Оглавление

Глава 1

Определённый интеграл

1.1 Интегрирование по Риману

Теорема 1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
f монотонна $\implies f \in \mathcal{R}([a, b])$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, выберем $n : \dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$

Рассмотрим разбиение $P = \{x_k\}_{k=0}^{n}, \qquad x_k = a + \dfrac{b-a}{n}k, \quad 0 \le k \le n$

- Рассмотрим случай, когда f возрастает:

$$\forall x \in [x_{k-1}, x_k] \quad f(x_{k-1}) \le f(x) \le f(x_k) \implies \begin{cases} M_k = f(x_k) \\ m_k = f(x_{k-1}) \end{cases} \implies$$
$$\implies \omega_f([a_{k-1}, x_k]) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$x_k - x_{k-1} \overset{\text{def}}{=} \frac{b-a}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x_k) - f(x_{k-1}) \Big) = \frac{b-a}{n} \Big(f(x_n) - f(x_0) \Big) =$$
$$= \frac{b-a}{n} \Big(f(b) - f(a) \Big) \le \varepsilon \Big(f(b) - f(a) \Big)$$

- Если f убывает, то $g \coloneqq -f$ возрастает

□

1.2 Сумма Римана

Определение 1. $[a, b], \qquad P = \{x_k\}_{k=0}^{n}$
Оснащением этого разбиения называется множество $T = \{t_k\}_{k=1}^{n} : t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Определение 2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$S_f(P, T) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

S_f называется суммой Римана функции f по разбиению P и оснащению T

Утверждение 1. $U(f, P), \qquad L(f, P)$ – верхняя и нижняя *что-то*

$$L(f, P) \le S_f(P, T) \le U(f, P)$$

Доказательство. Рассмотрим M_k, m_k

$$m_k \le f(t_k) \le M_k, \qquad k = 1, ..., n$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

□

Определение 3. $[a, b], \qquad P = \{x_k\}_{k=0}^{n}$

$$d(P) := \max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$$

$d(P)$ называется диаметром разбиения

Определение 4. Будем говорить, что суммы Римана f стремятся к $A \in \mathbb{R}$ при измельчении рабиения ($S_f(P,T) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} A$), если $\forall \varepsilon\ \exists\, \delta > 0 : \forall P : d(P) < \delta,\ \forall\ T \quad |S_f(P,T) - A| < \varepsilon$

Теорема 2. $S_f(P,T) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} A \implies \begin{cases} f \in \mathcal{R}([a,b]) \\ A = \int_a^b f \end{cases}$

Доказательство.

- Возьмём $\forall \varepsilon > 0$
  Выберем $\delta > 0 : \forall P : d(P) < \delta,\ \forall T \quad |S_f(P,T) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$
  Возьмём $n : \frac{b-a}{n} < \delta, \quad x_k := a + \frac{b-a}{n} k$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$$

$$d(P) = \frac{b-a}{n} < \delta$$

  Положим $T' = \{t'_k\}_{k=1}^{n}, \quad T'' = \{t''_k\}_{k=1}^{n}$
  Расмотрим M_k, m_k
  Выберем t'_k и t''_k так, чтобы

$$\begin{cases} M_k < f(t''_k) + \frac{\varepsilon}{n} & (1.1) \\ m_k > f(t'_k) - \frac{\varepsilon}{n} & (1.2) \end{cases}$$

$$(1.1), (1.2) \implies f(t''_k) - f(t'_k) > M_k - m_k - \frac{2\varepsilon}{n} \qquad (1.3)$$

$$(1.3) \implies \sum_{k=1}^{n} \Big(f(t''_k) - f(t'_k)\Big)(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) - \frac{2\varepsilon}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1})}_{:=\Omega} - \frac{2\varepsilon}{n}(b-a)$$

$$S_f(P, T'') - S_f(P, T') > \Omega - \frac{2\varepsilon}{n}(b-a)$$

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |S_f(P,T'') - A| + |S_f(P,T') - A| \ge |S_f(P,T'') - S_f(P,T')|$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{n}(b-a) < 3\varepsilon$$

Значит, $f \in \mathcal{R}([a, b])$

- $M_k < f(t''_k) + \frac{\varepsilon}{n}$

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} f(t''_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n}(x_k - x_{k-1}) < S_f(P, T'') + \varepsilon \le U(f, P) + \varepsilon$$

$$S_f(P, T'') \in \Big(U(f, P), U(f, P) + \varepsilon\Big)$$

$$|S_f(P, T'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_f(P, T'') \in (A - \frac{\varepsilon}{2}, A + \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\left.\begin{aligned} &U(f, P) - L(f, P) < 3\varepsilon \\ &L(f, P) \le \underbrace{\int_a^b f}_{:=I} \le U(f, P) \end{aligned}\right\} \implies U(f, P) \in (I - 3\varepsilon, I + 3\varepsilon)$$

□

Теорема 3. $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies S_f(P, T) \xrightarrow[d(P) \to 0]{} \int_a^b f$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$

$$\exists\, P = \{x_k\}_{k=0}^{n} : U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon \tag{1.4}$$

Обозначим $I := \int_a^b f$

$$L(f, P) \le I \le U(f, P)$$

Обозначим $\sigma := \min\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1}), \qquad \delta_1 := \dfrac{\sigma}{4}$

$$|f(x)| \le M, \qquad x \in [a, b]$$

Определим $\delta_2 := \dfrac{\varepsilon}{Mn}, \qquad \delta := \min(\delta, \delta_1)$

Возьмём $P_0 : d(P_0) < \delta, \quad \forall T$

$$P_0 = \{y_l\}_{l=0}^{m}, \qquad T = \{t_l\}_{l=1}^{m}$$

$$P_1 := P \cup P_0$$

$$L(f, P) \le L(f, P_1) \le I \le U(f, P_1) \le U(f, P)$$

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon \tag{1.5}$$

$$d(P_0) < \delta < \frac{\delta}{4}$$

$$\Lambda = \{\lambda_q\}_{q=0}^{N}, \qquad \lambda_q := t_l$$

□