Содержание

Часть I
Жорданова форма оператора

1. Определения

Определение 1. Жорданова клетка:

$$Jr(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & . \\ 1 & \lambda & 0 & . \\ 0 & 1 & \lambda & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Определение 2. Жорданова форма — матрица, у которой на главной диагонали жордановы клетки

$$\begin{pmatrix} Jr(\lambda_1) & 0 & 0 & . \\ 0 & Jr(\lambda_2) & 0 & . \\ 0 & 0 & Jr(\lambda_3) & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

1.1. Напоминание: собственные числа

Определение 3. $\mathcal{A}$ — оператор на V
Число λ называется собственным для $\mathcal{A}$, если

$$\exists \underset{v \neq 0}{v \in V}: \quad \mathcal{A}v = \lambda v$$

v называется собственным вектором, соответствующим λ

Определение 4. A — квадратная матрица
Число λ называется собственным, если

$$\exists \underset{X \neq 0}{\text{столбец } X}: \quad \mathcal{A}X = \lambda X$$

X называется собственным столбцом

Определение 5. A — квадратная матрица
Характеристическим многочленом A называется $\chi_A(t) = \det(A - tE)$

Теорема 1. Собственные числа A — корни $\chi_A(t)$

Определение 6. $\mathcal{A}$ — оператор, A — его матрица в некотором базисе
Характеристическим многочленом $\mathcal{A}$ называется $\chi_A(t)$

2. Собственные подпространства

Определение 7. V — векторное пространство, $\mathcal{A}$ — оператор на V, λ — с. ч.
Собственным подпространством, соответствующим λ, называется множество с. в., соответствующих λ

Обозначение. V_λ

Определение 8. U — подпространство V
U называется инвариантным относительно $\mathcal{A}$, если

$$\forall x \in U \quad \mathcal{A}x \in U$$

Утверждение 1. V_λ — инвариантное подпространство

Доказательство.

- Подпространство
  - $u, v \in V_\lambda \implies \begin{Bmatrix} \mathcal{A}u = \lambda u \\ \mathcal{A}v = \lambda v \end{Bmatrix} \implies \mathcal{A}(u+v) \underset{\text{линейность}}{=\!=\!=} \mathcal{A}u + \mathcal{A}v = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v) \implies u + v \in V_\lambda$
  - $u \in V_\lambda, k \in K \implies \mathcal{A}(ku) \underset{\text{линейность}}{=\!=\!=} k\mathcal{A}(u) = k\lambda u = \lambda(ku) \implies ku \in V_\lambda$
- Инвариантность

$$u \in V_\lambda \implies \mathcal{A}u = \lambda u \in V_\lambda$$

□

Теорема 2 (о сумме собственных подпространств)**.** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — различные собственные числа
Тогда сумма $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ является прямой

Доказательство. Индукция по k

- **База.** $k = 1$ — очевидно

- **Переход**. $k-1 \to k$
  Пусть $u_1 + \dots + u_{k-1} + u_k = 0, \qquad u_i \in V_{\lambda_i}$

$$0 = \mathcal{A}(\underbrace{u_1 + \dots + u_{k-1} + u_k}_{=0}) - \lambda_k(\underbrace{u_1 + \dots + u_{k-1} + u_k}_{=0}) =$$

$$= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1}u_{k-1} + \cancel{\lambda_k u_k} - \lambda_k u_1 - \dots - \lambda_k u_{k-1} - \cancel{\lambda_k u_k} = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} u_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} u_{k-1}$$

  (т. к. по условию собственные числа различны)

$$(\lambda_1 - \lambda_k)u_1 \in V_{\lambda_1}, \quad \dots, \quad (\lambda_{k-1} - \lambda_k)u_{k-1} \in V_{\lambda_{k-1}}$$

  По **индукционному предположению**, $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{k-1}}$
  А мы представили 0 в виде суммы. Значит, все слагаемые нулевые:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)u_1 = \dots = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)u_{k-1} = 0 \implies u_1 = \dots = u_{k-1} = 0 \implies u_k = 0$$

□

Следствие. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные с. ч., $\qquad u_i \in V_{\lambda_i}, \qquad u_i \neq 0$
Тогда $u_1, \dots, u_k$ ЛНЗ

Доказательство. Пусть $a_1u_1 + \dots + a_ku_k = 0$

$$a_1u_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, a_ku_k \in V_{\lambda_k} \implies a_1u_1 = \dots = a_ku_k = 0 \implies a_1 = \dots = a_k = 0$$

□

3. Операторы с диагональными и блочно-диагональными матрицами

В этом параграфе рассматриваем конечномерные пространства

Определение 9. Оператор $\mathcal{A}$, действующий на V называется диагонализуемым, если его матрица в некотором базисе диагональна

Определение 10. $\mathcal{A}$ — оператор, λ — с. ч.

- Геометрической кратностью λ называется $\dim V_\lambda$
- Арифметической кратностью λ называется кратность λ как корня $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

Теорема 3 (критерий диагонализуемости в терминах геометрической кратности).
(I) $\mathcal{A}$ диагонализуем $\iff$ (II) сумма геометрических кратностей всех с. ч. равна $\dim V$

Доказательство.

$\mathcal{A}$ диагонализуем $\iff$ в нек. базисе $e_1, \dots, e_n$ матрица $\mathcal{A}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & . \\ 0 & a_2 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$

$\iff$ для некоторого базиса $e_1, \dots, e_n$ выполнено

$$\mathcal{A}e_i = 0e_1 + \dots + a_ie_i + \dots + 0e_n = a_ie_i$$

$\iff$ (I') существует базис из с. в.
Докажем, что (I') $\iff$ (II):
Пусть $U = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$

$$n := \dim V, \qquad d_i := \dim V_{\lambda_i}$$

- (II) $\implies$ (I')

Имеем $d_1 + \dots + d_k = n$

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \implies \dim U = n \xRightarrow[U\text{ — подпр-во } V]{} U = V$$

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \implies \text{ объединение базисов } V_\lambda \text{ является базисом } U = V$$

Эти базисы состоят из с. в.
Объединение базисов состоит из с. в.
Это базис V

- (I') $\implies$ (II)
  Сущетсвует базис V из с. в.
  Они распределяются по V_λ (но не обязательно для каждого V_λ представлен весь его базис):

$$\underbrace{e_1^{(1)}, \dots, e_{t_1}^{(1)}}_{\substack{\text{соотв. } \lambda_1 \\ \in V_{\lambda_1}}}, \underbrace{e_1^{(2)}, \dots, e_{t_2}^{(2)}}_{\substack{\text{соотв. } \lambda_2 \\ \in V_{\lambda_2}}}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\underset{\text{(т. к. они лежат в большом-большом базисе)}}{e_1^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)} \text{ ЛНЗ}} \qquad \implies t_i \le d_i \quad \forall i$$

Сложим все эти неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &d_1 + d_2 + \dots + d_k \ge t_1 + \dots + t_k = n \\ &n \ge \dim U \xlongequal[U = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}]{} d_1 + \dots + d_k \end{aligned}\right\} \implies n = d_1 + \dots + d_k$$

□

Следствие (достаточное условие диагонализуемости)**.** Пусть $\dim V = n$
Если у $\mathcal{A}$ есть n различных с. ч., то $\mathcal{A}$ диагонализуем

Доказательство. $\dim V_{\lambda_i} \ge 1$

$$n \ge \dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}) \xlongequal[\text{пр. сумма}]{} \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k} \ge n$$

Значит, достигается равенство □

Напоминание (определитель ступенчатой матрицы)**.**

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A, C \text{ — кв.} \implies |M| = |A| \cdot |C|$$

Теорема 4 (арифм. и геом. кратности)**.** λ — с. ч. $\mathcal{A}$
Геом. кратность $\lambda \le$ арифм. кратности λ

Доказательство. Пусть $n = \dim V$, $\quad k$ — геом. кр. λ
Выберем базис $e_1, \dots, e_k$ пространства V_λ
Дополним его до базиса V: $e_1, \dots, e_k, \dots, e_n$
При $i \le k$ выполнено $\mathcal{A}e_i = \lambda e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda e_i + \dots + 0 \cdot e_n$
Матрица $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & . & & B \\ . & \lambda & & \\ & & & \\ 0 & 0 & & C \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Для некоторых $B_{k \times n-k}$, $C_{n-k \times n-k}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} (\lambda - t)E_k & B \\ 0 & C - tE_{n-k} \end{vmatrix} = \det\Big((\lambda - t)E_k\Big) \cdot \det(C - tE_{n-k}) = (\lambda - t)^k \cdot \det(C - tE_{k-n})$$

□

Следствие (критерий диагонализуемости в терминах арифметических и геометрических кратностей). Оператор $\mathcal{A}$ диагонализуем $\iff$

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ раскладывается на линейные множители
2. $\forall$ с. ч. λ $\quad$ арифм. кр. $=$ геом. кр.

