Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

1.1 Переход к пределу и непрерывность в функциональных рядах

Теорема 1. X – метрическое пространство, $\{ v_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$, имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S(x) \tag{1.1}$$

1. $x_0 \in X$ – точка сгущения, (1.1) сходится равномерно на $X \setminus \{ x_0 \}$, $\forall n \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} v_n(x) = c_n$

$$\implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сходится} \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} S(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim\limits_{x \to x_0} S(x) \end{cases}$$

2. (1.1) сходится равномерно на всём X, v_n непр. в $x_0 \quad \forall n$

$$\implies S(x) \text{ непр. в } x_0$$

3. X всюду плотно, (1.1) сходится равномерно на всём X, $v_n \in \mathcal{C}\left(X\right) \quad \forall n$

$$\implies S \in \mathcal{C}\left(X\right)$$

Доказательство. $S_n(x) = v_1(x) + ... + v_n(x)$
Равномерная сходимость ряда (1.1) по определению означает, что

$$S_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{x \in X \setminus \{ x_0 \}} S(x)$$

Применима аналогичная теорема для функциональных последовательностей □

1.2 Интегрирование функциональных последовательностей и рядов

Теорема 2. $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{C}\left([a, b]\right)$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{x \in [a,b]} f(x)$

Замечание. В таком случае $f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$, а значит $f \in \mathcal{R}[a,b]$

$$\implies \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Равномерная сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N: \quad \forall n > N \quad \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.2}$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| = \left|\int_a^b \Big(f_n(x) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x\right| \le \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,\mathrm{d}\,x \xlongequal[(1.2)]{} \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}\,x = \varepsilon(b-a)$$

Это и есть определение сходимости требуемой числовой последовательности □

Теорема 3 (интегрирование функционального ряда). $\{\, v_n(x)\,\}_{n=1}^{\infty}, \qquad v_n \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$

$$\implies \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b v_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Обозначим

$$c_n \coloneqq \int_a^b v_n(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad B_n \coloneqq c_1 + \ldots + c_n, \qquad S_n(x) \coloneqq v_1(x) + \ldots + v_n(x), \qquad S(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$$

По определению равномерной сходимости ряда,

$$S_n(x) \overset{x\in[a,b]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$$

Отсюда, по только что доказанной теореме,

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &\textstyle\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \Big(v_1(x) + \ldots + v_n(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x = B_n \end{aligned}\right\} \implies B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}\,x$$

□

1.3 Теорема о производной в функциональной последовательности

Теорема 4. $\{\, f_n(x)\,\}_{n=1}^{\infty}, \qquad f_n \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big), \qquad \forall n$

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, f_n'(x) \tag{1.3}$$

Примечание. Непрерывность можно было бы не указывать – она следует из существования производной

$$\exists\, \varphi(x) : [a,b] \to \mathbb{R} : \quad f_n'(x) \overset{x\in[a,b]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \varphi(x) \tag{1.4}$$

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : \quad \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$\implies \exists\, f : [a,b] \to \mathbb{R} : \quad \begin{cases} f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in[a,b]} f(x) & (1.6) \\ \forall x \in [a,b] \quad \exists\, f'(x) & (1.7) \\ f'(x) = \varphi(x) & (1.8) \end{cases}$$

Доказательство.

