Оглавление

Задача (Дидона)**.** Среди выпуклых фигур периметра P наибольшую площадь имеет круг

Теорема 1. M – метрическое пространство. Равносильны следующие утверждения:

1. M компактно
2. M секвенциально компактно
3. M полное и вполне ограниченное

Определение 1. M называется секвенциально компактным, если

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \exists \text{ сходящаяся } \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$$

Определение 2. M называется полным, если любая фундаммельная последовательность в M сходится

Определение 3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, k > N \quad \rho(x_n, x_k) < \varepsilon$

Определение 4. M – метрическое пространство, $\qquad A \subset M$
A называется ε-сетью, если

$$\forall x \in M \quad \exists a \in A : \rho(x, a) < \varepsilon$$

Определение 5. M вполне ограничено, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть

0.1 Аксиомы отделимости

Определение 6. X – топологическое пространство. Тогда X удовлетворяет следующим аксиомам:

T0 (Холмогорова). Для любых двух различных точек X существует окрестность, содержащая ровно одну из них

T1 (Тихонова). $\forall \underset{x \neq y}{x, y} \in X \quad \exists U_x : y \notin U_x$

T2 (Хаусдорфа). $\forall \underset{x \neq y}{x, y \in X} \quad \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$

T3 $\forall$ замкнутого F и $\forall x \notin F \quad \exists$ открытые $U_x \ni x, U_F \sup F : U_x \cap U_F = \emptyset$

T4 $\forall$ замкнутых $\underset{F_1 \cap F_2 \neq \emptyset}{F_1, F_2} \quad \exists$ открытые $U_{F_1} \sup F_1, U_{F_2} \sup F_2 : U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset$

Замечание. **T2** $\implies$ **T1** $\implies$ **T0**

Примеры.

1. Антидискретное:

- Нет **T0**, **T1**, **T2**
- Есть **T3**, **T4**

2. Дискретное:
   Есть **T0** – **T4**

3. Стандартная топология:
   Есть **T0** – **T4**

4. Стрелка:
   - Есть **T0**, **T4**
   - Нет **T1**, **T2**, **T3**

5. Топология Зариского:
   - Есть **T0**, **T1**
   - Нет **T2**, **T3**, **T4**

Теорема 2. **T1** $\iff$ $\forall$ точка – замкнутое множество

Доказательство.

- $\implies$

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \underset{y \neq x_0}{y \in X} \quad \exists U_y \ni y \not\ni x_0$$

$$\bigcup_{y \in X \setminus \{ x_0 \}} U_y = X \setminus \{ x_0 \} \text{ – откр.} \implies \{ x_0 \} \text{ – замкн.}$$

- $\impliedby$

$$\forall x \neq y \quad U_x \coloneqq X \setminus \{ y \} \text{ – откр.}$$

□

Следствие. При **T1** верно **T4** $\implies$ **T3** $\implies$ **T2** $\implies$ **T1**

Определение 7. **T1**, **T3** (по следствию, всем, кроме **T4**) – регулярное пространство
T1, **T4** (по следствию, всем) – нормальное пространство

Свойства.

1. X удовлетворяет **T0** – **T4**, $\quad A \subset X \implies A$ удовл. **T0** – **T3**

2. X, Y удовл. **T0** – **T3**, то