# Дииффеpенциальная геометрия

Курс Солынина А. А.

Осень 2024

## Содержание

## Часть I
# Дифференциальная геометрия кривых

## 1. Вектор-функции. Пределы, производные

**Определение 1.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ — вектор-функция.
$f([a, b])$ — кривая, $f(a)$ — начало, $f(b)$ — конец.

**Определение 2.** $\lim\limits_{t \to t_\circ} f(t) = A \in \mathbb{R}^3$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |t - t_\circ| < \delta \implies |\vec{f}(t) - A| < \varepsilon$$

**Операции с вектор-функциями.**

- $(\vec{f} + \vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t)$
- $(\alpha \cdot \vec{f})(t) = \alpha \vec{f}(t)$
- 
  - $(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = \Big(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\Big)$
  - $(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$
  - $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})(t) = \Big(\vec{f}(t), \vec{g}(t), \vec{h}(t)\Big)$

**Утверждение 1.** Эти операции перестановочны с пределом.

**Доказательство.** Докажем для векторного произведения:

$$\vec{f}(t) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big), \qquad \vec{g}(t) = \Big(\vec{g}_1(t), \vec{g}_2(t), \vec{g}_3(t)\Big)$$

$$f \times g = \big(f_2g_3 - f_3g_2,\ f_3g_1 - f_1g_3,\ f_1g_2 - f_2g_1\big)$$

$$\lim_{t\to t_\circ}(f \times g)(t) \overset{?}{=} \left(\lim_{t\to t_\circ}(f_2g_3 - f_3g_2)(t), \dots, \dots\right) = (\widetilde{f}_2\widetilde{g}_3 - \widetilde{f}_3\widetilde{g}_2, \dots, \dots) = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3) \times (\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, \widetilde{g}_3)$$

$$\lim_{t\to t_\circ}\Big(f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t)\Big) = \underbrace{\lim_{t\to t_\circ} f_2(t)}_{\widetilde{f}_2}\lim_{t\to t_\circ} g_3(t) - \lim_{t\to t_\circ}(t)\lim_{t\to t_\circ} f_3g_3(t)$$

$\square$

**Утверждение 2.** Предел можно брать по координатам:

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = A = (A_1, A_2, A_3) \iff \lim_{t\to t_0} f_i(t) = A_i \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |f_i(t) - A_i| < \frac{\varepsilon}{3}$$

**Доказательство.**

- $\Longleftarrow$

$$|\overrightarrow{f(t)} - A| = \sqrt{\Big(\underbrace{f_1(t) - A_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{f_2(t) - A_2}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{f_3(t) - A_3}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3}} < \varepsilon$$

- $\Longrightarrow$

$$|\vec{f}(t) - A| = \sqrt{\big(f_1(t) - A_1\big)^2 + \big(f_2(t) - A_2\big)^2 + \big(f_3(t) - A_3\big)^2} \geq |f_i(t) - A_i|$$

$$\forall\varepsilon \quad \exists\,\delta : \quad |f_i(t) - A_i| \leq |\vec{f}(t) - A| < \varepsilon$$

$\square$

**Определение 3.** $\vec{f}(t)$ непрерывна в $t_\circ$, если $f(t_0) = \lim\limits_{t\to t_\circ} f(t)$

**Определение 4.**

$$\vec{f}'(t_\circ) \coloneqq \lim_{t\to t_\circ}\frac{f(t) - f(t_\circ)}{t - t_\circ}$$

**Утверждения.**

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

**Доказательство.** Аналогично произведению скалярных функций:

$$(f \times g)'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \times g(t)\right) + f(t_0) \times \lim_{t\to t_0}\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)$$

$\square$

5. $(f,g,h)' = (f',g,h) + (f,g',h) + (f,g,h')$

## 2. Лемма о производной вектор-функции с постоянным модулем

**Лемма 1.** $|\vec{f}| = \text{const} \iff \vec{f}\,' \perp \vec{f}$

**Доказательство.**

$$|\vec{f}| = \text{const} \iff (\vec{f}, \vec{f}) = \text{const} \iff (f,f)' = 0 \iff 2(f,f') = 0 \iff f' \perp f$$

$\square$

## 3. Касательная прямая к кривой. (Не)зависимость от параметризации

**Определение 5** (перепараметризация). $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \qquad g : [c,d] \to \mathbb{R}^3$
$\vec{f}, \vec{g}$ — параметризации одной кривой, если

$$\underset{\substack{\alpha \in C \\ \alpha(a)=c, \quad \alpha(b)=d \\ \alpha \text{ строго возрастает}}}{\exists\, \alpha : [a,b] \to [c,d] :} \quad f(t) = g\big(\alpha(t)\big) \quad \forall t \in [a,b]$$

Кривая — класс эквивалентности вектор-функций.

**Определение 6.** $\vec{f}\,'(t_\circ)$ называется касательным вектором.

**Утверждение 3.** $f \sim g \implies f'(t_\circ) \parallel g'\big(\alpha(t_\circ)\big)$

**Доказательство.**

$$\vec{f}(t) = \vec{g}\big(\alpha(t)\big)$$

$$\vec{f}\,'(t) = \vec{g}\,'\big(\alpha(t)\big) \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{>0} \implies \vec{f}\,'(t) \upuparrows \vec{g}\,'\big(\alpha(t)\big)$$

$\square$

**Определение 7.** Касательная — сововкупность касательных векторов, противоположных им, и $\vec{0}$.

## 4. Касательная прямая к кривой. Степень приближения

**Уравнение касательной** $\vec{v}(t) = \vec{f}\,'(t_\circ) \cdot \tau + \vec{f}(t_\circ)$

**Теорема 1.** Если $\delta$ — расстояние от $f(t)$ до касательной, то

$$\lim_{t \to t_\circ} \frac{\delta}{|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_\circ)|} = 0$$

Касательная — едингственная прямая, обладающая таким свойством.

**Замечание.** Под пределом стоит синус зелёного угла на рис. 1

**Доказательство.**

$$\delta = \frac{\left| \Big( \big(f(t) - f(t_\circ)\big) \times f'(t_\circ) \Big) \times f'(t_\circ) \right|}{|f'(t_\circ)|^2}$$

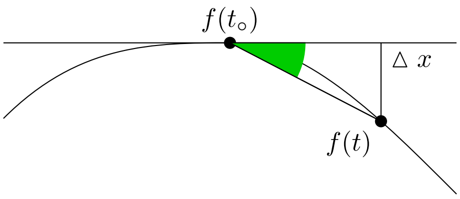



Рис. 1: Теорема о касательной.

Введём такую систему координат, чтобы касательная была осью $OX$:

$$\vec{f}(t) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big)$$

$$f'(t) = (1,0,0), \qquad f(t_\circ) = (0,0,0)$$

Посчитаем двойное векторное произведение:

$$\Big(f(t) - f(t_\circ)\Big) \times f'(t_\circ) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \times (1,0,0) = (0, f_3, -f_2)$$

$$(0, f_3, -f_2) \times (1,0,0) = (0, -f_2, f_3)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}}{1}$$

$$\lim_{t\to t_\circ} \frac{\delta^2}{|f(t) - f(t_\circ)|^2} = \lim_{t\to t_\circ} \frac{f_2^2(t) + f_3^2(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)}$$

Неопределённость — $(0,0,0)$

$$\lim\ldots \xlongequal[\text{Лопиталь}]{} \lim_{t\to t_\circ} \frac{2f_2f_2' + 2f_3f_3'}{2(f_1f_1' + f_2f_2' + f_3f_3')} \xlongequal[\text{Лопиталь}]{}$$

$$= \lim_{t\to t_\circ} \frac{f_2'^2 + f_2f_2'' + f_3'^2 + f_3f_3''}{\underbrace{f_1'^2}_{\to 1} + \underbrace{f_1f_1'' + f_2'^2 + f_2f_2''}_{\to 0} + \underbrace{f_3'^2}_{\to 0} + \underbrace{f_3f_3''}_{\to 0}} = 0 \iff \vec{f}'(t) \parallel (1,0,0)$$

□

## 5. Длина кривой

T — разбиение:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Найдём длину ломаной:

$$\sum_{i=1}^{n} |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| \text{ — интегральаня сумма}$$

Длина кривой — предел интегральных сумм:

**Определение 8.**

$$l := \lim_{\max\{\ t_i - t_{i-1}\ \}\to 0} \sum_{i=1}^{n} |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})|$$

$$l := \sup \sum_{i=1}^{n} |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})|$$

**Утверждение 4.** Определения равносильны (если предел существует)

**Доказательство.**

- $\sup \geq \lim$ — очевидно

- $\lim \geq \sup$
  $\sup$ — тоже какой-то частичный предел.
  Пусть есть подпоследоваетльность разбиений таких, что длина ломаной стремится к $\sup$.
  Разобьём максимальную (по длине) $t_i$ на $n$ равных частей.
  При этом по неравенству треугольника, длина ломаной не уменьшилась, а $\max\{\, t_i - t_{i-1} \,\}$ теперь стремится к нулю.

