

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной</b>	<b>2</b>
1.1	Основные понятия и результаты	2
1.1.1	Объект изучения	2
1.1.2	Решения дифференциального уравнения	2
1.1.3	Задача Коши	3
1.1.4	О существовании решения внутренней задачи Коши	4
1.1.5	Продолжимость решения	4
1.1.6	Полное решение, интегральная кривая	6
1.1.7	Вопросы, связанные с единственностью решения	7
1.1.8	Достаточные условия единственности	9
1.1.9	Частные и особые решения	9
1.1.10	Понятие общего решения	9
1.1.11	Поле направлений и метод изоклин	9
1.2	Существование решения внутренней задачи Коши	10
1.2.1	Ломаные Эйлера	10
1.2.2	Лемма об $\varepsilon$ -решении	11
1.2.3	Лемма Арцела-Асколи	12
1.2.4	Теорема о существовании решения ВЗК	14
1.3	Существование решения граничной задачи Коши	15
1.3.1	Граничные кривые и порождаемые ими множества	16
1.3.2	Граничный треугольник и граничный отрезок Пеано	18
1.3.3	Теоремы о существовании или отсутствии решений ГЗК	20
1.4	Единственность решения задачи Коши	22
1.4.1	Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши	22
1.4.2	Лемма Гронуолла	23
1.4.3	Условия Липшица	24
1.4.4	Теоремы о глобальной единственности решений	25
1.5	Существование общего решения	27
1.5.1	Область существования общего решения	27
1.5.2	Формула общего решения	28
<b>2</b>	<b>Уравнения первого порядка в симметричной форме</b>	<b>32</b>
2.1	Существование и единственность решения	32
2.1.1	Объект изучения	32
2.1.2	Решение уравнения в симметричной форме	32
2.1.3	Интегральные кривые	33
2.1.4	Существование и единственность решения	33
2.2	Интергал уравнения в симметричной форме	34
2.2.1	Определение интеграла	34
2.2.2	Характеристическое свойство интеграла	34

# Глава 1

## Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

### 1.1 Основные понятия и результаты

#### 1.1.1 Объект изучения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной:

$$\frac{dy(x)}{dx}, \quad \text{или в краткой записи } y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

где  $x$  – это независимая переменная,  $y = y(x)$  – искомая функция, а  $f(x, y)$ , если не оговорено иное, – вещественная функция, определённая и непрерывная на множестве  $\tilde{G} = G \cup \hat{G}$ , где:

- $G \subset \mathbb{R}^2$  – область
- $\hat{G} \subseteq \partial G$  – (возможно пустое) множество, на котором  $f(x, y)$  непрерывна или может быть доопределена с сохранением непрерывности

**Напоминание.** Область – связное открытое множество

**Обозначение.**  $G^* := \partial G \setminus \hat{G}$

#### 1.1.2 Решения дифференциального уравнения

**Обозначение.** Символ  $\langle$  подразумевает одну из скобок:  $($  или  $[$ , а символ  $\rangle$  – скобку  $)$  или  $]$

На вещественной оси рассмотрим непустое связное множество, не являющееся точкой. Это будет промежуток  $\langle a, b \rangle$

**Определение 1.** Функция  $y = \varphi(x)$ , заданная на промежутке  $\langle a, b \rangle$  называется решением дифференциального уравнения (1.1), если для любого  $x \in \langle a, b \rangle$  выполняются следующие три условия:

1. функция  $\varphi(x)$  дифференцируема
2. точка  $(x, \varphi(x)) \in \tilde{G}$
3.  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

**Замечание.** График решения по определению не может состоять из одной точки

**Замечание.** Первые два условия являются вспомогательными и позволяют записать третье

**Замечание.** Любое решение является функцией не просто дифференцируемой а гладкой, т. е.  $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$

**Доказательство.** Функция  $\varphi(x)$  дифференцируема (по условию 1). Значит, она непрерывна в любой точке  $x \in \langle a, b \rangle$   
 Значит, правая часть тождества из условия 3 непрерывна (как композиция непрерывных функций)  
 Значит, и левая часть непрерывна  
 При этом, если решение задано на отрезке  $[a, b]$ , то на его концах существуют и непрерывны односторонние производные  $\square$

**Определение 2.** Поскольку решение – гладкая функция, то через любую точку  $(x, \varphi(x))$  плоскости можно провести касательную под таким углом  $\alpha(x)$  с осью абсцисс, что  $\operatorname{tg} \alpha(x) = f(x, \varphi(x)) = \varphi'(x)$   
 Поэтому графики решений, имеющие общую точку соприкасаются в ней (“пересекаются под нулевым углом”)

**Определение 3.** Решение  $y = \varphi(x)$  уравнения (1.1), заданное на промежутке  $\langle a, b \rangle$  будем называть:

- внутренним, если  $(x, \varphi(x)) \in G$  для любого  $x \in \langle a, b \rangle$
- граничным, если  $(x, \varphi(x)) \in \widehat{G}$  для любого  $x \in \langle a, b \rangle$
- смешанным, если найдутся такие  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ , что точка  $(x_1, \varphi(x_1)) \in G$ , а точка  $(x_2, \varphi(x_2)) \in \widehat{G}$

**Лемма 1 (о записи решения в интегральном виде).** Для того чтобы определённая на промежутке  $\langle a, b \rangle$  функция  $y = \varphi(x)$  была решением дифференциального уравнения (1.1), необходимо и достаточно, чтобы функция  $\varphi(x)$  была непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , её график лежал в  $\widehat{G}$  и при некотором  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  выполнялось тождество

$$\varphi(x) \stackrel{\langle a, b \rangle}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds \quad (1.2)$$

**Доказательство.**

- Необходимость

Пусть функция  $y = \varphi(x)$  на  $\langle a, b \rangle$  является решением уравнения (1.1)

Тогда, по определению, справедливо тождество  $f(x, \varphi(x)) \stackrel{\langle a, b \rangle}{\equiv} \varphi'(x)$

Интегрируя его при любом фиксированном  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  по  $s$  от  $x_0$  до  $x$  и перенося  $\varphi(x_0)$  в правую часть, получаем тождество (1.2):

$$\int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds \stackrel{\langle a, b \rangle}{\equiv} \int_{x_0}^x \varphi'(s) \, ds = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

- Достаточность

Пусть непрерывная на промежутке  $\langle a, b \rangle$  функция  $y = \varphi(x)$  удовлетворяет тождеству (1.2)

Тогда  $\varphi(x)$  непрерывно дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  (поскольку по (1.2) она равна интегралу с переменным верхним пределом от композиции непрерывных функций)

Дифференцируя (1.2), заключаем, что выполняется и третье условие из определения решения  $\square$

### 1.1.3 Задача Коши

**Задача.** Для любой точки  $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$  задача Коши с начальными данными  $x_0, y_0$  заключается в том, чтобы найти все решения  $y = \varphi(x)$  уравнения (1.1), заданные на промежутках  $\langle a, b \rangle \ni x_0$ , в том числе внутренние, граничные или смешанные, такие что  $\varphi(x_0) = y_0$   
 При этом говорят, что задача Коши поставлена в точке  $(x_0, y_0)$ , а найденные решения – это решения поставленной задачи Коши

**Определение 4.** Решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$  существует, если существует такое решение  $y = \varphi(x)$ , определённое на промежутке  $\langle a, b \rangle \ni x_0$ , что  $\varphi(x_0) = y_0$

**Определение 5.** Внутреннее (граничное, смешанное) решение задачи Коши с начальными данными

$x_0, y_0$  существует, если точка  $(x_0, y_0) \in G(\widehat{G}, \widetilde{G})$  и найдутся промежуток  $\langle a, b \rangle \ni x_0$  и определённое на нём внутреннее (граничное, смешанное) решение  $y = \varphi(x)$  такие, что  $\varphi(x_0) = y_0$

**Определение 6.** Задачу Коши, поставленную в точке  $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$  будем называть

- внутренней, если  $(x_0, y_0) \in G$
- граничной, если  $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$

### 1.1.4 О существовании решения внутренней задачи Коши

**Напоминание.** Компакт в  $\mathbb{R}^n$  – замкнутое ограниченное множество

**Алгоритм (Пеано).** Очевидно, что для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  найдутся такие константы  $a, b > 0$ , что прямоугольник

$$\overline{R} = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

являющийся компактом, лежит в области  $G$

Сразу исключим из рассмотрения простейший случай, когда  $f(x, y) \equiv 0$  на  $\overline{R}$ , в котором уравнение (1.1) имеет решение  $y(x) \equiv y_0$  при  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$

По второй теореме Вейерштрасса,  $f(x, y)$  достигает своего максимума на  $\overline{R}$ . Положим

$$M := \max_{(x, y) \in \overline{R}} |f(x, y)| > 0, \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (h > 0)$$

**Определение 7.** Отрезок  $\overline{P}_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$  называется отрезком Пеано, построенным для точки  $(x_0, y_0) \in G$

Отрезки  $\overline{P}_h^+(x_0, y_0) = [x_0, x_0 + h]$  и  $\overline{P}_h^-(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0]$  называются соответственно правым и левым отрезками Пеано

**Теорема 1 (Пеано, о существовании внутреннего решения).** Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области  $G$ .

Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  и для любого отрезка Пеано  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$  существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$ , определённое на  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Будет доказано в §2 □

### 1.1.5 Продолжимость решения

**Определение 8.** Пусть  $y = \varphi(x)$  – решение уравнения (1.1) на  $\langle a, b \rangle$ . Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция  $y = \varphi(x)$  останется решением, которое называют сужением исходного решения

**Определение 9.** Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке  $\langle a, b \rangle$  продолжимо вправо в точку  $b$  или на границу, если найдётся такое решение  $y = \tilde{\varphi}(x)$ , определённое на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , что сужение  $\tilde{\varphi}(x)$  на  $\langle a, b \rangle$  совпадает с  $\varphi(x)$

**Определение 10.** Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке  $\langle a, b \rangle$  продолжимо вправо за точку  $b$  или за границу, если найдутся такие  $\tilde{b} > b$  и решение  $y = \tilde{\varphi}(x)$ , определённое на промежутке  $\langle a, \tilde{b} \rangle$ , что сужение  $\tilde{\varphi}(x)$  на  $\langle a, b \rangle$  совпадает с  $\varphi(x)$

**Теорема 2 (о продолжимости решения на границу).**  $\varphi(x)$  – решение уравнения (1.1) на промежутке  $\langle a, b \rangle$ ,  $b < +\infty$

Для того чтобы это решение было продолжимо вправо в точку  $b$  необходимо и достаточно, чтобы

существовали последовательность  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  и число  $\eta \in \mathbb{R}^1$  такие, что

$$\forall k \quad \left\{ \begin{array}{l} x_k \in \langle a, b \rangle \\ (x_k, \varphi(x_k)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (b, \eta) \in \tilde{G} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Аналогично формулируется условие для продолжимости влево

#### Доказательство.

- Достаточность

Пусть выполняется условие (1.3)

**Утверждение 1.** В силу того, что функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на множестве  $\tilde{G}$ , найдутся такие  $c > 0$  и  $M \geq 1$ , что

$$\forall (x, y) \in \tilde{G} \cap \overline{B_c}(b, \eta) \quad |f(x, y)| \leq M$$

#### Доказательство.

- $(b, \eta) \in G$ , т. е. является внутренней

Тогда существует  $\overline{B_c}(b, \eta) \subset G$  – компакт, и на нём функция ограничена

- $(b, \eta) \in \tilde{G}$  и “вблизи” находятся точки “плохой” границы

Приведём рассуждение **от противного**:

Допустим,  $|f(b, \eta)| = M - 1$  и существует последовательность  $c_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  ( $c_m > 0$ ) и

последовательность точек  $(x_m, y_m) \in \tilde{G} \cap \overline{B_{c_m}}(b, \eta)$  такие, что  $|f(x_m, y_m)| > M$

Тогда  $(x_m, y_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (b, \eta)$ , а это значит, что функция  $|f(x, y)|$  терпит разрыв в точке  $(b, \eta)$ , так как  $|f(x_m, y_m)| - |f(b, \eta)| > 1$  для любого  $m$

□

Докажем, что существует  $\lim_{x \rightarrow b-} \varphi(x)$  и он равен  $\eta$ :

Для этого покажем, что для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдётся число  $\delta \in \langle a, b \rangle$ , что

$$\forall x \in [\delta, b) : |\varphi(x) - \eta| < \varepsilon \quad (1.4)$$

Зафиксируем произвольный  $0 < \varepsilon \leq c$

Тогда  $|f(x, y)| \leq M$  для любой точки  $(x, y) \in \tilde{G} \cap \overline{B_\varepsilon}(b, \eta)$  и по условию (1.3) найдётся такой номер  $m$ , что выполняются равенства

$$b - x_m > \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |\varphi(x_m) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.5)$$

По формуле Ньютона-Лейбница для всякого  $x \in [x_m, b)$  имеем:

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_m)| &= \left| \int_{x_m}^x \varphi'(s) \, ds \right| = \left| \int_{x_m}^x f(s, \varphi(s)) \, ds \right| \leq \int_{x_m}^x |f(s, \varphi(s))| \, ds \leq \\ &\leq M(x - x_m) < M(b - x_m) \underset{(1.5)_1}{<} \frac{\varepsilon}{2} \quad (x_m \leq x < b) \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\varphi(x) - \eta| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_m)| + |\varphi(x_m) - \eta| \underset{(1.5)_2}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Неравенство (1.4) верно при  $\delta = x_m$ , а значит,  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} \eta$

Доопределим функцию  $y = \varphi(x)$  в точке  $b$ , положив  $\varphi(b) = \eta$

Согласно (1.2)  $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds$  для любых  $x_0, x \in \langle a, b \rangle$

В этом тождестве можно перейти к пределу при  $x \rightarrow b-0$ , получая равенство  $\eta = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^b f(s, \varphi(s)) \, ds$ , так как по условию точка  $(b, \eta) \in \tilde{G}$ , а значит, функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в этой точке

В результате функция

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b \rangle \\ \eta & x = b \end{cases}$$

по определению является продолжением решения  $y = \varphi(x)$  на  $\langle a, b \rangle$

• **Необходимость**

Допустим, что на промежутке  $\langle a, b \rangle$  существует решение  $y = \tilde{\varphi}(x)$  такое, что  $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ . Поскольку  $\tilde{\varphi}(x)$  непрерывна, то  $\tilde{\varphi}(x) = \eta = \lim_{x \rightarrow b} \tilde{\varphi}(x)$

Но тогда  $\eta = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$  и требуемая последовательность точек  $x_k$  существует, причём по определению решения точка  $(b, \eta) \in \tilde{G}$

□

**Лемма 2 (о продолжимости решения за границу отрезка).** Пусть решение  $y = \varphi(x)$  уравнения (1.1) определено на промежутке  $\langle a, b \rangle$  и точка  $(b, \varphi(b)) \in G$

Тогда это решение продолжимо вправо за точку  $b$  на полуотрезок Пеано, построенный для точки  $(b, \varphi(b))$

**Доказательство.** По теореме Пеано (теор. 1) на отрезке Пеано  $\overline{P_h}(b, \varphi(b))$  существует внутреннее решение  $y = \psi(x)$  задачи Коши с начальными данными  $(b, \varphi(b))$

Тогда функция  $y = \tilde{\varphi}(x)$ , где

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b \rangle \\ \psi(x), & x \in [b, b+h] \end{cases}$$

по определению является решением уравнения (1.1) на  $\langle a, b+h \rangle$

В самом деле, в точке  $b$  производная функции  $\tilde{\varphi}(x)$  существует, так как

$$\tilde{\varphi}'_-(b) = \varphi'_-(b) = f(b, \varphi(b)) = \psi'_+(b) = \tilde{\psi}'_+(b)$$

А выполнение других условий из определения решения для  $\tilde{\varphi}(x)$  очевидно

□

Утверждение о продолжимости решения, определённого на промежутке  $[a, b)$ , влево за точку  $a$  формулируется аналогично

**Следствие.** Если решение  $y = \varphi(x)$  уравнения (1.1) определено на промежутке  $\langle a, b \rangle$  и не продолжимо вправо за точку  $b$ , то  $(b, \varphi(b)) \in \hat{G}$

А если оно определено на промежутке  $[a, b)$  и не продолжимо влево за точку  $a$ , то  $(a, \varphi(a)) \in \hat{G}$

**Доказательство.** Предположение противного противоречит лемме

□

Из теоремы о продолжимости решения на границу и последней леммы вытекает следующее утверждение:

**Лемма 3 (о продолжимости решения на границу интервала).** Пусть решение  $y = \varphi(x)$  уравнения (1.1) определено на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , существует число  $\eta = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$  и точка  $(b, \eta) \in G$

Тогда это решение продолжимо вправо за точку  $b$

Утверждение о продолжимости решения, заданного на  $\langle a, b \rangle$ , влево за точку  $a$  формулируется аналогично

### 1.1.6 Полное решение, интегральная кривая

**Определение 11.** Решение называется полным, или максимально продолженным, или непродолжимым в случае, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо, или что то же самое, когда оно не является сужением никакого другого решения

**Определение 12.** Внутреннее (граничное) решение называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо так, чтобы оно осталось внутренним (граничным)

**Определение 13.** Промежуток, на котором определено полное решение, будем называть максимальным интервалом существования и обозначим  $I_{\max}$ , а если для полного решения была поставлена задача Коши с начальными данными  $x_0, y_0$ , то  $I(x_0, y_0)$

Из леммы о продолжимости решения за границу отрезка с очевидностью вытекает следующий факт:

**Утверждение 2.** Максимальный интервал существования любого внутреннего решения – это интервал

**Теорема 3 (о существовании полного решения).** Любое решение уравнения (1.1) может быть продолжено до полного решения

**Другая формулировка.** Любое решение уравнения (1.1), не являющееся полным, является сужением некоторого полного решения

