Оглавление

Глава 1

Теория групп

1.1 Продолжение про центр группы

Напоминание. Центр – множество элементов, которые коммутируют друг с другом

Обозначение. $Z(G)$

Определение 1. Если $Z(G) = \{\, e \,\}$, то G называется группой с тривиальным центром или группой без центра

Примеры.

1. Группа перестановок: $Z(S_n) = \{\, e \,\}$ при $n \geq 3$
2. Чётные перстановки: $Z(A_n) = \{\, e \,\}$ при $n \geq 4$
3. Обратимые матрицы: $Z(GL_n(\mathbb{R})) = \{\, tE \mid t \in \mathbb{R} \,\}$

1.2 Коммутант

Определение 2. Коммутатором элементов $a, b \in G$ называется элемент $a^{-1}b^{-1}ab$

Обозначение. $[a, b]$

Свойства.

1. $ba \cdot [a, b] = ab$

   Доказательство. $ba\underbrace{a^{-1}}_{e}b^{-1}ab = e\underbrace{bb^{-1}}_{e}ab = ab$ $\square$

2. $[a, b]^{-1} = [b, a]$

   Доказательство. $(a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}(b^{-1})^{-1}(a{-}1)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba$ $\square$

3. $ab = ba \iff [a, b] = e$

Определение 3. Комммутант группы G – это $\langle [a, b] | a, b \in G \rangle$

Обозначение. $[G, G]$

Обозначение. Если $A, B \subset G$, то $[A, B] = \langle a^{-1}b^{-1}ab | a \in A, b \in B \rangle$ – взаимный коммутант A и B

Примеры.

1. $[S_n, S_n] = A_n \quad \forall n$

2. $[A_n, A_n] = A_n$ при $n \geq 5$

Теорема 1. Коммутант является нормальной подгруппой

Доказательство. Коммутант, по определению, подгруппа. Значит доказать нужно только нормальность
Вспомним определение нормальности:
Пусть $x \in G,\ \ k \in [G, G]$. Докажем, что $x^{-1}kx \in [G, G]$

$$\exists\, a_i, b_i : k = [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \ldots \cdot [a_s, b_s]$$

$$x^{-1}kx = x^{-1}[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \ldots \cdot [a_s, b_s] \cdot x = \big(x^{-1}[a_1, b_1]x\big)\big(x^{-1}[a_2, b_2]x\big) \cdot \ldots \cdot \big(x^{-1}[a_s, b_s]x\big)$$

Достаточно доказать, что $\forall a, b, x \in G \quad x^{-1}[a, b]x \in [G, G]$. Докажем это:

$$x^{-1}[a, b]x = x^{-1}a^{-1}b^{-1}abx = (x^{-1}a^{-1}xa)(a^{-1}x^{-1}b^{-1}abx) = [x, a]\big(a^{-1}(bx)^{-1}a(bx)\big) = [x, a] \cdot [a, bx]$$

$\square$

Теорема 2 (фактор группы по коммутанту). G – группа. Положим $K = [G, G]$. Тогда

1. $G|K$ абелева
   Доказательство. Частный случай 2 $\square$

2. Если $H \lhd G,\ \ K \subset H$, то $G|H$ абелева
   Доказательство. $\overline{a}, \overline{b}$ – смежные классы. Докажем, что
   $$\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a} \ \Longleftarrow\ \overline{ab} = \overline{ba} \ \Longleftarrow\ \exists\, h \in H : ab = ba \cdot h \ \Longleftarrow\ h = a^{-1}b^{-1}ab \in K \subset H$$
   $\square$

3. Если $H \lhd G,\ \ G|H$ абелева, то $K \subset H$
   Доказательство.
   $$\forall a, b \quad \overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a} \implies \overline{ab} = \overline{ba} \implies \exists\, h \in H : ab = ba \cdot h \implies \underbrace{a^{-1}b^{-1}ab}_{=[a,b]} = (ba)^{-1}(ab) = h \in H$$
   $\square$

1.3 Гомоморфизм

Определение 4. Пусть $(G, *),\ (H, \times)$ – группы. Отображение $f : G \to H$ называется гомоморфизмом, если

$$f(a * b) = f(a) \times f(b) \quad \forall a, b \in G$$

Замечание. Знаки $*, \times$ обычно не пишут, т. е. $f(ab) = f(a)f(b)$

Примеры.

