \times V \}$ – база
- инициальная

Доказательство. И та, и другая топологии определяются некоторой базой. Достаточно доказать, что базы совпадают
Найдём базу инициалной топологии:

$$\mathcal{B} = \{ p_x^{-1}(U_1) \cap p_x^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap p_x^{-1}(U_k) \quad \cap \quad p_y^{-1}(V_1) \cap p_y^{-1}(V_2) \cap \ldots \cap p_y^{-1}(V_l) \}$$

$$p_x^{-1}(U) = \{ (x, y) \mid \underbrace{p_x(x, y)}_{=x} \in U \} = U \times Y$$

Аналогично, $p_y^{-1}(V) = Y \times V$
Теперь,

$$\mathcal{B} = \underbrace{(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) \cap \ldots \cap (U_k \times Y)}_{(U_1 \cap \ldots \cap U_k) \times Y} \quad \cap \quad \underbrace{(X \times V_1) \cap (X \times V_2) \cap \ldots \cap (X \times V_l)}_{X \times (V_1 \cap \ldots \cap V_l)}$$

$$\mathcal{B} = (U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k) \times (V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_l)$$

Получили (открытые в X) $\times$ (открытые в Y) $\square$

12. Финальная топология. Примеры

Определение 23. $\{ (X_i, \Omega_i) \}_{i \in I}$ – топ. пр-ва, Y – множество
$\forall i$ задано $f_i : X_i \to Y$
Хотим задать Ω_Y – самую сильную такую, что все f_i непрерывны

Утверждение 3. Несложно заметить, что подойдёт

$$\Omega_Y \coloneqq \{ U : \forall i \quad f_i^{-1}(U) \text{ откр. в } X \}$$

13. Связность пространства и подмножества. Связность замыкания

Определение 24. X – топ. пр-во
X называется несвязным, если

$$\exists \underset{U_1, U_2 \neq \emptyset}{U_1, U_2 \in \Omega_X} : \begin{cases} U_1 \cap U_2 = \emptyset \\ U_1 \cup U_2 = X \end{cases}$$

Иначе – связным

Замечание. Несвязность $\implies U_1, U_2$ – открытые и замкнутые одновременно
Связяность означает, что таких (нетривиальных открыто-замкнутых) нет

Определение 25. (X, Ω) – топ. пр-во, $\quad A \subset X$
A называется связным, если оно связно в индуцированной топологии, т. е.

$$\forall U_1, U_2 \in \Omega_X \quad \left.\begin{aligned} U_1 \cup U_2 \supset A \\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset \end{aligned}\right\} \implies \left[\begin{aligned} U_1 \cap A = \emptyset \\ U_2 \cap A = \emptyset \end{aligned}\right.$$

Теорема 9. A связно, $\quad A \subset B \subset \operatorname{Cl} A$
$\implies B$ связно

Доказательство. Пусть B не связно

$$\implies \exists U_1, U_2 \in \Omega_X : \begin{cases} U_1 \cup U_2 \supset B \\ U_1 \cap U_2 \cap B = \emptyset \\ U_1 \cap B \neq \emptyset \\ U_2 \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

$$A \subset B \implies \begin{cases} U_1 \cup U_2 \supset A \\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset \end{cases} \xRightarrow[A\text{ связно}]{} \text{НУО } A \cap U_1 = \emptyset \implies U_2 \supset A$$

Положим $F := \operatorname{Cl} A \setminus U_1$ – замкнутое, $F \supset A \implies \operatorname{Cl}$ – не минимальное – $\lightning$ $\square$

Следствие. A связно $\implies \operatorname{Cl} A$ связно

14. Связность отрезка

Теорема 10. $(0, 1)$ связен

Доказательство. Пусть $(0, 1)$ не связен

$$\implies \exists U_1, U_2 - \text{откр.} : \begin{cases} U_1 \cup U_2 \supset (0, 1) \\ U_1 \cap U_2 \cap (0, 1) = \emptyset \end{cases}$$

Возьмём $a \in U_1 \cap (0, 1), \qquad b \in U_2 \cap (0, 1)$
Будем считать, что $a < b$
Т. к. $(0, 1)$ не связен, между a и b есть проблемная точка. Найдём её:

$$x_* := \sup \{\, x \in U_1 \mid x < b \,\}$$

Почему эта точка проблемная?