**Доказательство.** Приведено в дополнении 1<sub>4</sub> □

**Определение 14.** График полного решения будем называть интегральной кривой уравнения (1.1) Дуга интегральной кривой – это график решения, заданного на любом промежутке  $\langle a, b \rangle \subsetneq I_{\max}$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.1) лежат в  $\tilde{G}$ , не могут иметь вертикальных касательных и не могут пересекаться под ненулевым углом, т. е. могут только соприкасаться

**Теорема 4 (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения).** Предположим, что внутреннее решение  $y = \varphi(x)$  уравнения (1.1) определено на промежутке  $\langle a, \beta \rangle$  и не продолжимо вправо. Тогда для любого компакта  $\overline{H} \subset G$  найдётся такое число  $\delta \in \langle a, \beta \rangle$ , что для всякого  $x \in (\delta, \beta)$  точка  $(x, \varphi(x)) \in G \setminus \overline{H}$

**Другая формулировка.** При стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования дуга интегральной кривой покидает любой компакт, лежащий в области  $G$ , и никогда в него не возвращается

**Доказательство.** Переходя в условиях теоремы на язык последовательностей, докажем, что для любого компакта  $\overline{H} \subset G$  и для любой последовательности  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \beta$ ,  $x_k \in \langle a, \beta \rangle$  существует  $K > 0$  такое, что  $(x_k, \varphi(x_k)) \in G \setminus \overline{H}$  при всех  $k > K$

Рассуждая **от противного**, допустим, что существуют компакт  $\overline{H}_* \subset G$  и последовательность  $x_k \rightarrow \beta$ ,  $x_k \in \langle a, \beta \rangle$  такие, что  $(x_k, \varphi(x_k)) \in \overline{H}_*$  для  $k = 1, 2, \dots$

Отсюда сразу же вытекает, что  $\beta < +\infty$ , так как в противном случае найдётся такой индекс  $k^*$ , что точка  $(x_{k^*}, \varphi(x_{k^*}))$  будет лежать вне компакта в силу его ограниченности

НУО считаем, что последовательность  $x_k$  – сходящаяся (иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности)

Пусть  $(\beta, \eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, \varphi(x_k))$

Тогда предельная точка  $(\beta, \eta)$  также принадлежит компакту  $\overline{H}_*$ , а значит, выполняются условия теоремы о продолжимости решения (теор. 2), согласно которой решение  $y = \varphi(x)$  продолжимо на промежуток  $\langle a, \beta \rangle - \not\subset$  с условием теоремы □

Аналогичный результат имеет место для внутреннего решения, определённого на  $(\alpha, b)$  и непродолжимого влево

### 1.1.7 Вопросы, связанные с единственностью решения

**Определение 15.** Точка  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$  называется точкой неединственности, если существуют такие решения  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$ , определённые на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , и такая последовательность  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$ ,  $x_k \in \langle a, b \rangle$ , что  $\varphi_1(x_k) \neq \varphi_2(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ )

В противном случае точка  $(x_0, y_0)$  называется точкой единственности

**Замечание.** Любая точка граничного множества  $\hat{G}$ , в которой решение задачи Коши отсутствует, по определению будет точкой единственности

**Определение 16.** Точка  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$  называется точкой неединственности, если найдутся такие решения  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$ , определённые на  $\langle a, b \rangle$ , что

$$\forall (\alpha, \beta) \ni x_0 \quad \exists x^* \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b \rangle : \quad \varphi_1(x^*) \neq \varphi_2(x^*)$$

**Утверждение 3.** Определения точки неединственности равносильны

**Доказательство.**

- опр. 15  $\implies$  опр. 16

Из опр. 15 вытекает, что для всякого интервала  $(\alpha, \beta) \ni x_0$  найдётся такой индекс  $k^*$ , что  $x_{k^*} \in (\alpha, \beta)$ , поэтому в опр. 16  $x^* = x_{k^*}$

- опр. 16  $\implies$  опр. 15

Можно выбрать последовательность интервалов  $(\alpha_k, \beta_k)$ , которая с ростом  $k$  стягивается в точку  $x_0$ . Тогда по опр. 16 для всякого  $k$  найдётся  $x_k^* \in (\alpha_k, \beta_k) \cap \langle a, b \rangle$ , что  $\varphi_1(x_k^*) \neq \varphi_2(x_k^*)$ , т. е.  $x_k^*$  – последовательность из опр. 15

□

Отрицая опр. 16, получаем “прямое” определение точки единственности:

**Определение 17.** Точку  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$  будем называть точкой единственности в следующих случаях:

1. задача Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$  не имеет решений
2. для любых двух решений  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  этой задачи Коши, определённых на некотором промежутке  $\langle a, b \rangle$ , найдётся интервал  $(\alpha, \beta) \ni x_0$  такой, что

$$\forall x \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b \rangle \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$

**Примечание.** Здесь надо иметь в виду следующее:

- Если  $(x_0, y_0) \in G$ :
  - Случай 1 не может возникнуть
  - По теореме Пеано (теор. 1) все решения задачи Коши определены на отрезке Пеано  $[x_0 - h, x_0 + h]$  ( $h > 0$ )  
Поэтому в определении точки единственности для любых двух решений достаточно требовать наличия интервала  $(\alpha, \beta) \ni x_0$ , на котором они совпадают
- Если  $(x_0, y_0) \in \hat{G}$  и, например, решение нельзя продолжить за точку  $x_0$  вправо, то в определении для любых двух решений задач Коши при их наличии надо потребовать существования промежутка  $(\alpha, x_0]$ , на котором они совпадают

**Определение 18.** Решение задачи Коши уравнения (1.1), поставленной в точке  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$  называется:

- неединственным, если  $(x_0, y_0)$  – точка неединственности
- единственным в точке, если оно существует и  $(x_0, y_0)$  – точка единственности

**Определение 19.** Решение внутренней задачи Коши уравнения (1.1), поставленной в точке  $(x_0, y_0)$  называется локально единственным, если существует интервал  $(\alpha, \beta) \ni x_0$  такой, что все решения этой задачи продолжимы на  $(\alpha, \beta)$  и для любых двух её решений  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$ , при необходимости произвольным образом продолженных на  $(\alpha, \beta)$ , имеем  $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$  на  $(\alpha, \beta)$

**Теорема 5** (о локальной единственности решения внутренней задачи Коши). Пусть  $(x_0, y_0) \in G$  – это точка единственности

Тогда решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$  является локально единственным



**Доказательство.** Будет доказано в §4, п. 1<sup>0</sup>

□

**Следствие.** Из этой теоремы вытекает, что для внутренней задачи Коши понятия единственности решения в точке и локальной единственности равносильны

### 1.1.8 Достаточные условия единственности

**Определение 20.** Будем говорить, что решение задачи Коши  $y = \varphi(x)$ , поставленное в точке  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$  и определённое на промежутке  $\langle a, b \rangle \ni x_0$ , единственно на этом промежутке, или, просто, единственно, если для любого  $x \in \langle a, b \rangle$  точка  $(x, \varphi(x))$  является точкой локальной единственности

**Определение 21.** Область  $G^0 \subset G$  будем называть областью единственности для уравнения (1.1), если каждая точка  $G^0$  является точкой единственности. Множество  $\tilde{G}^0 = G^0 \cup \widehat{G}^0$ , в котором  $\widehat{G}^0$  – это множество граничных точек  $G^0$ , являющихся точками единственности, будем называть множеством единственности

**Теорема 6 (о единственности; слабая).** Пусть в уравнении (1.1) функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в области  $G$ , а частная производная  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  определена и непрерывна в области  $G^0 \subset G$ . Тогда  $G^0$  является областью единственности

**Доказательство.** Эта теорема является следствием более сильных теорем о единственности, которые будут сформулированы и доказаны в §4, п. 4<sup>0</sup>, причём не только для области  $G$ , а для всего множества  $\tilde{G}$

□

### 1.1.9 Частные и особые решения

**Определение 22.** Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , будем называть частным (особым), если его график состоит только из точек единственности (неединственности) и это решение является полным в том смысле, что не может быть продолжено ни влево, ни вправо так, чтобы его график состоял только из точек единственности (неединственности). В этом случае промежутки  $\langle a, b \rangle$  будем называть максимальным интервалом существования частного (особого) решения

### 1.1.10 Понятие общего решения

**Определение 23.** Общим решением уравнения (1.1) на некотором связном множестве  $A^*$ , лежащем в области единственности  $G^0$ , называется функция  $y = \varphi(x, C)$ , определённая и непрерывная по совокупности аргументов на множестве  $Q_{A^*} = \{ (x, C) \mid x \in \langle a(C), b(C) \rangle, C \in \langle C_1, C_2 \rangle \}$ , если выполняются следующие два условия:

1. для любой точки  $(x_0, y_0) \in A^*$  уравнение  $y_0 = \varphi(x_0, C)$  имеет единственное решение  $C = C_0$
2. функция  $y = \varphi(x, C_0)$  – это решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$ , определённое на промежутке  $\langle a(C_0), b(C_0) \rangle$

**Теорема 7 (о существовании общего решения).** Для произвольной точки  $(x_0^*, y_0^*)$  из области единственности  $G^0$  уравнения (1.1) найдётся связное множество  $A^* : (x_0^*, y_0^*) \in A^* \subset G^0$ , на котором существует общее решение

**Доказательство.** Приведено в §5

□

### 1.1.11 Поле направлений и метод изоклин

**Определение 24.** Отрезок произвольной длины с центром в точке  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$  и тангенсом угла наклона, равным  $f(x_0, y_0)$ , будем называть отрезком поля направлений, построенным в точке  $(x_0, y_0)$ . Само множество  $\tilde{G}$ , заполненное отрезками поля направлений будем называть полем направлений, ин-

дуцированным уравнением (1.1)

Кривая, лежащая в  $\tilde{G}$ , является интегральной тогда и только тогда, когда она гладкая и в каждой точке направление касательной к ней совпадает с направлением поля в этой точке

**Определение 25.** Изоклиной уравнения (1.1) называется любая кривая, расположенная во множестве  $\tilde{G}$ , в каждой точке которой направление поля имеет один и тот же угол наклона

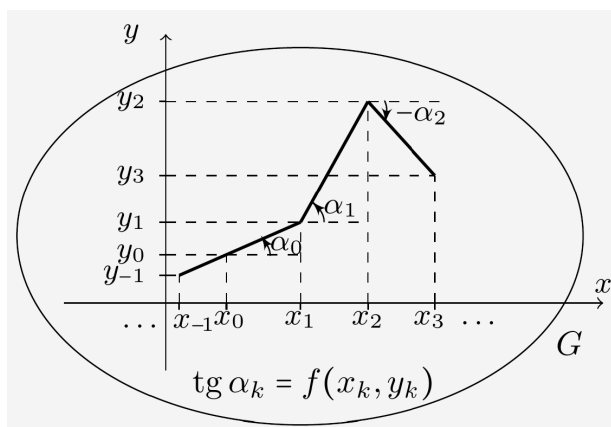
**Замечание.** Все изоклины задаются уравнением  $f(x, y) = k$ , где  $k$  – любое вещественное число из области значений  $f(x, y)$

Метод изоклин заключается в том, чтобы, нарисовав достаточное число изоклин и отрезков поля на них, начертить характерные интегральные кривые, которые, опадая на очередную изоклину, должны касаться отрезков поля направлений, построенных на ней

## 1.2 Существование решения внутренней задачи Коши

В этом параграфе будет доказана теорема Пеано о существовании решения внутренней задачи Коши уравнения (1.1)  $y' = f(x, y)$  (теор. 1), т. е. будет рассматриваться задача Коши, поставленная в любой внутренней точке  $\tilde{G}$ , и строиться решение этой задачи, график которого лежит в области  $G$   
Будем строить решение при помощи “метода ломаных Эйлера”

### 1.2.1 Ломаные Эйлера



Выберем в области  $G$  произвольную точку  $(x_0, y_0)$  и построим в ней отрезок поля направлений малой длины, что он целиком лежит в  $G$ , начинаясь в какой-то точке  $(x_{-1}, y_{-1})$  и заканчиваясь в точке  $(x_1, y_1)$

Проведём вправо через точку  $(x_1, y_1)$  и влево через точку  $(x_{-1}, y_{-1})$  полуотрезки поля, лежащие в  $G$  и заканчивающиеся в точках  $(x_2, y_2)$  и  $(x_{-2}, y_{-2})$  соответственно, и так далее

Этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов  $N$ , поскольку область  $G$  – открытое множество

График полученной таким образом непрерывной кусочно-линейной функции  $y = \psi(x)$  называется ломаной Эйлера

Итак, установлено, что ломаная Эйлера лежит в области  $G$ , проходит через точку  $(x_0, y_0)$  и абсциссы её угловых точек равны  $x_j$  ( $j = \overline{-N, N}$ )

**Определение 26.** Рангом дробления ломаной Эйлера назовём число, равное

$$\max_{j=\overline{1-N, N}} \{x_j - x_{j-1}\}$$

Формула, рекуррентно задающая ломаную Эйлера  $y = \psi(x)$ , имеет вид:  $\psi(x_0) = y_0$  и далее при  $j = 0, 1, \dots, N - 1$  для любого  $x \in (x_j, x_{j+1}]$  или при  $j = 0, -1, \dots, 1 - N$  для любого  $x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f(x_j, \psi(x_j))(x - x_j) \quad (1.6)$$

В частности, при  $j = 0$  отрезок ломаной Эйлера определён для любого  $x \in [x_{-1}, x_1]$  и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку  $(x_0, y_0)$  под углом, тангенс которого равен  $f(x_0, y_0)$

Из формулы (1.6) вытекает, что для всякого  $j = 0, N - 1$  производная  $\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j))$  при  $x \in (x_j, x_{j+1})$ , а в точке  $x_{j+1}$  она не определена, как и в точках  $x_{j-1}$  при  $j \leq 0$

Доопределим  $\psi'(x)$  в точках разрыва как левостороннюю производную при  $x > x_0$  и как правостороннюю производную при  $x < x_0$ , положив

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) \lim_{x \rightarrow x_j^{\mp 0}} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \quad (j = \pm 1, \dots, \pm N)$$

А при  $j = 0$  существует полная производная  $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$

Таким образом, для любого  $x \in (x_j, x_{j+1}]$  ( $j = 0, 1, \dots, N - 1$ ) или для любого  $x \in [x_{j-1}, x_j)$  ( $j = 0, -1, \dots, 1 - N$ )

$N$ ), дифференцируя равенство (1.6) по  $x$ , получаем

$$\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j)), \quad j \in \{1 - N, \dots, N - 1\} \quad (1.7)$$

### 1.2.2 Лемма об $\varepsilon$ -решении

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области  $G$ , такую, что при подстановке этой функции в уравнение (1.1) окажется, что разность между левой и правой частями уравнения по модулю не превосходит любого сколь угодно малого наперёд заданного положительного числа

**Определение 27.** Для всякого  $\varepsilon > 0$  непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке  $[a, b]$  функция  $y = \psi(x)$  называется  $\varepsilon$ -решением уравнения (1.1) на  $[a, b]$ , если для любого  $x \in [a, b]$  точка  $(x, \psi(x)) \in G$  и

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \leq \varepsilon \quad (1.8)$$

**Лемма 4** (о ломаных Эйлера в роли  $\varepsilon$ -решения). Для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  и для любого отрезка Пеано  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$  имеем:

1. Для любого  $\delta > 0$  на  $\overline{P}_h$  можно построить ломаную Эйлера  $y = \psi(x)$  с рангом дробления, не превосходящим  $\delta$ , график которой лежит в прямоугольнике  $\overline{R}$  из определения отрезка Пеано
2. Для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что всякая ломаная Эйлера  $y = \psi(x)$  с рангом дробления, не превосходящим  $\delta$ , является  $\varepsilon$ -решением уравнения (1.1) на  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$

#### Доказательство.

1. Для произвольной точки  $(x_0, y_0)$  из  $G$  построим прямоугольник  $\overline{R} \subset G$  с центром в  $(x_0, y_0)$  и два лежащих в нём равнобедренных треугольника  $\overline{T}^-, \overline{T}^+$  с общей вершиной в точке  $(y_0, x_0)$  и основаниями, параллельными оси ординат, как это было сделано при построении отрезка Пеано. При этом зафиксируются константы  $a, b, M, h$ .  
Выберем  $\delta_* < \delta$  так, чтобы число  $\frac{h}{\delta_*} =: N \in \mathbb{N}$ .  
Положим  $x_{j+1} := x_j + \delta_*$  ( $j = \overline{0, N-1}$ ), тогда  $x_N = x_0 + h$ .  
Для всякого  $x > x_0$  будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера  $y = \psi(x)$  с узлами в точках  $x_j$ .  
Для любого  $j = \overline{0, N}$  это сделать возможно, так как модуль тангенса угла наклона каждого отрезка равен  $|f(x_j, \psi(x_j))|$ , а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника  $\overline{T}^+$  по построению равны  $\pm M$ , где  $M = \max |f(x, y)|$  на компакте  $\overline{R}$ .  
Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку  $\overline{T}^+$ , а значит, содержится в нём.  
В результате для всех  $x \in [x_0, x_0 + h]$  точка  $(x, \psi(x)) \in \overline{T}^+$  и требуемая ломаная Эйлера построена на  $[x_0, x_0 + h]$ .  
Для левого полуотрезка Пеано всё аналогично.
2. Зафиксируем теперь произвольное положительное число  $\varepsilon$ .  
Функция  $f(x, y)$  непрерывна на компакте  $\overline{R}$ , следовательно, по теореме Кантора  $f$  равномерно непрерывна на нём. По определению это значит, что существует такое  $\delta_1 > 0$ , что для любых двух точек  $(x', y')$  и  $(x'', y'')$  из прямоугольника  $\overline{R}$  таких, что  $|x' - x''| \leq \delta_1$  и  $|y' - y''| < \delta_1$ , выполняется неравенство  $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \varepsilon$ .  
Положим  $\delta := \min \left\{ \delta_1, \frac{\delta_1}{M} \right\}$  и покажем, что для любой ломаной Эйлера  $y = \psi(x)$  с рангом дробления меньшим, чем  $\delta$  на отрезке Пеано  $\overline{P}_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ , справедливо неравенство (1.8):  
Возьмём любую точку  $x$  из отрезка Пеано, например справа от  $x_0$ .  
Найдётся индекс  $j \in \{0, \dots, N-1\}$  такой, что  $x \in (x_j, x_{j+1}]$ , т. е.  $x_j$  – ближайшая к  $x$  левая угловая точка ломаной Эйлера.  
Согласно (1.7)

$$\psi'(x) - f(x, \psi(x)) = f(x_j, \psi(x_j)) - f(x, \psi(x))$$

Оценим близость аргументов функции  $f$ :

