Оглавление

Глава 1

Векторные пространства

1.1 Продолжение чего-то

Доказательство. $\operatorname{rk} A = \dim$ пространства строк $:= U$
Элементарные преобразования строк и перестановка столбцов: $A \to A'$
Докажем, что $\dim U = \dim U'$
Если строки ЛНЗ, то при элементарных преобразованиях получаются ЛНЗ
Если строки ЛЗ, то получаются ЛЗ
Значит, при элементарных преобразованиях строк, dim не меняется

$$u_1, ..., u_m, \qquad u'_1, ..., u'_m$$

$$u_i = (x_1^{(i)}, ..., x_n(i)), \qquad u'_i = (x_{\sigma(1)}^{(i)}, ..., x_{\sigma(m)}^{(i)})$$

где σ – перстановка
Рассмотрим ЛК $\sum c_i u_i, \quad \sum c_i u'_i$:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... = (..., c_1 x_k^{(1)} + c_2 x_k^{(i)}, ...), \qquad c_1 u'_1 + c_2 u'_2 + ... = (..., c_1 x_{\sigma(k)}^{(1)} + c_2 x_{\sigma(k)}^{(i)}, ...)$$

$\sum c_i u_i$ и $\sum c_i u'_i$ отличаются перестановкой координат
ЛНЗ/ЛЗ наборы соответствуют друг другу
Достаточно доказать утверждение для трапецевидной матрицы

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & | & a_{1,r+1} & ... \\ 0 & a_{22} & & a_{2r} & | & a_{2,r+1} & ... \\ & . & & & | & a_{3,r+1} & ... \\ & & . & & | & ... & \\ & & & a_{rr} & | & a_{r,r+1} & ... \\ - & - & - & - & - & ... & \\ 0 & 0 & ... & & & & \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk} A' := r$$

Рассмотрим минор порядка $> r$
Есть нулевая строка, определитель равен 0
Пусть u_i – i-я строка матрицы A' Докажем, что $\dim u' = r$:
Достаточно доказать, что $u_1, u_2, ..., u_r$ ЛНЗ

$$(0, 0, ..., 0) = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_r u_r = (c_1 a_{11}, c_1 a_{12} + c_2 a_{22}, ..., c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + ... + c_1 a_{rr}, ...)$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 a_{11} &= 0 \\ a_{11} &\neq 0 \end{aligned}\right\} \implies c_1 = 0$$

$$c_1 a_{12} + c_2 a_{22} = 0 \implies c_2 a_{22} = 0 \implies c_2 = 0$$

□

Теорема 1 (Кронекера-Капелли)**.** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы

Доказательство. Приведём матрицу системы к трапецевидной элементарными преобразованиями строк и перестановкой столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & . & . & . & . & | & . \\ . & . & . & . & . & | & . \\ . & . & . & . & . & | & . \\ 0 & . & a_{rr} & . & a_{rn} & | & b_r \\ 0 & . & . & . & 0 & | & b_{r+1} \\ . & . & . & . & . & | & . \end{pmatrix}$$

Система совметсна $\iff$ $b_i = 0$ при $i > r$

. . . .

$\square$

Глава 2

Линейные отображения

2.1 Матрица линейного отображения

Определение 1. U, V – векторные пространства над K
Отображение $f : U \to V$ называется линейным, если

1. $\forall u_1, u_2 \in U \quad f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$
2. $\forall u \in U, k \in K \quad f(ku) = kf(u)$

Замечание. Линейное отображение из U в U иногда называют линейным преобразованием

Свойства.

1. $f : U \to V, \quad g : V \to W$ – линейны $\implies g \circ f : U \to W$ – линейно
2. $f : U \to V$ – линейно, U_1 – подпространство $U \implies f\Big|_{U_1} : U_1 \to V$ – линейно

Определение 2. Пусть U, V – конечномерные, $e_1, ..., e_n$ – базис U, $g_1, ..., g_m$ – базис V, f – линейное отображение $U \to V$
Матрицей f в данных базисах называется матрица, в i-м столбце которой записаны координаты $f(e_i)$ в базисе $g_1, ..., g_m$, то есть

$$\begin{pmatrix} a_1 1 & ... & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} g_k$$

Лемма 1 (матричная запись линейного оторажения)**.** U, V – конечномерные, $e_1, ..., e_n$ – базис U, $g_1, ..., g_m$ – базис V, $f : U \to V$ – линейное

1. Пусть A – матрица f в данных базисах, $u \in U, \quad v \in V$, такие, что $f(u) = v$,
   X – столбец координат u в базисе $e_1, ..., e_n$
   Y – столбец координат v в базисе $g_1, ..., g_m$
   Тогда $Y = AX$

Доказательство. Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} v = f(u) = f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n) = \\ = x_1(a_{11}g_1 + ... + a_{m1}g_m) + ... + x_i(a_{1i}g_1 + ... + a_{mi}g_m) + ... + x_n(a_{1n}g_1 + ... + a_{mn}g_m) = \\ = (a_{11}x_1 + ... + a_{i1}x_i + ... + a_{1m}x_n)g_1 + ... + (a_{mn}x_1 + ... + a_{mi}x_i + ... + a_{mn}x_n)g_m \implies \\ \implies g_1 = y_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + ... + a_{1n}x_m, \qquad y_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + ... + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{mi}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

□

2. Пусть A – такая матрица, что $\forall u, v : f(u) = v$, и их столбцов координат X, Y выполнено $Y = AX$, то A – матрица f в этих базисах

Доказательство. Аналогично □

Теорема 2 (Изменение матрицы при замене базисов)**.** U, V – конечномерные, $f : U \to V$ – линейное, e_i, e_i' – базисы U, g_i, g_i' – базисы V, A – матрица f в базисах e_i, g_i, A' – матрица f в базисах e_i', g_i'
Тогда $A' = C^{-1}_{g_i \to g_i'} \cdot A \cdot C_{e_i \to e_i'}$

Доказательство. Пусть $u \in U, \quad v \in V, \quad f(u) = v$
X, X' – столбцы координат u в e_i, e_i'
Y, Y' – столбцы координат v в g_i, g_i' □

2.2 Ядро и образ

Определение 3. Пусть $f : U \to V$ – линейное отображение
Ядром f называется множество $\{\, u \mid f(u) = 0 \,\}$

Обозначение. $\ker f$

Образом f называется множество $\{\, f(u) \mid u \in U \,\}$

Обозначение. $\operatorname{Im} f$

Свойства.

1. $\ker f$ – подпространство U
2. $\operatorname{Im} f$ – подпространство V

Определение 4. $f : U \to V$ называется изоморфизмом, если

1. f линейно
2. f – биекция

Если существует изоморфизм $f : U \to V$, то пространства называются изоморфными

Обозначение. $U \cong V \ (U \simeq V, U \sim V)$

Свойства.

1.
- Если f – изоморфизм, то $\exists\, f^{-1}$ и f^{-1} – изоморфизм
- Если $f : U \to V, g : V \to W$ – изоморфизмы, то $g \circ f : U \to W$ – изоморфизм