Оглавление

0.1 Приложение неравенства Йенсена

Применение неравенства Йенсена к ln. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$ при $x > 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Значит, $f(x)$ – вогнутая
Рассмотрим $x_1, ..., x_n > 0, \quad n \geq 2$
Возьмём $t_1 = t_2 = ... = t_n = \frac{1}{n}$
Применим неравенство Йенсена:

$$\ln\left(\frac{x_1}{n} + ... + \frac{x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln x_1 + ...\frac{1}{n}\ln x_n$$

$$\ln\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \ln(x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Получили неравенство для среднего арифметического и среднего арифметического

Применение неравенства Йенсена к x^p. Рассмотрим $f(x) = x^p, \quad p > 1, \quad x > 0$

$$(x^p)' = px^{p-1}, \qquad (x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$$

Значит, $f(x)$ – выпуклая
Рассмотрим $x_1, ..., x_n > 0$ и $t_1, ..., t_n > 0 : t_1 + ...t_n = 1$

$$(t_1x_1 + ... + t_nx_n)^p \leq t_1x_1^p + ... + t_nx_n^p$$

Возьмём любые $y_1, ..., y_n > 0$
Положим $T := y_1 + ... + y_n$
Теперь $t_k = \dfrac{y_k}{T}$
Перепишем неравенство в терминах y:

$$\left(\frac{y_1}{T}x_1 + ... + \frac{y_n}{T}x_n\right)^p \leq \frac{y_1}{T}x_1^p + ... + \frac{y_n}{T}x_n^p$$

Умножим на T^p:

$$(y_1x_1 + ... + y_nx_n)^p \leq (y_1x_1^p + ... + y_nx_n^p)\underbrace{(y_1 + ... + y_n)}_{=T}{}^{p-1}$$

Введём числа $a_k, b_k > 0 : \begin{cases} a_k b_k = x_k y_k \\ a_k^p = y_k x_k^p \end{cases}$
Решим эту систему относительно a_k и b_k:
Возведём первое уравнение в степень p:

$$\begin{cases} a_k^p b_k^p = x_k^p y_k^p \\ a_k^p = y_k x_k^p \end{cases}$$

Поделим первую строчку на вторую:

$$\begin{cases} b_k^p = y_k^{p-1} \\ a_k^p = y_k x_k^p \end{cases}$$

$$b_k = y_k^{\frac{p-1}{p}} \iff y_k = b_k^{\frac{p}{p-1}}$$

Следовательно, мы можем взять любые положительные a_k, b_k и восстановить по ним y_k, x_k
Перепишем неравенство:

$$(a_1 b_1 + ... + a_n b_n)^p \leq (a_1^p + ... + a_n^p)(b_1^{\frac{p}{p-1}} + ... + b_n^{\frac{p}{p-1}})^{p-1}$$

Извлечём корень степени p:

$$a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leq (a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^{\frac{p}{p-1}} + ... + b_n^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}}$$

Это называется **неравенство Гёльдера**
Оно переписывается в более симметричном виде:
Положим $q : \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \iff q = \dfrac{p}{p-1}$

$$a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leq (a_1^p + ... + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + ... + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Частным случаем является **неравенство Коши-Буняковского-Шварца**:

$$a_1 b_1 + ... + a_n b_n \leq (a_1^2 + ... + a_n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b_1^2 + ... + b_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

0.2 Точки перегиба

Определение 1. $f \in C\big([a,b]\big), \qquad c \in (a,b)$
c – точка перегиба f, если:

- f выпукла на $[a,c]$ и вогнута на $[c,b]$
- f вогнута на $[a,c]$ и выпукла на $[c,b]$

Теорема 1 (необходимый признак точки перегиба). $f \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f'(x), \qquad c$ – точка перегиба, $\qquad \exists\, f''(c)$

$$\implies f''(c) = 0$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию когда f сначала выпукла, потом вогнута (иначе – аналогично)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ выпукла на } [a,c] \implies f'(x) \text{ возрастает на } (a,c) \\ \exists\, f''(c) \implies f'(x) \text{ непрерывна в } c \end{array}\right\} \implies f'(x) \text{ возрастает на } (a,c]$$

То есть, $\forall x \in (a,c) \quad f'(x) \leq f'(c)$
Аналогично, $f'(x)$ убывает на $[c,b)$, то есть $\forall x > c \quad f'(c) \geq f'(x)$
То есть, c – точка максимума $f'(x)$
По теореме Ферма, $(f')'(c) = f''(c) = 0$ $\square$

