Оглавление

0.1 Продолжение про операторы с диагональными и блочно-диагональными матрицами

Пример (недиагонализуемый оператор). $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Нужно, чтобы ар. кратность была 2, а геометрическая – 1

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2$$

$\lambda = 1, \qquad$ ар. кратность – 2
Найдём $\dim V_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ x + y = y \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

$\dim V_1 = 1 \qquad$ геом. кратность – 1

Замечание (Возведение в степень диагонализуемого оператора). A – диагонализуемый
$e_1, ..., e_n$ – базис из с. в.
$\lambda_1, ..., \lambda_n$ – соответствующие с. ч.

$$\mathcal{A}^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$$

Пусть $v \in V, \qquad v = a_1e_1 + ... + a_ne_n$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}^k v = a_1\lambda_1^k e_1 + ... + a_n\lambda_n^k e_n$$

Пусть A – матрица в стандартном базисе

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad C^{-1}A^kC = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Определение 1. Блочной матрицей называется матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ . & . & . & . \\ A_{m1} & A_{m2} & ... & A_{mn} \end{pmatrix}$$

где $\forall i \quad A_{ix}$ имеют поровну строк и $\forall j \quad A_{xj}$ имеют поровну столбцов

Пример.

$$\left(\begin{array}{cc|c} . & . & . \\ \hline . & . & . \\ . & . & . \end{array}\right)$$

Определение 2. Блочно-диагональной матрицей называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & A_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

где A_i – квадратные

Замечание. Блочно-диагональная матрица всегда квадратная

Пример.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Определение 3. U – инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$

Через $\mathcal{A}\Big|_U$ обозначим сужение $\mathcal{A}$ на U, т. е.

$$\mathcal{A}\Big|_U : U \to U, \qquad \mathcal{A}\Big|_U (x) = \mathcal{A}(x) \quad \forall x \in U$$

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Выпишем его инвариантные пространства:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}_{\in W} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}}_{\in W}, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U}$$

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\Big((1-t)^2 + 1\Big) = (2-t)(t^2 - 2t + 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 + 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим U:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2:

$$\mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2, \qquad \mathcal{A}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2$$

$$A_U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}\big|_U} = (1-t)^2 + 1 = t^2 - 2t + 2$$

$$\chi_{\mathcal{A}\big|_W} = 2t$$

Теорема 1 (блочные матрицы и инвариантыне подпространства). $\mathcal{A}$ – оператор на конечномерном пространстве V

1. U – инвариантное пространство $\mathcal{A}$, $\quad e_1, ..., e_s$ – базис U, $\quad e_1, .., e_s, ..., e_n$ – базис V
   A_U, A – матрицы $\mathcal{A}$ на U, V в этих базисах

$$\implies A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_U} & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \quad \text{для некоторых } B, C$$

Доказательство. Пусть

$$A_U = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1s} \\ . & . & . \\ a_{s1} & ... & a_{ss} \end{pmatrix}$$

Возьмём $1 \le i \le s$
Посмотрим, как $\mathcal{A}$ действует на e_i:

$$\mathcal{A}(e_i) = a_{1i}e_1 + ... + a_{si}e_s = a_{1i}e_1 + ... + a_{si}e_s + ... + 0 \cdot e_{s+1} + ... + 0 \cdot e_n$$

Получили разложение $\mathcal{A}(e_i)$ по базису V, то есть, столбец матрицы оператора в базисе $e_1, ..., e_s, ..., e_n$:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ . \\ . \\ e_{si} \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} - i\text{-й столбец } A$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{s1} & * & * \\ . & . & . & . & * & * \\ a_{s1} & a_{s2} & ... & a_{ss} & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$\square$

2. $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$, где U_i – инвар. для $\mathcal{A}$
   $A_1, ..., A_k$ – матрицы $\mathcal{A}$ на $U_1, ..., U_k$ в некоторых базисах
   A – матрица $\mathcal{A}$ на V в базисе, являющемся объединением базисов U_i (в естественном порядке: базис U_1, базис U_2, ...)

$$\implies A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & A_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

Так как $A_1, ..., A_K$ – квадратные, то A – блочно-диагональная

Доказательство. Пусть $\dim U_1 = d_1, \quad \dim U_2 = d_2, \quad \dots\dots$
Рассмотрим столбец матрицы A с номером $d_1 + d_2 + d_{i-1} + t$, где $1 \le t \le d_i$ (т. е. t-й столбец i-го набора)
Обозначим элементы базисов:

$$U_1 : e_1^{(1)}, ..., e_{d_1}^{(1)}$$

$$U_2 : e_2^{(2)}, ..., e_{d_2}^{(2)}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

В этом столбце записаны координаты вектора $e_t^{(i)}$ в базисе V
Разложим его по базису подпространства U_i:

$$e_t^{(i)} = a_1 e_1^{(i)} + ... + a_{d_i} e_{d_i}^{(i)}$$

Дополним нулями:

$$\underbrace{0 \cdot e_1^{(1)} + ... + 0 \cdot d_1^{(1)}}_{d_1} + \underbrace{0 \cdot e_1^{(2)} + ...}_{d_2} + \dots\dots\dots + \underbrace{a_1 e_1^{(i)} + ... + a_{d_i} e_d^{(i)}}_{d_i} + 0 \cdot e_1^{(i+1)} \dots\dots\dots$$

Получили разложение $e_r^{(i)}$ по базису V
$(d_1 + d_2 + ... + d_{i-1} + t)$-й столбец равен

$$\begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_{d_i} \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Следствие (делители характеристического многочлена). $\mathcal{A}$ – оператор на конечномерном пространстве V, $\quad \chi(t)$ – его характ. многочлен