□

**Определение 9.** Кривая называется спрямляемой, если $l < \infty$.

**Теорема 2.** $f \in \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big) \implies f$ спрямляема и

$$l = \int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}\, t$$

**Доказательство.** Докажем формулу. Из неё будет следовать, что кривая спрямляема.
Обозначим

$$\triangle_i\, t \coloneqq t_i - t_{i-1}, \qquad \triangle_i\, f \coloneqq f(t_i) - f(t_{i-1}), \qquad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\left| \int_a^b |\vec{f}'(t)\, \mathrm{d}\, t - \sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| \right| \underset{\mp \sum |f'(\tau_i) \triangle_i t}{=\!=\!=\!=}$$
$$= \left| \int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}\, t - \sum_{i-1}^n |f'(\tau_i)| \triangle_i\, t + \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle_i\, t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| \overset{\triangle}{\leq}$$
$$\leq \underbrace{\left| \int_a^b |f'(t) \,\mathrm{d}\, t - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle_i\, t \right|}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n \big( f'(\tau_i) \triangle_i\, t - |\triangle_i\, f| \big) \right|}_{\mathrm{II}}$$

- $\mathrm{I} < \varepsilon$ (фиксируем $\varepsilon$ и по нему подбираем мелкость разбиения)
-

$$\mathrm{II} = \sum_{i=1}^n \Big( |f'(\tau_i) \triangle_i\, t - |\triangle_i\, f| \Big) \overset{\triangle}{\leq} \sum_{i=1}^n \Big| f'(\tau_i) \triangle_i\, t - \triangle_i\, f \Big| \underset{\text{Н.–Л.}}{=\!=\!=}$$
$$= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\tau_i) \,\mathrm{d}\, t - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) \,\mathrm{d}\, t \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| f'(\tau_i) - f'(t) \,\mathrm{d}\, t \underset{\text{при достаточно мелком разбиении}}{<}$$
$$< \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon \,\mathrm{d}\, t = \sum \varepsilon \cdot \triangle_i\, t = \varepsilon(b-a)$$

□

# 6. Длина кривой в различных координатах

**Способы задания кривой**

1. Явно:
   $y = f(x)$ (плоская кривая)
   $$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)} \,\mathrm{d}\, x$$
2. Явно в полярных координатах:
   $$r = r(\varphi)$$
   $$x = r(\varphi) \cos\varphi, \qquad y = r(\varphi) \sin\varphi$$

$$x'_\varphi = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \qquad y'_\varphi = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{r'^2\cos^2 - \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + \cancel{2r'r\sin\varphi\cos\varphi} + r^2\cos^2\varphi} = \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

3. Неявно:

$$F(x, y) = 0$$

Воспользуемся теоремой о неявной функции:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

$$f'(x) = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{F'^2_x}{F'^2_y}}\,\mathrm{d}\,x$$

## 7. Натуральная параметризация кривой

**Определение 10.** Параметризация $\vec{f}(t)$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

**Теорема 3.** Натуральная параметризация существует и единственна (с точностью до начальной точки и направления обхода кривой).

**Доказательство.**

- Существование

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} |f'(\tau)|\,\mathrm{d}\,\tau \implies s'(t) = |f'(t)|$$

Пусть $t(s) := \varphi(s), \qquad \varphi = s^{-1}$

$$t'(s) = \varphi'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|f'(t)|}$$

Пусть $\vec{g}(s) := \vec{f}(\varphi(s))$

$$g'(s) = f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(t)|} = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(\varphi(s))|}$$

$$|g'(s)| = \left|\frac{\dots}{\dots}\right| = 1 \implies s\text{ — натур. параметр}, \quad g(s)\text{ — натур. параметризация}$$

- Единственность
Пусть $s$ и $t$ — натуральные параметры

$$g(s) = f\big(\varphi(s)\big), \qquad t = \varphi(s)$$

$$1 = |g'(s)| = |f'(t) \cdot \varphi'(s)| = |f'(t)| \cdot |\varphi'(s)|$$

При этом, $|f'(t)| = 1$, т. к. $t$ — натур.

$$\implies |\varphi'(s)| = 1 \implies \varphi'(s) = \pm 1 \implies \varphi(s) = \pm s + \mathrm{const}$$

$\square$

# 8. Репер Френе. Формулы Френе

Пусть $s$ — натуральный параметр

$$\vec{v} := f'(s), \qquad |\vec{v}(s)| = 1$$

$$\vec{n} := \frac{\vec{v}'}{|\vec{v}'|} \text{ — единичный}$$

По полезной лемме (лемма 1) $n \perp v$

$$\vec{b} := v \times n$$

**Определение 11.** Репер Френе: $(\vec{v}, \vec{n}, \vec{b})$ (зависит от $t$ или $s$)

- $\vec{v}$ — касательный вектор;
- $\vec{n}$ — вектор главной нормали;
- $\vec{b}$ — вектор бинормали.

**Замечание.** Репер Френе существует только если $\dot{v} \neq \vec{0}$.
В таком случае говорят, что кривая бирегулярна.

Из определения $\vec{n}$ полчаем первую формулу Френе:

$$\boxed{\dot{v} = k \cdot \vec{n}}$$

**Определение 12.** $k(s)$ называется кривизной.

**Замечание.** $k = |\dot{v}|$
Это верно **только** в натуральной параметризации.

**Теорема 4.** $\dot{b} \parallel n$

**Доказательство.** $n \perp v$, а $b \perp \dot{b}$ по полезной лемме.
Докажем, что $\dot{b} \perp v$:

$$\dot{b} = (v \times n)' = \underbrace{\dot{v} \times n}_{0} + \underbrace{v \times \dot{n}}_{\perp v} \perp v$$

□

Получаем вторую формулу Френе:

$$\boxed{\dot{b} = -æn}$$

**Определение 13.** æ называется кручением.

**Теорема 5.** Кривая плоская $\iff$ æ $= 0$.

**Доказательство.**

$$æ = 0 \underset{n \neq 0}{\iff} \dot{b} = 0 \iff b = \text{const} \iff \text{ репер свободно “крутится” вокруг кривой}$$

□

$$\dot{n} = (b \times v)' = \dot{b} \times v + b \times \dot{v} = -æ\underbrace{n \times v}_{-b} + \underbrace{b \times kn}_{-kv} = æb - kv$$

Получаем третью формулу Френе:

$$\boxed{\dot{n} = æb - kv}$$

Все формулы Френе:

| | $v$ | $n$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $\dot{v}$ | 0 | $k$ | 0 |
| $\dot{n}$ | $-k$ | 0 | æ |
| $\dot{b}$ | 0 | $-$æ | 0 |

# 9. Плоскости, связанные с кривой. Уравнения этих плоскостей

- $\langle v, n\rangle$ — соприкасающаяся плоскость;
- $\langle b, n\rangle$ — нормальная плоскость;
- $\langle v, b\rangle$ — спрямляющая плоскость.