По выбору  $\delta$  и  $j$  имеем

$$|x - x_j| \leq \delta \leq \delta_1, \quad |\psi(x) - \psi(x_j)| \stackrel{(1.6)}{=} |f(x_j, \psi(x_j))| \cdot |x - x_j| \leq M\delta \stackrel{\text{def } \delta}{\leq} \delta_1$$

Поэтому из равномерной непрерывности функции  $f$  вытекает, что

$$|f(x_j, \psi(x_j)) - f(x, \psi(x))| \leq \varepsilon$$

А значит, неравенство (1.8) из определения  $\varepsilon$ -решения выполняется на отрезке Пеано

□

### 1.2.3 Лемма Арцела-Асколи

Пусть последовательность функций  $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  задана на  $[a, b]$

**Определение 28.** Каждая из функций последовательности  $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена на  $[a, b]$ , если

$$\forall n \geq 1 \quad \exists K_n > 0 : \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_n(x)| \leq K_n$$

**Определение 29.** Последовательность  $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  **равномерно** ограничена на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\exists K > 0 : \quad \forall n \geq 1 \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_n(x)| \leq K$$

**Определение 30.** Каждая из функций последовательности  $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , значит, согласно теореме Кантора, равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \exists \delta_n > 0 : \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad (|x' - x''| \leq \delta_n \implies |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon)$$

**Определение 31.** Последовательность  $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  **равностепенно** непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall n \geq 1 \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad (|x' - x''| \leq \delta \implies |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon)$$

**Определение 32.** Последовательность функций  $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  поточечно сходится к некоторой функции  $h(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists N_x > 0 : \quad \forall i, j \geq N_x \quad |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon$$

**Определение 33.** Последовательность  $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  **равномерно** сходится к некоторой функции  $h(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall i, j \geq N \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon$$

**Обозначение.** Для любого  $x \in [a, b]$  поточечная сходимость обозначается  $h_n(x) \rightarrow h(x)$

**Обозначение.** Равномерная относительно  $[a, b]$  сходимость обозначается  $h_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{[a, b]} h(x)$

**Замечание.** В определениях 29 и 31 слова “равномерно” и “равностепенно” означают, что константы  $K, \delta$  не зависят от выбора  $n$ , а в 33 – что номер  $N$  не зависит от выбора  $x$

**Лемма 5** (Арцела-Асколи; о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности). Из любой ограниченной и равностепенно непрерывной на  $[a, b]$  последовательности функций  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$  можно выделить равномерно сходящуюся на  $[a, b]$  подпоследовательность

**Доказательство.** Рациональные числа образуют счётное всюду плотное множество на любом промежутке вещественной прямой

Счётность множества рациональных чисел, расположенных на отрезке  $[a, b]$  означает, что их можно перенумеровать:  $r_1, r_2, \dots$

В точке  $r_1$  числовая последовательность  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$  по предположению сходится, поэтому из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует такая последовательность натуральных чисел

$$n^{(1)} = \left\{ n_i^{(1)} \right\}_{i=1}^\infty, \quad n_i^{(1)} < n_{i+1}^{(1)}$$

что последовательность значений  $\left\{ h_{n_i^{(1)}}(r_1) \right\}_{i=1}^\infty$  сходится

В точке  $r_2$  последовательность  $\left\{ h_{n_i^{(1)}}(r_2) \right\}_{i=1}^\infty$  также ограничена, и из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов  $n^{(1)}$  имеется такая подпоследовательность индексов  $n^{(2)} = \left\{ n_i^{(2)} \right\}_{i=1}^\infty$ , что последовательность значений  $\left\{ h_{n_i^{(2)}}(r_2) \right\}_{i=1}^\infty$  тоже сходится. При этом она сходится и в точке  $r_1$  как подпоследовательность сходящейся последовательности

Продолжаем этот процесс

Введём последовательность индексов  $\left\{ n_i^{(i)} \right\}_{i=1}^\infty$  ( $n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)}$ ), где  $n_i^{(i)}$  –  $i$ -й член подпоследовательности  $n^{(i)}$

Функциональная подпоследовательность  $\left\{ h_{n_i^{(i)}}(x) \right\}_{i=1}^\infty$  сходится во всех рациональных точках  $[a, b]$ ,

поскольку в любой рациональной точке  $r_k$  последовательность  $\left\{ h_{n_i^{(k)}}(x) \right\}_{i=1}^\infty$  сходится по построению, а любая другая с меньшим верхним индексом является её подпоследовательностью

Покажем, что  $\left\{ h_{i_*}(x) \right\}_{i=1}^\infty$ , где  $i_* = n_i^{(i)}$  является искомой подпоследовательностью:

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$

По условию леммы последовательность  $\left\{ h_{i_*}(x) \right\}_{i=1}^\infty$  равномерно непрерывна, следовательно, по выбранному  $\varepsilon$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall x', x'' \in [a, b] : \quad \left( |x' - x''| < \delta \implies |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

По построению последовательность функций  $\left\{ h_{i_*}(x) \right\}_{i=1}^\infty$  сходится поточечно во всех рациональных точках  $r_k$  из  $[a, b]$

Поэтому по выбранному  $\varepsilon$  для любого  $k \in \mathbb{N}$  найдётся такой номер  $N_{r_k} > 0$ , что  $|h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \leq \varepsilon/3$  для любых  $i_*, j_* > N_{r_k}$

Последовательность индексов  $N_{r_1}, N_{r_2}, \dots$ , – счётная, поэтому она может стремиться к бесконечности. Перейти к конечной подпоследовательности позволяет использование появившейся из определения равномерно непрерывности универсальной константы  $\delta$  и плотности множества рациональных чисел:

Разобьём отрезок  $[a, b]$  на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит  $\delta$ . Пусть их окажется  $l$  штук

Множество рациональных чисел всюду плотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу:  $r_1^*, \dots, r_l^*$

Пусть  $N = \max \{ N_{r_1^*}, \dots, N_{r_l^*} \}$ , где константы  $N_r$  взяты из определения поточечной сходимости последовательности  $\left\{ h_{i_*}(x) \right\}_{i=1}^\infty$

Возьмём произвольное число  $x \in [a, b]$ . Предположим, что оно попало в промежуток с номером  $p$ . Тогда для любых  $i_*, j_* > N$  получаем:

$$|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \stackrel{\Delta}{\leq} |h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$$

так как  $|x - r_p^*| \leq \delta$  и верна оценка из определения равномерной сходимости

Итак, для любого  $\varepsilon > 0$  нашлось такое  $N$ , что для любых  $i_*, j_* \geq N$  и  $x \in [a, b]$  справедливо неравенство  $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$  □

**Замечание.** При выполнении условий леммы Арцела-Асколи она позволяет “объявить о рождении” функции  $h(x)$ , определённой на отрезке  $[a, b]$  и предельной для некоторой подпоследовательности функций  $h_n(x)$

При этом, по теореме Стокса-Зайделя предельная функция непрерывна на  $[a, b]$

**Примечание.** Теорема Стокса-Зайделя – некоторое обобщение формулы Ньютона-Лейбница

### 1.2.4 Теорема о существовании решения ВЗК

Докажем теорему 1:

**Теорема 8.** Пеано; о существовании внутреннего решения Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области  $G$

Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  и для любого отрезка Пеано  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$  существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$ , определённое на  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Возьмём произвольную точку  $(x_0, y_0)$  из области  $G$  и построим какой-либо отрезок Пеано  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$

Выберем произвольную последовательность положительных чисел  $\varepsilon_n$ , стремящуюся к нулю при  $n \rightarrow \infty$

Тогда по лемме об  $\varepsilon$ -решении для всякого  $n$  можно построить ломаную Эйлера  $\psi_n(x)$ , проходящую через точку  $(x_0, y_0)$ , определённую на  $\overline{P}_h(x_0, y_0)$  и являющуюся  $\varepsilon_n$ -решением уравнения (1.1) на отрезке  $\overline{P}_j(x_0, y_0)$

Поэтому для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \in \overline{P}_h(x_0, y_0)$  точка  $(x, \psi_n(x)) \in \overline{R}$  и выполняется неравенство (1.8)

$$|\psi'_n(x) - f(x, \psi_n(x))| < \varepsilon_n$$

Покажем, что последовательность ломаных Эйлера  $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  на отрезке Пеано удовлетворяет лемме Арцела-Асколи

Последовательность  $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно ограничена, так как график любой функции  $y = \psi_n(x)$  лежит в прямоугольнике  $R$ , а значит,  $|\psi_n(x)| \leq |y_0| + b$  для любого  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$

Для доказательства равномерной непрерывности зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$

Положим  $\delta = \varepsilon/M$ , где  $M = \max_{(x,y) \in \overline{R}} |f(x, y)|$

Тогда для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $x', x'' \in \overline{P}_h(x_0, y_0)$  таких, что  $|x'' - x'| \leq \delta$ , получаем:

$$\begin{aligned} |\psi_n(x'') - \psi_n(x')| &= \left| \int_{x_0}^{x''} \psi'_n(s) \, ds - \int_{x_0}^{x'} \psi'_n(s) \, ds \right| = \left| \int_{x'}^{x''} \psi'_n(s) \, ds \right| \stackrel{(1.7)}{\leq} \\ &\leq \left| \int_{x'}^{x''} \max_{j=1-N, \dots, N-1} |f(x, \psi_n(x_j))| \, ds \right| \leq M|x'' - x'| \leq M\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Действительно, интегрируя кусочно-постоянную функцию  $\psi'(x)$  по  $s$  от  $x_0$  до  $x$ , для любого  $x \in [x_{-N}, x_N]$  имеем:  $\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^x \psi'(s) \, ds$ , где

$$\int_{x_0}^x \psi(s) \, ds = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi'(s) \, ds + \int_{x_j}^x \psi'(s) \, ds, \quad x \in (x_j, x_{j+1}], \quad j \in \{0, \dots, N-1\}$$

$$\int_{x_0}^x \psi'(s) \, ds = \sum_{k=j+1}^{-1} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \psi'(s) \, ds + \int_{x_{j+1}}^x \psi'(s) \, ds, \quad x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j \in \{-N, \dots, -1\}$$

В результате последовательность ломаных Эйлера  $\psi_n(x)$  удовлетворяет условиям леммы Арцела-Асколи, и из неё можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность  $\{\psi_{i_*}(x)\}_{i_*=1}^{\infty}$

Пусть  $\psi_{i_*} \xrightarrow[i_* \rightarrow \infty]{x \in \overline{P}_h} \varphi(x)$

Тогда, согласно замечанию после леммы Арцела-Асколи функция  $y = \varphi(x)$  непрерывна на отрезке Пеано

Поскольку  $\psi_{i_*}(x)$  по построению является  $\varepsilon_{i_*}$ -решением, из неравенства (1.8) вытекает, что

$$\forall x \in \overline{P}_h(x_0, y_0) \quad \forall i_* \in \mathbb{N}: \quad \psi'_{i_*}(x) = f(x, \psi_{i_*}(x)) + \Delta_{i_*}(x), \quad |\Delta_{i_*}(x)| \leq \varepsilon_{i_*}$$

Интегрируя это равенство по  $s$  от  $x_0$  до  $x$  получаем:

$$\psi_{i_*}(x) - \psi_{i_*}(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, \psi_{i_*}(s)) \, ds + \int_{x_0}^x \Delta_{i_*}(s) \, ds \quad (1.9)$$

причём  $\psi_{i_*}(x_0) = y_0$  и  $\left| \int_{x_0}^x \Delta_{i_*}(s) \, ds \right| \leq \varepsilon_{i_*}|x - x_0| \xrightarrow[i_* \rightarrow \infty]{} 0$ , так как  $|x - x_0| \leq h$

Кроме того,  $f(s, \psi_{i_*}(s)) \xrightarrow[i_* \rightarrow \infty]{s \in \overline{P_h}} f(s, \varphi(s))$ , поскольку любая точка  $(s, \psi_{i_*}(s)) \in \overline{R}$  и  $f(x, y)$  по теореме Кантора равномерно непрерывна на  $\overline{R}$

**Утверждение 4.** Поэтому можно осуществить предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^x f(s, \psi_{i_*}(s)) \, ds \xrightarrow[i_* \rightarrow \infty]{} \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds$$

**Доказательство.** Действительно, зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$

Из равномерной непрерывности функции  $f(x, y)$  на компакте  $\overline{R}$  вытекает, что по выбранному  $\varepsilon$  найдётся такое  $\delta$ , что для любых  $(x, \tilde{y}), (x, \hat{y}) \in \overline{R}$  выполнено  $|\hat{y} - \tilde{y}| < \delta \implies |f(x, \hat{y}) - f(x, \tilde{y})| < \varepsilon/h$ . Теперь из равномерной относительно  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$  сходимости последовательности функций  $\psi_{i_*}(x)$  к функции  $\varphi(x)$  вытекает, что для найденного  $\delta$  существует такой номер  $N$ , что  $|\psi_{i_*}(x) - \varphi(x)| < \delta$  для любых  $i_* \geq N$  и  $x \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$ , причём графики  $y = \psi_{i_*}(x)$  и  $y = \varphi(x)$  по доказанному лежат в  $\overline{R}$ .

Следовательно,  $|f(x, \psi_{i_*}(x)) - f(x, \varphi(x))| < \varepsilon/h$ , и при  $i_* \geq N$  имеем:

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, \psi_{i_*}(s)) \, ds - \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, \psi_{i_*}(s)) - f(s, \varphi(s))| \, ds \right| < \frac{\varepsilon|x - x_0|}{h} \leq \varepsilon$$

□

Перезодя в обеих частях равенств (1.9) к пределу при  $i_* \rightarrow \infty$ , получаем тождество (1.2):

$$\varphi(x) \stackrel{[x_0-h, x_0+h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds$$

Поэтому, согласно лемме о записи решения в интегральном виде, предельная функция  $y = \varphi(x)$  является решением ВЗК( $x_0, y_0$ ) уравнения (1.1) на отрезке Пеано  $[x_0 - h, x_0 + h]$  □

**Замечание.** Теорема Пеано не даёт информации о количестве решений, проходящих через заданную точку области  $G$

**Замечание.** Для точек неединственности существуют решения, которые нельзя приблизить ломанными Эйлера

### 1.3 Существование решения граничной задачи Коши

В этом параграфе будут указаны условия, при которых существует решение ГЗК уравнения (1.1), поставленной в произвольной точке  $(x_0, y_0) \in \tilde{G} \subset \partial G$ , и условия, при которых такое решение отсутствует. Поставленная задача решается путём выделения тех случаев, в которых возможно построение аналогов треугольника и отрезка Пеано, с последующим применением метода ломаных Эйлера.

Для упрощения обозначений и формул, используемых в дальнейшем при решении граничной задачи Коши, НУО будем считать, что задача всегда ставится в начале координат и функция  $f$  там равна нулю, т. е. уравнение (1.1) имеет вид

$$y' = f_0(x, y) \tag{1.10}$$

где функция  $f_0$  определена и непрерывна на множестве  $\tilde{G} = G \cup \hat{G}$ , точка  $O = (0, 0) \in \tilde{G}$ ,  $f_0(0, 0) = 0$  и поставлена граничная задача Коши с начальными данными 0, 0

**Доказательство (НУО).** В самом деле, пусть для уравнения (1.1)  $y' = f(x, y)$  задача Коши поставлена в точке  $(x_0, y_0) \in \hat{G}$ . Тогда замена

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

сводит уравнение (1.1) к уравнению  $v' = f_0(u, v)$ , в котором

$$f_0(u, v) = f\left(u + x_0, v + f(x_0, y_0)u + y_0\right)$$



При этом для  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  получаем:

$$u = u_0 = 0, \quad v = v_0 = 0, \quad f_0(0, 0) = 0$$

□

### 1.3.1 Граничные кривые и порождаемые ими множества

Ключевую роль для существования или отсутствия решения ГЗК уравнения (1.10) будет играть структура граничного множества в  $\widehat{G}$  в малой окрестности точки  $O$  и значения функции  $f_0$  на нём, а также расположение всего множества  $\widetilde{G}$  по отношению к оси абсцисс

**Определение 34.** Функцию  $y = b_{a,u}^+(x)$  заданную на отрезке  $[0, a]$  будем называть верхнеграничной, если для неё выполняются следующие пять условий:

1.  $b_{a,u}^+(x) \in C^1([0, a])$
2.  $b_{a,u}^+(0) = 0$
3.  $b_{a,u}^{+'}(0) \geq 0$
4.  $b_{a,u}^+$  вогнута на  $[0, a]$ , если  $b_{a,u}^{+'}(0) = 0$
5. Правая верхнеграничная кривая  $\gamma_{a,u}^+ = \{x \in [0, a], y = b_{a,u}^+(x)\} \subset \widehat{G}$

**Примечание.** Условие 3 допускает случай, когда  $b_{a,u}^{+'}(0) = +\infty$

В условии 4 вогнутость понимается в нестрогом смысле, т. е. допускается тождество  $b_{a,u}^+(x) \equiv 0$

Аналогично вводится правая нижнеграничная функция  $y = b_{a,l}^+(x)$ , и правая нижнеграничная кривая  $\gamma_{a,l}^+$  – график  $b_{a,l}^+(x)$ . Только в условии 3 предполагаем, что  $b_{a,l}^{+'}(0) \leq 0$ , и допускаем случай, когда  $b_{a,l}^{+'}(0) = -\infty$ , а в условии 4 предполагаем, что  $b_{a,l}^+(x)$  выпукла

Введём две ключевые константы:

$$\tau_u = \frac{b_{a,u}^{+'}(0)}{2}, \quad \tau_u = 1, \text{ если } b_{a,u}^{+'}(0) = +\infty$$

$$\tau_l = -\frac{b_{a,l}^{+'}(0)}{2}, \quad \tau_l = -1, \text{ если } b_{a,l}^{+'}(0) = -\infty$$

НУО будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{cases} b_{a,u}^+(a) \leq a & \text{при } \tau_u = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad b_{a,u}^{+'}(x) \geq \tau_u & \text{при } \tau_u > 0 \\ -b_{a,l}^+(a) \leq a & \text{при } \tau_l = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad -b_{a,l}^{+'}(x) \geq \tau_l & \text{при } \tau_l > 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

поскольку непосредственно из определения вытекает, что для любой правой граничной функции  $b_a^+(x)$  функция  $b_a^+(x)$ , являющаяся её сужением на произвольный отрезок  $[a, \tilde{a}]$  с  $\tilde{a} < a$ , остаётся правой граничной.

