Оглавление

Глава 1

$\mathbb{R}^n$

1.1 Норма линейного оператора

Определение 1. $A : \mathbb{R}^{m \geq 1} \to \mathbb{R}^{n \geq 1}$

$$\|A\| := \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^m \\ \|X\|_m \leq 1}} \|AX\|_n$$

Свойства.

1. $\|A\| \geq 0$

$$\|A\| = 0 \iff A \equiv \mathbb{O}_n, \qquad \text{т. е. } \mathbb{O}_m X = \mathbb{O}_n \quad \forall X \in \mathbb{R}_m$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно из определения и аналогичного свойства нормы вектора. Докажем второе:

$$AX = A_{n\times m}X$$

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{m1} & . & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Возьмём $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le m$

Обозначим

$$e_i \coloneqq [\overbrace{0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0}^{n}], \qquad f_j \coloneqq \left.\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}\right\} m$$

$$\|A\| = 0 \implies \|AX\|_n = 0 \implies AX = \mathbb{O}_n \quad \underset{\|X\|=1}{\forall X \in \mathbb{R}^m}$$

Иначе супремум был бы положительным

То есть, $A_{n\times m}X = \mathbb{O}_n$. Значит,

$$e_i(A_{n\times m}f_j) = e_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{1.1}$$

При этом,

$$A_{n\times m}f_j = \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{m1} & . & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

$$e_i \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{ij} \xlongequal[(1.1)]{} 0 \implies A_{n\times m} = \mathbb{O}_{n\times m}$$

□

2. $c \in \mathbb{R}$

$$\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$$

Доказательство.

$$\|cA\| = \sup_{\substack{X\in\mathbb{R}^m \\ \|X\|_m \le 1}} \|(cA)X\|_n \xlongequal[\text{линейность}]{} \sup \|c(AX)\|_n = \sup |c| \cdot \|AX\|_n =$$

$$= |c| \sup \|AX\|_n = |c| \cdot \|A\|$$

□

3. $A, B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$$

Доказательство.

$$\|A + B\| = \sup \|(A + B)X\|_n \xlongequal[\text{линейность}]{} \sup \|AX + BX\| \le \sup(\|AX\| + \|BX\|) \le$$

$$\le \sup \|AX\| + \sup \|BX\| \xlongequal{\text{def } \|A\|, \|B\|} \|A\| + \|B\|$$

□

4. $\|AX\| \le \|A\| \cdot \|X\| \quad \forall X \in \mathbb{R}^m$

Доказательство.

- Если $X = \mathbb{O}_m$, то это очевидно
- Пусть $X \neq \mathbb{O}_m$
  Тогда $t := \|X\|_m > 0$
  Рассмотрим $Y := \frac{1}{t}X$

$$\|Y\|_m = \left\|\frac{1}{t}X\right\| \underset{t>0}{=} \frac{1}{t}\|X\| \xlongequal{\text{def } t} 1$$

$$\|AY\|_n \leq \sup_{\substack{U \in \mathbb{R}^m \\ \|U\| \leq 1}} \|AU\|_n = \|A\|$$

$$X = tY \implies \|AX\|_n = \|A(tY)\|_n = t \cdot \|AY\| \leq t\|A\| \underset{t>0}{\leq} \|A\|$$

$\square$

5. $c_0 > 0$

$$\forall X \in \mathbb{R}^m \quad \|AX\|_n \leq c_0 \cdot \|X\|_m \tag{1.2}$$

$$\implies \|A\| \leq c_0$$

Доказательство. Возьмём $\forall X \in \mathbb{R}^m$, такое, что $\|X\|_m \leq 1$

$$\|AX\|_n \underset{(1.2)}{\leq} c_0 \cdot \|X\|_m \overset{\text{def}}{\leq} c_0 \tag{1.3}$$

$$(1.3) \overset{\text{def sup}}{\iff} \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|_n \leq c_0$$

$\square$

6. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nm} \end{bmatrix}$

$$\implies \|A\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

Доказательство. Пусть

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \qquad \|X\|_m \leq 1$$

Тогда

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Напоминание. Неравенство КБШ:

$$|(A, X)| \leq |a_1| \cdot |x_1| + \ldots + |a_n| \cdot |x_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|Y\| \cdot \|X\|$$

$$\|AX\|_n^2 \xlongequal[(1.4)]{} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2 \underset{\text{КБШ}}{\leq} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \underbrace{x_j^2}_{\overset{\text{def}}{\leq} 1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$$

$\square$

7. $\mathbb{R}^{n\geq 1}, \mathbb{R}^{m\geq 1}, \mathbb{R}^{k\geq 1}, \qquad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \qquad BA : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$$\implies \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