Доказательство. Пусть λ_i — с. ч., d_i — геом. кр., a_i — арифм. кр., $n = \dim C$

$$\chi(t) - (t-\lambda_1)^{a_1} \dots (t-\lambda_k)^{a_k} \cdot f(t)$$

$$n = \deg \chi(t) \geq a_1 + \dots + a_k \geq d_1 + \dots + d_k$$

Диагонал. $\iff$ $n = d_1 + \dots + d_k$ $\iff$ везде достигаются равенства $\square$

Пример (недиагонализуемый оператор). $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Нужно, чтобы ар. кратность была 2, а геометрическая — 1

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2$$

$\lambda = 1, \qquad$ ар. кратность — 2
Найдём $\dim V_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x \\ x + y = y \end{cases} \quad \iff \quad x = 0$$

$\dim V_1 = 1 \qquad$ геом. кратность — 1

Замечание (Возведение в степень диагонализуемого оператора). A — диагонализуемый
$e_1, \dots, e_n$ — базис из с. в.
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — соответствующие с. ч.

$$\mathcal{A}^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$$

Пусть $v \in V, \qquad v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$$\implies \mathcal{A}^k v = a_1 \lambda_1^k e_1 + \dots + a_n \lambda_n^k e_n$$

Пусть A — матрица в стандартном базисе

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad C^{-1}A^kC = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Определение 11. Блочной матрицей называется матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ . & . & . & . \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

где $\forall i \quad A_{ix}$ имеют поровну строк и $\forall j \quad A_{xj}$ имеют поровну столбцов

Пример.

$$\left(\begin{array}{cc|c} . & . & . \\ \hline . & . & . \\ . & . & . \end{array}\right)$$

Определение 12. Блочно-диагональной матрицей называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & A_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

где A_i — квадратные

Замечание. Блочно-диагональная матрица всегда квадратная

Пример.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Определение 13. U — инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$

Через $\mathcal{A}\Big|_U$ обозначим сужение $\mathcal{A}$ на U, т. е.

$$\mathcal{A}\Big|_U : U \to U, \qquad \mathcal{A}\Big|_U(x) = \mathcal{A}(x) \quad \forall x \in U$$

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Выпишем его инвариантные пространства:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\underset{\in W}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}} \mapsto \underset{\in W}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}}, \qquad \underset{\in U}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}} \mapsto \underset{\in U}{\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\Big((1-t)^2+1\Big) = (2-t)(t^2-2t+2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1+0 \\ 2\cdot 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим U:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2:

$$\mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2, \qquad \mathcal{A}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2$$

$$A_U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}\big|_U} = (1-t)^2 + 1 = t^2 - 2t + 2$$

$$\chi_{\mathcal{A}\big|_W} = 2t$$

Теорема 5 (блочные матрицы и инвариантыне подпространства).
$\mathcal{A}$ — оператор на конечномерном пространстве V

1. U — инвариантное пространство $\mathcal{A}$, $\quad e_1, \dots, e_s$ — базис U, $\quad e_1, \dots, e_s, \dots, e_n$ — базис V
   A_U, A — матрицы $\mathcal{A}$ на U, V в этих базисах

$$\implies A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_U} & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \quad \text{для некоторых } B, C$$

Доказательство. Пусть

$$A_U = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ . & . & . \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

Возьмём $1 \le i \le s$
Посмотрим, как $\mathcal{A}$ действует на e_i:

$$\mathcal{A}(e_i) = a_{1i}e_1 + \dots + a_{si}e_s = a_{1i}e_1 + \dots + a_{si}e_s + \dots + 0 \cdot e_{s+1} + \dots + 0 \cdot e_n$$

Получили разложение $\mathcal{A}(e_i)$ по базису V, то есть, столбец матрицы оператора в базисе $e_1, \dots, e_s, \dots, e_n$:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ . \\ . \\ e_{si} \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} — i\text{-й столбец } A$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{s1} & * & * \\ . & . & . & . & * & * \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

□

2. $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, где U_i — инвар. для $\mathcal{A}$
   $A_1, \dots, A_k$ — матрицы $\mathcal{A}$ на $U_1, \dots, U_k$ в некоторых базисах
   A — матрица $\mathcal{A}$ на V в базисе, являющемся объединением базисов U_i (в естественном порядке: базис U_1, базис U_2, ...)

$$\implies A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & A_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

   Так как $A_1, \dots, A_K$ — квадратные, то A — блочно-диагональная

Доказательство. Пусть $\dim U_1 = d_1, \quad \dim U_2 = d_2, \quad \ldots\ldots$
Рассмотрим столбец матрицы A с номером $d_1 + d_2 + d_{i-1} + t$, где $1 \le t \le d_i$ (т. е. t-й столбец i-го набора)
Обозначим элементы базисов:

$$U_1 : e_1^{(1)}, \ldots, e_{d_1}^{(1)}$$

$$U_2 : e_2^{(2)}, \ldots, e_{d_2}^{(2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В этом столбце записаны координаты вектора $e_t^{(i)}$ в базисе V
Разложим его по базису подпространства U_i:

$$e_t^{(i)} = a_1 e_1^{(i)} + \cdots + a_{d_i} e_{d_i}^{(i)}$$

Дополним нулями:

$$\underbrace{0 \cdot e_1^{(1)} + \cdots + 0 \cdot d_1^{(1)}}_{d_1} + \underbrace{0 \cdot e_1^{(2)} + \ldots}_{d_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \underbrace{a_1 e_1^{(i)} + \cdots + a_{d_i} e_d^{(i)}}_{d_i} + 0 \cdot e_1^{(i+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Получили разложение $e_r^{(i)}$ по базису V
$(d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1} + t)$-й столбец равен

$$\begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_{d_i} \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Следствие (делители характеристического многочлена).
$\mathcal{A}$ — оператор на конечномерном пространстве V, $\quad \chi(t)$ — его характ. многочлен

1. U — инвариантное подпространство, $\chi_U(t)$ — характ. многочлен $\mathcal{A}\Big|_U$

$$\implies \chi(t) \vdots \chi_U(t)$$

2. $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$, где U_i — инвариатные
   $\chi_i(t)$ — характ. многочлен $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$

$$\chi(t) = \chi_1(t) \cdot \cdots \cdot \chi_k(t)$$

Доказательство. Рассмотрим базисы как в теореме

1.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} A_U & B \\ 0 & C \end{pmatrix} - tE_n \right| = \begin{vmatrix} A_U - tE_s & B \\ 0 & C - tE_{n-s} \end{vmatrix} =$$

$$= |A_U - tE_s| \cdot |C - tE_{n-s}| = \chi_{A_U}(t) \cdot \chi_C(t) = \chi_U(t) \cdot \chi_C(t)$$

2. $\chi_A(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} A_1 - tE & 0 & . & 0 \\ 0 & A_2 - tE & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_k - tE \end{vmatrix} = |A_1 - tE| \cdot |A_2 - tE| \cdot \dots = \chi_1(t) \cdot \chi_2(t) \cdot \dots$

□

Лемма 1 (ранг блочно-диагональной матрицы). A — блочно-диагональная

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

$$\implies \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A_1 + \dots + \operatorname{rk} A_k$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что ранг — это количество ЛНЗ строк
Пусть для каждой матрицы A_i выбран набор строк $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, \dots, s_n^{(i)}$
Для строки $s_j^{(i)}$ обозначим через $\widetilde{s_j}^{(i)}$ соответствующую строку матрицы A
Достаточно доказать, что

$$\text{набор } \widetilde{s_1}^{(1)}, \dots, \widetilde{s_{r_1}}^{(1)}, \widetilde{s_1}^{(2)}, \dots, \widetilde{s_{r_2}}^{(2)}, \dots\dots\dots\dots \text{ ЛНЗ} \iff \text{все наборы } \begin{cases} s_1^{(1)}, \dots, s_{r_1}^{(1)} \\ s_1^{(2)}, \dots, s_{r_2}^{(2)} \\ \dots\dots\dots \end{cases} \text{ЛНЗ}$$

- $\implies$
  Докажем **от противного**:
  Предположим, что $s_1^{(i)}, \dots, s_{r_i}^{(i)}$ ЛЗ
  То есть, $\exists\, a_1, \dots, a_{r_i}$, не все равные нулю, такие, что $a_1 s_1^{(i)} + \dots + a_{r_i} s_{r_i}^{(i)} = 0$
  Дополним нулями:
  $$a_1 \widetilde{s_1}^{(i)} + \dots + a_{r_i} \widetilde{s_{r_i}}^{(i)} = 0$$
  То есть, $\widetilde{s_1}^{(i)}, \dots, \widetilde{s_{r_i}}^{(i)}$ ЛЗ
  А значит, и всеь набор ЛЗ — $\lightning$

- $\impliedby$
  Докажем **от противного**:
  Пусть все наборы $s_1^{(i)}, \dots, s_{r_i}^{(i)}$ ЛНЗ, а $\widetilde{s_1}^{(1)}, \dots, s_{r_i}^{(1)}, \dots\dots\dots, \widetilde{s_{r_k}}^{(k)}$ ЛЗ, то есть
  $$\sum_{i,j} a_j^{(i)} \widetilde{s_j}^{(i)} = 0, \qquad \text{не все } a_j^{(i)} \text{ равны нулю}$$
  Положим
  $$T_i := a_1^{(i)} s_1^{(i)} + \dots + a_{r_i}^{(i)} s_{r_i}^{(i)}$$
  $$\widetilde{T_i} := a_1^{(i)} \widetilde{s_1}^{(i)} + \dots + a_{r_i}^{(i)} \widetilde{s_{r_i}}^{(i)}$$
  $$\widetilde{T_1} + \widetilde{T_2} + \dots + \widetilde{T_k} = 0 \implies \widetilde{T_1} = \widetilde{T_2} = \dots = 0$$
  Строки $\widetilde{T_1}, \dots, \widetilde{T_k}$ **не** содержат ненулевые элементы в одном столбце (т. е. в нашей записи нет полностью нулевых столбцов)
  $$\implies T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_k = 0$$

  > **Замечание.** Эти нули разной длины

  $$\implies \forall i \quad a_1^{(i)} s_1^{(i)} + \dots + a_{r_i} s_{r_i}^{(i)} = 0$$
  $$s_1^{(i)}, \dots, s_{r_i}^{(i)} \text{ ЛНЗ} \implies a_1^{(i)} = \dots = a_{r_i}^{(i)} = 0$$

□

Замечание. На самом деле, блочно-диагональная матрица — избыточное условие (достаточно, чтобы в каждой строке был ЛНЗ набор, и не было полностью нулевых столбцов), однако нам понадобится именно такой случай

Следствие. $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k, \qquad U - i$ — инвариантно для $\mathcal{A}$

$$\implies \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}\Big|_{U_1} + \dots + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}\Big|_{U_k}$$

4. Существование жордановой формы нильпотентного оператора

Определение 14. Оператор называется нильпотентным, если $\mathcal{A}^k = 0$ для некоторого k
Показатель нильпотентности — это наименьшее k, для которого $\mathcal{A}^k = 0$

Примеры. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathcal{A} : X \mapsto AX$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  Нильпотентный, с показателем 2
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  $$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  Нильпотентный, с показателем 3
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Определение 15. Жордановой клеткой порядка r с собств. знач. 0 называется квадратная матрица порядка r вида

$$J_r(0) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 16. Жордановой матрицей с собств. знач. 0 называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{r_2}(0) & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & F_{r_k}(0) & 0 \end{pmatrix}$$

Пример.

