

Оглавление

1	1	5
1.1	527	5
1.1.1	a	5
1.1.2	b	7
1.1.3	c	7
1.1.4	d	9
1.1.5	e	10
1.2	528	12
1.3	535	12
1.3.1	a	12
1.3.2	b	13
1.3.3	c	14
1.4	Задачник Проскурятова	15
1.4.1	1175	15
1.4.2	1187	17
1.5	Задачник Гиниятовой	17
1.5.1	195	17
1.6	mathproblems.ru	18
1.6.1	1951	18
1.6.2	1961	19
1.6.3	1971	19
1.7	Варианты контрольной	19
1.7.1	1	19
1.7.2	2	21
1.7.3	3	22
1.7.4	4	23
1.8	prep	24
2	2	25
2.1	624	25
2.1.1	a	25
2.1.2	b	25
2.1.3	c	26
2.1.4	d	26
2.1.5	e	27
2.1.6	f	27
2.1.7	g	28
2.1.8	h	28
2.1.9	i	28
2.2	626	28
2.2.1	a	28
2.2.2	b	29
2.2.3	c	30
2.2.4	d	31
2.3	627	31
2.3.1	a	31
2.4	628	32
2.4.1	a	32
2.4.2	b	32

2.5	629	33
2.5.1	с	33
2.6	Варианты контрольной	33
2.6.1	1	33
2.6.2	2	34
3	3	35
3.1	838	35
3.2	рер	35
3.3	Задачник Кузнецова	36
3.3.1	3.1	36
3.4	Варианты из контрольной	36
3.4.1	1	36
3.4.2	2	36
3.4.3	3	36
3.4.4	4	37
4	4	38
4.1	Задачник Горковца	38
4.1.1	1	38
4.1.2	2	38
4.1.3	3	39
4.1.4	4	39
4.1.5	5	40
4.1.6	6	41
4.1.7	7	41
4.1.8	8	42
4.1.9	10	44
4.1.10	11	45
4.1.11	12	46
4.1.12	13	46
4.1.13	14	47
4.1.14	15	48
4.1.15	16	48
4.1.16	17	49
4.2	studylib.ru	50
4.2.1	2	50
4.2.2	3	51
4.2.3	4	51
4.3	yagubov.ru	52
4.4	Варианты контрольной	53
4.4.1	1	53
4.4.2	2	55
4.4.3	3	56
4.4.4	4	57
4.5	рер	58
5	Коллок. 1	59
5.1	1	59
5.2	2	60
5.3	3	60
5.4	4	60
5.5	5	61
5.6	6	61
5.7	7	61
5.8	11	61

6	Коллок. 2	63
6.1	1	63
6.2	2	64
6.3	3	64
6.4	4	64
6.5	5	65
6.6	6	65
6.7	7	66
7	Умножение матриц	67
7.1	$A_{2 \times 1} \cdot B_{1 \times 2}$	67
7.2	$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 1}$	67
7.3	$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}$	67
7.4	$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 1}$	67
7.5	$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 3}$	67
8	Ядро линейного оператора	68
8.1	Греческий сайт	68
9	Приведение матрицы к диагональному виду	69
9.1	69
9.2	70
9.3	72
9.4	527	73
9.4.1	a	73
9.4.2	b	73
9.4.3	c	73
9.4.4	d	74
9.4.5	e	75
9.5	535	77
9.5.1	a	77
9.5.2	b	78
9.5.3	c	79
9.5.4	d	80
9.5.5	e	81
9.5.6	f	82
9.5.7	g	83
9.5.8	h	84
9.5.9	i	85
9.5.10	j	85
9.5.11	k	86
9.5.12	l	87
9.5.13	m	87
9.6	prer	88
10	Разложение дроби на простейшие	89
10.1	Пример из Фаддеева	89
10.2	Задача с допсы	89
10.2.1	89
10.3	626	90
10.3.1	a	90
10.3.2	b	90
10.3.3	c	91
10.3.4	d	91
10.3.5	e	92
10.3.6	f	92
10.3.7	g	93
10.3.8	h	94
10.3.9	i	94
10.4	628	95
10.4.1	a	95
10.4.2	b	95

10.4.3 с	95
11 ДЗ к пересдаче	96
11.1 Вычисление варианта	96
11.2 1	96
11.2.1 1	96
11.2.2 2	96
11.3 2	97
11.3.1 1	97
11.3.2 2	97
11.4 3	98
11.4.1 1	98
11.4.2 2	98
11.5 4	99
11.5.1 1	99
11.5.2 2	99

Глава 1

1

1.1 527

1.1.1 а

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \cdot \left((2-\lambda)(5-\lambda) - 2 \cdot 2 \right) - (5-\lambda) + 2 \cdot 0 = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 \cdot (1-\lambda) - 5 + \lambda = \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 + \lambda - 5 + \lambda = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 9 + 2\lambda = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 2(5-\lambda) + 1 = \\ &= (5-\lambda) \left((1-\lambda)(2-\lambda) + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ (1-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2+1=0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ \lambda^2-3\lambda+3=0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ \lambda^2-3\lambda+\left(\frac{3}{2}\right)^2+3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ \left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2+3-\frac{9}{4}=0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ \left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{4} \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ \left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ \lambda-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda = 5 \\ \lambda=\frac{3+\sqrt{3}i}{2} \\ \lambda=\frac{3-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• $\lambda = 5$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-5 & 1 & 0 \\ 1 & 2-5 & 2 \\ 0 & 2 & 5-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x + y = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$\begin{cases} -4x = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x &= 0 \\
2z &= 0 \\
z &= 0 \\
\vec{u}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $\lambda = \frac{3+\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{3+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \frac{3+\sqrt{3}i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 5 - \frac{3+\sqrt{3}i}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2-3+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{4-3+\sqrt{3}i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & \frac{10-3+\sqrt{3}i}{2} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & \frac{7+\sqrt{3}i}{2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}y + 2z = 0 \\ 2y + \frac{7+\sqrt{3}i}{2}z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-1 + \sqrt{3}i)x + 2y = 0 \\ 2x + (1 + \sqrt{3}i)y + 4z = 0 \\ 4y + (7 + \sqrt{3}i)z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2y}{-1+\sqrt{3}i} \\ z = -\frac{4y}{7+\sqrt{3}i} \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \frac{3-\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{cases} (-1 - \sqrt{3}i)x + 2y = 0 \\ 2x + (1 - \sqrt{3}i)y + 4z = 0 \\ 4y + (7 - \sqrt{3}i)z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2y}{1+\sqrt{3}i} \\ z = -\frac{4y}{7-\sqrt{3}i} \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = \frac{4}{1-3i^2} + 1 + \frac{16}{7-3i^2} = -\frac{4}{2} + 1 + \frac{16}{4} = -2 + 1 + 4 \neq 0$$

Воспользуемся ортогонализацией Грама-Шмидта:

$$\vec{v}_2 := \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 &:= \vec{u}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{u}_3 = \vec{u}_3 - \frac{(\vec{u}_3, \vec{v}_2)}{(\vec{v}_2, \vec{v}_2)} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{\frac{4}{1-3} + 1 + \frac{16}{7-3}}{\frac{4}{(1-\sqrt{3}i)^2} + 1 + \frac{16}{(7+\sqrt{3}i)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{(-2+1+4)(1-\sqrt{3}i)^2(7+\sqrt{3}i)^2}{4(7+\sqrt{3}i)^2 + (1-\sqrt{3}i)^2(7+\sqrt{3}i)^2 + 16(1-\sqrt{3}i)^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(1-2\sqrt{3}i+3)(49+14\sqrt{3}i+3)}{4(49+14\sqrt{3}i+3) + (1-2\sqrt{3}i+3)(49+14\sqrt{3}i+3) + 16(1-2\sqrt{3}i+3)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(2-\sqrt{3}i)(26+7\sqrt{3}i)}{2(26+7\sqrt{3}i) + (2-\sqrt{3}i)(26+7\sqrt{3}i) + 8(2-\sqrt{3}i)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(52+14\sqrt{3}i-26\sqrt{3}i-21)}{52+14\sqrt{3}i+52+14\sqrt{3}i-26\sqrt{3}i-21+16-8\sqrt{3}i} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(31-12\sqrt{3}i)}{99-6\sqrt{3}i} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(31-12\sqrt{3}i)}{3(33-2\sqrt{3}i)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ -\frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} - \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 - \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} + \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{(33-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) - (31-12\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(33-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\ \frac{33-2\sqrt{3}i-31+12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 4 \cdot \frac{- (33-2\sqrt{3}i)(7+\sqrt{3}i) + (31-12\sqrt{3}i)(7-\sqrt{3}i)}{(7-\sqrt{3}i)(33-2\sqrt{3}i)(7+\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{33-33\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+6-31-31\sqrt{3}i+12\sqrt{3}i+36}{(1-3)(33-2\sqrt{3}i)} \\ 2 \cdot \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 4 \cdot \frac{-231-33\sqrt{3}i+14\sqrt{3}i+6+217-31\sqrt{3}i-84\sqrt{3}i+36}{(49-3)(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{22-27\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 2 \cdot \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 4 \cdot \frac{14-67\sqrt{3}i}{23(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{22-27\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ \frac{2(14-67\sqrt{3}i)}{23(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{1-\sqrt{3}i} & -\frac{22-27\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 0 & 1 & \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 0 & -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} & \frac{2(14-67\sqrt{3}i)}{23(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} \\
&5x_1^2 + \frac{3+\sqrt{3}i}{2}x_2^2 + \frac{3-\sqrt{3}i}{2}x_3^2
\end{aligned}$$

1.1.2 b

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + (-2) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot (4-\lambda) \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) \cdot (1-\lambda) - (1-\lambda) \cdot 0 \cdot 0 = \\
&= (1-\lambda)^2(4-\lambda) - (4-\lambda) - 4 \cdot (1-\lambda) = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 4 + \lambda - 4 + 4\lambda = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - (8-5\lambda)
\end{aligned}$$

1.1.3 c

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + (1/2)^3 + (1/2)^3 - (-\lambda) \cdot (1/2)^2 \cdot 3 = -\lambda^3 + 2 \cdot \frac{1}{2^3} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} = -\lambda^3 + 1/4 + 3/4 =$$

$$= 1 - \lambda^3 = (1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

• $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{vmatrix}$$

.....

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

• $\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} (1 + i\sqrt{3})x + y + z = 0 \\ x + (1 + i\sqrt{3})y + z = 0 \\ x + y + (1 + i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{y + z}{1 + i\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \frac{y+z}{1+i\sqrt{3}} + (1 + i\sqrt{3})y + z = 0 \\ \frac{y+z}{1+i\sqrt{3}} + y + (1 + i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z + (1 + i\sqrt{3})^2 y + (1 + i\sqrt{3})z = 0 \\ y + z + (1 + i\sqrt{3})y + (1 + i\sqrt{3})^2 z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 + (1 + i\sqrt{3})^2\right)y + (2 + i\sqrt{3})z = 0 \\ (2 + i\sqrt{3})y + \left(1 + (1 + i\sqrt{3})^2\right)z = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1 + (1 + i\sqrt{3})^2}{2 + i\sqrt{3}}y = \frac{1 + 1 + 2i\sqrt{3} + i^2 \cdot 3}{2 + i\sqrt{3}}y = \frac{2 + 2i\sqrt{3} + 3}{2 + i\sqrt{3}}y = \frac{5 + 2i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}y$$

$$y = \frac{2 + i\sqrt{3}}{5 + 2i\sqrt{3}}z$$

$$x = \frac{y + \frac{5+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}y}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{1 + \frac{5+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}}{1 + i\sqrt{3}}y = \frac{\frac{2+i\sqrt{3}+5+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}}{1 + i\sqrt{3}}y = \frac{7 + 3i\sqrt{3}}{(2 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}y =$$

$$= \frac{7 + 3i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i^2 \cdot 3}y = \frac{7 + 3i\sqrt{3}}{5 + 3i\sqrt{3}}y$$

$$x = \frac{\frac{2+i\sqrt{3}}{5+2i\sqrt{3}}z + z}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}+5+2i\sqrt{3}}{(5+2i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}z = \frac{7+3i\sqrt{3}}{5+5i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}+2i^2 \cdot 3}z = \frac{7+3i\sqrt{3}}{11+7i\sqrt{3}}z$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5+3i\sqrt{3}}{7+3i\sqrt{3}} \\ \frac{11+7i\sqrt{3}}{7+3i\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+3i\sqrt{3} \\ 5+3i\sqrt{3} \\ 11+7i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

• $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{cases} (1-i\sqrt{3})x + y + z = 0 \\ x + (1-i\sqrt{3})y + z = 0 \\ x + y + (1-i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{y+z}{1-i\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \frac{y+z}{1-i\sqrt{3}} + (1-i\sqrt{3})y + z = 0 \\ \frac{y+z}{1-i\sqrt{3}} + y + (1-i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z + (1-i\sqrt{3})^2y + (1-i\sqrt{3})z = 0 \\ y + z + (1-i\sqrt{3})y + (1-i\sqrt{3})^2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 + (1-i\sqrt{3})^2\right)y + (2-i\sqrt{3})z = 0 \\ (2-i\sqrt{3})y + \left(1 + (1-i\sqrt{3})^2\right)z = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1 + (1-i\sqrt{3})^2}{2-i\sqrt{3}}y = \frac{1+1-2i\sqrt{3}+i^2 \cdot 3}{2-i\sqrt{3}}y = \frac{2-2i\sqrt{3}+3}{2-i\sqrt{3}}y = \frac{5-2i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}y$$

$$y = \frac{2-i\sqrt{3}}{5-2i\sqrt{3}}z$$

$$x = \frac{y + \frac{5-2i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}y}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2-i\sqrt{3}+5-2i\sqrt{3}}{(2-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}y = \frac{7-3i\sqrt{3}}{2-2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}y = \frac{7-3i\sqrt{3}}{5-3i\sqrt{3}}y$$

$$x = \frac{\frac{2-i\sqrt{3}}{5-2i\sqrt{3}}z + z}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2-i\sqrt{3}+5-2i\sqrt{3}}{(5-2i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}z = \frac{7-3i\sqrt{3}}{5-5i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+2 \cdot 3}z = \frac{7-3i\sqrt{3}}{11-7i\sqrt{3}}z$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5-3i\sqrt{3}}{7-3i\sqrt{3}} \\ \frac{11-7i\sqrt{3}}{7-3i\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3i\sqrt{3} \\ 5-3i\sqrt{3} \\ 11-7i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 7+3i\sqrt{3} & 7-3i\sqrt{3} \\ 1 & 5+3i\sqrt{3} & 5-3i\sqrt{3} \\ 1 & 11+7i\sqrt{3} & 11-7i\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$x_1^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x_2^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x_3^2$$

1.1.4 d

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1-\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \left(- \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad + (1-\lambda) \left((1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -2 \end{vmatrix} \right) = \\
&= -(1-\lambda)(-2-\lambda) + (-2)(-2) + (-1)(-2-\lambda) - (-1)(-2) + (-1)(-2-\lambda) - (-2)(-1) - \\
&\quad - (1-\lambda)(-2-\lambda) + (-1)(-1) + (1-\lambda)(1-\lambda) \left((1-\lambda)(-2-\lambda) - \right. \\
&\quad \left. - (-2)(-2) \right) + (1-\lambda) \left((-1)(-2-\lambda) - (-1)(-2) \right) + (1-\lambda) \left((-1)(-2) - (-1)(1-\lambda) \right) = \\
&= -(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2) + 4 + 2 + \lambda - 2 + 2 + \lambda - 2 + -(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2) + 1 + \\
&\quad + (1-\lambda-\lambda+\lambda^2) \left((-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2) - 4 \right) + (1-\lambda)(2+\lambda-2) + (1-\lambda)(2+1-\lambda) = \\
&= -\lambda^2 - \lambda + 2 + 6 + 2\lambda - 2 - \lambda^2 - \lambda + 3 + (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) + (1-\lambda) \cdot \lambda + (1-\lambda)(3-\lambda) = \\
&= -2\lambda^2 + 9 + \lambda^4 + \lambda^3 - 6\lambda^2 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda + \lambda^2 + \lambda - 6 + \lambda - \lambda^2 + 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 = \\
&\quad = \lambda^4 - \lambda^3 - 9\lambda^2 + 10\lambda + 6
\end{aligned}$$

1.1.5 e

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4 \\
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\
\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \left(\lambda(\lambda-1) - \frac{1}{4} \right) \cdot \left((-\lambda)(-\lambda) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = (\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4})(\lambda^2 - \frac{1}{4}) \\
&\quad \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

• $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{z}{2} + \frac{t}{2} = 0 \\ \frac{z}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{t}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (\sqrt{2} - 1)y = 0 \\ (\sqrt{2} - 1)z + t = 0 \\ z + (\sqrt{2} - 1)t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -(1 + \sqrt{2})x \\ t = -(\sqrt{2} - 1)z \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

• $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{y}{2} = 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{z}{2} + \frac{t}{2} = 0 \\ \frac{z}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{t}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (\sqrt{2} + 1)y = 0 \\ -(\sqrt{2} + 1)z + t = 0 \\ z - (\sqrt{2} + 1)t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)x \\ t = (\sqrt{2} + 1)z \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ x = y \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

$$\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 - \sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 - \sqrt{2} & \sqrt{2} + 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_2^2 + \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_4^2}{2}$$

1.2 528

$$\sum_{l=1}^n x_l^2 + \sum_{i < k} x_i x_k$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \cdot & \cdot & 1/2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1/2 & \cdot & 1/2 \\ 1/2 & 1 - \lambda & 1/2 & 1/2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/2 & \cdot & 1/2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^n + (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot (1 - \lambda) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= (1 - \lambda)^n + \frac{n - 1}{2^n} - \frac{n(1 - \lambda)}{2^{n-1}} = (1 - \lambda) \left((1 - \lambda)^{n-1} - \frac{n}{2^{n-1}} \right) + \frac{n - 1}{2^n}$$

1.3 535

1.3.1 a

$$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2 - \lambda) \left((1 - \lambda)(-\lambda) - (-2)(-2) \right) + 2 \cdot (-2)(-\lambda) = (2 - \lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 4) + 4\lambda = -2\lambda + 2\lambda^2 - 8 + \lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8$$

$$\begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

• $\lambda = -2$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 2 + 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 + 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$y = 2x$$

$$z = y = 2x$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 - 2 = 0 \\ -2 + 6 - 4 = 0 \\ -2 + 2 = 0 \end{cases}$$

• $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 2-1 & -2 & 0 \\ -2 & 1-1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ z = -x \\ 2 \cdot \frac{x}{2} - x = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 4$

$$\chi(4) = \begin{vmatrix} 2-4 & -2 & 0 \\ -2 & 1-4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ 2x - 3x + \frac{x}{2} \\ z = -\frac{y}{2} = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$(u_1, u_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$-2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2$$

1.3.2 b

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \left((2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \right) + 2 \left(-2(3-\lambda) + 0 \right) = (1-\lambda)(6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4) - 4(3-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(2 - 5\lambda + \lambda^2) - 12 + 4\lambda = 2 - 5\lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 12 + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda + 10$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 1+1 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -2 \\ 0 & -2 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ -2x+3y-2z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x \\ -2x+3x-2\frac{x}{2}=0 \\ z=\frac{y}{2}=\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} 1-2 & -2 & 0 \\ -2 & 2-2 & -2 \\ 0 & -2 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ x+z=0-2y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{x}{2} \\ z=-x \\ 2\frac{x}{2}-x=0 \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$

$$\chi(5) = \begin{vmatrix} 1-5 & -2 & 0 \\ -2 & 2-5 & -2 \\ 0 & -2 & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ 2x-6x+4x=0 \\ z=-y=2x \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$(u_1, u_3) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$$

