Оглавление

0.1 Продолжаем примеры на аксиомы делимости 1
0.2 Нормальные пространства 1
0.3 Компактификация по Александрову (Павлу Сергеевичу) 3

0.1 Продолжаем примеры на аксиомы делимости

Примеры.

1. $X = \mathbb{R}^2$
   База – шары с выколотым конечным чилом радиусов
   Открытое множество – множество, такое, что $\forall x \quad \exists M_x$ указанного вида
   X хаусдорфово, не регулярно

2. **Пространство Немыцкого:**
   X – замкнутая полуплоскость
   Открытое множество – у любой точки существует окрестность специального вида
   Окрестности:
   - Если точка не на границе полуплоскости – окрестность обычного вида (открытый круг)
   - Если точка на границе полуплоскости – открытый круг, сдвинутый к краю полуплоскости + сама точка (см. рис. 1)

   X регулярно, но не нормально

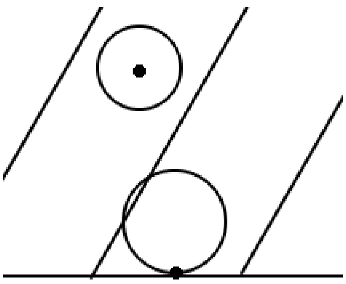

Рис. 1: Пространство Немыцкого

0.2 Нормальные пространства

Теорема 1. Метрическое простанство нормально

Доказательство.

- Докажем, что метрическое пространство хаусдорфово:
  Для этого надо доказать, что выполняется **T2**:

Возьмём $x \neq y$, $\quad \varepsilon := \dfrac{\rho(x,y)}{2}$

$$B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$$

(по неравенству треугольника)

- Регулярность:

$$x_0 \in X, \quad F - \text{замкн.} \implies \exists\, \rho(x_0, F) := \inf_{y\in F} \rho(x,y) > 0 \quad ?$$

Допустим $\inf\limits_{y\in F}(x_0, y) = 0$

$$\implies \exists\, y_n : \rho(x_0, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad y_n \in B(x_0, \varepsilon) \implies$$
$$\implies x_0 \in \operatorname{Cl}\{\, y_n \,\} \subset \operatorname{Cl} F = F$$

$$\varepsilon := \frac{\rho(x_0, F)}{2}, \qquad U_{x_0} = B(x_0, \varepsilon)$$
$$U_F = \bigcup_{y\in F} B(y,\varepsilon) - \text{откр.}$$

- **T4**
F_1, F_2 – замкнутые, хотим, чтобы $\rho(F_1, F_2)$ могло равняться нулю

Пример. $\mathbb{R}^2$, обычная топология

$$\forall x \in F_1 \quad \exists \varepsilon_x := \frac{\rho(x, F_2)}{2} > 0$$
$$\forall y \in F_2 \quad \exists \varepsilon_y := \frac{\rho(y, F_1)}{2} > 0$$

Возьмём $U_{F_1} := \bigcup_{x\in F_1} B(x, \varepsilon_x)$, $\qquad U_{F_2} := \bigcup_{y\in F_2} B(y, \varepsilon_y)$

$$x \in U_{F_1} \cap U_{F_2} \implies z \in B(x,\varepsilon_x) \cap B(y, \varepsilon_y)$$

Пусть, НУО, $\varepsilon_x \geq \varepsilon_y \implies \rho(x,y) < 2\varepsilon_x = \rho(x, F_2)$ Вспомним, что $x \in F_1, y \in F_2$. Получили, что расстояние от x до некоторой точки фигуры F_2 больше, чем расстояние до самой F_2

$\square$

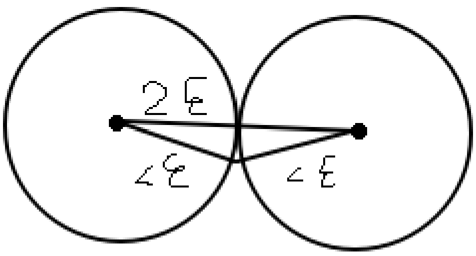

Рис. 2: Доказательство **T2** для метрического пространства

Теорема 2. X – компактно и хаусдорфово $\implies$ X нормально

Замечание. Иногда, “компакт” = “хаусдорфово + компакт”

Доказательство.