Доказательство. Возьмём $X \in \mathbb{R}^m$, такой, что $\|X\|_m \leq 1$
Пусть $Y = AX \in \mathbb{R}^n$
Тогда $BA(X) \xlongequal{\text{def } BA} B(AX) \xlongequal{\text{def } X} BY$

$$\|BA(X)\|_k = \|BY\|_k \underset{\text{св-во 4}}{\leq} \|B\| \cdot \|Y\|_n \tag{1.5}$$

$$\|Y\|_n \xlongequal{\text{def } Y} \|AX\|_n \underset{\text{св-во 4}}{\leq} \|A\| \cdot \|X\|_m \underset{\|X\|\leq 1}{\leq} \|A\| \tag{1.6}$$

$$(1.5), (1.6) \implies \|BA(X)\|_k \leq \underbrace{\|B\| \cdot \|A\|}_{:=c_0}$$

Применяя свойство 5, получаем нужное утверждение □

1.2 Частные производные второго и последующих порядков

Рассматриваем вектор-столбцы, но, для удобства, иногда будем записывать их в строчку

Определение 2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$ – открытое, $\Omega \neq \emptyset, \qquad f : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq n, \qquad \exists f'_{x_i}(X) \quad \forall X \in \Omega$
$X_0 \in \Omega, \qquad 1 \leq j \leq n$
Получается новая функция $f'_{x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$
Пусть $\exists (f'_{x_i})'_{x_j}(X_0)$
Говорят, что существует частная производная второго порядка

$$f''_{x_i,x_j}(X_0) \coloneqq (f'_{x_i})'_{x_j}(X_0)$$

Определение 3. Пусть $\forall X \in \Omega \quad \exists f''_{x_i x_j}(X)$
Рассмотрим $1 \leq k \leq n$ и $X_0 \in \Omega$
Пусть $\exists (f''_{x_i x_j})'_{x_k}(X_0)$
Будем говорить, что существует частная производная третьего порядка

$$f'''_{x_i,x_j,x_k}(X_0) = (f''_{x_i x_j})'_{x_k}(X_0)$$

. . . .

Пусть для $l \geq 3$ определено понятие $f^{(l)}_{\underbrace{x_i, x_j, ..., x_s}_{l}}(X_0)$

Пусть $\forall X \in \Omega \exists f^{(l)}_{x_i,...,x_s}(X)$
Возьмём $1 \leq t \leq n$
Предположим, что $\exists (f^{(l)}_{x_i,...,x_s})'_{x_t}(X_0)$
Такую частную производную будем называть частной производной порядка $l + 1$

$$f^{(l+1)}_{x_i,...,x_s,x_t}(X_0) \coloneqq (f^{(l)}_{x_i,...,x_s})'_{x_t}(X_0)$$

Обозначение. Исторически более распространено обозначение

$$\frac{\partial^l f(x)}{\partial x_s, ..., \partial x_i}$$

В знаменателе x_j расположены в обратном порядке, т. к.

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

В следующей теореме (и следствии к ней) считаем, что $\mathbb{R}^n$ – пространство вектор-строк

Теорема 1 (о смешанных производных). $G = B_r(x_1^0, x_2^0)$, $\qquad X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$, $\qquad f : G \to \mathbb{R}$, $\qquad f \in \mathcal{C}\Big(G\Big)$

$\forall X \in G \quad \exists\, f'_{x_1}(X), f'_{x_2}(X) \in \mathcal{C}\Big(G\Big)$, $\qquad \forall X \in G \quad \exists\, f''_{x_1x_2}(X), f''_{x_2x_1}(X)$ непрерывные в X_0

$$\implies f''_{x_1x_2}(X_0) = f''_{x_2x_1}(X_0)$$

Доказательство. Возьмём $0 < h < \frac{r}{\sqrt{2}}$
Тогда $(x_1^0 + h, x_2^0 + h) \in G$
Рассмотрим функцию

$$g(h) \coloneqq \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 - h) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2}$$

Определим

$$\varphi(x_2) \coloneqq \frac{f(x_1^0 + h, x_2) - f(x_1^0, x_2)}{h}, \qquad x_2 \in [x_2^0, x_2^0 + h]$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0)}{h} \xlongequal{\text{def } \varphi} \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2} = g(h) \tag{1.7}$$

$$\forall x_2 \in [x_2^0, x_2^0 + h] \quad \exists\, \varphi'(x_2) \xlongequal{\text{def } \varphi} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)}{h} \tag{1.8}$$

Применим к φ теорему Лагранжа:

$$\exists\, 0 < h_2 < h : \varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0) = \varphi'(x_2^0 + h_2) \cdot h \implies$$
$$\implies \frac{\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0)}{h} = \varphi'(x_2^0 + h_2) \underset{(1.8)}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h_2, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)}{h} \tag{1.9}$$

