Оглавление

0.1 Условия монотонности и постоянства функций

Теорема 1 (условие постоянства функции). $f \in C\big((a,b)\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f'(x)$

$$\underset{(\text{то есть, } f(x)=\text{const})}{\forall x_0, x \in (a,b) \quad f(x) = f(x_0)} \tag{1}$$

$$\iff \forall x \in (a,b) \quad f'(x) = 0 \tag{2}$$

Доказательство.

- $\implies$
  (1) $\implies$ (2), так как $c' \equiv 0$
- $\impliedby$
  Пусть $x \neq x_0$
  По теореме Лагранжа, $\exists x_1$ между x_0 и $x : f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_1)}_{=0}(x - x_0) = 0$

□

Теорема 2 (условие возрастания и убывания функции). $f \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f'(x)$

$$\forall x_1 < x_2 \in [a,b] \quad f(x_1) \leq f(x_2) \tag{3}$$

$$\iff \forall x \in (a,b) \quad f'(x) \geq 0 \tag{4}$$

$g \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, g'(x)$

$$\forall x_1 < x_2 \in [a,b] \quad g(x_1) \geq g(x_2) \tag{5}$$

$$\iff \forall x \in (a,b) \quad g'(x) \leq 0 \tag{6}$$

Доказательство.

- $f(x)$
  - $\implies$
    Пусть выполнено (3)
    Рассмотрим любую точку $x \in (a,b)$

Возьмём $h > 0 : x + h < b$

$$(3) \implies f(x+h) \ge f(x) \iff \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0 \implies \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0 \iff$$
$$\iff f'(x) \ge 0$$

- $\Longleftarrow$
  Пусть выполнено (4)
  Возьмём $x_1, x_2 \in [a,b]$
  По теореме Лагранжа,

$$\exists\, x_3 \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_3)}_{\ge 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\ge 0} \ge 0 \iff f(x_2) \ge f(x_1)$$

- $g(x)$
  Рассмотрим функцию $f(x) := -g(x)$
  По свойствам производной, $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) = -g'(x)$

$$g(x_2) \le g(x_1) \iff -g(x_2) \ge -g(x_1) \iff f(x_2) \ge f(x_1)$$

По уже доказанному, получаем, что (5) $\iff$ (6)

□

Теорема 3 (о строгом возрастании и строгом убывании функции). $f \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f'(x)$

$$\forall x_1 < x_2 \in [a,b] \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in (a,b) \quad f'(x) \ge 0 & (7) \\ \nexists\, (\alpha,\beta) \subset (a,b) : \forall x \in (\alpha,\beta) \quad f'(x) = 0 & (8) \end{cases}$$

$g \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, g'(x)$

$$\forall x_1 < x_2 \in [a,b] \quad f(x_1) > f(x_2) \iff \begin{cases} \forall x \in (a,b) \quad g'(x) \le 0 \\ \nexists\, (\alpha_1,\beta_1) \subset (a,b) : \forall x \in (\alpha_1,\beta_1) \quad g'(x) = 0 \end{cases}$$

Доказательство.

- $f(x)$
  - $\implies$
    Пусть f строго возрастает
    По предыдущей теореме, выполнено (7)
    Пусть **не** выполнено (8), то есть $\exists\, (\alpha,\beta) \subset (a,b) : \forall x \in (\alpha,\beta) \quad f'(x) = 0$
    По теореме об условии постоянства функции, $\forall x_1 < x_2 \in (\alpha,\beta) \quad f(x_1) = f(x_2)$ – $\lightning$ с предволожением, что f строго возрастает
  - $\Longleftarrow$
    Пусть выполнены (7) и (8)
    Докажем, что f строго возрастает:

$$(7) \implies \forall x_1 < x_2 \in [a,b] \quad f(x_1) \le f(x_2) \tag{9}$$

То есть, f возрастает
Предположим, что f **не строго** возрастает, то есть

$$\exists\, x', x'' \in [a,b] : f(x') = f(x'') \tag{10}$$

$$(9), (10) \implies \forall x \in (x', x'') \quad f(x') \le f(x) \le f(x'') \iff \forall x \in (x', x'') \quad f(x) = f(x') \implies$$
$$\implies \forall x \in (x', x'') \quad f'(x) = 0 - \lightning$$

