Оглавление

0.1 Проолжаем функционалы

Свойство. Линейные функционалы пространства V над K образуют веторное пространство над K

Доказательство. Очевидно $\square$

Определение 1. Пространство функционалов называется двойственным или сопряжённым

Обозначение. V^*

Теорема 1 (изоморфизм пространства и двойственного к нему).

1. V – конечномерное пространство над K

$$\implies V^* \simeq V$$

Доказательство. Пусть $n \coloneqq \dim V$
Достаточно доказать, что $\dim V^* = n$ (тогда можно будет построить изоморфизм из базиса в базис)
Зафиксируем базис:
Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис V
Пусть $\varphi : V^* \to K^n$ такое, что $\varphi(y) = \left(\underbrace{y(e_1)}_{\in K}, ..., \underbrace{y(e_n)}_{\in K}\right)$
Мы знаем, что протранства одной размерности изоморфны, так что $K^n \simeq V$
Докажем, что это изоморфизм:

- Линейность:
  - Надо проверить, что $\varphi(y_1 + y_2) \overset{?}{=} \varphi(y_1) + \varphi(y_2)$

$$\varphi(y_1 + y_2) = \Big((y_1 + y_2)(e_1), \ldots\ldots\ldots\ldots, (y_1 + y_2)(e_n)\Big) =$$
$$= \Big(y_1(e_1) + y_2(e_1), \ldots\ldots\ldots\ldots, y_1(e_n) + y_2(e_n)\Big) \xlongequal[\text{сложение в } K^n \text{ покомпонентно}]{}$$
$$= \Big(y_1(e_1), ..., y_1(e_n)\Big) + \Big(y_2(e_1), ..., y_2(e_n)\Big) = \varphi(y_1) + \varphi(y_2)$$

  - Надо проверить, что $\varphi(ky) \overset{?}{=} k\varphi(y)$

$$\varphi(ky) = \Big((ky)(e_1), \ldots\ldots\ldots, (ky)(e_n)\Big) = \Big(ky(e_1), \ldots\ldots\ldots, ky(e_n)\Big) =$$
$$\xlongequal[\text{умножение в } K^n \text{ покомпонентно}]{} k\Big(y(e_1), \ldots\ldots\ldots, y(e_n)\Big) = k\varphi(y)$$

- Биективность:
  Пусть $a \in K^n, \qquad a = (a_1, ..., a_n), \quad a_i \in K$

$$\exists! y \in V^* : \quad \varphi(y) = a$$

  так как
$$\exists! y \in V^* : y(e_1) = a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, y(e_n) = a_n$$

□

2. V – евклидово пространство
   Для любого $v \in V$ определим $y_v \in V^*$ как $y_v(x) = (x, v)$
   Тогда отображение $v \mapsto y_v$ является изоморфизмом

Доказательство.

- Проверим, что $y_v \in V^*$, т. е. что y_v линейно:
  - $y_v(x_1+x_2) = (x_1+x_2, v) \xlongequal[\text{скалярное произведение линейно по первой координате}]{} (x_1, v) + (x_2, v) = y_v(x_1) + y_v(x_2)$
  - $y_v(kx) = (kx, v) = k(x, v) = ky_v(x)$
- Пусть $\varphi(v) = y_v$. Докажем, что φ – изоморфизм $V \to V^*$:
  - Линейность:
    * $\varphi(u+v) \stackrel{?}{=} \varphi(u) + \varphi(v)$

$$\varphi(u+v) \stackrel{?}{=} \varphi(u)+\varphi(v) \iff y_{u+v} \stackrel{?}{=} y_u + y_v \iff$$
$$\iff y_{u+v}(x) \stackrel{?}{=} y_u(x) + y_v(x) \quad \forall x \iff$$
$$\iff (x, u+v) \xlongequal[\text{лин. скалярного произв.}]{} (x,u) + (x,v)$$

Замечание. В унитарном пространстве не будет этого равенства

    * $\varphi(kv) \stackrel{?}{=} k\varphi(v)$

$$\varphi(kv) \stackrel{?}{=} k\varphi(v) \iff y_{kv} \stackrel{?}{=} ky_v \iff y_{kv}(x) \stackrel{?}{=} ky_v(x) \quad \forall x \iff$$
$$(x, kv) \xlongequal[\text{лин. скалярного произв.}]{} k(x,v)$$