В результате  $\gamma_{a,u}^+$  – гладкая кривая из  $\widehat{G}$ , параметризованная неубывающей с учётом (1.11) функцией  $b_{a,u}^+(x)$ . Она расположена в первой четверти и содержит точку  $O$ .  $\gamma_{a,l}^+$  – гладкая кривая из  $\widehat{G}$ , параметризованная невозрастающей функцией  $b_{a,l}^+(x)$ . Она расположена в четвёртой четверти и содержит точку  $O$ . Для всякого  $c > 0$  рассмотрим правую  $c$ -окрестность (это не окрестность – она не открыта) точки  $O$ :

$$N_c^+ := \{(x, y) \mid x \in (0, c], \quad |y| \leq c\}$$

В прямоугольнике  $N_c^+$  длина верхней стороны выбирается так, чтобы каждая “выходящая” из точки  $O$  правая граничная кривая, при наличии хотя бы одной, имела пересечение с одной из его сторон. При этом “поведение” граничных кривых после первого попадания на границу  $N_c^+$  интереса не представляет.

Любое последующее уменьшение  $c$  ситуацию не меняет, разве что отсекаются части граничных кривых, попавших в прямоугольник снаружи.

В частности, неравенства  $b_{a,u}^+(a) \leq a$  или  $-b_{a,l}^+(a) \leq a$  из (1.11) при всех  $c \leq a$  гарантируют пересечение правых граничных кривых  $\gamma_a^+$  именно с боковой стороной прямоугольника  $N_c^+$ .



Всегда в дальнейшем, “обрезая” при необходимости кривые  $\gamma_a^+$ , будем считать, что правый конец  $(a, b_a^+(a))$  любой из них – это первая точка выхода граничной кривой на границу прямоугольника  $N_c^+$ . Выделим для уравнения (1.10) четыре варианта расположения граничных кривых в малой окрестности точки  $O$  при  $x > 0$ :

**Определение 35.** Будем говорить, что

1. реализуется случай  $(W^+)$ , если

$$\exists c_W > 0 : \quad W_{c_W}^+ \cap \widehat{G} = \emptyset, \quad W_{c_W}^+ = N_{c_W}^+$$

2. реализуется случай  $(U^+)$ , если

$$\exists c_U > 0 : \quad U_{c_U}^+ \cap \widehat{G} = \gamma_{a,u}^+ \setminus \{O\}$$

$$U_{c_U}^+ := \left\{ (x, y) \mid \left( x \in (0, a], \quad -c_U \leq y \leq b_{a,u}^+(x) \right) \cup \left( x \in (a, c_U], \quad y \leq c_U \right) \right\}$$

3. реализуется случай  $(O^+)$ , если

$$\exists c_O > 0 : \quad O_{c_O}^+ \cap \widehat{G} = \gamma_{a,l}^+ \setminus \{O\}$$

$$O_{c_O}^+ := \left\{ (x, y) \mid \left( x \in (0, a], \quad b_{a,l}^+(x) \leq y \leq c_O \right) \cup \left( x \in (a, c_O], \quad |y| \leq c_O \right) \right\}$$

4. реализуется случай  $(B^+)$ , если

$$\exists c_B > 0 : \quad B_{c_B}^+ \cap \widehat{G} = (\gamma_{a,u}^+ \cup \gamma_{a,l}^+) \setminus \{O\}, \quad B_{c_B}^+ := U_{c_B}^+ \cap O_{c_B}^+$$

**Обозначение.**  $(X^+)$  и  $(X_{c*}^+)$  будут обозначать далее, что реализуется любой из четырёх описанных выше случаев на соответствующем множестве

В случае  $(X^+)$  или  $(X_{c*}^+)$  имеет место одна из двух возможностей:

1.  $X_{c*}^+ \cap G \neq \emptyset$ , что равносильно тому, что  $X_{c*}^+$  без входящих в него граничных кривых лежит в  $G$
2.  $X_{c*}^+ \cap G = \emptyset$

В результате случай  $(X^+)$  в зависимости от расположения множества  $X_{c*}$  распадается на два подслучая, которые будем обозначать  $(X_1^+)$  и  $(X_2^+)$

А дополнительный индекс  $>, =, <$ , при его наличии в обозначении любого из шести возникших случаев (кроме  $(W_1^+)$  и  $(W_2^+)$ ), будет уточнять знак производной соответствующих правых граничных функций в нуле

В итоге, получаются случаи:

$U_1^+$ :  $(U_{c_U}^+ \setminus \gamma_{a,u}^+) \subset G$ , два подслучая:

$$U_{1,>}^+ : b_{a,u}^+'(0) > 0$$

$$U_{1,=}^+ : b_{a,u}^+'(0) = 0$$

$U_2^+$ :  $U_{c_U}^+ \cap G = \emptyset$ , подслучаи те же

$O_1^+$ :  $(O_{c_O}^+ \setminus \gamma_{a,l}^+) \subset G$ , два подслучая:

$$O_{1,<}^+ : b_{a,l}^+'(0) < 0$$

$$O_{1,=}^+ : b_{a,l}^+'(0) = 0$$

$O_2^+$ :  $O_{c_O}^+ \cap G = \emptyset$ , подслучаи те же

$B_1^+$ :  $(B_{c_B}^+ \setminus (\gamma_{a,u}^+ \cup \gamma_{a,l}^+)) \subset G$ , четыре подслучая:

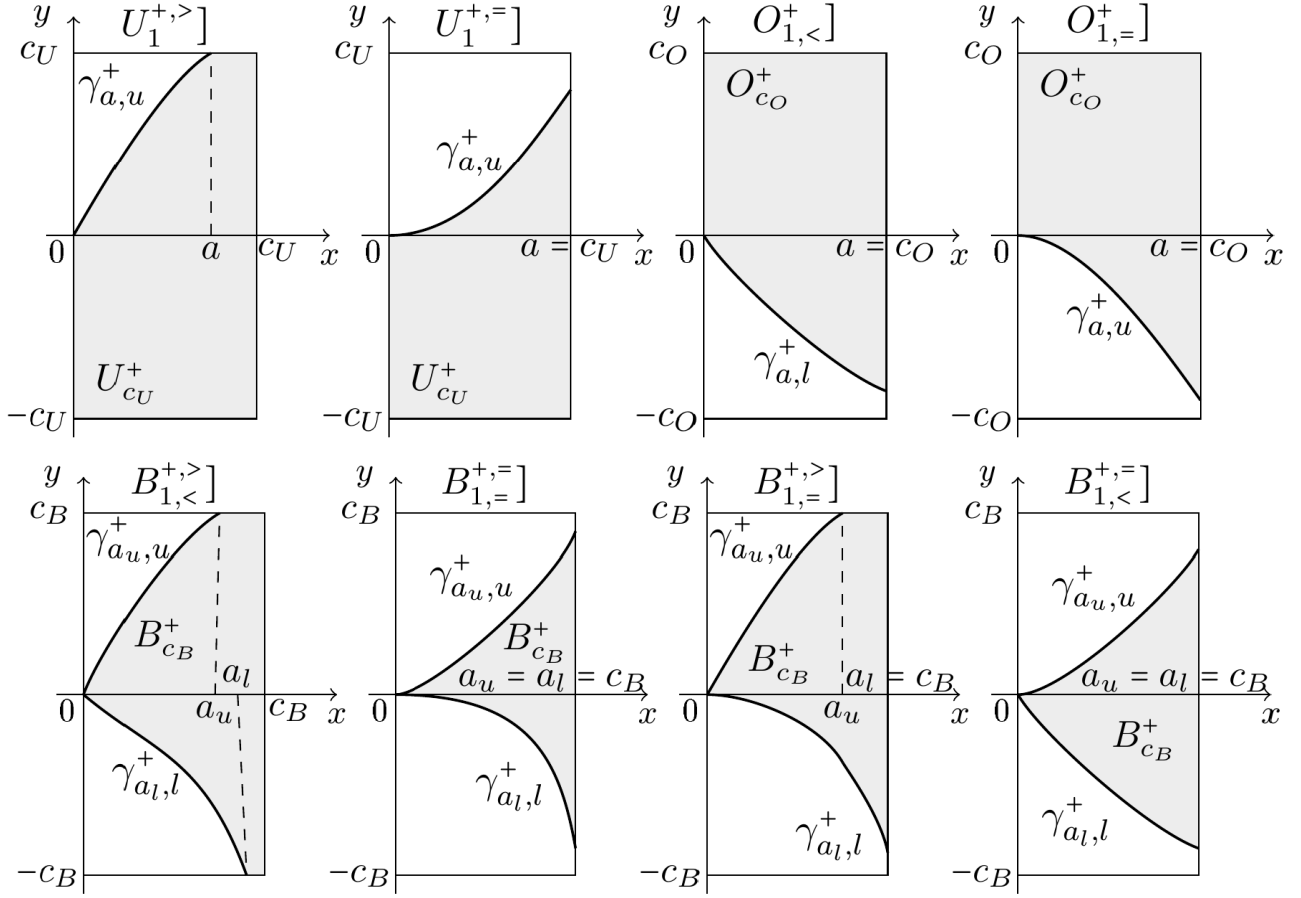
$$B_{1,<}^+ : b_{a,u}^+'(0) > 0, \quad b_{a,l}^+'(0) < 0$$

$$B_{1,=}^+ : b_{a,u}^+'(0) = 0, \quad b_{a,l}^+'(0) = 0$$

$$B_{1,=}^+ : b_{a,u}^+{}'(0) > 0, \quad b_{a,l}^+{}'(0) = 0$$

$$B_{1,<}^+ : b_{a,u}^+{}'(0) = 0, \quad b_{a,l}^+{}'(0) < 0$$

$B_2^+ : B_{c_B}^+ \cap G = \emptyset$ , подслучаи те же



**Замечание.** Прямоугольник  $N_c^+$  может содержать более одной нижнеграничной и более одной нижнеграничной кривой. Но наличие или отсутствие граничных кривых в  $N_c^+$  вне множества  $X_c^+$  не влияет на существование решения ГЗК( $x_0, y_0$ )

**Замечание.** При наличии в  $N_c^+$  единственной граничной кривой, лежащей на оси абсцисс, будем считать, что имеет место случай  $(U_1^{+,=})$  с  $b_{a,u}^+ \equiv 0$ , а не  $(O_{2,=})$  с  $b_{a,l}^+ \equiv 0$ . То же касается случаев  $(O_{1,=})$  и  $(U_2^{+,=})$

### 1.3.2 Граничный треугольник и граничный отрезок Пеано

Для доказательства существования решения ГЗК( $O = (0, 0) \in \widehat{G}$ ), график которого расположен, скажем, в правой полуплоскости, в первую очередь следует выделить так называемый правый граничный отрезок Пеано  $\overline{P}_h^+(O) = [0, h^+]$  ( $h^+ > 0$ ). А для этого необходимо построить правый граничный треугольник  $\overline{T}_b^+$ , во многом аналогичный треугольнику  $\overline{T}^+$  из определения отрезка Пеано для внутренней задачи Коши, высота которого как раз и задаёт константу  $h^+$ . Осуществить это удастся в случаях  $(N_1^+)$ ,  $(U_1^+)$ ,  $(O_1^+)$ ,  $(B_1^+)$  при дополнительных предположениях о поведении функции  $f_0$  на тех граничных кривых, которые в нуле имеют нулевую производную

При построении будет использоваться непрерывность функции  $f_0(xy)$  в граничной точке  $O$ , где по условию  $f_0$  равна нулю, означающая, что

$$\forall \tau > 0 \quad \exists \delta_\tau > 0 : \quad \forall (x, y) \in \overline{V}_{\delta_\tau} \cap \widetilde{G} \quad |f_0(x, y)| \leq \tau, \quad \overline{V}_{\delta_\tau} := \{ (x, y) \mid |x| \leq \delta_\tau, \quad |y| \leq \delta_\tau \} \quad (1.12)$$

В простейшем случае  $(W_1^+)$ , когда весь прямоугольник  $N_{c_W}^+$  лежит в  $G$  (граничные кривые в  $c_W$ -окрестности точки  $O$  могут быть расположены только на оси ординат или в левой полуплоскости), правый треугольник  $\overline{T}_b^+$  и правый отрезок Пеано  $[0, h^+]$  строятся стандартно:

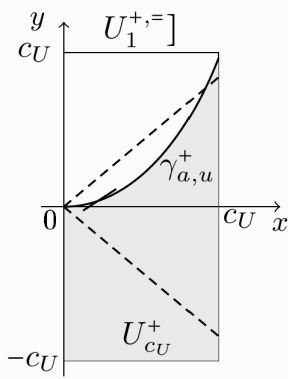
Выберем, например,  $\tau = 1$ . Тогда, согласно (1.12) найдётся  $\delta_1 > 0$  такое, что  $|f_0(x, y)| \leq 1$  на множестве  $\bar{V}_{\delta_1} \cap \tilde{G}$

Положим  $\tilde{c} := \min \{ c_W, \delta_1 \}$

Построим в прямоугольнике  $N_{\tilde{c}}^+$ , не содержащем граничных кривых, с добавленной к нему точкой  $O$ , прямоугольный равнобедренный треугольник  $\bar{T}_b^+$  с вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(\tilde{c}, \tilde{c})$ ,  $(\tilde{c}, -\tilde{c})$ . Тогда длина его высоты  $h^+$  равна  $\tilde{c}$ , а его боковые стороны имеют углы наклона, равные  $\pm \frac{\pi}{4}$ , поэтому любая ломаная Эйлера, “выпущенная” из начала координат, в силу выбора  $\tau = 1$  в (1.12) будет продолжима до точки  $(h^+, y_*)$ , лежащей на основании  $\bar{T}_b^+$ , совпадающем в данном случае с правой стороной  $N_{\tilde{c}}^+$

Похожие построения будут проведены для случаев  $(U_1^{+,>})$ ,  $(O_{1,<}^+)$ ,  $(B_{1,<}^{+,>})$

В остальных пяти случаях из-за того, что в каждом производная хотя бы одной из граничных функций в нуле равна нулю, может оказаться, что не все ломанные Эйлера могут быть продолжены до основания любого “классического” правого треугольника Пеано. Дело в том, что часть граничной кривой вблизи точки  $O$  такой граничной функции будет обязательно лежать внутри треугольника со сколь угодно малым углом при вершине  $O$ . Поэтому может найтись точка на этой части границы, в которой модуль угла наклона касательной будет меньше значения функции  $f_0$  в этой точке, а значит, при попадании ломаной в эту точку её продолжение вправо должно будет покинуть множество  $\tilde{G}$ , что невозможно



**Примечание.** На рисунке описанная ситуация возникает в случае  $(U_1^{+,<})$

Действительно, каким бы малым ни выбрать  $\tau$  в формуле (1.12), всегда найдётся константа  $c \leq \min \{ c_I, \delta_\tau \}$  такая, что в прямоугольнике  $N_{\tilde{c}}^+$  с  $\tilde{c} = \min \{ c_U, \delta_\tau \}$  часть правой верхнеграничной кривой  $\gamma_{\tilde{c},u}^+$ , примыкающая к точке  $O$ , будет лежать под верхней боковой стороной прямоугольника  $T_b^+$ , имеющей угол наклона  $\arctg \tau$ . Поэтому ломаная Эйлера, которая не может покидать  $\tilde{G}$ , попадая в какой-то точке  $(x_*, b_{\tilde{c},u}^+(x_*))$  ( $x_* < \tilde{c}$ ) на  $\gamma_{\tilde{c},u}^+$ , не сможет быть продолжена вправо, если в этой точке отрезок поля направлений будет иметь угол наклона, не превосходящий  $\arctg \tau$ , но больший угла наклона касательной к  $\gamma_{\tilde{c},u}^+$

Для устранения этой проблемы во всех точках кривых  $\gamma_{a,u}^+$  и  $\gamma_{a,l}^+$  введём ограничения на функцию  $f_0$  в случаях  $(U_1^{+,<})$ ,  $(O_{1,<}^+)$ ,  $(B_{1,<}^{+,<})$ ,  $(B_{1,<}^{+,>})$  и  $(B_{1,<}^{+,<})$ :

$$\forall x \in (0, a] \quad \begin{cases} f_0(x, b_{a,u}^+(x)) \leq b_{a,u}^{+'}(x), & \text{если } b_{a,u}^{+'}(0) = 0 \\ f_0(x, b_{a,l}^+(x)) \geq b_{a,l}^{+'}(x), & \text{если } b_{a,l}^{+'}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

означающие, что в любой точке  $\gamma_{a,u}^+$  и  $\gamma_{a,l}^+$  правый полуотрезок поля направлений уравнения (1.10) направлен внутрь или по границе области  $G$

Построим отрезок Пеано в восьми случаях  $(X_1^+)$ :

$U_1^{+,>}$ . Пусть  $\tilde{c} = \min \{ c_U, \delta_{\tau_u} \}$ , где  $\tau_u$  из (1.11), а  $\delta_{\tau_u}$  задана в (1.12).

