Оглавление

Глава 1

Графы

1.1 Обход в ширину и обход в глубину

Алгоритм (обход в ширину). $G = \langle M, N \rangle$
Задан корень $x \in M$
$M = M_0 \cup \underbrace{M_1}_{\text{фронт}} \cup M_2$
Начальное состояние: $M_0 = \emptyset, \quad M_1 = \{ x \}$
Алгоритм работает, пока фронт не пуст

1. Выбираем $y \in M_1$
2. Просматриваем все рёбра $e = (y, v) \in N_y$ (выходящие из y):
   (a) $v \in M_0$ – ничего не делаем
   (b) $v \in M_1$ – ничего не делаем
   (c) $v \in M_2$ – перемещаем v в M_1
3. Перемещаем y в M_0

Алгоритм (обход в глубину). $G = \langle M, N \rangle$
Задан корень $x \in M$

```
for u \in V
{
    color(u) = white
}
for u \in V
{
    if color(u) == white
    {
        DFS(u)
    }
}
DFS(u)
color(u) = gray
for (для всех дуг e = (u, w))
{
    if color(w) == white
    {
        DFS(w)
    }
}
color($u$) = black
```

Теорема 1 (о связном подграфе). В связном графе $G = \langle M, N \rangle$ можно выделить связный подраф $\overline{G} = \langle M, N' \rangle, \quad N' \subset N$, такой что:

- $|N'| = |M| - 1$ (Вершины из $0 : k$, рёбра из $1 : k$)
- $\mathrm{num}(u) = \max \{ \mathrm{num}(\mathrm{beg}(u)), \mathrm{num}(\mathrm{end}(u)) \}$

Доказательство. □

Следствие. Если $|N| < |M| - 1$, то граф не связный

Задача. Задан связный граф $G = \langle M, N \rangle, \quad l(u), \quad u \in N$. Найти остовное дерево $\overline{G} = \langle M, N' \rangle$: $\sum_{u \in N'} l(u) \to \min$

Алгоритм (Краскалла).

1. Сортируем дуги: $l(u_1) \leq l(u_2) \leq ... \leq l(u_n), \qquad U_0 \neq \emptyset$
2. ```
   for i := 1 to n
          Рассматриваем ребро u_i
          Пытаемся доавить в U_i-1:
          - Если не получили цикла, то U_i = U_i-1 + { u_i }
          - Если получили цикл, то U_i = U_i-1
      end for
   ```
   ```