1.3.3 c

$$3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3-\lambda) \left((4-\lambda)(5-\lambda) - 4 \right) - 4(5-\lambda) = (3-\lambda) \left(20 - 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 \right) - 20 + 4\lambda = \\ &= (3-\lambda)(16 - 9\lambda + \lambda^2) - 20 + 4\lambda = 48 - 27\lambda + 3\lambda^2 - 16\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 - 20 + 4\lambda = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 \end{aligned}$$

$$\chi(1) = -1 + 12 - 39 + 28 = 0$$

$-\lambda^3$	$+12\lambda^2$	-39λ	$+28$	λ	-1
$-\lambda^3$	$+\lambda^2$			$-\lambda^2$	11λ
	$11\lambda^2$	-39λ			
	$11\lambda^2$	-11λ			
	-28λ	$+28$			

$$D = 121 - 4 \cdot 28 = 121 - 112 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-11 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Проверим:

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 = 0$$

$$\chi(7) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$$

$$\chi(4) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

• $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = -x_2 = -2x_3 \\ -4x_3 + 6x_3 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_1 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4 Задачник Проскурятова

1.4.1 1175

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1(1-\lambda)1 - 1 \cdot 1(1-\lambda) - 2 \cdot 2(3-\lambda) = \\ &= (1-2\lambda+\lambda^2)(3-\lambda) + 2 + 2 - 2(1-\lambda) - 4(3-\lambda) = 3-\lambda-6\lambda+2\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3+4-2+2\lambda-12+4\lambda = \\ &= -\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3+6\lambda-10 = -\lambda^3+5\lambda^2-\lambda-7\end{aligned}$$

$$\chi(-1) = 1 + 5 + 1 - 7 = 0$$

$-\lambda^3$	$+5\lambda^2$	$-\lambda$	-7	λ	$+1$
$-$	$-\lambda^3$	$-\lambda^2$		$-\lambda^2$	$+6\lambda$
$=$		$6\lambda^2$	$-\lambda$	-7	
$-$		$6\lambda^2$	$+6\lambda$		
$=$			-7λ	-7	
$-$			-7λ	-7	
$=$			0		

$$\chi(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2+6\lambda-7) = -(\lambda+1)(\lambda-3+\sqrt{2})(\lambda-3-\sqrt{2})$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 1 \\ 2 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x+2y+z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-2x-2y \\ x+y-8x-8y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-2x-2y \\ 7x+7y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y \\ z=2y-2y=0 \end{cases}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 3 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\chi(\lambda = 3 - \sqrt{2}) &= \begin{vmatrix} 1-3+\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1-3+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 3-3+\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -2+\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 0 & -4+\sqrt{2} & 1-2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (-2+\sqrt{2})x+2y+z=0 \\ (-4+\sqrt{2})y+(1-2\sqrt{2})z=0 \\ x+y+\sqrt{2}z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{(1-2\sqrt{2})z}{-4+\sqrt{2}} \\ (-2+\sqrt{2})x + \frac{(2-4\sqrt{2})z}{-4+\sqrt{2}} + z = 0 \\ x + \frac{(1-2\sqrt{2})z}{-4+\sqrt{2}} + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2+\sqrt{2})x + \frac{2z-4\sqrt{2}z-4z+\sqrt{2}z}{-4+\sqrt{2}} = 0 \\ x + \frac{z-2\sqrt{2}z-4\sqrt{2}z+2z}{-4+\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-2+\sqrt{2})(-4+\sqrt{2})x - (2+3\sqrt{2})z = 0 \\ (-4+\sqrt{2})x + (3-6\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2}z \\ x = -\frac{3-6\sqrt{2}}{-4+\sqrt{2}}z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{2}}{10-6\sqrt{2}}z \\ x = -\frac{3-6\sqrt{2}}{-4+\sqrt{2}}z \end{cases}$$

$$x = y = z = 0$$

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 3 + \sqrt{2}$

$$\chi(\lambda = 3 + \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 1 - 3 - \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1 - 3 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 3 - 3 - \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 - \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 - \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 0 & -4 - \sqrt{2} & 1 + 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} (-2 - \sqrt{2})x + 2y + z = 0 \\ (-4 - \sqrt{2})y + (1 + 2\sqrt{2})z = 0 \\ x + y + -\sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

1.4.2 1187

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1,5 \\ 2 & -1,5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3 - \lambda & -1,5 \\ 2 & -1,5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) + (-1)(-1,5)2 + (-1)(-1,5)2 - 2(3 - \lambda)2 - (-1)(-1)(4 - \lambda) - (2 - \lambda)(-1,5)(-1,5) =$$

$$= (6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2)(4 - \lambda) + 3 + 3 - 4(3 - \lambda) - 4 + \lambda - \frac{9}{4}(2 - \lambda) = (6 - 5\lambda + \lambda^2)(4 - \lambda) + 6 - 12 + 4\lambda - 4 + \lambda - 4,5 + \frac{9}{4}\lambda =$$

$$= 24 - 6\lambda - 20\lambda + 5\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 14,5 + \frac{29}{4}\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + \frac{29}{4}\lambda + 9,5 =$$

$$= -4\lambda^3 + 36\lambda^2 - 104\lambda + 29\lambda + 19 = 4\lambda^3 - 36\lambda^2 + 75\lambda - 19$$

1.5 Задачник Гиниятовой

1.5.1 195

а

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(3 - \lambda)^2 + 2(-1)2 + 2 \cdot 2(-1) - 2(3 - \lambda)2 - 2 \cdot 2(3 - \lambda) - (-\lambda)(-1)(-1) =$$

$$= -\lambda(9 - 6\lambda + \lambda^2) - 4 - 4 - 4(3 - \lambda) - 4(3 - \lambda) + \lambda = -9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 8 - 8(3 - \lambda) + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda - 8 - 24 + 8\lambda = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32$$

$$\chi(-2) = -8 - 24 + 32 = 0$$

$$\frac{\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32}{\lambda + 2} = (\lambda - 4)^2$$

- $\lambda = -2$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+5y-z=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-x-y \\ 2x+5y+x+y=0 \\ 2x-y-5x-5y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ -3x-6y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y \\ -6y-6y=0 \\ z=y \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+1+1}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 4$

$$\chi(4) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \quad z=2x-y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -4$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{\vec{u}_2} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25} + 1 + \frac{4}{25}}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{5}{\sqrt{16+25+4}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{5}{\sqrt{45}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$-2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2$$

1.6 mathproblems.ru

1.6.1 1951

$$\frac{x-17}{x^2-x-2} = \frac{x-17}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

• $x = 2$

$$2-17 = B(2+1)$$

$$B = -\frac{15}{3} = -5$$

• $x = -1$

$$-1-17 = A(-1-2)$$

$$A = \frac{18}{3} = 6$$

$$-\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x+1}$$

1.6.2 1961

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 6}{x^2 - 4} &= \frac{x^2(x^2 - 4) + 4x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 6}{x^2 - 4} = x^2 + \frac{-2x^3 + 7x - 6}{x^2 - 4} = \\ &= x^2 + \frac{-2x(x^2 - 4) - 8x + 7x - 6}{x^2 - 4} = x^2 - 2x - \frac{x + 6}{(x - 2)(x + 2)} = x^2 - 2x - \frac{A}{x - 2} - \frac{B}{x + 2}\end{aligned}$$

• $x = 2$

$$2 + 6 = A(2 + 2)$$

$$A = \frac{8}{4} = 2$$

• $x = -2$

$$-2 + 6 = B(-2 - 2)$$

$$B = -\frac{4}{4} = -1$$

$$x^2 - 2x - \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}$$

1.6.3 1971

$$\frac{3x^2 - 3x + 5}{x^3 + x^2 - 2} = \frac{3x^2 - 3x + 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 5 &= A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x - 1) = Ax^2 + 2Ax + 2A + Bx^2 - Bx + Cx - C = \\ &= (A + B)x^2 + (2A - B + C)x + (2A - C)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ -3 = 2A - B + C \\ 5 = 2A - C \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3 - B \\ 6 - 2B - B + C + 3 = 0 \\ 6 - 2B - C - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3B + C + 9 = 0 \\ -2B - C + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 3B - 9 \\ -2B - 3B + 9 + 1 = 0 \end{cases} \quad -5B + 10 = 0 \quad \begin{cases} B = 2 \\ C = 3B - 9 = 6 - 9 = -3 \\ A = 3 - B = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{x - 1} + \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 2}$$

1.7 Варианты контрольной

1.7.1 1

$$3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\chi &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & -4 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ -4 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(6 - \lambda)(3 - \lambda) - 32 - 12 + 4\lambda - 12 + 4\lambda - 96 + 16\lambda = \\ &= (6 - \lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2) - 140 + 24\lambda = 54 - 36\lambda + 6\lambda^2 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 140 + 24\lambda = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = \\ &= -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 7 \end{cases}$$

- $\lambda = -2$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 3+2 & -2 & -4 \\ -2 & 6+2 & -2 \\ -4 & -2 & 3+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -4x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$x = 4y - z$$

$$\begin{cases} 5(4y - z) - 2y - 4z = 0 \\ -4(4y - z) - 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 20y - 5z - 2y - 4z = 0 \\ -16y + 4z - 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{z}{2} \\ x = z \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{u}_1| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 7$

$$\chi(7) = \begin{vmatrix} 3-7 & -2 & -4 \\ -2 & 6-7 & -2 \\ -4 & -2 & 3-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2x + y + 2z = 0$$

$$x = -y - 2z$$

$$\begin{pmatrix} -y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(u_2, u_3) = (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 2$$

Ортогонализуем их:

$$\vec{v}_2 = u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = u_3 - \text{proj}_{\vec{v}_2} u_3 = u_3 - \frac{(u_3, \vec{v}_2)}{(\vec{v}_2, \vec{v}_2)} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1 + 1 + 0} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}_3| = \sqrt{3}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$7x_1^2 + 7x_2^2 - 2x_3^2$$

1.7.2 2

$$7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7-\lambda) \left((5-\lambda)(3-\lambda) - 16 \right) + 4 \left(-4(3-\lambda) \right) = (7-\lambda) \left(15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 16 \right) - 16(3-\lambda) = \\ &= (7-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 1) - 48 + 16\lambda = 7\lambda^2 - 56\lambda - 7 - \lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda - 48 + 16\lambda = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 39\lambda - 55 \end{aligned}$$

$$\chi(-1) = 1 + 15 + 39 - 55 = 0$$

$-\lambda^3$	$+15\lambda^2$	-39λ	-55	λ	$+1$
$-\lambda^3$	$-\lambda^2$	$16\lambda^2$	-39λ	$-\lambda^2$	$+16\lambda$
	$16\lambda^2$	-55λ	-55		-55
	$16\lambda^2$	$+16\lambda$	-55λ		-55
		-55λ	-55		-55
			0		

$$\chi(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 16\lambda + 55) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 11\lambda - 5(\lambda - 11))$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 5 \\ \lambda = 11 \end{cases}$$

• $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 7+1 & -4 & 0 \\ -4 & 5+1 & 4 \\ 0 & 4 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ -y + 3y - 2y = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 5$

$$\chi(5) = \begin{vmatrix} 7-5 & -4 & 0 \\ -4 & 5-5 & 4 \\ 0 & 4 & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ z = x \\ x - x = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 11$

$$\chi(11) = \begin{vmatrix} 7-11 & -4 & 0 \\ -4 & 5-11 & 4 \\ 0 & 4 & 3-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -2x-3y+2z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} = \begin{cases} x=-y \\ 2y-3y+y=0 \\ z=\frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{4}{3} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$11x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2$$

1.7.3 3

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \left((2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \right) + 2 \left(-2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \right) - \\ &\quad - \left(-2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (2-\lambda) \left((2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 4) - (2-\lambda) \right) + 2 \left(-2((2-\lambda)^2 - 4) - 2 \right) - \left((-2)(-2) - (2-\lambda)(-(2-\lambda)) \right) = \\ &= (2-\lambda) \left((2-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 - 1) \right) + 2 \left(-2(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 + 1) \right) - \left(4 + (2-\lambda)^2 \right) = \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) - 4(\lambda^2 - 4\lambda + 1) - 4 - 4 + 4\lambda - \lambda^2 = \\ &= (4 - 4\lambda + \lambda^2)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) - 4\lambda^2 + 16\lambda - 4 - 8 + 4\lambda - \lambda^2 = \\ &= 4\lambda^2 - 16\lambda - 4 - 4\lambda^3 + 16\lambda^2 + 4\lambda + \lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 20\lambda - 12 = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 14\lambda^2 + 8\lambda - 16 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 - \sqrt{5 - \sqrt{17}} \\ \lambda = 2 + \sqrt{5 - \sqrt{17}} \\ \lambda = 2 - \sqrt{5 + \sqrt{17}} \\ \lambda = 2 + \sqrt{5 + \sqrt{17}} \end{cases}$$

- $\lambda = 2 - \sqrt{5 - \sqrt{17}}$

$$\chi(2 - \sqrt{5 - \sqrt{17}}) = \begin{vmatrix} \sqrt{5 - \sqrt{17}} & -2 & 0 & 1 \\ -2 & \sqrt{5 - \sqrt{17}} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{5 - \sqrt{17}} & -2 \\ 1 & 0 & -2 & \sqrt{5 - \sqrt{17}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5-\sqrt{17}}x - 2y + t = 0 \\ -2x + \sqrt{5-\sqrt{17}}y + z = 0 \\ y + \sqrt{5-\sqrt{17}}z - 2t = 0 \\ x - 2z + \sqrt{5-\sqrt{17}}t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2y-t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}} \\ -2 \cdot \frac{2y-t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}} + \sqrt{5-\sqrt{17}}y + \frac{-y+2t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}} = 0 \\ z = \frac{-y+2t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}} \\ \frac{2y-t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}} - 2 \cdot \frac{-y+2t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}} + \sqrt{5-\sqrt{17}}t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 2t + (5 - \sqrt{17})y - y + 2t = 0 \\ 2y - t + 2y - 4t + (5 - \sqrt{17})t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -5y + 5y - \sqrt{17}y + 4t = 0 \\ 4y - 5t + 5t - \sqrt{17}t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4t}{\sqrt{17}} \\ y = \frac{\sqrt{17}t}{4} \end{cases}$$

.....

1.7.4 4

$$2x_1x_2 + 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

• $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

• $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -t \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

1.8 prep

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \cdot & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_n = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \chi_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \chi_{n-2} & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \chi_{n-1} - \frac{1}{4} \cdot \chi_{n-2}$$

Глава 2

2

2.1 624

2.1.1 а

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$
$$x^2 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

• $x = 1$

$$1 = A \cdot 3 \cdot 4$$

$$A = \frac{1}{12}$$

• $x = -2$

$$4 = B \cdot (-3) \cdot 1$$

$$B = -\frac{4}{3}$$

• $x = -3$

$$9 = C \cdot (-4) \cdot (-1)$$

$$C = \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{12(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)} + \frac{9}{4(x+3)}$$

2.1.2 б

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x-4}$$

$$1 = A(x-2)(x-3)(x-4) + B(x-1)(x-3)(x-4) + C(x-1)(x-2)(x-4) + D(x-1)(x-2)(x-3)$$

• $x = 1$

$$1 = A \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$$

$$A = -\frac{1}{6}$$

• $x = 2$

$$1 = B \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)$$

$$B = \frac{1}{2}$$

• $x = 3$

$$1 = C \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

- $x = 4$

$$1 = D \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$D = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{6(x-4)}$$

2.1.3 c

$$\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3+x}{(x-1)(x+i)(x-i)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}$$

$$3+x = A(x-i)(x+i) + B(x-1)(x+i) + C(x-1)(x-i)$$

- $x = 1$

$$3+1 = A(1-i)(1+i)$$

$$A = \frac{4}{1+1} = 2$$

- $x = i$

$$3+i = B(i-1)(i+i)$$

$$B = \frac{3+i}{2i(i-1)} = \frac{3+i}{-2-2i} = -\frac{3+i}{2(1+i)} = -\frac{(3+i)(1-i)}{2(1+1)} = -\frac{3-3i+i+1}{4} = -\frac{4-2i}{4} = -\frac{2-i}{2}$$

- $x = -i$

$$3-i = C(-i-1)(-i-i)$$

$$C = \frac{3-i}{2i(i+1)} = \frac{3-i}{-2+2i} = -\frac{3-i}{2(i-1)} = -\frac{(3-i)(i-1)}{2(-1-1)} = \frac{3i-3+1+i}{4} = \frac{-2+4i}{4} = \frac{2i-1}{2}$$

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2-i}{2(x-i)} + \frac{2i-1}{2(x+i)}$$

2.1.4 d

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-i} + \frac{D}{x+i}$$

$$x^2 = A(x+1)(x-i)(x+i) + B(x-1)(x-i)(x+i) + C(x-1)(x+1)(x+i) + D(x-1)(x+1)(x-i)$$

- $x = 1$

$$1 = A(1+1)(1-i)(1+i)$$

$$A = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

- $x = -1$

$$1 = B(-1-1)(-1-i)(-1+i)$$

$$B = \frac{1}{-2(1+1)} = -\frac{1}{4}$$

- $x = i$

$$-1 = C(i-1)(i+1)(i+i)$$

$$C = -\frac{1}{2i(-1-1)} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

- $x = -i$

$$-1 = D(-i-1)(-i+1)(-i-i)$$

$$D = -\frac{1}{-2i(-1-1)} = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}$$

$$\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)}$$

2.1.5 e

$$\frac{1}{x^3 - 1}$$

Обозначим $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - \omega} + \frac{C}{x - \omega^2}$$

$$1 = A(x - \omega)(x - \omega^2) + B(x - 1)(x - \omega^2) + C(x - 1)(x - \omega)$$

• $x = 1$

$$1 = (1 - \omega)(1 - \omega^2)A$$

$$A = \frac{1}{(1 - \omega)(1 - \omega^2)}$$

• $x = \omega$

$$1 = B(\omega - 1)(\omega - \omega^2)$$

$$B = \frac{1}{\omega(\omega - 1)(1 - \omega)} = -\frac{1}{\omega(\omega - 1)^2}$$

• $x = \omega^2$

$$1 = C(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega)$$

$$C = \frac{1}{\omega(\omega^2 - 1)(\omega - 1)}$$

$$\frac{1}{(1 - \omega)(1 - \omega^2)(x - 1)} - \frac{1}{\omega(\omega - 1)(x - \omega)} + \frac{1}{\omega(\omega^2 - 1)(\omega - 1)(x - \omega^2)}$$

2.1.6 f

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + 4} &= \frac{1}{(x^2 + \sqrt{-4})(x^2 - \sqrt{-4})} = \frac{1}{(x^2 + 2i)(x^2 - 2i)} = \frac{1}{(x - \sqrt{-2i})(x + \sqrt{-2i})(x - \sqrt{2i})(x + \sqrt{2i})} = \\ &= \frac{A}{x - \sqrt{-2i}} + \frac{B}{x + \sqrt{-2i}} + \frac{C}{x - \sqrt{2i}} + \frac{D}{x + \sqrt{2i}} \end{aligned}$$

• $x = \sqrt{-2i}$

$$1 = A(\sqrt{-2i} + \sqrt{-2i})(\sqrt{-2i} - \sqrt{2i})(\sqrt{-2i} + \sqrt{2i})$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-2i}(\sqrt{-2i} - \sqrt{2i})(\sqrt{-2i} + \sqrt{2i})} = \frac{1}{2\sqrt{-2i}(-2i - 2i)} = -\frac{1}{8i\sqrt{-2i}} = -\frac{1}{8i \cdot i\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

• $x = -\sqrt{-2i}$

$$B = \frac{1}{(-\sqrt{-2i} - \sqrt{-2i})(-\sqrt{-2i} - \sqrt{2i})(-\sqrt{-2i} + \sqrt{2i})} = \frac{1}{-2\sqrt{-2i}(-2i - 2i)} = \frac{1}{-2i\sqrt{2} \cdot (-4i)} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