$$\left[\begin{aligned} x_* \in U_1 \implies \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \subset U_1 \implies b > x_* + \varepsilon \implies x_* \text{ не \textbf{верхняя} граница} - \lightning \\ x_* \in U_2 \implies \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \subset U_2 \implies x_* \text{ не \textbf{точная} верхняя граница} - \lightning \end{aligned}\right.$$

Значит, $(0, 1)$ связен $\square$

Следствие. $[0, 1]$ связен (как замыкание $(0, 1)$)

15. Связность объединения. Образ связного множества

Теорема 11. A, B связны, $\quad A \cap B \neq \emptyset$
$\implies A \cup B$ связно

Доказательство. Пусть $U_1, U_2 \in \Omega : \begin{cases} U_1 \cup U_2 \subset (A \cup B) \\ U_1 \cap U_2 \cap (A \cup B) = \emptyset \\ U_1 \cap (A \cup B) \neq \emptyset \\ U_2 \cap (A \cup B) \neq \emptyset \end{cases}$

Возьмём $x_0 \in A \cap B$

НУО считаем, что $\begin{cases} x_0 \in U_1 \\ x_0 \notin U_2 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} U_1 \cup U_2 \supset A \\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset \end{aligned}\right\} \xRightarrow[A \text{ связно}]{} \left[\begin{aligned} &\cancel{U_1 \cap A = \emptyset} \\ &U_2 \cap A = \emptyset \end{aligned}\right. \xRightarrow[x_0 \in A]{} U_2 \cap A = \emptyset$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 \cup U_2 \supset B \\ U_1 \cap U_2 \cap B = \emptyset \end{aligned}\right\} \xRightarrow[B \text{ связно}]{} \left[\begin{aligned} &\cancel{U_1 \cap B = \emptyset} \\ &U_2 \cap B = \emptyset \end{aligned}\right. \xRightarrow[x_0 \in B]{} U_2 \cap B = \emptyset$$

$$\left.\begin{aligned} &U_2 \cap (A \cup B) \neq \emptyset \\ &U_2 \cap A = \emptyset \\ &U_2 \cap B = \emptyset \end{aligned}\right\} \quad \lightning$$

$\square$

Теорема 12. $f : X \to Y$ – непр., $\quad A$ – связно
$\implies f(A)$ – связно

Доказательство. Пусть $f(A)$ не связно

Это означает, что $\begin{cases} f(A) \subset U_1 \cup U_2 \\ U_1 \cap U_2 \cap f(A) = \emptyset \\ U_1 \cap f(A) \ni y_1 \\ U_2 \cap f(A) \ni y_2 \end{cases}$

$$V_1 \coloneqq f^{-1}(U_1), \qquad V_2 \coloneqq f^{-1}(U_2)$$

$$V_1 \cup V_2 = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cup U_2) \supset f^{-1}(f(A)) \supset A$$

$V_1 \cap V_2 \cap A = \emptyset$ (т. к. допустим, $x_* \in V_1 \cap V_2 \cap A \implies f(x_*) \in U_1 \cap U_2 \cap f(A) = \emptyset$) $\square$

Следствие. $X \simeq Y$
X связно $\implies Y$ связно

16. Связность декартова произведения

Теорема 13. $X \times Y$ связно $\iff X, Y$ связно

Доказательство.

- $\implies$

  $$\underset{p_x(x,y)=x}{p_x : X \times Y \to X}, \qquad \underset{p_y(x,y)=y}{p_y : X \times Y \to Y}$$

  Оба непрерывны

- Допустим, что $X \times Y$ несвязно
  Тогда $X \times Y = U_1 \cup U_2, \qquad U_1 \cap U_2 = \emptyset$
  Возьмём $(x_1, y_1) \in U_1, \qquad (x_2, y_2) \in U_2$
  НУО считаем $(x_1, y_2) \in U_1$

$\square$

17. Теорема Вейерштрасса о промежуточном значении. Примеры применения

Утверждение 4.
$$E \subset \mathbb{R} \text{ связно } \iff \forall x, y \in E \quad x < r < y \implies r \in E \tag{1}$$

Теорема 14. X – топологическое пространство, связное
$f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $\quad f(x_0) = a, \quad f(x_1) = b, \qquad a \le c \le b$
$$\implies \exists x_2 \in X : f(x_2) = c$$

Доказательство. X – связное $\implies f(X)$ – связное
Для удобства, НУО предположим, что $a < b$
$$a \le c \le b \underset{(1)}{\implies} \exists x_2 : f(x_2) = c$$
□