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Пусть это матрица оператора в базисах e_1, e_2, e_3, e_4, e_5

$$Je_1 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 = e_2$$

$$Je_2 = e_3, \qquad Je_3 = 0, \qquad Je_4 = e_5, \qquad Je_5 = 0$$

Обозначение. $e_1 \to e_2 \to e_3 \to 0, \qquad e_4 \to e_5 \to 0$

Определение 17. $\mathcal{A}$ — нильпотентный оператор
Жордановой цепочкой называется такой набор векторов $e_1, e_2, \ldots, e_r$, что $\mathcal{A}(e_i) = e_{i+1}$ при $i < r$ и $\mathcal{A}(e_r) = 0$

Обозначение. $e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_r \to 0$

Замечание. Вектор e_r является собственным вектором, соотв. $\lambda = 0$

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X \mapsto AX$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = 0$$

- $e_1 \to e_2 \to e_3 \to 0$ не бывает, т. к. $\mathcal{A}^2(e_1) = 0$
- Построим цепочку $e_1 \to e_2 \to 0$
  Найдём $\ker \mathcal{A}$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + 2y - 3z = 0$$
  $$\dim \ker \mathcal{A} = 2$$
  Найдём e_1, такой что $e_1 \to e_2 \to 0$:
  Любой вектор за 2 шага перейдёт в 0, т. к. $\mathcal{A}^2 = 0$
  Найдём e_1, который за 1 шаг **не** перейдёт в 0:
  Возьмём $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  $$e_2 = \mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  Найдём e_1', который перейдёт в 0:
  Возьмём e_1', линейно независимый с e_2
  Подойдёт $e_1' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  $$\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \to \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underset{e_1'}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  e_1, e_2, e_1' — жорданов базис
  Жорданова форма:
  $$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Лемма 2 (ЛНЗ жордановых цепочек)**.** Дано несколько жордановых цепочек:

$$e_1^{(1)} \to e_2^{(1)} \to \dots \to e_{r_1}^{(1)} \to 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_1^{(k)} \to e_2^{(k)} \to \dots \to e_{r_k}^{(k)} \to 0$$

Если последние векторы цепочек, т. е. $e_{r_1}^{(1)}, \dots, e_{r_k}^{(k)}$ ЛНЗ, то объединение цепочек ЛНЗ

Доказательство. Индукция по $r \coloneqq \max\{\, r_1, \dots, r_k \,\}$

- **База.** $r = 1$
  Все цепочки длины 1
  Все векторы — последние и, по условию, ЛНЗ

- **Переход.** $r - 1 \to r$

  $$\mathcal{A}(e_i^{(j)}) = \begin{cases} e_{i+1}^{(j)}, & i < r_j \\ 0, & i = r_j \end{cases}$$

  Применим s раз:

  $$\mathcal{A}^s(e_i^{(j)}) = \begin{cases} e_{i+s}^{(j)}, & i + s \le r_j \\ 0, & i + s < r_j \end{cases}$$

  Цепочки бывают двух видов: у некоторых длина r, а у некоторых — меньше (по определению r)
  НУО считаем, что цепочки с номерами $1, 2, \dots, m$ имеют длину r, а остальные — меньше, т. е.

  $$r_1 = r_2 = \dots = r_m = r, \qquad r_i < r \text{ при } i > m$$

  От противного: пусть набор ЛЗ:

  $$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} a_i^{(j)} e_i^{(j)} = 0, \qquad \text{не все } a_i^{(j)} \text{ равны } 0$$

  Применим к этому равентсву $\mathcal{A}^{r-1}$:

  – Если цепочка короче r, то она вся перейдёт в 0

  – Иначе — останется только поледний вектор

  То есть,

  $$e_1^{(j)} \to e_r^{(j)}, \qquad a_1^{(j)} e_1^{(j)} \to a_1^{(j)} e_r^{(j)}, \qquad \text{остальные } \to 0$$

  Получится сумма:

  $$\sum_{j=1}^{m} a_1^{(j)} e_r^{(j)}$$

  Заметим, что это ЛК последних векторов (которые, по условию, ЛНЗ)

  $$\implies a_1^{(j)} = 0 \quad \text{при } j \le m$$

  Уберём слагаемые $0 \cdot e_1^{(j)}$ при $j \le m$

  $$\sum_{j \le m} \sum_{i=2}^{r} a_i^{(j)} e_i^{(j)} + \sum_{j > m} a_i^{(j)} e_i^{(j)} = 0$$

  Это — ЛК векторов из цепочек длины $r - 1$ с теми же последними векторами
  Применим **индукционное предположение**. Вместе с условием, что последние векторы ЛНЗ, получаем, что все они ЛНЗ

$\square$

Лемма 3 (базис из жордановых цепочек)**.** $\mathcal{A}$ — оператор на V.

$e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис, являющийся объединением жордановых цепочек (в естественном порядке):

$$e_1 \to e_2 \to \dots \to e_{r_1} \to 0$$

$$e_{r_1+1} \to e_{r_2+2} \to \dots \to e_{r_1+r_2} \to 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_{r_1+\dots+r_{k-1}+1} \to \dots \to e_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+r_k} \to 0$$

Тогда матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе

$$A = \begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{r_2}(0) & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & J_{r_k}(0) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(e_{r_1}) = \mathcal{A}(e_{r_1+r_2}) = \dots = \mathcal{A}(e_{r_1+\dots+r_k}) = 0$$

Значит, при $i = r_1, r_1 + r_2, \dots\dots\dots\dots, r_1 + \dots + r_k, \quad i$-й столбец — нулевой
При $i \neq r_1, \dots\dots\dots\dots, r_1 + \dots + r_k, \quad \mathcal{A}(e_i) = e_{i+1} \implies i$-й столбец:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

□

Теорема 6 (жорданова форма нильпотентного оператора). Для любого нильпотентного оператора на конечномерном векторном пространстве существует жорданов базис

Доказательство. Будем доказывать, что существует базис из жордановых цепочек
Положим $W \coloneqq \ker \mathcal{A}$
Если мы возьмём ЛНЗ векторы из ядра и достроим (слева от них) цепочки, то получим жорданов базис
Положим $U_i \coloneqq \operatorname{Im} \mathcal{A}^i$

$$V = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_{k-1} \supset U_k = \{ 0 \}$$

где k — степень нильпотентности $\mathcal{A}$
Заметим, что если $v \in U_t \cap W$, то существует цепочка длины $t+1$ с концом v
Построим базис W (такой, чтобы можно было достроть цепочки):
Будем пересекать W с U_i
Выберем базис $W \cap U_{k-1}$. Он ЛНЗ, значит его можно дополнить до базиса $W \cap U_{k-2}$
В итоге получим базис $W \cap U_0 = W$
Получили базис $e_1, e_2, \dots$ пространства W
Для $e_i \in W \cap U_t$ построим цепочку длины $t+1$ с концом e_i:

$$e_1^{(i)} \to e_2^{(i)} \to \dots \to e_{t+1}^{(i)} = e_i \to 0$$

Объединение цепочек — ЛНЗ (по лемме)
Докажем, что это базис, т. е. что набор порождающий:
Докажем, что если $\mathcal{A}^s(v) = 0$, то v является ЛК векторов цепочек
Докажем **индукцией** по s:

- **База.** $s = 1$

$$\mathcal{A}^1(v) = 0, \qquad v \in W, \qquad e_1, e_2, \dots \text{ — базис } W$$

- **Переход.** $s \to s+1$
  Пусть $\mathcal{A}^{s+1}(v) = 0, \quad \mathcal{A}^s(v) \neq 0$
  Положим $u = \mathcal{A}^s \implies u \in U_s$

$$\underbrace{\overbrace{v \to \cdot \to \dots \to u}^{s} \to 0}_{s+1}$$

  Значит, $\mathcal{A}(u) = 0 \implies u \in W$
  Значит, $u \in U_s \cap W$
  Представим его в виде ЛК базиса $U_s \cap W$ (того, до которого мы дошли на каком-то очередном шагу дополнения базисов):

$$u = \sum_i a_i e_i$$

  $\forall e_i$ из этого базиса выбрана цепочка длины хотя бы $s+1$

$$e_i = e^{(i)}_{s+t_i} \text{ — последний вектор цепочки}$$

  Пусть e'_i — вектор цепочки, такой что $\mathcal{A}^s(e'_i) = e_i$ (вектор, который на s шагов раньше)

$$\mathcal{A}^s\left(\sum a_i e'_i\right) = \sum a_i e_i = u$$

  При этом, $\mathcal{A}^s(v) \overset{\text{def}}{=} u$
  Получили 2 линейных представления u, значит,

$$\mathcal{A}^s(v) = \mathcal{A}^s\left(\sum a_i e'_i\right) \implies \mathcal{A}^s\left(v - \sum a_i e'_i\right) = 0$$

