Оглавление

1 Векторные пространства **2**

1.1 Определение и примеры 2

1.2 Линейные комбинации и линейная зависимость 2

1.3 Порождающие системы 5

1.4 Базис 5

Глава 1

Векторные пространства

1.1 Определение и примеры

Определение 1. K – поле, V – множество. Заданы опреации сложения на V $(V \times V \to V)$ и умножения на скаляр $(V \times K \to V)$
Множество V называется веторным пространством над K, если выполнены следующие свойства:

1. V – абелева группа по сложению
2. Дистрибутивность: $a(u+v) = au + av, \qquad \forall a \in K, \quad u, v \in V$
3. Дистрибутивность: $(a+b)u = au + bu, \qquad \forall a, b \in K, \quad u \in V$
4. Ассоциативность: $a(bu) = (ab)u, \qquad \forall a, b \in K, \quad u \in U$
5. $1 \cdot u = u, \qquad 1 \in K, \quad \forall u \in U$

Элементы V называют векторами, элементы K – скалярами

Примеры.

1. Геометрические векторы на плоскости – векторное пространство над $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}^n$ – векторное пространство над $\mathbb{R}$
3. K^n, где K – поле – векторное пространство над K
4. $M_{m \times n}$ – векторное пространство над $\mathbb{R}$
5. $\mathbb{C}$ – векторное пространство над $\mathbb{R}$
6. $K[x]$ – векторное пространство над K
7. Множество многочленов степени $\leq n$ – векторное пространство над K

Свойства.

1. $0 \cdot u = \overrightarrow{0}, \qquad \forall u \in V$

   Доказательство. $0 \cdot u = (0+0)u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$
   $0 = 0 \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$
   $0 = 0 \cdot u$ □

2. $a \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}, \qquad \forall a \in K$
3. $a \cdot u = 0 \implies a = 0$ или $u = \overrightarrow{0}$

1.2 Линейные комбинации и линейная зависимость

Определение 2. Линейной комбинацией векторов $u_1, ..., u_k \in V$ называется вектор

$$a_1u_1 + ... + a_ku_k, \quad a_i \in K$$

a_i – коэффициенты

Определение 3. Линейная комбинация называется тривиальной, если все коэффициенты равны нулю

Определение 4. Векторы u_i называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю
Иначе – линейно независимые

Свойства.

1. (a) Векторы линейно зависимы $\iff$ один из векторов является ЛК остальных

   Доказательство.

   - $\Longleftarrow$
     Пусть u_1 – ЛК, то есть $u_1 = a_2u_2 + ... + a_nu_n$
     $(-1)u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 0$ – нетривиальная ЛК
   - $\Longrightarrow$
     Пусть $a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0$ – нетривиальная ЛК
     Пусть $a_1 \neq 0$

     $$a_1 = -\frac{a_2}{u_1}u_2 - ... - \frac{a_n}{u_1}u_n$$

   $\square$

   (b) Если $u_1, ..., u_n$ ЛНЗ, а $u_1, ..., u_n, v$ ЛЗ, то v является ЛК остальных

   Доказательство. $u_1, ..., u_n, v$ ЛЗ $\iff$ $\exists\, a_1, ..., a_n$ (не все нули) : $a_1u_1 + ... + a_nu_n + a_{n+1}v = 0$

   - Если $a_{n+1} \neq 0$, то можно выразить v
   - Если $a_{n+1} = 0$, то:
     Не все a_i равны 0, $a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0$ – нетривиальная. Противоречие

   $\square$

2. (a) Если к ЛЗ добавить несколько векторов, то она останется ЛЗ

   (b) Если из ЛНЗ убрать несколько векторов, то она останется ЛНЗ

3. (a) $c \neq 0 \in K$.
   $u_1, ..., u_n$ ЛЗ $\iff$ $cu_1, ..., cu_n$ ЛЗ

   (b) $c \in K$
   $u_1, ..., u_n$ ЛЗ $\iff$ $u_1 + cu_2, u_2, ..., u_n$ ЛЗ

Доказательство.

$$u_1' \coloneqq \begin{cases} cu_1 & (3a) \\ u_1 + cu_2 & (3a) \end{cases}$$

$$u_1 = \begin{cases} \frac{1}{c}u_1' & (3a) \\ u_1' + (-c)u_2 & (3a) \end{cases}$$

Набор $u_1, ..., u_n$ получается из $u_1', u_2, ..., u_n$ преобразованием того же типа
Достаточно доказать $\implies$

(a) Пусть $a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0$, не все a_i равны 0

$$\frac{a}{c}u_1' + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 0, \quad \text{не все коэфф. равны 0}$$