18. Компоненты связности

Определение 26 (компонента связности точки).
$$K_a \coloneqq \bigcup_{\substack{a \in A \\ A \text{ связно}}} A \text{ – связно}$$

Утверждение 5. $K_a = K_b$ или $K_a \cap K_b = \emptyset$

Доказательство. Пусть $\left\{ \begin{matrix} K_a \ne K_b \\ K_a \cap K_b \ne \emptyset \end{matrix} \right\} \implies K_a \cup K_b$ связно
Получили множество, содержащее a и b, большее, чем каждая из компонент – $\lightning$ □

Утверждение 6. K_a замкнута

Доказательство. Замыкание связного связно
Если компонента связности не замкнута, то её замыкание тоже будет компонентой связноти, большей данной □

Примечание. K_a не обязательно открыта

Теорема 15. (X, Ω) – топологическое пространство. Равносильны следующие условия:

1. Компоненты связности X открыты
2. $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, где X_i – комп. связности
   Топология X совпадает с топологией объединения
3. У любой точки существует связная окрестность

Доказательство. *Здесь не будет строгого доказательства, потому что там много слов ни о чём*

- $1 \iff 3$
  Очевидно (эта окрестность и будет K_a)
- 2
  Зададим топологию объединения как финальную:
  $$\Omega_\cup \coloneqq \{\, U : \mathrm{id}^{-1}(U) \text{ откр. в } X_i \,\}$$

Очевидно, что

$$\forall i \quad X_i \subset X \implies \exists\, \mathrm{id}^{-1}(X_i) = X_i$$

Значит, X_i открыто

□

19. Линейная связность

Определение 27. Путём в X называется непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$

Определение 28. X называется линейно связным, если любые две точки соединены путём

Определение 29. $A \subset X$ линейно связно, если любые две точки можно соединить путём в A (не выходящим за пределы A)

Теорема 16. Линейно связное множество является связным

Доказательство. Пусть не связно

$$\iff X = U_1 \cup U_2 : \begin{cases} U_1 \cap U_2 = \emptyset \\ x_1 \in U_1 \\ x_2 \in U_2 \end{cases}$$

$$\implies \exists\, f : [0,1] \to X : \begin{cases} f(0) = x_1 \\ f(1) = x_2 \end{cases}$$

$f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ разбивают отрезок $[0,1] \implies [0,1]$ не связен – $\lightning$ □

Определение 30. Компонента линейной связности – максимальное линейно связное подмножество

Утверждение 7. Компоненты лин. св. совпадают или не пересекаются

Примечание. Компоненты лин. св. не обязательно замкнуты

20. Компактность. Примеры. Компактность замкнутого множества

Определение 31. X – топ. пр-во
$\{U_i\}_{i\in I}$ называется открытым покрытием X, если:

1. $\bigcup_{i\in I} U_i = X$
2. $\forall i \quad U_i \in \Omega$

Дальше слово покрытие будет обоначать "открытое покрытие"

Определение 32. $\{U_i\}_{i\in I}$ – покрытие X Если $\{U_{i_j}\}_{i_j \in J \subset I}$ – тоже покрытие X, то оно называется подпокрытием $\{U_i\}_{i\in I}$

Определение 33. X называется компактным, если из любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

Определение 34. $A \subset X$ компактно, если оно компактно в индуцированной топологии, т. е.

$$\underset{U_i \text{ откр. в } X}{\forall \{U_i\}_{i\in I}} : \bigcup_{i\in I} U_i \supset A \quad \exists U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n} : \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \supset A$$

Примеры.

1. Антидискретное **компактно**
   Любое его подмножество **компактно**
2. Любое конечное топ. пр-во **компактно**
3. Бесконечное дискретное **не компактно**
   (покрытие одноточечными мн-вами)
4. $\mathbb{R}_{\text{станд.}}$ **не компактно**
   ($U_n = (-n, n)$ – покрытие, выкинуть ни один нельзя)
5. Топология Зарисского **компактна**
6. Стрелка:
   - На $[0, +\infty]$ – **компактна**
   - На $(0, +\infty)$ – **не компактна**

Теорема 17. X компактно, A замкнуто в X

$$\implies A \text{ компактно}$$

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{ U_i \}_{i \in I}$ – покрытие
A Положим $V := X \setminus A$ – откр.
$\{ U_i, V \}_{i \in I}$ – покр. X
$\implies \exists$ конечное подпокрытие. Выпишем его:

$$V, U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$$

Тогда все U образуют конечное подпокрытие A (т. к. $V \cap A = \emptyset$) □

21. Компактность образа компактного множества

Теорема 18. $f : X \to Y$ – непр., $A \subset X$ – комп.
$\implies f(A)$ – копм.

