Оглавление

0.1. Существование жордановой формы

Доказательство (теоремы о существовании жордановый формы).

- Докажем для случая, когда минимальный многочлен $\mathcal{A}$ имеет вид $P(t) = (t - \lambda)^r$
  Сведём к случаю нильпотентного опреатора:
  Положим $B = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$
  $\mathcal{B}^r = 0, \quad \mathcal{B}$ – нильпотентный
  Значит, существует жорданов базис $\mathcal{B}$, причём на диагонали жордановой формы стоят нули

- Общий случай
  $$\chi_{\mathcal{A}} = (-1)^n (t - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_m)^{s_m}$$
  По следствию к теореме Гамильтона-Кэли минимальный многочлен – делитель $\chi \implies$ минимальный многочлен имеет вид
  $$P(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_m)^{r_m}$$
  Применим теорему о разложении в сумму примарных подпространств:
  Пусть $Q_i \coloneqq (t - \lambda_i)^{r_i}$
  По теореме
  $$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$$
  U_i инвариантны
  $Q_i(t)$ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$ на U_i
  К U_i применяем нильпотентный случай:
  Существует жорданов базис U_i
  Матрица $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$ имеет вид
  $$J_i = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_i) & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_{r_k}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$
  Значит, в базисе, полученном объединением базисов U_i матрица $\mathcal{A}$ имеет вид
  $$J = \begin{pmatrix} J_1 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_m \end{pmatrix}$$

□

Свойства (возведения в степень жордановой клетки).

1. (a) $\Big(J_r(0)\Big)^s = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $s < r$

То есть,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i - j = s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(b) $\Big(J_r(0)\Big)^s 0$ при $s \geq r$

Пример. $r = 4$

$$\Big(J_4(0)\Big)^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Big(J_4(0)\Big)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Big(J_4(0)\Big)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Big(J_4(0)\Big)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Формально – **индукция** по s. На самом деле, повторяем действия из примера

- **База.** $s = 1$
$$J_1(0) = (0)$$
- **Переход.** $s \to s + 1$
$$J_r^s(0) = a_{ij}, \qquad J_r(0) = b_{ij}, \qquad J_r^{s+1}(0) = c_{ij}$$
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + ... + a_{in}b_{ni} \tag{1}$$
Среди a_{ij} не более одной единицы, остальные нули
Среди b_{xj} не более одной единицы, остальные нули
Значит, $c_{ij} = 0$ или $c_{ij} = 1$
$$c_{ij} = 1 \iff \exists x : \begin{cases} a_{ix} = 1 \\ b_{xi} = 1 \end{cases} \underset{(1)}{\iff} \exists x : \begin{cases} i - x = s \\ x - j = 1 \end{cases} \iff i - j = s + 1$$

□

2. Пусть $\lambda \neq 0$, $\quad A = \Big(J_r(\lambda)\Big)^s$
Тогда A нижнетреугольная
$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda^{i-j} C_s^{i-j}, & i > j, i - j \leq s \\ 0, & i > j, i - j > s \end{cases}$$

Пример.

$$\left(J_4(2)\right)^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 \\ C_5^1 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 & 0 \\ C_5^2 \cdot 2^3 & C_5^1 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 \\ C_5^3 \cdot 2^3 & C_5^2 \cdot 2^5 & C_5^1 \cdot 2 & 2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 & 0 \\ 10 \cdot 2^3 & 5 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 \\ 10 \cdot 2^3 & 10 \cdot 2^3 & 5 \cdot 2^4 & 2^5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 32 & 0 & 0 \\ 80 & 80 & 32 & 0 \\ 40 & 80 & 80 & 32 \end{pmatrix}$$

Доказательство. $J_r(\lambda) = \lambda \cdot E + J_r(0)$

Возведём в степень и распишем как бином Ньютона (учитывая, что λE коммутирует с чем угодно, а значит, можно приводить подобные):

$$\left(J_r(\lambda)\right)^s = (\lambda E)^s + C_s^1 (\lambda E)^{s-1} J_r(0) + \ldots\ldots + C_s^{r-1} (\lambda E)^{s-r+1} J_r(0)^{r-1} + \underbrace{J_r^r(0)}_{=0}(\ldots) \overset{}{\underset{\text{св-во } 1a}{=\!=\!=}}$$

$$= \lambda^s E + C_s^1 \lambda^{s-1} J_r(0) + \ldots\ldots + C_s^{r-1} \lambda^{s-r+1} J_r^{r-1}(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^s & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \lambda^s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 \\ \lambda^{s-1} C_s^1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & \lambda^{s-1} C_s^1 & 0 \end{pmatrix} + \ldots\ldots + \begin{pmatrix} 0 & . & 0 \\ . & . & . \\ \lambda^{s-r+1} C_s^{r-1} & . & 0 \end{pmatrix}$$

□

3. $\operatorname{rk}\left(\left(J_r(0)\right)^s\right) = \begin{cases} r - s, & s < r \\ 0, & s \geq r \end{cases}$

Теорема 1 (количество клеток и ранг). J – жорданова матрица

Тогда количество клеток вида $J_r(\lambda)$ равно

$$\operatorname{rk}\left(J - \lambda E\right)^{r-1} - 2 \operatorname{rk}\left(J - \lambda E\right)^r + \operatorname{rk}\left(J - \lambda E\right)^{r+1}$$