  Тогда, **по индукционному предположению**, $v - \sum a_i e'_i$ представляется в виде ЛК векторов из цепочек
  Значит, v представляется в виде ЛК векторов цепочек

□

5. Многочлены от оператора

Обозначение. V — векторное пространство над K, $\quad \mathcal{A}$ — оператор на V, $\quad P \in K[x]$

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

Тогда $P(\mathcal{A}) = a_n \mathcal{A}^n + \dots + a_1 \mathcal{A} + a_0 \mathcal{E}$, т. е. такой опрератор $\mathcal{B}$, что

$$\mathcal{B}(v) = a_n \mathcal{A}^n(v) + \dots + a_2 \mathcal{A}^2(v) + a_1 \mathcal{A}(v) + a_0 v$$

Лемма 4 (произведение многочленов от оператора). P, Q — многочлены, $\mathcal{A}$ — оператор

$$\implies (PQ)(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}) \circ Q(\mathcal{A})$$

Доказательство. Пусть $P(t) = \sum p_i t^i, \quad Q(t) = \sum q_i t^i, \quad R(t) = P(t)Q(t)$

$$R(t) = \sum p_i q_j t^{i+j}$$

Положим $\mathcal{B} = P(\mathcal{A}), \quad \mathcal{C} = Q(\mathcal{A}), \quad \mathcal{D} = R(\mathcal{A})$
Нужно доказать, что $\mathcal{B}\Big(\mathcal{C}(v)\Big) = \mathcal{D}(v) \quad \forall v$
Пусть $w = \mathcal{C}(v)$

$$\implies \mathcal{B}(w) = \sum p_i \mathcal{A}^i(w), \qquad \mathcal{C}(v) = \sum q_j \mathcal{A}^j(v), \qquad \mathcal{D}(v) = \sum p_i q_j \mathcal{A}^{i+j}(v)$$

$$\mathcal{B}\Big(\mathcal{C}(v)\Big) = \mathcal{B}(w) = \mathcal{B}\Big(\sum p_j \mathcal{A}^j(v)\Big) = \sum q_j \mathcal{B}\Big(\mathcal{A}^j(v)\Big) = \sum q_j \Big(\sum p_i \mathcal{A}^i(\dashv\!|(v))\Big) =$$
$$= \sum q_j \Big(\sum p_i \mathcal{A}^{i_j}\Big) = \sum q_j p_i \mathcal{A}^{i+j} = \mathcal{D}(v)$$

□

Следствие. P, Q — многочлены, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ — операторы, $\mathcal{B} = P(\mathcal{A})$, $\mathcal{C} = Q(\mathcal{A})$

$$\implies \mathcal{B} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{B}$$

Доказательство. $PQ = QP \implies (PQ)(A) = (QP)(A)$ □

Обозначение. $a_1, .., a_n \neq \odot \iff$ **не** все они равны нулю

Теорема 7 (ядро и образ многочлена от оператора). $\mathcal{A}$ — оператор на V, P — многочлен, $\mathcal{B} = P(\mathcal{A})$
Тогда $\ker \mathcal{B}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{B}$ — инвариантные подпространства относительно $\mathcal{A}$

Доказательство. По лемме,
$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \tag{1}$$

- $\ker \mathcal{B}$
$$v \in \ker \mathcal{B} \implies \mathcal{B}(v) = 0 \implies \mathcal{A}\Big(\mathcal{B}(v)\Big) = 0 \underset{(2)}{\implies} \mathcal{B}\Big(\mathcal{A}(v)\Big) = 0 \implies \mathcal{A}(v) \in \ker \mathcal{B}$$

- $\operatorname{Im} \mathcal{B}$
$$v \in \operatorname{Im} \mathcal{B} \implies v = \mathcal{B}(w) \implies \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}\Big(\mathcal{B}(w)\Big) \underset{(2)}{=} \mathcal{B}\Big(\mathcal{A}(w)\Big)$$

□

Определение 18. $\mathcal{A}$ — оператор на V, $v \in V$

- Аннулятором v называется такой многочлен P, что $P(\mathcal{A})(v) = 0$
- Минимальным аннулятором v называется многочлен наименьшей степени среди ненулевых аннуляторов

Замечание. Минимальный аннулятор задаётся с точностью до умножения на константу

Примеры.

1. v — с. в., соответствующие λ (т. е. $\mathcal{A}v = \lambda v$)
$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} \qquad \mathcal{B}(v) = \mathcal{A}(v) - \lambda\mathcal{E}(v) = \lambda v - \lambda v = 0$$
Найдём p, такой что $\mathcal{B} = p(\mathcal{A})$:
$$p(t) = t - \lambda$$
$p(t)$ — минимальный аннулятор

2. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$\mathcal{A} : x \mapsto Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Докажем, что $p(t) = (t-2)^2$ — аннулятор $\forall v$:
   Найдём матрицу оператора $p(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \mathcal{E})^2$:
$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Возьмём теперь $Q(t) = t - 2$
Найдём v, такие что $Q(t)$ — аннулятор v:

$$(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(v) = 0$$

$$\mathcal{A}(v) = 2v$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Свойства.

1. V — конечномерно. Тогда

   (a) у любого вектора существует ненулевой аннулятор

   Доказательство. См. доказательство следующего пункта. □

   (b) если P_0 — минимальный аннулятор, то $\deg P_0 \le \dim V$

   Доказательство. Пусть $n \coloneqq \dim V$
   Докажем, что $\exists\, P : \deg P \le n,\ P$ — аннулятор, $P \ne 0$
   Возьмём
   $$\underbrace{v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), \dots, \mathcal{A}^n(v)}_{n+1 \text{ вектор}}$$
   Они ЛЗ, т. к. их больше, чем размерность пространства. Значит,
   $$\exists\, a_i \ne \odot : a_0 v + a_1 \mathcal{A}(v) + \dots + a_n \mathcal{A}^n(v) = 0$$
   Подойдёт $P(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ □

2. $P_1, \dots, P_k$ — аннуляторы v
   Тогда
   $$\forall \text{ многочл. } Q_1, \dots, Q_k \quad \text{многочлен } S(t) = Q_1(t)P_1(t) + \dots + Q_k(t)P_k(t) \text{ — аннулятор}$$

   Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_i \coloneqq P_i(\mathcal{A}), \qquad \mathcal{C}_i = Q_i(\mathcal{A}), \qquad \mathcal{D} = S(\mathcal{A})$
   $$\mathcal{D}(v) = \mathcal{C}_1\Big(\underbrace{\mathcal{B}_1(v)}_{=0}\Big) + \dots + \mathcal{C}_k\Big(\underbrace{\mathcal{B}_k(v)}_{=0}\Big) = \mathcal{C}_1(0) + \dots + \mathcal{C}_k(0) = 0$$
   □

3. $P_0(t)$ — минимальный аннулятор. Тогда
   $$P(t) \text{ — аннулятор} \iff P(t) \,\vdots\, P_0(t)$$

Доказательство. Поделим с остатком:

$$P(t) = Q(t)P_0(t) + R(t), \qquad \deg R < \deg P_0$$

- $\Longleftarrow$

$$R(t) = 0, \qquad P(t) = \underbrace{P_0(t)}_{\text{аннулятор}} Q(t) \text{ — аннулятор (по (2.))}$$

- $\Longrightarrow$

$$R(t) = \underbrace{P(t)}_{\text{аннул.}} - Q(t) \underbrace{P_0(t)}_{\text{аннул.}} \text{ — аннулятор (по (2.))}$$

□

4. Минимальный аннулятор — единственный с точностью до ассциированности (умножения на обратимый, т. е. на константу)

Доказательство.

$$\exists\, P_1, P_2 \text{ — мин. аннул.} \implies \underbrace{P_1}_{\text{аннул.}} \,\vdots\, \underbrace{P_2}_{\text{мин. аннул.}}$$

□

6. Циклические подпространства

Определение 19. $\mathcal{A}$ — оператор на V, $\qquad v \in V$
Циклическим подпространством, порождённым v называется минимальное по включению инвариантное подпространство, содержащее v

Теорема 8 (базис циклического подпространства). $k \in \mathbb{N}$ такое, что:

1. $v, \mathcal{A}(v), \dots, \mathcal{A}^{k-1}(v)$ ЛНЗ
2. $v, \mathcal{A}(v), \dots, \mathcal{A}^{k-1}(v), \mathcal{A}^k(v)$ ЛЗ

Тогда первый набор является базисом цикического подпространства, порождённого v

Доказательство. Пусть U — циклическое, порождённое v

$$U \text{ — инвар.} \implies v \in U \implies \mathcal{A}v \in U \implies \underbrace{\mathcal{A}^2 v}_{=\mathcal{A}(\mathcal{A}(v))} \in U \implies \dots\dots\dots\dots$$

$$v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v \in U$$

Они ЛНЗ. Чтобы доказать, что это базис, надо доказать, что они прождают U:
Положим $W = \langle v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v \rangle$
Докажем, что $W = U$:

- Докажем, что W — инвар.:
  $\mathcal{A}^k v$ — ЛК $v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v$

$$w \in W, \qquad w = a_0 v + \dots + a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}v$$

$$\mathcal{A}(w) = a_0 \mathcal{A}v + \dots + a_{k-2}\mathcal{A}^{k-1}v + \underbrace{a_{k+1}\mathcal{A}^k v}_{\text{ЛК } v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v}$$

  Значит, w является ЛК $v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v$

- Докажем, что W — минимальное:

Докажем, что если W_1 инвариантно и $v \in W_1$, то $W \subset W_1$:

$$\left.\begin{matrix} W_1 \text{ инвар.} \\ v \in W_1 \end{matrix}\right\} \implies \mathcal{A}v \in W_1, \qquad \left.\begin{matrix} W_1 \text{ инвар.} \\ \mathcal{A}v \in W_1 \end{matrix}\right\} \implies \mathcal{A}^2 v \in W_1, \qquad \dots\dots, \qquad \underbrace{\mathcal{A}^i v}_{\text{порожд.}W} \in W_1 \implies$$
$$\implies W_1 \subset W$$

□

Пример. $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}(v_1) = v_1$$

Циклическое подпространство — $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}^2(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Они все лежат в плоскости XOY, а их три штуки. Значит, они ЛЗ

Циклическое подпространство — $\langle v_2, \mathcal{A}(v_2) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}^2(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Они ЛНЗ. Размерность нашего пространства — 3, значит, если добавить четвёртый вектор, они будут ЛЗ

Циклическое подпространство — $\mathbb{R}^3$

Теорема 9 (циклическое подпространство и минимальный аннулятор)**.** V — конечномерное
$\mathcal{A}$ — оператор на V, $\quad v \in V$, $\quad U$ — цикл. подпр-во, порождённое v
χ — хар. многочлен $\mathcal{A}$ на U
Тогда χ — минимальный аннулятор v

Доказательство. Пусть k такое, что

1. $v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v$ ЛНЗ
2. $v, \mathcal{A}v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v, \mathcal{A}^k v$ ЛЗ

Путь a_i, не все равные нулю, такие, что

$$a_0 v + a_1 \mathcal{A}v + \dots + a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}v + a_k \mathcal{A}^k v = 0$$

Значит, $a_k \neq 0$ (т. к. $v \dots, \mathcal{A}^{k-1}v$ ЛНЗ)
Делим на a_k, НУО считая что $a_k = 1$:

$$\mathcal{A}^k v + \dots + a_1 \mathcal{A}v + a_0 v = 0$$

Положим $P(t) := t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0 \implies P(t)$ — аннулятор

- Докажем, что $P(t)$ — минимальный. **Пусть это не так**:

$$\exists\, Q'(t) = b_m t^m + \dots + t_0, \qquad Q \neq 0, \qquad Q\text{ — аннул. }, \qquad m < k$$

$$b_m \mathcal{A}^m v + \dots + b_0 v = 0$$

$b_i \neq \odot \implies \mathcal{A}^m v, \dots, v$ — ЛЗ — $\lightning$ (это был не первый момент линейной зависимости)

- Докажем, что $P(t) = \pm\chi$:
Знаем, что

$$v, \dots, \mathcal{A}^{k-1}v\text{ — базис } U$$

Матрица $\mathcal{A}\Big|_U$ в этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} v & \mathcal{A}v & \dots & \mathcal{A}^{k-2}v & \mathcal{A}^{k-1}v \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & . & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & . \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

В первом столбце (начиная со второй строки) — координаты $\mathcal{A}v = 0 \cdot v + 1 \cdot \mathcal{A}v + 0 \cdot \dots$
Во втором столбце — координаты $\mathcal{A}^2 v$
....
В последнем столбце — координаты $\mathcal{A}^k v$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -t & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -t & 0 & -a_{k-2} \\ . & . & . & . & . & -a_{k-1} - t \end{vmatrix}$$

Прибавим ко 2-й строке 1-ю, умноженную на $^1\!/_t$
Прибавим к 3-й строке 2-ю, умноженную на $^1\!/_t$ ....

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & -t & 0 & \dots & 0 & -a_1 - \frac{a_0}{t} \\ 0 & 0 & -t & \dots & 0 & -a_2 - \frac{a_1}{t} - \frac{a_0}{t^2} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & t - a_{k-1} - \frac{a_{k-2}}{t} - \dots - \frac{a_1}{t^{k-2}} - \frac{a_1}{t^{k-1}} \end{vmatrix}$$

Это будет $(-1)^k P(t)$

$\square$

7. Минимальный многочлен оператора

Определение 20. Многочлен $P(t)$ аннулирует $\mathcal{A}$, если $P(\mathcal{A}) = 0$

Замечание. Он является аннулятором для всех векторов

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A} : X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$$

$$P(t) = (t-2)^2\text{ — аннулирует } A$$

$Q(t) = t - 2$ не аннулирует $\mathcal{A}$, т. к. $\Big(Q(\mathcal{A})\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Определение 21. Минимальным многочленом оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$

Свойства. $\mathcal{A}$ — оператор на V

1. $P_1, \dots, P_k$ аннулируют $\mathcal{A}$
   Тогда для любых многочленов $Q_1, \dots, Q_k$ многочлен $S(t) = P_1(t)Q_1(t) + \dots + Pk(t)Q_k(t)$ аннулирует $\mathcal{A}$

   Доказательство. $\forall v \quad P_i$ — аннулятор $v \implies S(\mathcal{A})$ — аннулятор $v \implies S$ аннулирует $\mathcal{A}$ □

2. P_0 — минимальный многочлен для $\mathcal{A}$. Тогда

$$P \text{ аннулирует } \mathcal{A} \iff P \mathrel{\vdots} P_0$$

   Доказательство. Пусть $P = P_0 Q + R$

   - Если $P \mathrel{\vdots} P_0$, то $P = P_0 Q \underset{1.}{\implies} P$ аннулирует $\mathcal{A}$
   - Если P аннулирует $\mathcal{A}$, то $R = P - P_0 Q$ аннулирует $\mathcal{A} \underset{1.}{\implies} R = 0 \implies P \mathrel{\vdots} P_0$

   □

3. Минимальный многочлен $\mathcal{A}$ единственнен с точностью до ассоциирования

4. $e_1, \dots, e_n$ — базис V, $\quad P_1(t), \dots, P_n(t)$ — минимальные аннуляторы для $e_1, \dots, e_n$
   Тогда НОК $(P_1, \dots, P_n)$ является минимальным многочленом для A

   Доказательство. Пусть $P = \text{НОК}\,(P_1, \dots, P_n)$

   - Проверим, что P аннулирует A:
     Пусть $v \in V, \quad v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$
     Применим P:

$$P(\mathcal{A})(v) = a_1 P(\mathcal{A}) e_1 + \dots + a_n P(\mathcal{A}) e_n$$

$$P \mathrel{\vdots} P_i \implies P \text{ — аннул. для } e_i \implies P(\mathcal{A}) e_i = 0$$

$$P(\mathcal{A})(v) = a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0$$

     Замечание. Тем самым, мы доказали, что аннулятор многочлена существует

   - Проверим, что P минимальный:
     Пусть $Q(t)$ аннулирует $\mathcal{A}$

$$\implies Q(\mathcal{A})v = 0 \quad \forall v \implies Q(\mathcal{A})e_i = 0 \quad \forall i \xrightarrow[P_i \text{ — мин. аннул.}]{} \\ \implies Q \mathrel{\vdots} P_i \quad \forall i \implies Q \mathrel{\vdots} P \implies \deg Q \geq \deg P$$

   □

Теорема 10 (Гамильтона-Кэли)**.** Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ аннулирует $\mathcal{A}$, т. е.

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$$

Доказательство. Нужно доказать, что $\forall v \quad \chi(\mathcal{A})v = 0$
Докажем, что $\chi_{\mathcal{A}} \mathrel{\vdots} P_0$, где P_0 — минимальный аннулятор (все аннуляторы делятся на минимальный):
Пусть U — циклическое подпространство, порождённое v
χ_U — характеристический многочлен $\mathcal{A}\Big|_U$ (он определён, т. к. пространство ивариантно)
По следствию о делителях характеристического многочлена, $\chi \mathrel{\vdots} \chi_U$
Знаем, что χ_U — минимальный аннулятор для v на U (по т. о циклическом подпространстве и мини-

мальном аннуляторе)

$$\left.\begin{array}{l}\chi_U = P_0\\ \chi \,\vdots\, \chi_U\end{array}\right\} \implies \chi \,\vdots\, P_0$$

$\square$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \chi_{\mathcal{A}}(t) = (1-t)^2 = t^2 - 2t + t$$

$$A^2 - 2A + E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Следствие. P_0 — минимальный многочлен $\mathcal{A}$
Тогда $\chi \,\vdots\, P$

8. Примарные и корневые подпространства

Определение 22. K — поле, V — векторное пространство над K, $\mathcal{A}$ — оператор на V
$P(t)$ — минимальный унитарный многочлен $\mathcal{A}$ (старший коэффициент P равен 1)
Пространство V называется примарным относительно $\mathcal{A}$, если $P(t) = Q^s(t)$ для некоторого $Q(t)$, неприводимого над K

Замечание. Если $s = 0$, то $P = \text{const} \implies V = \{0\}$. Можно считать, что оно примарно

Примеры.

1. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{A} : X \mapsto AX$

$$A = \begin{pmatrix}2 & & & \\ 0 & 2 & * & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad \chi_A = (2-t)^4$$

$(2-t)^4 \,\vdots$ минимальный многочлен $\implies$ минимальный многочлен $= (2-t)^s$, $s \le 4$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} : X \mapsto AX$

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \chi_{\mathcal{A}} = t^2 + 1 \text{ — неприв.} \implies \text{примарно}$$

3. То же самое, но $K = \mathbb{C}$

$$\chi_{\mathcal{A}} = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$$

$$P_1(t) = t - i, \qquad P_2(t) = t + i$$

P_1, P_2 — не аннул. $\mathcal{A}$:

$$\begin{pmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix} \ne 0, \qquad \begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix} \ne 0$$

$\implies \chi_{\mathcal{A}}(t)$ — минимальный многочлен. Пространство не примарно

Свойства (взаимно простых многочленов от оператора). $\mathcal{A}$ — оператор на V

1. $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — попарно взаимно просты, $T(t) = P_1(t) \ldots P_k(t)$, $v \in V$, T аннулир. v.
Тогда $\exists\, v_1, \ldots, v_k :$ $v = v_1 + \cdots + v_k$ и P_i аннулирует v_i

Доказательство. **Индукция.**

- **База.** $k = 2$
  P, Q взаимно просты, $\quad v \in V$
  Докажем, что $\exists\, v, w : v = u + w, \quad P(\mathcal{A})u = 0, \quad Q(\mathcal{A})w = 0$
  Т. к. P, Q взаимно просты, можно разложить их НОД $(= 1)$:

$$\exists\, F(t), G(t) : P(t)F(t) + Q(t)G(t) = 1$$

  Применим к $\mathcal{A}$:

$$P(\mathcal{A}) \circ F(\mathcal{A}) + Q(\mathcal{A}) \circ G(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$$

  Применим к v:

$$(PF)(\mathcal{A})v + (QG)(\mathcal{A})v = v$$

  Положим $u = (QG)(\mathcal{A})v, \quad w = (PF)(\mathcal{A})v$
  Проверим, что $P(\mathcal{A})u = 0$ (для w — аналогично):

$$P(\mathcal{A}) \circ \Big(QG(\mathcal{A})\Big)v = \Big(PQG\Big)(\mathcal{A})v \xlongequal[\text{коммут.}]{} \Big(GPQ\Big)(\mathcal{A})v =$$

$$= G(\mathcal{A}) \underbrace{(PQ)(\mathcal{A})v}_{=0 \text{ (т. к.} T = PQ \text{ анн. } v)} = 0$$

- **Переход.** $k - 1 \to k$

$$T = \underbrace{P_1 \dots P_{k-1}}_{P} \underbrace{P_k}_{Q}$$

$$(PQ)(\mathcal{A})v = 0 \xRightarrow[\text{база}]{} \exists\, u, w : v = u + w, \quad P(\mathcal{A})u = 0, \quad Q(\mathcal{A})w = 0$$

  По **индукционному предположению**,

$$\exists\, v_1, \dots, v_{k-1} : P_i \text{ аннул. } v_i, \quad u = v_1 + \dots + v_{k-1}$$

$$v = v_1 + \dots + v_{k-1} + \underset{:= v_k}{w}$$

□

2. P, Q взаимно просты, $\quad P, Q$ аннуляторы $v \quad \Longrightarrow v = 0$

Доказательство. Пусть T — минимальный аннулятор v

$$\left.\begin{matrix} P \,\vdots\, T \\ Q \,\vdots\, T \end{matrix}\right\} \Longrightarrow T = \text{const}, \quad T(t) = c \Longrightarrow cv = 0 \Longrightarrow v = 0$$

□

Теорема 11 (разложение пространства в прямую сумму примарных подпространств). K — поле, $\quad V$ — векторное пространство над K, $\quad \mathcal{A}$ — оператор на V
$P(t)$ — минимальный моногочлен $\mathcal{A}$, он разложен на множители:

$$P(t) = P_1(t) \dots P_k(t), \qquad \text{где } P_i(t) = Q_i^{s_i}(t), \qquad Q_i \text{ — неприводимы. над } K$$

Тогда $\exists$ подпространства $U_1, \dots, U_k$, такие что

1. все U_i иварианнты
2. $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$
3. $P_i(t)$ — минимальный многочлен $\mathcal{A}$ на $U_i \quad \forall i$

Доказательство. Положим $U_i = \ker P_i(\mathcal{A})$. Докажем, что они подойдут:

1. Ядро многочлена от оператора инвариантно (было такое свойство)

2. (a) Докажем, что $V = U_1 + \dots + U_k$
$P_1, \dots, P_k$ попарно взаимно просты, и $P_1 \cdot \dots \cdot P_k$ аннулируют любой v, значит

$$\forall v \quad \exists v_1, \dots, v_k : v_1 + \dots + v_k, \qquad P_i \text{ аннул. } v_i \implies v_i \in U_i$$

(b) Докажем, что сумма прямая:
Нужно проверить, что $U_s \cap \Big(U_1 + \dots + U_{s-1} + U_{s+1} + \dots + U_k\Big) = \{ 0 \} \quad \forall s$
НУО проверим, что $(U_1 + \dots + U_k) \cap U_k = \{ 0 \}$
Возьмём $v \in (U_1 + \dots + U_{k-1}) \cap U_k$

$$v = v_1 + \dots + v_{k-1}, \qquad v_i \in U_i, \qquad v \in U_k$$

По одному из свойств,

$$P_1 \cdot \dots \cdot P_{k-1} \text{ аннулирует } v_1 + \dots + v_{k-1} = v$$

При этом, P_k аннулирует v
Заметим, что $(P_1 \cdot \dots \cdot P_{k-1}, P_k) = 1$
По одному из свойств, это означает, что $v = 0$

3.

$$U_i = \ker P_i(\mathcal{A}) \implies P_i(\mathcal{A})\Big|_{U_i} = 0$$

P_i аннулирует $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$

Значит, P_i делится на минимальный многочлен $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$

При этом, $P_i = Q_i^{s_i}$
Отсюда минимальный тоже является $Q_i^{r_i}, \qquad r_i \le s_i$
Хотим доказать, что $r_i = s_i$
Пусть $T = Q_1^{r_1} \dots Q_k^{r_k}$
Т. к. у нас прямая сумма, существует $e_1, \dots, e_n$ — базис V, он является объединением базисов U_i

$$\implies T(\mathcal{A})e_1 = 0, \dots\dots\dots\dots, T(\mathcal{A})e_k = 0$$

$$\implies T \text{ аннулирует } \mathcal{A} \xrightarrow[P\text{ — мин. многочл.}]{} \underbrace{T}_{\prod Q_i^{r_i}} \vdots \underbrace{P}_{\prod Q_i^{s_i}}, \quad r_i \ge s_i \implies r_i = s_i$$

□

Определение 23. λ — с. ч. $\mathcal{A}$
Вектор v называется корневым вектором, соответствующим λ, если для некоторого k многочлен $P(t) = (t - \lambda)^k$ является аннулятором v
Множество корневых векторов называется корневым подпространством, соотв. λ

Свойства.

1. Корневое подпространство инвариантно

Доказательство. Пусть $P(t) = (\lambda - t)^k$ — аннул. v, т. е. $P(\mathcal{A})v = 0$

$$P(\mathcal{A})(\mathcal{A}v) = \Big(P(\mathcal{A}) \circ \mathcal{A}\Big)v = \Big(\mathcal{A} \circ P(\mathcal{A})\Big)v = \mathcal{A}\Big(\underbrace{P(\mathcal{A})v}_{=0}\Big) = \mathcal{A}(0) = 0$$

□

2. V конечномерно, минимальный многочлен $\mathcal{A}$ раскладывается на линейные множители

$$P(t) = (\lambda_1 - t)^{s_1} \dots (\lambda_k - t)^{s_k}$$

Тогда $\ker\left((\lambda_i\mathcal{E}-\mathcal{A})^{s_i}\right)$ — корневые подпространства

Доказательство. Пусть $U_i = \ker\left((\lambda_i\mathcal{E}-\mathcal{A})^{s_i}\right)$, $\quad W_i$ — корневое подпространство для λ_i

- $U_i \subset W_i$ — очевидно ($v \in U_i \implies (\lambda_i\mathcal{E}-\mathcal{A})^{s_i} v = 0$, $\quad$ подойдёт $k = s_i$)
- $W_i \subset U_i$
  Нужно показать, что если вектор аннулируется, то он это сделает не больше чем за s_i шагов
  Пусть $v \in W_i$
  Пусть k — минимальное число, такое что $(\lambda_i\mathcal{E}-\mathcal{A})^k$ аннулирует v
  Тогда $(\lambda - t)^k$ — минимальный аннулятор v
  При этом, $P(t)$ — аннулятор v

$$\implies P(t) \,\vdots\, (\lambda-t)^k \xRightarrow[(\lambda-t) \text{ входит в } P \text{ только в степени } s_i]{} k \le s_i \implies v \in U_i$$

□

9. Существование жордановой формы

Повторим определения:

Определение 24. Жордановой клеткой порядка r с с. ч. λ называется матрица порядка r вида

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & 0 \\ 1 & \lambda & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 25. Жордановой матрицей называется блочно-диагональная матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \qquad \text{(как } r_i\text{, так и } \lambda_i \text{ могут совпадать)}$$

Определение 26. Жорданов базис — базис, в котором матрица оператора жорданова

Теорема 12 (существование жордановой формы). K — поле, $\quad V$ — векторное пространство над K
$\mathcal{A}$ — оператор, $\quad \chi_{\mathcal{A}}(t)$ раскладывается на линейные множители над K
Тогда для $\mathcal{A}$ существует жорданов базис

10. Существование жордановой формы

Доказательство (теоремы о существовании жордановый формы).