Рассмотрим отдельно выражение $f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)$
Рассмотрим функцию $l(x_1) \coloneqq f'_{x_2}(x_1, x_2^0 + h_2)$
По условию, наложенному на первые производные, она непрерывна при $x \in [x_1^0, x_1^0 + h]$
По условию,

$$\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^0 + h] \quad \exists\, l'(x_1) = f''_{x_2x_1}(x_1, x_2^0 + h_2) \tag{1.10}$$

Применим теорему Лагранжа к l:

$$\exists\, 0 < h_1 < h : l(x_1^0 + h) - l(x_1^0) = l'(x_1^0 + h_1) \cdot h \implies$$
$$\implies \frac{l(x_1^0 + h) - l(x_1^0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)}{h} =$$
$$= l'(x_1^0 + h_1) \underset{(1.10)}{=} f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \tag{1.11}$$

$$g(h) \underset{(1.7)}{=} \frac{\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0)}{h} \underset{(1.9)}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)}{h} \underset{(1.11)}{=}$$
$$= f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2), \qquad 0 < h_1, h_2 < h \tag{1.12}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x_1) \coloneqq \frac{f(x_1, x_2^0 + h) - f(x_1, x_2^0)}{h}$$

$$\frac{\psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0)}{h} = \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + h) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2} = g(h) \tag{1.13}$$

$$\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^0 + h] \quad \exists\, \psi'(x_1) = \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2^0 + h) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0)}{h} \tag{1.14}$$

По теореме Лагранжа,

$$\exists 0 < \overline{h_1}, \overline{h_2} < h : \frac{\psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0)}{h} = \psi'(x_1 + \overline{h_1}) \underset{(1.14)}{=} \frac{f'_{x_1^0}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + h) - f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0)}{h} =$$
$$= f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \quad (1.15)$$

$$g(h) \underset{(1.13)}{=} \frac{\psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0)}{h} \underset{(1.15)}{=} f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \quad (1.16)$$

$$(1.12), (1.16) \implies f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) = f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \quad (1.17)$$

Устремим h к нулю справа и слева
По условию теоремы,

$$f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \xrightarrow[h \to +0]{} f''_{x_2x_1}(x_1^0, x_2^0)$$
$$f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \xrightarrow[h \to -0]{} f''_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)$$

По соотношению (1.17), это одна и та же функция, а значит, она имеет единственный предел $\square$

Следствие (для $n > 2$). $X_0 \in \mathbb{R}^{n \geq 3}$, $\quad X_0 = (x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0)$
$f : B_r(X_0) \to \mathbb{R}$, $\quad f \in \mathcal{C}\Big(B_r(X_0)\Big)$, $\quad \forall X \in B_r(X_0) \quad \exists\, f'_{x_i}(X), f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}\Big(B_r(X_0)\Big)$
$\forall X \in B_r(X_0) \quad \exists\, f''_{x_ix_j}(X), f''_{x_jx_i}(X)$ – непр. в X_0

$$\implies f''_{x_ix_j}(X_0) = f''_{x_jx_i}(X_0)$$

Доказательство.

$$F(x_i, x_j) \coloneqq f(x_1^0, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n^0)$$
$$F''_{x_ix_j}(X_i, x_j) = f''_{x_ix_j}(x_1^0, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n^0)$$

$\square$

Утверждение 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, $\quad i \neq j$, $\quad f \in \mathcal{C}\Big(\Omega\Big)$, $\quad \forall X \in \Omega \quad f'_{x_i}(X), f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}\Big(\Omega\Big)$

$\forall X \in \Omega \quad \exists\, f''_{x_ix_j}(X), f''_{x_jx_i}(X) \in \mathcal{C}\Big(\Omega\Big)$
По следствию,

$$\forall X \in \Omega \quad f''_{x_ix_j}(X) = f''_{x_jx_i}(X)$$

Замечание. Есть примеры, которые показывают, что если не требовать непрерывности вторых производных в точке X_0, то они могут не совпадать

Утверждение 2 (для будущего определения). $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, $\quad i \neq j, \quad k$
Рассмотрим $f'''_{x_ix_jx_k}(X)$, $\quad f'''_{x_jx_ix_k}(X)$, $\quad f'''_{x_ix_kx_j}(X)$
Пусть они все непрерывны на Ω
Все производные первого и второго порядков существуют и непрерывны на Ω
Тогда, по следствию

$$f''_{x_ix_j} = f''_{x_jx_i} \implies (f''_{x_ix_j})'_{x_k} = (f''_{x_jx_i})'_{x_k}$$
$$(f'_{x_i})''_{x_kx_j} = (f'_{x_i})''_{x_jx_k}$$

Тем самым мы доказали, что у такой функции все частные производные третьего порядка совпадают