Типы уравнений первого порядка

Содержание

I. Уравение с разделёнными переменными

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{g(x)} + \frac{\mathrm{d}\,y}{h(y)} = 0$$

$$U(x, y) = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{g(x)} + \int \frac{\mathrm{d}\,y}{h(y)} + C$$

II. Уравнение с разделяющимися переменными

$$g_1(x)h_2(y)\,\mathrm{d}\,x + g_2(x)h_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

!!!

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,\mathrm{d}\,x + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}\,\mathrm{d}\,y = 0$$

$$\left[\begin{aligned} g_2(x) &= 0 \\ h_2(y) &= 0 \end{aligned}\right.$$

Это всё решается (т. к. $\mathrm{d}\,x$ и $g_2(x)$ одновременно обратятся в 0)

III. Линейное уравнение

$$y' + p(x)y = \underset{\text{неоднородность}}{q(x)}, \qquad p(x), q(x) \in \mathcal{C}\Big(\langle a, b\rangle\Big)$$

- Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется линейным однородным (ЛОУ)
- Иначе $y' + p(x)y = q(x)$ – линейным неоднородным (ЛНУ)

$$\underset{\substack{\text{общее неоднородное}\\\text{(все реш. ЛНУ)}}}{y_{\text{ОН}}(x, C)} = \underset{\substack{\text{общее однор.}\\\text{(все реш. ЛОУ)}}}{y_{\text{ОО}}(x, C)} + \underset{\substack{\text{частное неоднор.}\\\text{(какое-то решение ЛНУ)}}}{y_{\text{ЧН}}(x, C)}$$

Алгоритм.

1. Ищем $y_{\text{ОО}}$:

$$y_{\text{ОО}} = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Примечание.** Сюда, при допуске $C = 0$, входит $y \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}$, "потерянное" при выводе этой формулы

2. Ищем $y_{\text{ЧН}}$:
Будем искать в виде

$$y_{\text{ЧН}} = C(x)\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Замечание.** Эту формулу обязательно надо записать

Подставим это в ЛНУ:

$$\underbrace{C'(x)\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + \cancel{C(x)\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}\cdot\big(-p(x)\big)}}_{y'_{\text{ЧН}}\text{ как производная произведения}} \cancel{+p(x)\underbrace{C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}}_{y_{\text{ЧН}}}} \equiv q(x)$$

> **Контрольная точка.** Второй и третий член **должны** сократиться

$$C'(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)\,\mathrm{d}\,x + \underset{(C_2)}{0}$$

Подставляем в формулу для $y_{\text{ЧН}}$:

$$y_{\text{ЧН}} = \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Замечание.** Если $p(x)$ можно проинтегрировать (т. е. $\int p(x)\,\mathrm{d}\,x = \xi(x) + C_1$), нужно вместо C_1 записать какую-то конкретную константу (читайте: ноль). Мы ведь искали **частное** решение, а не континуум

3. Ищем $y_{\text{ОН}}$:

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}\cdot\int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

> **Замечание.** Неберущийся неопределённый интеграл нужно записывать в виде интеграла с переменным верхним пределом, в нижнем пределе которого стоит выбранная числовая константа

$$y_{\text{ОН}} = e^{-P(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s\right), \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$$

> **Замечание.** Не стоит здесь пользоваться готовой формулой. Нужно идти по алгоритму

IV. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y + r(x)y^{\tau} = 0, \qquad p(x), r(x) \in \mathcal{C}\Big(\langle a, b\rangle\Big)$$

Замечание.

- При $\tau > 0$ уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0, \quad x \in (a, b)$

- При $\tau = 0, 1$ – это не уравнение Бернулли, а линейное

Стандартная замена:

$$u = y^{1-\tau}, \qquad u' = (1-\tau)y^{-\tau}y'$$

Замечание. Здесь прямая замена не нужна – просто делим на y^τ

Получаем уравнение:

$$(1-\tau)^{-1}u' + p(x)u + r(x) = 0$$

V. Уравнение Риккати

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

Решается, если известно какое-то частное решение:
Пусть $y = \eta(x)$ – решение уравнения на некотором промежутке, то есть

$$\eta'(x) \equiv q(x) - p(x)\eta(x) - r(x)\eta^2(x), \qquad \text{на } \langle a, b\rangle$$

Замена $y = z + \eta(x)$ преобразует наше уравнение в уравнение Бернулли

$$z' - \Big(p(x) + 2r(x)\Big)z + r(x)z^2 = 0$$

VI. Однородное уравнение

Определение 1. $h(x, y)$ называется однородной функцией степени k, если $h(sx, sy) = s^k h(x, y)$