- Докажем для случая, когда минимальный многочлен $\mathcal{A}$ имеет вид $P(t) = (t-\lambda)^r$
  Сведём к случаю нильпотентного опреатора:
  Положим $B = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$
  $\mathcal{B}^r = 0$, $\quad \mathcal{B}$ — нильпотентный
  Значит, существует жорданов базис $\mathcal{B}$, причём на диагонали жордановой формы стоят нули

- Общий случай
$$\chi_{\mathcal{A}} = (-1)^n (t-\lambda_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_m)^{s_m}$$
  По следствию к теореме Гамильтона-Кэли минимальный многочлен — делитель $\chi \implies$ мини-

мальный многочлен имеет вид

$$P(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_m)^{r_m}$$

Применим теорему о разложении в сумму примарных подпространств:
Пусть $Q_i \coloneqq (t-\lambda_i)^{r_i}$
По теореме

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

U_i инвариантны
$Q_i(t)$ — минимальный многочлен $\mathcal{A}$ на U_i
К U_i применяем нильпотентный случай:
Существует жорданов базис U_i
Матрица $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$ имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_i) & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_{r_k}(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

Значит, в базисе, полученном объединением базисов U_i матрица $\mathcal{A}$ имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_m \end{pmatrix}$$

□

Свойства (возведения в степень жордановой клетки)**.**

1. (a) $\Big(J_r(0)\Big)^s = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $s < r$

   То есть,

   $$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i-j=s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   (b) $\Big(J_r(0)\Big)^s 0$ при $s \geq r$

Пример. $r = 4$

$$\Big(J_4(0)\Big)^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Big(J_4(0)\Big)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Big(J_4(0)\Big)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Big(J_4(0)\Big)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Формально — **индукция** по s. На самом деле, повторяем действия из примера

- **База.** $s = 1$
$$J_1(0) = (0)$$
- **Переход.** $s \to s+1$
$$J_r^s(0) = a_{ij}, \qquad J_r(0) = b_{ij}, \qquad J_r^{s+1}(0) = c_{ij}$$
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + \dots + a_{in}b_{ni} \tag{2}$$
Среди a_{ij} не более одной единицы, остальные нули
Среди b_{xj} не более одной единицы, остальные нули
Значит, $c_{ij} = 0$ или $c_{ij} = 1$
$$c_{ij} = 1 \iff \exists x : \begin{cases} a_{ix} = 1 \\ b_{xi} = 1 \end{cases} \underset{(2)}{\iff} \exists x : \begin{cases} i - x = s \\ x - j = 1 \end{cases} \iff i - j = s + 1$$

□

2. Пусть $\lambda \neq 0$, $\qquad A = \Big(J_r(\lambda)\Big)^s$
Тогда A нижнетреугольная
$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda^{i-j} C_s^{i-j}, & i > j, i - j \le s \\ 0, & i > j, i - j > s \end{cases}$$

Пример.
$$\Big(J_4(2)\Big)^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 \\ C_5^1 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 & 0 \\ C_5^2 \cdot 2^3 & C_5^1 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 \\ C_5^3 \cdot 2^3 & C_5^2 \cdot 2^5 & C_5^1 \cdot 2 & 2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 & 0 \\ 10 \cdot 2^3 & 5 \cdot 2^4 & 2^5 & 0 \\ 10 \cdot 2^3 & 10 \cdot 2^3 & 5 \cdot 2^4 & 2^5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 32 & 0 & 0 \\ 80 & 80 & 32 & 0 \\ 40 & 80 & 80 & 32 \end{pmatrix}$$

Доказательство. $J_r(\lambda) = \lambda \cdot E + J_r(0)$
Возведём в степень и распишем как бином Ньютона (учитывая, что λE коммутирует с чем угодно, а значит, можно приводить подобные):
$$\Big(J_r(\lambda)\Big)^s = (\lambda E)^s + C_s^1 (\lambda E)^{s-1} J_r(0) + \dots\dots + C_s^{r-1} (\lambda E)^{s-r+1} J_r(0)^{r-1} + \underbrace{J_r^r(0)}_{=0}(\dots) \overset{}{\underset{\text{св-во } 1a}{=\!=\!=}}$$
$$= \lambda^s E + C_s^1 \lambda^{s-1} J_r(0) + \dots\dots + C_s^{r-1} \lambda^{s-r+1} J_r^{r-1}(0) =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^s & . & 0 \\ . & . & . \\ 0 & . & \lambda^s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 \\ \lambda^{s-1} C_s^1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & \lambda^{s-1} C_s^1 & 0 \end{pmatrix} + \dots\dots + \begin{pmatrix} 0 & . & 0 \\ . & . & . \\ \lambda^{s-r+1} C_s^{r-1} & . & 0 \end{pmatrix}$$

□

3. $\operatorname{rk}\Big(\big(J_r(0)\big)^s\Big) = \begin{cases} r - s, & s < r \\ 0, & s \ge r \end{cases}$

Теорема 13 (количество клеток и ранг). J — жорданова матрица

Тогда количество клеток вида $J_r(\lambda)$ равно

$$\operatorname{rk}\Big(J-\lambda E\Big)^{r-1}-2\operatorname{rk}\Big(J-\lambda E\Big)^{r}+\operatorname{rk}\Big(J-\lambda E\Big)^{r+1}$$

Доказательство. Положим $f(s) \coloneqq \operatorname{rk}(J-\lambda E)^s$

$$J=\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_{r_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}, \qquad J-\lambda E=\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1-\lambda) & . & . \\ . & . & . \\ . & . & J_{r_k}(\lambda_k-\lambda)\end{pmatrix}$$

$$(J-\lambda E)^s=\begin{pmatrix} \Big(J_{r_1}(\lambda_1-\lambda)\Big)^s & . & . \\ . & . & . \\ . & . & \Big(J_{r_k}(\lambda_k-\lambda)\Big)^s\end{pmatrix}$$

Какое-то из λ_i совпало с λ

$$f(s)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{rk}\Big(\big(J_{r_i}(\lambda_i-\lambda)\big)^s\Big)$$

- Если $\lambda \neq \lambda_i$, то $\operatorname{rk}\Big(\big(J_{r_i}(\lambda-\lambda_i)\big)^s\Big)=r_i \quad \forall s$

$$f(s)-f(s+1)=\sum\Big[\operatorname{rk}\Big(J^s_{r_i}(\lambda_i-\lambda)\Big)-\operatorname{rk}\Big(J^{s+1}_{r_i}(\lambda-\lambda_i)\Big)\Big]$$

  То есть, если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то i-е слагаемое равно $r_i-r_j=0$

- Если $\lambda_i=\lambda, \quad r_i \le s$, то i-е слагаемое равно $0-0=0$
- Если $\lambda_i=\lambda, \quad r_i < s$, то i-е слагаемое равно $(r_i-s)-\Big(r_i-(s+1)\Big)=1$

$f(s+1)-f(s)$ — количество клесток, для которых $\lambda_i=\lambda, \quad r_i > s$
$\Big(f(s+1)-f(s)\Big)-\Big(f(s)-f(s-1)\Big)$ — количество клеток размера s
Применяя три случая, получаем, что это равно $f(s+1)-2f(s)+f(s-1)$ $\square$

Следствие (единственность жордановой формы)**.** Пусть J, J' — жордановы
J, J' — матрицы $\mathcal{A}$ в некоторых базисах
Тогда J, J' совпадают с точностью до перестановки жордановых клеток

Доказательство. J, J' — матрицы $\mathcal{A}$
$J-\lambda E, J'-\lambda E$ — матрицы $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$
$(J-\lambda E)^s, (J'-\lambda E)^s$ — матрицы $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^s$
rk не зависит от выбора базиса $\square$

Теорема 14 (минимальный многочлен)**.** J — жоданова матрица, $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_k$ — с. ч. J
r_i — максимальный размер жордановой клетки, соотв. λ_i
Тогда минимальный многочлен равен $(t-\lambda_1)^{r_1}\dots(t-\lambda_k)^{r_k}$

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — жорданов базис
P_i — минимальный аннулятор e_i
Тогда минимальный многочлен равен НОК $(P_1, \dots, P_n)$
Пусть e_i соответстсвует j-му столбцу клетки $J_r(\lambda)$

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{r-i}(e_i)=0, \qquad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{r-i-1}(e_i)\neq 0$$

$$\implies P_i(t)=(t-\lambda)^{r-i}$$

Минимальный многочлен — это НОК многочленов вида $(t-\lambda_i)^s, \quad s \le r_i$

Среди них есть $(t-\lambda_1)^{r_1}, \dots, (t-\lambda_k)^{r_k}$
Значит, среди них есть P_i, а остальные — не делители

$$\implies \text{НОК} = (t-\lambda_1)^{r_1} \dots (t-\lambda_k)^{r_k}$$

□

11. Комплексификация

В предыдущем параграфе мы доказали, что жорданова форма существует, если многочлен раскладывается на простейшие множители. Это всегда верно над $\mathbb{C}$. В этом параграфе рассмотрим жордановы формы над $\mathbb{R}$

Идея построения V — вект. пространство над $\mathbb{R}$
Построим $\widehat{V}$ над $\mathbb{C}$, состоящее из $u + vi, \quad u, v \in \mathbb{R}$
Для этого определим сложение и умножение, как в комплексных числах:

- $(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)i$
- $(a + bi)(u + vi) = au + bui + avi + bvi^2$

Определение 27. V — векторное пространство над $\mathbb{R}$
Комплексификация V — это множество $\widehat{V}$, состоящее из пар (u, v) с операцией $\mathbb{C} \times \widehat{V} \to \widehat{V}$, заданной равенством

$$(a + bi) \cdot (u, v) = \big(au - bv, av + bu\big)$$

и операцией $\widehat{V} \times \widehat{V}$, заданной равенством

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = \big(u_1 + u_2, v_1 + v_2\big)$$

Определение 28. $w = (u, v)$
$(u, -v)$ называется сопряжённым к w

Обозначение. $\overline{w}$

Теорема 15. $\widehat{V}$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$

Доказательство.