- Возьмём $m \neq n$
  Определим функции:
  $$P_{mn}(x) \coloneqq f_m(x) - f_n(x)$$
  $$(1.3) \implies \exists\, P'_{mn}(x) = f'_m(x) - f'_n(x) \qquad (1.9)$$
  Значит, к P_{mn} можно применить теорему Лагранжа:
  $$\forall x \in [a,b] : x \neq x_0 \quad \exists\, c \in (x \between x_0) : \quad P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0) = P'_{mn}(c)(x - x_0) \underset{(1.9)}{=\!=}$$
  $$= \Big(f'_m(c) - f'_n(c)\Big)(x - x_0) \qquad (1.10)$$
  К функциональной последовательности производных применим необходимую часть критерия Коши:
  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1 : \quad \forall m > n > N_1 \quad \forall x \in [a,b] \quad |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \qquad (1.11)$$
  $$\underset{(1.10)}{\implies} \forall m > n > N_1 \quad \forall x \in [a,b], x \neq x_0 \quad |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)| =$$
  $$= |f'_m(c) - f'_n(c)| \cdot |x - x_0| < \varepsilon(b-a) \qquad (1.12)$$
  По условию (1.5) мы можем применить критерий Коши к $f_n(x_0)$:
  $$\exists\, N_2 : \quad \forall m > n > N_2 \quad |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$
  Применим обозначение P_{mn}:
  $$\forall m > n > N_2 \quad |P_{mn}(x_0)| < \varepsilon \qquad (1.13)$$
  Пусть $N \coloneqq \max\{\, N_1, N_2 \,\}$. При $m > n > N$ действуют и (1.12), и (1.13):
  $$\forall x \in [a,b], x \neq x_0 \quad |P_{mn}(x)| = |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0) + P_{mn}(x_0)| \overset{\triangle}{\leq} |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)| + |P_{mn}(x_0)| <$$
  $$< (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (b-a+1)\varepsilon$$
  При $x = x_0$ это тоже верно (т. к. у нас есть (1.13)), т. е.
  $$\forall x \in [a,b] \quad |f_m(x) - f_n(x)| < (b-a+1)\varepsilon$$
  Значит, к функциональной последовательности $f_n(x)$ можно применить критерий Коши:
  $$\implies f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in[a,b]} f(x) \qquad (1.14)$$
  $$f_n \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big) \implies f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$$

- Фиксируем произвольный $x \in [a,b]$
  Рассмотрим
  $$g_n : [a,b] \setminus \{\, x \,\} : \quad g_n(y) \coloneqq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}, \qquad g : [a,b] \setminus \{\, x \,\} : \quad g(y) \coloneqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$g_m(y) - g_n(y) = \frac{f_m(y) - f_m(x) - (f_n(y) - f_n(x))}{y - x} = \frac{\big(f_m(y) - f_n(y)\big) - \big(f_m(x) - f_n(x)\big)}{y - x} = \\ = \frac{P_{mn}(y) - P_{mn}(x)}{y - x} \tag{1.15}$$

Применим теорему Лагранжа:

$$\exists\, c_1 \in (y \between x): \quad P_{mn}(y) - P_{mn}(x) = P'_{mn}(c_1)(y - x)$$

Подставим в (1.15):

$$g_m(y) - g_n(y) = P'_{mn}(c_1) \tag{1.16}$$

$$P'_{mn}(c_1) \underset{(1.9)}{=\!=\!=} f'_m(c_1) - f'_n(c_1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1: \quad \text{выполнено (1.11)}$$

$$\underset{(1.16)}{\Longrightarrow} \forall y \in [a, b] \setminus \{\, x \,\} \quad \forall m > n > N_1 \quad |g_m(y) - g_n(y)| < \varepsilon |y - x| \le \varepsilon (b - a) \tag{1.17}$$

Применим критерий Коши:

$$\exists\, h : [a, b] \setminus \{\, x \,\}: \quad g_n(y) \overset{y \in [a,b] \setminus \{\, x \,\}}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} h(y) \tag{1.18}$$

Зафиксируем $y \in [a, b] \setminus \{\, x \,\}$ и рассмотрим числовую последовательность:

$$(1.18) \implies g_n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} h(y) \tag{1.19}$$

$$g_n(y) \overset{\text{def } g_n}{=\!=\!=} \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}$$

$$(1.14) \implies \begin{cases} f_n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(y) \\ f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \end{cases} \tag{1.20}$$

$$(1.20) \implies g_n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{1.21}$$

$$(1.19), (1.21) \implies h(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{1.22}$$

$$(1.18), (1.22) \implies \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \overset{y \in [a,b] \setminus \{\, x \,\}}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{1.23}$$

Вспомним, как мы определяли $g_n(y)$ и $g(y)$:

$$\implies g_n(y) \overset{y \in [a,b] \setminus \{\, x \,\}}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} g(y)$$

$$(1.3) \overset{\text{def } g_n}{\iff} \forall n \quad \exists \lim_{y \to x} g_n(y) = f'_n(x) \tag{1.24}$$