- Докажем, что X регулярно
Возьмём $x_0 \in X$, $\quad F$ – замкн. в X ($\implies$ F компактно, в силу хаусдорфовости)
В силу хаусдорфовости,

$$\forall y \in F \begin{Bmatrix} \exists U_{x_0,y} - \text{откр.} \\ \exists V_y - \text{откр.} \end{Bmatrix} : U_{x_0,y} \cap V_y = \emptyset$$

Возьмём $\{V_y\}_{y\in F}$ – открытое покрытие $\implies \exists y_1, ..., y_n \in F$
$\{V_{y_i}\}$ – конечное подпокрытие F

$$U_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_0, y_i} \text{ – откр. }, \qquad U_F := \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

- Нормальность:
  F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества
  Возьмём $x \in F_1$, $\underset{\text{окр. } x}{U_x}$, $\underset{\text{окр. } F_2}{V_x}$ $: U_x \cap V_x = \emptyset$

$$\{U_x\}_{x\in F_1} \text{ – покр. } F_1 \implies \exists x_1, ..., x_n \in F_1 : \{U_{x_i}\}_{i=1}^{k} \text{ – покр. } F_1$$

$$U_{F_1} := \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}, \qquad U_{F_2} := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

□

0.3 Компактификация по Александрову (Павлу Сергеевичу)

Определение 1. X называется локально компактным, если $\forall x_0 \in X \quad \exists U_{x_0} : \operatorname{Cl} U_{x_0}$ – комп.
(у любой точки есть окрестность с компактным замыканием)

Примеры.

1. $\mathbb{R}^n$ локально компактно
2. $\mathbb{Q}$ не локально компактно

Теорема 3 (Александрова)**.** X локально компактно + хаусдорфово $\implies \exists \widehat{X} := X \cup \{\infty\}$, X – подпространство $\widehat{X}$
$\widehat{X}$ – комп. + хаусдорфово

Доказательство. По условию, $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$
Открытые в $\widehat{X}$:

- $U \not\ni \infty \implies U$ откр. в $\widehat{X} \iff U$ откр. в X
- $U \ni \infty \implies U$ откр. в $\widehat{X} \iff \widehat{X} \setminus U (= X \setminus U)$ компактно
- Докажем, что X – подпространство $\widehat{X}$:
  Нужно доказать, что если $\infty \in U$, то $U \setminus \{\infty\}$ – откр. в X

$$X \setminus \big(U \setminus \{\infty\}\big) \text{ – комп. в } X \xRightarrow[X \text{ – хаусд.}]{} X \setminus \big(U \setminus \{\infty\}\big) \text{ – замкн. } \implies U \setminus \{\infty\} \text{ – откр.}$$

- Очевидно, что X компактно
- Докажем, что X хаусдорфово:
  - $x_0, y_0 \in \widehat{X} \setminus \{\infty\} \implies$ ОК (разделяем в X)
  - $x_0 \in \widehat{X} \setminus \{\infty\}, y_0 = \infty$:

$$\exists U_{x_0} \subset X : \operatorname{Cl} U_{x_0} \text{ – копм.}$$

$$U_{y_0} := X \setminus \operatorname{Cl} U_{x_0} \text{ – откр. в } \widehat{X} \text{ и } \textit{сод. } y_0 = \infty$$

□

Теорема 4 (Урысона (о функциональной делимости))**.** X – норм., F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества

$$\implies \exists \text{ непр. } f : X \to \mathbb{R} : \begin{cases} f\Big|_{F_1} = 0 \\ f\Big|_{F_2} = 1 \end{cases}$$

Доказательство. Без доказательства □

Аксиома 1 (T3.5). $\forall F_1, F_2$ – замкн. неперес. $\quad \exists f : X \to \mathbb{R}$ – непр. $: \begin{cases} f\Big|_{F_1} = 0 \\ f\Big|_{F_2} = 1 \end{cases}$