Оглавление

Глава 1

$\mathbb{R}^n$

1.1 Дифференцируемость отображения

Определение 1. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \qquad x \in E$ – внутр. т., $\qquad F : E \to \mathbb{R}^k, \quad k \geq 2$
F дифференцируемо в X, если

$$\forall \underset{H \neq \mathbb{O}_n}{H \in \mathbb{R}^n} : X + H \in E \quad F(X+H) - F(X) = L(H) + r(H) \tag{1.1}$$

где $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – линейное и

$$\frac{\|r(H)\|_k}{\|H\|_n} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0 \tag{1.2}$$

Напоминание. L – линейное, если

$$\exists\, A_{k \times n} : L(H) = AH \tag{1.3}$$

Представим F в виде

$$F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(Y) \\ \ldots \\ f_k(Y) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Утверждение 1. F дифференцируемо в X тогда и только тогда, когда каждая координатная функция $f_1, \ldots, f_k$ дифференцируема в X

Доказательство.

- Пусть F дифференцируема
  Пусть $e_j \coloneqq \underset{k}{(\overbrace{0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0})}$
  Умножим (1.1) слева на e_j, попутно подставив (1.3):

$$e_j \Big(F(X+H) - F(X) \Big) = e_j(AH) + e_j r(H) \tag{1.5}$$

Посмотрим на левую часть:

$$e_j \Big(F(X+H) - F(X) \Big) = e_j \cdot \left(\begin{bmatrix} f_1(X+H) \\ . \\ . \\ . \\ f_k(X+H) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1(X) \\ . \\ . \\ . \\ f_k(X) \end{bmatrix} \right) = f_j(X+H) - f_i(X) \tag{1.6}$$

Обозначим $A \coloneqq \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix}$

Умножим e_j на A:

$$e_j A = (e_j A)H = \underset{k}{\overbrace{(0, ..., \underset{j}{1}, ..., 0)}} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{k1} & ... & a_{kn} \end{bmatrix} = (a_{j1}, ..., a_{jn})$$

Обозначим $H := \begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{bmatrix}$ Посмотрим на правую часть (1.5):

$$e_j(AH) = (a_{j1}, ..., a_{jn}) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{bmatrix} = a_{j1}h_1 + ... + a_{jn}h_n \tag{1.7}$$

Обозначим $r(H) := \begin{bmatrix} r_1(H) \\ . \\ . \\ . \\ r_k(H) \end{bmatrix}$. Тогда

$$e_j r(H) = r_j(H) \tag{1.8}$$

$$(1.5) - (1.8) \implies f_j(X + H) - f_j(X) = a_{j1}h_1 + ... + a_{jn}h_n + r_j(H) \tag{1.9}$$

$$\frac{|r_j(H)|}{\|H\|_n} \leq \frac{\|r(H)\|_k}{\|H\|_n} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0 \tag{1.10}$$

$$(1.9), (1.10) \implies f_j \text{ диффер. в } X \implies \forall l = 1, ..., n \quad \exists f'_{jx_l}(X) = a_{jl} \tag{1.11}$$

$$A = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) & ... & f'_{1x_n}(X) \\ . & . & . \\ f_{kx_1}(X) & ... & f'_{kx_n}(X) \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Эта матрица называется матрицей Якоби

Обозначение. $A = DF(X)$

Теперь можно записать:

$$F(X + H) - F(X) = DF(X)H + r(H) \tag{1.13}$$

- Пусть все координатные функции дифференцируемы
  Запишем это при помощи градиента:

$$f_l(X + H) - f_l(X) = \operatorname{grad} f_l(X)H + r_l(H), \qquad 1 \leq l \leq k \tag{1.14}$$

Запишем это всё в столбик:

$$\left.\begin{aligned} f_1(X + H) - f_1(X) &= \operatorname{grad} f_1(X)H + r_1(H) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f_k(X + H) - f_k(X) &= \operatorname{grad} f_k(X)H + r_k(H) \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

$$(1.15) \iff F(X + H) - F(X) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(X) \\ . \\ . \\ . \\ \operatorname{grad} f_k(X) \end{bmatrix} \cdot H + \begin{bmatrix} r_1(H) \\ . \\ . \\ . \\ r_k(H) \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Заметим, что это матрица Якоби, т. е.

$$F(X+H)-F(X)=DF(X)+\begin{bmatrix} r_1(H) \\ . \\ . \\ . \\ r_k(H) \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{\|H\|_n}\cdot\left\|\begin{bmatrix} r_1(H) \\ . \\ . \\ . \\ r_k(h) \end{bmatrix}\right\|_k = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{r_1(H)}{\|H\|_n}\right)^2}_{\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0} + \ldots\ldots + \underbrace{\left(\frac{r_k(H)}{\|H\|_n}\right)^2}_{\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0}} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \tag{1.18}$$

(1.17), (1.18) $\implies$ F диффер. в X

$\square$

1.2 Дифференцируемость суперпозиции

Теорема 1. $E\subset\mathbb{R}^n,\quad n\geq 1,\qquad X_0\in E$ – внутр. т. E
$G\subset\mathbb{R}^k,\quad k\geq 1,\qquad Y_0\in G$ – внутр. т. G
$F: E\to\mathbb{R}^k,\qquad F(X_0)=Y_0,\qquad \forall X\in E\quad F(X)\in G$
$\Phi: G\to\mathbb{R}^l,\quad l\geq 1$

$$T(X)=\Phi\big(F(X)\big) \tag{1.19}$$

$$F \text{ дифф. в } X_0,\qquad \Phi \text{ дифф. в } Y_0 \tag{1.20}$$

$$\implies \begin{cases} T \text{ дифф. в } X_0 & (1.21) \\ DT(X_0)=D\Phi(Y_0)DF(X_0) & (1.22) \end{cases}$$

Доказательство. Запишем то, что нам нужно рассмотреть:

$$T(X_0+H)-T(X_0)\overset{\text{def}}{=}\Phi\big(F(X_0+H)\big)-\Phi\big(F(X_0)\big)=\Phi\big(F(X_0+H)\big)-\Phi(Y_0)=$$
$$=\Phi\Big(Y_0+\big(F(X_0+H)-Y_0\big)\Big)-\Phi(Y_0)=\Phi\Big(Y_0+\big(F(X_0+H)-F(X_0)\big)\Big)-\Phi(Y_0) \tag{1.23}$$

Обозначим $\Lambda := F(X_0+H)-F(X_0)$
Понятно, что $\Lambda \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_k$
Воспользуемся дифференцируемостью Φ:

$$\Phi(Y_0+\Lambda)-\Phi(Y_0)=D\Phi(Y_0)\Lambda+r(\Lambda) \tag{1.24}$$

где

(1.25)

Положим $\frac{r(\Lambda)}{\|\Lambda\|_k}:=\delta(\Lambda)\in\mathbb{R}^l$

(1.26)

Будем считать, что

$$\delta(\mathbb{O}_k):=\mathbb{O}_l \tag{1.27}$$

$$\Lambda=F(X_0+H)-F(X_0)=DF(X_0)H+\rho(H) \tag{1.28}$$

где

$$\frac{\|\rho(H)\|_k}{\|H\|_n}\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0 \tag{1.29}$$

$$(\textbf{??}), (1.24), (1.28) \implies T(X_0 + H) - T(X_0) = D\Phi(Y_0)\Big(DF(X_0)H + \rho(H)\Big) + r(\Lambda) \tag{1.30}$$

$\square$