  - Инъективность:
    Пусть $\varphi(v) = 0$. Тогда

$$y_v = 0 \implies y_v(x) = 0 \quad \forall x \implies (x,v) = 0 \quad \forall x \implies v = 0$$

Вместе с тем, что $\dim V = \dim V^*$, это даёт биективность

□

Определение 2. Изоморфизм из пункта 2 называется каноническим изоморфизмом из V в V^*

Примечание. Каноническим обычно называется объект, который не зависит от выбора базиса

Замечание. В унитарном пространстве второй пункт теоремы не выполнится (y_v определить можно, но оно не будет линейным). Исправить это, поменяв координаты, нельзя

Пример (бесконечномерные пространства)**.** K – поле, K^∞ – пространство формальных многочленов (бесконечные последовательности с конечным количеством членов, отличных от нуля)
Функционалы:

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...) \quad \text{такой, что} \quad a(x_1, x_2, ...) = a_1x_1 + a_2x_2 + ...$$

Замечание. $a_i \in K$ (без ограничения на количество ненулевых членов)

Что-то здесь изоморфно, а что-то – нет. Надо смотреть

Теорема 2 (дважды двойственное пространство)**.** V – векторное пространство над K
Для любого $x \in V$ обозначим через z_x отображение $V^* \to K$, заданное формулой $z_x(\underset{\in V^*}{y}) = \underbrace{y(x)}_{\in K}$

Тогда:

1. $\forall x \in K \quad z_x \in (V^*)^*$, т. е. z_x – линейный функционал на V^*

Доказательство.

- $z_x(y_1+y_2) \overset{?}{=} z_x(y_1)+z_x(y_2)$
$$z_x(y_1+y_2)=(y_1+y_2)(x)$$
$$z_x(y_1)+z_x(y_2)=y_1(x)+y_2(x)$$
- $z_x(ky) \overset{?}{=} kz_x(y)$
$$z_x(ky)=(ky)(x)=ky(x)=kz_x(y)$$

□

2. отображение $\varphi : V \to (V^*)^*$, заданное формулой $\varphi(x)=z_x$ является линейным

Доказательство.

- $\varphi(x_1+x_2) \overset{?}{=} \varphi(x_1)+\varphi(x_2)$
$$z_{x_1+x_2} \overset{?}{=} z_{x_1}+z_{x_2}$$
$$\forall y \quad z_{x_1+x_2}(y)=z_{x_1}(y)+z_{x_2}(y)$$
$$y(x_1+x_2) \overset{?}{=} y(x_1)+y(x_2)$$
Это верно, так как y линейно
- $\varphi(kx) \overset{?}{=} k\varphi(x)$
$$z_{kx} \overset{?}{=} kz_x$$
$$\forall y \quad z_{kx}(y) \overset{?}{=} kz_x(y)$$
$$y(kx) \overset{?}{=} ky(x)$$
Это верно, так как y линейно

□

3. если V конечномерно, то φ – изоморфизм

Доказательство. Размерности равны, так что достаточно доказать инъективность:
φ инъективно $\iff$ $\varphi(x)=0$ только при $x=0$ $\iff$ z_x – нулевое отображение только при $x=0$ $\iff$ $z_x(y)=0 \quad \forall y$ $\iff$ $y(x)=0 \quad \forall y$
Нужно проверить, что $\forall x \neq 0 \quad \exists$ линейное отображение $y: \quad y(x)\neq 0$
Дополним до базиса:
Пусть $x, e_2, ..., e_n$ – базис V
Определим $y: y(x)=1, \quad y(e_i)=0$
$$y(\alpha x+\beta_2 e_2+...+\beta_n e_n)=\alpha$$
Оно линейно, $y(x)\neq 0$ □

Лемма 1. V – конечномерное векторное пространство, $e_1, ..., e_n$ – базис V
$f_1, ..., f_n \in V^*$ такие, что $f_i(e_i)=1, \quad f_i(e_j)=0$ при $i \neq j$ (здесь существование не утверждается, но понятно, что их всегда можно построить)
Тогда $f_1, .., f_n$ – базис V^*