**Теорема 6.** $f(t)$ — произвольная регулярная параметризация бирегулярной кривой.

$$\implies f''(t) \in \langle v, n\rangle$$

**Доказательство.** Пусть $s$ – натуральный параметр

$$\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, s} \cdot \frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, t} = \dot{f} \cdot s'$$

$$f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\, t^2} = \frac{\mathrm{d}\, \dot{f}}{\mathrm{d}\, t} s' + \dot{f} \cdot s'' = \ddot{f} \cdot (s')^2 + \dot{f} s'' = k\vec{n} \cdot (s')^2 + v s''$$

$$f'' = k(s')^2 \cdot \vec{n} + s''\vec{v}$$

То есть, $f''$ раскладывается по векторам $v$ и $n$
Причём, если параметризация бирегулярна, то $k(s')^2 \neq 0$ □

**Следствие.** $\langle v, n\rangle = \langle f'(t), f''(t)\rangle$

**Задача 1.** Вычислить $v, n, b$ и плоскости для произвольной параметризации $f(t)$.

$$\vec{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}, \qquad \vec{b} \underset{\text{по следствию}}{=} \frac{f'' \times f'}{|f' \times f''|}, \qquad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{n} = \frac{(f' \times f'') \times f'}{|f'| \cdot |f' \times f''|}$$

Пусть $f(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$
$\vec{v} \parallel (x', y', z') = f'$ — вектор нормали к нормальной плоскости
Тогда нормальная плоскость пишется так:

$$\boxed{x'\big|_{t_\circ}(x - x_\circ) + y'\big|_{t_\circ}(y - y_\circ) + z'\big|_{t_\circ}(z - z_\circ)} = 0$$

Соприкасающаяся плоскость — аналогично, но нормальный вектор параллелен $\vec{b}$, т. е. $f'' \times f'$:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x'\big|_{t_\circ} & y'\big|_{t_\circ} & z'\big|_{t_\circ} \\ x''\big|_{t_\circ} & y''\big|_{t_\circ} & z''\big|_{t_\circ} \\ x - x_\circ & y - y_\circ & z - z_\circ \end{vmatrix} = 0}$$

Нормаль к спрямляющей плоскости параллельна $\vec{n}$, т. е. $(r' \times r'') \times r'$:

$$\Big((f' \times f''),\ f',\ f\Big) = 0$$

$$(f' \times f'') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = (y'z'' - y''z',\ z'x'' - z''x',\ x'y'' - x''y')$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} y'\big|_{t_\circ} z''\big|_{t_\circ} - y''\big|_{t_\circ} z'\big|_{t_\circ} & z'\big|_{t_\circ} x''\big|_{t_\circ} - z'\big|_{t_\circ} x''\big|_{t_\circ} & x'\big|_{t_\circ} y''\big|_{t_\circ} \quad x''\big|_{t_\circ} y'\big|_{t_\circ} \\ x'\big|_{t_\circ} & y'\big|_{t_\circ} & z'\big|_{t_\circ} \\ x - x_\circ & y - y_\circ & z - z_\circ \end{vmatrix} = 0}$$

# 10. Соприкасающаяся плоскость. Порядок её приближения к кривой

**Теорема 7.** $f(t)$ — бирегулярная параметризация, $\delta$ — расстояние от $f(t)$ до соприкасающейся плоскости.

$$\lim_{t\to t_\circ} \frac{\delta}{|f(t)-f(t_\circ)|^2} = 0$$

Соприкасающаяся плоскость — единственная, обладающая таким свойством.

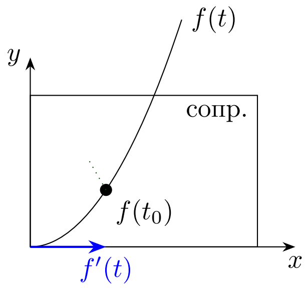



Рис. 2: Удобная система координат

**Доказательство.** Введём удобную систему координат (рис. 2):

- Соприкасающаяся плоскость — $XOY$;
- Касательная — $OX$;
- $f(t_\circ)$ — начало координат;
- $t_\circ = 0$;
- $y''(t) \neq 0$;
- $x'(0) \neq 0$.

Пусть $f(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$. Тогда

- $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, т. к. $f(t_\circ) = f(0)$ — начало координат;
- $y'(0) = z'(0) = 0$, т. к. $OX$ — касательная;
- $z''(0) = 0$, т. к. $XOY$ — соприкасающаяся.

Нужно сосчитать предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{z(t)}{x^2+y^2+z^2}$$

Разложим по Тейлору:

$$x(t) = x'(0)t + \frac{x''}{2}t^2 + o(t^2), \qquad y = \underbrace{y'(0)}_{0}t + \frac{y''}{2}t^2 + o(t^2) = \frac{y''}{2}t^2 + o(t^2), \qquad z(t) = \dots = o(t^2)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{z(t)}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{o(t^2)}{x'^2(0)t^2 + o(t^2)} = 0$$

$\square$

## 11. Вычисление кривизны

**Задача 2.** $f = \vec{f}(t)$
Вычислить кривизну в этой параметризации.

Есть перепараметризация $\vec{f}(t) = \vec{g}(s)$, где $s$ — натуральный параметр.

$$|g'(s)| = 1, \qquad k \overset{\text{def}}{=} |g''(s)|$$

По теореме о натуральной параметризации (теор. 3),

$$s(t) = \int_{t_\circ}^{t} |f'(\tau)| \,\mathrm{d}\,\tau \qquad \Longrightarrow \qquad s'(t) = |f'(t)|$$

$$f(t) = g\big(s(t)\big)$$

$$f'(t) = g'\big(s(t)\big) \cdot s'(t)$$

$$f''(t) = g'' \cdot s'^2 + g' \cdot s''$$

Это почти то, что нам нужно, но мешает $s'' = |f'|'$.
Домножим векторно на $f' = g's'$:

$$f'' \times f' = (g''s'^2) \times (g's') + \underbrace{(g's'') \times (g's')}_{=s''\cdot s'\cdot(g'\times g')=0}$$

$s'$ — скалярная функция, её можно вынести за скобки:

$$f'' \times f' = s'^3 \cdot (g'' \times g')$$

$$|f'' \times f'| = |s'|^3 \cdot \underbrace{|g''|}_{k} \cdot \underbrace{|g'|}_{1} \cdot \underbrace{\sin(\widehat{g'', g'})}_{1}$$

$$|f'' \times f'| = |f'|^3 \cdot k$$

$$\boxed{K = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}}$$

## 12. Вычисление кривизны в явном виде и в полярных координатах

**Примеры** (общие формулы для разных способов задания кривой).

1. Кривая задана на плоскости, в явном виде: $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r} = \big(t,\ f(t),\ 0\big)$$

$$\vec{r'} = (1,\ f',\ 0), \qquad \vec{r''} = (0,\ f'',\ 0), \qquad r' \times r'' = (0,\ 0,\ f'')$$

$$\boxed{k = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}}$$

2. В полярных координатах: $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{f}(t) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0), \qquad f' = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi,\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi,\ 0)$$

$$|f'| = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

**Напоминание.** $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + f'g''$

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)}g + \ln^1 f^{(n-1)}g' + \ln^2 f^{(n-2)}g'' + \ldots$$

$$f'' = (r''\cos\varphi - 2r'\cos\varphi - r\cos\varphi,\ r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\cos\varphi,\ 0)$$

Векторно умножаем два вектора с нулевой третьей координатой, получаем вектор с единственной третьей ненулевой координатой:

$$f' \times f'' = \Big(0,\ 0,$$
$$(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)(r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi) - (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)(r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi)\Big)$$

$$|f' \times f''| =$$
$$= |\cancel{r'r''\cos\varphi\sin\varphi} + 2r'^2\cos^2\varphi - \cancel{r'r\cos\varphi\sin\varphi} - r''r\sin^2\varphi - \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} +$$
$$+ r^2\sin^2\varphi - \cancel{r''r'\cos\varphi\sin\varphi} + 2r'^2\sin^2\varphi + \cancel{r'r\sin\varphi\cos\varphi} - rr''\cos^2\varphi + \cancel{2rr'\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\cos\varphi| =$$
$$= 2r'^2 - r''r + r^2$$

$$\boxed{k = \frac{r''r - 2r'^2 - r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}}$$

3. $f(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$

$$f' = (x', y', z'), \qquad f'' = (x'', y'', z''), \qquad f'' \times f' = (y''z' - z''y'; z''x' - x''z'; x''y' - y''x')$$

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{(y''z' - z''y')^2 + (z''x' - x''z')^2 + (x''y' - y''x')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}$$

## 13. Вычисление кручения

**Вычисление кручения в натуральной параметризации.**

$$g' = v, \qquad g'' = v' = k\vec{n}, \qquad g''' = k'n + kn' \xlongequal[\text{III Френе}]{} k'n + k(-k\vec{v} + \text{æ}\vec{b})$$

$$(g', g'', g''') = (\vec{v}, k\vec{n}, \cancel{k'\vec{n}} - k^2\vec{v} + k\text{æ}\vec{b}) = k^2\text{æ}\underbrace{(v, n, b)}_{=1}$$

$$\boxed{\text{æ} = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}}$$

$$v = \vec{f}(t) = \vec{g}(s) = g\Big(s(t)\Big)$$
$$f' = g' \cdot s'$$
$$f'' = g''s'^2 + g's''$$
$$f''' = g''' \cdot s'^3 + g''2s' \cdot s'' + g''s's'' + g's''' = g'''s'^3 + 3g''s''s' + g's'''$$