Глава 1

Неопределённый интеграл

Определение 2. $f : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad F : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad -\infty \leq a < b \leq +\infty$
F – первообразная f на $(a, b) \iff \forall x \in (a, b) \quad \exists\, F'(x) = f(x)$

Примечание. Если первообразная существует, то их бесконечно много

Доказательство. Возьмём $c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$
Положим $F_1(x) := F(x) + c$

$$F_1'(x) = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

□

Теорема 2. $f : (a, b) \to \ R, \qquad F$ – первообразная f

$$\forall x \in (a, b) \quad F_0'(x) = f(x) \implies \exists\, c_0 \in \mathbb{R} : F_0(x) = F(x) + c_0$$

Доказательство. Рассмотрим $g(x) := F_0(x) - F(x)$

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = F_0'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Применим критерий постоянства функции:

$$\exists\, c_0 : \forall x \in (a, b) \quad g(x) = c_0$$

□

Определение 3. Множество всех первообразных функции f называется неопределённым интегралом функции f

Обозначение. $\int f(x)\, \mathrm{d}\, x = F(x) + c$ (фигурные скобки не пишут)

Свойство (линейность). $b \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}$

$$\int bf(x)\, \mathrm{d}\, x = b \int f(x)\, \mathrm{d}\, x$$

Свойство (аддитивность).

$$\int (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}\, x = \int f(x)\, \mathrm{d}\, x + \int g(x)\, \mathrm{d}\, x$$

Теорема 3 (о существовании первообразной). $f \in C\big((a, b)\big) \implies \exists\, F : \forall x \in (a, b) \quad F'(x) = f(x)$

Доказательство. Будет доказано в одной из следующих лекций □

Замена переменной в неопределённом интеграле.
$f : (a,b) \to \mathbb{R}, \qquad \forall x \in (a,b) \quad F'(x) = f(x)$
$\varphi : (p,q) : \forall p \in (p,q) \quad \varphi(p) \in (a,b), \qquad \forall t \in (p,q) \quad \exists \varphi'(t), \qquad G(t) \coloneqq F(\varphi(t))$

$$G'(t) = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \implies \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}\, t = G(t) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c$$

$$\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}\, t = \int f(x) \, \mathrm{d}\, x, \qquad x = \varphi(t)$$

Формула интегрирования по частям. $f, g : (a,b), \qquad F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x)$
Продифференцируем их произведение:

$$\big(F(x)G(x)\big)' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + g(x)F(x)$$

$$\int \big(f(x)G(x) + g(x)F(x)\big) \, \mathrm{d}\, x = F(x)G(x) + c$$

$$\int f(x)G(x) \, \mathrm{d}\, x + \int g(x)F(x) \, \mathrm{d}\, x = F(x)G(x) + c$$

$$\int F'(x)G(x) \, \mathrm{d}\, x = F(x)G(x) - \int G'(x)F(x) \, \mathrm{d}\, x$$

Рассмотрим $F(x) \coloneqq x$:

$$\int G(x) \, \mathrm{d}\, x = xG(x) - \int xG'(x) \, \mathrm{d}\, x$$

1.1 Таблица основных неопределённых интегралов

Утверждения. $x \in \mathbb{R}$

1. $\int 0 \, \mathrm{d}\, x = c$
2. $\int 1 \, \mathrm{d}\, x = x + c$
3. $\int x^n \, \mathrm{d}\, x = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \qquad n \in \mathbb{N}$
4. $\int x^{-n} \, \mathrm{d}\, x = \dfrac{1}{1-n} x^{1-n} + c, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad x \neq 0$
5. $\int \dfrac{\mathrm{d}\, x}{x} = \ln|x| + c, \qquad x \neq 0$

   Доказательство.

   - $x > 0 \qquad \ln|x| = \ln x, \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
   - $x < 0 \qquad \ln|x| = \ln(-x), \quad (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

   □
6. $\int x^r \, \mathrm{d}\, x = \dfrac{1}{r+1} x^{r+1} + c, \qquad r \notin \mathbb{Z}, \quad x > 0$
7. $\int e^x \, \mathrm{d}\, x = e^x + c$
8. $\int a^x \, \mathrm{d}\, x = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$
9. $\int \sin x \, \mathrm{d}\, x = -\cos x + c$
10. $\int \cos x \, \mathrm{d}\, x = \sin x + c$
11. $\int \dfrac{\mathrm{d}\, x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c, \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

12. $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c, \qquad x \neq \pi n$

13. $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c, \qquad x \in (-1, 1)$

14. $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$

15. Применим интегрирование по частям (частный случай для $F(x) = x$):
$\int \ln x \,\mathrm{d}\,x = x \ln x - \int x \cdot (\ln x)' \,\mathrm{d}\,x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\,x = x \ln x - x + c$

Доказательство. Формулы проверяются дифференцированием правой части □

1.2 Неопределённые интегралы от рациональных функций

Определение 4. Рациональной функцией называется дробь вида $\frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$, где p, q – многочлены

Теорема 4. Если $\deg p \geq \deg q$, то $\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$, где r – многочлен, $\deg p_1 < \deg q$

Доказательство. Доказано в курсе алгебры □

Теорема 5.

