Оглавление

Глава 1

1.1 Продолжение чего-то

Определение 1. $(X,\rho),(Y,d), \quad f: X \to Y$
f непрерывна, если $\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : f\big(B(x_0,\delta)\big) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$

Теорема 1. $(X,\rho),(Y,d)$ – метрические пространства, $f: X \to Y$ – непрерывна
f непрерывна $\iff$ прообраз $\forall$ открытого U открыт

Доказательство.

- $\implies$
  $\forall\ U$ – открытое в Y. Нужно жоказать, что $f^{-1}(U)$ открыто в X

$$\forall x_0 \in f^{-1}(U) \quad f(x_0) \in U \implies \exists\, \varepsilon > 0 : B\big(f(x_0),\varepsilon\big) \subset U \implies \\ \implies \exists\, \delta_{\varepsilon,x_0} > 0 : f\big(B(x_0,\delta)\big) \subset B\big(f(x_0),\varepsilon\big) \subset U$$

- $\impliedby$

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad U := B\big(f(x_0),\varepsilon\big) \quad f^{-1}(U) \text{ открыт} \quad x_0 \in f^{-1}(U) \\ \exists\, \delta > 0 : B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(U) = B(f(x_0),\varepsilon) \implies B(x_0,\varepsilon) \subset f^{-1}\big(B(f(x_0),\varepsilon)\big) \implies \\ \implies f\big(B(x_0,\delta)\big) \subset B\big(f(x_0),\varepsilon\big)$$

$\square$

Определение 2. $(X,\Omega_X),(Y,\Omega_Y)$ – топлогические пространства, $f: X \to Y$
f называется непрерывной, если $\forall U \in \Omega_Y \quad f^{-1}(U) \in \Omega_X$

1.2 Гомеоморфизм

Определение 3. $(X,\Omega_X),(Y,\Omega_Y), f: X \to Y$
f – гомеоморфизм, если:

1. f непрерывно
2. f биекция
3. f^{-1} непрерывно

X и Y называются гомеоморфными, если между ними существует гомеоморфизм

Обозначение. $X \simeq Y$

Примеры.

1. $[0,2\pi) \to S^1, \quad S^1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$

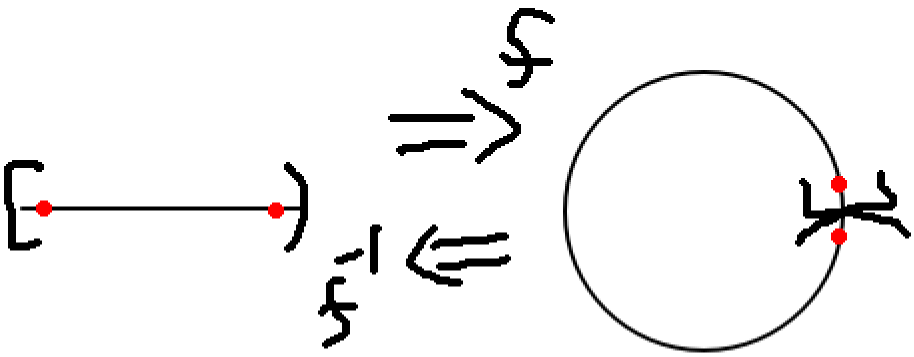

Рис. 1.1: Отображение $[0, 2\pi) \to S^1$ и обратное к нему
Точки, выделенные красным в одном случае далеко друг от друга, а в другом – близко

$f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ – непрерывно, биективно, обратное разрывно (см. рис. 1.1)

2. $(X, \Omega_1), (X, \Omega_2)$ – топологические пространства (на одном множестве две топологии), $\Omega_1 \neq \Omega_2$, $\Omega_2 \subset \Omega_1$ (говорят, что Ω_1 – более сильная (более тонкая) топология, чем Ω_2, $f : X \to X : f(x) = x$
f – биекция, непрерывно

Чатсные примеры на $\mathbb{R}$. Ω_1 – дискретная, Ω_2 – антидискретная, Ω_3 – стандартная, Ω_4 – Зариского, Ω_5 – стрелка

$\Omega_1 \subset \Omega_3 \begin{matrix} \subset \Omega_4 \\ \subset \Omega_5 \end{matrix} \subset \Omega_2$

Примечание. $f : X \to Y$, на X дискретная $\implies$ f непрерывна
$f : X \to Y$, на Y антидискретная $\implies$ f непрерывна

Примеры.

1. $(a, b) \simeq (c, d)$
$$f(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c$$
(Или любое другое непрерывное возрастающее, для которого $f(a) = c, \; f(b) = d$)

2. $(a, b) \simeq \mathbb{R}$ (так как $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \simeq \mathbb{R}$, через tg)

Утверждение 1. Гомеоморфизм – отношение эквивалентности

Доказательство.

- Рефлексивность: $X \simeq X, \quad f(x) = x$
- Симметричность: $f : X \to Y$ – гомеоморфизм $\implies$ $f^{-1} : Y \to X$ – гомеоморфизм
- Тринзитивность: $f : X \to Y, g : Y \to Z$ – гомеоморфизм $\implies$ $g \circ f : X \to Z$ – гомеомрфизм

□

Определение 4. Свойство топологического пространства называется топологическим, если оно не меняется при гомеоморфизме