Избавимся от $s''$ и $s'''$:

**Напоминание.** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} + \lambda\vec{c}, \vec{c})$

$$(f', f'', f''') = \Big(\vec{g}'s',\ g''s'^2 + \cancel{\vec{g}'s''},\ g'''s'^3 + \cancel{3g''s''s'} + \cancel{g's'''}\Big) = \underbrace{|f'|}_{s'}{}^6(g', g'', g''') = |f'|^6k^2\text{æ}$$

$$\text{æ} = \frac{(f', f'', f''')}{k^2|f'|^6}$$

**Напоминание.**

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

$$\boxed{æ = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}}$$

**Замечание.** Кручение определено только для бирегулярной кривой ( $\iff$ $k \neq 0$)

## 14. Натуральные уравнения кривой

**Теорема 8.** Кривая задаётся кривизной и кручением (с точностью до положения в пространстве)

**Доказательство.** Пусть есть две кривые, у которых $k_1 = k_2$ и $æ_1 = æ_2$
Рассмотрим $\overrightarrow{g_1}(s)$, $\overrightarrow{g_2}(s)$ – натуральные параметризации
Совместим так, чтобы

$$\begin{cases} v_1(s_0) = v_2(s_0) \\ n_1(s_0) = n_2(s_0) \\ b_1(s_0) = b_2(s_0) \end{cases}$$

Это и означает "с точностью до положения в пространстве"
Рассмотрим функцию

$$f(s) = \overrightarrow{v_1}(s) \cdot \overrightarrow{v_2}(s) + \overrightarrow{n_1}(s) \cdot \overrightarrow{n_2}(s) + \overrightarrow{b_1}(s) \cdot \overrightarrow{b_2}(s)$$

$f(s_0) = 3$ (скалярное произведение соотв. функций равно 1)
При этом, $f(s) \leq 3$ (по тем же соображениям)
$f(s) = 3 \iff v_1 = v_2,\ n_1 = n_2,\ b_1 = b_2$ в точке $s$
Хотим доказать, что $f(s) = 3$ везде
Возьмём производную:

$$f'(s) = v_1'v_2 + v_1v_2' + n_1'n_2 + n_1n_2' + b_1'b_2 + b_1b_2'$$

Распишем по формуле Френе:

$$f'(s) = k_1n_1v_2 + k_2v_1n_2 - k_1v_1n_2 + æ_1b_1n_2 - k_2n_1v_2 + æ_2n_1b_2 - æ_1n_1b_2 - æ_2b_1n_2 \underset{\substack{k_1=k_2 \\ æ_1=æ_2}}{=} 0$$

□

# Часть II
# Дифференциальная геометрия поверхностей

## 15. Касательная плоскость к поверхности

**Задание кривой на поверхности.** Любая точка кривой лежит на поверхности
Тогда мы можем применить к ней $r^{-1}$ и "спустить" её на $D$
Получим координаты $u(t), v(t)$
Они называются внутренними координатами кривой на поверхности

**Определение 14.** Пусть $u(t), v(t)$ – внутренние координаты кривой на поверхности
$\vec{r}\big(u(t), v(t)\big)$ – кривая на поверхности
$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=t_0}$ – касательный вектор

**Определение 15.** Касательная плоскость к поверхности – множество касательных векторов в данной точке

**Утверждение 5.** Это плоскость с базисом $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$

**Доказательство.** Распишем и всё получится:
Касательный вектор — $\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\big|_{t=t_0}$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$$

Это ЛК $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$
Верно ли, что $\alpha r_u + \beta r_v$ является касательным вектором?
Верно, для кривой

$$\begin{cases} u = \alpha(t+t_0) \\ v = \beta(t+t_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t = \alpha \\ v_t = \beta \end{cases}$$

□

## 16. Длина кривой на поверхности. Первая квадратичная форма

Пусть кривая задана регулярной параметризацией:

$$r(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big), \qquad u = u(t), \quad v = v(t)$$

$$r'_t = (x'_u u' + x'_v v',\ y'_u u' + y'_v v',\ z'_u u' + z'_v v') = r'_u u' + r'_v v'$$

$$|r'_t| = \sqrt{(r'_u u' + r'_v v')\cdot(f'_u u' + f'_v v')} = \sqrt{(r'_u)^2(u')^2 + 2r'_u r'_v u'v' + (r'_u)^2(v')^2}$$

**Определение 16.** Обозначим:

$$\begin{cases} E \coloneqq |r_u|^2 = (r_u, r_u) \\ F \coloneqq (r_u, r_v) \\ G \coloneqq |r_v|^2 = (r_v, r_v) \end{cases}$$

Эти коэффициенты зависят от поверхности, а не от кривой.

Найдём длину кривой:

$$l = \int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}\right| \mathrm{d}\,t = \int_a^b |r_u u_t + r_v v_t|\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \sqrt{(r_u u_t + r_v v_t,\ r_u u_t + r_v v_t)}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \int_a^b \sqrt{(r_u, r_u)u_t^2 + 2(r_u, r_v)u_t v_t + (r_v, r_v)v_t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \sqrt{Eu_t^2 + 2Fu_t v_t + Gv_t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

**Определение 17.** I форма:

$$\mathrm{I}(u', v') = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

## 17. Изометрия поверхностей. Внутренняя геометрия

**Определение 18.** Даны поверхности:

$$r_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3, \qquad r_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$$

$\Phi : D_1 \to D_2$ называется изометрией, если длина кривой на $r_1(D_1)$ равна длине кривой на $r_2\big(\Phi(D_1)\big)$.

**Теорема 9.** Поверхности изометричны **тогда и только тогда**, когда в некоторой параметризации у них совпадают коэффициенты $E, F, G$.

**Доказательство.**

- $\Longleftarrow$ :

  Формула длины кривой:

$$l = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,\mathrm{d}\,t$$

Они должны совпасть.

$$\Phi := r_2 \circ r_1^{-1}$$

- $\implies$:
  Возьмём кривую

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t_0 \end{cases}$$

Можно НУО считать, что поверхности параметризованы одинаково (иначе перепараметризуем).

$$l_1 = \int_a^b \sqrt{E_1}\, \mathrm{d}\, t = \sqrt{E_1}(b-a)$$

$$l_2 = \int_a^b \sqrt{E_2}\, \mathrm{d}\, t = \sqrt{E_2}(b-a)$$

По предположению, они равны
Тем самым $E_1 = E_2$
Аналогично, взяв

$$\begin{cases} u(t) = t_0 \\ v(t) = t \end{cases}$$

получаем $G_1 = G_2$
Взяв

$$\begin{cases} u(t) = t + t_0 \\ v(t) = t + t_1 \end{cases}$$

получаем

$$\int_a^b \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1}\, \mathrm{d}\, t = \int_a^b \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2}\, \mathrm{d}\, t \quad \implies F_1 = F_2$$

$\square$

**Замечание.** То, что поверхности изометричны, **не** означает, что первые квадратичные формы совпадут. Это лишь значит, что **сущетсвует** параметризация, в которой они совпали

**Определение 19.** Говорят, что характеритика поверхности относится к внутренней геометрии поверхности, если он не меняется при изометрии.

## 18. Контрпример Шварца

**Пример** (сапог Шварца). Есть цилиндр
Его можно развернуть в прямоугольник и посчитать площадь:

$$S = 2\pi RH$$

Разобъём на треугольники:

1. Порежем на слои
2. В каждый слой впишем правильный $n$-уголькик
3. Построим антипризму
   Антипризма:
   (a) Берём в верхнем и нижнем основании правильный $n$-угольник
   (b) Поворачиваем одно из оснований так, чтобы напротив вершины оказалась середина стороны
   (c) Соединим вершины
4. Считаем, что высоту мы разбили на $k$ частей, каждая часть представляет собой $n$-угольную антипризму

**Вопрос 1.** Сколько в одном слое треугольников?

**Ответ.** $2n$

Всего $2kn$ треугольников

5. Посчитаем площадь каждого треугольника:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}lh$$

Найдём $l$:
Есть круг радиуса $R$, мы в него вписали правильный $n$-угольник, хотим посчитать его сторону. Угол в центре будет равен $\frac{2\pi}{n}$. Применим теорему косинусов:

$$l^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\frac{2\pi}{n}$$

$$l = R\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

Найдём $h$:

**Замечание.** Треугольник немножко наклоняется. Направление его высоты не совпадает с направлением образующей цилиндра. $h \neq \frac{H}{k}$

$$a = R - R\cos\frac{\pi}{n}$$

$$h = \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2\cdot 4\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$

$$S \stackrel{?}{=} \lim_{\pi n\to\infty} 2kn\cdot\frac{1}{2}\cdot \underbrace{2R\sin\frac{\pi}{n}}_{\sim\pi/n}\cdot\sqrt{\frac{H^2}{k^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} = 2\pi RH\lim\sqrt{1+\frac{k^2}{H^2}\cdot 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$

Это равно $2\pi RH$ только тогда, когда

$$\frac{k^2}{H^2}\cdot 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n} \xrightarrow{?} 0$$

$$\frac{4\pi^4R^2}{4H^2}\cdot\frac{k^2}{n^4} \xrightarrow{?} 0$$

То есть, $k \stackrel{?}{=} o(n^2)$
Значит, разбивая на много низких, крупно нарезанных антипризм, получаем неправильную площадь

## 19. Площадь поверхности. Модуль вектора $r_u \times r_v$

**Определение 20.** Разбиваем поверхность на многоугольники и проецируем их на свои касательные плоскости. Складываем площади и переходим к пределу.