Тогда  $U_{\tilde{c}}^+ \setminus \gamma_{\tilde{c},u}^+ \subset G$ , где  $\tilde{a}$  – точка пересечения  $\gamma_{\tilde{c},u}^+$  с верхней или боковой ( $\tilde{a} = \tilde{c}$ ) границей  $N_{\tilde{c}}^+$ ,

$|f_0(x, y)| \leq \tau_u$  при  $(x, y) \in U_{\tilde{c}}^+$  и  $h^+ = \tilde{a}$

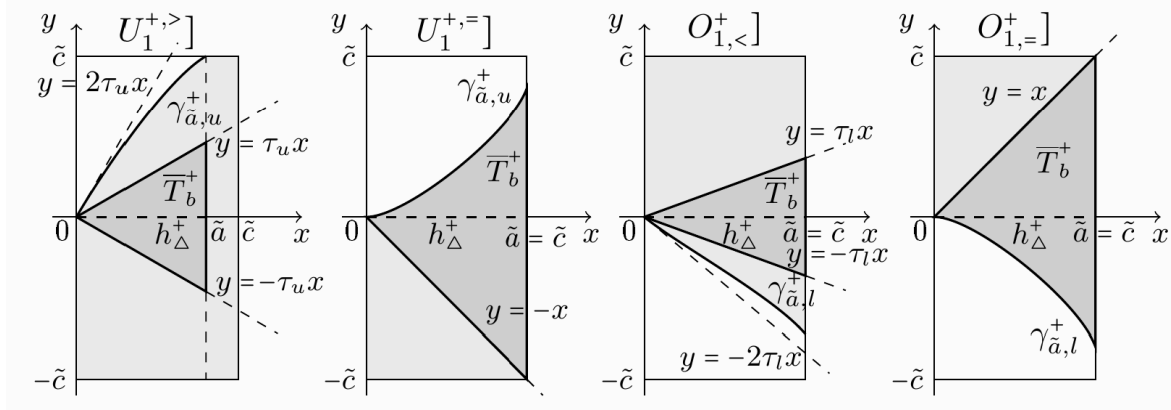
Геометрически надо из точки  $O$  провести лучи с тангенсами углов наклона, равными  $\pm \tau$ , до пересечения с вертикальной прямой  $x \equiv \tilde{a}$ . В полученном равнобедренном треугольнике  $\bar{T}_b^+$  высота  $h_{\Delta}^+ = \tilde{a}$ .

При этом  $\bar{T}_b^+ \setminus \{O\} \subset U_{\tilde{c}}^+$  (и расположен под кривой  $\gamma_{\tilde{c},u}^+$ ) в силу выбора  $\tilde{a}$ , так как согласно (1.11) верно неравенство  $b_{\tilde{c},u}^+(x) \geq \tau_u x$  при  $x \in [0, \tilde{a}]$

$U_1^{+,<}$ . Пусть в (1.12)  $\tau = 1$ ,  $\tilde{c} = \min \{ c_U, \delta_1 \}$ . Тогда  $U_{\tilde{c}}^+ \setminus \gamma_{\tilde{c},u}^+ \subset G$ , причём  $\tilde{a} = \tilde{c}$ , так как правый конец  $\gamma_{\tilde{c},u}^+$  с учётом (1.11) заканчивается на боковой стороне  $N_{\tilde{c}}^+$ ,  $|f_0(x, y)| \leq 1$  при  $(x, y) \in U_{\tilde{c}}^+$  и  $h^+ = \tilde{c}$

Геометрически надо соединить точки  $O$  и  $(\tilde{c}, -\tilde{c})$ . Тогда полученный отрезок вместе с кривой  $\gamma_{\tilde{a},u}^+$  и отрезком боковой стороны  $N_{\tilde{c}}^+$  образует криволинейный треугольник  $\overline{T}_b^+$  с высотой  $h_{\Delta}^+ = \tilde{c}$ , при этом  $\overline{T}_b^+ \setminus O \subset U_{\tilde{c}}^+$

$O_{1,<}^+, O_{1,=}^+$ . Аналогично, только на рисунке для случая  $(O_{1,<}^+)$  кривая  $\gamma_{\tilde{a},l}^+$ , над которой расположен треугольник  $\overline{T}_b^+$ , пересекается не с нижней, а с боковой стороной прямоугольника  $N_{\tilde{c}}^+$



$B_{1,<}^{+,>}$ . Пусть  $\tilde{c} = \min \{c_B, \delta_{\tilde{\tau}}\}$ , где  $\tilde{\tau} = \min \{\tau_u, \tau_l\}$  (см. (1.11)). Тогда  $B_{\tilde{c}}^+ \setminus (\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+) \subset \gamma$ ,  $|f_0(x, y)| \leq \tilde{\tau}$  при  $(x, y) \in B_{\tilde{c}}^+$  и  $h^+ = \tilde{a} = \min \{a_u, a_l\}$

Геометрически надо из точки  $O$  провести лучи с тангенсами углов наклона  $\pm \tilde{\tau}$  до пересечения с вертикальной прямой  $x \equiv \tilde{a}$ . В полученном треугольнике  $\overline{T}_b^+$  высота  $h_{\Delta}^+ = \tilde{a}$ . При этом  $\overline{T}_b^+ \setminus O \subset B_{\tilde{c}}^+$  в силу выбора  $\tilde{a}$

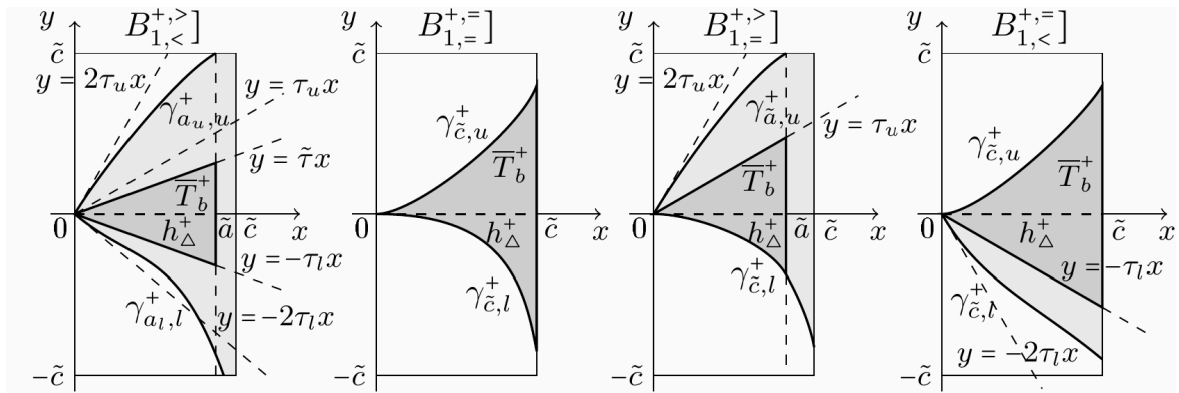
$B_{1,=}^{+,=}$ . По определению множества  $B_{c_B}^+$  и условию (1.11) правые концы кривых  $\gamma_{a_u,u}^+, \gamma_{a_l,l}^+$  лежат на боковой стороне прямоугольника  $N_{\tilde{c}}^+$  с  $\tilde{c} = c_B$ , поэтому  $a_u = a_l = \tilde{c}$ ,  $B_{\tilde{c}}^+ \setminus (\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+) \subset G$  и  $h^+ = \tilde{c}$

Геометрически само множество  $B_{\tilde{c}}^+$  образует криволинейный треугольник  $\overline{T}_b^+$  с высотой  $h_{\Delta}^+ = \tilde{c}$

$B_{1,=}^{+,>}$ . Пусть  $\tilde{c} = \min \{c_B, c_O, \delta_{\tau_u}\}$ , где  $\tau_u$  из (1.11), а  $\delta_{\tau_u}$  – из (1.12). Тогда  $B_{\tilde{c}}^+ \setminus (\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{\tilde{c},l}^+) \subset G$ ,  $|f_0(x, y)| \leq \tau_u$  при  $(x, y) \in B_{\tilde{c}}^+$  и  $h^+ = \tilde{a}$

Геометрически надо из точки  $O$  провести луч с тангенсом угла наклона, равным  $\tau_u$ , до пересечения с прямой  $x \equiv \tilde{a}$ , где  $\tilde{a}$  – точка пересечения  $\gamma_{\tilde{a},u}^+$  с верхней или боковой ( $\tilde{a} = \tilde{c}$ ) границей  $N_{\tilde{c}}^+$ . Третьей стороной криволинейного треугольника  $\overline{T}_b^+$  является кривая  $\gamma_{\tilde{a},l}^+$ . При этом в треугольнике высота  $h_{\Delta}^+ = \tilde{a}$  и  $\overline{T}_b^+ \setminus O \subset B_{\tilde{c}}^+$  в силу выбора  $\tilde{a}$

$B_{1,<}^{+,=}$ . Аналогично



### 1.3.3 Теоремы о существовании или отсутствии решений ГЗК

**Теорема 9** (о существовании решения граничной задачи Коши). Предположим, что в уравнении (1.10) функция  $f_0$  определена и непрерывна на множестве  $\tilde{G}$ .

Тогда в каждом из случаев  $(N_1^+)$ ,  $(U_1^{+,>})$ ,  $(O_1^{+,<})$ ,  $(B_1^{+,>})$  и в каждом из случаев  $(U_1^{+,=})$ ,  $(O_1^{+,=})$ ,  $(B_1^{+,=})$ ,  $(B_1^{+,>})$ ,  $(B_1^{+,<})$  при условиях (1.13) на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными  $(0, 0)$

**Доказательство.** Рассмотрим, например, случай  $(B_1^{+,>})$

Согласно (1.11) (первые два неравенства) правая верхнеграничная функция  $b_{a,u}^+(x)$ , параметризующая кривую  $\gamma_{a,u}^{+,u'}(x) \geq \tau_u$  для любого  $x \in (0, a_u]$ . А у правой нижнеграничной привой  $\gamma_{a,l}^+$  константа  $a_l = c_O$  в силу (1.11) (последние два неравенства)

Пусть  $c_* := \min \{ c_U, c_O \}$ , тогда множество  $B_{c_*}^+ \setminus (\gamma_{a,u}^+ \cup \gamma_{a,l}^+) \subset G$

Далее, для  $\tau_u$  найдётся (см. (1.12)) такая  $\delta_{\tau_u}$ , что  $|f_0(x, y)| \leq \tau_u$  в любой точке  $\delta_{\tau_u}$ -окрестности начала координат, принадлежащей  $\tilde{G}$

Положим  $\tilde{c} := \min \{ c_*, \delta_{\tau_u} \}$ , тогда на множестве  $B_{\tilde{c}}^+$  для функции  $|f_0|$  справедлива та же оценка

Построим теперь лежащий в  $B_{\tilde{c}}^+$  криволинейный треугольник  $\overline{T_b^+}$ , как это было сделано при описании случая  $(B_1^{+,>})$ . Его высота  $h^+ = \tilde{a}$

Поскольку отрезок оси абсцисс  $[0, h^+]$  лежит в  $\tilde{G}$  и является отрезком поля направлений в точке  $O \in \tilde{G}$ , из точки  $O$  вправо можно начать строить ломаную Эйлера с произвольным рангом дробления

Ломаная Эйлера не может покинуть  $\overline{T_b^+}$  через верхнюю боковую сторону, лежащую на прямой  $y = \tau_u x$ , так как в любой её точке  $|f_0(x, y)| \leq \tau_u$ . Аналогично при попадании ломаной Эйлера при  $x = x_* > 0$  на нижнюю боковую сторону, являющуюся частью правой нижнеграничной кривой  $\gamma_{a,l}^+$ , по условию (1.13) (второе неравенство)  $f_0(x_*, b_{a,l}^+(x_*)) \geq b_{a,l}^{+,l'}(x_*)$ , а значит, при  $x > x_*$  следующий отрезок ломаной будет либо лежать на  $\gamma_{a,l}^+$ , либо внутри треугольника в силу выпуклости  $\gamma_{a,l}^+$ . Поэтому ломаная Эйлера с произвольным выбранным рангом дробления может быть продолжена на весь правый граничный отрезок Пеано  $[0, h^+]$

Дальше дословно повторяется доказательство теоремы Пеано (теор. 1)

Аналогичные рассуждения проводятся и в остальных случаях  $\square$

Рассмотренные в теореме 9 девять случаев не исчерпывают все ситуации, в которых можно доказать существование решения ГЗК уравнения (1.10). Это удаётся сделать ещё в ряде случаев, но уже другим методом.

Все новые случаи предполагают наличие двух граничных функций, которые будем обозначать  $b_a^{+,u}$  и  $b_a^{+,l}$ , а их графики –  $\gamma_a^{+,u}$  и  $\gamma_a^{+,l}$ . Например,  $\gamma_a^{+,u}$  – это нижняя верхнеграничная кривая. При этом в определении граничных функций можно отказаться от условия о выпуклости, требуя от них только отсутствия общих точек, кроме точки  $O$

Для функций  $b_a^{+,*}(x)$  (\* – это  $u$  или  $l$ ) положим  $\tau^* := \frac{b_a^{+,*'}(0)}{2}$

Будем использовать два варианта сравнительного поведения правых граничных функций  $b_a^{+,*}(x)$  и функции  $f_0(x, b_a^{+,*})$  на отрезке  $[0, a]$ :

$$\begin{cases} f_0(x, b_a^{+,u}(x)) \leq b_a^{+,u'}(x), & f_0(x, b_a^{+,l}(x)) \leq b_a^{+,l'}(x) \\ f_0(x, b_a^{+,u}(x)) \geq b_a^{+,u'}(x), & f_0(x, b_a^{+,l}(x)) \geq b_a^{+,l'}(x), \end{cases} \quad \tau^u \cdot \tau^l = 0 \quad (1.14)$$

Иными словами, в первом варианте построенные на обеих границах отрезки поля направлений направлены (с увеличением  $x$ ) по границе или внутрь области  $G$ , лежащей между граничными кривыми, а во втором варианте – наружу. Кроме того, во втором варианте требуется, чтобы хотя бы одна граничных кривых имела в начале координат горизонтальную касательную

**Теорема 10 (о существовании решения граничной задачи Коши).** Пусть в уравнении (1.10) функция  $f_0$  определена и непрерывна на множестве  $\tilde{G}$  и имеет место один из вариантов из условия (1.14), тогда на отрезке  $[0, a]$  существует по крайней мере одно решение ГЗК  $(0, 0)$

**Доказательство.** Без доказательства  $\square$

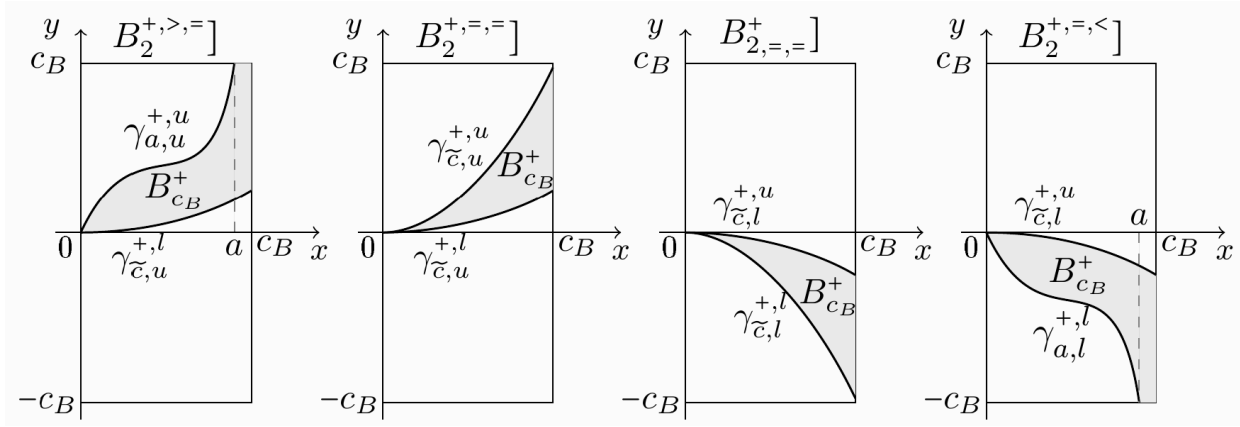
Перечислим и опишем новые случаи в привычных обозначениях:

Во-первых, ими являются три знакомых случая  $(B_1^{+,=})$ ,  $(B_1^{+,>})$ ,  $(B_1^{+,<})$ , но с иным поведением отрезков поля направлений на граничных кривых

Следующие два случая – подслучаи  $(U_2^{+,=})$ , где стало существенно наличие второй верхнеграничной кривой и расположение области  $G$  между кривыми. Обозначим их  $(B_2^{+,>,-})$ ,  $(B_2^{+,-,-})$  по аналогии со случаем  $(B_1^{+,=})$

Последние два случая, обозначаемые  $(B_2^{+,=,-})$  и  $(B_2^{+,<,-})$  относятся к  $(O_2^{+,=})$

Изучим теперь нигде пока не рассмотренные случаи  $(U_2^{+,>})$ ,  $(O_2^{+,<})$ ,  $(B_2^{+,<})$  и вырожденный случай  $(N_2^+)$ :  $\exists c > 0 : G \cap N_c^+ = \emptyset$ , в котором отсутствуют граничные кривые, имеющие в точке  $O$  горизонтальную касательную:



**Теорема 11** (об отсутствии решений граничной задачи Коши). В каждом из случаев  $(U_2^{+,>})$ ,  $(O_{2,<}^+)$ ,  $(B_{2,<}^{+,>})$ ,  $(N_2^+)$  граничная задача Коши с начальными данными  $(0,0)$  не имеет решений в правой полуплоскости