• $x = \sqrt{2i}$

$$C = \frac{1}{(\sqrt{2i} - \sqrt{-2i})(\sqrt{2i} + \sqrt{-2i})(\sqrt{2i} + \sqrt{2i})} = \frac{1}{(2i + 2i)(2\sqrt{2i})} = \frac{1}{8i\sqrt{2i}} = -\frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}}$$

• $x = -\sqrt{2i}$

$$D = \frac{1}{(-\sqrt{2i} - \sqrt{-2i})(-\sqrt{2i} + \sqrt{-2i})(-\sqrt{2i} - \sqrt{2i})} = \frac{1}{(-2i - 2i)(-2\sqrt{2i})} = \frac{1}{8i\sqrt{2i}} = -\frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{8\sqrt{2}(x - \sqrt{-2i})} - \frac{1}{8\sqrt{2}(x + \sqrt{-2i})} - \frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}(x - \sqrt{2i})} - \frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}(x + \sqrt{2i})}$$

2.1.7 g

$$\frac{1}{x^n - 1}$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega^k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{x - \omega^k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_k (x - \omega^0) \dots (x - \omega^{k-1}) (x - \omega^{k+1}) \dots (x - \omega^{n-1}) \right)$$

Подставим $x = \omega^m$:

$$1 = A_m (\omega^m - \omega^0) \dots (\omega^m - \omega^{m-1}) (\omega^m - \omega^{m+1}) \dots (\omega^m - \omega^{n-1})$$

$$A_m = \frac{1}{(\omega^m - \omega^0) \dots (\omega^m - \omega^{m-1}) (\omega^m - \omega^{m+1}) \dots (\omega^m - \omega^{n-1})}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\omega^k - \omega^0) \dots (\omega^k - \omega^{k-1}) (x - \omega^k) (\omega^k - \omega^{k+1}) \dots (\omega^k - \omega^{n-1})}$$

2.1.8 h

$$\frac{1}{x^n + 1}$$

Корень степени t из -1 — это корень степени $2t$ из 1

Обозначим $\omega := e^{\frac{\pi i}{n}}$

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega^k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{x - \omega^k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (x - \omega^0) \dots (x - \omega^{k-1}) (x - \omega^{k+1}) \dots (x - \omega^{n-1})$$

Подставим $x = \omega^m$:

$$1 = A_m (\omega^m - \omega^0) \dots (\omega^m - \omega^{m-1}) (\omega^m - \omega^{m+1}) \dots (\omega^m - \omega^{n-1})$$

$$A_m = \frac{1}{(\omega^m - \omega^0) \dots (\omega^m - \omega^{m-1}) (\omega^m - \omega^{m+1}) \dots (\omega^m - \omega^{n-1})}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\omega^k - \omega^0) \dots (\omega^k - \omega^{k-1}) (x - \omega^k) (\omega^k - \omega^{k+1}) \dots (\omega^k - \omega^{n-1})}$$

2.1.9 i

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = \frac{n!}{\prod_{i=0}^n (x-i)}$$

2.2 626

2.2.1 a

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x-1)$$

- $x = 1$

$$1 = A(1 + 1 + 1)$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$1 = \frac{x^2 + x + 1}{3} + Bx(x-1) + C(x-1)$$

- $x = 0$

$$1 = \frac{1}{3} + C \cdot (-1)$$

$$C = -\frac{2}{3}$$

$$1 = \frac{x^2 + x + 1}{3} + Bx(x-1) + \frac{2(x-1)}{3}$$

- $x = -1$

$$1 = \frac{1 - 1 + 1}{3} + B \cdot (-1) \cdot (-2) + \frac{2 \cdot (-2)}{3}$$

$$1 = \frac{1}{3} + 2B - \frac{4}{3}$$

$$B = 1$$

$$\frac{1}{3(x-1)} + \frac{x - \frac{2}{3}}{x^2 + x + 1}$$

2.2.2 b

$$\frac{x^2}{x^4 - 16} = \frac{x^2}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$$x^2 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2)$$

- $x = 2$

$$4 = A \cdot 4 \cdot 8$$

$$A = \frac{1}{8}$$

- $x = -2$

$$4 = B \cdot (-4) \cdot 8$$

$$B = -\frac{1}{8}$$

$$x^2 = \frac{(x+2)(x^2+4)}{8} - \frac{(x-2)(x^2+4)}{8} + (Cx+D)(x-2)(x+2)$$

- $x = 0$

$$0 = \frac{2 \cdot 4}{8} - \frac{-2 \cdot 4}{8} + D \cdot (-2) \cdot 2$$

$$0 = 1 + 1 - 4D$$

$$D = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{(x+2)(x^2+4)}{8} - \frac{(x-2)(x^2+4)}{8} + Cx(x-2)(x+2) + \frac{(x-2)(x+2)}{2}$$

- $x = 1$

$$1 = \frac{3 \cdot 5}{8} - \frac{-1 \cdot 5}{8} + C \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 + \frac{-1 \cdot 3}{2}$$

$$1 = \frac{15}{8} + \frac{5}{8} - 3C - \frac{3}{2}$$

$$1 = \frac{5}{2} - 3C - \frac{3}{2}$$

$$1 = 1 - 3C$$

$$C = 0$$

$$\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$$

2.2.3 c

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{x^4+4x^2+4-4x^2} = \frac{1}{(x^2+2)^2-4x^2} = \frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$1 = Ax(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + Cx(x^2-2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

• $x = 0$

$$1 = 2B + 2D$$

$$D = \frac{1}{2} - B$$

$$1 = Ax(x^2+2x+2) + \cancel{B(x^2+2x+2)} + Cx(x^2-2x+2) + \frac{x^2-2x+2}{2} - \cancel{B(x^2-2x+2)}$$

$$1 = Ax(x^2+2x+2) + Cx(x^2-2x+2) + \frac{x^2-2x+2}{2}$$

• $x = 1$

$$1 = 5A + C + \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{2} - 5A$$

$$1 = (x^2-2x+2)\left(Ax + \frac{1}{2} - 5A + \frac{1}{2}\right)$$

$$1 = (x^2-2x+2)\left(A(x-5) + 1\right)$$

• $x = 4$

$$1 = (16-8+2)(1-A)$$

$$1 = 10 - 10A$$

$$A = \frac{9}{10}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{5 \cdot 9}{10} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$1 = \frac{9x(x^2+2x+2)}{10} + B(x^2+2x+2) - 4x(x^2-2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

$$1 = \frac{9x^3+18x^2+18x-40x^3+80x^2-80x}{10} + B(x^2+2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

$$1 = \frac{-31x^3+98x^2-62x}{10} + B(x^2+2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

$$1 = -x \cdot \frac{31x^2-98x+62}{10} + B(x^2+2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

• $x = -1$

$$1 = \frac{31+98+62}{10} + B + 5D$$

$$1 = \frac{191}{10} + B + 5D$$

2.2.4 d

$$\frac{x^2}{x^6 + 27} = \frac{x^2}{(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)} \stackrel{y:=x^2}{=} \frac{y}{(y+3)(y^2 - 3y + 9)} = \frac{A}{y+3} + \frac{By+C}{y^2 - 3y + 9}$$

$$y = A(y^2 - 3y + 9) + By(y+3) + C(y+3)$$

• $y = -3$

$$-3 = A \cdot (9 + 9 + 9)$$

$$-3 = 27A$$

$$A = -\frac{1}{9}$$

$$y = -\frac{y^2 - 3y + 9}{9} + By(y+3) + C(y+3)$$

• $y = 0$

$$0 = -1 + 3C$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{y^2 - 3y + 9}{9} + By(y+3) + \frac{y+3}{3}$$

• $y = 1$

$$1 = -\frac{1 - 3 + 9}{9} + 4B + \frac{4}{3}$$

$$1 = -7 + 36B + 12$$

$$36B = -4$$

$$B = -\frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{9(y+3)} + \frac{-\frac{1}{9}y + \frac{1}{3}}{y^2 - 3y + 9} &= -\frac{1}{9(y+3)} + \frac{\frac{-y+3}{9}}{y^2 - 3y + 9} = -\frac{1}{9(y+3)} + \frac{-y+3}{9(y^2 - 3y + 9)} = \frac{\frac{1}{y+3} - \frac{y-3}{y^2 - 3y + 9}}{9} = \\ &= \frac{\frac{y^2 - 3y + 9 - (y-3)(y+3)}{(y+3)(y^2 - 3y + 9)}}{9} = \frac{y^2 - 3y + 9 - y^2 + 9}{9(y+3)(y^2 - 3y + 9)} = \frac{-3y + 18}{9(y+3)(y^2 - 3y + 9)} = -\frac{3(y-6)}{9(y+3)(y^2 - 3y + 9)} = \\ &= -\frac{y-6}{3(y+3)(y^2 - 3y + 9)} = -\frac{y-6}{3(y+3)(y^2 - 6y + 9 + 3y)} = -\frac{y-6}{3(y+3)\left((y-3)^2 + 3y\right)} \end{aligned}$$

2.3 627

2.3.1 a

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$x = (x^2+1)^2 A + (x+1)(x^2+1)(Bx+C) + (x+1)(Dx+E)$$

• $x = -1$

$$-1 = 2A$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

• $x = 0$

$$0 = -\frac{1}{2} + C + E$$

$$C = \frac{1}{2} - E$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{(x^2+1)^2}{2} + x(x+1)(x^2+1)B + (x+1)(x^2+1)\left(\frac{1}{2} - E\right) + x(x+1)D + (x+1)E \\ x &= -\frac{(x^2+1)^2}{2} + x(x+1)(x^2+1)B + \frac{(x+1)(x^2+1)}{2} + (x+1)(1-x^2-1)E + x(x+1)D \\ x &= \frac{(x^2+1)(-x^2+x)}{2} + (x+1)\left(x(x^2+1)B + x^2E + xD\right) \end{aligned}$$

- $x = 1$

$$1 = \frac{2 \cdot 0}{2} + 2 \left(2B + E + D \right)$$

$$2B + E + D = \frac{1}{2}$$

$$D = \frac{1}{2} - 2B - E$$

$$x = -\frac{x(x^2+1)(x-1)}{2} + (x+1) \left(x(x^2+1)B + x^2E + x\left(\frac{1}{2} - 2B - E\right) \right)$$

$$x = -\frac{x(x^2+1)(x-1)}{2} + (x+1) \left(xB(x^2+1-2) + xE(x-1) + \frac{x}{2} \right)$$

$$x = -\frac{x(x^2+1)(x-1)}{2} + x(x+1) \left(B(x^2-1) + E(x-1) + \frac{1}{2} \right)$$

$$1 = -\frac{(x^2+1)(x-1)}{2} + (x+1) \left(B(x^2-1) + E(x-1) + \frac{1}{2} \right)$$

$$B(x^2-1) + E(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{1 + \frac{(x^2+1)(x-1)}{2}}{(x+1)} = \frac{2 + (x^2+1)(x-1)}{2(x+1)}$$

$$E = \frac{\frac{2+(x^2+1)(x-1)}{2(x+1)} - B(x^2-1) - \frac{1}{2}}{(x-1)} = \frac{2 + (x^2+1)(x-1) - 2(x-1)(x+1)^2B - (x+1)}{2(x+1)(x-1)}$$

2.4 628

Пусть $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

2.4.1 а

Он же – 3 из вариантов контрольной

$$\sum \frac{1}{x-x_i} = \frac{\sum (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \frac{\sum \frac{\varphi(x)}{x-x_i}}{\varphi(x)}$$

$$(x-x_i)' = 1 \implies \varphi'(x) = \sum_i \frac{\varphi(x)}{x-x_i} \implies \sum \frac{1}{x-x_i} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

2.4.2 б

Он же – 4 из вариантов контрольной

$$\sum \frac{x_i}{x-x_i} = \frac{\sum (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})x_i(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{\varphi(x)} = \frac{\sum \frac{\varphi(x)x_i}{x-x_i}}{\varphi(x)} = \frac{\sum \frac{-\varphi(x)x - \varphi(x)x_i - \varphi(x)x}{x-x_i}}{\varphi(x)} =$$

$$= \frac{\sum -\left(\varphi(x) - \frac{\varphi(x)x}{x-x_i}\right)}{\varphi(x)} = \frac{\sum \frac{\varphi(x)x}{x-x_i} - \sum \varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{x\varphi'(x) - n\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

Утверждение 1 (формула Лагранжа).

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n - \text{корни } \varphi(x))$$

2.5 629

2.5.1 с

$$S := \frac{1}{x_1^2 - 2x_1 + 1} + \frac{1}{x_2^2 - 2x_2 + 1} + \frac{1}{x_3^2 - 2x_3 + 1}, \quad \varphi(x) = x^3 + x^2 - 1$$
$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\varphi'(x_k)}$$

Хотим, чтобы

$$\frac{1}{x_k^2 - 2x_k + 1} = \frac{f(x_k)}{(x^{(1)} - x_k)x_k(3x_k + 2)} \cdot \frac{f(x_k)}{(x^{(2)} - x_k)x_k(3x_k + 2)}$$

Пусть $x^{(1)} = x^{(2)} = 1$:

$$\frac{1}{(x_k - 1)^2} = \frac{f(x_k)}{(1 - x_k)x_k(3x_k + 2)} \cdot \frac{f(x_k)}{(1 - x_k)x_k(3x_k + 2)} = \frac{f^2(x_k)}{(1 - x_k)^2 x_k^2 (3x_k + 2)^2}$$
$$1 = \frac{f^2(x)}{x^2(3x + 2)^2}$$
$$1 = \frac{f(x)}{x(3x + 2)}$$
$$f(x) = x(3x + 2)$$
$$S = \frac{f(1)}{\varphi(1)} \cdot \frac{f(1)}{\varphi(1)} = \left(\frac{1 \cdot (3 + 2)}{1 + 1 - 1} \right)^2 = 25$$

2.6 Варианты контрольной

2.6.1 1

Он же – 629.a

x_1, x_2, x_3 – корни $\varphi(x)$. Найти сумму

$$S := \frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \frac{1}{2 - x_3}$$
$$\varphi(x) = x^3 - 3x - 1$$
$$\varphi'(x) = 3x^2 - 3$$
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{(x - x_k)(3x_k^2 - 3)} = \sum_{k=1}^3 \frac{f(x_k)}{3(x - x_k)(x_k - 1)(x_k + 1)}$$

Хотим, чтобы

$$\frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \frac{1}{2 - x_3} = \sum_{k=1}^3 \frac{f(x_k)}{3(x - x_k)(x_k - 1)(x_k + 1)}$$

То есть,

$$\frac{1}{2 - x_k} = \frac{f(x_k)}{3(x - x_k)(x_k - 1)(x_k + 1)}$$

Пусть $x = 2$

$$\frac{1}{2 - x_k} = \frac{f(x_k)}{3(2 - x_k)(x_k - 1)(x_k + 1)}$$
$$f(x_k) = 3(x_k - 1)(x_k + 1)$$
$$f(x) = 3(x - 1)(x + 1)$$

Подставим $x = 2$ в формулу для S :

$$S = \frac{f(2)}{\varphi(2)} = \frac{3(2 - 1)(2 + 1)}{8 - 6 - 1} = 9$$

2.6.2 2

Он же – 629.b

$$S := \frac{1}{x_1^2 - 3x_1 + 2} + \frac{1}{x_2^2 - 3x_2 + 2} + \frac{1}{x_3^2 - 3x_3 + 2}$$

$$\varphi(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\varphi'(x_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{(x - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)}$$

Хотим, чтобы

$$\frac{1}{x_k^2 - 3x_k + 2} = \frac{f(x_k)}{(x^{(1)} - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)} + \frac{f(x_k)}{(x^{(2)} - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)}$$

Пусть $x^{(1)} = 1$, $x^{(2)} = 2$:

$$\frac{1}{(x_k - 1)(x_k - 2)} = \frac{f(x_k)}{(1 - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)} + \frac{f(x_k)}{(2 - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)} = \frac{f(x_k)}{3x_k^2 + 2x_k - 4} \cdot \frac{2 - x_k + 1 - x_k}{(1 - x_k)(2 - x_k)}$$

$$1 = \frac{(3 - 2x_k)f(x_k)}{3x_k^2 + 2x_k - 4}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 4}{3 - 2x}$$

Подставим $x^{(1)} = 1$, $x^{(2)} = 2$:

$$S = \frac{f(1)}{\varphi(1)} + \frac{f(2)}{\varphi(2)} = \frac{3 + 2 - 4}{(3 - 2)(1 + 1 - 4 + 1)} + \frac{12 + 4 - 4}{(3 - 4)(8 + 4 - 8 + 1)} = \frac{1}{1 \cdot (-1)} + \frac{12}{(-1) \cdot 5} = -1 - \frac{12}{5} = -\frac{17}{5}$$

Глава 3

3

3.1 838

Доказать, что квадратные невырожденные матрицы порядка n с элементами из данного поля K образуют группу (она называется полной линейной группой степени n над полем K и обозначается $GL(n, K)$)

Доказательство.

- Замкнутость относительно операции:
 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, значит, матрицы остаются неособенными
При умножении двух квадратных матриц одного размера получится матрица того же размера
- Ассоциативность:
Умножение матриц ассоциативно
- Нейтральный:
 E , $\det E = 1 \neq 0$
- Обратный:
Неособенная матрица имеет единственную обратную

□

3.2 прер

Доказать, что пары (a, b) , $a \neq 0$ элементов поля K образуют группу относительно операции

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$$

Доказательство.

- Ассоциативность:

$$(a_1, b_1) * \left[(a_2, b_2) * (a_3, b_3) \right] = (a_1, b_1) * (a_2 a_3, a_2 b_3 + b_2) = \left(a_1 a_2 a_3, a_1 (a_2 b_3 + b_2) + b_1 \right)$$

$$\left[(a_1, b_1) * (a_2, b_2) \right] * (a_3, b_3) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1) * (a_3, b_3) = \left(a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 + b_1 \right)$$

- Нейтральный:

$$(a_1, b_1) * (1, 0) = (a_1 \cdot 1, a_1 \cdot 0 + b_1) = (a_1, b_1)$$

- Обратный:

$$(a_1, b_1) * \left(\frac{1}{a_1}, -\frac{b_1}{a_1} \right) = \left(\frac{a_1}{a_1}, -\frac{a_1 \cdot b_1}{a_1} + b_1 \right) = (1, -b_1 + b_1) = (1, 0)$$

□

3.3 Задачник Кузнецова

3.3.1 3.1

Проверить, какие из отображений являются гомоморфизмами:

a

$$f(z) = |z|$$
$$f(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| = f(z_1) + f(z_2)$$

b

$$f(z) = 1 + |z|$$
$$f(z_1 + z_2) = 1 + |z_1 + z_2| \neq f(z_1) + f(z_2)$$

c

$$f(z) = 2$$
$$f(z_1 + z_2) = 2 \neq f(z_1) + f(z_2)$$

3.4 Варианты из контрольной

3.4.1 1

Доказать. Пусть $A, B \triangleleft G$, $a \in A$, $b \in B$
Тогда $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B$

$$B \triangleleft G \stackrel{\text{def}}{\implies} aba^{-1} \in B \implies (aba^{-1})b^{-1} \in B$$
$$A \triangleleft G \stackrel{\text{def}}{\implies} ba^{-1}b^{-1} \in A \implies a(ba^{-1}b^{-1}) \in A$$

3.4.2 2

Доказать. Пусть $A, B \triangleleft G$, $A \cap B = \{e\}$
Тогда элементы A коммутируют с элементами B

$$ba[a, b] = ab$$
$$[a, b] \in A \cap B \implies [a, b] = e \implies bae = ab \iff ba = ab$$

3.4.3 3

Доказать. G – конечная группа
Тогда число элементов в каждом классе сопряжённых элементов делит $|G|$

Классы сопряжённых элементов можно считать орбитами при действии G (как группы) на саму себя (как множество)
Для конечной группы верно

$$|G| = |\text{Orb}(m)| \cdot |\text{St}(m)|$$

3.4.4 4

Доказать. Пусть G – конечная абелева группа

Пусть $|G| \vdots p$

Тогда $\exists g \in G : \text{ord } g = p$

Индукция по $n = |G|$

- **База.** $n = p$

Любой элемент имеет порядок p (кроме e)

- **Переход**

Рассмотрим любой нетождественный элемент a и порождённую им циклическую группу H

По теореме Лагранжа, $|G| = [G : H] \cdot |H|$

– Если $|H| \vdots p$, то $a^{|H|/p}$ является искомым элементом

– Иначе $[G : H] \vdots p$

По индукционному предположению, факторгруппа содержит элемент порядка p . Им является один из классов xH , где $x \in G$

Если он имеет порядок m в группе G , то $m \vdots p$, т. к. в группе G $x^m = e$, $(xH)^m = eH$ в факторгруппе

Поэтому $m \vdots p$

Аналогично $x^{\frac{m}{p}}$ окажется элементом порядка p в группе G

Глава 4

4

4.1 Задачник Горковца

4.1.1 1

Линейно зависимы ли векторы в \mathbb{R}^4 ?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + 6c + 4d = 0 \\ -5a - 2b - 3c - d = 0 \\ 2a + b + 3c + 5d = 0 \\ 2a + b + 3c + 2d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = -5a - 2b - 3c \\ 4a + 2b + 6c - 20a - 8b - 12c = 0 \\ 2a + b + 3c - 25a - 10b - 15c = 0 \\ 2a + b + 3c - 10a - 4b - 6c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8a + 3b + 3c = 0 \\ 23a + 9b + 12c = 0 \\ 8a + 3b + 3c = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c = -\frac{8a}{3} - b \\ 23a + 9b - \frac{12 \cdot 8a}{3} - 12b = 0 \\ 8a + 3b - \frac{3 \cdot 8a}{3} - 3b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 23a + 9b - 32a - 12b = 0 \\ 8a + 3b - 8a - 3b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение

Ответ: ЛЗ.

