Оглавление

0.1 Продолжаем доказывать теорему об обратном отображении

Лемма 1. $U = B_r(X_0), \qquad X_1 \in U, \qquad 0 < \rho < r - \|X_0 - X_1\|, \qquad S = B_\rho(X_1)$

Замечание. В силу последних двух условий, $S \subset U$ (т. к. $U \overset{\text{def}}{=} B_r(X_0)$)

$Y_1 = F(X_1)$

$$\implies B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F(S) \tag{1}$$

Примечание. r, λ, X_0, F из теоремы и первых двух шагов доказательства

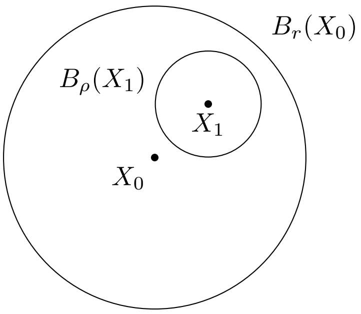

Рис. 1: Здесь $r = 2$, $\|X_0 - X_1\| = 1$, $\rho = 0.7$

Доказательство. $X \in U, \qquad X + H \in U$

$$\|F(X+H) - F(X)\| \geq 2\lambda \|H\| \tag{2}$$

(по последнему соотношению из второго шага доказательства)

$$(2) \iff \|F(X_2) - F(X_3)\| \geq 2\lambda \|X_2 - X_3\| \qquad \forall X_2, X_3 \in U \tag{3}$$

По условию, $Y_1 \in F(S)$ (т. к. это образ X_1)
Возьмём $Y \neq Y_1, \quad Y \in B_{\lambda\rho}(Y_1)$
S – открытый шар
Рассмотрим функцию $k(X) \coloneqq \|F(X) - Y\|, \qquad X \in \overline{S}$
$\overline{S}$ – замкнутый шар, а значит, компакт. Поэтому $k \in \mathcal{C}\left(\overline{S}\right)$
По второй теореме Вейерштрасса, k достигает минимального значения:

$$\exists\, X_* \in \overline{S} : k(X_*) \leq k(X) \quad \forall X \in \overline{S} \tag{4}$$

Утверждение 1. X_* не принадлежит границе $\overline{S}$ (т. е. $X_* \in S$)

Доказательство. Действительно, если $\|X_0 - X_1\| = \rho$ (т. е. X_0 лежит на границе $\overline{S}$), то

$$\implies \|F(X_0) - F(X_1)\| \underset{(3)}{\geq} 2\lambda \|X_1 - X_0\| = 2\lambda\rho$$

По определению, $F(X_1) = Y_1$. Подставим:

$$\|F(X_0) - Y_1\| \geq 2\lambda\rho \tag{5}$$

При этом, $Y \in B_{\rho\lambda}(Y_1)$. Значит,

$$\|Y - Y_1\| < \lambda\rho \tag{6}$$

$$\|F(X_0) - Y\| \overset{\Delta}{\geq} \|F(X_0) - Y_1\| - \|Y_1 - Y\| \underset{(5),(6)}{>} 2\lambda\rho - \lambda\rho = \lambda\rho$$

В обозначениях k можно записать:

$$\left.\begin{aligned} k(X_0) &\xlongequal{\text{def } k} \|F(X_0) - Y\| > \lambda\rho \\ k(X_1) &\xlongequal{\text{def } k} \|Y_1 - Y\| < \lambda\rho \end{aligned}\right\} \implies k(X_1) < k(X_0) \tag{7}$$

Взяли точку на границе диска (на сфере). Получили, что значение функции на границе строго больше, чем значение в центре. Значит, минимум (X_*) не может лежать на границе, т. е.

$$X_* \in S \tag{8}$$

$\square$

Рассмотрим функцию $l(X) \coloneqq k^2(X)$
Понятно, что её минимум совпадёт с минимумом k:

$$(4) \implies l(X_*) \leq l(X) \quad \forall X \in \overline{S} \tag{9}$$

$$l(X) \xlongequal{\text{def } k} \|F(X) - Y\|^2 \tag{10}$$

Пусть

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях,

$$(10) \implies l(X) = \sum_{i=1}^{l} \Big(f_i(X) - y_i\Big)^2 \tag{11}$$

По условию теоремы, F, а значит и его координатные функции гладкие ($\in \mathcal{C}^1$, т. е. имеют непрервные частные производные). Нетрудно заметить, что

$$l \in \mathcal{C}^1\Big(U\Big) \tag{12}$$

Вспомним необходимое условие локального экстремума (из второго семестра):