Доказательство. Положим $f(s) := \operatorname{rk}(J - \lambda E)^s$

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \qquad J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1 - \lambda) & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_{r_k}(\lambda_k - \lambda) \end{pmatrix}$$

$$(J - \lambda E)^s = \begin{pmatrix} \left(J_{r_1}(\lambda_1 - \lambda)\right)^s & . & . \\ . & . & . \\ . & . & \left(J_{r_k}(\lambda_k - \lambda)\right)^s \end{pmatrix}$$

Какое-то из λ_i совпало с λ

$$f(s) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rk}\left(\left(J_{r_i}(\lambda_i - \lambda)\right)^s\right)$$

- Если $\lambda \neq \lambda_i$, то $\operatorname{rk}\left(\left(J_{r_i}(\lambda - \lambda_i)\right)^s\right) = r_i \quad \forall s$

$$f(s) - f(s+1) = \sum \left[\operatorname{rk}\left(J_{r_i}^s(\lambda_i - \lambda)\right) - \operatorname{rk}\left(J_{r_i}^{s+1}(\lambda - \lambda_i)\right)\right]$$

  То есть, если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то i-е слагаемое равно $r_i - r_j = 0$

- Если $\lambda_i = \lambda, \quad r_i \leq s$, то i-е слагаемое равно $0 - 0 = 0$

- Если $\lambda_i = \lambda, \quad r_i < s$, то i-е слагаемое равно $(r_i - s) - \Big(r_i - (s+1)\Big) = 1$

$f(s+1) - f(s)$ – количество клесток, для которых $\lambda_i = \lambda, \quad r_i > s$
$\Big(f(s+1) - f(s)\Big) - \Big(f(s) - f(s-1)\Big)$ – количество клеток размера s
Применяя три случая, получаем, что это равно $f(s+1) - 2f(s) + f(s-1)$ □

Следствие (единственность жордановой формы). Пусть J, J' – жордановы
J, J' – матрицы $\mathcal{A}$ в некоторых базисах
Тогда J, J' совпадают с точностью до перестановки жордановых клеток

Доказательство. J, J' – матрицы $\mathcal{A}$
$J - \lambda E, J' - \lambda E$ – матрицы $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$
$(J - \lambda E)^s, (J' - \lambda E)^s$ – матрицы $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^s$
rk не зависит от выбора базиса □

Теорема 2 (минимальный многочлен). J – жоданова матрица, $\qquad \lambda_1, ..., \lambda_k$ – с. ч. J
r_i – максимальный размер жордановой клетки, соотв. λ_i
Тогда минимальный многочлен равен $(t - \lambda_1)^{r_1}...(t - \lambda_k)^{r_k}$

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_n$ – жорданов базис
P_i – минимальный аннулятор e_i
Тогда минимальный многочлен равен НОК $(P_1, ..., P_n)$
Пусть e_i соответстсвует j-му столбцу клетки $J_r(\lambda)$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r-i}(e_i) = 0, \qquad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{r-i-1}(e_i) \neq 0$$

$$\implies P_i(t) = (t - \lambda)^{r-i}$$

Минимальный многочлен – это НОК многочленов вида $(t - \lambda_i)^s, \quad s \leq r_i$
Среди них есть $(t - \lambda_1)^{r_1}, ..., (t - \lambda_k)^{r_k}$
Значит, среди них есть P_i, а остальные – не делители

$$\implies \text{НОК} = (t - \lambda_1)^{r_1}...(t - \lambda_k)^{r_k}$$

□

0.2. Комплексификация

В предыдущем параграфе мы доказали, что жорданова форма существует, если многочлен раскладывается на простейшие множители. Это всегда верно над $\mathbb{C}$. В этом параграфе рассмотрим жордановы формы над $\mathbb{R}$

Идея построения V – вект. пространство над $\mathbb{R}$
Построим $\widehat{V}$ над $\mathbb{C}$, состоящее из $u + vi, \quad u, v \in \mathbb{R}$
Для этого определим сложение и умножение, как в комплексных числах:

- $(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)i$
- $(a + bi)(u + vi) = au + bui + avi + bvi^2$

Определение 1. V – векторное пространство над $\mathbb{R}$
Комплексификация V – это множество $\widehat{V}$, состоящее из пар (u, v) с операцией $\mathbb{C} \times \widehat{V} \to \widehat{V}$, заданной равенством

$$(a + bi) \cdot (u, v) = \big(au - bv, av + bu\big)$$

и операцией $\widehat{V} \times \widehat{V}$, заданной равенством

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = \big(u_1 + u_2, v_1 + v_2\big)$$

Определение 2. $w = (u, v)$
$(u, -v)$ называется сопряжённым к w

Обозначение. $\overline{w}$

Теорема 3. $\widehat{V}$ – векторное пространство над $\mathbb{C}$

Доказательство.

1. $\widehat{V}$ – абелева группа по сложению
2. $1 \cdot w = w$
3. Ассоциативность умножения
4. Две дистрибутивности умножения

Всё проверяется подстановкой □

Обозначение. Пару (u, v) будем обозначать $u + vi$

Обозначение. Множество пар $(u, 0)$ отождествим с V