- $g(x)$
  Определим функцию $f(x) \coloneqq -g(x)$
  g строго убывает $\iff$ f строго возрастает
  $f'(x) = 0 \iff g'(x) = 0$

□

0.2 Получение некоторых неравенств

Утверждение 1. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad \sin x \ge \frac{2}{\pi} x$

Доказательство. Рассомтрим функцию $f(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$
По замечательному пределу для $\frac{\sin x}{x}$, $f \in C\big([0, \frac{\pi}{2}]\big)$
Найдём производную f:

$$f'(x) = \frac{\sin' x \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x)$$

При доказательстве существенного неравенства для $\sin x$ было доказано, что $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad x < \operatorname{tg} x$
Значит, $f'(x) = \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{>0} \underbrace{(x - \operatorname{tg} x)}_{<0} < 0$
По теореме о строгом убывании, f строго убывает, то есть $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) \quad f(x) > f(\frac{\pi}{2})$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

□

Утверждение 2. $\forall x > -1 \qquad \ln(1 + x) \le x$
Если $x \ne 0$, то $\ln(1 + x) < x$

Доказательство. Возьмём $-1 < a < 0 < b$
Рассмотрим $f(x) \coloneqq \ln(1 + x) - x, \quad x \in [a, b]$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = -\frac{x}{1 + x}$$

- Рассмотрим отрезок $[a, 0]$:

$$\forall x \in [a, 0] \quad \begin{cases} -x > 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases} \quad \implies f(x) \text{ строго возрастает на } [a, 0]$$

  То есть, $\forall x \in [a, 0] \quad \begin{cases} f(x) \le f(0) = 0 \\ f(x) < f(x), \text{ если } x \ne 0 \end{cases}$

- Рассмотрим отрезок $[0, b]$:

$$\forall x \in [0, b] \quad \begin{cases} -x < 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases} \quad \implies f(x) \text{ строго убывает на } [0, b]$$

То есть, $\forall x \in [0, b]$ $\begin{cases} f(x) \leq f(0) = 0 \\ f(x) < f(0), \text{ если } x \neq 0 \end{cases}$

Получили, что $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \leq 0 \iff \ln(1+x) \leq x$ □

Утверждение 3 (неравенство Бернулли). $\alpha > 1$
$\forall x > -1 \qquad (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$
Если $x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$

Доказательство. Рассмотрим $f(x) \coloneqq (1+x)^\alpha - \alpha x$ для $x \in [a, b]$[a]

Рассотрим $-1 < a < 0 < b$

Теперь $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\Big((1+x)^{\alpha-1} - 1\Big)$

Обозначим $\alpha - 1 \coloneqq \beta > 0$

- $-1 < x < 0$
$$1 + x < 1$$
$$(1+x)^\beta < 1^\beta$$
$$(1+x)^\beta - 1 < 0$$
То есть, f строго убывает на $[a, 0]$ и $f(x) < f(0) = 1$

- $0 < x$
$$1 + x > 1$$
$$(1+x)^\beta > 1^\beta$$
$$(1+x)^\beta - 1 > 0$$
То есть, f строго возрастает на $[a, b]$ и $f(x) > f(0) = 1$

Полуичили, что $f(x) \leq 1$ □

[a] В дальнейшем нам понадобятся **замкнутые** промежутки, поэтому мы "покрываем" ими $(-1, +\infty)$

Утверждение 4 (неравенство Бернулли). $0 < \alpha < 1$
$\forall x > -1 \qquad (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$
Если $x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$

Доказательство. Доказательство точно такое же, однако $\alpha - 1 \coloneqq \beta < 0$ и:

- $-1 < x < 0$
$$1 + x < 1$$
$$(1+x)^\beta > 1^\beta$$
$$(1+x)^\beta - 1 > 0$$
То есть, f строго возрастает на $[a, 0]$ и $f(x) > f(0) = 1$

- $0 < x$
$$1 + x > 1$$
$$(1+x)^\beta > 1^\beta$$
$$(1+x)^\beta - 1 > 0$$
То есть, f строго убывает на $[a, b]$ и $f(x) < f(0) = 1$

Получили, что $f(x) \leq 1$ □

0.3 Выпуклые и вогнутые функции

Определение 1. $f \in C\big([a, b]\big)$

f выпукла $\iff \forall x_1, x_2 \in [a, b]$ и $\forall t_1, t_2 > 0 : t_1 + t_2 = 1$

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \le t_1f(x_1) + t_2f(x_2) \tag{11}$$

$g \in C\big([a, b]\big)$
g вогнута $\iff \forall x_1, x_2 \in [a, b]$ и $\forall t_1, t_2 > 0 : t_1 + t_2 = 1$

$$g(t_1x_1 + t_2x_2) \ge t_1g(x_1) + t_2g(x_2)) \tag{12}$$

Утверждение 5. f выпукла $\implies -f$ вогнута
g вогнута $\implies -g$ выпукла

Доказательство. f выпукла $\iff$ выполнено (1)
Домножим (1) на -1:

$$-f(t_1x_1 + t_2x_2) \ge t_1(-f(x_1)) + t_2(-f(x_2))$$

□

Теорема 4 (о характеристике выпуклых и вогнутых функций в терминах производной).
$f \in C\big([a, b]\big), \qquad \forall x \in (a, b) \quad \exists\, f'(x)$
f выпукла $\iff f'(x)$ возрастает
$g \in C\big([a, b]\big), \qquad \forall x \in (a, b) \quad \exists\, g'(x)$
g вогнута $\iff g'(x)$ убывает

Доказательство.

- $f(x)$
  - $\Longleftarrow$
    Пусть f возрастает
    НУО положим $a \le x_1 < x_2 \le b$
    Нужно доказать (11)

$$(1) \iff (t_1 + t_2)f(t_1x_1 + t_2x_2) \le t_1f(x_1) + t_2f(x_2) \iff$$
$$\iff t_1\Big(f(t_1x_1 + t_2x_2) - f(x_1)\Big) \le t_2\Big(f(x_2) - f(t_1x_1 + t_2x_2)\Big)$$

Обозначим $x \coloneqq t_1x_1 + t_2x_2$

$$t_1 > 0 \implies x > t_1x_1 + t_2x_1 = x_1$$

$$x < t_1x_2 + t_2x_2 = x_2$$

То есть, $x_1 < x < x_2$
По теореме Лагранжа,

$$\exists\, c_1 \in (x_1, x) : f(x) - f(x_1) = f'(c_1) \cdot (x - x_1)$$

$$\exists\, c_2 \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x) = f'(c_2) \cdot (x_2 - x)$$

Теперь нужно доказать, что

$$t_1f'(c_1)(x - x_1) \le t_2f'(c_2)(x_2 - x) \tag{13}$$

Если выполнено (13), то выполнено и (11)

$$t_1 + t_2 \overset{\text{def}}{=} 1 \implies \begin{cases} t_1 - 1 = -t_2 \\ 1 - t_2 = t_1 \end{cases} \tag{14}$$

$$x - x_1 \overset{\text{def}}{=} t_1x_1 + t_2x_2 - x_1 = x_1(t_1 - 1) + t_2x_2 \underset{(14)}{=} -t_2x_1 + t_2x_2 = t_2(x_2 - x_1) \tag{15}$$

$$x_2 - x \overset{\text{def}}{=} x_2 - (t_1x_1 + t_2x_2) = (1 - t_2)x_2 - t_1x_1 = t_1x_2 - t_1x_1 = t_1(x_2 - x_1) \tag{16}$$

