Оглавление

0.1 Ещё немного про натуральное уравнение

Вопрос 1. Верно ли что для всяких k и æ существует кривая, задаваемая ими?

Ответ. Только для положительных k

Доказательство. Составляем дифур, доказываем, что решение существует □

Вопрос 2. Можно ли нарезать болты как-то, кроме (классической) винтовой спирали?

Ответ. Нельзя

Доказательство. Резьба болта и резьба гайки должны совмещаться в любой точке
Это означает постоянство кривизны и кручения
А мы доказали, что для заданных кривизны и кручения существует только одна кривая (с точностью до положения в пространстве) □

Глава 1

Дифференциальная геометрия поверхностей

Немного истории. Изучение поверхностей началось с Гаусса:
Военные обратились к Гауссу с вопросом “почему карта искажает расстояния и можно ли нарисовать карту без искажений”
Гаусс доказал, что нельзя

Примечание. Гаусс доказал, что сфера не изоморфна плоскости

1.1 Поверхности

Определение 1. $D \subset \mathbb{R}^2$ – область (открытое + связное)
$\overrightarrow{r} : D \to \mathbb{R}^3$ – вектор-функция (гладкая)
$\overrightarrow{r}$ называется параметризацией

Определение 2. Диффеоморфизм – гладкий гомеоморфизм, обратное тоже гладкое

Примечание. Гдакость обозначает **нужное количество** непрерывных производных
Нужное количество включает в себя “нужное для равенства интересующих нас частных производных”

Определение 3. $\rho : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^3$ – другая вектор-функция

$$r(D) = \rho(\widetilde{D}) \implies \exists \quad \underbrace{\rho^{-1} \circ r}_{\text{диффеоморфизм}} \quad : D \to \widetilde{D}$$

Тогда r и ρ – разные параметризации одной поверхности

Определение 4. Поверхностью будем называть класс эквивалентности соответствующих функций

Будем предполагать, что задана координатная сетка
Её внутренние координаты – u и v

Определение 5. Поверхность назвыается регуляной, если $\frac{\partial r}{\partial u} \nparallel \frac{\partial r}{\partial v}$

Замечание. Это – касательные векторы к координатным прямым
Это означает, что координатная сетка нигде не имеет нулевого угла между координатными линиями

Везде, где не оговорено особо, считаем что поверхность регулярна

Пример (нерегулярной поверхности)**.** Есть какая-нибудь кривая
К каждой её точке проводим касательую прямую
Если кривая не плоская, то эти касательные будут образовывать некоторую поверхность
Угол между этими касательными везде будет нулевой

Примеры (как поверхность задавать).

1. В явном виде: $z = f(x, y)$
   Поверхность является графиком такой функции

2. Неявно: $F(x, y, z) = 0$
   По теореме о неявной функции, в определённых случаях это можно превратить в явную функцию в некоторых окрестностях

3. Параметрически:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

1.2 Касательная плоскость

[. как задаётся кривая на поверхности] Любая точка кривой лежит на поверхности
Тогда мы можем применить к ней r^{-1} и "спустить" её на D
Получим координаты $u(t), v(t)$
Они называются внутренними координатами кривой на поверхности

Определение 6. Пусть $u(t), v(t)$ – внутренние координаты кривой на поверхности
$\overrightarrow{r}\Big(u(t), v(t)\Big)$ – кривая на поверхности
$\left.\dfrac{\mathrm{d}\ \overrightarrow{r}}{\mathrm{d}\ t}\right|_{t=t_0}$ – касательный вектор

Определение 7. Касательная плоскость к поверхности – множество касательных векторов в данной точке

Утверждение 1. Это плоскость с базисом $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$

Обозначение. $r_u \coloneqq \frac{\partial r}{\partial u}$ $(= r'_u)$

Доказательство. Распишем и всё получится:
Касательный вектор – $\left.\dfrac{\mathrm{d}\ \overrightarrow{r}}{\mathrm{d}\ t}\right|_{t=t_0}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\ \overrightarrow{r}}{\mathrm{d}\ t}\right|_{t=t_0} = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}\ u}{\mathrm{d}\ t} + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}\ v}{\mathrm{d}\ t}$$

Это линейная комбинация $\frac{\partial t}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$
Верно ли, что $\alpha r_u + \beta r_v$ является касательным вектором?
Верно, для кривой

$$\begin{cases} u = \alpha(t + t_0) \\ v = \beta(t + t_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t = \alpha \\ v_t = \beta \end{cases}$$

□

$$r_u \times r_v \neq 0$$

$n \coloneqq \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ – вектор нормали
(r_u, r_v, n) – правая тройка

Примеры.

1. Явное задание:
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases}$$
Это частный случай параметрического задания

2. Неявное задание:
$$\nabla f(x,y,z) \parallel \overrightarrow{n}$$
Нормальная прямая будет иметь уравнение:
$$\frac{x - x_0}{f_x\Big|_{x_0,y_0,z_0}} = \frac{y - y_0}{f_y\Big|_{x_0,y_0,z_0}} = \frac{z - z_0}{f_z\Big|_{x_0,y_0,z_0}}$$
Касательная плоскость:
$$f_x\Big|_{x_0,y_0,z_0}(x - x_0) + f_y\Big|_{x_0,y_0,z_0}(y - y_0) + f_z\Big|_{x_0,y_0,z_0}(z - z_0) = 0$$

3. Параметрическое задание:
$$r_u = (x_u, y_u, z_u), \qquad r_v = (x_v, y_v, z_v)$$
$$n \parallel \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$
Нормальная прямая:
$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$
Касательная плоскость:
$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

> **Замечание.** Мы переставили столбцы, чтобы избавиться от знаков

1.3 Длина кривой на поверхности

Определение 8. Коэффициенты I квадратичной формы поверхности:
$$\begin{cases} E := |r_u|^2 = (r_u, r_u) \\ F := (r_u, r_v) \\ G := (r_v, r_v) = |r_v|^2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{r} = \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big)$$
$$u = u(t), \qquad v = v(t)$$

$$l = \int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}\ r}{\mathrm{d}\ t}\right| \mathrm{d}\,t = \int_a^b |r_u u_t + r_v v_t| \,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \sqrt{(r_u u_t + r_v v_t; r_u u_t + r_v v_t)}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \int_a^b \sqrt{(r_u, r_u)u_t^2 + 2(r_u, r_v)u_t v_t + (r_v, r_v)v_t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \sqrt{Eu_t^2 + 2Fu_t v_t + Gv_t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

I форма:
$$Eu_t^2 + 2Fu_t v_t + Gv_t^2, \qquad E, F, G \text{ -- функции от } u, v$$

Замечание.

$$\left.\begin{aligned} &f = 0 \\ &E, G > 0 \end{aligned}\right\} \iff \text{координатная сетка ортогональна}$$

$E = 1 \iff$ координатные линии $v = \mathrm{const}$, т. е. находятся в натуральной параметризации

Пример (как параметризовать сферу)**.** Координаты на сфере обычно называются широта и долгота
Долгота меяется от какого-то нулевого меридиана
Долгота – угол φ, широта – угол ψ
Сферическая система координат:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\psi \\ y = R\sin\varphi\cos\psi \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$