

Оглавление

1	Общий алгоритм решения
---	------------------------

2

Глава 1

Общий алгоритм решения

Алгоритм.

1. ОДЗ:

- (а) Школьное ОДЗ (подкоренные выражения, знаменатели, логарифмы)
- (b) В зависимости от вида уравнения:
 - Если уравнение содержит y' , пишем $x \neq C$
 - Если уравнение в симметрической форме, находим особые точки (в них уравнения нет):

$$\begin{cases} M(x, y) = 0 \\ N(x, y) = 0 \end{cases}$$

- (с) Плохие границы (G^* и B^*):

- Нули множителей при производной

- (d) Хорошие границы (\hat{G} и \hat{B}):

- Нестрогие неравенства в школьном ОДЗ (равенства из них)

2. Определяем тип уравнения

3. Решаем в соответствии с алгоритмом для нужного типа

4. Характеризуем граничные решения:

- Теоремы единственности (если применимы)
- Пусть $y = \psi(x)$ – граничное решение, а $y = \varphi(x, C)$ – общее
Ищем C_* такое, что $\forall x_* \quad \psi(x_*) = \varphi(x_*, C_*)$
 - Если C_* нашлось и конечно, то решение особое (т. к. из граничного решения в каждой точке выходит общее)
 - Если C_* не нашлось или бесконечное, то решение частное

5. Решаем ЗК

Особые случаи.

1. Замена переменных:

- Выписываем три замены:

- (а) Прямая:

$$x = u(x, y), \quad y = v(x, y)$$

- (b) Производная (если необходимо) или дифференциал:

$$x' = \dots, \quad y' = \dots \quad \text{или} \quad dx = \dots, \quad dy = \dots$$

- (с) Обратная:

$$u = \dots, \quad v = \dots$$

- Пишем ОДЗ и на прямую и на обратную замены

Если оно меньше \hat{G} или \hat{B} , то:

- Если “отрезается” часть \hat{G} или \hat{B} (хорошей границы), то это может быть граничным решением – нужно проверять отдельно
- Если в ОДЗ входят неравенства вида $u \succ 0$, то см. пункт 2

2. Полушлости

Применяется, если:

- В ОДЗ на замену входят неравенства вида $u(x) \succ 0$
- В ходе решения получили множителем $\text{sign } x$

Порядок действий:

- (а) Проверяем инвариантность **исходного** уравнения относительно u или x

Примечание. Если получили несколько “знакозависимых” переменных, то проверяем инвариантность относительно обеих сразу. Если её нет, то относительно каждой по отдельности

Замечание. Здесь надо учитывать, что $y' = \frac{dx}{dy}$, т. е. y' **не** инвариантна относительно x

- Если инвариантность есть:
 - i. Пишем “Пусть $u > 0$ ” или “Пусть $x > 0$ ”
 - ii. Решаем в этом случае
 - iii. Пишем “Сделаем замену $x = -\tilde{x}$. Так как уравнение инвариантно относительно u (или x), получим то же самое уравнение”
 - iv. В ответе вместо x пишем $|x|$ (или $|u|$ вместо u)
- Если инвариантности нет:
 - В случае $u(x) \succ 0$ в ОДЗ:
 - i. Пишем “Пусть $u > 0$ ”
 - ii. Решаем в этом случае
 - iii. Пишем “Пусть $u < 0$ ”
 - iv. Решаем в этом случае
 - v. В ответ попадают оба решения (каждое со своей ОДЗ)
 - В случае $\text{sign } x$:
 - i. Обозначаем $\sigma := \text{sign } x$
 - ii. Решаем, считая σ за константу
 - iii. В ответе σ не должно быть (скорее всего, она будет множителем при $|x|$ – тогда просто пишем x)

3. Все логарифмы собираем под один. Константу заносим туда же:

$$\ln x + \ln y + C = \ln(xyC)$$

4. Чтобы корень назвать новой буквой, надо, чтобы подкоренное выражение **линейно** зависело от старой переменной
5. Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, её нужно разложить на простейшие