Оглавление

0.1 Формула Тейлора для функции n переменных с остатком в форме Пеано

Теорема 1. $f : E \to \mathbb{R}$, $\qquad E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}, \qquad X_0 \in E, \qquad X_0 \in \omega \subset E, \qquad f \in \mathcal{C}^{r\geq 1}\Big(\omega\Big)$

$$\implies f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \rho(H) \tag{1}$$

где

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^r} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0 \tag{2}$$

Доказательство.

- $r = 1$
  По достаточному условию дифференцируемости, f дифф. в X_0, что, по определению, означает, что
  $$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{\nu=1}^{n} f'_{x_\nu}(X_0) h_\nu + \rho(H) \tag{3}$$
  где
  $$\frac{\rho(H)}{\|H\|} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0, \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \tag{4}$$
  Перепишем эту сумму, используя мультииндексы. Возьмём $\alpha : |\alpha| = 1$, то есть $\alpha = (0, ..., \underset{\nu}{1}, ..., 0)$
  $$C_1^\alpha = \frac{0!...1!...0!}{1!} = 1$$
  $$\sum_{n=1}^{n} f'_{x_\nu}(X_0) h_\nu = \sum_{|\alpha|=1} C_1^\alpha \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha$$
  Значит, ранее введённое определение дифференцируемости соотносится с обозначениями через мультииндексы
- $r \geq 2$

Применим к функции f формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для $r-1$:

$$\exists c \in (0,1) : f(X_0+H) =$$

$$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0+cH) H^\alpha \underset{\pm\sum \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha}{=}$$

$$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \Big(\partial^\alpha f(X_0+cH) - \partial^\alpha f(X_0)\Big) H^\alpha}_{\rho(h)} \tag{5}$$

Получили соотношение (1). Осталось доказать (2)

$$f \in \mathcal{C}^r\Big(\omega\Big) \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \partial^\alpha f(X_0+H) - \partial^\alpha f(X_0) \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \qquad \forall \alpha : |\alpha| = r \tag{6}$$

$$H^\alpha \overset{\text{def}}{=} h_1^{\alpha_1} ... h_n^{\alpha_n} \implies |H^\alpha| \le \|H\|^{\alpha_1} .. \|H\|^{\alpha_n} = \|H\|^{|\alpha|} = \|H\|^r$$

$$\left|\frac{\rho(H)}{\|H\|^r}\right| \underset{(5)}{=} \left|\frac{\Big(\partial^\alpha f(X_0+H) - \partial^\alpha f(X_0)\Big)H^\alpha}{\|H\|^r}\right| \le \Big|\partial^\alpha f(X_0+cH) - \partial^\alpha f(X_0)\Big| \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \tag{7}$$

$\square$

0.2 Дифференциалы второго и последующих порядков

Будем иметь дело с некоторым открытым $\omega \subset \mathbb{R}^{n\ge1}$

Определение 1. $f \in \mathcal{C}^1\Big(\omega\Big), \qquad X \in \omega, \qquad H \in \mathbb{R}^n, \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$

$$\mathrm{d}^1\ f(X,H) := \mathrm{d}\ f(X,H) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(X) h_k$$

. . . .

Пусть для некоторого $r \ge 1$ для функции $f \in \mathcal{C}^r\Big(\omega\Big)$ для любых X и ω определена функция

$$\mathrm{d}^r\ f(X,H) = \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha} \partial^\alpha f(X) H^\alpha, \qquad A_{r,\alpha} - \text{некоторые } \textbf{определённые} \text{ коэффициенты} \tag{8}$$

$$A_{1,\alpha} = 1 \quad \forall \alpha : |\alpha| = 1$$

Пусть $f \in \mathcal{C}^r\Big(\omega\Big)$. Определим дифференциал порядка $r+1$:

$$\mathrm{d}^{r+1}\ f(X,H) := \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha}\, \mathrm{d}\ \Big(\partial^\alpha f(X), H\Big) H^\alpha = \sum_{|\alpha|=r+1} A_{r+1,\alpha} \partial^\alpha f(X) H^\alpha \tag{9}$$

Дальше функции предполагаются достаточно гладкими, если не оговорено особо

Пример (переход от дифференциала пордяка 1 к дифференциалу порядка 2). Воспользуемся тем, что $C_1^\alpha = 1 \quad \forall \alpha : |\alpha| = 1$
Выпишем дифференциал перого порядка:

$$\mathrm{d}^1\ f(X,H) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(X) h_k$$

$$\mathrm{d}^2\ f(X,H) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\ \Big(f'_{x_k}(X), H\Big) h_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} f''_{x_k x_l}(X) h_l \right) h_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} f''_{x_k x_l}(X) h_l h_k \underset{f''_{x_k x_l} = f''_{x_l x_k}}{=} \sum_{k=1}^{n} f''_{x_k x_k}(X) h_k^2 + 2 \sum_{k<l} f''_{x_k x_l}(X) h_k h_l \quad (10)$$