(b) $a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 0$, не все a_i равны 0

$$a_1u_1' + (a_2 - ca_1)u_2 + ... + a_nu_n = 0$$

$$a_1(u_1 + cu_2) + ...$$

Пусть $a_1 = a_2 - ca_1 = a_3 = ... = a_n = 0$

□

Теорема 1 (линейная зависимость линейных комбинаций). Пусть $k > m$ и векторы $v_1, v_2, ..., v_k$ являются ЛК векторов $u_1, ..., u_m$
Тогда $v_1, ..., v_k$ ЛЗ

Доказательство. Индукция по m

- **База.** $m = 1$
  Есть вектор u_1. Все остальные – его ЛК:

$$v_1 = a_1u_1, \qquad v_2 = a_2u_2, ...$$

  - $a_1 = 0 \implies v_1 = 0, \qquad 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + ... = 0$
  - $a_1 \neq 0$

$$v_2 = a_2u_1 = a_2 \cdot \frac{v_1}{a_1}$$

$$\frac{a_2}{a_1}v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + ... = 0$$

- **Переход.** $m - 1 \to m$

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1m}u_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_k = a_{k1}u_! + a_{k2}u_2 + ... + a_{km}u_m$$

  Исключим u_1 из всех векторов, кроме первого:

  - $a_{11} = a_{21} = ... = a_{k1} = 0$
    Применяем индукционное предположение к $v_1, ..., v_k$ и $u_2, ..., u_m$
  - Пусть не все a_{i1} равны нулю. НУО считаем, что $a_{i1} \neq 0$
    При $i > 1$ положим $v_i' = v_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}v_1$
    Векторы $v_2', v_3', ..., v_k'$ являются ЛК $u_2, u_3, ..., u_m$
    $k - 1 > m - 1$
    По индукционному предположению, $v_2', ..., v_k'$ ЛЗ
    Добавим к этому набору v_1 (пользуемся свойством 2a)
    Воспользуемся свойством 3b:
    $v_1, v_2, ..., v_k$ ЛЗ

□

1.3 Порождающие системы

Определение 5. Пусть V – векторное пространство
Множество векторов $\{ v_i \}$ называется порождающим для V, если любой вектор $v \in V$ является ЛК некоторого конечного подмножества $\{ v_i \}$

Определение 6. Если у V есть конечная порождающая система, то V называется конечномерным
Иначе – бесконечномерным

Свойство. Пусть V – конечномерное
Тогда в V **не** существует сколь угодно больших ЛНЗ систем

Другая формулировка. $\exists N : \forall k > N \quad \forall v_1, \ldots, v_k \in V \quad v_1, \ldots, v_k$ ЛЗ

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_N$ – конечная порождающая система. По теореме о линейной зависимости линейных комбинаций $v_1, \ldots, v_k$ ЛЗ □

Теорема 2 (порождающие и ЛНЗ системы). Пусть V – конечномерное пространство

1. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ – минимальная по включению[a] порождающая система. Тогда она ЛНЗ

   Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ – ЛЗ
   Тогда некоторый вектор – ЛК остальных. Пусть это u_n

   $$u_n = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1}$$

   Докажем, что $u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$ – не минимальная, то есть, что $u_1, \ldots, u_{n-1}$ – тоже порождающая
   Пусть $v \in V, \qquad v = a_1 u_1 + \ldots + a_{n-1} u_{n-1} + a_n u_n$

   $$v = a_1 u_1 + \ldots + a_n \Big(c_1 u_1 + \ldots \Big) = (a_1 - a_n c_1) u_1 + \ldots + (a_{n-1} + a_n c_{n-1}) u_{n-1}$$

   □

   [a] Если из неё убрать вектор, она перестанет быть порождающей. Не обязательно минимальная по количеству векторов

2. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ – максимальная по включению ЛНЗ. Тогда она порождающая

   Доказательство. Пусть $v \in V$
   $u_1, \ldots, u_n$ – ЛНЗ, $u_1, \ldots, u_n, v$ – ЛЗ (т. к. u_i – минимальная)
   Применяем свойство 1b □

1.4 Базис

Определение 7. Пусть V – конечномерное векторное пространство
Система векторов называется базисом V, если она ЛНЗ и порождающая

Теорема 3 (равносильные определения базиса). Следующие утверждения равносильны:

1. $u_1, \ldots, u_n$ – базис V
2. $u_1, \ldots, u_n$ – максимальная по включению ЛНЗ
3. $u_1, \ldots, u_n$ – минимальная по включению порождающая система
4. Любой вектор можно единственным образом представить в виде ЛК u_i