**Доказательство.** Допустим, что в каждом случае из условия теоремы на некотором отрезке  $[0, a]$  существует решение  $y = \varphi(x)$  задачи Коши уравнения (1.10) с начальными данными  $(0,0)$ , т. е.  $\varphi(0) = 0$ . Тогда  $\varphi'(0) = f_0(0, \varphi(0)) = 0$ . Но график любого решения должен лежать в  $\tilde{G}$ , а значит, располагаться не ниже правой верхнеграничной кривой, у которой в точке  $O$  тангенс угла наклона согласно (1.11) равен  $2\tau_u > 0$ , или не выше правой нижнеграничной кривой, имеющей в точке  $O$  тангенс угла наклона, равный  $-2\tau_l < 0$ . Поэтому  $\varphi'(0) \neq 0$  —  $\nexists$   $\square$

**Замечание.** Теоремы, подобные приведённым, можно сформулировать для левой полуплоскости

## 1.4 Единственность решения задачи Коши

### 1.4.1 Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши

В этом разделе будет доказана теорема 5 (о локальной единственности решения внутренней задачи Коши)

**Лемма 6** (о продолжимости решений на отрезок Пеано). Пусть  $y = \varphi(x)$  — это решение внутренней задачи Коши с начальными данными  $x_0, y_0$ , определённое на  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ . Тогда любое другое решение уравнения (1.1)  $y = \psi(x)$  этой же задачи Коши, определённое на промежутке  $\langle a, b \rangle \subsetneq [x_0 - h, x_0 + h]$ , продолжимо на  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Докажем, например, продолжимость решения  $y = \psi(x)$  с  $\psi(x_0) = y_0$  на правый полуотрезок Пеано:

Если  $\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle$  (т. е.  $b \leq x_0 + h$ ), то график решения  $y = \psi(x)$  при  $x \in [x_0, b]$  лежит в треугольнике  $\overline{T^+}$ , построенном для решения  $y = \varphi(x)$ . Поэтому у любой последовательности  $x_k \in [x_0, b]$  и  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b$  точки  $(x_k, \psi(x_k)) \in \overline{T^+} \subset \overline{R}$ , а значит, найдётся сходящаяся последовательность  $(x_{k_l}, \psi(x_{k_l}))$ . Её предел — точка  $(b, \eta) \in \overline{T^+}$

Следовательно, по теореме о продолжимости решения (теор. 2)  $y = \psi(x)$  продолжимо на  $[x_0, b]$ , хотя могло быть там сразу и задано

- Если теперь  $b = x_0 + h$ , то лемма доказана
- Пусть  $b < x_0 + h$ . Построим равнобедренный треугольник  $\overline{T_1^+}$  с вершиной в точке  $(b, \eta)$ , боковыми сторонами, имеющими тангенсы углов наклона  $\pm M$ , и основанием, лежащим на основании треугольника  $\overline{T^+}$  с абсциссой  $x_0 + h$ . Тогда  $\overline{T_1^+} \subset \overline{T^+}$  и по теореме Пеано (теор. 1) на  $[b, x_0 + h]$  существует решение задачи Коши с начальными данными  $(b, \eta)$ , продолжающее  $\psi(x)$  до точки  $x_0 + h$  включительно

$\square$

По лемме для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  и для любого  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$  любое решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными  $x_0, y_0$  продолжимо на  $[x_0 - h, x_0 + h]$ . Поэтому, НУО будем считать, что

все решения поставленной ЗК определены на выбранном отрезке  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ . В частности, в определении локальной единственности решения (опр. 19) в качестве  $(\alpha, \beta)$  можно будет выбрать любой интервал из  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Пусть  $(x_0, y_0) \in G$ ,  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$  – некий отрезок Пеано и  $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^\infty$  – произвольная последовательность решений ЗК  $(x_0, y_0)$  уравнения (1.1), определённых на  $[x_0 - h, x_0 + h]$

**Утверждение 5.** Для любых  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$  функции

$$\chi_k^l(x) := \min \{ \chi_1(x), \dots, \chi_k(x) \}, \quad \chi_k^u(x) := \max \{ \chi_1(x), \dots, \chi_k(x) \}$$

также являются решениями поставленной задачи на  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Действительно, эти функции удовлетворяют всем трём условиям из определения решения, поскольку для любого  $x_* \in [x_0 - h, x_0 + h]$  найдётся такой индекс  $1 \leq j \leq k$ , что, например,  $\chi_k^l(x_*) = \chi_j(x_*)$ , и если  $\chi_j(x_*) = \chi_m(x_*)$ , то  $\chi_j'(x_*) = \chi_m'(x_*) = f(x_*, \chi_k^l(x_*))$   $\square$

**Лемма 7 (о нижнем и верхнем решениях).** Существуют решения ЗК  $(x_0, y_0)$   $y = \chi^l(x)$  и  $y = \chi^u(x)$  уравнения (1.1) такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]: \quad \begin{cases} \chi^l(x) \leq \chi_k^l(x) \\ \chi^u(x) \geq \chi_k^u(x) \end{cases} \quad (1.15)$$

**Доказательство.** Рассмотрим, например, последовательность решений  $\{\chi_k^l(x)\}_{k=1}^\infty$  на отрезке  $[x_0, x_0 + h]$ . Поскольку все их графики лежат в треугольнике  $\overline{T^+}$ , полученном при построении отрезка Пеано, эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно ограничена (см. док-во теоремы Пеано). Следовательно, по лемме Арцела-Асколи из неё можно выделить равномерно на  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$  сходящуюся подпоследовательность, предел которой тоже будет решением уравнения (1.1) на отрезке Пеано

Но последовательность  $\chi_k^l(x)$  монотонно убывает, поэтому она сама будет сходиться к нижнему решению  $y = \chi^l(x)$ , для которого, очевидно, будет верно неравенство (1.15)

Рассуждения для отрезка аналогичны так же, как и доказательство сходимости функции  $\chi_k^u(x)$  к верхнему решению  $y = \chi^u(x)$   $\square$

**Теорема 12 (о локальной единственности решения внутренней ЗК).** Пусть  $(x_0, y_0) \in G$  – это точка единственности.

Тогда решение ЗК  $(x_0, y_0)$  уравнения (1.1) является локально единственным

**Доказательство. От противного**

Построим какой-нибудь отрезок Пеано  $\overline{P_h}(x_0, y_0)$  и допустим, что для любого интервала  $(\alpha, \beta)$  такого, что  $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [x_0 - h, x_0 + h]$ , существуют такие решения ЗК  $y = \varphi(x)$  и  $y = \psi(x)$ , не совпадающие на  $(\alpha, \beta)$

Тогда для всякого  $k = 1, 2, \dots$  найдутся решения  $y = \varphi_k(x)$  и  $y = \psi_k(x)$  ЗК, определённые на отрезке Пеано, такие, что

$$\exists x_k \in \left( x_0 - \frac{h}{k}, x_0 + \frac{h}{k} \right): \quad \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k)$$

Согласно утверждению 5 функция  $\varphi_k^l = \min \{ \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x) \}$  и функция  $\psi_k^u(x)$ , удовлетворяющие неравенства типа (1.15)

В результате  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$  и справедливы неравенства

$$\forall k = 1, 2, \dots \quad \varphi^l(x_k) \leq \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k) \leq \psi^u(x_k)$$

означающие, что  $(x_0, y_0)$  – точка единственности –  $\nexists$   $\square$

## 1.4.2 Лемма Гронуолла

**Лемма 8 (Гронуолла; об интегральной оценке функции сверху).** Пусть функция  $h(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  и



существуют такие  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu > 0$ , что

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad 0 \leq h(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^x h(s) \, ds \right| \quad (1.16)$$

Тогда для любого  $x \in \langle a, b \rangle$  справедливо неравенство

$$h(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|} \quad (1.17)$$

#### Доказательство.

- Предположим, что  $x \geq x_0$

Введём в рассмотрение функцию  $g(x) = \int_{x_0}^x h(s) \, ds$

$$\implies g(x_0) = 0, \quad g(x) \geq 0, \quad g(x) \in \mathcal{C}^1([x_0, b]), \quad g'(x) = h(x) \geq 0$$

Подставим  $g(x)$  в (1.16):

$$g'(x) \leq \lambda + \mu g(x) \implies g'(x) - \mu g(x) \leq \lambda \implies e^{-\mu(x-x_0)} (g'(x) - \mu g(x)) \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$$

При этом,

$$\left( g(x) e^{-\mu(x-x_0)} \right)' = g'(x) e^{-\mu(x-x_0)} - \mu e^{-\mu(x-x_0)} g(x) = e^{-\mu(x-x_0)} (g'(x) - \mu g(x))$$

Отсюда

$$\left( g(x) e^{-\mu(x-x_0)} \right)' \leq \lambda$$

Проинтегрируем по  $s$  от  $x_0$  до  $x$ :

$$g(x) e^{-\mu(x-x_0)} - \underbrace{g(x_0)}_0 \leq \lambda \int_{x_0}^x e^{-\mu(s-x_0)} \, ds = -\frac{\lambda}{\mu} (e^{-\mu(x-x_0)} - 1)$$

Умножим на  $e^{\mu(x-x_0)}$ :

$$g(x) \leq \frac{\lambda}{\mu} (e^{\mu(x-x_0)} - 1)$$

Подставим в (1.16):

$$h(x) \leq \lambda + \mu g(x) \leq \lambda e^{\mu(x-x_0)}$$

Таким образом, неравенство доказано для всех  $x \in [x_0, b]$

- Если  $x \leq x_0$ , то в (1.16)

$$h(x) \leq \lambda - \mu \int_{x_0}^x h(s) \, ds, \quad g(x) \leq 0$$

Дальнейшее доказательство аналогично

□

**Следствие.** Если  $\lambda = 0$ , то есть

$$0 \leq h(x) \leq \mu \left| \int_{x_0}^x h(s) \, ds \right|$$

то  $h(x) \stackrel{\langle a, b \rangle}{\equiv} 0$

### 1.4.3 Условия Липшица

Бывает, что требование дифференцируемости функции оказывается чрезмерным. Тогда его заменяют “локальным условием Липшица”, которое не допускает более чем линейного роста функции по этой переменной в малой окрестности каждой точки из некоторого множества



**Определение 36.** Функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y$  глобально на множестве  $D \subset \mathbb{R}^2$ , если

$$\exists L > 0 : \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (1.18)$$

**Обозначение.**  $f \in \text{Lip}_y^{gl}(D)$

**Определение 37.** Функция  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y$  локально на множестве  $\tilde{G}$ , если для любой точки  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$  найдётся замкнутая  $c$ -окрестность  $\bar{B}_c(x_0, y_0)$  такая, что функция  $f$  удовлетворяет условию Липшица по  $y$  глобально на множестве  $U_c = \tilde{G} \cap \bar{B}_c(x_0, y_0)$

**Обозначение.**  $y \in \text{Lip}_y^{loc}(\tilde{G})$

#### 1.4.4 Теоремы о глобальной единственности решений

**Теорема 13 (о множестве единственности).** Пусть в уравнении (1.1) функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на множестве  $\tilde{G}$  и удовлетворяет условию Липшица по  $y$  локально на множестве  $\tilde{G}^0 = G^0 \cup \tilde{G}^0$ , где  $G^0 \subset G$  – область, а  $\tilde{G}^0 \subset \partial G^0 \cap \tilde{G}$ .

Тогда  $\tilde{G}^0$  – множество единственности для уравнения (1.1)

**Доказательство.** Возьмём любую точку  $(x_0, y_0)$  из множества  $\tilde{G}^0$  и покажем, что она является точкой единственности.

Поскольку  $f \in \text{Lip}_y^{loc}(\tilde{G}^0)$ , найдутся  $\bar{B}_c(x_0, y_0)$  и  $L > 0$  такие, что  $f \in \text{Lip}_y^{gl}(U_c)$  с константой  $L$ , где  $U_c = \tilde{G}^0 \cap \bar{B}_c(x_0, y_0)$

- Если  $(x_0, y_0) \in G^0$ , то найдётся  $c > 0$  такое, что  $U_c = \bar{B}_c(x_0, y_0)$ , решение ЗК  $(x_0, y_0)$  существует на некотором интервале  $(a, b) \ni x_0$  и для любого решения этой задачи, уменьшая при необходимости  $(a, b)$ , можно добиться, чтобы его график лежал в  $U_c$
- Пусть  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}^0$ 
  - Если решение ЗК  $(x_0, y_0)$  отсутствует, то  $(x_0, y_0)$  – это точка единственности по определению
  - Пусть решение существует на некотором промежутке  $\langle a, b \rangle$  таком, что  $x_0 \in \langle a, b \rangle \subset [x_0 - c, x_0 + c]$

**Утверждение 6.** Тогда, уменьшая  $\langle a, b \rangle$  при необходимости можно добиться, чтобы график решения лежал в  $U_c$

**Доказательство.** Действительно, очевидно, что с уменьшением  $\langle a, b \rangle$  график решения попадает в  $\bar{B}_c(x_0, y_0)$ . А ситуация, когда при  $x < x_0$  и (или)  $x > x_0$  график, оставаясь в  $\tilde{G}$ , не принадлежит  $\tilde{G}^0$ , преодолевается за счёт выбора константы  $c_1 > c$  такой, что в  $\bar{B}_{c_1}(x_0, y_0)$  юдет выполняться глобальное условие Липшица с константой, скажем,  $L_1 := L + 1$ . В результате с учётом непрерывности функции  $f(x, y)$  область  $\tilde{G}^0$  увеличится, включив в себя дугу интегральной кривой в малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$   $\square$

Рассмотрим любые два решения  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  ЗК  $(x_0, y_0)$ , которые определены по крайней мере на некотором общем промежутке  $\langle \alpha, \beta \rangle$  таком, что  $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset [x_0 - c, x_0 + c]$

Как установлено выше, уменьшая при необходимости  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , можно добиться, чтобы для всякого  $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$  точки  $(x, \varphi_1(x)), (x, \varphi_2(x)) \in U_c$

По лемме о записи решения в интегральном виде  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  удовлетворяют тождеству (1.2) на  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , т. е. для любого  $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$  справедливо

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_j(s)) \, ds, \quad j = 1, 2$$

Поэтому

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \left( f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s)) \right) \, ds$$

точки  $(s, \varphi_j(s)) \in U_c$  и для них выполнено неравенство (1.18). Тогда

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s))| \, ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| \, ds \right|$$

К последнему неравенству можно применить следствие к лемме Гронуолла (лемма 8), где  $h(x) = |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = L$

Тогда  $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \stackrel{\langle \alpha, \beta \rangle}{\equiv} 0$ , т. е. решения  $y = \varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  ЗК( $x_0, y_0$ ) совпадают в каждой точке  $\langle \alpha, \beta \rangle \ni x_0$ . Поэтому по определению  $(x_0, y_0)$  – это точка единственности  $\square$

**Частный случай** Предположим, что в уравнении (1.1) функция  $f(x, y)$  непрерывна в области  $G$  и удовлетворяет условию Липшица по  $y$  локально в области  $G^0 \subset G$ . Тогда  $G^0$  – это область единственности

**Теорема 14 (о множестве единственности; слабая).** Предположим, что в уравнении (1.1) функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на множестве  $\tilde{G}$ , функция  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  определена и непрерывна в области  $G^0 \subset G$ .