Доказательство. Знаем, что $\dim V = \dim V^*$
Достаточно доказать ЛНЗ:
Возьмём ЛК:
Пусть $a_1, ..., a_n \in K$ такие, что $f=a_1f_1+...+a_nf_n$ – нулевой функционал
$$0=f(e_i)=a_1\underbrace{f_1(e_i)}_{0}+...+a_i\underbrace{f_i(e_i)}_{1}+...+a_n\underbrace{f_n(e_i)}_{0}=a_i \quad \forall i$$

□

Определение 3. $e_1, ..., e_n$ – базис V, $\qquad f_1, ..., f_n$ – базис V^*, $\qquad f_i(e_i) = 1, \quad f_i(e_j) = 0$ при $i \neq j$
Тогда $f_1, ..., f_n$ называется двойственным базисом к $e_1, ..., e_n$

Напоминание. e_i, e_i' – базисы V
Матрицей перехода от e_i к e_i' называется такая матрица C, что в i-м столбце записаны координаты e_i' в $e_1, ..., e_n$
Пусть X, X' – координаты c в e_i, e_i'. Тогда $X = CX'$

Теорема 3. e_i, e_i' – базисы V, $\qquad C$ – матрица перехода от e_i к e_i'
f_i, f_i' – соответствующие двойственные базисы
Тогда:

1. Матрица перехода от f_i к f_i' равна $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$

   Доказательство. Пусть $D = (d_{ij})$ – матрица перехода от f_i к f_i'

   $$U = (u_{ij}), \qquad U = D^T C$$

   Докажем, что $U = E$

   $$e_i' = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + ..., \qquad f_j' = d_{1j}f_1 + d_{2j}f_2 + ...$$

   Применим одно к другому:

   $$\left.\begin{matrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{matrix}\right\} = f_j'(e_i') = d_{1j}f_1(c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + ...) + d_{2j}f_2(c_{1i}e_i + c_{2i}e_2 + ...) + \dots\dots\dots =$$
   $$= d_{1j}c_{1i} \cdot 1 + d_{1j}c_{2i} \cdot 0 + \dots\dots + d_{2j}c_{1i} \cdot 0 + d_{2j}c_{2i} \cdot 1 + \dots\dots = d_{1j}c_{1i} + d_{2j}c_{2i} + \dots\dots$$

   d – этой j-я строка D^T, $\quad c$ – i-й столбец C
   Значит, $f_j'(e_i') = u_{ji}$ □

2. Пусть Y, Y' – строки координат $y \in V^*$ в базисах f_i, f_i'
   Тогда $Y' = YC$

   Доказательство. $(C^{-1})^T$ – матрица перехода от f_i к f_i'
   Y^T, Y'^T – столбцы координат y
   $Y^T = (C^{-1})^T Y'^T$ – транспонированный

   $$Y = Y'C^{-1} \implies YC = Y'$$

   □

0.2 Сопряжённые операторы

0.2.1 Напоминание из второго семестра

Определение 4. $\mathcal{A}$ – оператор в евклидовом или унитарном пространстве
$\mathcal{B}$ называется сопряжённым к $\mathcal{A}$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y) \quad \forall x, y$

Обозначение. $\mathcal{A}^*$

Теорема 4. $\forall \mathcal{A} \quad \exists! \mathcal{A}^*$

Свойства.

1. $(mcA^*)^* = \mathcal{A}$

2. Пусть A, A^* – матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ в некотором ОНБ
   Тогда

- $A^* = A^T$ в евклидовом пространстве
- $A^* = \overline{A}^T$ в унитарном пространстве

Определение 5. Оператор в веклидовом или унитарном пространстве назвыается

- нормальным, если $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$
- ортогональным (унитарным), если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E}$
- самосопряжённым, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$

Определение 6. Квадратная матрица называется

- симметричной (симметрической), если $A = A^T$
- эрмитовой, если $A = \overline{A}^T$

Свойство. $\mathcal{A}$ – оператор в евлидовом/унитарном пространстве, A – его матрица **в ОНБ**
Тогда
$\mathcal{A}$ самосопряжённый $\iff$ A симметрична/эрмитова

Теорема 5. $\mathcal{A}$ – нормальный оператор в унитарном пространстве
Тогда

1. если λ – с. ч. $\mathcal{A}$, то $\overline{\lambda}$ – с. ч. $\mathcal{A}^*$
2. с. в. $\mathcal{A}^*$, соответствующие разным с. ч. ортогональны
3. Существует ОНБ, состоящий из с. в. $\mathcal{A}$ $\implies$ он диагонализуем