Оглавление

Глава 1

Метрические пространства

Лемма 1. $B(x_0, \varepsilon)$ открытый

Доказательство.

$$\forall x_1 \in B(x_0, \varepsilon)$$
$$\delta \coloneqq \varepsilon - p(x_1, x_0)$$
$$B(x_1, \delta) \subset B(x_0, \varepsilon) - ?$$
$$\rho(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon - \rho(x_0, x_1)$$
$$\rho(x_0, x_2) \leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) < \varepsilon$$
$$x_2 \leq B(x_0, \varepsilon)$$

$\square$

Теорема 1. Равносильны определения:

1. Множество внутренних точек $\operatorname{Int} A$
2. $\bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ открытое}}} U$
3. Максимальное открытое подмножество A

Доказательство.

- $(2) \iff (3)$

  $$\bigcup_{i \in I} U_i \text{ открытое, если } \forall i \quad U_i \text{ открытое}$$
  $$x_0 \in \bigcup_{i \in I} U_i$$
  $$\exists\, x_0 \in U_i$$
  $$\implies \exists\, \varepsilon : B(x_0, \varepsilon) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

  Почему это множество внутренних точек?

  $$x_0 \in \bigcup_{\substack{U_i \subset A \\ U_i \text{ открытое}}} U_i \subset A$$
  $$\exists\, \varepsilon : B(x_0, \varepsilon) \subset \bigcup_{\substack{U_i \subset A \\ U_i \text{ открытое}}} U_i \subset A$$

  Если x_0 – внутренняя для A, то $\exists\, \varepsilon : B(x_0, \varepsilon) \subset A$

$\square$

Теорема 2 (свойства открытых множеств).

1. $\bigcup_{i\in I} U_i$ открытое, если $\forall i \quad U_i$ открытое

   Доказательство. $x_0 \in \bigcup_{i\in I} U_i \implies \exists i : x_0 \in U_i \implies \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ □

2. $U_1, U_2, ..., U_n$ – открытые $\implies \bigcap_{i=1}^n U_i$ открытое

   Доказательство.

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i \implies \forall i \quad x_0 \in M \implies \exists \varepsilon_i : B(x_0, \varepsilon_i) \subset U_i$$

$$\varepsilon := \min_{i=1:n} \{ \varepsilon_i \} \implies B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_i) \subset U_i$$

$$B(x_0, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$$

□

3. $\emptyset, M$ – открытые

Определение 1. F называется замкнутым, если $M \setminus F$ – открытое

Теорема 3 (свойства замкнутых множеств).

1. Если $\{ F_{i\in I} \}$ – замкнутое $\implies \bigcap_{i\in I} F_i$ – замкнутое

   Доказательство.

$$U_i := M \setminus F_i \text{ – открытое}$$

$$\bigcup U_i = \bigcup (M \setminus F_i) = M \setminus \bigcap F_i \implies \bigcap F_i \text{ – замкнутое}$$

□

2. Если $F_1, ..., F_n$ – замкнутые $\implies \bigcup_{i=1}^n$ – замкнутое

3. $\emptyset, M$ – замкнутые

Замечание. Открытое – **не** обязательно не замкнутое

Примеры.

1. $M = [0, 1] \cup [2, 3]$; стандартная метрика
   $\underbrace{[0, 1]}_{=B(1/2, 1)}$ открыт в M (но не открыт в $\mathbb{R}$)
   Аналогично, $[2, 3] = B(2,5; 1)$ – открытый $\implies [0, 1] = \overline{[2, 3]}$ – замкнутый

2. Дискретная метрика $\rho = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
   $B(x_0, 1) = \{ x_0 \}$ – открытое
   $\forall U = \bigcup_{x_0 \in U} \{ x_0 \}$ – открытое
   Также, (так как все открытые), все замкнутые

Замечание. Существуют множества, не открытые, и не замкнутые

Пример. $[a, b) \in \mathbb{R}$; метрика стандартная

Теорема 4 (равносильные определения замыкания). M – метрическое пространство, $A \subset M$
Равносильны определения:

1. Множество внутренних и граничных точек называется замыканием

2. $M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A)$

3. $\bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ замкнутое}}} F$

4. Минимальное замкнутое надмножество A

Доказательство.

- (3) $\iff$ (4)
- (1) $\iff$ (2), так как
$$\operatorname{Int}(M \setminus A) = \operatorname{Ext} A$$
- (2) $\iff$ (3), так как
$$M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A) = M \setminus \bigcup_{\substack{U \subset M \setminus A \\ U \text{ открытое}}} U = \bigcap_{\substack{U \subset M \setminus A \\ U \text{ открытое}}} M \setminus U = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ замкнутое}}} F$$

$\square$

Глава 2

Топологические пространства

Определение 2. X – множество, $\Omega \subset 2^X$
(X, Ω) называется топологическим пространством, если

1. $\forall \{ U_i \} \in \Omega \quad \bigcup U_i \in \Omega$
2. $U_i, ..., U_n \in \Omega \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

Ω называется топологией над X
$U \in \Omega$ называется открытым

Определение 3. F называется замкнутым, если $X \setminus F$ открытое

Теорема 5.

1. $\{ F_i \}$ – замкнутое $\implies \bigcap_{i \in I} F_i$ – замкнутое
2. $F_1, ..., F_n$ – замкнутое $\implies \bigcup_{i=1}^n F_i$ – замкнутое
3. $\emptyset, X$ – замкнутые

Примечание. Топологическое пространство можно задавать через замкнутые множества (вместо открытых)

Замечание. Любое метрическое пространство является топологическим пространством

Примеры.

1. (M, ρ) – метрическое $\implies$ M – топологическое
2. $\forall X, \quad \Omega = \{ \emptyset, X \}$ – антидискретная топология
   M – топологическое, но **не** метрическое
3. $\forall X, \quad \Omega = 2^X$ – дискретная топология
   Любое подмножество будет открытым (а, следовательно, и замкнутым)
4. "Топология Зариского" или Топология конечных дополнений
   Будем называть множество замкнутым, если оно конечное или X (X – бесконечный)
   Открытые – те, дополнения до которых конечны
5. Стрелка
   $X = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$, или ...)
   Открытыми будут лучи $(a, +\infty)$ или $\emptyset$ или $\mathbb{R}$

   Примечание. Если $(a, +\infty)$ заменить на $[a, +\infty)$, то это не будет топологией (т. к. $\bigcup [\frac{1}{n}; \infty] = (0, \infty)$)

6. Топология Зариского
   $X = \mathbb{C}$ (важно, что не $\mathbb{R}$)
   Замкнутым будем называть множество корней некоторого многочлена $f(x)$

$$F_1 \iff f_1, \qquad F_2 \iff f_2$$

$$F_1 \cup F_2 \iff f_1 \cdot f_2$$

$$F_1 \cap F_2 \iff \text{НОД}(f_1, f_2)$$

Определение 4. R – коммутативное кольцо, $I \subset R$
I называется идеалом F, если

1. $x, y \in I \implies x + y \in I$
2. $x \in I; y \in R \implies x \cdot y \in I$