К последним двум выражениям можно применить теорему о предельном переходе в функциональной последовательности:

$$\exists \lim_{y \to x} g(y) = A, \qquad \exists \lim_{n \to \infty} f'_n(x) \tag{1.25}$$

$$A = \lim_{n \to \infty} f'_n(x) \tag{1.26}$$

$$(1.25) \overset{\text{def } g(y)}{\Longrightarrow} \exists \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x) = A$$

$$\left.\begin{aligned} &(1.25), (1.26) \implies \exists\, f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \\ &(1.4) \implies \text{ для фиксированного } x \in [a,b] \quad f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x) \end{aligned}\right\} \implies \varphi(x) = f'(x)$$

□

У этой теоремы имеется вариант для функциональных рядов:

Теорема 5 (о производной функционального ряда)**.** $\{\, v_n(x) \,\}_{,=1}^{\infty} \qquad v_n \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, v_n'(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x) \text{ равномерно сходится на } [a,b] \tag{1.27}$$

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0) \text{ сходится} \tag{1.28}$$

$$\implies \begin{cases} \forall x \in [a,b] \quad \exists \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\right)' \\ \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\right)' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x) \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы:

$$S_n(x) = v_1(x) + \ldots + v_n(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall n$$

$$\exists\, S_n'(x) = v_1'(x) + \ldots + v_n'(x)$$

$$(1.27) \implies \exists\, \varphi(x) : \quad S_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

$$(1.28) \implies S_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathbb{R}$$

К функциональной последовательности частичных сумм можно применить только что доказанную теорему □

1.4 Пример ван дер Вардена

Теорема 6. $\exists\, f \in \mathcal{C}\Big(\mathbb{R}\Big) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \nexists\, f'(x)$

Доказательство (построение ван дер Вардена)**.** Рассмотрим функцию $\varphi(x) \coloneqq 1 - |x-1|$ при $x \in [0,2]$ (рис. 1.1a)

При $x \in [2k, 2k+2]$, где $k \neq 0 \in \mathbb{Z}$, полагаем $\varphi(x) \coloneqq \varphi(x-2k)$ (рис. 1.1b)

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \tag{1.29}$$

- Проверим непрерывность $f(x)$:
  Воспользуемся признаком Вейерштрасса:

  Очевидно, что. $\varphi(4^n x) \in \mathcal{C}\Big(\mathbb{R}\Big)$

  При этом, $0 \le \varphi(x) \le 1$

  $$\implies \left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n x)| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$$

Значит, ряд (1.29) равномерно сходится на $\mathbb{R}$
Значит, и его сумма непрерывна

- Докажем, что производной не существует:
Доказывать будем **от противного**. Пусть есть точка, в которой существует производная:

$$\exists\, x \in \mathbb{R}: \quad \exists\, f'(x) \tag{1.30}$$

Это эквивалентно тому, что она дифференцируема в этой точке:

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + r(y) \tag{1.31}$$

$$\text{где } \frac{|r(y)|}{|y-x|} \xrightarrow[y \in x]{} 0 \tag{1.32}$$

$$(1.32) \overset{\text{def lim}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta > 0: \quad \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \quad \frac{|r(y)|}{|y-x|} \le 1 \tag{1.33}$$

$$(1.31), (1.33) \implies \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \quad |f(y)-f(x)| \le |f'(x)| \cdot |y-x| + |r(y)| \le \\ \le \underbrace{\Big(|f'(x)| + 1\Big)}_{=:A} |y-x| = A|y-x| \tag{1.34}$$

Рассмотрим $x - \delta \le y_1 \le x \le y_2 \le x + \delta$

$$(1.34) \implies |f(y_2) - f(x)| \le A(y_2 - x) \tag{1.35}$$

$$(1.34) \implies |f(x) - f(y_1)| \le A(x - y_1) \tag{1.36}$$

$$(1.35), (1.36) \implies |f(y_2) - f(y_1)| = \left|\Big(f(y_2) - f(x)\Big) + \Big(f(x) - f(y_1)\Big)\right| \overset{\triangle}{\le} \\ \le |f(y_2) - f(x)| + |f(x) - f(y_1)| \le A(y_2 - x) + A(x - y_1) = A(y_2 - y_1)$$