1. U – инвариантное подпространство, $\chi_U(t)$ – характ. многочлен $\mathcal{A}\Big|_U$

$$\implies \chi(t) \vdots \chi_U(t)$$

2. $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$, где U_i – инвариатные
   $\chi_i(t)$ – характ. многочлен $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$

$$\chi(t) = \chi_1(t) \cdot ... \cdot \chi_k(t)$$

Доказательство. Рассмотрим базисы как в теореме

1.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} A_U & B \\ 0 & C \end{pmatrix} - tE_n \right| = \begin{vmatrix} A_U - tE_s & B \\ 0 & C - tE_{n-s} \end{vmatrix} =$$

$$= |A_U - tE_s| \cdot |C - tE_{n-s}| = \chi_{A_U}(t) \cdot \chi_C(t) = \chi_U(t) \cdot \chi_C(t)$$

2.

$$\chi_A(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} A_1 - tE & 0 & . & 0 \\ 0 & A_2 - tE & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_k - tE \end{vmatrix} = |A_1 - tE| \cdot |A_2 - tE| \cdot \ldots\ldots = \chi_1(t) \cdot \chi_2(t) \cdot \ldots$$

□

Лемма 1 (ранг блочно-диагональной матрицы). A – блочно-диагональная

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

$$\implies \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A_1 + \ldots + \operatorname{rk} A_k$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что ранг – это количество ЛНЗ строк
Пусть для каждой матрицы A_i выбран набор строк $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, \ldots, s_n^{(i)}$
Для строки $s_j^{(i)}$ обозначим через $\widetilde{s_j}^{(i)}$ соответствующую строку матрицы A
Достаточно доказать, что

$$\text{набор } \widetilde{s_1}^{(1)}, \ldots, \widetilde{s_{r_1}}^{(1)}, \widetilde{s_1}^{(2)}, \ldots, \widetilde{s_{r_2}}^{(2)}, \ldots\ldots \text{ ЛНЗ} \iff \text{все наборы } \begin{cases} s_1^{(1)}, \ldots, s_{r_1}^{(1)} \\ s_1^{(2)}, \ldots, s_{r_2}^{(2)} \\ \ldots\ldots \end{cases} \text{ЛНЗ}$$

- $\implies$
  Докажем **от противного**:
  Предположим, что $s_1^{(i)}, \ldots, s_{r_i}^{(i)}$ ЛЗ
  То есть, $\exists\, a_1, \ldots, a_{r_i}$, не все равные нулю, такие, что $a_1 s_1^{(i)} + \ldots + a_{r_i} s_{r_i}^{(i)} = 0$
  Дополним нулями:
  $$a_1 \widetilde{s_1}^{(i)} + \ldots + a_{r_i} \widetilde{s_{r_i}}^{(i)} = 0$$
  То есть, $\widetilde{s_1}^{(i)}, \ldots, \widetilde{s_{r_i}}^{(i)}$ ЛЗ
  А значит, и всеь набор ЛЗ – $\lightning$

- $\impliedby$
  Докажем **от противного**:
  Пусть все наборы $s_1^{(i)}, \ldots, s_{r_i}^{(i)}$ ЛНЗ, а $\widetilde{s_1}^{(1)}, \ldots, s_{r_i}^{(1)}, \ldots\ldots, \widetilde{s_{r_k}}^{(k)}$ ЛЗ, то есть
  $$\sum_{i,j} a_j^{(i)} \widetilde{s_j}^{(i)} = 0, \qquad \text{не все } a_j^{(i)} \text{ равны нулю}$$
  Положим
  $$T_i := a_1^{(i)} s_1^{(i)} + \ldots + a_{r_i}^{(i)} s_{r_i}^{(i)}$$
  $$\widetilde{T_i} := a_1^{(i)} \widetilde{s_1}^{(i)} + \ldots + a_{r_i}^{(i)} \widetilde{s_{r_i}}^{(i)}$$
  $$\widetilde{T_1} + \widetilde{T_2} + \ldots + \widetilde{T_k} = 0 \implies \widetilde{T_1} = \widetilde{T_2} = \ldots = 0$$
  Строки $\widetilde{T_1}, \ldots, \widetilde{T_k}$ **не** содержат ненулевые элементы в одном столбце (т. е. в нашей записи нет полностью нулевых столбцов)
  $$\implies T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_k = 0$$

  Замечание. Эти нули разной длины

  $$\implies \forall i \quad a_1^{(i)} s_1^{(i)} + \ldots + a_{r_i} s_{r_i}^{(i)} = 0$$
  $$s_1^{(i)}, \ldots, s_{r_i}^{(i)} \text{ ЛНЗ} \implies a_1^{(i)} = \ldots = a_{r_i}^{(i)} = 0$$

□

Замечание. На самом деле, блочно-диагональная матрица – избыточное условие (достаточно, чтобы в каждой строке был ЛНЗ набор, и не было полностью нулевых столбцов), однако нам понадобится именно такой случай

Следствие. $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k, \qquad U - i$ – инвариантно для $\mathcal{A}$

$$\implies \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}\Big|_{U_1} + ... + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}\Big|_{U_k}$$

0.2 Существование жордановой формы нильпотентного оператора

Определение 4. Оператор называется нильпотентным, если $\mathcal{A}^k = 0$ для некоторого k
Показатель нильпотентности – это наименьшее k, для которого $\mathcal{A}^k = 0$

Примеры. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathcal{A} : X \mapsto AX$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  Нильпотентный, с показателем 2
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Нильпотентный, с показателем 3
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$