Напоминание. Если функция имеет частный экстремум и она дифференцируема в этой точке, то все частные производные в этой точке равны нулю

Его можно применять только к внутренним точкам (именно для этого мы и проверяли, что $X_* \in S$)

$$(8), (9), (12) \implies l'_{x_j}(X_*) = 0 \qquad j = 1, .., n \tag{13}$$

Из соотношения (11) понятно, как выглядят частные производные:

$$l'_{x_j}(X_*) \underset{(11)}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{n} 2\Big(f_i(X_*) - y_i\Big) f'_{ix_j}(X_*) \underset{(13)}{=\!=\!=} 0 \qquad j = 1, ..., n$$

Поделим на 2:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(f_i(X_*)-y_i\Big)f'_{ix_j}(X_*)=0 \qquad j=1,...,n \tag{14}$$

Заметим, что здесь фигурирует матрица Якоби. Чтобы её записать, введём обозначение:

$$A := \Big(f_1(X_*)-y_1,\ldots\ldots,f_n(X_*)-y_n\Big)$$

Очевидно, что.

$$A = \Big(F(X_*)-Y\Big)^T \tag{15}$$

Имеется n равенств. В них фигурируют элементы матрицы Якоби:

Утверждение 2.

$$(14) \iff A\mathcal{D}F(X_*)=\mathbb{O}_n^T \tag{16}$$

Доказательство.

$$\mathcal{D}F(X_*)=\begin{pmatrix} f'_{1x_1}(X_*) & \ldots & f'_{1x_n}(X_*) \\ . & . & . \\ f'_{nx_1}(X_*) & \ldots & f'_{nx_n}(X_*)\end{pmatrix}$$

$$A\mathcal{D}F(X_*)=\left[\Big(f_1(X_*)-y_1\Big)f'_{1x_1}(X_*)+\ldots+\Big(f_n(X_*)-y_n\Big)f'_{nx_1}(X_*),\ldots\ldots\right]=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\Big(f_i(X_*)-y_i\Big)f_{ix_1}(X_*),\ldots\ldots\right]=(14)$$

□

Утверждение 3.

$$\det \mathcal{D}F(X)\neq 0 \qquad \forall X\in U \tag{17}$$

Доказательство. Вспомним соотношение из теоремы об отображении, близком к обратимому:

$$\|A\|=\frac{1}{\alpha},\quad \|A-B\|=\beta<\alpha \qquad \Longrightarrow \|B^{-1}\|\leq\frac{1}{2\alpha}$$

Применим это к $\alpha=4\lambda,\quad \beta=2\lambda$:

$$\|\mathcal{D}F(X)-\mathcal{D}F(X_0)\|<2\lambda$$

$$\|\mathcal{D}F(X_0)\|=\frac{1}{4\lambda}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{D}F(X_0)$ обратима и для неё выполняется неравенство:

$$\left\|\Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{2\lambda}$$

Это значит, что она она неособенна ($\det\neq 0$) □

(17) позволяет нам взять обратную матрицу к $\mathcal{D}F(X_*)$:

$$\left.\begin{aligned}\Big(A\mathcal{D}F(X_*)\Big)\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1} &\underset{(16)}{=\!=}\mathbb{O}_n^T\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1}=\mathbb{O}_n^T \\ \Big(A\mathcal{D}F(X_*)\Big)\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1} &\underset{\text{асс.}}{=\!=}A\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1}=AI=A\end{aligned}\right\}\Longrightarrow A=\mathbb{O}_n^T$$

При этом, $A \overset{}{\underset{(15)}{=\!=}} \left(F(X_*) - Y\right)^T$, то есть $F(X_*) - Y = \mathbb{O}_n$
Значит, $F(X_*) = Y$ и $Y \in F(S)$ □

Определение 1. $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – открытое, $\quad M : \Lambda \to \mathbb{R}^n$
Будем говорить, что M – открытое отображение, если

$$\forall \underset{\omega\text{ – откр.}}{\omega \subset \Lambda} \quad M(\omega) \text{ открытое}$$

(то есть, открытые отображения переводятся в открытые)