Подставим (15) и (16) в (13):

$$t_1t_2(x_2-x_1)f'(c_1) \le t_1t_2(x_2-x_1)f'(c_2)$$

То есть нужно проверить, что $f'(c_1) \le f'(c_2)$
При этом, $c_1 \le x \le c_2 \implies c_1 \le c_2 \implies f'(c_1) \le f/(c_2)$

– $\implies$
Пусть f выпукла
Возьмём $a < x_1 < x_2 < b$
Возьмём $x_1 < x < x_2$
Положим $t_1 := \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad t_2 := \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$t_1x_1 + t_2x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2 = \frac{x_1x_2 - xx_1 + xx_2 - x_1x_2}{x_2 - x_1} = x$$

Подставим в (11):

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$\underbrace{\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)}_{=t_1+t_2=1} f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\Big(f(x) - f(x_1)\Big) \le \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\Big(f(x_2) - f(x)\Big)$$

$$(x_2 - x)\Big(f(x) - f(x_1)\Big) \le (x - x_1)\Big(f(x_2) - f(x)\Big)$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{17}$$

Перейдём к пределу:

*

$$\lim_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{18}$$

*

$$\lim_{x \to x_2 - 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2) \tag{19}$$

$$(18), (19) \implies f'(x_2)$$

- $g(x)$
  Рассмотрим $f := -g$

□

Теорема 5 (характеристика выпуклых и вогнутых функций в терминах второй производной)**.**
$f \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f''(x)$
f выпукла $\iff \forall x \in (a,b) \quad f''(x) \ge 0$
$g \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, g''(x)$
g вогнута $\iff \forall x \in (a,b) \quad g''(x) \le 0$

Доказательство. $f'(x)$ возрастает $\iff \forall x \in (a,b) \quad (f')'(x) = f''(x) \ge 0$ □

0.4 Неравенство Йенсена

Теорема 6. $f \in C\big([a,b]\big)$, $\quad f$ выпукла, $\quad \underset{\substack{\forall k=1\ldots n \quad t_k>0 \\ t_1+\ldots+t_n=1}}{\forall t_1, \ldots, t_n,} \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n) \tag{20}$$

$g \in C\big([a,b]\big)$, $\quad g$ вогнута, $\quad \underset{\substack{\forall k=1\ldots n \quad t_k>0 \\ t_1+\ldots+t_n=1}}{\forall t_1, \ldots, t_n,} \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$

$$g(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \geq t_1g(x_1) + t_2g(x_2) + \ldots + t_ng(x_n) \tag{21}$$

Доказательство. **Индукция**

- **База.** $n = 2$ – определение выпуклости
- **Переход.** $n \to n+1$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n + t_{n+1} = 1$$

$$\text{Определим числа } \widetilde{t_n} \coloneqq t_n + t_{n+1}, \quad \widetilde{x_n} = t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} \tag{22}$$

$$(22) \implies \begin{cases} t_1 + \ldots + \widetilde{t_n} = 1 \\ t_1x_1 + \ldots + \widetilde{t_n}\widetilde{x_n} = t_1x_1 + \ldots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} \end{cases}$$

В силу индукционного предположения, $\underbrace{(t_1x_1 + \ldots + \widetilde{t_n}\widetilde{x_n})}_{=f(t_nx_1+\ldots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1})} \leq t_1f(x_1) + \ldots + \widetilde{t_n}f(\widetilde{x_n})$

$$\widetilde{x_n} = \frac{t_n}{\widetilde{t_n}}x_n + \frac{t_{n+1}}{\widetilde{t_n}}$$

$$\widetilde{t_n}f(\widetilde{x_n}) = \widetilde{t_n}f\left(\frac{t_n}{\widetilde{t_n}}x_n + \frac{t_{n+1}\widetilde{t_n}}{x}_{n+1}\right) \leq \widetilde{t_n}\frac{t_n}{\widetilde{t_n}}f(x_n) + \widetilde{t_n}\frac{t_{n+1}}{\widetilde{t_n}}f(x_{n+1}) = t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1})$$

□