Возьмём $\alpha : |\alpha| = 2$:

- $\alpha = (0, ..., \underset{k}{2}, ..., 0)$

$$\partial^\alpha f(X) = f''_{x_k x_l}$$

$$C_2^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{2!}{0!...2!...0!} = 1$$

- $\alpha = (0, ..., \underset{k}{1}, ..., \underset{l}{1}, ..., 0)$

$$\partial^\alpha f = f''_{x_k x_l}$$

$$C_2^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{2!}{0!...1!...1!...0!} = 2$$

Теперь можно записать, что

$$(10) = \sum_{|\alpha|=2} C_2^\alpha \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

То есть, $A_{2,\alpha} = C_2^\alpha$

Теорема 2.

$$A_{r,\alpha} = C_r^\alpha \quad (11)$$

Доказательство. Будем доказывать **индукцией** по r:

- **База.** $r = 1, 2$ – только что проверили
- **Переход.** Пусть это верно для $r \geq 2$. Докажем для $r+1$:
  По **предположению индукции**,

  $$\mathrm{d}^{r+1}\ f(X,H) \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha=1} C_r^\alpha\ \mathrm{d}\ \Big(\partial^\alpha f(X), H\Big) H^\alpha = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^{n} (\partial^\alpha f)'_{x_\nu}(X) h_\nu \right) H^\alpha \quad (12)$$

  В доказательстве формулы для производной порядка r (в предыдущей лекции, формулы для $g^{(r+1)}(Y + tH)$) было доказано, что

  $$(12) = \sum_{|\alpha|=r+1} C_{r+1}^\alpha \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

□

Утверждения. Теперь можно переписать формулы Тейлора:

1. с остатком в форме Лагранжа:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k\ f(X_0, H) + \frac{1}{(r+1)!} \mathrm{d}^{r+1}\ f(X_0 + cH, H)$$

2. с остатком в форме Пеано:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k\ f(X_0, H) + \rho(H)$$

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^r} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0$$

Применим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа при $r = 2$:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \mathrm{d}\ \ f(X_0, H) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2\ \ f(X_0, H) + \rho(H) \tag{13}$$

где

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^2} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \tag{14}$$

Перепишем (13) через двойные суммы (как мы это делали при переходе к дифференциалу порядка 2):

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(X_0)h_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f''_{x_k x_l}(X_0)h_k h_l + \rho(H) \tag{15}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$A(H) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}h_k h_l, \qquad a_{kl} = \frac{1}{2}f''_{x_k x_l}(X_0), \quad a_{kl} = a_{lk}$$

Напоминание (классификация квадратичных форм)**.** Квадратичная форма называется:

1. положительно определённой, если $\forall H \neq \mathbb{O}_n \quad A(H) > 0$
2. отрицательно определённой, если $\forall H \neq \mathbb{O}_n \quad A(H) < 0$
3. неопределённой, если $\exists\, H_1, H_2 \neq \mathbb{O}_n \quad A(H_1) > 0, \quad A(H_2) < 0$

Теорема 3. Если квадратичная форма A положительно определена, то

$$\exists\, m_1 > 0 \quad A(H) \geq m_1 \|H\|^2 \tag{16}$$

Если квадратичная форма отрицательно определена, то

$$\exists\, m_2 > 0 \quad A(H) \leq -m_2 \|H\|^2 \tag{17}$$

Доказательство. Достаточно доказать (16), т. к. для полож. определённой B, форма $-B(H)$ отрицательно определена
Рассмотрим единичную сферу $S \coloneqq \{\, H \in \mathbb{R}^n \mid \|H\| = 1 \,\}$
S – компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$ (это доказывалось, когда рассматривались компакты в $\mathbb{R}^n$)

Очевидно, что. $A(H) \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^n\right)$

Значит, по второй теореме Вейерштрасса, A достигает своего минимального и максимального значений, т. е.

$$\exists\, H_0 \in S : \forall H \in S \quad A(H) \geq A(H_0) \tag{18}$$

Обозначим $m_1 \coloneqq A(H_0)$
Т. к. квадратичная форма положительно определена, $m_1 > 0$
Рассмотрим $\forall H \neq \mathbb{O}_n$
Пусть $t \coloneqq \|H\| > 0$ (т. к. $H \neq \mathbb{O}_n$)
Рассмотрим $H^* = \frac{1}{t}H$

$$\|H*\| = \left\|\frac{1}{t}H\right\| = \frac{1}{t}\|H\| = \frac{t}{t} = 1$$

То есть, $H^* \in S$
Тогда, в силу выбора H_0, получаем, что $A(H^*) \geq m_1$

$$A(H^*) \overset{\text{def}}{=} A(\frac{1}{t}H) \underset{\text{по определению } A}{=} \frac{1}{t^2}A(H) \geq m_1$$

$$A(H) \geq m_1 t^2 \overset{\text{def}}{=} m_1 \|H\|^2$$

□

0.3 Достаточное условие экстремума для функции n переменных

Теорема 4. $\omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое, $\quad X_0 \in \omega, \quad f \in \mathcal{C}^2\left(\omega\right)$