4.1.2 2

Выделить максимальную ЛНЗ подсистему векторов в \mathbb{R}^4 :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдём размерность пространства, порождённого этими векторами. По определению, это будет количество векторов в максимальном ЛНЗ наборе. Она равна рангу матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rk } A = 2$, значит, максимальный ЛНЗ набор состоит из двух векторов. Подойдут, например, a_1 и a_2

Ответ: a_1, a_2

4.1.3 3

Дополнить до базиса пространства \mathbb{R}^4 систему векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Векторы a_1 и a_2 ЛНЗ. Значит, достаточно добавить ещё два вектора так, чтобы вся система осталась ЛНЗ. Добавим к нашей системе стандартный базис \mathbb{R}^4 :

$$\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Эта система порождающая, т. к. содержит базис. Сузим её до базиса:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Его можно убрать, и система останется порождающей:

$$\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Его можно убрать, и система останется порождающей:

$$\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Получили порождающий набор из 4 векторов. Значит, это – базис \mathbb{R}^4

4.1.4 4

Доказать, что система векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ является базисом \mathbb{R}^3 и найти координаты вектора

$x = (8, -4, 4)$ в этом базисе.

Размерность \mathbb{R}^3 совпадает с количеством векторов в наборе, значит, достаточно доказать, что они ЛНЗ:

$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 0 \\ a - b + 4c = 0 \\ 2a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b - 4c \\ 2b - 8c + 3b + 2c = 0 \\ 2b - 8c + 4b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5b - 6c = 0 \\ 6b - 7c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{6c}{5} \\ \frac{6 \cdot 6c}{5} - 7c = 0 \end{cases}$$

$$36c - 35c = 0 \quad a = b = c = 0$$

Система ЛНЗ, значит, это базис

$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 8 \\ a - b + 4c = -4 \\ 2a + 4b + c = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b - 4c - 4 \\ 2b - 8c - 8 + 3b + 2c - 8 = 0 \\ 2b - 8c - 8 + 4b + c - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5b - 6c - 16 = 0 \\ 6b - 7c - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{6c+16}{5} \\ \frac{36c+96}{5} - 7c - 12 = 0 \end{cases} \quad 36c + 96 - 35c - 60 = 0 \quad \begin{cases} c = -36 \\ b = \frac{-6 \cdot 36 + 16}{5} = \frac{-216 + 16}{5} = -\frac{200}{5} = -40 \\ a = -40 + 144 - 4 = 100 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ -40 \\ -36 \end{pmatrix}$$

4.1.5 5

Доказать, что каждая из систем

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

является базисом \mathbb{R}^3 и найти матрицу перехода от E к F

E и F содержат по 3 вектора, значит, достаточно доказать ЛНЗ:

- E

Уже доказано

- F

$$\begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = c \\ b = -2c \\ -c - 4c + c = 0 \end{cases}$$

Это верно только при $a = b = c = 0$, значит, F ЛНЗ

Найдём матрицу перехода. Для этого выразим векторы F через E :

- f_1

$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = -1 \\ a - b + 4c = 0 \\ 2a + 4b + c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b - 4c \\ 2b - 8c + 3b + 2c + 1 = 0 \\ 2b - 8c + 4b + c - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5b - 6c + 1 = 0 \\ 6b - 7c - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{6c-1}{5} \\ \frac{36c-6}{5} - 7c - 1 = 0 \end{cases} \quad 36c - 6 - 35c - 5 = 0 \quad c - 11 = 0 \quad \begin{cases} c = 11 \\ b = \frac{66-1}{5} = \frac{65}{5} = 13 \\ a = 13 - 44 = -31 \end{cases}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} -31 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- f_2

$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 2 \\ a - b + 4c = 1 \\ 2a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -2a - 4b \\ 2a + 3b - 4a - 8b - 2 = 0 \\ a - b - 8a - 16b - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2a - 5b - 2 = 0 \\ -7a - 17b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 5b + 2 = 0 \\ 7a + 17b + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -5b - 2 \\ -35b - 14 + 17b + 1 = 0 \end{cases} \quad -18b - 13 = 0$$

$$\begin{cases} b = -\frac{13}{18} \\ a = \frac{13 \cdot 5}{18} - 2 = \frac{65}{18} - 2 = \frac{65-36}{18} = \frac{29}{18} \\ c = -\frac{29 \cdot 2}{18} + \frac{13 \cdot 4}{18} = -\frac{29}{9} + \frac{26}{9} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} \frac{29}{18} \\ -\frac{13}{18} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

• f_3

$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 1 \\ a - b + 4c = 2 \\ 2a + 4b + c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b - 4c + 2 \\ 2b - 8c + 4 + 3b + 2c - 1 = 0 \\ 2b - 8c + 4 + 4b + c + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5b - 6c + 3 = 0 \\ 6b - 7c + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{6c-3}{5} \\ \frac{36c-18}{5} - 7c + 5 = 0 \end{cases} \quad 36c - 18 - 35c + 25 = 0 \quad \begin{cases} c = -7 \\ b = \frac{6 \cdot (-7) - 3}{5} = \frac{-42-3}{5} = -9 \\ a = -9 + 28 + 2 = 21 \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 21 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -31 & \frac{29}{18} & 21 \\ 13 & -\frac{13}{18} & -9 \\ 11 & -\frac{1}{3} & -7 \end{pmatrix}$$

4.1.6 6

Проверить, образуют ли подпространство векторы пространства \mathbb{R}^n , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a, \quad \text{где } a \in \mathbb{R} - \text{фиксированное число}$$

Достаточно проверить замкнутость относительно сложения и умножения на скаляр:

• .

Пусть $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$, то есть

$$x_1 + \dots + x_n = a$$

Нужно проверить, что $kv \in V$, то есть

$$kx_1 + \dots + kx_n = a \quad k \underbrace{(x_1 + \dots + x_n)}_{=a} = a$$

Это верно только при $a = 0$

• +

Пусть $v = (x_1, \dots, x_n), u = (y_1, \dots, y_n) \in V$, то есть

$$x_1 + \dots + x_n = a \quad y_1 + \dots + y_n = a$$

Нужно проверить, что $v + u \in V$, то есть что

$$(x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n) = a \quad \underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{=a} + \underbrace{y_1 + \dots + y_n}_{=a} = a$$

Это верно только при $a = 0$

Ответ: V является подпространством только при $a = 0$

4.1.7 7

Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Размерность пространства равна рангу матрицы

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+I \\ -I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot 3 \\ \cdot 4 \\ \cdot (-4)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -9 \\ 0 & 12 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-II} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 + 1 \neq 0 \implies \text{rk } A = 4$$

Представим a_4 в виде ЛК остальных:

$$\begin{cases} a + 2b + c - d = 1 \\ -a + 2b - c - 2d = -5 \\ -2a - b - c + d = -3 \\ a - b + c + d = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2b - c + d + 1 \\ 2b + c - d - 1 + 2b - c - 2d + 5 = 0 \\ 4b + 2c - 2d - 2 - b - c + d + 3 = 0 \\ -2b - c + d + 1 - b + c + d - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4b - 3d + 4 = 0 \\ 3b + c - d + 1 = 0 \\ -3b + 2d - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{3d-4}{4} \\ \frac{9d-12}{4} + c - d + 1 = 0 \\ \frac{-9d+12}{4} + 2d - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9d - 12 + 4c - 4d + 4 = 0 \\ -9d + 12 + 8d - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5d + 4c - 8 = 0 \\ -d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0 \\ c = 2 \\ b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Значит, a_4 можно убрать

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4.1.8 8

Найти базис суммы и пересечения линейных оболочек

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Найдём базисы S и T :

Для этого достаточно проверить ЛНЗ соотв. наборов:

(a) S

$$\begin{cases} a + 3b + 9c = 0 \\ 3a + b + 4c = 0 \\ -2a - c = 0 \\ a + b + 4c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -2a \\ a + 3b - 18a = 0 \\ 3a + b - 8a = 0 \\ a + b - 8a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -17a + 3b = 0 \\ -5a + b = 0 \\ -7a + b = 0 \end{cases} \quad a = b = c = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad - \text{базис } S$$

(b) T

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \text{базис } T$$

2. $S \cap T$

Возьмём $v \in S \cap T$

$$v \in S \implies v = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v \in T \implies v = b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 9a_3 = -b_1 - b_2 \\ 3a_1 + a_2 + 4a_3 = -2b_1 - 9b_2 \\ -2a_1 - a_3 = b_1 + 6b_2 \\ a_1 + a_2 + 4a_3 = b_1 + b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = -2a_1 - a_3 - 6b_2 \\ a_1 + 3a_2 + 9a_3 - 2a_1 - a_3 - 6b_2 + b_2 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 4a_3 - 4a_1 - 2a_3 - 12b_2 + 9b_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_1 + a_3 + 6b_2 - b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + 8a_3 - 5b_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 - 3b_2 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 5a_3 + 5b_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 3a_2 + 8a_3 - 5b_2 \\ -3a_2 - 8a_3 + 5b_2 + a_2 + 2a_3 - 3b_2 = 0 \\ 9a_2 + 24a_3 - 15b_2 + a_2 + 5a_3 + 5b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2 - 3a_3 + b_2 = 0 \\ 10a_2 + 29a_3 - 10b_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = -3a_3 + b_2 \\ -30a_3 + 20b_2 + 29a_3 - 10b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = 10b_2 \\ a_2 = -30b_2 + b_2 = -29b_2 \\ a_1 = -87b_2 + 80b_2 - 5b_2 = -12b_2 \\ b_1 = 24b_2 - 10b_2 - 6b_2 = 8b_2 \end{cases}$$

Пусть $b_2 = 1$

$$\begin{cases} a_1 = -12 \\ a_2 = -29 \\ a_3 = 10 \\ b_1 = 8 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} -12 - 87 + 90 - 8 - 1 \\ -36 - 29 + 40 - 16 - 9 \\ 24 - 10 + 8 + 6 \\ -12 - 29 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -50 \\ 28 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. $S + T$

$$S + T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 & -9 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3I \\ +2I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 17 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 4 \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 24 & 68 & -4 & 16 \\ 0 & -8 & -20 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3II \\ -II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -43 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -44 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 9 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & -23 & -6 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & -8 & 1 & -23 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 1 & -23 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{rk } A = 4$$

Значит, базис содержит 4 вектора. Найдём тот, который является ЛК остальных:

- v_3

$$\begin{cases} a + 3b - c - d = 9 \\ 3a + b - 2c - 9d = 4 \\ -2a + c + 6d = -1 \\ a + b + c + d = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2a - 6d - 1 \\ a + 3b - 2a + 6d - 1 - d - 9 = 0 \\ 3a + b - 4a + 12d + 2 - 9d - 4 = 0 \\ a + b + 2a - 6d - 1 + d - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -a + 3b + 5d - 10 = 0 \\ -a + b + 3d - 2 = 0 \\ 3a + b - 5d - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3b - 5d + 10 \\ 3b + 5d - 10 + b + 3d - 2 = 0 \\ -9b - 15d + 30 + b - 5d - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2d - 3 = 0 - 8b - 20d + 25 = 0 \\ b = 3 - 2d \\ -24 + 16d - 20d + 25 = 0 \end{cases} \quad -4d + 1 = 0$$

$$\begin{cases} d = -\frac{1}{4} \\ b = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ a = -\frac{5 \cdot 3}{2} + \frac{5}{4} + 10 = \frac{-30 + 5 + 40}{4} = \frac{15}{4} \\ c = \frac{15}{2} - 15 - 1 = \frac{15 - 32}{2} = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

Значит, v_3 можно “выкинуть”

Ответ:

- $S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -18 \\ -50 \\ 28 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- $S + T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4.1.9 10

Отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ задано правилом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Доказать, что φ является линейным отображением и найти его матрицу
Докажем линейность:

- $\varphi(v + u) = \varphi(v) + \varphi(u)$

$$\begin{aligned} \varphi(v + u) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ v_3 + u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -(v_1 + u_1) + (v_2 + u_2) - 3(v_3 + u_3) \\ (v_1 + u_1) - (v_2 + u_2) + 3(v_3 + u_3) \\ -(v_2 + u_2) + 2(v_3 + u_3) \\ (v_1 + u_1) + (v_3 + u_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 - 3v_3 \\ v_1 - v_2 + 3v_3 \\ -v_2 + 2v_3 \\ v_1 + v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_1 + u_2 - 3u_3 \\ u_1 - u_2 + 3u_3 \\ -u_2 + 2u_3 \\ u_1 + u_3 \end{pmatrix} = \varphi(u) + \varphi(v) \end{aligned}$$

- $\varphi(kv) = k\varphi(v)$ – аналогично

Обозначим

$$i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(k) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.10 11

Найти базис ядра и образа линейного отображения f , заданного в некотором базисе матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдём $\text{Im } f$:

$$\dim \text{Im } f = \text{rk } F$$

Найдём $\text{rk } F$:

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{rk } F = 2 \implies \dim \text{Im } f = 2$$

Найдём $\ker f$:

$$\dim \ker F = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im } f = 4 - 2 = 2$$

По определению матрицы линейного отображения,

$$g_1 := f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 := f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad g_3 := f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_4 := f(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Эта система будет порождающей в $\text{Im } f$. Нужно сузить её до базиса.

$$\begin{cases} 1 = 2a - b + c \\ 2 = a - b \\ 3 = 3a - 2b + c \\ 0 = -3a + b - 2c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a + 2 \\ 2a + a - 2 + c - 1 = 0 \\ 3a + 2a - 4 + c - 3 = 0 \\ -3a - a + 2 - 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + c - 3 = 0 \\ 5a + c - 7 = 0 \\ -4a - 2c + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -3a + 3 \\ 5a - 3a + 3 - 7 = 0 \\ -4a + 6a - 6 + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - 4 = 0 \\ 2a - 4 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет решение, значит, g_1 выражается через остальные, и $\text{Im } f = \langle g_2, g_3, g_4 \rangle$. Нужно убрать ещё один вектор.

Заметим, что $g_2 = -g_3 + g_4$. Значит,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \text{базис } \text{Im } f$$

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_2 + 2x_4 + x_2 = 3x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Очевидно, что это базис $\ker f$

4.1.11 12

Найти какой-нибудь прообраз вектора $(1, 2, 3)$ под действием линейного отображения f , заданного в некотором базисе матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Пусть $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, и $f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff Fv = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 + v_3 \\ -v_1 + 4v_2 + 2v_3 \\ v_1 + 3v_2 + 3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = 1 \\ -v_1 + 4v_2 + 2v_3 = 2 \\ v_1 + 3v_2 + 3v_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = 2v_1 + v_3 - 1 \\ -v_1 + 8v_1 + 4v_3 - 4 + 2v_3 - 2 = 0 \\ v_1 + 6v_1 + 3v_3 - 3 + 3v_3 - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7v_1 + 6v_3 - 6 = 0 \\ 7v_1 + 6v_3 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3 = -\frac{7}{6}v_1 + 1 \\ v_2 = 2v_1 - \frac{7}{6}v_1 + 1 - 1 = \frac{12-7}{6}v_1 = \frac{5}{6}v_1 \end{cases}$$

Возьмём $v_1 = 6$

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4.1.12 13

Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ в базисах $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства V и $\{f_1, f_2\}$ пространства W имеет матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу отображения φ в базисах $\{\underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{:=e'_1}, \underbrace{-e_1 + e_2}_{:=e'_2}, \underbrace{e_1 + e_2}_{:=e'_3}\}$ и $\{\underbrace{2f_1 + f_2}_{:=f'_1}, \underbrace{f_1 + f_2}_{:=f'_2}\}$ Запишем e'_1, e'_2, e'_3 в базисах e_1, e_2, e_3 и f'_1, f'_2 в базисах f_1, f_2 :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e'_1) = \Phi e'_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2-1 \\ 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \underset{\text{в базисах } f_1, f_2}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{в базисах } f'_1, f'_2}{=}$$

$$f(e'_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \underset{\text{в базисах } f_1, f_2}{=} \underset{\text{в базисах } f'_1, f'_2}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(e'_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\text{в базисах } f_1, f_2}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - b \\ 2 - 2b + b - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$f(e'_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \underset{\text{в базисах } f'_1, f'_2}{=}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4.1.13 14

Линейное преобразование φ задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти собственные векторы и собственные значения преобразования φ

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= |A - E\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \left((-\lambda)(1-\lambda)^2 + (-2)(-1)1 + 2 \cdot 1(-1) - 2(1-\lambda)1 - (-2)1(1-\lambda) - (-\lambda)(-1)(-1) \right) = \\ &= (2-\lambda) \left(-\lambda(1-2\lambda+\lambda^2) + 2 - 2 - 2(1-\lambda) + 2(1-\lambda) + \lambda \right) = (2-\lambda)\lambda \left(-(1-2\lambda+\lambda^2) + 1 \right) = \\ &= \lambda(2-\lambda)(-1+2\lambda-\lambda^2+1) = \lambda(2-\lambda)(2\lambda-\lambda^2) = \lambda^2(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

- $\lambda = 0$

$$\chi(0) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Найдём ядро:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_1 + x_4 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1-2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Найдём ядро:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ 2x_2 + 2x_4 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1.14 15

Доказать, что преобразование \mathcal{A} , заданное в некотором базисе матрицей A имеет в некотором другом базисе диагональный вид и найти этот вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)$$

Все с. ч. различны, значит, преобразование диагонализуемо

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.1.15 16

Построить ортогональный базис линейной оболочки следующей системы векторов:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём базис U :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ -1 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что $\text{rk } A = 3 \implies \dim U = 3$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Значит, базис U :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Построим ортогональный базис, используя ортогонализацию Грама-Шмидта:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \frac{(v_1, u_2)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{1+2-10-3}{1+4+4+1} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{10}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+2 \\ -5+2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \text{proj}_{v_1}(u_3) - \text{proj}_{v_2}(u_3) = u_3 - \frac{(v_1, u_3)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(v_2, u_3)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 - \frac{3+4+16+7}{10} v_1 - \frac{6+6-24-14}{4+9+9+4} v_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4.1.16 17

Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Для начала найдём базис U . Мы его уже нашли в предыдущем задании:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$U^\perp = \{x \mid x \perp u \quad \forall u \in U\} = \{x \mid \begin{cases} x \perp a \\ x \perp b \\ x \perp c \end{cases}\}$$

Возьмём $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (x, a) = 0 \\ (x, b) = 0 \\ (x, c) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 + x_4 \\ -2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_1 = 14x_3 - 8x_4 - 2x_3 + x_4 = 12x_3 - 7x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 12x_3 - 7x_4 \\ -7x_3 + 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

4.2 studylib.ru

4.2.1 2

В линейном пространстве A^4 даны подпространства

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad B = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найти базис и размерность $A + B$

Найдём базисы A и B . Для этого проверим, что соответствующие наборы ЛНЗ:

- A

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Значит, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ – базис A

- B

Заметим, что

$$B = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Теперь видно, что второй вектор равен сумме первого и третьего, значит, $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ – базис B

$$A + B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём размерность $A + B$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3I]{-2I, +I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{:(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 15 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{+II, +4II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{rk } M = 3 \implies \dim A + B = 3$$

Значит, один из векторов “лишний”. Проверим четвёртый:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 2 \\ 2a + b + 3c = 1 \\ -a + 4b + 3c = 4 \\ 3a + 2b + 4c = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2b - 3c + 2 \\ -4b - 6c + 4 + b + 3c - 1 = 0 \\ 2b + 3c - 2 + 4b + 3c - 4 = 0 \\ -6b - 9c + 6 + 2b + 4c - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3b - 3c + 3 = 0 \\ 6b + 6c - 6 = 0 \\ -4b - 5c + 3 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что эта система имеет нетривиальное решение

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

4.2.2 3

Для пространств из предыдущего задания найти базис и размерность $A \cap B$
Воспользуемся формулой Грассмана:

$$\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B$$

$$\dim(A \cap B) = 1$$

Значит, достаточно найти один ненулевой вектор из $A \cap B$ Возьмём $v \in A \cap B$

$$v \in A \implies v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v \in B \implies v = c \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 3c + 2d \\ 2a + b = 3c + d \\ -a + 4b = 3c + 4d \\ 3a + 2b = 4c + 3d \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2b + 3c + 2d \\ -4b + 6c + 4d + b - 3c - d = 0 \\ 2b - 3c - 2d + 4b - 3c - 4d = 0 \\ -6b + 9c + 6d + 2b - 4c - 3d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3b + 3c + 3d = 0 \\ 6b - 6c - 6d = 0 \\ -4b + 5c + 3d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = c + d \\ -4c - 4d + 5c + 3d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = d \\ b = 2d \\ a = -4d + 3d + 2d = d \end{cases}$$

Пусть $d = 1$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.2.3 4

Пространства A и B заданы соответственно системами уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \quad (A) \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \quad (B)$$

Найти базис и размерность пространств $A + B$ и $A \cap C$

Найдём базис A :

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_1 + 6x_2 + 10x_4 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_1 - 9x_2 - 15x_4 + 6x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 - 8x_2 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4x_2 - \frac{9}{2}x_4 \\ -28x_2 - \frac{63}{2}x_4 + 5x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad -46x_2 - 57x_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{57}{46}x_4 \\ x_1 = \frac{4 \cdot 57}{46} - \frac{9}{2}x_4 = \frac{228-207}{46}x_4 = \frac{21}{46}x_4 \\ x_3 = \frac{21 \cdot 2}{46}x_4 - \frac{57 \cdot 3}{46}x_4 + 5x_4 = \frac{42-171+230}{46}x_4 = \frac{101}{46}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 21 \\ -57 \\ 101 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Найдём базис B :

$$\begin{cases} x_2 = -5x_1 + 2x_3 - 5x_4 \\ 3x_1 - 20x_1 + 8x_3 - 20x_4 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 15x_1 - 6x_3 + 15x_4 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -17x_1 + 3x_3 - 13x_4 = 0 \\ 17x_1 - 3x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{17x_1+13x_4}{3} \\ x_2 = -5x_1 + 2 \cdot \frac{17x_1+13x_4}{3} - 5x_4 = \frac{-15x_1+34x_1+26x_4-15x_4}{3} = \frac{19x_1+11x_4}{3} \end{cases}$$

Базис B :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19+11}{3} \\ \frac{17+13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19-11}{3} \\ \frac{17-13}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4.3 yagubov.ru

Даны подпространства U и W , порождённые системами векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Найти базисы $U + W$ и $U \cap W$ Найдём базис U :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{rk } A = 3 \implies \dim U = 3$$

Найдём базис W :

Векторы b_1 и b_2 ЛНЗ, значит они образуют базис W

Найдём базис $U + W$:

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} +2I \\ +3I \\ +2I \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 6 & 4 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -2II \\ -3II \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 21 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 21 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{rk} A = 4 \implies \dim U + W = 4$$

Значит, один из векторов “лишний”. Проверим пятый:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + 2b + 2c - d = 3 \\ -a + 2b + 2c + 2d = 3 \\ 3a - 2b + c - 2d = 2 \\ 2a - b - 2c + d = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b - 2c - 2d = -3 \\ b + 2c + d = 3 \\ 3c + 2d = 5 \\ 25d = 7 \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение. Значит,

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём базис $U \cap W$:

По формуле Грассмана, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 1$

Возьмём $v \in U \cap W$

$$v \in U \implies v = aa_1 + ba_2 + ca_3$$

$$v \in W \implies v = db_1 + eb_2$$

$$\begin{cases} 2a + 2b + 2c = -d + 3e \\ -a + 2b + 2c = 2d + 3e \\ 3a - 2b + c = -2d + 2e \\ 2a - b - 2c = d - 2e \end{cases} \quad \begin{cases} d = -2a - 2b - 2c + 3e \\ -a + 2b + 2c + 4a + 4b + 4c - 6e - 3e = 0 \\ 3a - 2b + c - 4a - 4b - 4c + 6e - 2e = 0 \\ 2a - b - 2c + 2a + 2b + 2c - 3e + 2e = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b + 2c - 3e = 0 \\ -a - 6b - 3c + 4e = 0 \\ 4a + b - e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = 4a + b \\ a + 2b + 2c - 12a - 3b = 0 \\ -a - 6b - 3c + 16a + 4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -11a - b + 2c = 0 \\ 15a - 2b - 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -11a + 2c \\ 15a + 22a - 4c - 3c = 0 \end{cases}$$

$$37a - 7c = 0 \quad \begin{cases} c = \frac{37}{7}a \\ b = -11a + \frac{37 \cdot 2}{7}a = \frac{-77+74}{7}a = -\frac{3}{7}a \\ e = 4a - \frac{3}{7}a = \frac{28-3}{7}a = \frac{25}{7}a \\ d = -2a + \frac{2 \cdot 3}{7}a - \frac{37 \cdot 2}{7}a + \frac{25 \cdot 3}{7}a = \frac{-14+6-74+75}{7}a = -a \end{cases}$$

Пусть $a = 7$

Тогда $d = -7$, $e = 25$

$$v = -7 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 25 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 75 \\ -14 + 75 \\ 14 + 50 \\ -7 - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 61 \\ 64 \\ -57 \end{pmatrix}$$

4.4 Варианты контрольной

4.4.1 1

$V = \mathcal{P}_{\leq 3}$ – многочлены степени ≤ 3

$$U = \operatorname{Ker} \left(L(p) = \int_1^2 p \, dx \right), \quad W = \langle x, x^2 + x^3 \rangle$$

Найти разм. и базисы $U, W, U \cap W, U + W$

Пусть $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\int p(x) \, dx = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + C$$

$$\int_1^2 p(x) \, dx = \frac{a}{4}(16-1) + \frac{b}{3}(8-1) + \frac{c}{2}(4-1) + d(2-1) = \frac{15a}{4} + \frac{7b}{3} + \frac{3c}{2} + d$$

$$45a + 28b + 18c + 12d = 0$$

Пусть $a = b = c = t$

$$45t + 28t + 18t + 12d = 0$$

$$91t + 12d = 0$$

$$d = -\frac{91}{12}t$$

$$U = \text{Ker}(\dots) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{91}{12} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -91 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Возьмём $v \in W \cap U$

$$v \in W \implies v = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v \in U \implies v = c \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12c \\ 12c \\ 12c \\ -91c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = c \\ b = c \\ -91c = 0 \end{cases}$$

$$W \cap U = \langle 0 \rangle, \quad \dim W \cap U = 0$$

Возьмём $v \in W + U$, то есть

$$v \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -91 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & -91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & -91 \end{vmatrix} = 91$$

$$\text{rk } A = 3 \implies \dim U + W = 3$$

$$\dim U \cap W = 0 \implies U \oplus W$$

4.4.2 2

$$V = \mathcal{P}_{\leq 3}$$

$$U = \text{Ker}(L(p) = \int_0^2 p \, dx)$$

$$W = \langle 1 + x, x^2 + 2x^3 \rangle$$

Найти размерность и базисы $U, W, U \cap W, U + W$

Пусть $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\int p(x) \, dx = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + C$$

$$\int_0^2 p(x) \, dx = \frac{a}{4}(16 - 0) + \frac{b}{3}(8 - 0) + \frac{c}{2}(4 - 0) + 2d = 4a + \frac{8}{3}b + 2c + 2d$$

$$2a + \frac{4}{3}b + c + d = 0$$

Пусть $a = b = c = t$

$$2t + \frac{4}{3}t + t + d = 0$$

$$d = -\frac{13}{3}t$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim U = 1$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Пусть $v \in U \cap W$

$$v \in U \implies v = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$v \in W \implies v = c \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2b \\ b \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ 3c \\ 3c \\ 13c \end{pmatrix}$$

$$U \cap W = \langle 0 \rangle, \quad \dim U \cap W = 0$$

Возьмём $v \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 \neq 0$$

$$\text{rk } A = 3 \implies \dim U + W = 3$$

$$U \cap W = \{0\} \implies U \oplus W$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4.4.3 3

$$V = \mathcal{P}_{\leq 3}, \quad U = \langle x, x + x^3 \rangle, \quad W = \langle 1 + x^2, 1 + 2x + x^2 + x^3 \rangle$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Докажем, что эти векторы – базис U :

Докажем ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что это верно только при $a = b = 0$

$$\dim U = 2, \quad \dim W = 2$$

Найдём базис $U \cap W$:

Возьмём $v \in U \cap W$

$$v \in U \implies v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v \in W \implies v = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ 2d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c+d \\ 2d \\ c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = d \\ 0 = c + d \\ a + b = 2d \\ 0 = c + d \end{cases} \quad \begin{cases} b = d \\ c = -d \\ a = d \end{cases}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim U \cap W = 1$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \implies \text{rk } A = 3 \implies \dim U + W = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит, его можно “выкинуть”. Докажем, что оставшийся набор – ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что это верно только при $a = b = c = 0$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4.4.4 4

$$V = \mathcal{P}_{\leq 3}, \quad U = \langle x^3, x + x^2 \rangle, \quad W = \langle 1 + x, 1 + 2x + x^2 + x^3 \rangle$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Очевидно, что эти наборы ЛНЗ \Rightarrow это – базисы, $\dim U = \dim W = 2$

Возьмём $v \in U \cap W$:

$$v \in U \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v \in W \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ 2d \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = d \\ b = d \\ b = c + 2d \\ 0 = c + d \end{cases} \quad \begin{cases} a = d \\ b = d \\ c = -d \end{cases}$$

$$U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim U \cap W = 1$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит, этот вектор можно убрать. Докажем, что оставшийся набор – базис. Достаточно доказать, что он – ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ c \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim U + W = 3$$

4.5 prep

Пусть $V = \mathbb{R}^4$

W – подпространство V , натянутое на векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

U – подпространство V , натянутое на векторы $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Найти размерность и базис для $W \cap U$ и $W + U$

- $W \cap U$

Возьмём $v \in W \cap U$:

$$v \in W \implies v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v \in U \implies v = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - b = 2c + d \\ 2a + b = -c - d \\ a + b = 3d \\ b = -c + 7d \end{cases} \quad \begin{cases} b = -c + 7d \\ a = 3d - b = 3d + c - 7d = c - 4d \\ c - 4d + c - 7d - 2c - d = 0 \\ 2c - 8d - c + 7d + c + d = 0 \end{cases} \quad a = b = c = d = 0 \implies W \cap U = \{0\}$$

- $W + U$

$$\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \text{базис } U + W$$

$$U \cap W = \{0\} \implies U \oplus W$$

Глава 5

Коллок. 1

5.1 1

Являются ли ЛЗ векторы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$a_1a + a_2bb + a_3c + a_4d = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ -3a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 4a_2 \\ 5a_2 \\ -2a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ 0 \\ -a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_4 \\ 2a_4 \\ 3a_4 \\ 8a_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 \\ -3a_1 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 \\ a_1 + 5a_2 + 3a_4 \\ a_1 - 2a_2 - a_3 + 8a_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ -3a_1 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_1 + 5a_2 + 3a_4 = 0 \\ a_1 - 2a_2 - a_3 + 8a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = -5a_2 - 3a_4$$

$$\begin{cases} -5a_2 - 3a_4 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 15a_2 + 9a_4 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 = 0 \\ -5a_2 - 3a_4 - 2a_2 - a_3 + 8a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a_2 + a_3 = 0 \\ 19a_2 + a_3 + 11a_4 = 0 \\ -7a_2 - a_3 + 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_3 = 3a_2$$

$$\begin{cases} 19a_2 + 3a_2 + 11a_4 = 0 \\ -7a_2 - 3a_2 + 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21a_2 + 11a_4 = 0 \\ -10a_2 + 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_4 = 2a_2$$

$$21a_2 + 22a_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Ответ: ЛНЗ.

5.2 2

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 + 4a_3 + 3a_4 = 0 \\ 4a_1 - 5a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ 6a_1 + 7a_2 + 2a_3 + 6a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = -3a_3 - 2a_1 \\ 2a_1 + 9a_3 + 6a_1 + 4a_3 + 3a_4 = 0 \\ 4a_1 + 15a_3 + 10a_1 - a_3 + a_4 = 0 \\ 6a_1 - 21a_3 - 14a_1 + 2a_3 + 6a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8a_1 + 13a_3 + 3a_4 = 0 \\ 14a_1 + 14a_3 + a_4 = 0 \\ -9a_1 - 19a_3 + 6a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = -14a_1 - 14a_3 \\ 8a_1 + 13a_3 - 42a_1 - 42a_3 = 0 \\ -9a_1 - 19a_3 - 84a_1 - 84a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -34a_1 - 29a_3 = 0 \\ -93a_1 - 103a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{29a_3}{34} \\ \frac{29 \cdot 93a_3}{34} - 103a_3 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Ответ: ЛНЗ.

5.3 3

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 + 5a_3 + 4a_4 = 0 \\ -2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_1 - 4a_2 - 8a_3 - 8a_4 = 0 \\ -2a_1 + a_2 + 2a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 2a_1 - 2a_4 \\ 3a_1 + 2a_1 - 2a_4 + 5a_3 + 4a_4 = 0 \\ -2a_1 + 4a_1 - 4a_4 + 3a_3 + 2a_4 = 0 \\ -2a_1 + 2a_1 - 2a_4 + 2a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5a_1 + 5a_3 + 2a_4 = 0 \\ 2a_1 + 3a_3 - 2a_4 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальные решения

Ответ: ЛЗ.

5.4 4

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 + 4a_3 - a_4 = 0 \\ 6a_1 + 2a_2 + 7a_3 + 5a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 12a_1 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = -a_3 - 3a_4 \\ 3a_1 - a_3 - 3a_4 + 4a_3 - a_4 = 0 \\ 6a_1 - 2a_3 - 6a_4 + 7a_3 + 5a_4 = 0 \\ 12a_1 - 4a_3 - 12a_4 + a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a_1 + 3a_3 - 4a_4 = 0 \\ 6a_1 + 5a_3 - a_4 = 0 \\ 12a_1 - 3a_3 - 10a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = 6a_1 + 5a_3 \\ 3a_1 + 3a_3 - 24a_1 - 20a_3 = 0 \\ 12a_1 - 3a_3 - 60a_1 - 50a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -21a_1 - 17a_3 = 0 \\ -48a_1 - 53a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{17a_3}{21} \\ \frac{48 \cdot 17a_3}{21} - 53a_3 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Ответ: ЛНЗ.

5.5 5

$$4x_1x_2 - 6x_1x_3 + x_2^2 + 8x_2x_3 - x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ -3 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot (-3) - (-3) \cdot (1-\lambda) \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \cdot (-1-\lambda) - (-\lambda) \cdot 4 \cdot 4 = \\ &= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) - 24 - 24 - 9(1-\lambda) + 4(1+\lambda) + 16\lambda = \lambda(1-\lambda^2) - 48 - 9 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 16\lambda = \\ &= \lambda - \lambda^3 - 53 + 29\lambda = -\lambda^3 + 30\lambda - 53 \end{aligned}$$

5.6 6

$$4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ 3 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda(-1-\lambda)(1-\lambda) + 2(-4)3 + 3 \cdot 2(-4) - 2 \cdot 2(1-\lambda) - (-\lambda)(-4)(-4) - 3 \cdot 3 \cdot (-1-\lambda) = \\ &= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) - 24 - 24 - 4(1-\lambda) + 16\lambda + 9(1+\lambda) = \lambda - \lambda^3 - 48 - 4 + 4\lambda + 16\lambda + 9 + 9\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 30\lambda - 41 \end{aligned}$$

5.7 7

$$4x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & -3 \\ 4 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2(-3)4 + 4 \cdot 2(-3) - 4(1-\lambda)4 - (-3)(-3)(-\lambda) - 2 \cdot 2(-1-\lambda) = \\ &= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) - 24 - 24 - 16 + 16\lambda + 9\lambda + 4 + 4\lambda \end{aligned}$$

5.8 11

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 + 5a_3 + 4a_4 = 0 \\ -a_1 + 3a_2 + 6a_3 + a_4 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_4 = 0 \\ 7a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -a_2 - a_4 \\ -a_2 - a_4 + 4a_2 + 5a_3 + 4a_4 = 0 \\ a_2 + a_4 + 3a_2 + 6a_3 + a_4 = 0 \\ -7a_2 - 7a_4 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a_2 + 5a_3 + 3a_4 = 0 \\ 2a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \\ -6a_2 - 3a_3 - 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = -2a_2 - 3a_3 \\ 3a_2 + 5a_3 - 6a_2 - 9a_3 = 0 \\ -6a_2 - 3a_3 + 10a_2 + 15a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3a_2 - 4a_3 = 0 \\ 4a_2 + 12a_3 = 0 \end{cases} \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Ответ: ЛНЗ.