Уравнения

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{и} \qquad M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad M, N \text{ – однородные порядка } k$$

называются однородными (порядка 0)
То есть, уравнение однородное, если каждое его слагаемое имеет одну и ту же суммарную степень по x и y
Стандартная замена:

$$y(x) = u(x)x, \qquad \left[\begin{array}{l} y' = u'x + u \\ \mathrm{d}\,y = u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u \end{array}\right., \qquad u = x^{-1}y$$

Контрольная точка. После замены **каждое** слагаемое должно содержать x^k

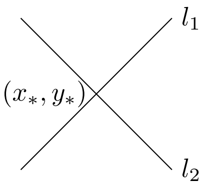
Сокращаем на x^k, группируем слагаемые при $\mathrm{d}\,x$ и $\mathrm{d}\,y$ – получаем уравнение с разделяющимися переменными

VII. Дробно-линейное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Числитель и значенатель задают прямые, пусть $l_1 = a_1x + b_1y + c_1, \quad l_2 = a_2x + b_2y + c_2$
Возможны два случая:

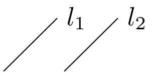
- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$
  Пусть (x_*, y_*) – решение системы
  $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
  или, что то е самое, точка пересечения прямых l_1 и l_2
  После сдвига начала координат в точку (x_*, y_*) прямые не будут иметь свободных членов
  Итак, после замены
  $$u = x - x_*, \qquad v = y - y_*, \qquad \mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x, \qquad \mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,y$$



или $y'(x) = v'(u)$ получаем однородное уравнение

$$v' = h\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$$

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$



Тогда $b_1 \neq 0$ и $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = k$
В этом случае замена

$$u = a_1 x + b_1 y, \qquad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1 x), \qquad y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$$

сразу приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' = b_1 h\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1$$

VIII. Обощённо-однородное уравнение

Определение 2. Уравнение называется обощённо-однородным, если каждое его слагаемое имеет один и тот же суммарный порядок по x и y при условии, что $x, \mathrm{d}\,x$ имеют порядок 1, а $u, \mathrm{d}\,y$ – порядок $m \neq 0$

Тогда $y' = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}$ имеет порядок $m - 1$
Аргументы входящих в уравнение функций типа логарифма или тригонометрических должны иметь нулевой порядок
Таким образом, чтобы установить, является ли уравнение обобщённо-однородным, надо приравнять порядки всех слагаемых, получая систему многих уравнений с одной неизвестной m. Если повезёт, такое число m найдётся. Тогда замена

$$y = z^m, \qquad y' = mz^{m-1}z', \qquad z = y^{1/m}$$

сведёт уравнение к однородному, но не всегда:

Проблема. Проблема возникает, когда y может принимать значения разных знаков (ОДЗ этого не запрещает), и отсутсвует инвариантность относительно замены $y = -\widetilde{y}$

В таком случае надо отдельно проверить $y(x) \equiv 0$
Дальше возможно три случая:

- Общий:
  Замена
  $$y = (xu)^m, \qquad y' = m(xu)^{m-1}(u + xu'), \qquad u = x^{-1}y^{1/m}$$
  приведёт к уравнению с разделяющимися переменными (но придётся решить два раза для разных знаков y)

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = 2q$
  Делаем замену
  $$y = x^{2q}u, \qquad y' = 2qx^{2q-1}u + x^{2q}u', \qquad u = x^{-2q}y$$
  Она не фиксирует знак y, так что не придётся решать уравнение второй раз
  Также получаем сразу уравнение с разделяющимися переменными

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = (2q)^{-1}$, при этом x тоже меняет знак, и отсутсвует инвариантность относительно замены $x = -\widetilde{x}$
  Надо следать замену
  $$y = |x|^{\frac{1}{2q}} u, \qquad y' = \sigma \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, |x|} = \sigma \left((2q)^{-1} |x|^{\frac{1}{2q} - 1} u + |x|^{\frac{1}{2q}} u' \right), \quad \text{где } u' = \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, |x|}, \qquad u = |x|^{-\frac{1}{2q}} y$$
  где $\sigma = \operatorname{sign} x$
  Получается уравнение с разделяющимися переменными и параметром σ

  > **Контрольная точка.** В ответе не должно остаться σ (т. е. каждая σ должна “найти” свой $|x|$)
  >
  > > **Примечание.** $\sigma |x| = x$