Тогда множество  $\tilde{G}^0 = G^0 \cup \widehat{G}^0$ , где  $\widehat{G}^0 \subset \partial G^0 \cap \tilde{G}$  и состоит из точек, в которых  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  может быть доопределена по непрерывности, является множеством единственности для уравнения (1.1), если при этом для любой точки  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}^0$  найдётся  $\bar{B}_c(x_0, y_0)$  такая, что множество  $\tilde{G}^0 \cap \bar{B}_c(x_0, y_0)$  выпукло по  $y$

**Примечание.** Выпуклость множества по  $y$  означает, что множеству принадлежит отрезок, соединяющий любые две его точки с одинаковой абсциссой

**Примечание.** Существование функции  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  предполагается только в области, а на границе её приходится доопределять, поскольку для определения частной производной обычно требуется, чтобы функция  $f$  была задана в полной окрестности этой точки

**Примечание.** В последнем предположении теоремы говорится о произвольной точке границы множества  $\tilde{G}^0$ , поскольку для любой точки из области  $G^0$  требуемое условие выполняется автоматически

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку  $(x_0, y_0) \in \tilde{G}^0$ . Поскольку функция  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  непрерывна в точке  $(x_0, y_0)$ , существует такое  $\delta$ , что  $0 \leq \delta \leq c$ , где  $c$  берётся из формулировки теоремы, и для любой точки  $(x, y) \in U_\delta := \tilde{G}^0 \cap \bar{B}_\delta(x_0, y_0)$  верно неравенство

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right| \leq 1$$

Таким образом, установлено, что  $U_\delta$  выпукло по  $y$  и

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq L := \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right| + 1 \quad \forall (x, y) \in U_\delta$$

По теореме Лагранжа для любых двух точек  $(x, y_1), (x, y_2) \in U_\delta$ ,  $y_1 < y_2$ ,

$$\exists y^*(x) \in (y_1, y_2) : \quad f(x, y_2) - f(x, y_1) = \frac{\partial f(x, y^*(x))}{\partial y} (y_2 - y_1)$$

Здесь точка  $(x, y^*(x)) \in U_\delta$ , так как множество  $U_\delta$  выпукло по  $y$ . Поэтому в  $U_\delta$  верно неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|$$

означающее, что  $f \in \text{Lip}_y^{gl}(U_\delta)$ . Тогда по определению выполнено локальное условие Липшица, а значит, по теореме о единственности  $\tilde{G}^0$  – это множество единственности  $\square$

Не только гладкость функции  $f$  по  $y$ , но и локальное условие Липшица не является необходимым:

**Теорема 15 (Осгуда; о единственности в области; сильная).** Пусть в уравнении (1.1) функция  $f(x, y)$

непрерывна в области  $G$  и

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq h(|y_2 - y_1|) \quad (1.19)$$

где функция  $h(s)$  определена, непрерывна и положительна для всякого  $s \in (0, +\infty)$  и

$$\int_{\varepsilon}^a h^{-1}(s) \, ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty, \quad a > \varepsilon > 0$$

Тогда  $G$  – это область единственности для уравнения (1.1)

**Доказательство.** Без доказательства □

**Замечание.** В качестве  $h(s)$  можно выбрать линейную функцию  $ks$ . Тогда неравенство (1.19) окажется глобальным условием Липшица, а теорема о единственности будет вытекать из теоремы Осгуда

## 1.5 Существование общего решения

В этом параграфе будет доказана теорема о существовании общего решения (теор. 7)

### 1.5.1 Область существования общего решения

Опишем множество  $A^*$ , в котором можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности  $G^0$  нельзя, какой бы малой она ни была

В этом параграфе в роли  $A^*$  будет выступать вводимый ниже компакт  $\bar{A}$

**Алгоритм (построения  $\bar{A}$ ).** Пусть  $G^0$  – область единственности для уравнения (1.1)

Возьмём любую точку  $(x_0^*, y_0^*) \in G^0$

Поскольку  $G^0$  является открытым множеством, существует такое  $\delta > 0$ , что  $\bar{B}_{2\delta}(x_0^*, y_0^*) \subset G^0$

Пусть числа  $y_1, y_2$  таковы, что

$$\begin{cases} 0 < y_0^* - y_1 < \delta \\ 0 < y_2 - y_0^* < \delta \end{cases}$$

и найдётся отрезок  $[a, b] \ni x_0^*$  такой, что графики решений  $\text{ЗК}(x_0^*, y_1) \, y = \varphi_1(x)$  и  $\text{ЗК}(x_0^*, y_2) \, y = \varphi_2(x)$  лежат в  $\bar{B}_\delta$  при  $x \in [a, b]$ . Тогда в  $\bar{B}_\delta$  содержится компакт

$$\bar{A} = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \} \quad (1.20)$$

При этом  $A$  (то же самое, со строгими неравенствами) – это область, так как по построению  $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$ , а значит,  $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$  для всякого  $x \in [a, b]$ , поскольку в области единственности  $G^0$  дуги интегральных кривых не могут соприкасаться и разбивать  $A$  на несвязные подмножества

**Лемма 9 (о поведении решений на компакте  $\bar{A}$ ).** Для любой точки  $(x_0, y_0) \in \bar{A}$  решение  $\text{ЗК}_{(1.1)}(x_0, y_0) \, y = \varphi(x)$  продолжимо на отрезок  $[a, b]$

**Доказательство.** Для любой точки  $(x_0^*, y_0^*) \in G^0$  построим компакт  $\bar{A}$  вида (1.20), тогда  $\bar{A} \subset \bar{B}_\delta \subset \bar{B}_{2\delta} \subset G^0$

Возьмём произвольную точку  $(x_0, y_0) \in \bar{A}$ . Тогда прямоугольник

$$\bar{R} := \{ (x, y) \mid |x - x_0| \leq \delta, \quad |y - y_0| \leq \delta \} \subset \bar{B}_{2\delta}$$

Пусть  $M := \max_{\bar{B}_{2\delta}} |f(x, y)| > 0$  (при  $M = 0$  лемма очевидна)

Положим  $h := \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}$ . Тогда  $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$  – отрезок Пеано, построенный для произвольной точки  $(x_0, y_0) \in \bar{A}$

Следовательно, по теореме Пеано решение  $\text{ЗК}(x_0, y_0) \, y = \varphi(x)$  определено на отрезке Пеано  $[x_0 - h, x_0 + h]$ , длина которого неизменна для всех точек  $(x_0, y_0) \in \bar{A}$

- Рассмотрим функцию  $\varphi(x)$  при  $x > x_0$ :

- Если  $x_0 + h < b$ , то  $\varphi_1(x_0 + h) \leq \varphi(x_0 + h) \leq \varphi_2(x_0 + h)$ , а значит, точка  $x_0 + h, (x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$  Выбрав эту точку в качестве начальной, решение  $y = \varphi(x)$  можно продолжить вправо на

полуотрезок Пеано  $[x_0 + h, x_0 - h]$

- \* Если  $x_0 + 2h \geq b$ , то лемма доказана
- \* Иначе сделаем очередное продолжение решения вправо на длину  $h$   
В результате за конечное число шагов будет продолжено вправо до точки  $b$  включительно
- Аналогично  $y = \varphi(x)$  можно продолжить влево до точки  $a$

□

## 1.5.2 Формула общего решения

Для любой точки  $(x_0, y_0) \in \bar{A}$  обозначим через  $y = y(x, x_0, y_0)$  решение ЗК<sub>(1.1)</sub> $(x_0, y_0)$ . Тогда  $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$ , и по лемме о поведении решений на компакте (лемма 9) решение  $y = (x, x_0, y_0)$  определено для всякого  $x \in [a, b]$

Для произвольной точки  $\zeta \in [a, b]$  рассмотрим функцию

$$\varphi(xC) = y(x, \zeta, C), \quad (\zeta, C) \in \bar{A} \quad (1.21)$$

на прямоугольнике  $\bar{Q} = \bar{Q}_{\bar{A}} := \{ (x, C) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(\zeta) \leq C \leq \varphi_2(\zeta) \}$ , который является частным случаем множества  $Q_{A^*}$  из определения общего решения (опр. 23)

В самом деле,  $\varphi_1(\zeta) \leq C \leq \varphi_2(\zeta)$  по построению  $\bar{A}$ . А по лемме решение  $y = y(x, \zeta, C)$  определено для любого  $x \in [a, b]$  и при  $x = \zeta$  по определению решения ЗК  $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$

**Теорема 16 (о существовании общего решения).** Введённая в формуле (1.21) функция  $y = \varphi(x, C)$  является общим решением уравнения (1.1) на компакте  $\bar{A}$  из (1.20), построенном в окрестности произвольной точки из области единственности  $G^0$

**Доказательство.** Покажем, что функция  $y = \varphi(x, C)$  удовлетворяет определению общего решения уравнения (1.1):

1. Возьмём произвольную точку  $(x_0, y_0) \in \bar{A}$  и рассмотрим уравнение  $y_0 = \varphi(x_0, C)$  или согласно (1.21) уравнение

$$y_0 = y(x_0, \zeta, C) \quad (1.22)$$

Наличие у него решения  $C = C_0$  фактически означает, что “выпущенное” из точки  $(\zeta, C_0) \in \bar{A}$  решение уравнения (1.1) в момент  $x_0$  попадает в точку  $(x_0, y_0) \in \bar{A}$

Покажем, что решение уравнения (1.22) существует и единственно:

“Выпустим” из точки  $(x_0, y_0)$  решение  $y = y(x, x_0, y_0)$ , которое по лемме 9 определено на всём отрезке  $[a, b]$  и, в частности, при  $x = \zeta \in [a, b]$  по определению (1.21)

Пусть  $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$ . Тогда  $(\zeta, C)$  – это точка единственности, так как принадлежит графику решения  $y = y(x, x_0, y_0)$

Поэтому решение ЗК<sub>(1.1)</sub> $(\zeta, C)$   $y = u(x, \zeta, C_0)$  с начальными данными  $\zeta, C_0$  по лемме о поведении решений на компакте  $\bar{A}$  (лемма 9) продолжимо на  $[a, b]$  и совпадает с решением  $y = y(x, x_0, y_0)$

Следовательно,  $y_0 = y(x_0, \zeta, C)$ , т. е. график функции  $y = y(x, \zeta, C_0)$  проходит через точку  $(x_0, y_0)$ . Другими словами, дуга интегральной кривой, проходящая через точки  $(x_0, y_0)$ ,  $(\zeta, C_0)$ , имеет на отрезке  $[a, b]$  две параметризации  $y = y(x, x_0, y_0)$  и  $y = (x, \zeta, C_0)$

Итак, установлено, что уравнение (1.22) имеет единственное решение  $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$ , т. е.  $y_0 = y(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0))$

2. Функция  $y = \varphi(x, C_0)$  является решением ЗК<sub>(1.1)</sub> $(x_0, y_0)$ , поскольку согласно (1.21) и (1.22)  $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$
3. Осталось доказать, что функция  $y = \varphi(x, C)$  из (1.21) непрерывна на компакте  $\bar{Q}$  по совокупности переменных:

- Поскольку для всякого  $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$  функция  $y = \varphi(x, C)$  – это решение уравнения (1.1), она непрерывна по  $x$  при  $x \in [a, b]$

- Покажем, что для всякого  $x \in [a, b]$  функция  $y = \varphi(x, C)$  непрерывна по  $C$  при  $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ :

Допуская **противное**, предположим, что найдутся  $\tilde{\varepsilon} > 0$ ,  $\tilde{x} \in [a, b]$  и последовательность  $C_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{C}$ ,  $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$  такие, что  $|\varphi(\tilde{x}, C_k) - \varphi(\tilde{x}, \tilde{C})| \geq \tilde{\varepsilon}$  при всех  $k \geq 1$ . Это значит,

что при  $x = \tilde{x}$  функция  $\varphi(\tilde{x}, C)$  терпит разрыв в точке  $\tilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ , поскольку любой компакт, в частности отрезок  $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ , содержит все свои предельные точки. В этом случае, кстати,  $\tilde{x} \neq \zeta$ , так как по определению  $\varphi(\zeta, C_k) = C_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C = \varphi(\zeta, C)$

Выпуская из точек  $(\zeta, C_k) \in \bar{A}$  дуги интегральных кривых, получаем последовательность решений  $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$ . Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выдулить монотонную подпоследовательность, НУО считаем, что последовательность  $C_k$  монотонно возрастает, т. е.  $C_k < C_{k+1} < \tilde{C}$  для любого  $k \geq 1$

В области  $G^0$  интегральные кривые не имеют общих точек, поэтому последовательность  $\varphi(\tilde{x}, C_k)$  тоже монотонно возрастает и ограничена, так как  $\varphi(\tilde{x}, C_k) \leq \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}) - \tilde{\varepsilon}$  по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел

Пусть  $\tilde{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\tilde{x}, C_k)$ , тогда  $\tilde{y} \leq \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}) - \tilde{\varepsilon}$

Выберем произвольную точку  $y^*$  из интервала  $(\tilde{y}, \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}))$

Рассмотрим определённое на  $[a, b]$  решение ЗК  $(\tilde{x}, y^*)$ , обозначаемое  $y = y(x, \tilde{x}, y^*)$

Пусть  $C^* = y(\zeta, \tilde{x}, y^*)$ . Тогда  $C^* < \tilde{C}$ , так как  $y^* < \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}) = y(\tilde{y}, \zeta, \tilde{C})$

Дугу интегральной кривой решения  $y = y(x, \tilde{x}, y^*)$  на  $[a, b]$ , как было установлено, параметризует также решение с начальными данными  $\zeta, C^*$ , имеющее согласно формуле (1.21) вид  $y = \varphi(x, C^*)$ , причём  $\varphi(\tilde{x}, C^*) = y^*$

Однако существует индекс  $k^*$  такой, что член  $C^{k^*}$  сходящейся к  $\tilde{C}$  последовательности  $C_k$  будет больше, чем  $C^*$

В результате получилось так, что дуги интегральных кривых решений  $y = \varphi(x, C_{k^*})$  и  $y = \varphi(x, C^*)$  пересекаются в некоторой точке  $x^*$ , лежащей между  $\zeta$  и  $\tilde{x}$ , поскольку  $\varphi(\zeta, C_{k^*}) = C_{k^*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$ , а  $\varphi(\tilde{x}, C_{k^*}) < \tilde{y} < y^* = y(\tilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\tilde{x}, C^*) - \frac{\varepsilon}{2}$  с тем, что  $G$  – область единственности

Итак, доказано, что функция  $y = \varphi(x, C)$  непрерывна по каждой из переменных в прямоугольнике  $\bar{Q}$ . Но этого недостаточно для её непрерывности по совокупности переменных

Воспользуемся ещё одним свойством функции  $\varphi$ :

Поскольку  $y = \varphi(x, C)$  при любой константе  $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$  есть решение уравнения (1.1), то  $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, C))$  на  $[a, b]$

Но  $(x, \varphi(x, C)) \in \bar{A}$ , когда точка  $(x, C) \in \bar{Q}$ , а на компакте  $\bar{A}$  выполняется неравенство  $|f(x, y)| \leq M$ . Следовательно, функция  $|\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x}|$  ограничена на  $[a, b]$

С учётом теоремы Лагранжа заключаем, что для любой константы  $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$  и для любых  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$  найдётся такое  $x_C \in (x_1, x_2)$ , что  $\varphi(x_2, C) - \varphi(x_1, C) = \frac{\partial \varphi(x_C, C)}{\partial x} (x_2 - x_1)$

Этого достаточно, чтобы непрерывность функции  $y = \varphi(x, C)$  по  $x$  на  $[a, b]$ , равномерная относительно  $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$  в силу признака Вейерштрасса с  $\delta = \varepsilon/M$ , стала очевидной

Последнее свойство функции  $\varphi$  наряду с её поточечной непрерывностью по  $C$  гранатирует непрерывность  $\varphi(x, C)$  по совокупности переменных в прямоугольнике  $\bar{Q}$

Действительно, возьмём произвольную точку  $(x_0, C_0) \in \bar{Q}$  и покажем, что функция  $\varphi(x, C)$  непрерывна в этой точке:

Для этого зафиксируем любое число  $\varepsilon > 0$ . Тогда в силу непрерывности функции  $\varphi$  по  $C$  найдётся такое  $\delta_{x_0} > 0$ , что

$$\forall C \quad \left( |C - C_0| < \delta_{x_0} \implies |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

А из равномерной непрерывности  $\varphi(x, C)$  по  $x$  относительно  $C$  вытекает, что

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad \forall C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)] \quad \forall x \quad \left( |x - x_0| < \delta_0 \implies |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

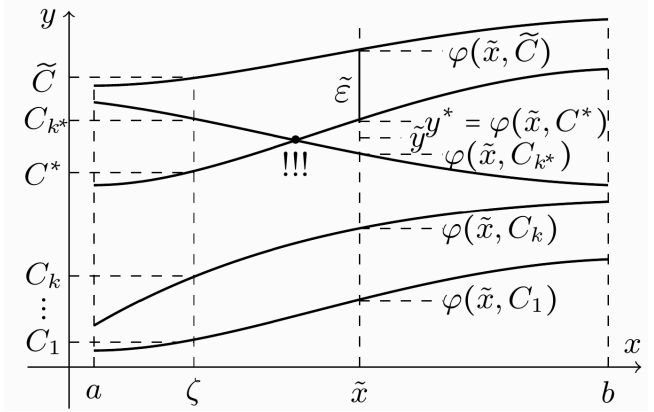
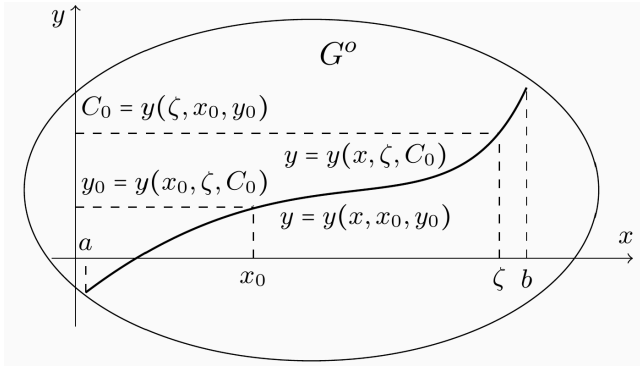
Выберем число  $\delta := \min \{ \delta_{x_0}, \delta_0 \}$ , тогда для любой точки  $(x, C)$  получаем:

$$\|(x, C) - (x_0, C_0)\| := \max \{ |x - x_0|, |C - C_0| \} < \delta$$

Следовательно,

$$|\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C_0)| \stackrel{\Delta}{\leq} |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| + |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| = \varepsilon$$

□



**Определение 38.** Общее решение  $y = \varphi(x, C)$ , определённое формулой (1.21), будем называть общим решением в форме Коши или классическим общим решением уравнения первого порядка (1.1)

**Теорема 17 (о дифференцируемости общего решения).** Пусть на компакте  $\bar{A}$  из (1.20) при некотором  $\zeta \in [a, b]$  формула (1.21) задаёт общее решение  $y = \varphi(x, C)$ , и в уравнении (1.1)  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема по  $y$  в некоторой окрестности  $\bar{A}$

$$\Rightarrow \forall (x, C) \in \bar{Q} : \quad \frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x} = \exp \left( \int_{\zeta}^x \frac{\partial f(t, \varphi(t, C))}{\partial y} dt \right) \quad (1.23)$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольным образом константу  $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ , после чего для всякого  $x \in [a, b]$  положим  $\Delta \varphi = \varphi(x, C + \Delta C) - \varphi(x, C)$ , где  $\Delta C$  – приращение аргумента  $C$ . Поскольку при фиксированной  $C$  функция  $y = \varphi(x, C)$  является решением уравнения (1.1), справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta \varphi)}{dx} &= f(x, \varphi(x, C + \Delta C)) - f(x, \varphi(x, C)) = \int_0^1 d \left( f(x, \varphi(x, C) + \Delta \varphi \cdot s) \right) = \\ &= \int_0^1 \frac{d f(x, \varphi(x, C) + \Delta \varphi \cdot s)}{ds} ds = p(x, \Delta C) \Delta \varphi, \quad p(x, \Delta C) := \int_0^1 \frac{\partial f(x, \varphi(x, C) + \Delta \varphi \cdot s)}{\partial y} ds \end{aligned}$$