Глава 6

Коллок. 2

6.1 1

Линейное отображение из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^3 задано формулой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ 3y + 2z \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого отображения в базисах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

и

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 - 1 + 6 \\ 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 3,5 \cdot \begin{pmatrix} g_2 - g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 - 15 \\ 3 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = -16 \\ 2a_1 + 4a_2 = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -16 - 3a_2 \\ -32 - 6a_2 + 4a_2 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -12,5 \\ a_1 = -16 - 3 \cdot (-12,5) = -16 + 37,5 = 21,5 \end{cases}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -12,5 \\ 21,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 21 \\ 2a_1 + 4a_2 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 21 - 3a_2 \\ 42 - 6a_2 + 4a_2 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 21 - 42 = -21 \\ a_2 = 14 \end{cases}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3,5 & -12,5 & -21 \\ 3,5 & 21,5 & 14 \end{pmatrix}$$

6.2 2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + 3y \\ x - 5y \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 2 + 6 \\ 1 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} = -3g_1 + 14g_2 - 3g_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 - 8 \\ 6 + 12 \\ 3 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 28 \\ -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 14 & 28 \\ -3 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

6.3 3

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• g_1

$$\begin{cases} 3 = 5a_1 \\ 0 = a_1 - a_2 \\ 0 = a_1 + 3a_2 + 3a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0, 6 \\ a_2 = a_1 = 0, 6 \\ a_3 = -\frac{a_1}{3} - a_2 = -0, 2 - 0, 6 = -0, 8 \end{cases}$$

• g_2

$$\begin{cases} 1 = 5a_1 \\ -2 = a_1 - a_2 \\ 0 = a_1 + 3a_2 + 3a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0, 2 \\ a_2 = a_1 + 2 = 2, 2 \\ a_3 = -\frac{a_1}{3} - a_2 = -\frac{1}{15} - \frac{11}{5} = -\frac{34}{15} \end{cases}$$

• g_3

$$\begin{cases} -1 = 5a_1 \\ 4 = a_1 - a_2 \\ 4 = a_1 + 3a_2 + 3a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -0, 2 \\ a_2 = a_1 - 4 = -3, 8 \\ a_3 = \frac{4}{3} - \frac{a_1}{3} - a_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{15} + \frac{19}{5} = \frac{20+1+57}{15} = \frac{78}{15} \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0, 6 & 0, 2 & -0, 2 \\ 0, 6 & 2, 2 & -3, 8 \\ -0, 8 & -\frac{34}{15} & \frac{78}{15} \end{pmatrix}$$

6.4 4

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• g_1

$$\begin{cases} 2a_1 = 5 \\ 5a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 2, 5 \\ a_2 = -5a_1 = -12, 5 \\ a_3 = -a_1 + 2a_2 = -2, 5 - 25 = -27, 5 \end{cases}$$

• g_2

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ 5a_1 + a_2 = 2 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0, 5 \\ a_2 = 2 - 5a_1 = 2 - 2, 5 = -0, 5 \\ a_3 = -a_1 + 2a_2 = -0, 5 - 1 = -1, 5 \end{cases}$$

• g_3

$$\begin{cases} 2a_1 = 3 \\ 5a_1 + a_2 = 1 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1,5 \\ a_2 = 1 - 5a_1 = 1 - 7,5 = -6,5 \\ a_3 = -0,5 - a_1 + 2a_2 = -0,5 - 1,5 - 13 = -15 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2,5 & 0,5 & 1,5 \\ -12,5 & -0,5 & -6,5 \\ -27,5 & -1,5 & -15 \end{pmatrix}$$

6.5 5

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-z \\ x+2y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-3 \\ 1+2+3 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0+5 \\ 0+2-5 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0-6 \\ 0+0+6 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ -0,4 & 1 & -1,2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

6.6 6

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ y-2z \\ x-y+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 1-4 \\ 1-1+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 1+12 \\ 0-1-6 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 13 \\ -7 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ -3 & 13 & -8 \\ 2 & -7 & 4 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7 7

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ y - 2z \\ x - y + z \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 1-4 \\ 1-1+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+12 \\ -1-6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 13 \\ -7 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ -3 & 13 & -8 \\ 2 & -7 & 4 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Глава 7

Умножение матриц

Элемент c_{ij} есть скалярное произведение i -й строки A и j -го столбца B

7.1 $A_{2 \times 1} \cdot B_{1 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

7.2 $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

7.3 $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 14 & 6 + 16 \\ 15 + 28 & 18 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

7.4 $A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 18 - 2 \\ 8 + 2 - 3 \\ 0 + 16 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

7.5 $A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 3}$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -7 & -8 & -6 \\ -4 & -2 & -9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1(-1) + 2(-7) + 3(-4) & 1(-5) + 2(-8) + 3(-2) & 1(-3) + 2(-6) + 3(-9) \\ 4(-1) + 5(-7) + 6(-4) & 4(-5) + 5(-8) + 6(-2) & 4(-3) + 5(-6) + 6(-9) \\ 7(-1) + 8(-7) + 9(-4) & 7(-5) + 8(-8) + 9(-2) & 7(-3) + 8(-6) + 9(-9) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 - 14 - 12 & -5 - 16 - 6 & -3 - 12 - 27 \\ -4 - 35 - 24 & -20 - 40 - 12 & -12 - 30 - 54 \\ -7 - 56 - 36 & -35 - 64 - 18 & -21 - 48 - 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -27 & -42 \\ -63 & -72 & -96 \\ -99 & -117 & -150 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Глава 8

Ядро линейного оператора

8.1 Греческий сайт

Линейный оператор \mathcal{L} задан матрицей L . Найти ядро и *дефект* \mathcal{L}

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 - 2 \\ -2 - 1 + 3 \\ 4 - 4 - 1 + 1 \\ 4 + 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker \mathcal{L} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Дефект есть размерность ядра, он равен 1.

Глава 9

Приведение матрицы к диагональному виду

9.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 + 3 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = \\ &= (1-2\lambda+\lambda^2)(5-\lambda) + 6 - 45 + 9\lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda = 5 - \lambda - 10\lambda + 2\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 41 + 11\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 \end{aligned}$$

$$\chi(-2) = 8 + 28 - 36 = 0$$

$-\lambda^3$	$+7\lambda^2$	-36	λ	$+2$
$-\lambda^3$	$-2\lambda^2$		$-\lambda^2$	$+9\lambda$
	$9\lambda^2$	-36		
	$9\lambda^2$	$+18\lambda$		
	-18λ	-36		

$$\chi(\lambda) = (\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18)$$

$$D = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{-2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Проверим:

$$\chi(3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}, \quad \chi(6) = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

• $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -7x_2 - x_3 \\ -21x_2 - 3x_3 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -20x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 3x_3 \\ x_1 + 4x_1 - 6x_3 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_1 - 3x_3 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_3 = -x_3 \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_3 \\ -5x_1 + x_1 + x_3 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_1 + x_3 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad -4x_1 + 4x_3 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \left(-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda(\lambda(1+\lambda) - 7) - 1 \right) + 6 = \\ &= \lambda \left(\lambda(\lambda + \lambda^2 - 7) - 1 \right) + 6 = \lambda \left(\lambda^2 + \lambda^3 - 7\lambda - 1 \right) + 6 = \lambda^3 + \lambda^4 - 7\lambda^2 - \lambda + 6 \end{aligned}$$

$$\chi(1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$$

λ^4	$+\lambda^3$	$-7\lambda^2$	$-\lambda$	$+6$	λ	-1
λ^4	$-\lambda^3$				λ^3	$+2\lambda^2$
	$2\lambda^3$	$-7\lambda^2$				-5λ
	$2\lambda^3$	$-2\lambda^2$				-6
		$-5\lambda^2$	$-\lambda$			
		$-5\lambda^2$	$+5\lambda$			
		-6λ	$+6$			

$$\chi(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$$

λ^3	$+2\lambda^2$	-5λ	-6	λ	$+1$
λ^3	$+\lambda^2$			λ^2	$+\lambda$
	λ^2	-5λ			-6
	λ^2	$+\lambda$			
		-6λ	-6		

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Проверим:

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 7 - 1 + 6 = 0$$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 1 + 6 = 0$$

$$\chi(-3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 6 - 9 \cdot 7 + 3 + 6 = 0$$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(6 - 7) - 2 + 6 = 0$$

• $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_3 = -3x_2 = 9x_1 \\ x_4 = -3x_3 = -27x_1 \\ -6x_1 - 3x_1 + 63x_1 - 54x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \\ -27 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & -27 & 8 \end{pmatrix}$$

9.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 9 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2-\lambda & 0 & 2 \\ 9 & 1-\lambda & 4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \left[(1-\lambda) \left((2-\lambda)(1-\lambda) - 4 \right) + 4 - 4(2-\lambda) \right] = (1-\lambda) \left[(1-\lambda) \left(2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 \right) + \underbrace{4 - 8 + 4\lambda}_{=-4(1-\lambda)} \right] = \\ &= (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 3\lambda - 2 - 4) = (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 3\lambda - 6) \end{aligned}$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Проверим:

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \chi\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right) &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{3+\sqrt{33}}{2} & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 - \frac{3+\sqrt{33}}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1 - \frac{3+\sqrt{33}}{2} & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 - \frac{3+\sqrt{33}}{2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{2-3+\sqrt{33}}{2} & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{4-3+\sqrt{33}}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 9 & \frac{2-3+\sqrt{33}}{2} & 4 \\ 1 & 2 & 0 & \frac{2-3+\sqrt{33}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 + \sqrt{33} & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 + \sqrt{33} & 0 & 4 \\ 0 & 18 & -1 + \sqrt{33} & 8 \\ 2 & 4 & 0 & -1 + \sqrt{33} \end{vmatrix} = \\ &= (\sqrt{33} - 1) \begin{vmatrix} \sqrt{33} - 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 + \sqrt{33} & 4 \\ 2 & 4 & \sqrt{33} - 1 \end{vmatrix} \sim (\sqrt{33} - 1) \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{33} & 4 \\ 4 & \sqrt{33} - 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 + \sqrt{33} & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (\sqrt{33} - 1) \left((1 + \sqrt{33})(\sqrt{33} - 1) - 16 \right) + 2 \left(16 - 8(1 + \sqrt{33}) \right) = (\sqrt{33} - 1)(33 - 1 - 16) + 2(16 - 8 - 8\sqrt{33}) = \\ &= 16\sqrt{33} - 16 + 16 - 16\sqrt{33} = 0 \end{aligned}$$

Аналогично $\chi\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 9x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Матрица не диагонализуема

9.4 527

9.4.1 a

$$Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \left((2-\lambda)(5-\lambda) - 4 \right) - (5-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)(10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4) - 5 + \lambda = (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) - 5 + \lambda = \lambda^2 - 7\lambda + 6 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda - 5 + \lambda = \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 1 \end{aligned}$$

9.4.2 b

$$Q = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 4 - \lambda + (1-\lambda) \left((1-\lambda)(4-\lambda) + 4 \right) = \\ &= 4 - \lambda + (1-\lambda)(4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 4) = 4 - \lambda + (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 8) = 4 - \lambda + \lambda^2 - 5\lambda + 8 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 14\lambda + 12 \end{aligned}$$

9.4.3 c

$$Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \ker &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\bullet \operatorname{tr} A = \sum \lambda \implies \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.4.4 d

$$Q = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \\ &+ (1-\lambda) \left((1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (1-\lambda)(2+\lambda) + 4 + (2+\lambda) - 2 + (2+\lambda) - 2 + (1-\lambda)(2+\lambda) + 1 + (1-\lambda) \left((1-\lambda) \left(-(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (2+\lambda) - 2 - 2 - (1-\lambda) \right) = \\ &= 2 + \cancel{\lambda} - \cancel{2\lambda} - \lambda^2 + 4 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda^2} + \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda^2} + 2 + \cancel{\lambda} - \cancel{2\lambda} - \lambda^2 + 1 + (1-\lambda) \left((1-\lambda)(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-4) + \cancel{\lambda} + \lambda - \cancel{\lambda^2} - 2 - 1 + \lambda \right) = \\ &= 2 - \lambda^2 + 4 + 2 - \lambda^2 + 1 + (1-\lambda) \left((1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6) + 2\lambda - 3 \right) = -2\lambda^2 + 9 + (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6 - \lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda + 2\lambda - 3) = \\ &= -2\lambda^2 + 9 + (1-\lambda)(-\lambda^3 + 9\lambda - 9) = -2\lambda^2 + \cancel{\lambda^3} - \lambda^3 + 9\lambda - \cancel{\lambda^3} + \lambda^4 - 9\lambda^2 + 9\lambda = \lambda^4 - \lambda^3 - 11\lambda^2 + 18\lambda = \\ &= \lambda(\lambda^3 - \lambda^2 - 11\lambda + 18) \end{aligned}$$

Проверим:

$$\begin{aligned} \chi(0) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ \chi(2) &= -8 + 4 - 22 + 18 = 0 \end{aligned}$$

λ^3	$-\lambda^2$	-11λ	$+18$	λ	-2
λ^3	$-2\lambda^2$			λ^2	$+\lambda$
	λ^2	-11λ			-9
	λ^2	-2λ			
	-9λ	$+18$			

$$D = 1 + 36 = 37$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Проверим:

$$\begin{aligned} \chi\left(\frac{-1 + \sqrt{37}}{2}\right) &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 - \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 - \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 - \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2 + 1 - \sqrt{37} & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 + 1 - \sqrt{37} & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 + 1 - \sqrt{37} & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -4 + 1 - \sqrt{37} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - \sqrt{37} & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 - \sqrt{37} & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 3 - \sqrt{37} & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -3 - \sqrt{37} \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 - \sqrt{37} & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -3 - \sqrt{37} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 - \sqrt{37} & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -3 - \sqrt{37} \end{vmatrix} + (3 - \sqrt{37}) \begin{vmatrix} 3 - \sqrt{37} & -2 & -2 \\ -2 & 3 - \sqrt{37} & -4 \\ -2 & -4 & -3 - \sqrt{37} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

9.4.5 e

$$Q = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda(1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{4} + \lambda(1 - \lambda)\right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4}\right) \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

• $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = \frac{1}{2}$

Проверим:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ Проверим:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(1 + \sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(1 + \sqrt{2}) \end{vmatrix} = \\ & = (1 - \sqrt{2}) \begin{vmatrix} -(1 + \sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 1 & -(1 + \sqrt{2}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 1 & -(1 + \sqrt{2}) \end{vmatrix} = \\ & = -(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) \begin{vmatrix} -(1 + \sqrt{2}) & 1 \\ 1 & -(1 + \sqrt{2}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -(1 + \sqrt{2}) & 1 \\ 1 & -(1 + \sqrt{2}) \end{vmatrix} = \\ & = \left(-(1 - 2) - 1 \right) \left((1 + \sqrt{2})^2 - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - (1 + \sqrt{2})x_2 = 0 \\ -(1 + \sqrt{2})x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - (1 + \sqrt{2})x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -(1 - \sqrt{2})x_1 \\ x_1 + (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})x_1 = 0 \\ x_4 = (1 + \sqrt{2})x_3 = 0 \\ x_3 - (1 + \sqrt{2})^2 x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + (1 - 2)x_1 = 0 \\ x_3 - (1 + 2\sqrt{2} + 2)x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = -(1 - \sqrt{2})x_1 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - (1 - \sqrt{2})x_2 = 0 \\ -(1 - \sqrt{2})x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - (1 - \sqrt{2})x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}x_4^2$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.5 535

9.5.1 a

$$Q = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \left(-\lambda(1-\lambda) - 4 \right) + 4\lambda = \\ &= (2-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 4) + 4\lambda = -2\lambda + 2\lambda^2 - 8 + \lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 \end{aligned}$$

$$\chi(1) = -1 + 3 + 6 - 8 = 0$$

Проверим:

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$-\lambda^3$	$+3\lambda^2$	$+6\lambda$	-8	λ	-1
$-\lambda^3$	$+\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+2\lambda$
	$2\lambda^2$	$+6\lambda$			
	$2\lambda^2$	-2λ			
	8λ	-8			

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda^2 - 4\lambda) + (2\lambda - 8) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

Проверим:

$$\chi(4) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 4 = 0$$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 = 0$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = -x_2 = 2x_3 \\ 4x_3 - 6x_3 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_2 = 2x_1 \\ -2x_1 + 6x_1 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = 2 - 4 + 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = CY$$

9.5.2 b

$$Q = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \left((2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \right) - 4(3-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)(6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-4) - 12+4\lambda = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+2) - 12+4\lambda = \lambda^2-5\lambda+2-\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-12+4\lambda = \\ &= -\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda-10 \end{aligned}$$

$$\chi(-1) = 1 + 6 + 3 - 10 = 0$$

$-\lambda^3$	$+6\lambda^2$	-3λ	-10	λ	$+1$
$-\lambda^3$	$-\lambda^2$			$-\lambda^2$	7λ
	$7\lambda^2$	-3λ			
	$7\lambda^2$	$+7\lambda$			
	-10λ	-10			

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = -1$

Проверим:

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(12 - 4) - 16 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = x_2 = 2x_3 \\ -4x_3 + 6x_3 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$

Проверим:

$$\chi(5) = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 - 6x_1 + 4x_1 = 0 \end{cases} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$

Проверим:

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2x_2 \\ x_1 = -x_3 = -2x_2 \\ -2x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) = 2 - 4 + 2 = 0, \quad (u_2, u_3) = -2 - 2 + 4 = 0$$

$$v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{u_1}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = -x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

9.5.3 c

$$Q = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \left((4-\lambda)(5-\lambda) - 4 \right) - 4(5-\lambda) = \\ &= (3-\lambda) \left(20 - 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 \right) - 20 + 4\lambda = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 16) - 20 + 4\lambda = 3\lambda^2 - 27\lambda + 48 - \lambda^3 + 9\lambda^2 - 16\lambda - 20 + 4\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 \end{aligned}$$

$$\chi(1) = -1 + 12 - 39 + 28 = 0$$

$-\lambda^3$	$+12\lambda^2$	-39λ	$+28$	λ	-1
$-\lambda^3$	$+\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+11\lambda$
	$11\lambda^2$	-39λ			
	$11\lambda^2$	-11λ			
		-28λ	$+28$		

$$\lambda^2 - 11\lambda + 28$$

$$D = 121 - 4 \cdot 28 = 121 - 112 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

9.5.4 d

$$Q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \left((5-\lambda)^2 - 16 \right) - 2 \left(2(5-\lambda) - 8 \right) - 2 \left(-8 + 2(5-\lambda) \right) = (2-\lambda)(25 - 10\lambda + \lambda^2 - 16) - 4(10 - 2\lambda - 8) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) - 4(2 - 2\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 9\lambda + 9) + 8(\lambda - 1) = (2-\lambda)(\lambda - 9)(\lambda - 1) + 8(\lambda - 1) = \\ &= (\lambda - 1) \left((2-\lambda)(\lambda - 9) + 8 \right) = (1-\lambda) \left(2\lambda - 18 - \lambda^2 + 9\lambda + 8 \right) = -(1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = -(1-\lambda)(\lambda - 10)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 10$

$$\begin{vmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ = -2(-25 + 16) - 5 - 4 - 4 - 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 - \text{proj}_{v_2} u_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_2, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_2 - \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{3} v_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ -1 - 0 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Нормализуем:

$$|v_3| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2$$

9.5.5 e

$$Q = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2-\lambda \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \left((2+\lambda)^2 - 16 \right) + 2 \left(2(2+\lambda) - 8 \right) + 2 \left(-8 + 2(2+\lambda) \right) = (1-\lambda)(4+4\lambda+\lambda^2-16) + 4(4+2\lambda-8) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-12) + 4(2\lambda-4) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+6\lambda-12) + 8(\lambda-2) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+6) + 8(\lambda-2) = (\lambda-2) \left((1-\lambda)(\lambda+6) + 8 \right) = (\lambda-2)(\lambda+6-\lambda^2-6\lambda+8) = -(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14) = \\ &= -(\lambda-2)(\lambda^2+7\lambda-2\lambda-14) = -(\lambda-2)(\lambda+7)(\lambda-2) \end{aligned}$$

- $\lambda = 2$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -7$

$$\begin{aligned} \chi(-7) &= \begin{vmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 2(25-16) - 5 - 4 - 4 - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_2, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_2 - \frac{1}{2} v_1 - \frac{3}{3} v_2 = \begin{pmatrix} 2-0-1 \\ 0-\frac{1}{2}-1 \\ 1-\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Нормализуем:

$$|v_3| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{22}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

$$Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2$$

9.5.6 f

$$Q = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 6-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (4-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -4(6-\lambda) + (4-\lambda) \left((5-\lambda)(6-\lambda) - 4 \right) = -24 + 4\lambda + (4-\lambda) \left(30 - 11\lambda + \lambda^2 - 4 \right) = 4\lambda - 24 + (4-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 26) = \\ &= 4\lambda - 24 + 4\lambda^2 - 44\lambda + 104 - \lambda^3 + 11\lambda^2 - 26\lambda = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 66\lambda + 80 \\ \chi(2) &= -8 + 60 - 132 + 80 = 0 \end{aligned}$$