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \,\mathrm{d}\,x = \int r(x) \,\mathrm{d}\,x + \int \frac{p_1(x)}{q(x)} \,\mathrm{d}\,x$$

$$r(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \implies \int r(x) \,\mathrm{d}\,x = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \dots + a_n x + c$$

Определение 5. Будем называть простейшими дробями выражения вида:

- $\frac{a}{(x-b)^n}$, где $a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$
- $\frac{ax+b}{(x^2+hx+g)^n}$, где $a, b, h, g \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad x^2 + hx + g > 0$ при $x \in \mathbb{R}$

Замечание. $F'(x) = f(x)$

$$\Big(F(at+b)\Big)' = F'(at+b) \cdot (at+b)' = af(at+b)$$

$$\int af(at+b) \,\mathrm{d}\,t = F(at+b)$$

$$\int f(at+b) \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a} \int f(x) \,\mathrm{d}\,x \Big|_{x=at+b}$$

Неопределённый интеграл первого вида простейших дробей.

- $n \geq 2$

$$\int \frac{a}{(x-b)^n} \,\mathrm{d}\,x = \frac{a}{1-n}(x-b)^{1-n} + c$$

- $n = 1$

$$\int \frac{a}{x-b} \,\mathrm{d}\,x = a \ln|x-b| + c$$

Неопределённый интеграл второго вида простейших дробей.

$$x^2+hx+g=(x+\frac{h}{2})^2+g-\frac{h^2}{4}>0 \text{ (так как нет вещественных корней)}$$

$$s^2\coloneqq g-\frac{h^2}{4},\qquad ax+b=a(x+\frac{h}{2})+b-\frac{ah}{2}$$

$$b-\frac{ah}{2}\coloneqq b_1$$

$$\int\frac{ax+b}{(x^2+hx+g)^n}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{a\left(x+\frac{h}{2}\right)+b_1}{\left((x+\frac{h}{2})^2+s^2\right)^n}\,\mathrm{d}\,x=a\int\frac{x+\frac{h}{2}}{\left((x+\frac{h}{2})^2+s^2\right)^n}\,\mathrm{d}\,x\underset{x+h/2\coloneqq y}{=}$$

$$=a\int\frac{y}{(y^2+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,y+b_1\int\frac{y}{(y^2+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,y$$

Положим $t\coloneqq y^2$

Тогда (при $t>0$), $y=\sqrt{t}\coloneqq\varphi(t)$, $\qquad\varphi'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$$\int\frac{y}{(y^2+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,y=\int\frac{\sqrt{t}\cdot\frac{1}{w\sqrt{t}}}{(t+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\,t}{(t+s^2)^n}$$

Получили первый случай

$$\int\frac{\mathrm{d}\,y}{(y^2+s^2)^n}\underset{y\coloneqq sz}{=}\int\frac{s}{(s^2z^2+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,z=s^{1-2n}\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}$$

При $n=1$, $\int\dfrac{\mathrm{d}\,z}{z^2+1}=\operatorname{arctg}z+c$

$$F_n'(z)=\frac{1}{(z^2+1)^n},\qquad n=1$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}=z\cdot\frac{1}{(z^2+1)^n}-\int z\left(\frac{1}{(z^2+1)^n}\right)'\mathrm{d}\,z=\frac{z}{(z^2+1)^n}+2n\int\frac{z\cdot z}{(z^2+1)^n}\,\mathrm{d}\,z=$$

$$=\frac{z}{(z^2+1)^n}+2n\int\frac{z^2+1-1}{(z^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{z}{(z^2+1)^n}+2n\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}-2n\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^{n+1}}$$

$$2n\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^{n+1}}=\frac{z}{(z^2+1)^n}+(2n-1)\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^{n+1}}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}F_n(z)+c$$

$$F_{n+1}(z)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}F_n(z)$$

Определение 6. Рациональной функцией от двух переменных называется $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где P,Q – многочлены от двух переменных, то есть $P(u,v)=\sum c_{kl}u^kv^l$

Утверждение 1. $\int R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}\,x$

Положим $t\coloneqq\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$t^2+1=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{2}t1 + t^2$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$