Выполнено необходимое условие локального экстремума, то есть $f'_{x_j}(X_0) = 0, \quad 1 \le j \le n$

Замечание. $\implies \mathrm{d}\ f(X_0, H) = 0 \quad \forall H$

Тогда

1. если $\mathrm{d}^2\ f(X_0, H)$ положтельно определён, то X_0 – строгий локальный минимум

   Доказательство. Вспомним формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \mathrm{d}\ f(X_0, H) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2\ f(X_0, H) + \rho(H) \tag{19}$$

где

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^2} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0 \tag{20}$$

Перепишем, применив замечание:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2\ f(X_0, H) + \rho(H) \tag{21}$$

Т. к. второй дифференциал положительно определён, то, по предыдущей теореме,

$$\exists\, m_1 > 0 : \mathrm{d}^2\ f(X_0, H) \ge m_1 \|H\|^2 \tag{22}$$

Соотношение (20) означает, что

$$\exists\, \delta > 0 : \forall 0 < \|H\| < \delta \quad \left|\frac{\rho(H)}{\|H\|^2}\right| < \frac{m_1}{4} \tag{23}$$

$$(23) \iff |\rho(H)| < \frac{m_1}{4}\|H\|^2 \tag{24}$$

$$(21) \implies f(X_0 + H) \ge f(X_0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2\ f(X_0, H) - |\rho(H)| \underset{(22),(24)}{>}$$
$$> f(X_0) + \frac{m_1}{2}\|H\|^2 - \frac{m_1}{4}\|H\|^2 = f(X_0) + \frac{m_1}{4}\|H\|^2 > f(X_0)$$

□

2. если $\mathrm{d}^2\ f(X_0, H)$ отрицательно определён, то X_0 – строгий локальный максимум

   Доказательство. Аналогично □

3. если $\mathrm{d}^2\ f(X_0, H)$ неопределён, то нет локального экстремума

Доказательство. $\mathrm{d}^2\ f(X_0, H)$ неопределён означает, что

$$A(H_1) > 0, \qquad A(H_2) < 0$$

Рассмотрим $H_1^* = \frac{1}{\|H_1\|} H_1$. Очевидно, что $H_1^* \in S$

$$A(H_1^*) = \frac{1}{\|H\|^2} A(H_1) \coloneqq p_1 > 0$$

Рассмотрим $H_2^8 = \frac{1}{\|H_2\|} H_2$. Очевидно, что $H_2^* \in S$

$$A(H_2) = \frac{1}{\|H_2\|^2} A(H_2) \coloneqq p_2 > 0$$

Возьмём $t > 0$

$$A(tH_2^*) = t^2 A(H_2^*) = -p_2 t^2 \tag{25}$$

$$A(tH_1^*) = t^2 A(H_1^*) = p_1 t^2 \tag{26}$$

Это было верно для любой квадратичной форме. Вернёмся к $A(H) = \mathrm{d}^2\ f(X_0, H)$
Выберем $\delta_1 > 0$, такое что

$$\forall 0 < \|H\| < \delta_1 \quad |\rho(H)| < \frac{1}{4} \min\{ p_1, p_2 \} \cdot \|H\|^2 \tag{27}$$

Пусть $0 < t < \delta_1$

$$\|tH_1^*\| = \|tH_2^*\| = t$$

Рассмотрим

$$f(X_0 + tH_1^*) = f(X_0) + \frac{1}{2} \mathrm{d}^2\ f(X_0, tH_1^*) + \rho(tH_1^*) \geq f(X_0) + \frac{1}{2} t^2\, \mathrm{d}^2\ f(X_0, H_1^*) - |\rho(tH_1^*)| >$$
$$> f(X_0) + \frac{1}{2} p_1 t^2 - \frac{1}{4} p_1 t^2 = f(X_0) + \frac{1}{4} p_1 t^2 > f(X_0)$$

При этом, $X_0 + tH_1^*$ лежит в любой окрестности X_0
Рассмотрим

$$f(X_0 + H_2^*) \underset{(25)}{\leq} f(X_0) - \frac{p_2}{2} t^2 + |\rho(H)| < f(X_0) - \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_2}{4} t^2 = f(X_0) - \frac{p_2}{4} t^2 < f(X_0)$$

При этом, $X_0 + tH_2^*$ тоже лежит в любой окрестности X_0
Значит, локального экстремума нет (по определениб локального экстремума) $\square$