$-\lambda^3$	$+15\lambda^2$	-66λ	$+80$	λ	-2
$-\lambda^3$	$+2\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+13\lambda$
	$13\lambda^2$	-66λ			
	$13\lambda^2$	-26λ			
		-40λ	$+80$		

$$\lambda^2 - 13\lambda + 40$$

$$D = 169 - 160 = 9 \quad \lambda_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

• $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} \chi(2) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 = 0 \\ &\quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• $\lambda = 5$

$$\begin{aligned} \chi(5) &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• $\lambda = 8$

$$\begin{aligned} \chi(8) &= \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 2 = 0 \\ &\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ортогонализуем:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ v_2 &= u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{3}{9} v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ -1 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ v_3 &= u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 - \frac{1}{9} v_1 + \frac{2}{9} v_2 = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \\ 1 - \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \\ 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{\sqrt{194}} \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{194}} \end{pmatrix} \\ Q &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 \end{aligned}$$

9.5.7 g

$$Q = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 6-\lambda \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (3-\lambda) \left((6-\lambda)(3-\lambda) - 4 \right) + 2 \left(-2(3-\lambda) - 8 \right) - 2 \left(4 + 4(6-\lambda) \right) = \\ &= (3-\lambda)(18 - 6\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4) + 2(-6 + 2\lambda - 8) - 2(4 + 24 - 4\lambda) = \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) + 2(2\lambda - 14) - 2(28 - 4\lambda) = 3\lambda^2 - 27\lambda + 42 - \lambda^3 + 9\lambda^2 - 14\lambda + 4\lambda - 28 - 56 + 8\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 29\lambda - 42 \end{aligned}$$

$$\chi(-1) = 1 + 12 + 29 - 42 = 0$$

$-\lambda^3$	$+12\lambda^2$	-29λ	-42	λ	$+1$
$-\lambda^3$	$-\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+13\lambda$
	$13\lambda^2$	-29λ			
	$13\lambda^2$	$+13\lambda$			
		-42λ	-42		

$$\lambda^2 - 13\lambda + 42 \quad D = 169 - 4 \cdot 42 = 169 - 168 = 1 \quad \lambda_{1,2} = \frac{13 \pm 1}{2} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 - 2 - 2 - 2 - 1 - 7 = 0$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -a + 7b + 2c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a + c \\ -a + 7a + 7c + 2c = 0 \\ a + a + c + 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6a + 9c = 0 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = \frac{5}{2}c \end{cases} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$

$$\chi(6) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 3 - 2 = 0$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 7$

$$\chi(7) = \begin{vmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = -x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2$$

9.5.8 h

$$Q = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7-\lambda) \left((5-\lambda)(3-\lambda) - 16 \right) - 16(3-\lambda) = (7-\lambda)(15-8\lambda+\lambda^2-16) - 48 + 16\lambda = (7-\lambda)(\lambda^2-8\lambda-1) - 48 + 16\lambda = \\ &= 7\lambda^2 - 56\lambda - 7 - \lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda - 48 + 16\lambda = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 39\lambda - 55 \\ \chi(-1) &= 1 + 15 + 39 - 55 = 0 \end{aligned}$$

$-\lambda^3$	$+15\lambda^2$	-39λ	-55	λ	$+1$
$-\lambda^3$	$-\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+16\lambda$
	$16\lambda^2$	-39λ			
	$16\lambda^2$	-16λ			
		-55λ	-55		

$$\lambda^2 - 16\lambda + 55 \quad D = 256 - 220 = 36 \quad \lambda_{1,2} = \frac{16 \pm 6}{2} = 8 \pm 3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = -1$

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 11$

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 = 0$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{1}{3} v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \\ 1 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 + \frac{1}{3} v_1 - \frac{1}{3} v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = -x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2$$

9.5.9 i

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \left((2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \right) + 2 \left(-2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \right) - \\ &\quad - \left(-2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (2-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (2-\lambda)^2 \left((2-\lambda)(2-\lambda) - 4 - 1 \right) - 4 \left((2-\lambda)(2-\lambda) - 4 \right) - 4 - 4 - (2-\lambda)(2-\lambda) = \\ &= (2-\lambda)^2 (4-4\lambda+\lambda^2-5) - 4(4-4\lambda+\lambda^2-4) - 8 - 4 + 4\lambda - \lambda^2 = (2-\lambda)^2 (\lambda^2-4\lambda-1) - 4\lambda(\lambda-4) - 12 + 4\lambda - \lambda^2 = \\ &= (4-4\lambda+\lambda^2)(\lambda^2-4\lambda-1) - 4\lambda^2 + 16\lambda - 12 + 4\lambda - \lambda^2 = 4\lambda^2 - 16\lambda - 4 - 4\lambda^3 + 16\lambda + 4\lambda + \lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 20\lambda - 12 = \\ &= \lambda^4 - 8\lambda^3 - 2\lambda^2 + 24\lambda - 16 \end{aligned}$$

9.5.10 j

$$Q = 2x_1x_2 + 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\dim \ker = 4 - \text{rk } \chi = 2$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = -1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\dim \ker = 4 = \text{rk } \chi = 2$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

9.5.11 k

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\dim \ker = 4 - \text{rk } \chi(1) = 2$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} \chi(-1) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4(4-1) - 2(-2) - (4-1) - (-(-1)) + (-1) - (4-1) = 2(4-1) + 4 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\dim \ker = 4 - \text{rk } \chi(-1) = 1$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = \text{tr } A - 1 - 1 + 1 = 4 - 1 - 1 + 1 = 3$

$$\begin{aligned} \chi(3) &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (4-1) - (-(-1)) + (-1) - (4-1) = 4(4-1) - 2(2) - (4-1) - 1 - 1 - (4-1) = \\ &= 2(4-1) - 4 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_4^2$$

9.5.12 1

$$Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Любой минор 3×3 содержит одинаковые строки, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$

$$\dim \ker = 4 - \text{rk } A = 3$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = \text{tr } A - 3 \cdot 1 = -3$

$$\begin{aligned} \chi(-3) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{-2} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\ &+ \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{-2} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 8(9 - 1) + 4(-3 - 1) + 4(-1 - 3) - 4(3 + 1) - 4(1 + 3) = 64 + 8(-4) - 8 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2$$

9.5.13 m

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \chi(1) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \left(- \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) + 2 \left(- \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 2(-2) + (1 - 9) + 3 \left(-(-(-3)) + 3(9 - 4) \right) + 2 \left(-(-2) - 2(9 - 4) \right) = -4 - 8 + 3(-3 + 15) + 2(-2 - 10) = \\ &= -12 + 36 - 24 = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} \chi(-1) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \left(2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ 3 \left(- \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) + 2 \left(- \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) = \\ &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 3(4-2) + (-4+3) + 4(2-6) - 4(6-2) - (-3+4) + 5(9-4) = \\ &= 12 - \cancel{6} - \cancel{4} + \cancel{3} + \cancel{8} - 24 - 24 + 8 + \cancel{3} - \cancel{4} + 45 - 20 \end{aligned}$$

9.6 prep

$$\begin{aligned} Q &= x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A_{n-2} = \dots = \frac{1}{*} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \chi\left(\frac{1}{2}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\chi_{n-1} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \chi_{n-2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\chi_{n-1} - \frac{1}{4}\chi_{n-2} \end{aligned}$$

Глава 10

Разложение дроби на простейшие

10.1 Пример из Фаддеева

Разложить над \mathbb{R} дробь

$$\frac{1}{x^{2n} + 1}$$

Сперва разложим над \mathbb{C} :

Корни многочлена $F(x) = x^{2n} + 1$ лежат на единичной окружности и попарно сопряжены.

Именно, с корнями

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

сопряжены корни $\overline{x_k} = x_{2n+1-k}$

$$F'(x) = 2nx^{2n-1}$$

$$F'(x_k) = 2nx_k^{2n-1} = 2nx_k^{-1}x_k^{2n} = -2nx_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{1}{x^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x - x_k} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{x_k}}{x - \overline{x_k}}$$

Объединив теперь попарно сопряжённые слагаемые, получаем

$$\frac{1}{x^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x - x_k} + \frac{\overline{x_k}}{x - \overline{x_k}} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{(x_k + \overline{x_k})x - 2}{x^2 - (x_k + \overline{x_k})x + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

10.2 Задача с допсы

10.2.1

$$\frac{x^2}{x^5 + 1}$$

Над \mathbb{C} : Корни многочлена $F(x) = x^5 + 1$ лежат на единичной окружности и попарно сопряжены

$$x_k = \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{\cos \pi + i \sin \pi} = 1^{1/5} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{5}, \quad k = 0, \dots, 4$$

Корни расположены как показано на рис. 10.1. То есть $\overline{x_4} = x_0, \overline{x_3} = x_1, x_2 = -1$

$$F'(x) = 5x^4, \quad F'(x_k) = 5x_k^4 = 5x_k^{-1}x_k^5 = -5x_k^{-1}$$

При этом,

$$x_k + \overline{x_k} = 2 \operatorname{Re} x_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{5}, \quad x_k \overline{x_k} = |x_k|^2 = 1$$

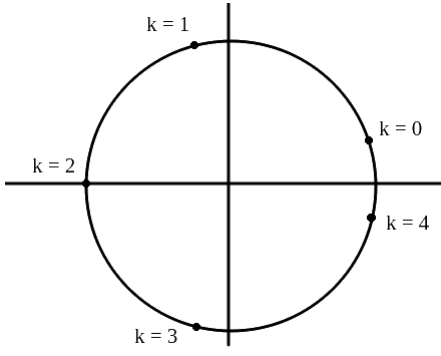


Рис. 10.1: Расположение x_k на единичной окружности

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^5 + 1} &= \sum_{k=0}^4 \frac{1}{(x - x_k)(-5x_k^{-1})} = -\frac{1}{5} \sum \frac{x_k}{x - x_k} = -\frac{1}{5} \left(\frac{x_1}{x - x_1} + \frac{x_2}{x - x_2} + \frac{x_3}{x - x_3} + \frac{x_4}{x - x_4} \right) = \\
 &= -\frac{1}{5} \left(\frac{x_1}{x - x_1} + \frac{\bar{x}_1}{x - \bar{x}_1} + \frac{x_3}{x - x_3} + \frac{\bar{x}_3}{x - \bar{x}_3} - \frac{1}{x + 1} \right) = \\
 &= -\frac{1}{5} \left(\frac{x_1(x - \bar{x}_1) + \bar{x}_1(x - x_1)}{(x - x_1)(x - \bar{x}_1)} + \frac{x_3(x - \bar{x}_3) + \bar{x}_3(x - x_3)}{(x - x_3)(x - \bar{x}_3)} - \frac{1}{x + 1} \right) = \\
 &= -\frac{1}{5} \left(\frac{x_1x - x_1\bar{x}_1 + \bar{x}_1x - \bar{x}_1x_1}{x^2 - xx_1 - x\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_1} + \frac{x_3x - x_3\bar{x}_3 + \bar{x}_3x - \bar{x}_3x_3}{x^2 - xx_3 - x\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_3} - \frac{1}{x + 1} \right) = \\
 &= -\frac{1}{5} \left(\frac{x(x_1 + \bar{x}_1) - 2}{x^2 - x(x_1 + \bar{x}_1) + 1} + \frac{x(x_3 + \bar{x}_3) - 2}{x^2 - x(x_3 + \bar{x}_3) + 1} - \frac{1}{x + 1} \right) = \\
 &= -\frac{1}{5} \left(\frac{2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} - 2}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} + 1} + \frac{2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} - 2}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} + 1} - \frac{1}{x + 1} \right) = -\frac{4}{5} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{5} x - 1}{x^2 - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} x + 1} + \frac{1}{5(x + 1)}
 \end{aligned}$$

10.3 626

10.3.1 a

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C)$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 0 \\ A - C = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ C = A - 1 = -B - 1 \\ -B - B - B - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{2}{3} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3(x - 1)} - \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)}$$

10.3.2 b

$$\frac{x^2}{x^4 - 16} = \frac{x^2}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} = \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 &= A(x + 2)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 - 4) = \\
 &= Ax^3 + 2Ax^2 + 4Ax + 8A + Bx^3 - 2Bx^2 + 4Bx - 8B + Cx^3 - 4Cx + Dx^2 - 4D = \\
 &= (A + B + C)x^3 + (2A - 2B + D)x^2 + (4A + 4B - 4C)x + (8A - 8B - 4D)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 2A - 2B + D = 1 \\ A + B - C = 0 \\ 2A - 2B - D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 0 \\ A + B = 0 \\ D = 1 - 2A + 2B \\ 2A - 2B - 1 + 2A - 2B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ D = 1 + 2B + 2B = 1 + 4B \\ 4A - 4B - 1 = 0 \end{cases}$$

$$-B = B + \frac{1}{4} \quad \begin{cases} B = -\frac{1}{8} \\ A = \frac{1}{8} \\ D = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$$

10.3.3 c

$$\frac{1}{x^4+4}$$

Разложим над \mathbb{C} :

$$4 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$$

Корни многочлена $F(x) = x^4 + 4$ имеют вид

$$x_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi k}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

При этом,

- $x_0 = \sqrt{2}$
- $\overline{x_1} = x_3$
- $x_2 = -\sqrt{2}$
- $x_k + \overline{x_k} = 2 \operatorname{Re} x_k = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi k}{2}$
- $x_k \overline{x_k} = |x_k|^2 = 1$

$$F'(x) = 4x^3, \quad F'(x_k) = 4x_k^3 = -4x_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4+4} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{(x-x_k)(-4x_k^{-1})} = -\frac{1}{4} \left(\frac{x_0}{x-x_0} + \frac{x_2}{x-x_2} + \frac{x_1}{x-x_1} + \frac{\overline{x_1}}{x-\overline{x_1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{x_1(x-\overline{x_1}) + \overline{x_1}(x-x_1)}{(x-x_1)(x-\overline{x_1})} \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{x(x_1+\overline{x_1}) - 2x_1\overline{x_1}}{x^2 - x(x_1+\overline{x_1}) + x_1\overline{x_1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{x \cdot 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2}{x^2 - x \cdot 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} + 1} \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - \frac{2}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

10.3.4 d

$$\frac{x^2}{x^5+27}$$

Разложим над \mathbb{C} :

$$-27 = 27(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Корни многочлена $F(x) = x^5 + 27$ имеют вид

$$x_k = 27^{1/5} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{5} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

При этом,

- $x_0 = \sqrt[5]{27}$
- $x_1 = \overline{x_3}$
- $x_2 = -\sqrt[5]{27}$
- $x_k + \overline{x_k} = 2 \operatorname{Re} x_k = 2 \cdot 27^{1/5} \cos \frac{(2k+1)\pi}{5}$
- $x_k \overline{x_k} = |x_k|^2 = 27^{2/5}$

$$F'(x) = 5x^4, \quad F'(x_k) = 5x_k^4 = -27 \cdot 5x_k^{-1}$$

$$x_k^m = 27^{m/5} \left(\cos \frac{(2k+1)m\pi}{5} + i \sin \frac{(2k+1)m\pi}{5} \right)$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^5 + 27} &= \sum_{k=0}^4 \frac{x_k^2}{(x - x_k)(-27 \cdot 5x_k^{-1})} = -\frac{1}{135} \left(\frac{x_2^3}{x - x_2} + \sum_{k=0}^1 \frac{x_k^3}{x - x_k} + \sum_{k=0}^1 \frac{\overline{x_k}^3}{x - \overline{x_k}} \right) = \\ &= -\frac{1}{135} \left(\frac{-27^{3/5}}{x - \sqrt[5]{27}} + \sum \frac{x_k^3(x - \overline{x_k}) + \overline{x_k}^3(x - x_k)}{(x - x_k)(x - \overline{x_k})} \right) = \\ &= -\frac{1}{135} \left(\frac{-27^{3/5}}{x - \sqrt[5]{27}} + \sum \frac{x(x_k^3 + \overline{x_k}^3) - x_k^2 x_k \overline{x_k} - \overline{x_k}^2 \overline{x_k} x_k}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + x_k \overline{x_k}} \right) = \\ &= -\frac{1}{135} \left(\frac{-27^{3/5}}{x - \sqrt[5]{27}} + \sum \frac{x \cdot 2 \cdot 27^{3/5} \cos \frac{(2k+1)3\pi}{5} - 27^2(x_k^2 + \overline{x_k}^2)}{x^2 - x \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{27} \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} + 27^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{135} \left(\frac{-27^{3/5}}{x - \sqrt[5]{27}} + \sum \frac{x \cdot 2 \cdot 27^{3/5} \cos \frac{(2k+1)3\pi}{5} - 2 \cdot 27^{4/5} \cos \frac{(2k+1)2\pi}{5}}{x^2 - x \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{27} \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} + 27^2} \right) = \\ &= \frac{27^{3/5}}{135} \left(\frac{1}{x - \sqrt[5]{27}} - 2 \sum_{k=0,1} \frac{x \cos \frac{(2k+1)3\pi}{5} - \sqrt[5]{27} \cos \frac{(2k+1)2\pi}{5}}{x^2 - 2x \sqrt[5]{27} \cos \frac{(2k+1)\pi}{5} + 27^2} \right) \end{aligned}$$

10.3.5 e

$$\frac{x^m}{x^{2n+1} - 1}, \quad m < 2n + 1$$

Разложим над \mathbb{C} :

Корни многочлена $F(x) = x^{2n+1} - 1$ имеют вид:

$$x_k = \cos \frac{2\pi k}{2n+1} + i \sin \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

Они разбиваются на пары сопряжённых: x_k при $k = 1, 2, \dots, n$, сопряжённые к ним и $x_0 = 1$

$$F'(x) = (2n+1)x^{2n}, \quad F'(x_k) = (2n+1)x_k^{2n} = (2n+1)x_k^{-1}$$

$$f(x_k) = x_k^m = \cos \frac{2\pi km}{2n+1} + i \sin \frac{2\pi km}{2n+1} = x_{km}$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{x^{2n+1} - 1} &= \frac{x_0^m}{(x - x_0)(2n+1)x_0^{-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{x_k^m}{(x - x_k)(2n+1)x_k^{-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{\overline{x_k}^m}{(x - \overline{x_k})(2n+1)\overline{x_k}^{-1}} = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x-1} + \sum \left(\frac{x_k^{m+1}}{x - x_k} + \frac{\overline{x_k}^{m+1}}{x - \overline{x_k}} \right) \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x-1} + \sum \frac{x_{k(m+1)}(x - \overline{x_k}) + \overline{x_{k(m+1)}}(x - x_k)}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + x_k \overline{x_k}} \right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x-1} + \sum \frac{x_{k(m+1)}x - x_{k(m+1)}\overline{x_k} + \overline{x_{k(m+1)}}x - \overline{x_{k(m+1)}}x_k}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x-1} + \sum \frac{x(x_{k(m+1)} + \overline{x_{k(m+1)}}) - (x_{km}x_k\overline{x_k} + \overline{x_{km}}\overline{x_k}x_k)}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi k}{2n+1} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x-1} + 2 \sum \frac{x \cos \frac{2\pi k(m+1)}{2n+1} - \cos \frac{2\pi km}{2n+1}}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi k}{2n+1} + 1} \right) \end{aligned}$$

10.3.6 f

$$\frac{x^m}{x^{2n+1} + 1}, \quad m < 2n + 1$$

Разложим над \mathbb{C} :