**Теорема 10.**

$$S = \iint\limits_D |r_u \times r_v|\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$$

**Без доказательства.** На самом деле, это определение двойного интеграла. □

**Теорема 11.**

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}\, u\, \mathrm{d}\, v$$

**Доказательство.** Следует из леммы: $\square$

**Лемма 2.** $|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}$

**Доказательство.**

$$(r_u \times r_v,\ r_u \times r_v) = |r_u \times r_v|^2 \overset{?}{=} EG - F^2$$

$$r_u = (x_u, y_u, z_u), \qquad r_v = (x_v, y_v, z_v)$$

$$r_u \times r_v = (y_u z_v - z_u y_v,\ z_u x_v - x_u z_v,\ x_u y_v - y_u x_v)$$

$$(r_u \times r_v)^2 = (y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2$$

$$EG - F^2 = (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 =$$
$$= \underbrace{\cancel{x_u^2 x_v^2} + \underline{x_u^2 y_v^2} + \ldots + z_u^2 z_v^2}_{9\text{ слагаемых}} - \cancel{x_u^2 x_v^2} - \cancel{y_u^2 y_v^2} - \cancel{z_u^2 z_v^2} - \underline{2x_1 x_v y_u y_v} - 2x_u x_v z_u z_v - 2y_u y_v z_u z_v$$

Подчёркнутые (вместе с ещё одним) запаковываются в квадрат разности. Остальные – аналогично. $\square$

## 20. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма

Кривая задана внутренним уравнением в натуральной параметризации:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}\Big(u(s), v(s)\Big)$$

$$\vec{k} = \vec{r}''(s) \quad (k = |\vec{k}|)$$

$$r'_s = r'_u u'_s + r'_v v'_s$$

$$r''(s) = r_{uu} u'^2 + 2r_{uv} u'v' + r_{vv} v'^2 + \underline{r_u u'' + r_v v''}$$

Хотим избавиться от подчёркнутых слагаемых. Домножим равенство на вектор нормали $(n \perp r_u,\ n \perp r_v)$

$$k \cos\theta = \vec{r}''(s) \cdot \vec{n} = \underbrace{(r_{uu}, n)}_{L} \cdot u'^2 + 2\underbrace{(r_{uv}, n)}_{M} \cdot u'v' + \underbrace{(r_{vv}, n)}_{N} \cdot v'^2$$

где $\theta$ – угол между вектором кривизны кривой и вектором нормали к поверхности
Получили проекцию кривизны на вектор нормали
$L, M, N$ зависят только от поверхности (не от кривой)
Получаем следующую формулу:

**Теорема 12.** Если кривая в натуральной параметризации, то

$$k \cos\theta = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$$

**Определение 21.** $L, M, N$ – коэффициенты второй квадратичной формы

**Определение 22.** $k \cos\theta$ называется нормальной кривизной поверхности в направлении $(u', v')$

## 21. Теорема Мёнье. Кривизна кривой на поверхности в произвольной параметризации

**Теорема 13.**

$$k\cos\theta = \frac{\mathrm{II}(u', v')}{\mathrm{I}(u', v')} = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$$

**Доказательство.** Будем действовать в натуральной параметризациии
Пусть $s = \varphi(t)$

$$\varphi'(t) = |r'_t| = |r_u u'_t + r_v v'_t|$$

$$u'_t = u'_s s'_t = u'_s \cdot |r'_t|$$

$$u'_s = \frac{u'_t}{|r'_t|}, \qquad v'_s = \frac{v'_t}{|r'_t|}$$

$$k\cos\theta = L\frac{u'^2_t}{|r'_t|^2} + 2M\frac{u'_t v'_t}{|r'_t|^2} + N\frac{v'_t}{|r'_t|^2} = \frac{\mathrm{II}(u'_t, v'_t)}{|r'_t|^2}$$

Мы знаем, что $|r'_t|^2 = \mathrm{I}(u'_t, v'_t)$, так как

$$\int |r'_t|\,\mathrm{d}\,t \text{ – длина кривой } = \int \sqrt{Eu'^2_t + 2Fu'_t v'_t + Gv'^2_t}\,\mathrm{d}\,t$$

□

**Определение 23.** Сечение поверхности плоскостью, содержащей нормаль поверхности в заданной точке, образует кривую, которая называется *нормальным сеченением.*

**Определение 24.** Пусть $l$ — прямая, лежащая в касательной плоскости.
Сечение плоскостью, содержащей нормаль и прямую $l$ образует некую кривую на поверхности.
Её кривизна $k_n(l)$ — *нормальная кривизна* поверхности по направлению $l$.

**Определение 25.** Мимнимальная и максимальная нормальные кривизны на поверхности называются *главными кривизнами.*

**Обозначение.** $k_1, k_2$

**Определение 26.** Направления, по которым эти кривизны достигаются, называются *главными направлениями.*

**Определение 27.** *Гауссова кривизна* — $K = k_1 k_2$.

**Определение 28.** *Средняя кривизна*:

$$\frac{k_1 + k_2}{2}$$

**Теорема 14** (Мёнье). Если $\theta$ — угол между нормалью к кривой и нормалью к поверхности, то

$$k_n(l) = k\cos\theta$$

**Доказательство.** Пусть $\vec{n}$ — нормаль к кривой, $\vec{m}$ — нормаль к поверхности.
По I формуле Френе $\dot{v} = k\vec{n}$.

$$\mathrm{II}(v, v) = \dot{v} \cdot \vec{m} = \ddot{r} \cdot \vec{m} = k\vec{n}\vec{m} = k\cos\theta$$

$$\mathrm{I}(v, v) = 1$$

□

## 22. Соприкасающийся параболоид. Типы точек

В этом параграфе рассмариваем локальное поведение поверхности в окрестности какой-то точки.
Рассмотрим векторы $r, r_u, r_v, r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}$.
Введём точку $M = (0, 0, 0)$.

Касательная плокость — $XOY$.

$$\vec{n} \parallel OZ$$

По теореме о неявной функции поверхность в окрестности $M$ задаётся $z = r(x, y)$.
Разложим по Тейлору:

$$z = r(0,0) + r_x(0,0)x + r_y(0,0)y + \frac{r_{xx}(0,0)}{2}x^2 + r_{xy}(0,0)xy + \frac{r_{yy}(0,0)}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$$

$$r(0,0) = 0, \qquad r_x(0,0) = r_y(0,0) = 0$$

**Определение 29.**

$$z = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2$$

$$A = r_{xx}(0,0), \qquad B = r_{xy}(0,0), \qquad C = r_{yy}(0,0)$$

Это называется соприкасающийся параболоид

Можем сделать поворот $XOY$ и тогда:

$$z = \widetilde{A}\widetilde{x}^2 + \widetilde{C}\widetilde{y}^2$$

$$2\widetilde{A} = r_{xx}(0,0), \qquad 2\widetilde{C} = r_{yy}(0,0)$$

**Определение 30** (классификация).

- $\widetilde{A} \cdot \widetilde{C} > 0$
  Эллиптический параболоид
  Эллиптическая точка
- $\widetilde{A} \cdot \widetilde{C} < 0$
  Гиперболический параболоид
  Гиперболическая точка
- $\widetilde{A} \cdot \widetilde{C} = 0$
  - Параболический цилиндр
    Параболическая точка
  - Плоскость
    Точка уплощения
- $\widetilde{A} = \widetilde{C}$
  Параболоид вращения
  Точка округления

