Оглавление

Глава 1

1.1 Связность

Определение 1. X – топологическое пространство. X называется несвязным, если

$$\exists \underset{U_i \neq \emptyset}{U_1, U_2 \in \Omega_X} : \begin{cases} U_1 \cap U_2 = \emptyset \\ U_1 \cup U_2 = X \end{cases}$$

Иначе – связное

Замечание. Несвязность означает, что U_1, U_2 одновременно и открытые, и замкнутые
Связность означает, что нет нетривиальных открыто-замкнутых подмножеств

Определение 2. (X, Ω) – топологическое пространство, $A \subset X$. A называется связным, если оно связно в индуцированной топологии, т. е.

$$\forall U_1, U_2 \in \Omega_X \quad \left.\begin{matrix} U_1 \cup U_2 \supset A \\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset \end{matrix}\right\} \implies \left[\begin{matrix} U_1 \cap A = \emptyset \\ U_2 \cap A = \emptyset \end{matrix}\right.$$

Примеры.

1. Дискретное пространство более чем из одной точки **несвязно** (любое множество будет открытым и замкутым одновременно)
2. Аннидискретное пространство **связно** (всего два открытых множества – $\emptyset$ и X)
3. Стрелка **связна** (любые два непустых открытых множества пересекаются)
4. Зариского:
   - Если пространство бесконечно – **связно**
   - Если пространство конечно – **несвязно** (конечное пространство Зариского – то же самое, что дискретное пространство)
5. Стандартная топология:
   - $\mathbb{R}$ **связно**
   - $[a, b]$ **связно**
   - $\mathbb{Q}$ **несвязно**

     Доказательство. $U_1 = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, \quad U_2 = (\sqrt{2}, +\infty) \cap Q$ – граница не принадлежит ни U_1, ни U_2 □

     Замечание. Отсюда видно, что любое подмножество $\mathbb{Q}$ **несвязно**

Теорема 1. A связно, $\quad A \subset B \subset \operatorname{Cl} A \implies B$ связно

Доказательство. Пусть B несвязно, т. е.

$$\exists U_1, U_2 \in \Omega_X : \begin{cases} U_1 \cup U_2 \supset B \\ U_1 \cap U_2 \cap B = \emptyset \\ U_1 \cap B \neq \emptyset \\ U_2 \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

$$A \subset B \implies \begin{cases} U_1 \cup U_2 \supset A \\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset \end{cases} \xRightarrow[(A \text{ связно})]{} \text{считаем } A \cap U_1 = \emptyset \implies U_2 \supset A$$

Возьмём $F := \operatorname{Cl} A \setminus U_1$
F замкнуто, $F \supset A$ – ↯ (замыкание не наименьшее) □

Следствие. A связно $\implies \operatorname{Cl} A$ связно

Теорема 2. A, B связны, $A \cap B \neq \emptyset \implies A \cup B$ связно

Доказательство. Пусть U_1, U_2 открытые, $U_1 \cup U_2 \supset A \cup B$, $U_1 \cap U_2 \cap (A \cup B) = \emptyset$, $U_1 \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, $U_2 \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
Возьмём $x_0 \in A \cup B$
НУО считаем, что $\begin{cases} x_0 \in U_1 \\ x_0 \notin U_2 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} U_1 \cup U_2 \supset A \\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset \end{matrix}\right\} \xRightarrow[A \text{ связно}]{} \left[\begin{matrix} U_1 \cap A = \emptyset \\ U_2 \cap A = \emptyset \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} U_1 \cup U_2 \supset B \\ U_1 \cap U_2 \cap B = \emptyset \end{matrix}\right\} \xRightarrow[B \text{ связно}]{} \left[\begin{matrix} U_1 \cap B = \emptyset \\ U_2 \cap B = \emptyset \end{matrix}\right.$$

□

Следствие. $A_1, A_2, ..., A_n$ – связные
Построим граф с вершинами из $\{ A_n \}$
Если $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, то проводим ребро
Если граф связный, то $\bigcup_{i=1}^n A_i$ связно

Теорема 3. $(0,1)$ связен

Доказательство. Пусть $(0,1)$ несвязен $\implies \exists$ открытые $U_1, U_2 : \begin{cases} U_1 \cup U_2 \supset (0,1) \\ U_1 \cap U_2 \cap (0,1) = \emptyset \end{cases}$
Возьмём $a \in U_1 \cap (0,1)$, $b \in U_2 \cap (0,1)$. Считаем $a < b$
Положим $x_* := \sup \{ x \in U_1 \mid x < b \}$

$$\left[\begin{matrix} x_* \in U_1 \implies \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \subset U_1 \implies b > x_* + \varepsilon \quad ↯ \quad \sup \\ x_* \in U_2 \implies \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) \subset U_2 \implies x_* \text{ не точная верхняя граница } (x_* - \varepsilon \text{ точнее}) \end{matrix}\right.$$

□

Следствие. $[0,1]$ связен (как замыкание $[0,1]$)

Теорема 4. $f : X \to Y$ – непрерывная, $A \subset X$ – связно $\implies f(A)$ связно в Y

Доказательство. Пусть $f(A)$ несвязно, т. е.

$$\begin{cases} f(A) \subset U_1 \cup U_2 \\ U_1 \cap U_2 \cap f(A) = \emptyset \\ U_1 \cap f(A) \ni y_1 \\ U_2 \cap f(A) \ni y_2 \end{cases}$$

Положим $V_1 \coloneqq f^{-1}(U_1), \quad V_2 \coloneqq f^{-1}(U_2)$

$$V_1 \cup V_2 = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cup U_2) \supset f^{-1}\big(f(A)\big) \supset V_1 \cup V_2 \cup A = \emptyset \supset A$$

□

Следствие. $X \simeq Y, \quad X$ связно $\implies Y$ связно

Теорема 5. $X \times Y$ связно $\iff X, Y$ связны

Доказательство.

- $\implies$

  Возьмём отображения $\begin{cases} p_X : X \times Y \to X & p_X(x, y) = x \\ p_Y : X \times Y \to Y & p_Y(x, y) = y \end{cases}$

- $\impliedby$

  X, Y несвязные $\implies \begin{cases} X \times Y = U_1 \cup U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \emptyset \end{cases}$

  Возьмём $(x_1, y_1) \in U_1, \quad (x_2, y_2) \in U_2$

  НУО считаем $(x_1, y_2) \in U_1$

  $X \times \{ y_2 \} \simeq X$ – связная, а U_1, U_2 разбивают $X \times \{ y_2 \}$ – ↯

□

1.1.1 Компоненты связности

Определение 3 (компонента связности точки).

$$K_a \coloneqq \bigcup_{\substack{a \in A \\ A \text{ связно}}} A \text{ – связно}$$

Утверждение 1. $K_a = K_b$ или $K_a \cap K_b = \emptyset$

Доказательство. Если $K_a \neq K_b, K_a \cap K_b \neq \emptyset \implies K_a \cup K_b$ связно □

Утверждение 2. K_a замкнута