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

Корни многочлена $F(x) = x^{2n+1} + 1$ имеют вид:

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

Они разбиваются на:

- x_k при $k = 0, \dots, n-1$
- сопряжённые им
- $x_n = -1$

$$F'(x) = (2n+1)x^{2n}, \quad F'(x_k) = -(2n+1)x_k^{-1}$$

$$x_k^m = \cos \frac{(2k+1)m\pi}{2n+1} + i \sin \frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{x^{2n+1}+1} &= \frac{x_n^m}{(x-x_n)(-(2n+1)x_n^{-1})} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k^m}{(x-x_k)(-(2n+1)x_k^{-1})} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{x_k}^m}{(x-\overline{x_k})(-(2n+1)\overline{x_k}^{-1})} = \\ &= -\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum \left(\frac{x_k^{(m+1)}}{x-x_k} + \frac{\overline{x_k}^{(m+1)}}{x-\overline{x_k}} \right) \right) = \\ &= -\frac{(-1)^{m+1}}{2n+1} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum \frac{x_k^{(m+1)}(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}^{(m+1)}(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})} \right) = \\ &= -\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum \frac{x(x_k^{(m+1)} + \overline{x_k}^{(m+1)}) - (x_k^m \overline{x_k} + \overline{x_k}^m x_k)}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + x_k \overline{x_k}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum \frac{2x \cos \frac{(2k+1)(m+1)\pi}{2n+1} - (x_k^m + \overline{x_k}^m)}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1} \right) = \\ &= -\frac{1}{2n+1} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + 2 \sum \frac{x \cos \frac{(2k+1)(m+1)\pi}{2n+1} - \cos \frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1} \right) \end{aligned}$$

10.3.7 g

$$\frac{1}{x^{2n}-1}$$

Над \mathbb{C} :

Корни многочлена $F(x) = x^{2n} - 1$ имеют вид

$$x_k = \cos \frac{2\pi k}{2n} + i \sin \frac{2\pi k}{2n} = \cos \frac{\pi k}{n} + i \sin \frac{\pi k}{n}, \quad k = 0, \dots, 2n-1$$

Они разбиваются на x_k при $k = 1, \dots, n-1$, сопряжённые им $\overline{x_k} = x_{2n-1-k}$, $x_0 = 1$ и $x_n = -1$

$$F'(x) = 2nx^{2n-1}, \quad F'(x_k) = 2nx_k^{2n-1} = 2nx_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{2n}-1} &= \frac{1}{(x-x_0)(2nx_0^{-1})} + \frac{1}{(x-x_n)(2nx_n^{-1})} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(x-x_k)(2nx_k^{-1})} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x-\overline{x_k})(2n\overline{x_k}^{-1})} = \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{x_0}{x-x_0} + \frac{x_n}{x-x_n} + \sum \left(\frac{x_k}{x-x_k} + \frac{\overline{x_k}}{x-\overline{x_k}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum \frac{x_k(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})} \right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum \frac{x_k x - x_k \overline{x_k} + \overline{x_k} x - \overline{x_k} x_k}{x^2 - x x_k - x \overline{x_k} + x_k \overline{x_k}} \right) = \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum \frac{x(x_k + \overline{x_k}) - 2}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + 1} \right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum \frac{2x \cos \frac{\pi k}{n} - 2}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi k}{n} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x \cos \frac{\pi k}{n} - 1}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi k}{n} + 1} \right) \end{aligned}$$

10.3.8 h

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1}$$

Разложим над \mathbb{C} :

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

Корни многочлена $F(x) = x^{2n} + 1$ имеют вид:

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, \dots, 2n-1$$

Они разбиваются на x_k при $k = 0, \dots, n-1$ и сопряжённые к ним

$$F'(x) = 2nx^{2n-1}, \quad F'(x_k) = 2nx_k^{2n-1} = -2nx_k^{-1}$$

$$x_k^m = \cos \frac{(2k+1)m\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k^{2m}}{(x - x_k)(-2nx_k^{-1})} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{x_k}^{2m}}{(x - \overline{x_k})(-2n\overline{x_k}^{-1})} = -\frac{1}{2n} \sum \left(\frac{x_k^{2m+1}}{x - x_k} + \frac{\overline{x_k}^{2m+1}}{x - \overline{x_k}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2n} \sum \frac{x_k^{2m+1}(x - \overline{x_k}) + \overline{x_k}^{2m+1}(x - x_k)}{(x - x_k)(x - \overline{x_k})} = -\frac{1}{2n} \sum \frac{x(x_k^{2m+1} + \overline{x_k}^{2m+1}) - (x_k^{2m}x_k\overline{x_k} + \overline{x_k}^{2m}\overline{x_k}x_k)}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + x_k\overline{x_k}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \sum \frac{2x \cos \frac{(2k+1)(2m+1)\pi}{2n} - (x_k^{2m} + \overline{x_k}^{2m})}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x \cos \frac{(2k+1)(2m+1)\pi}{2n} - \cos \frac{(2k+1)m\pi}{2n}}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1} \end{aligned}$$

10.3.9 i

$$P = \frac{1}{x(x^2 + 1)(x^2 + 4) \dots (x^2 + n^2)}$$

Разложим над \mathbb{C} :

$$P = \frac{1}{(x - x_0)(x - x_1)(x + x_1)(x - x_2)(x + x_2) \dots (x - x_n)(x + x_n)}, \quad x_k = \begin{cases} \sqrt{-k^2} = ik, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

Обозначим знаменатель за $F(x)$

Обозначим $\prod = (x - x_0)(x + x_0) \dots (x - x_n)(x + x_n)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \\ &= 1 \cdot (x - x_1)(x + x_1) \dots (x - x_n)(x + x_n) + (x - x_0) \cdot 1 \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n)(x + x_n) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot 1 = \\ &= \prod + \sum_k \left(\prod_{i \neq k} \cdot (x + x_k) + \prod_{i \neq k} \cdot (x - x_k) \right) = \prod + \sum_k \left(\prod_{i \neq k} \cdot (x + x_k + x - x_k) \right) = \\ &= \prod + \sum_k \left(\prod_{i \neq k} \cdot 2 \underbrace{x}_{x+x_0} \right) = \prod + 2 \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме k -го, содержат $x - x_k$

Обозначим $\prod^{(t)} = (x_t - x_0)(x_t + x_0) \dots (x_t - x_n)(x_t + x_n)$

$$F'(x_0) = \prod_{i \neq 0}^{(0)} = (-x_1)x_1 \dots (-x_n)x_n = (-1)^n x_1^2 \dots x_n^2 = (-1)^n (-1^2) \dots (-n^2) = 1^2 \dots n^2 = (n!)^2$$

$$F'(x_p) = 2 \prod_{i \neq p}^{(p)} = 2 \prod_{t \neq p} \left((ip - it)(ip + it) \right) = 2 \prod_{t \neq p} \left(-(p - t)(p + t) \right) = (-1)^{n-1} \cdot 2 \prod_{t \neq p} (p^2 - t^2)$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{(x-x_0) \cdot \prod_{i \neq 0}}^{(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x-x_k) \cdot 2 \prod_{i \neq k}^{(k)}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+x_k) \cdot 2 \prod_{i \neq k}^{(k)}} = \\
 &= \frac{1}{(n!)^2 x} + \sum \frac{1}{(-1)^{n-1} \cdot 2 \prod_{t \neq k} (k^2 - t^2)} \left(\frac{1}{x-x_k} + \frac{1}{x+x_k} \right) = \\
 &= \frac{1}{(n!)^2 x} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum \frac{1}{\prod_{t \neq k} (k^2 - t^2)} \cdot \frac{x+x_k+x-x_k}{x^2-x_k^2} = \frac{1}{(n!)^2 x} + (-1)^{n-1} \sum \frac{1}{\prod_{t \neq k} (k^2 - t^2)} \cdot \frac{x}{x^2+k^2}
 \end{aligned}$$

10.4 628

Пусть $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

10.4.1 a

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{1}{x-x_i} &= \frac{(x-x_2)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} \\
 \varphi'(x) &= \underbrace{(x-x_1)'}_{=1} (x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_1)(x-x_2)\dots \underbrace{(x-x_n)'}_{=1} \\
 \sum &= \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}
 \end{aligned}$$

10.4.2 b

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{x_i}{x-x_i} &= \frac{x_1(x-x_2)\dots(x-x_n) + (x-x_1)x_2\dots(x-x_n) + \dots + (x-x_1)\dots(x-x_{n-1})x_n}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \\
 &= \frac{\left(x_1 \prod_{i \neq 1} + x_2 \prod_{i \neq 2} + \dots + x_n \prod_{i \neq n} - x \prod_{i \neq 1} - \dots - x \prod_{i \neq n} \right) + x \prod_{i \neq 1} + \dots + x \prod_{i \neq n}}{\varphi(x)} = \\
 &= \frac{-\left(\overbrace{(x-x_1) \prod_{i \neq 1} + \dots + (x-x_n) \prod_{i \neq n}}^n \right) + x(\prod_{i \neq 1} + \dots + \prod_{i \neq n})}{\varphi(x)} = \frac{-n\varphi(x) + x\varphi'(x)}{\varphi(x)}
 \end{aligned}$$

10.4.3 c

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{1}{(x-x_i)^2} &= \\
 &= \frac{(x-x_2)^2\dots(x-x_n)^2 + (x-x_1)^2\dots(x-x_n)^2 + \dots + (x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_{n-1})^2}{(x-x_1)^2\dots(x-x_n)^2} = \\
 &= \frac{\sum_t \left(\prod_{i \neq t} \right)^2}{\varphi^2(x)} \\
 (\varphi')^2(x) &= \left(\prod_{i \neq 1} + \dots + \prod_{i \neq n} \right)^2 = \sum_{k,p} \prod_{i \neq k} \prod_{i \neq j} = \sum_t \left(\prod_{i \neq t} \right)^2 + \sum_{k \neq p} \left[\left(\prod_{i \neq k,p} \right)^2 (x-x_p)(x-x_k) \right] \\
 \varphi''(x) &= \prod_{i \neq 1,2} + \dots + \prod_{i \neq 1,n} + \dots + \prod_{i \neq n,1} + \dots + \prod_{i \neq n,n-1} = \sum_{k \neq p} \prod_{i \neq k,p} \\
 \varphi(x)\varphi''(x) &= \prod_{k \neq p} \sum_{i \neq k,p} \prod_{i \neq k,p} = \sum_{k \neq p} \left(\prod_{i \neq k,p} \right)^2 (x-x_k)(x-x_p) \\
 \sum &= \frac{(\varphi')^2(x) - \varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi^2(x)}
 \end{aligned}$$

Глава 11

ДЗ к пересдаче

11.1 Вычисление варианта

$$var = (numbers \bmod 2) + 1$$

С	е	н	и	ч	е	н	к	о	в	П	ё	т	р
19	6	15	10	25	6	15	12	16	3	17	7	20	18

$$numbers = 19 + 6 + 15 + 10 + 25 + 6 + 15 + 12 + 16 + 3 + 17 + 7 + 20 + 18 = 189$$

$$numbers \bmod 2 = 1$$

$$var = 1 + 1 = 2$$

11.2 1

Привести к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичную форму

11.2.1 1

$$Q = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < j} x_i x_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdot & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \frac{1}{2}$

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dim \ker(A - \frac{1}{2}I) = n - \text{rk}(A - \frac{1}{2}I) = n - 1$$

- $\sum \lambda_i = \text{tr } A \implies \lambda = n - (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2n - n + 1}{2} = \frac{n + 1}{2}$

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{2} + \frac{(n+1)x_n^2}{2}$$

11.2.2 2

$$\sum_{i < j} x_i x_j$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdot & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$A + \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dim \ker = n - \operatorname{rk}(A - \frac{1}{2}I) = n - 1$$

- $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$

$$\lambda = \operatorname{tr} A + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$$

$$Q = -\sum_i^{n-1} \frac{x_i^2}{2} + \frac{(n-1)x_n^2}{2}$$

11.3 2

11.3.1 1

$$\frac{x^3}{x^9 - 1}$$

Разложим над \mathbb{C} :

Корни многочлена $F(x) = x^9 - 1$ — это корни из единицы девятой степени:

$$x_k = \cos \frac{2\pi k}{9} + i \sin \frac{2\pi k}{9}, \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

При этом, $x_0 = 1$, а остальные разбиваются на пары сопряжённых: $\overline{x_k} = x_{9-k}$

$$F'(x) = 9x^8, \quad F'(x_k) = 9x_k^8 = 9x_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^9 - 1} &= \sum_{k=0}^8 \frac{x_k^3}{(x - x_k)(9x_k^{-1})} = \frac{1}{9} \left(\frac{x_0^4}{x - x_0} + \sum_{k=0}^8 \left(\frac{x_k^4}{x - x_k} + \frac{\overline{x_k}^4}{x - \overline{x_k}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x - 1} + \sum \frac{x_k^4(x - \overline{x_k}) + \overline{x_k}^4(x - x_k)}{(x - x_k)(x - \overline{x_k})} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x - 1} + \sum \frac{x(x_k^4 + \overline{x_k}^4) - (x_k^3 x_k \overline{x_k} + \overline{x_k}^3 \overline{x_k} x_k)}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + x_k \overline{x_k}} \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x - 1} + \sum \frac{2x \cos \frac{8\pi k}{9} - (x_k^3 + \overline{x_k}^3)}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi k}{9} + 1} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x - 1} + \sum \frac{2x \cos \frac{8\pi k}{9} - 2 \cos \frac{6\pi k}{9}}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi k}{9} + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x - 1} + 2 \sum \frac{x \cos \frac{8\pi k}{9} - \cos \frac{2\pi k}{3}}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi k}{9} + 1} \right) \end{aligned}$$

11.3.2 2

$$\frac{x^3}{x^9 + 1}$$

Разложим над \mathbb{C} :

Корни многочлена $F(x) = x^9 + 1$ имеют вид

$$x_k = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{9} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{9}, \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

Они разбиваются на пары сопряжённых: $\overline{x_k} = x_{8-k}$, кроме $x_4 = -1$

$$F'(x) = 9x^8, \quad F'(x_k) = 9x_k^8 = 9 \underbrace{x_k^9}_{=1} x_k^{-1} = -9x_k^{-1}$$

$$x_k + \overline{x_k} = 2 \operatorname{Re} x_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{9}, \quad x_k \overline{x_k} = |x_k|^2 = 1, \quad x_k^m = \cos \frac{(2k+1)m\pi}{9} + i \sin \frac{(2k+1)m\pi}{9}$$

По формуле Лагранжа,

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^9 + 1} &= \sum_{k=0}^8 \frac{x_k^3}{(x - x_k)(-9x_k^{-1})} = -\frac{1}{9} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{x_k^4}{x - x_k} + \frac{x_4^4}{x - x_4} + \sum_{k=0}^3 \frac{\overline{x_k}^4}{x - \overline{x_k}} \right) = \\ &= -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^3 \frac{x_k^4(x - \overline{x_k}) + \overline{x_k}^4(x - x_4)}{(x - x_k)(x - \overline{x_k})} \right) = -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^3 \frac{x(x_k^4 + \overline{x_k}^4) - x_k^3 x_k \overline{x_k} - \overline{x_k}^3 \overline{x_k} x_k}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + x_k \overline{x_k}} \right) = \\ &= -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^3 \frac{2x \cos \frac{(2k+1)4\pi}{9} - (x_k^3 + \overline{x_k}^3)}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{9} + 1} \right) = -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{x+1} + 2 \sum_{k=0}^3 \frac{x \cos \frac{4(2k+1)\pi}{9} - \cos \frac{3(2k+1)\pi}{9}}{x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{9} + 1} \right) \end{aligned}$$

11.4 3

11.4.1 1

Утверждение 2. Пусть конечная группа G состоит из чётного числа элементов. Доказать, что существует элемент порядка 2

Доказательство. Каждый элемент в группе имеет обратный

Единица обратная сама к себе, остальные разбиваются на пары обратных

Значит, чтобы группа имела чётное число элементов, какой-то элемент (кроме 1) должен совпасть со своим обратным, то есть

$$a = a^{-1} \implies 1 = aa^{-1} = aa = a^2 \implies \text{ord}(a) = 2$$

□

11.4.2 2

Утверждение 3. Пусть группа G не имеет нетривиальных подгрупп. Доказать, что G конечна и $|G|$ простое

Доказательство.

- Докажем, что G конечна. Пусть это не так.

Пусть $C = \{ \langle g \rangle \mid g \in G \}$ – множество всех циклических подгрупп G

Возможно два случая:

– $|C| = \infty \implies G$ содержит бесконечное число циклических подгрупп

– C – конечно (некоторые из $\langle g \rangle$ совпали)

Пусть $C = \{ H_1, H_2, \dots, H_n \}$

Хотя бы одна из них бесконечна, пусть это $H_1 = \langle g_1 \rangle$

Она изоморфна \mathbb{Z} и содержит бесконечное число циклических подгрупп

Значит и G содержит бесконечное число циклических подгрупп

При этом, единственная тривиальная циклическая подгруппа – $\langle e \rangle$ – $\nexists \implies G$ конечна

- Докажем, что $|G| = p \in \mathbb{P}$

Пусть это не так, то есть $|G| = n$, где $n = pm$

Возьмём $a \in G$, $a \neq e \implies a^{pm} = e$

Рассмотрим два случая:

– $a^p \neq e$

Возьмём циклическую подгруппу $H = \langle a^p \rangle$

$1 < |H| \leq m < pm - \nexists$

– $a^p = e$

Возьмём циклическую подгруппу $H = \langle a \rangle$

$1 < |H| \leq p < pm - \nexists$

□

11.5 4

11.5.1 1

Пусть $V = \mathbb{R}^4$, W – подпространство V , натянутое на векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, U – подпространство V , натянутое на векторы $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти размерность и базис для $W \cap U$, $W + U$. Является ли $W + U$ прямой суммой?

- $W \cap U$

Возьмём $v \in W \cap U$

$$v \in W \implies v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v \in U \implies v = c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b - 3c - 3d = 0 \\ a - c - 3d = 0 \\ a - b + c - 2d = 0 \\ 2a - b - 2d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = c + 3d \\ c + 3d - 3c - 3d = 0 \\ c + 3d - b + c - 3d = 0 \\ 2c + 6d - b - 2d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2c = 0 \\ \dots \end{cases} \quad a = b = c = d = 0$$

$$W \cap U = \{0\}, \quad \dim(W \cap U) = 0$$

- $W + U$

$$W + U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W \cap U = \{0\} \implies W \oplus U, \quad \dim(W \cap U) = \dim V = 4$$

Значит, этот набор и является базисом

11.5.2 2

Пусть $V = \mathbb{R}^4$, W – подпространство V , натянутое на векторы $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, U – подпространство V ,

натянутое на векторы $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Найти размерность и базис для $W \cap U$ и $W + U$. Является ли $W + U$ прямой суммой?

- $W \cap U$

Возьмём $v \in W \cap U$

$$v \in W \implies v = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v \in U \implies v = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -b + c - 3d = 0 \\ a - 2b - c - 3d = 0 \\ -a + 2b + c - 2d = 0 \\ a + 2b - 5c - d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = c - 3d \\ a - 2c + 6d - c - 3d = 0 \\ -a + 2c - 6d + c - 2d = 0 \\ a + 2c - 6d - 5c - d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - 3c + 3d = 0 \\ -a + 3c - 8d = 0 \\ a - 3c - 7d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3c - 3d \\ -3c + 3d + 3c - 8d = 0 \\ 3c - 3d - 3c - 7d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -5d = 0 \\ -10d = 0 \end{cases} \quad a = b = c = d = 0$$

$$W \cap U = \{0\}, \quad \dim(W \cap U) = 0$$

• $W + U$

$$W + U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W \cap U = \{0\} \implies W \oplus U \implies \dim(W + U) = 4$$

Значит, этот набор будет базисом