## 23. Совпадение характеристик у поверхности и соприкасающегося параболода

**Теорема 15.** У поверхности и соприкасающегося параболоида одинаковые $E, F, G, L, M, N$ в точке

**Доказательство.** $z = f(x, y)$ в окрестности точки

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

$$r(u, v) = \Big(u, v, f(u, v)\Big)$$

$$r_u = (1, 0, f_u), \qquad r_v = (0, 1, f_v), \qquad r_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \qquad \dots$$

Это верно как для соприкасающегося параболоида, так и для поверхности

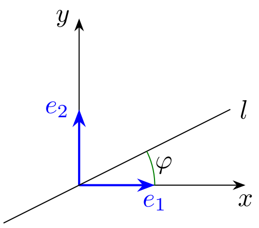
$$\vec{n} = (0,0,1) \text{ для обеих поверхностей}$$

□

## 24. Теорема Эйлера

**Теорема 16** (Эйлера). Если $\theta$ — угол между $l$ и главным направлением $e_1$, то

$$k_n(l) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$




**Доказательство.** Выберем такую систему координат, что $k_1, k_2$ — кривизны в направлениях $OX$ и $OY$ соостветственно. Тогда $l$ задаётся как

$$\begin{cases} x(t) = t\cos\theta \\ y(t) = t\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \cos\theta \\ y' = \sin\theta \end{cases}$$

> **NB.** $\theta$ фиксированный.

$$k_n(l) \xlongequal[\text{т. Мёнье}]{} k\cos\theta \xlongequal[\text{т. 13}]{} \frac{\mathrm{II}(x',y')}{\mathrm{I}(x',y')} = \frac{\mathrm{II}(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{I}(\cos\theta,\sin\theta)} = \frac{L\cos^2\theta + 2M\cos\theta\sin\theta + N\sin^2\theta}{E\cos^2\theta + 2F\cos\theta\sin\theta + G\sin^2\theta}$$

Заменим поверхность на соприкасающийся параболоид:

$$k_n(l) = \frac{2A\cos^2\theta + 2C\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 2A\cos^2\theta + 2C\sin^2\theta$$

При разных значениях $\theta$:

- $\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2A = k_1$
- $\theta = \dfrac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2C = k_2$

Докажем, что $k_1, k_2$ — главные кривизны:
Для этого исследуем $k_n(l)$ на минимум и максимум:

$$k_n(l) = k_1\cos^2\theta + k_2(1-\cos^2\theta) = (k_1 - k_2)\cos^2\theta + k_2$$

- Если $k_1 \geq k_2$:
  - минимум при $\cos^2\theta = 0, \quad k_n = k_2$;
  - максимум при $\cos^2\theta = 1, \quad k_n = k_1$.
- Если $k_1 < k_2$, то максимум и минимум меняются местами.

□

## 25. Следствия из теоремы Эйлера

**Следствие.** Главные направления перпендикулярны

**Следствие.** Направления $\theta$ и $\pi - \theta$ имеют одинаковые нормальные кривизны.

## 26. Вычисление главных кривизн. Формула для гауссовой кривизны

Пусть $k := k_n(l)$ для некоторого $l$
Введём замену $x = \dfrac{\xi}{\mu}$ (см. следующий вопрос):

$$k = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}$$

$$Lx^2 + 2Mx + N = k(Ex^2 + 2Fx + G)$$

При фиксированном $k$ это — квадратное уравнение:

$$(L - kE)x^2 + 2(M - kF)x + (N - kG) = 0$$

- Если $k$ — не главная кривизна, то у уравнения 2 решения.
- Если $k$ — главная кривизна, то у уравнения 1 решение.
- Если $k$ не кривизна, то у уравнения нет решений.

Мы ищем главные кривизны, так что ${}^{D}\!/_{4} = 0$, то есть

$$(M - kF)^2 - (L - kE)(N - kG) = 0$$

$$k^2(F^2 - EG) - k(2MF - LG - EN) + (M^2 - LN) = 0$$

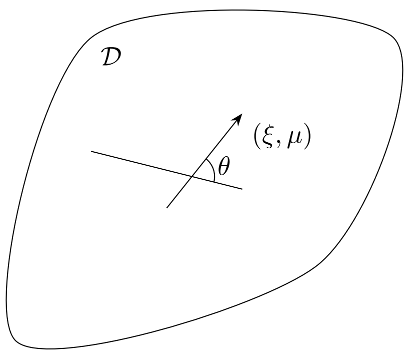
$k_1, k_2$ — корни соответствующего уравнения

$$K = k_1 k_2 = \frac{M^2 - LN}{F^2 - EG} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}}$$

$$H = \frac{2MF - LG - EN}{2(F^2 - EG)}$$

## 27. Вычисление главных направлений

Выберем направление $(\xi, \mu)$ в области $\mathcal{D}$:




Введём замену $x := \dfrac{\xi}{\mu}$

$$k_n(\xi, \mu) \xlongequal[\text{т. Мёнье}]{} \frac{\mathrm{II}(\xi, \mu)}{\mathrm{I}(\xi, \mu)} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\mu + N\mu^2}{E\xi^2 + 2F\xi\mu + G\mu^2} = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}$$

Хотим вычислить главные направления, то есть понять, при каких $x$ параметры $\xi, \mu$ задают главные направления, т. к. $x = \operatorname{tg}\theta$. Найдём максимум и минимум:

$$\big(k_n(x)\big)' = \frac{(2Lx+2M)(Ex^2+2Fx+G)-(2Ex+2F)(Lx^2+2Mx+N)}{(Ex^2+2Fx+G)^2} = 0$$

$$Ex^2+2Fx+G>0, \qquad \text{т. к. } \frac{D}{4} = F^2 - EG < 0, \qquad \text{т. к. } \sqrt{EG-F^2} = |r'_u \times r'_v|$$

Значит, нас интересует

$$(Lx+M)(Ex^2+2Fx+G)-(Ex+F)(Lx^2+2Mx+N)=0$$

$$2LFx^2+LGx+MEx^2+2MFx+MG-2MEx^2-NEx-FLx^2-2FMx-FN=0$$

$$(FL-ME)x^2+(LG-NE)x+(MG-FN)=0$$

Сделаем обратную замену и домножим на $\mu^2$:

$$(FL-ME)\xi^2+(LG-NE)\xi\mu+(MG-FN)\mu^2=0$$

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & -\xi\mu & \mu^2 \\ G & F & E \\ N & M & L \end{vmatrix} = 0$$

## 28. Лемма о смешанных произведениях

**Лемма 3** (о смешанных произведениях).

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\cdot(\vec{l},\vec{m},\vec{n}) = \begin{vmatrix} u\cdot l & u\cdot m & u\cdot n \\ v\cdot l & v\cdot m & v\cdot n \\ w\cdot l & w\cdot m & w\cdot n \end{vmatrix}$$

(в правой части стоят скалярные произведения)

**Доказательство.**

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\cdot(\vec{l},\vec{m},\vec{n}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} u\cdot l & u\cdot m & u\cdot n \\ v\cdot l & v\cdot m & v\cdot n \\ w\cdot l & w\cdot m & w\cdot n \end{vmatrix}$$

Второй определитель транспонирован, т. к. он при этом не меняется. □

## 29. Блистательная теорема Гаусса

**Теорема 17** (Egregium). Гауссова кривизна зависит только от $E, F, G$ и их производных.

**Доказательство.** Достаточно доказать, что $LN - M^2$ зависит только от I, т. к.

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u}\times\vec{r_v}}{|\vec{r_u}\times\vec{r_v}|}$$

По лемме 2, $|r_u \times r_v| = EG - F^2$

$$L \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{r_{uu}}\cdot\vec{n} = \frac{(r_{uu}, r_u, r_v)}{EG-F^2}$$

Аналогично,

$$M = \frac{(r_{uv}, r_u, r_v)}{EG-F^2}, \qquad N = \frac{(r_{vv}, r_u, r_v)}{EG-F^2}$$

$$LN - M^2 = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \cdot \left( (r_{uu}, r_u, r_v) \cdot (r_{vv}, r_u, r_v) - (r_{uv}, r_u, r_v)^2 \right) \underset{\text{лемма}}{=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} r_{uu}r_{vv} & r_{uu}r_u & r_{uu}r_v \\ r_u r_{vv} & r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_{vv} & r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}r_{uv} & r_{uv}r_u & r_{uv}r_v \\ r_u r_{uv} & r_u r_u & r_u r_v \\ r_v r_{uv} & r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{uu}r_{vv} & r_{uu}r_u & r_{uu}r_v \\ . & E & F \\ . & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & E & F \\ . & F & G \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$E_u = (r_u \cdot r_u)_u = 2r_u r_{uu}$$

$$G_v = (r_v \cdot r_v)_v = 2r_v r_{vv}$$

$$E_v = 2r_u r_{uv}$$

$$G_u = 2r_v r_{vu}$$

$$F_u = (r_u \cdot r_v)_u = r_{uu}r_v + r_u + r_{uv}$$

$$r_v r_{uu} = F_u - r_u r_{uv} = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$F_v = r_{uv}r_v + r_u r_{vv}$$

$$r_u r_{vv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$(1) = \begin{vmatrix} r_{uu}r_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} =$$

