Оглавление

Глава 1

Производные и дифференцируемость

1.1 Свойства производной (продолжение)

Свойство (3).

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Доказательство.

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

□

Свойство (4).

Пусть $f(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$. Тогда

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_o) = -\frac{f'(x_o)}{f^2(x_o)}$$

Доказательство.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x_o+h)} - \frac{1}{(}f(x_o))}{h} = -\frac{1}{f(x_o)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x_o+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} = -\frac{f'(x_o)}{f^2(x_o)}$$

□

Свойство (5).

Пусть f, как в 4. Тогда

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x_o) = \frac{g'(x_o)f(x_o) - g(x_o)f'(x_o)'}{f^2(x_o)}$$

Доказательство. Используем 3. и 4. Тогда

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x_o) = \left(g \cdot \frac{1}{f}\right)'(x_o) = g'(x_o) \cdot \frac{1}{f(x_o)} + g(x_o) \cdot \left(\frac{1}{f}\right)'(x_o) =$$

$$\frac{g'(x_o)'}{f(x_o)} - \frac{g(x_o)f'(x_o)'}{f^2(x_o)} = \frac{g'(x_o)'f(x_o) - g(x_o)f'(x_o)}{f^2(x_o)}$$

□

Свойство (6. Производная суперпозиции функций).

$$\text{Пусть } f:(a,b)\to\mathbb{R},\quad f(x)\in(p,q)\qquad x\in(a,b),$$

$$g:(p,q)\to\mathbb{R},\quad x_o\in(a,b),\quad f(x_o):=y_o\in(p,q)$$

$$\text{Предположим, что } \exists f'(x_o)\ \ \exists g'(y_o)$$

$$\text{Положим } \varphi(x)=g(f(x)).\text{ Тогда } \varphi'(x_o)=g'(y_o)\cdot f'(x_o)$$

Доказательство. Используем связь производной с дифференцируемостью функции.

$$g(y_o+l)=g(y_o)+g'(y_o)l+g(l),\text{ где } \frac{g(l)}{l}\xrightarrow[l\to0]{}0$$

Положим $\delta(0):=\frac{g(l)}{l}$, $\quad l\in\omega(0)\setminus\{0\}$ Положим $\delta(0):=0$. Тогда функция $\delta(l)$ определена в $\omega(0)$ и непрерывна в 0.
$\omega(0)$ – окрестность, фигурирующая в определении дифференцируемости функции g.
Возьмём теперь $h\neq0$ и положим

$$l:=f(x_o+h)-f(x_o)=f(x_o+h)-y_o$$

В отличие от h, возможно, что $l=0$ при каких-то значениях h.
Теперь имеем, используя дифференцируемость f:

$$\varphi(x_o+h)=g(f(x_o+h))=g(f(x_o)+f'(x_o)h+\widetilde{g}(h)),\text{ где}$$

$$\frac{\widetilde{g}(h)}{h}\xrightarrow[h\to0]{}0$$

Пусть $f'(x_o)h+\widetilde{g}(h)=g$, тогда

$$\begin{aligned}g(f(x_o)+g)&=g(y_o+q)=g(y_o)+g'(y_o)q+q\delta(q)=\\&=\varphi(x_o)+g'(y_o)(f'(x_o)h+\widetilde{g}(h))+(g'(x_o)h+\widetilde{g}(x))\delta(f'(x_o)h+\widetilde{g}(h))\stackrel{\text{def}}{=}\\&\stackrel{\text{def}}{=}\varphi(x_o)+g'(y_o)f'(x_o)h+R(h),\text{ где}\\&R(h)=g'(y_o)\widetilde{g}(h)+f'(x_o)h\delta(f'(x_o)h+\widetilde{g}(h))+\widetilde{g}(h)\delta(f'(x_o)h+\widetilde{g}(h))\end{aligned}$$

При $h\to0$ имеем $f'(x_o)h+\widetilde{g}(h)\to0$, поэтому

$$\frac{R(h)}{h}=g'(y_o)\cdot\frac{\widetilde{g}(h)}{h}+f'(x_o)\delta(f'(x_o)h+\widetilde{g}(h))+\frac{\widetilde{g}(h)}{h}\delta(f'(x_o)h+\widetilde{g}(h))\xrightarrow[h\to0]{}$$
$$\to g'(y_o)\cdot0+f'(x_o)\cdot0+0\cdot0=0$$

Таким образом, функция φ дифференцируема в x_o, и по теореме о связи производной и дифференцируемости $\varphi'(x_o)=g'(y_o)f'(x_o)$ □

Свойство (7. Производная обратной функции). Пусть $f\in C([a,b])$ и строго монотонна, g – обратная к f функция. Пусть $x_o\in(a,b)$, функция f имеет производную в x_o и $f'(x_o)\neq0$. Положим $f(x_o)=y_o$. Тогда функция g имеет производную в y_o и $g'(y_o)=\frac{1}{f'(x_o)}$

Доказательство. Возьмём последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $h_n\neq0\ \forall n$ и $h_n\to0$. Положим $l_n=f(x_o+h_n)-f(x_o)$.
В силу строгой монотонности функции f имеем $l_n\neq0\forall n$ и $h_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ в силу $f\in C([a,b])$.
l_n и h_n связаны также соотношением

$$f(x_o+h_n)=f(x_o)+l_n=y_o+l_n,\quad g(f(x_o+h_n))=g(y_o+l_n),\quad x_o+h_n=g(y_o+l_n),$$

$$h_n=g(y_o+l_n)-x_o=g(y_o+l_n)-g(y_o)$$

Это соотношение показывает, что мы можем произвольно задать l_n, $l_n \neq 0\ \forall n$, $l_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и получим $h_n \neq 0$, $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Возьмём теперь произвольную последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$, $l_n \neq 0\ \forall n$, $l_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, h_n – соответствующая ей последовательность. Имеем

$$\frac{g(y_o + l_n) - g(y_o)}{l_n} = \frac{h_n}{l_n} = \frac{h_n}{f(x_o + h_n) - f(x_o)} = \frac{1}{\frac{f(x_o+h_n)-f(x_o)}{h_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{f'(x_o)}$$

В силу произвольности $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$, $g'(y_n) = \frac{1}{f'(x_o)}$ $\square$