Доказательство. Пусть $\{ V_i \subset Y \}_{i \in I}$ – покрытие $f(A)$
$\implies \forall i \quad f^{-1}(V_i)$ – откр. в X
$\implies \{ f^{-1}(V_i) \}_{i \in I}$ – покрытие A
A компактно, поэтому можно выбрать конечное подпокрытие:

$$f^{-1}(V_{i_1}), ..., f^{-1}(V_{i_n}) \text{ – кон. подпокр. } A$$

$V_{i_1}, ..., V_{i_m}$ – кон. попокр. $F(A)$ □

Следствие. Компактность является топологическим свойством

22. Компактные подмножества хаусдорфова пространства

Определение 35. X называется хаусдорфовым, если любые две точки можно разделить непересекающимися окрестностями, т. е.

$$\forall \underset{x \neq y}{x, y \in X} \quad \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$$

Теорема 19. X – хаусдорфово, A компактно
$\implies A$ замкнуто

Доказательство. Нужно доказать, что $X \setminus A$ открыто
Зафиксируем $x_0 \in X \setminus A$

$$X \text{ хаусд.} \implies \forall a \in A \quad \exists \begin{Bmatrix} U_{ax_0} - \text{окр. } a \\ V_{ax_0} - \text{окр. } x_0 \end{Bmatrix} : U \cap V = \emptyset$$

$\{ U_{ax_0} \}_{a \in A}$ – покрытие $A \implies \exists U_{ax_0 1}, ..., U_{ax_0 n}$ – конечное подпокрытие A
Для каждой $U_{ax_0 i}$ возьмём парную ей $V_{ax_0 i}$:

$$V \coloneqq \bigcap_{k=1}^{n} V_{ax_0 k}$$

V открыто, $\quad V \cap A = \emptyset$ (т. к. $V_i \cap U_i = \emptyset$), $\quad x_0 \in V$ $\square$

Следствие. X – компактно и хаусдорфово, $\quad A \subset X$
A компактно $\iff$ A замкнуто

23. Лемма Лебега. Компактность отрезка

Лемма 3 (Лебега)**.** $\{ U_i \}$ – покрытие $[0, 1]$

$$\exists \underset{\text{число Лебега покрытия}}{\varepsilon > 0} : \forall x_0 \in [0, 1] \quad \exists U_i : \underbrace{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)}_{=B(x_0, \varepsilon)} \cap I \subset U_i$$

Замечание. ε не зависит от x_0

Доказательство. Положим $\varepsilon_i \coloneqq \dfrac{1}{2^i}$ $(\varepsilon_i \to 0)$
Пусть лемма невверна, т. е.

$$\exists x_i : \forall j \quad B(x_i, \varepsilon_i) \not\subset U_j$$

Применим принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists x_{n_k} \to x_0$$

$$x_0 \in U_j \implies \exists \underset{\text{из } veps_i \text{ в первой строчке}}{\varepsilon_i} : B(x_0, \varepsilon_i) \subset U_j$$

Рассмотрим $x_{n_k} : \rho(x_{n_k}, x_0) < \dfrac{1}{2i + 1}$
Пусть $b_k \geq i + 1$ (можно так сделать, т. к. последовательность сходится к x_0)

$$B(x_{n_k}, \varepsilon_{n_k}) B(x_{n_k}, \varepsilon_{i+1}) \subset B(x_0, \varepsilon_i) \subset U_j$$

А мы предположили, что $B(x_i, \varepsilon_i) \not\subset U_j$ – $\lightning$ $\square$

Теорема 20. $[0, 1]$ компактен

Доказательство. Пусть $\{ U_i \}$ – открытое покрытие, $\quad \varepsilon$ – его число Лебега
Применим лемму Лебега:

$$[0, 1] \cap B(0, \varepsilon) \subset U_0$$
$$B(\varepsilon, \varepsilon) \subset U_1$$
$$B(2\varepsilon, \varepsilon) \subset U_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[0, 1] \cap B(k\varepsilon, \varepsilon) \subset U_k, \qquad (k + 1)\varepsilon \geq 1$$

То есть, все эти шары покрывают отрезок
Значит, $U_1, ..., U_k$ – конечное подпокрытие $\square$

24. Компактность произведения пространств

Теорема 21. X, Y комп. $\iff$ $X \times Y$ комп.