1. $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*, \quad f(z) = |z|$ – гомоморфизм, **не** инъекция и **не** сюръекция
2. $f : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad f(A) = \det A$
3. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*, \quad f(z) = z$

Свойства.

1. - $f(e_G) = e_H$
     Доказательство. $f(a)e_H = f(a) = f(ae_G) = f(a)f(e_G)$ $\square$

- $f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$

  Доказательство. $f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e_G) = e_H$ $\square$

2. $f : G \to H, \quad f_1 : H \to K$ – гомоморфизмы
   Тогда $f_1 \circ f : G \to k$ – гомомрфизм

Определение 5. $f : G \to H$ – гомоморфизм
Ядро f – это $\{\, x \in G \mid f(x) = e_H \,\}$

Обозначение. $\ker f$

Образ f – это $\{\, f(x) \mid x \in G \,\}$

Обозначение. $\operatorname{Im} f$

Свойства.

1. $\ker f \lhd G$ (ядро – нормальная подгруппа)

   Доказательство.

   - Проверим, что подгруппа ($\ker f < G$):
     - $a, b \in \ker f \implies f(a) = f(b) = e_H \implies f(ab) = f(a)f(b) = e_H e_H = e_H \implies ab \in \ker f$
     - $a \in \ker f \implies (a^{-1}) = \big(f(a)\big)^{-1} = e_H^{-1} = e_H \implies a^{-1} \in \ker f$
   - Проверим, что нормальная ($\ker f \lhd G$):
     Пусть $h \in \ker f, \quad g \in G$

     $$f(g^{-1}hg) = \big(f(g)\big)^{-1} f(h) f(g) = \big(f(g)\big)^{-1} e_H f(g) = \big(f(g)\big)^{-1} f(g) = e_H \implies g^{-1}hg \in \ker f$$

   $\square$

2. f – инъекция $\iff \ker f = \{\, e_G \,\}$

   Доказательство.

   - $\implies$
     Пусть $x \in \ker f$

     $$\left.\begin{aligned} f(x) &= e_H \\ f(e_G) &= e_H \end{aligned}\right\} \implies x = e_G$$

   - $\impliedby$

     . . . .

   $\square$

Теорема 3 (о гомоморфизме). Пусть $f : G \to H$ – гомомрфизм. Тогда $G|\ker f \simeq \operatorname{Im} f$

Доказательство. Определим отображение $\varphi : G|\ker f \to \operatorname{Im} f$
Пусть A – смежный класс. Возьмём произвольный $a \in A$
Положим $\varphi(A) \coloneqq f(a)$. То есть $\varphi(\overline{a}) = f(a)$

- Корректность. Докажем, что $a, a' \in A \implies f(a) = f(a')$:
  Пусть $a' = a \cdot h, \quad h \in \ker f$

  $$f(a') = f(ah) = f(a)f(h) \underset{h \in \ker f}{=} f(a)e_H = f(a)$$

- φ – гомоморфизм. Проверим, что $\varphi(\overline{a}\overline{b}) = \varphi(\overline{a})\varphi(\overline{(b)})$:

  $$\varphi(\overline{a}\overline{b}) = \varphi(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(\overline{(a)})\varphi(\overline{b})$$

- Сюръективность:
  Пусть $x \in \operatorname{Im} f \implies \exists\, a \in G : x = f(a) \implies x = \varphi(\overline{a})$

- Инъективность:
  Пусть $\varphi(\overline{a}) = e_H \implies f(a) = e_H \implies a \in \ker f \implies \overline{a} = \ker f = e_G | \ker f$

$\square$

Примеры.

1. $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad f(z) = |z|$
   $\ker f = U$, где $U = \{\, z \mid |z| = 1 \,\}$, т. е. единичная окружность
   $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^*_+$, где $\mathbb{R}^*_+ = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$

$$\implies \mathbb{C}^* | U \simeq \mathbb{R}^*_+$$