Приведём определение непрерывного отображения, которое используется в топологии (частный его случай для евклидова пространства):

Определение 2. $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – открытое, $\quad M : \Lambda \to \mathbb{R}^n$
M непрерывно, если прообраз любого открытого множества открыт

Примечание. Пустое множество открыто. Если прообраза у какого-то множества нет, то считаем, что прообраз пуст (а значит, открыт)

Определение 3 (из второго семестра). $M : \Lambda \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке Λ, то есть

$$\forall X_0 \in \Lambda \quad \exists \lim_{X \to X_0} M(X) = M(X_0)$$

То есть, в терминах шаров,

$$\forall X_0 \in \Lambda \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall X \in B_\delta(X_0) \setminus \{\, X_0 \,\} \quad M(X_0) \in B_\varepsilon\Big(M(X_0)\Big)$$

То есть,

$$\forall X_0 \in \Lambda \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : M\Big(B_\delta(X_0)\Big) \subset B_\varepsilon\Big(M(X_0)\Big)$$

Утверждение 4. Приведённое определение непрерывности эквивалентно определению непрерывности, приведённому во втором семестре

Доказательство.

- опр. 3 $\implies$ опр. 2
  Возьмём $V \subset \Lambda : U = M(V)$ открыто
  Возьмём $X_0 \in V$. Тогда $M(X_0) \in U$
  Т. к. U открыто, $M(X_0)$ содержится в нём вместе с каким-то шаром:
  $$\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\Big(M(X_0)\Big) \in U$$
  По определению 3,
  $$\exists\, \delta > 0 : M\Big(B_\delta(X_0)\Big) \subset B_\varepsilon\Big(M(X_0)\Big)$$
  То есть, $B_\delta(X_0) \subset V$
- опр. 2 $\implies$ опр. 3
  Возьмём $X_0 \in \Lambda$ и $\varepsilon > 0$
  Обозначим $U = B_\varepsilon\Big(M(X_0)\Big)$
  При этом, $X_0 \in M^{-1}(U)$
  По определению 2, $M^{-1}(U)$ открыто, то есть
  $$\exists\, \delta : B_\delta(X_0) \subset M^{-1}(U) \overset{\text{def } U}{=\!=} M^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(M(X_0)\big)\Big)$$

Применим M:

$$M\left(B_\delta(X_0)\right) \subset B_\varepsilon\left(M(X_0)\right)$$

В силу произвольности ε, это и есть определение 3

□

Теорема 1 (об обратном отображении). $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \to \mathbb{R}^1$

$F \in \mathcal{C}^1\left(E\right)$, т. е. все координатные функции $\in \mathcal{C}^1$, $Y_0 = F(X_0)$, $\mathcal{D}F(X_0)$ обратима

$$\implies \exists\, U \text{ – окрестность } X_0, V \text{ – окрестность } Y_0 : \begin{cases} F\Big|_U \quad \text{обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F\Big|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1\left(V\right) \end{cases}$$

Доказательство (продолжение).

1. Определили $U \coloneqq B_r(X_0)$
2. Доказали инъективность $F\Big|_U$
3. Применяем лемму
4. Докажем, что F – открытое отображение:
   - По условию, $V = F(U)$. Докажем, что V – открытое множество:
     Возьмём $Y_1 \in F(U)$. Тогда $\exists\, X_1 \in U : F(X_1) = Y_1$
     Возьмём $0 < \rho < r - \|X_1 - X_0\|$
     Пусть $S \coloneqq B_\rho(X_1)$
     Тогда, по шагу 3,
     $$B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F\left(B_\rho(X_1)\right) \subset V = F(U)$$
     Это и есть определение открытого множества
     $$\implies V \text{ – откр.}$$
   - Возьмём $\omega \in U$ – открытое. Нужно доказать, что $F(\omega)$ открыто:
     Возьмём $Y_2 \in F(\omega)$
     Тогда $\exists\, X_2 : F(X_2) = Y_2$
     Поскольку $X_2 \in \omega$,
     $$\exists\, \rho_1 > 0 : B_{\rho_1}(X_2) \subset \omega \subset U$$
     Снова применяем шаг 3:
     $$B_{\lambda\rho_1}(Y_2) \subset F\left(B_{\rho_1}(X_2)\right) \subset F(\omega)$$
     Получили, что некоторый открытый шар полностью содержится в $F(\omega)$. Это и есть то, что требовалось доказать
5. Непрерывность обратного