Доказательство.

- $\Longleftarrow$
  $\underset{p_x(x,y)=x}{p_x} : X \times Y \to X$ – непр.
  $X \times Y$ – комп. $\implies$ $p_x(X \times Y) = X$ – комп.
  Аналогично для Y и p_y

- $\implies$
  Возьмём $\{ U_i \times V_i \}$ – покрытие $X \times Y$
  Рассмотрим $x_0 \in X$ и слой над ней: $\{ x_0 \} \times Y \simeq Y$ $\{ x_0 \} \times Y$ – комп. $\implies$ $\exists \{ U_{ix_0} \times V_{ix_0} \}_{i=1}^{n_{x_0}}$ – покрытие
  $$U_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{n} U_{ix_0} \text{ – откр.}$$
  Теперь будем менять x_0:
  $\{ U_{x_0} \}_{x_0 \in X}$ – открытое покрытие X
  X – комп. $\implies$ $U_{x_1}, ..., U_{x_m}$ – конечное подпокрытие
  $\{ U_{ix_1} \times V_{ix_1} \}_{i=1}^{n_{x_1}}, \dots\dots\dots, \{ U_{ix_m} \times V_{ix_m} \}_{i=1}^{n_{x_m}}$ – конечное подпокрытие

$\square$

Замечание. Верна теорема Тихонова:
X_i – комп. $\iff$ $\prod X_i$ – комп.

25. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

Определение 36. $A \subset R^n$ ограничено, если $\exists M > 0 : A \subset B(0, M)$
Или: $S \subset [-M, M]^n$

Теорема 22. $A \subset \mathbb{R}^n$
A компактно $\iff$ A замкнуто и ограничено

Доказательство.

- $\implies$
  - Замкнутость:
    $$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \text{ хаусдорфово} \\ A \text{ компактно} \end{array}\right\} \implies A \text{ замкнуто}$$
  - Ограниченность:
    Иначе $\{ B(0, M) \}_{M=1}^{\infty}$ – покрытие без конечного подпокрытия

- $\Longleftarrow$
  $[-M, M]$ комп. ($\simeq [0, 1]$) $\implies$ $[-M, M]^n$ – комп. (как прямое произведение)
  $$\left.\begin{array}{l} A \text{ замкнуто} \\ A \subset [-M, M]^n \end{array}\right\} \implies A \text{ комп.}$$

$\square$

26. Теорема Вейерштрасса о достижении максимума. Примеры применения

Теорема 23. $f : X \to \mathbb{R}$ – непр., X – комп.

$$\implies \exists x_0 : \forall x_1 \quad f(x_1) \le f(x_0)$$

Доказательство. X – комп. $\implies f(X) \subset \mathbb{R}$ – комп.
Знаем, что компактные подмножества прямой замкнуты и ограничены, а значит, $\exists \max(f(x))$ □

Пример (метод Штурма).

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Доказательство. Докажем его следующим методом (в предположении, что $x_i \ge 0$):

$$S \coloneqq x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$M \coloneqq \{\, (x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \begin{cases} x_i \ge 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = S \end{cases} \,\}$$

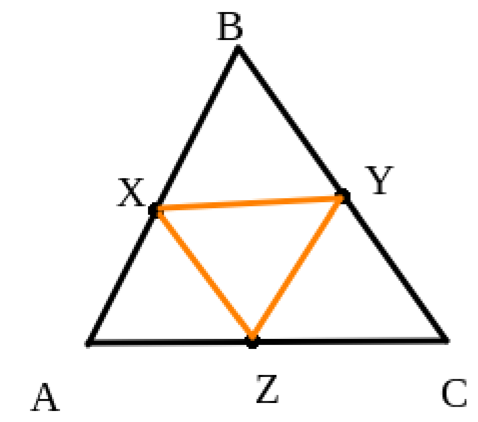
$$f(x_1, \dots, x_n) \coloneqq x_1 x_2 \dots x_n, \qquad f : M \to \mathbb{R}$$

Утверждается, что если $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{S}{n}$, то $f(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, \dots, \frac{S}{n}) \overset{?}{\ge} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Докажем, что это максимум. Для этого докажем, что остальные точки не являются максимумом:
Пусть $x_i < x_j$
Выберем $\varepsilon < \dfrac{x_i - x_j}{2}$
Утверждается, что $x_i x_j < (x_i + \varepsilon)(x_j - \varepsilon)$
Докажем это:

$$(x_i + \varepsilon)(x_j - \varepsilon) = x_i x_j + \varepsilon \underbrace{(x_j - x_i - \varepsilon)}_{>0}$$