$r_{uu}r_{vv}$ и $r_{uv}^2$ **не** вычисляются по-отдельности. Распишем определители по первой строке:

$$= r_{uu} \cdot r_{uv} \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \dots - r_{uv}^2 \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} + \dots = \underline{(r_{uu}r_{vv} - r_{uv}^2)} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \dots$$

Пропущенные члены зависят только от II. Осталось доказать, что скобка зависит только от II:

$$F_{uv} = r_{uuv}r_v + \underline{r_{uu}r_{vv}} + \underline{r_{uv}r_{uv}} + r_u r_{uvv}$$

$$G_{uu} = 2r_{uv}r_{uv} + 2r_v r_{uuv}$$

$$E_{vv} = 2r_{uv}r_{uv} + 2r_u r_{uvv}$$

$$F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} - \frac{1}{2}E_{vv} = r_{uu}r_{vv} - r_{uv}r_{uv}$$

□

## 30. Деривационные формулы

Разложим вторые производные по базису из первых и $\vec{n}$:

$$\boxed{r_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_v + L\vec{n}}$$

$$\boxed{r_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_v + M\vec{n}}$$

$$\boxed{r_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + N\vec{n}}$$

Коэффициенты при $\vec{n}$ находятся скалярыным умножением на $\vec{n}$, например,

$$\underbrace{r_{uu} \cdot \vec{n}}_{L} = \underbrace{\Gamma_{11}^1 \vec{r}_u \cdot \vec{n}}_{0} + \underbrace{\Gamma_{11}^2 \vec{r}_v \cdot \vec{n}}_{0} + A \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{n}}_{1} \quad \Longrightarrow \; A = L$$

$\Gamma_{ij}^k$ — функции $u$ и $v$ . Они называются *символами Кристоффеля.*

## 31. Коэффициенты в разложении $n_u, n_v$

Разложим производные $\vec{n}$ по базису из производных $\vec{r}$ и $\vec{n}$:
Производная единичного вектора перпендикулярна самому вектору, так что $n_u, n_v$ не зависят от $\vec{n}$:

$$\boxed{n_u = ar_u + br_v}, \qquad \boxed{n_v = cr_u + dr_v}$$

Домножим первое уравнение на $r_u$ и $r_v$:

$$\begin{cases} n_u \cdot r_u = ar_u^2 + br_u r_v = aE + bF \\ n_u \cdot r_v = ar_u r_v + br_v^2 = aF + bG \end{cases}$$

Решим методом Крамера:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} n_u r_u & F \\ n_u r_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}, \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} E & n_u r_u \\ F & n_u r_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} n_v \cdot r_u = cE + dF \\ n_v \cdot r_v = cF + dG \end{cases}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} n_v r_u & F \\ n_v r_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}, \qquad d = \frac{\begin{vmatrix} E & n_v r_u \\ F & n_v r_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

## 32. Модуль $n_u \times n_v$

**Теорема 18.**

$$|n_u \times n_v| = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}$$

**Доказательство.**

$$n_u = Ar_u + Br_v$$

$$n_v = Cr_u + Dr_v$$

$$n_u \times n_v = (Ar_u + Br_v) \times (Cr_u + Dr_v) = r_u \times r_v (AD - BC)$$

$$|n_u \times n_v| = \underbrace{|r_u \times r_v|}_{\sqrt{EG-F^2}} \cdot |AD - BC|$$

$$0 \xlongequal[\text{касательный вектор на нормальный}]{} (\vec{r}_u \cdot \vec{n})_u = r_{uu} \cdot n + r_u \cdot n_u \xlongequal{\text{def } L} L + r_u \cdot n_u$$

Аналогично,

$$0 = (r_v \cdot n)_u \xlongequal{\text{def } M} M + r_v \cdot n_u$$

$$\implies \begin{cases} AE + DF = n_u \cdot r_u = -L \\ AF + BG = n_u \cdot r_v = -M \end{cases}$$

$$A = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, \qquad B = \frac{FL - EM}{EG - F^2}$$

Аналогично найдём $C$ и $D$:

$$\begin{cases} CE + DF = n_v \cdot r_u = -M \\ CF + DG = n_v \cdot r_v = -N \end{cases}$$

$$C = \frac{FN - GM}{EG - F^2}, \qquad D = \frac{FM - EN}{EG - F^2}$$

$$AD - BC = \frac{1}{(EG - F^2)^2}\Big((FM - GL)(FM - FN) - (FL - EM)(FN - GM)\Big) =$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^2}\Big(F^2M^2 - \cancel{EMFN} - \cancel{GFLM} + GLEN - F^2LN + \cancel{EGLM} + \cancel{EFMN} - EGM^2\Big) =$$

$$= \frac{(EG - F^2)(LN - M^2)}{(EG - F^2)^2}$$

□

# 33. Уравнения Петерсона—Майнарди—Кодацци

Вспомним, как мы вводили символы Кристоффеля:

$$r_{uu} = \Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + Ln$$

$$r_{uv} = \Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} + Mn$$

$$r_{uuv} = \Gamma^1_{11v} v r_u + \Gamma^1_{11} r_{uv} + \Gamma^2_{11v} r_v + \Gamma^2_{11} r_{vv} + L_v n + L n_v$$
$$\shortparallel$$
$$r_{uvu} = \Gamma^1_{12u} r_u + \Gamma^1_{12} r_{uu} + \Gamma^2_{12u} r_v + \Gamma^2_{12} r_{uv} + M_u n + M n_u$$

Домножим последние два выражения скалярно на $n$ и приравняем:

$$\Gamma^1_{11} \cdot M + \Gamma^2_{11} \cdot N + L_v = \Gamma^1_{12} \cdot L + \Gamma^2_{12} M + M_u$$

Обычно это записывается как

$$\boxed{L_v - M_u = \Gamma^1_{12} L + \Gamma^2_{12} M - \Gamma^1_{11} M - \Gamma^2_{11} N}$$

Аналогично,

$$r_{uv} = \Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} r_v + M_n, \qquad r_{vv} = \Gamma^1_{22} r_u + \Gamma^2_{22} r_v + M_n$$

Дифференцируем первое по $v$, второе — по $u$, домножаем оба на $n$, приравниваем:

$$\Gamma^1_{12} M + \Gamma^2_{12} N + M_v = \Gamma^1_{22} L + \Gamma^2_{22} M + N_u$$

$$\boxed{M_v - N_u = \Gamma^1_{22} L + \Gamma^2_{22} M - \Gamma^1_{12} M - \Gamma^2_{12} N}$$

# 34. Символы Кристоффеля относятся к внутренней геометрии

**Теорема 19.** $\Gamma^k_{ij}$ относятся к внутренней геометрии.

**Доказательство.**

$$r_{uu} = \Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + Ln \quad \Big| \cdot r_u \quad \Big| \cdot r_v$$

$$\begin{cases} r_{uu} \cdot r_v = \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F \\ r_{uu} \cdot r_v = \Gamma^1_{11} \cdot F + \Gamma^2_{11} \cdot G \end{cases}$$

$$E_u = (r_u \cdot r_u)_u = 2 r_{uu} \cdot r_u$$

$$F_u = (r_u \cdot r_v)_u = r_{uu} r_v + r_u r_{uv}$$

$$E_v = (r_u \cdot r_u)_v = 2 r_{uv} r_u$$

$$r_{uu} r_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}}$$

Остальные — аналогично. □

# 35. Геодезическая кривизна отностися к внутренней геометрии

Есть поверхность. На ней есть кривая. Есть вектор кривизны — $\overrightarrow{k} = k \cdot \overrightarrow{n}_1$ ($n_1$ — вектор нормали к кривой).