- Пусть  $\Delta C \neq 0$ , тогда, поделив первое и последнее выражение в цепочке на  $\Delta C$ , убеждаемся, что функция  $\psi(x, \Delta C) := \frac{\Delta \varphi}{\Delta C}$  является решением ЗК  $(\zeta, 1)$  линейного однородного уравнения  $\frac{d u}{d x} = p(x, \Delta C) u$ , так как

$$\psi(\zeta, \Delta C) = \frac{\varphi(\zeta, C + \Delta C) - \varphi(\zeta, C)}{\Delta C} \stackrel{(1.21)}{=} \frac{C + \Delta C - C}{\Delta C} = 1$$

$$\text{Следовательно, } \psi(x, \Delta C) = \exp \left( \int_{\zeta}^x p(t, \Delta C) dt \right)$$

- Но  $p(x, \Delta C)$  существует и при  $\Delta C = 0$ :

$$p(x, 0) = \frac{\partial f(x, \varphi(x, C))}{\partial y}$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \psi(x, \Delta C) = \exp \left( \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \int_{\zeta}^x p(t, \Delta C) dt \right)$$

В результате частная производная общего решения  $y = \varphi(x, C)$  по  $C$  существует, непрерывна и вычисляется по формуле (1.23)  $\square$

**Замечание.** В теореме доказано, что если в уравнении (1.1) правая часть непрерывно дифференцируема по  $y$ , то решение  $y = y(x, x_0, y_0)$ , рассматриваемое как функция трёх переменных, имеет непрерывную положительную производную по  $y_0$

## Глава 2

# Уравнения первого порядка в симметричной форме

### 2.1 Существование и единственность решения

#### 2.1.1 Объект изучения

Уравнение первого порядка в симметрической форме имеет вид

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.1)$$

и в нём вещественные функции  $M$  и  $N$  определены и непрерывны на связном множестве  $\tilde{B} = B \cup \hat{B} \cup \check{B}$ , где  $B$  – это область в  $\mathbb{R}^2$ , в которой

$$M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0 \quad (2.2)$$

а множества  $\hat{B}, \check{B}$ , возможно пустые, состоят из граничных точек области  $B$ , причём для точек из множества  $\hat{B}$  условие (2.2) выполняется, а для точек из множества  $\check{B}$  – нет

Таким образом, ни в одной из точек множеств  $B$  и  $\hat{B}$  функции  $M$  и  $N$  могут одновременно обратиться в нуль, а для любой точки  $(x, y) \in \check{B}$  справедливы равенства  $M(x, y) = N(x, y) = 0$

Кроме того, в каждой точке граничного множества  $B^* = \partial B \setminus (\hat{B} \cup \check{B})$  хотя бы одна из функций  $M$  или  $N$  не определена или разрывна

**Определение 39.** Точки из множества  $\check{B}$  будем называть особыми, а точки из множества  $B \cup \hat{B}$  – обыкновенными или неособенными

Уравнение (2.2) будет рассматриваться и решаться на множестве обыкновенных точек, поскольку в особых точках оно фактически вырождается

#### 2.1.2 Решение уравнения в симметричной форме

Выделим замкнутые множества нулей функций  $M$  и  $N$ :

$$\overline{M^0} := \left\{ (x, y) \in \tilde{B} \mid M(x, y) = 0 \right\}, \quad \overline{N^0} := \left\{ (x, y) \in \tilde{B} \mid N(x, y) = 0 \right\}$$

Обозначим через  $\widetilde{B_N}$  и  $\widetilde{B_M}$  произвольные компоненты связности соответственно множества  $\frac{\tilde{B}}{\overline{N^0}}$ , на котором

$N(x, y) \neq 0$  и множества  $\frac{\tilde{B}}{\overline{M^0}}$ , на котором  $M(x, y) \neq 0$ . Введём также множество  $\tilde{B}_{MN} = \tilde{B}_M \cap \tilde{B}_N$

Очевидно, что все три разновидности введённых множеств могут иметь общие границы и состоят из обыкновенных точек

Уравнение (2.1) на любом из множеств  $\tilde{B}_N$  равносильно уравнению, разрешённому относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (2.3)$$

на множествах  $\tilde{B}_M$  оно равносильно еревёрнутому уравнению

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (2.4)$$



а на любом из множеств  $\tilde{B}_{MN}$  уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно каждому из уравнений (2.3), (2.4)

Но на любом по множеству множества  $\tilde{B}_N$ , содержащем хотя бы одну точку из  $\overline{M^0}$ , можно перейти только к уравнению (2.3). Аналогично обстоит дело в случае, когда  $\tilde{B}_M \cap \overline{N^0} \neq \emptyset$

Это приводит к вынужденному обобщению понятия решения:

**Определение 40.** Решением уравнения (2.1) называется определённая на некотором промежутке  $\langle a, b \rangle$  функция  $y = \varphi(x)$  или функция  $x = \psi(y)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1. функция  $\varphi(x)$  или  $\psi(y)$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$
2. точка  $(x, \varphi(x)) \in \tilde{B} \setminus \check{B}$  для любого  $x \in \langle a, b \rangle$  или точка  $(\psi(y), y) \in \tilde{B} \setminus \check{B}$  для любого  $y \in \langle a, b \rangle$
3.  $M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$  на  $\langle a, b \rangle$  или  $M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) \equiv 0$  на  $\langle a, b \rangle$

При этом решения уравнения (2.1) подразделяются на внутренние, граничные и смешанные в соответствии с аналогичным подразделением решений уравнения (1.1)

**Замечание.** По определению график любого решения состоит только из обыкновенных точек

**Замечание.** По аналогии с уравнением (1.1) для уравнения (2.1) вводится понятие полного решения, в котором максимальный интервал указывается либо для решения  $y = \varphi(x)$ , график которого лежит в  $\tilde{B}_N$ , либо для решения  $x = \psi(y)$  с графиком из  $\tilde{B}_M$

**Определение 41.** Точка  $(x_0, y_0) \in \tilde{B} \setminus \check{B}$  называется точкой неединственности уравнения (2.1), если хотя бы для одного из уравнений (2.3), (2.4) она окажется точкой неединственности. В противном случае точка  $(x_0, y_0)$  – это точка единственности

**Замечание.** Решения уравнения (2.1) могут быть частными или особыми точно так же, как это происходит с решениями уравнения, разрешённого относительно производной

### 2.1.3 Интегральные кривые

Уравнение в симметричной форме позволяет обобщить понятие интегральной кривой. Действительно, через каждую точку множества  $\tilde{B} \setminus \check{B}$ , используя одно из разрешённых уравнений, можно провести отрезок поля, построив, тем самым, поле направлений уравнения (2.1)

Наличие поля направлений позволяет сохранить геометрическое определение интегральной кривой, а именно

**Определение 42.** Интегральной кривой уравнения (2.1) на множестве  $\tilde{B} \setminus \check{B}$  назовём любую гладкую кривую, лежащую в этом множестве, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке

В результате локально интегральная кривая задаётся или функцией  $y = \varphi(x)$ , или  $x = \psi(y)$

### 2.1.4 Существование и единственность решения

Поскольку уравнение (2.1) в некоторой окрестности любой неособой точки сводится к одному из разрешённых уравнений, то все локальные определения и теоремы из главы 1 остаются верными

**Замечание.** В дальнейшем уравнение (2.1) будет рассматриваться только в области  $B$ , в которой по определению рассматриваются только особые точки

В результате по определению все решения будут внутренними и их максимальные интервалы существования всегда будут интервалами

**Теорема 18 (о существовании решения).** Пусть в уравнении (2.1) функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  непрерывны в области  $B$

Тогда для любой точки  $(x_0, y_0) \in B$  и для любого отрезка Пеано  $P_h(x_0, y_0)$ , построенного для одного из

уравнений (2.3), (2.4), определённого в некоторой окрестности  $B_c(x_0, y_0) \subset B$ , существует по крайней мере одно решение  $\text{ЗК}_{(2.1)}(x_0, y_0)$ , заданное на  $P_h(x_0, y_0)$

**Теорема 19 (о единственности в области; слабая).** Пусть в уравнении (2.1) функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  непрерывны в области  $B$ , а в области  $B^0 \subset B$  верно хотя бы одно из двух условий:

- $N(x, y) \neq 0$ , существуют и непрерывны частные производные  $M'_y(x, y), N'_y(x, y)$
- $M(x, y) \neq 0$ , существуют и непрерывны частные производные  $M'_x(x, y), N'_x(x, y)$

Тогда  $B^0$  – это область единственности

**Доказательство.** Действительно, при выполнении первого условия, например, в области  $B^0$  уравнение (2.1) равносильно уравнению (1.1) с  $F = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ , и частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{M \frac{\partial N}{\partial y} - N \frac{\partial M}{\partial y}}{N^2}$  непрерывна, а значит, верна слабая теорема о единственности (теор. 6)  $\square$

**Следствие.** Область  $B$  будет областью единственности, если найдётся открытое покрытие её областями, для каждой из которых выполняется хотя бы одно из приведённых в формулировке теоремы условий

## 2.2 Интергал уравнения в симметричной форме

### 2.2.1 Определение интеграла

Интегральные кривые уравнения в симметричной форме по определению могут иметь любые касательные. Параметризуют их непрерывные неявные функции  $U(x, y) = 0$ . Именно в таком виде будем искать решение уравнения (2.1), называя их при этом интегралами. Аналог общего решения будем называть общим интегралом

**Определение 43.** Непрерывную в области  $B \subset \mathbb{R}^2$  функцию  $U(x, y)$  будем называть допустимой, если для любой точки  $(x_0, y_0) \in B$  найдётся такая непрерывная функция  $y = \xi(x)$  или  $x = \eta(y)$ , определённая на интервале  $(\alpha, \beta)$ , содержащем точку  $x_0$  или  $y_0$ , что:

1.  $y_0 = \xi(x_0)$  или  $x_0 = \eta(y_0)$
2. точка  $(x, \xi(x)) \in B$  для любого  $x \in (\alpha, \beta)$  или точка  $(\eta(y), y) \in B$  для любого  $y \in (\alpha, \beta)$
3.  $y = \xi(x)$  или  $x = \eta(y)$  – единственное решение уравнения

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \quad (2.5)$$

**Замечание.** Условие 3 означает, что выполняется по крайней мере одно из тождеств:

$$\begin{cases} U(x, \xi(x)) \stackrel{(\alpha, \beta)}{=} U(x_0, y_0) \\ U(\eta(y), y) \stackrel{(\alpha, \beta)}{=} U(x_0, y_0) \end{cases}$$

В дальнейшем будем всегда предполагать, что  $B$  – это область единственности, так как общий интеграл может быть построен только в области единственности

**Определение 44.** Допустимая функция  $U(x, y)$  называется интегралом уравнения (2.1) в области единственности  $B^0$ , если для любой точки  $(x_0, y_0) \in B^0$  единственная функция  $y = \xi(x)$  или  $x = \eta(y)$  из определения допустимой функции – это решение  $\text{ЗК}_{(2.1)}(x_0, y_0)$  на  $(\alpha, \beta)$ , т. е. удовлетворяет тождеству  $\text{З}_1$  или  $\text{З}_2$  из определения решения

### 2.2.2 Характеристическое свойство интеграла

**Примечание.** В математике часто характеристическим свойством называют другое определение того же объекта

**Теорема 20** (о характеристическом свойстве интеграла). Для того чтобы допустимая функция  $U(x, y)$  была интегралом уравнения в симметричной форме (2.1) в области единственности  $B^0$ , **необходимо и достаточно**, чтобы  $U(x, y)$  обращалась в постоянную вдоль любого решения (2.1), т. е. чтобы:

- $U(x, \varphi(x)) \stackrel{\langle a, b \rangle}{\equiv} C$  для любого решения  $y = \varphi(x)$ , определённого на  $\langle a, b \rangle$
- $U(\psi(y), y) \stackrel{\langle a, b \rangle}{\equiv} C$  для любого решения  $x = \psi(y)$ , определённого на  $\langle a, b \rangle$

#### Доказательство.

- Необходимость:

Пусть  $U(x, y)$  – интеграл уравнения (2.1) в области единственности  $B^0$ , и пусть, например,  $y = \varphi(x)$  – какое-либо решение уравнения (2.1), определённое на промежутке  $\langle a, b \rangle$

НУО<sup>1</sup>будем считать, что  $\langle a, b \rangle = (a, b)$

Возьмём произвольную точку  $x_0 \in (a, b)$  и положим  $y_0 := \varphi(x_0)$

Точка  $(x_0, y_0) \in B^0$ , поэтому по определению допустимой функции уравнение (2.5)  $U(x, y) = U(x_0, y_0)$  однозначно разрешимо или относительно  $x$ , или относительно  $y$ :

- Пусть (2.5) однозначно разрешимо относительно  $y$ , т. е. существует такая единственная функция  $y = \xi(x)$ , заданная на некотором  $(\alpha, \beta) \ni x_0$ , что  $U(x, \xi(x)) \stackrel{(\alpha, \beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$   
Эта функция по определению интеграла является решением ЗК<sub>(2.1)</sub> $(x_0, y_0)$

Поскольку  $B^0$  – область единственности,  $\varphi(x) \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} \xi(x)$ , где  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (a, b) \cap (\alpha, \beta)$ . Следовательно,

$$U(x, \varphi(x)) \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0) \quad (2.6)$$

- Пусть (2.5) однозначно разрешимо относительно  $x$ , т. е. на некотором интервале  $(\alpha, \beta) \ni y_0$  существует единственная функция  $x = \eta(y)$  такая, что  $\eta(y_0) = x_0$  и  $U(\eta(y), y) \equiv U(x_0, y_0)$  на  $(\alpha, \beta)$

Тогда по определению интеграла  $x = \eta(y)$  на  $(\alpha, \beta)$  является решением ЗК<sub>(2.1)</sub> $(y_0, x_0)$ , а значит, единственное решение этой ЗК имеет два представления:  $y = \varphi(x)$  и  $x = \eta(y)$ . Поэтому дуга интегральной кривой такого решения в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , не имея вертикальных и горизонтальных касательных, может быть параметризована как функцией  $y = \varphi(x)$ , так и функцией  $x = \eta(y)$

Иными словами, существуют такие интервалы  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  и  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , что

$$x_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b}) \subset (a, b), \quad y_0 \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \subset (\alpha, \beta), \quad y \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} \varphi(\eta(y)), \quad x \stackrel{(\tilde{a}, \tilde{b})}{\equiv} \eta(\varphi(x))$$

Поэтому справедлива доказывающая (2.6) цепочка равенств:

$$U(x, \varphi(x)) \stackrel{(\tilde{a}, \tilde{b})}{\equiv} U\left(\eta(\varphi(x)), \varphi(x)\right) \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} U(\eta(y), y) \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0)$$

- Осталось показать, что (2.6) выполняется на всём интервале  $(a, b)$ :

**Допустим**, что  $\tilde{\beta} < b$  и найдутся такие  $x_1, x_2 \in [\tilde{\beta}, b)$ ,  $(x_1 < x_2)$ , что  $U(x, \varphi(x)) \stackrel{(\tilde{\alpha}, x_1]}{\equiv} U(x_0, y_0)$ ,  $U(x, \varphi(x)) \neq U(x_0, y_0)$  для любого  $x \in (x_1, x_2)$

При  $y_1 = \varphi(x_1)$  в последнем тождестве  $U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0)$ . По определению решения точка  $(x_1, y_1) \in B^0$ , поэтому для неё верны все рассуждения, касающиеся точки  $(x_0, y_0)$

Пусть  $y = \xi_1(x)$  – единственное на  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $\left(x_1 \in (\alpha_1, \beta_1) \subset (x_0, x_2)\right)$  решение уравнения  $U(x, y) = U(x_1, y_1)$ , т. е.  $U(x, \xi_1(x)) \equiv U(x_1, y_1)$  на  $(\alpha_1, \beta_1)$ , и оно же по определению интеграла является единственным решением ЗК $(x_1, y_1)$ . Тогда  $\xi_1(x) \equiv \varphi(x)$  на  $(\alpha_1, \beta_1)$ , и

$$U(x, \varphi(x)) \stackrel{[x_1, \beta_1)}{\equiv} U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0) - \downarrow$$

Ситуация с точками  $x_1, x_2 \in (a, \tilde{\alpha}]$  рассматривается аналогично

- Достаточность:

Пусть допустимая функция  $U(x, y)$  обращается в постоянную на любом решении уравнения (2.1). Покажем, что в таком случае  $U(x, y)$  – интеграл этого уравнения в области единственности  $B^0$

Возьмём произвольную точку  $(x_0, y_0) \in B^0$ . Тогда существует единственное решение

ЗК  $(x_0, y_0)$  вида  $y = \varphi(x)$  на  $(a, b) \ni x_0$ , или  $x = \psi(y)$  на  $(a, b) \ni y_0$

Пусть, например,  $x = \psi(y)$  является решением уравнения (2.1). Тогда по условию теоремы  $U(\psi(y), y) \equiv U(x_0, y_0)$  на  $(a, b)$

Если функция  $U(x, y)$ , будучи допустимой, однозначно разрешима относительно  $x$ , т. е. на некотором  $(\alpha, \beta) \ni y_0$  существует и единственная функция  $x = \eta(y)$  такая, что  $U(\eta(y), y) \equiv U(x_0, y_0)$  на  $(\alpha, \beta)$ , то  $\psi(y) \equiv \eta(y)$  на  $(a, b) \cap (\alpha, \beta)$ . А если уравнение (2.5) однозначно разрешимо относительно  $y$ , то можно показать, как и при доказательстве необходимости, что функция  $y = \xi(x)$  – решение уравнения (2.1), поскольку является обратной к решению  $x = \psi(y)$

В результате допустимая функция  $U(x, y)$  – это интеграл уравнения (2.1) в области единственности  $B^0$

□

---

Действительно, если  $\langle a, b \rangle = [a, b]$ , то по лемме о продолжимости решения, решение может быть продолжено на интервал  $(a_1, b_1) \supset [a, b]$