Получили, что любой набор $\{\, x_i \,\}$, кроме одинаковых, улучшаем (при фиксированной сумме)
Если максимум существует, то это одинаковые x_i
Докажем его существование: M – комакт (т. к. это – замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$) $\underset{\text{т. В.}}{\implies} f$ имеет максимум □

Пример (задача Фаньяна). Есть остроугольный треугольник ABC. Хотим вписать в него треугольник XYZ так, чтобы $P(XYZ) \to \min$
Утверждается, что X, Y, Z – основания высот



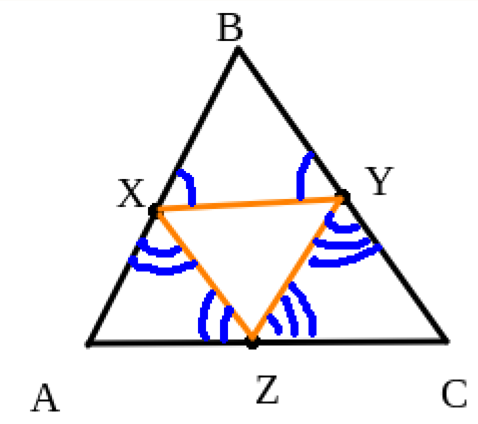
Доказательство.

$$\{\, (X, Y, Z) \,\} = AB \times BC \times CA \text{ – комп.}$$

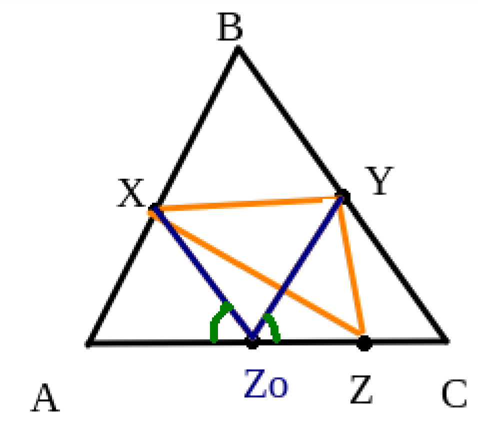
Значит, существует такая конфигурация X, Y, Z, что $P(XYZ) = \max$

Утверждается, что единственная неулучшаемая концигурация:

$$\begin{cases} \angle BXY = \angle BYX \\ \angle AXZ = \angle AZX \\ \angle YCZ = \angle ZCY \end{cases}$$



Докажем это:
Пусть $\angle AZX < \angle CZY$, при этом, $\angle AZ_0X = \angle CZ_0Y$



Вспоминая прошлый семестр, это означает, что $XZ_0 + YZ_0 < XZ + YZ$ □

Пример (задача Дидоны). Требуется найти фигуру с максимальной площадью при заданном периметре
Утверждается, что это круг

Доказательство. Пусть M – множество выпуклых фигур с периметром P
f – функция площади
Единственная неулучшаемая фигура – круг
Значит, достаточно доказать, что M компактно
Хотим превратить M в топологическое пространство, так, чтобы функция площади была непрерывна
Введём для этого метрику. Нам подойдёт метрика Хаусдорфа

> **В каких случаях M может не быть компактом?.**
>
> Рассмотрим в качестве M множество фигур на плоскости. Это (почти всегда) **не** компакт (т. к. фигуры можно сдвигать сколь угодно далеко)

Возьмём в качестве M множество фигур в каком-нибудь ограниченном множестве (например, в квадрате со стороной P)
Метрика – метрика Хаусдорфа
Утверждается, что таким образом построенное множество компактно (без доказательства) □

27. Аксиомы отделимости. Критерий T1

Утверждения. X – топологическое пространство. X может удовлетворять следующим аксиомам:

- $\boldsymbol{T_0}$ (Колмогорова). Для любых двух различных точек существует окрестность, содержащая ровно одну из них
- $\boldsymbol{T_1}$ (Тихонова). $\forall \underset{x \ne y}{x, y \in X} \quad \exists U_x \not\ni y$
- $\boldsymbol{T_2}$ (Хаусдорфа). $\forall \underset{x \ne y}{x, y \in X} \quad \exists \underset{\ni x}{U_x}, \underset{\ni y}{U_y} : U_x \cap U_y = \emptyset$
- $\boldsymbol{T3}$. $\forall F$ – замкн. $\quad \forall x \notin F \quad \exists$ открытые $\underset{\ni x}{U_x}, \underset{\supset F}{U_F} \ : \ U_x \cap U_F = \emptyset$
- $\boldsymbol{T4}$. $\forall \underset{F_1 \cap F_2 = \emptyset}{F_1, F_2 \text{ – замкн.}} \quad \exists$ открытые $\underset{\supset F_1}{U_1}, \underset{\supset F_2}{U_2} \ : \ U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Замечание. $\boldsymbol{T_2} \implies \boldsymbol{T_1} \implies \boldsymbol{T_0}$

Теорема 24. $\boldsymbol{T_1} \iff$ любая точка – замкнутое множество

Доказательство.

- $\implies$

$$\boldsymbol{T_1} \iff \forall x_0 \in X \quad \forall \underset{y \ne x_0}{y \in X} \quad \exists U_y : \begin{cases} y \in U_y \\ x_0 \notin U_y \end{cases}$$

$$\bigcup_{y \in X \setminus \{ x_0 \}} U_y = X \setminus \{ x_0 \} \underset{\text{(как объединение открытых)}}{\text{– откр.}} \implies \{ x_0 \} \text{ – замкн.}$$

- $\impliedby$

$$\forall x \ne y \quad U_x := X \setminus \{ y \} \underset{\text{(т. к. } y \text{ замкн.)}}{\text{– откр.}}$$

Получили окрестность, которая содержит x, но не содержит y

$\square$

Следствие. При $\boldsymbol{T_1}$ верно, что $\boldsymbol{T_4} \implies \boldsymbol{T_3} \implies \boldsymbol{T_2} \implies \boldsymbol{T_1}$

28. Нормальность метрического пространства

Определение 37. Пространство, удовлетворяющее $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_3}$ (по следствию, $\boldsymbol{T_0}$ – $\boldsymbol{T_3}$) называется регулярным

Определение 38. Пространство, удовлетворяющее $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_4}$ (по следствию, $\boldsymbol{T_0}$ – $\boldsymbol{T_4}$) называется нормальным

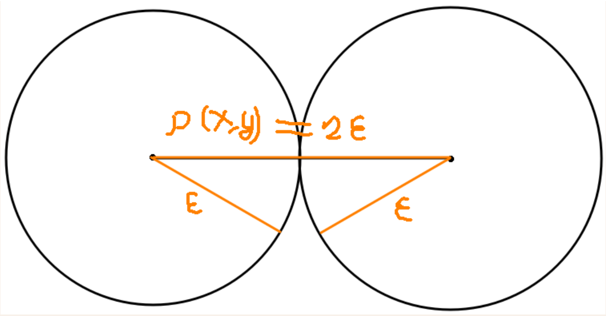
Теорема 25. Метрическое пространство нормально

Теорема 26.

- Хаусдорфовость ($\boldsymbol{T_2}$):

  Возьмём $x \ne y$, $\qquad \varepsilon := \dfrac{\rho(x, y)}{2}$

$$B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) \triangleq \emptyset$$



- Регулярность ($\boldsymbol{T_3}$): Возьмём $x_0 \in X, \quad F$ – замкн.

$$\implies \exists\, \rho(x_0, F) := \inf_{y \in F} \rho(x, y) \overset{?}{>} 0$$

Пусть $\inf\limits_{y\in F} \rho(x_0, y) = 0$

$$\implies \exists y_n : \rho(x_0, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad y_n \in B(x_0, \varepsilon) \implies$$

$$\implies x_0 \in \operatorname{Cl}\{\, y_n \,\} \subset \operatorname{Cl} F \underset{(F \text{ замкнуто})}{=} F$$

Положим $\varepsilon := \dfrac{\rho(x_0, F)}{2}$
Возьмём $U_{x_0} := B(x_0, \varepsilon)$ и $U_F := \bigcup_{y \in F} B(y, \varepsilon)$ – открыты (т. к. шары открыты)

- $\boldsymbol{T_4}$
F_1, F_2 – замкнутые. Хотим, чтобы $\rho(F_1, F_2)$ могло равняться нулю
Пусть это не так:

$$\begin{cases} \forall x \in F_1 \quad \exists \varepsilon_x := \frac{\rho(x, F_2)}{>} 0 \\ \forall y \in F_2 \quad \exists \varepsilon_y := \frac{\rho(y, F_1)}{>} 0 \end{cases}$$

$$U_{F_1} := \bigcup_{x \in F_1} B(x, \varepsilon_x), \qquad U_{F_2} := \bigcup_{y \in F_2} B(y, \varepsilon_y)$$

$$x \in (U_{F_1} \cap U_{F_2}) \implies x \in \Big(B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, \varepsilon_y)\Big)$$