Выберем $m \ge 1$ так, что

$$4^m > \frac{1}{\delta}$$

Рассмотрим число $4^m x$
Так как это какое-то конкретное вещественное число, то

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}: \quad k \le 4^m x < k+1$$

$$\implies \underbrace{k \cdot 4^{-m}}_{=:a_m} \le x < \underbrace{(k+1) \cdot 4^{-m}}_{=:b_m} \tag{1.37}$$

$$b_m - a_m \overset{\text{def}}{=} 4^{-m} \tag{1.38}$$

  – Возьмём $n > m$

  $$4^n x = 4^{n-m} \cdot 4^m x$$

  (это справедливо для любого n)
  Рассмотрим числа $4^n a_m$ и $4^n b_m$

  $$4^n a_m = 4^{n-m} \cdot 4^m a_m = 4^{n-m} \cdot k$$

$$4^n b_m = 4^{n-m}\cdot 4^m b_m = 4^{n-m}(k+1) = \underbrace{4^{n-m}k}_{4^n a_m} + \underbrace{4^{n-m}}_{\text{чётное}}$$

$$\implies \varphi(4^n b_m) = \varphi(4^n a_m + \text{ чётное}) = \varphi(4^n a_m) \tag{1.39}$$

(т. к. у функциии φ период 2)

– Если $n = m$

$$4^m a_m = k, \qquad 4^m b_m = k+1$$

$$\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m) = \varphi(k+1) - \varphi(k) \tag{1.40}$$

Посмотрев на график φ, видим, что для всякого целого k

$$|\varphi(k+1) - \varphi(k)| = 1 \tag{1.41}$$

– Пусть $0 < n < m$

$$4^n b_m - 4^n a_n = 4^{n-m}4^m(b_m - a_m) = 4^{n-m} \tag{1.42}$$

Запишем некоторые свойства $\varphi(x)$, которые видно из графика, но можно доказать и аналитически:

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| \le |y_2 - y_1| \tag{1.43}$$

Рассмотрим выражение

$$f(b_m) - f(a_m) \overset{\text{def } f}{=\!=\!=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n b_m) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n b_m) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \Big(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\Big) + \left(\frac{3}{4}\right)^m \Big(\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)\Big) +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \Big(\underbrace{\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)}_{=0 \text{ по } (1.39)}\Big) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m \Big(\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)\Big) + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \Big(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\Big)$$

$$\implies |f(b_m) - f(a_m)| \ge$$

$$\ge \left(\frac{3}{4}\right)^m |\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)| - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)| \underset{(1.40),(1.43)}{\ge}$$

$$\ge \left(\frac{3}{4}\right)^m |\varphi(k+1) - \varphi(k)| - \sum_{n=0}^{m-1} |4^n b_m - 4^n a_m| \underset{(1.41),(1.42)}{=\!=\!=\!=} \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 1 - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^{n-m} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m - 4^{-m}\sum_{n=0}^{m-1} 3^n \underset{\text{геом. прогр.}}{=\!=\!=\!=} \left(\frac{3}{4}\right)^m - 4^{-m}\cdot\frac{3^m - 1}{3-1} > \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^m \tag{1.44}$$

При этом, $a_m \le x < b_m$, поэтому

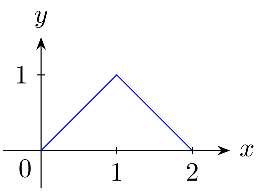
$$|f(b_m) - f(a_m)| \underset{(1.34)}{\le} A(b_m - a_m) \underset{(1.38)}{=\!=\!=} A\cdot 4^{-m}$$

$$\underset{(1.44)}{\Longrightarrow} 4^{-m} > \frac{1}{2}\cdot 3^m \cdot 4^{-m} \quad \implies \quad \frac{1}{2}\cdot 3^m < A$$

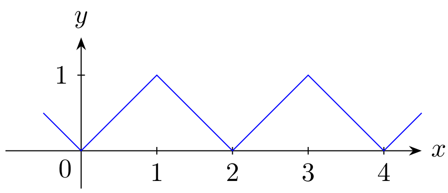
При этом, A не зависит от m, а условие на m позволяет нам брать произвольно большие m, в том числе такое, что

$$\frac{1}{2}\cdot 3^m > A - \lightning$$

$\square$



(a) Шаг 1



(b) Шаг 2