**Определение 31.** $k_g$ — проекция $\vec{k}$ на касательную плоскость.
Можно рассматривать вектор или скаляр.

**Утверждение 6.** $k^2 = k_n^2 + k_g^2$

**Доказательство.** $k_n = \text{Пр}_{n_2} k$, где $n_2$ — вектор нормали к поверхности.
Тогда утверждение получается по теореме Пифагора. □

**Теорема 20.** $k_g$ относится к внутренней геометрии.

**Доказательство.**

$$u = u(s), \qquad v = v(s)$$

$S$ — постоянный параметр

$$\vec{k} = \frac{\mathrm{d}^2\, r\big(u(s); v(s)\big)}{\mathrm{d}\, s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, s}(r_u \cdot u_s + r_v \cdot v_s) = \vec{r}_{uu} u_s^2 + 2\vec{r}_{uv} u_s v_v + \vec{r}_{vv}(v_s)^2 =$$
$$= (\Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + Ln)u_s^2 + 2(\Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + Mn)u_s v_s + (\Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + Nn)v_s^2$$

$$\vec{k}_g = \underbrace{(\Gamma_{11}^1 u_s^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_s v_s + \Gamma_{22}^1 v_s^2)}_{\text{зависит от I}} \cdot r_u + \underbrace{(\Gamma_{11}^2 u_s^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_s v_s + \Gamma_{22}^2 v_s^2)}_{\text{зависит от II}} r_v$$

□

## 36. Вычисление геодезической кривизны

**Теорема 21.**

$$k_g = \frac{(r''_{tt},\ r'_t,\ n)}{|r'_t|^3}$$

**Доказательство.** Пусть $r''_{tt} = r''_1 + r''_2$, где $r''_1 \perp n, \quad r''_2 \parallel n$

$$r' \perp n$$

$$r''_{tt} \times r'_t = \underbrace{r''_1 \times r'}_{\parallel n} + \underbrace{r''_2 \times r'}_{\perp n}$$

$$k = \frac{|r'' \times r'|}{|r'|^3}$$

$$k_g \stackrel{?}{=} \frac{\text{Пр}_{\vec{n}}(r'' \times r')}{|r'|^3} = \frac{(r'' \times r') \cdot n}{|n| \cdot |r'|^3} = \frac{(r'', r', n)}{|r'|^3}$$

□

**Утверждение 7.**

$$k_g = \frac{\text{Пр}_{\vec{n}}(r'' \times r')}{|r'|^3}$$

**Доказательство.** Кривизна — проекция $r''$ на вектор нормали к кривой, а значит,

$$r'' \times r' \parallel \vec{b} \quad \Longrightarrow (r'' \times r') \times r' \perp \vec{b}, \perp \vec{v} \quad \Longrightarrow \perp \vec{n}$$

$$\Longrightarrow \ \vec{k} = \frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}$$

$$|(r'' \times r') \times r'| = |r'' \times r'| \cdot |r'| \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{1,\ \text{т. к.}\, \alpha = \pi/2}$$

$$\Longrightarrow \ k = \frac{|r'' \times r'}{|r'|^3} = \frac{|(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}$$

$$\text{Пр}_{\text{кас. пл.}} \vec{k} = \frac{\Big((r_1'' + r_2'') \times r'\Big) \times r'}{|r'|^4} = \underbrace{\frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}}_{\perp n} + \underbrace{\frac{\overbrace{(r_2'' \times r')}^{\perp n} \times \overbrace{r'}^{\perp n}}{|r'|^4}}_{\| n} = \frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}$$

$$k_g = \left|\text{Пр}_{\text{кас. пл.}} \vec{k}\right| = \frac{|r_1'' \times r'| \cdot |r'|}{|r'^4|} = \frac{|r_1'' \times r'}{|r'|^3} = \frac{(r'', r', r)}{|r'|^3}$$

□

## 37. Равносильные определения геодезической

**Теорема 22.** Задана кривая на поверхности. Следующие определения геодезических линий равносильны:

1. $k_g = 0$;
2. вектор главной нормали к кривой параллелен нормали к поверхности;
3. соприкасающаяся плоскость кривой содержит нормаль к поверхности;
4. спрямляющая плоскость кривой является касательной плоскостью к поверхности;
5. $k$ — min для всех кривых в данном направлении;
6. локально кратчайшие линии.

**Доказательство.**

2.
$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$
$$k_n = \text{Пр}_m k, \qquad k = \text{Пр}_n k$$
При $n \parallel m$ выполнено $k_n = k \quad \Longleftrightarrow \quad k_g = 0$

3. Соприкасающаяся плоскость содержит нормаль к кривой.
4. Нормаль к кривой является нормалью к спрямляющей плоскости. Нормаль к поверхность является нормалью к касательной плоскости.
5. $k_n(l)$ зависит только от направления $l$.
6. Пока без доказательства.

□

## 38. Существование геодезических в данном направлении

**Утверждение 8** (из дифуров). $y'' = f(x, y, y'), \qquad f$ непр. по каждому аргументу
$\Longrightarrow$ решение существует и единственно (локально).

**Теорема 23.** В любой точке в любом направлении можно провести ровно одну геодезичсекую (локально).

**Доказательство.** Условие геодезичсекой — $k_g = 0$, т. е. $(r''_{tt}, r'_t, n) = 0$ — это дифур второго порядка. Надо доказать, что у него существует единственное решение.
Нам надо разрешить дифур относительно $r''$.

$$\begin{cases} u = t \\ v = \varphi(t) \end{cases}$$

Нужно доказать, что существует такая $\varphi$.

$$r'_t(u,v) = r_u \cdot u' + r_v \cdot v' = r_u + r_v\varphi'$$

$$r''_{tt} = r_{uu}u'^2 + 2r_{uv}u'v' + r_{vv}v'^2 + r_u u'' + r_v v'' = r_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2 + r_v\varphi''$$

$$0 = (r'', r', n) = (r_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2 + r_v\varphi'', r_u + r_v\varphi', n) =$$
$$= \underbrace{(r''_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2, r_u + r_v\varphi', n)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{(r_v\varphi'', r_u + r_v\varphi', n)}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{II} = \varphi'' \cdot (r_v, r_u + \cancel{r_v\varphi'}, n) = -\varphi'' \cdot (r_u, r_v, n)$$

(т. к. $(r_v, r_u + r_v\varphi', n) = (r_v, r_u, n) + \underbrace{(r_v, r_v\varphi', n)}_{0,\text{ т. к.} r_v \| r_v\varphi'})$

$$\boxed{\varphi'' = \frac{\mathrm{I}}{(r_u, r_v, n)}}$$

$(r_u, r_v, n) \neq 0$ (т. к. $r_u, r_v, n$ — базис, т. к. повехность регулярная).
Значит, у такого дифура есть ровно одно решение с начальными данными

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \varphi'(t_0) = \varphi_1 \end{cases}$$

□

# 39. Полугеодезическая параметризация

Полугеодезическая параметризация: $E = 1,\ F = 0,\ G > 0$

**Теорема 24.** Полугеодезическая параметризация всегда существует (локально).

**Доказательство.**

$$(r_u \cdot r_v)_u = \underbrace{r_{uu} \cdot r_v}_{0} + r_u \cdot r_{uv} = \cancel{f'' \cdot g} + f' \cdot r_{uv} = \underbrace{f' \cdot (f')_v}_{0} = 0$$

$r_{uu} = f'' \parallel$ вектору главной нормали для $f$ (т. к. $f$ в натуральной параметризации) $\parallel$ нормали к поверхности (т. к. $f$ — геодезическая)
$r_v$ — касательный вектор.
На первой лекции доказывали полезную лемму:

$$|f'| = 1 \implies \frac{\partial f'}{\partial v} \perp f'$$

$$F = r_u \cdot r_v = \mathrm{const}$$

Но при $u = 0 \quad F = 0$

$$\implies F = 0 \text{ всюду}$$

□

# 40. Геодезические как локально кратчайшие

**Доказательство.**
Рассмотрим полугеодезическую параметризацию.
Возьмём точки $A, B$ на геодезической.

Пусть $\big(u(t), v(t)\big)$ — внутренние координаты некоторой кривой, соединяющей $A$ и $B$. Её длина:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\underset{1}{E}u'^2 + 2\underset{0}{F}u'v' + Gv'^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_{t_0}^{t_1} u'^2 + \underset{>0}{G}v'^2\,\mathrm{d}\,t \geq \int_{t_0}^{t_1} u'^2\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} u'\,\mathrm{d}\,t = u(t_1) - u(t_0) = \text{ длина геодезической}$$

Мы доказали, что геодезическая — кратчайшая. В другую сторону — без доказательства. □