   На втором шаге мы выяснили, что $F\Big|_U$ – биекция. Для любой биекции можно определить обратное отображение:
   $$\exists\, \Phi : V \to \mathbb{R}^n : \begin{cases} \Phi(V) = U \\ F\left(\Phi(Y)\right) = Y \quad \forall Y \in V \\ \Phi\left(F(X)\right) = X \quad \forall X \in V \end{cases}$$

Проверим, что $\Phi \in \mathcal{C}\Big(V\Big)$:

По определению 2, нужно доказать, что $\forall \omega \subset U$ – откр. прообраз ω открыт
Напишем определение прообраза ω при Φ:

$$\omega^{-1} = \{\, Y \in V : \Phi(Y) \in \omega \,\}$$

Если F – биекция, то и Φ – биекция:

$$\Phi(Y) \in \omega \xLeftrightarrow[\text{биективность } \Phi]{} F\Big(\Phi(Y)\Big) \in F(\omega) \iff Y \in F(\omega)$$

Теперь можно переписать определение прообраза:

$$\omega^{-1} = \{\, Y : Y \in F(\omega) \,\}$$

По шагу 4, $F(\omega)$ открыто (как образ открытого при открытом отображении)

6. Φ дифференцируема в $Y \quad \forall Y \in V$
   Зафиксируем K такое, что $Y + K \in V, \qquad K \neq \mathbb{O}_n$
   Обозначим $\Phi(Y) \coloneqq X, \qquad \Phi(Y + K) \coloneqq X + H$
   Это эквивалентно тому, что $Y = F(X), \qquad Y + K = F(X + H)$

$$K = Y + K - Y = F(X + H) - F(X) \tag{18}$$

На основании шага 5,

$$K \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n, \qquad H \xrightarrow[K \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n$$

Также, по соотношению (20) из шага 2, $\|F(X+H) - F(X)\| \geq 2\lambda\,\|H\|$, то есть

$$\|K\| \geq 2\lambda\,\|H\| \tag{19}$$

Напоминание. По условию, $\mathcal{D}F(X)$ обратима и

$$\left\|\Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2\lambda} \tag{20}$$

(это мы выяснили в лемме, при доказательстве соотношения (17))
Обозначим $B \coloneqq \Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1}$

$$K = (18) = \mathcal{D}F(X)H + t(H) \tag{21}$$

$$\text{где } \frac{1}{\|H\|} t(H) \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n$$

Домножим (21) на B слева:

$$BK = B\Big(\mathcal{D}F(X)H\Big) + Bt(H) \overset{\text{def } B}{=\!=\!=} IH + Bt(H) = H + Bt(H)$$

$$\implies BK - Bt(H) = H \underset{(18)}{=\!=\!=} \Phi(Y + K) - \Phi(Y) \tag{22}$$

В силу биективности F и Φ,

$$K \neq \mathbb{O}_n \iff H \neq \mathbb{O}_n$$

$$\text{Значит, можно делить на } \|H\| \tag{23}$$

$$\frac{\|Bt(H)\|_n}{\|K\|_n} \le \frac{\|B\|\cdot\|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \underset{(20)}{\le} \frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{\|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \underset{(23)}{=\!=} \frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{\|t(H)\|}{\|H\|}\cdot\frac{\|H\|}{\|K\|} \underset{(19)}{\le} \frac{1}{4\lambda^2}\frac{\|t(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow[K\to\mathbb{O}_n]{} 0 \quad (24)$$

$$(22), (24) \implies \Phi \text{ дифф. в } Y$$

Напоминание. Дифф. Φ означает, что

$$\Phi(Y+K) - \Phi(Y) = \mathcal{D}\Phi(Y)K + r(K), \qquad \frac{\|r(K)\|}{\|K\|} \xrightarrow[K\to\mathbb{O}_n]{} 0$$

(важно, что матрица Якоби единственна)

Значит, кроме дифференцируемости, мы установили, что

$$(22) \implies \mathcal{D}F(Y) = \Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1}, \qquad X = \Phi(Y) \tag{25}$$