Пусть, НУО, $\varepsilon_x \geq \varepsilon_y$

$$\implies \rho(x, y) < 2\varepsilon_x = \rho(x, F_2)$$

Вспомним, что $x \in F_1, y \in F_2$
Получили, что расстояние от x до некоторой точки фигуры F_2 больше, чем до самой F_2 - $\lightning$

29. Нормальность хаусдорфова компакта

Теорема 27. X – компактно и хаусдорфово $\implies$ X нормально

Доказательство.

- Регулярность ($\boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T_3}$)
Возьмём $x_0 \in X$ и F – замкнутое в X ($\implies$ F компактно, в силу хаусдорфовости X)
В силу хаусдорфовости F,

$$\forall y \in F \quad \exists \begin{Bmatrix} U_{x_0, y} \text{ – откр.} \\ V_y \text{ – откр.} \end{Bmatrix} : U_{x_0, y} \cap V_y = \emptyset$$

Возьмём $\{\, V_y \,\}_{y \in F}$ – конечное покрытие F

$$\implies \exists V_{y_1}, \ldots, V_{y_n} \in F \text{ – конечное подпокрытие } F$$

$$U_{x_0} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_0, y_i} \text{ – откр.}, \qquad U_F \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

- Нормальность ($\boldsymbol{T_4}$)
  Заданы F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества
  Возьмём $x \in F_1$, $\underset{\text{окр. } x}{U_x}$, $\underset{\text{окр. } F_2}{V_x}$ $: U_x \cap V_x = \emptyset$ (можно так сделать в силу $\boldsymbol{T_3}$)
  Воспользуемся компактностью F_1 (как подмножества X):
  Возьмём $\{\, U_x \,\}_{x \in F_1}$ – покрытие F_1
  Значит, существует $\{\, U_{x_i} \,\}_{i=1}^{k}$ – подпокрытие F_1

$$U_{F_1} \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}, \qquad U_{F_2} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

□

30. Компактификация по П. С. Александрову

Определение 39. X называется локально компактным, если у любой точки есть окрестность с компактным замыканием, т. е.

$$\forall x_0 \in X \quad \exists U_{x_0} : \operatorname{Cl} U_{x_0} \text{ – комп.}$$

Теорема 28. X локально компактно и хаусдорфово

$$\implies \exists \widehat{X} \coloneqq X \cup \{\, \infty \,\}$$

X – подпространство $\widehat{X}$
$\widehat{X}$ компактно и хаусдорфово

Доказательство. По условию, $\widehat{X} = X \cup \{\, \infty \,\}$
Открытые в $\widehat{X}$:

- $\infty \in U$
  U открыто в $\widehat{X} \iff U$ открыто в X

- $\infty \in U$
  U открыто в $\widehat{X} \iff \underset{(=X \setminus U)}{\widehat{X} \setminus U}$ компактно

  - Докажем, что X – подпространство $\widehat{X}$:
    Достаточно доказать, что если $\infty \in U$, то $(U \setminus \{\, \infty \,\})$ открыто в X

    $$X \setminus \big(U \setminus \{\, \infty \,\}\big) \text{ комп. в } X \xRightarrow[X \text{ – хаусд.}]{} X \setminus \big(U \setminus \{\, \infty \,\}\big) \text{ замкнуто} \implies \big(U \setminus \{\, \infty \,\}\big) \text{ открыто}$$

  - Очевидно, что $\widehat{X}$ компактно

  - Докажем, что $\widehat{X}$ хаусдорфово:

    – $x_0, y_0 \in \big(\widehat{X} \setminus \{\, \infty \,\}\big) \implies$ ОК (разделяем в X)

    – НУО $x_0 \in \big(\widehat{X} \setminus \{\, \infty \,\}\big), \quad y_0 = \infty$
    В силу локальной компактности X,

$$\exists U_{x_0} \subset X : \operatorname{Cl} U_{x_0} \text{ – комп.}$$

$$U_{y_0} \coloneqq \big(X \setminus \operatorname{Cl} U_{x_0}\big) \text{ – откр. в } \widehat{X} \text{ и содержит } y_0 = \infty$$

□