7. $\Phi \in \mathcal{C}^1\Big(V\Big)$

Пользуясь формулой (25), запишем матрицу Якоби Φ в следующем виде:

$$\mathcal{D}\Phi(Y) = \Big(\mathcal{D}F\big(\Phi(Y)\big)\Big)^{-1} \tag{26}$$

Из курса алгебры знаем, что обратимы только неособенные матрицы:

$$\det \mathcal{D}F(X) \ne 0 \quad \forall X \in U$$

Матрица Якоби состоит из частных производных. Все они непрерывны по условию. Значит,

$$\det \mathcal{D}F(X) \in \mathcal{C}\Big(U\Big)$$

Два последних выражения означают, что

$$\frac{1}{\det \mathcal{D}F(X)} \in \mathcal{C}\Big(U\Big) \tag{27}$$

В силу шага 5,

$$(27) \implies \frac{1}{\det \mathcal{D}F\Big(\Phi(Y)\Big)} \in \mathcal{C}\Big(V\Big) \tag{28}$$

Алгебраические дополнения состоят из сумм и произведений частных производных в точке Y. Значит, они (дополнения) непрерывны, а значит

$$(26), (28) \implies \mathcal{D}F(Y) \in \mathcal{C}\Big(V\Big) \iff \Phi \in \mathcal{C}^1\Big(V\Big)$$

□

0.2 Теорема об открытом отображении

Теорема 2. $G \subset \mathbb{R}^n$ – открыто, $\quad F : G \to \mathbb{R}^n, \quad F \in \mathcal{C}^1\Big(G\Big), \quad \det \mathcal{D}F(X) \ne 0 \quad \forall X \in G$

Тогда F открыто

Замечание. Ничего о взаимной однозначности F не говорится

Доказательство. Пусть $\omega \subset G$ – открыто
Пусть $S = F(\omega)$
Нужно доказать, что S открыто
Возьмём $\forall Y \in S$
Поскольку S – это образ ω,

$$\exists\, X \in \omega : F(X) = Y \qquad (X \text{ не обязательно единственный – берём любой})$$

Поскольку ω открыто,

$$\exists\, r_0 > 0 : B_{r_0}(X) \subset \omega$$

Определим λ такое, что

$$\left\| \Big(\mathcal{D}F(X) \Big)^{-1} \right\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём r, такое что

$$\forall X_1 \in \underbrace{B_r(X)}_{\subset G} \quad \|\mathcal{D}F(X_1) - \mathcal{D}F(X)\| < 2\lambda$$

Возьмём $0 < \rho < \min(r, r_0)$
Если мы проведём для $B_\rho(X)$ рассуждения из шага 4, то получим, что

$$F\Big(B_\rho(X)\Big) \supset B_{\lambda\rho}\Big(F(X)\Big) = B_{\lambda\rho}(Y)$$

Понятно, что $B_\rho(X) \subset \omega$
Таким образом, $B_{\lambda\rho}(Y) \subset F(\omega)$
В силу произвольности Y, это означает, что S открыто $\square$

0.3 Теорема о неявной функции (отображении)

Теорема 3. $\mathbb{R}^{n\geq 1}, \qquad \mathbb{R}^{m\geq 1}, \qquad \mathbb{R}^{n+m}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^n, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^m, \qquad Z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{ – откр.}, \qquad F : G \to \mathbb{R}^n, \qquad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad F \in \mathcal{C}^1\Big(G\Big), \qquad Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$f_j = f_j(Z) = f_j\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)$$

Выпишем матрицу Якоби для Z:

$$\mathcal{D}F(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & \dots & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & \dots & f'_{1y_m}(Z_0) \\ . & . & . & . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z_0) & \dots & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & \dots & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

Обозначим

$$A := \begin{bmatrix} f'_{1x_1} & \dots & f'_{nx_1} \\ . & . & . \\ f'_{nx_n} & \dots & f'_{nx_n} \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} f'_{1y_1} & \dots & f'_{1y_m} \\ . & . & . \\ f'_{ny_1} & \dots & f'_{ny_m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}F(Z_0) = [AB]$$

$Z_0 \in G$, такая что $F(Z_0) = \mathbb{O}_n$

$$\Longrightarrow \exists \underset{\text{окрестность}}{W(Y_0)} \subset \mathbb{R}^n \text{ и единственное отобр. } G : W \to \mathbb{R}^n : \begin{cases} g \in \mathcal{C}^1\left(W\right) \\ g(Y_0) = X_0 \\ \forall Y \in W & \begin{cases} \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \in G \\ F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \end{cases} \end{cases}$$