1. $\widehat{V}$ — абелева группа по сложению
2. $1 \cdot w = w$
3. Ассоциативность умножения
4. Две дистрибутивности умножения

Всё проверяется подстановкой □

Обозначение. Пару (u, v) будем обозначать $u + vi$

Обозначение. Множество пар $(u, 0)$ отождествим с V

12. Продолжаем комплексификацию

Напоминание. Мы ввели элементы вида $u + vi$, определили для них сложение и умножение, доказали, что это векторное пространство

Теорема 16 (базис комплексификации)**.** Пусть $e_1, .., e_n$ — бизс V
Тогда $e_1 = e_1 + 0 \cdot i, \dots, e_n = e_n + 0 \cdot i$ — базс $\widehat{V}$

Доказательство.

- Докажем, что система является порождающей:
  Пусть $w \in \widehat{V}$
  Разложим u и v по базису $e_1, \dots, e_n$ в V:

$$u = a_1e_1 + \dots + a_ne_n, \qquad v = b_1e_1 + \dots + b_ne_n, \qquad a_s, b_s \in \mathbb{R}$$

$$w = (\underbrace{a_1 + b_1i}_{\in\mathbb{C}})e_1 + \dots + (\underbrace{a_n + b_ni}_{\in\mathbb{C}})e_n$$

- Докажем ЛНЗ:
  Пусть $c_1e_1 + \dots + c_ne_n = 0, \quad c_s \in \mathbb{C}, \quad c_s = a_+b_si, \quad a_s, b_s \in \mathbb{R}$

$$(a_1 + b_1i)(e_1 + 0i) + \dots\dots\dots + (a_n + b_ni)(e_n + 0i) = 0$$

  Разделим вещественную и мнимую части:

$$\Big((a_1e_1 - b_10) + \dots\dots\dots + (a_ne_n - b_n0)\Big) + \Big((a_10 + b_1e_1) + \dots\dots\dots + (a_n0 + b_ne_n)\Big)i = 0 + 0i$$

  Значит, каждое большое слагаемое равно нулю:

$$\begin{cases} a_1e_1 + \dots + a_ne_n = 0 \\ b_1e_1 + \dots + b_ne_n = 0 \end{cases} \xRightarrow[e_1,\dots,e_n \text{ ЛНЗ в } V]{} \begin{cases} a_1 = \dots = a_n = 0 \\ b_1 = \dots = b_n = 0 \end{cases}$$

□

Следствие. $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{V} = \dim_{\mathbb{R}} V$

Свойства (сопряжённых векторов).

1. $\overline{\overline{w}} = w$

   Доказательство. $w = u + vi, \qquad \overline{w} = u - vi, \qquad \overline{\overline{w}} = u - (-v)i = u + vi = w$ □

2. $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

   Доказательство. Первое равенство — упражнение. Проверим второе:
   Пусть $z = a + bi, \quad w = u + vi$

$$\overline{(a + bi)(u + vi)} = \overline{(au - bv) + (av + bu)i} = (au - bv) - (av + bu)i$$

$$\overline{(a + bi)} \cdot \overline{(u + vi)} = (a - b_i)(u - v_i) = \Big(\underbrace{au - (-b)(-v)}_{au - bv}\Big) + \Big(\underbrace{a(-v) + (-b)u}_{-(av+bu)}\Big)$$

□

3. $w_1, \dots, w_n$ ЛНЗ $\iff \overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}$ ЛНЗ

   Доказательство. Достаточно доказать в одну сторону ($\implies$), дальше сошлёмся на первое свойство
   Пусть $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}$ ЛЗ, то есть

$$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}: \quad c_1\overline{w_1} + \dots + c_n\overline{w_n} = 0, \qquad c_i \neq \odot$$

$$0 = \overline{0} = \overline{c_1\overline{w_1} + \dots + c_n\overline{w_n}} \xlongequal[\text{2 св-во}]{} \overline{c_1}\overline{\overline{w_1}} + \dots + \overline{c_n}\overline{\overline{w_n}} \xlongequal[\text{1 св-во}]{} \overline{c_1}w_1 + \dots + \overline{c_n}w_n$$

$$c_i \neq \odot \implies \overline{c_i} \neq \odot$$

   $w_1, \dots, w_n$ ЛЗ — ↯ □

12.1. Операторы

Определение 29. $\mathcal{A}$ — оператор на V
Продолжением $\mathcal{A}$ на $\widehat{V}$ называется отображение $\widehat{\mathcal{A}} : \widehat{V} \to \widehat{V}$, заданный равенством $\widehat{\mathcal{A}}(u + vi) = \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)i$

Свойство. $\widehat{\mathcal{A}}$ линейно

Доказательство. Упражнение □

12.2. Многочлены от оператора

Обозначение. $P(t) = c_K t^k + c_{k-1}t^{k-1} + \cdots + c_0, \qquad c_s \in \mathbb{C}$
Тогда $\overline{P}(t) = \overline{c_k}t^k + \overline{c_{k-1}}t^{k-1} + \cdots + \overline{c_0}$ — сопряжённый к P

Лемма 5 (применение операторов к сопряжённым векторам). $\mathcal{A}$ — оператор на V. Тогда

1. $\widehat{\mathcal{A}}(\overline{w}) = \overline{\widehat{\mathcal{A}}(w)}$

   Доказательство. Пусть $w = u + iv, \qquad \overline{w} = u - iv$

   $$\widehat{\mathcal{A}}(w) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}vi, \qquad \mathcal{A}(\overline{w}) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}(-v)i = \mathcal{A}u - \mathcal{A}vi$$

   □

2. $P(\widehat{\mathcal{A}})(w_1) = w_2 \implies \overline{P}(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w_1}) = \overline{w_2}$

   Доказательство. Из первого свойства $\widehat{\mathcal{A}}^{(s)}(\overline{w_1}) = \overline{\mathcal{A}^{(s)}(w_1)}$
   Пусть $P(t) = c_k t^k + \cdots + c_0$

   $$w_2 = c_k P(\widehat{\mathcal{A}})(w_1) + \cdots + c_0 w_1$$

   $$\overline{w_2} = \overline{c_k}P(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w_1}) + \cdots + c_0\overline{w_1} = \overline{P}(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w_1})$$

   □

3. Если $P(t)$ аннулирует w, то $\overline{P}(t)$ аннулирует $\overline{w}$

   Доказательство. $P(\widehat{\mathcal{A}})(w) = 0 \implies \overline{P}(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w}) \underset{\text{2 св-во}}{=\!=\!=} \overline{P(\widehat{\mathcal{A}})(w)} = \overline{0} = 0$ □

4. Если w — корневой вектор, соответствующий λ, то $\overline{w}$ — корневой вектор, соответствующий $\overline{\lambda}$

   Доказательство. $P(t) = (t - \lambda)^k$ аннулирует w для некоторого k
   $\implies \overline{P}(t)$ аннулирует $\overline{w}$ (из 3 св-ва)

   $$\overline{P}(t) = (t - \overline{\lambda})^k$$

   □

5. Если $w_1, \ldots, w_n$ — (жорданов) базис корневого подпространства, соответствующего λ, то $\overline{w_1}, \ldots, \overline{w_n}$ — (жорданов) базис корневого подпространства, соответствующего $\overline{\lambda}$ (если один жорданов, то и второй жорданов)

Доказательство.

- ЛНЗ доказана
- Докажем, что это порождающая система:
  Пусть $\overline{w}$ принадлежит пространству, соответстсвующему $\overline{\lambda} \implies w$ принадлежит пространству, соотв. λ
  Разложим по базису:
$$\exists c_i : \quad w = c_1e_1 + \dots + c_ne_n$$
$$\implies \overline{w} = \overline{c_1e_1} + \dots + \overline{c_ne_n}$$
- Докажем, что сопряжённый к жорданову базису жорданов:
$$\widehat{\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{A}} - \lambda\widehat{\mathcal{E}}$$
$$(\widehat{\mathcal{A}} - \lambda\widehat{\mathcal{E}})e_i = e_{i-1} \implies (\widehat{\mathcal{A}} - \overline{\lambda}\mathcal{E})\overline{e_i} = \overline{e_{i+1}}$$

□

Теорема 17. Пусть V - конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\quad \mathcal{A}$ — оператор на V
Тогда существует базис V, в котором матрица $\mathcal{A}$ является блочно-диагональной, и каждый блок — либо жорданова клетка, либо имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -b & a & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & a & b & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & -b & a & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & a & b & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & -b & a & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & a & b \\ . & . & . & . & . & . & . & . & -b & a \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть минимальный многочлен $\mathcal{A}$ равен

$$P(t) = (t - a_1)^{m_1} \dots\dots (t^2 + p_1t + a_1)^{s_1} \dots\dots$$

где $t + p_1t + q_1, \dots\dots$ не имеют вещественных корней
Разложим V в прямую сумму примарных подпространств
Достаточно доказать для одного подпростанства
Для пространства, соответствующего $(t - a)^m$ есть базис, в котором матрица $\mathcal{A}$ является блочно-диагональной, и в котром матрица $\mathcal{A}$ жорданова
Рассмотрим подпространство, соответствующе $t^2 + pt + q)^s$:
Пусть $\lambda, \overline{\lambda}$ — комплексные корни $t^2 + ptq$

$$(t^2 + pt + q)^s = (t - \lambda)^s(t - \overline{\lambda})^s$$

Пусть $P_1 = (t^2 + pt + q)^s$
Знаем, что $P_1(\mathcal{A}) = 0$ на корневом подпространстве U
Тогда $P_1(\widehat{\mathcal{A}}) = 0$ на $\widehat{U}$

$$\widehat{U} = \widehat{W_1} + \widehat{W_2}, \qquad \widehat{W_1}, \widehat{W_2} \text{ — корневые подпространства для } \lambda, \overline{\lambda}$$

Существует жорданов базис $w_1, \dots, w_k$ для $\widehat{W_1}$
Тогда $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_k}$ — жорданов базис для $\widehat{W_2}$
$w_1, \dots, w_k, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_k}$ — базис $\widehat{U}$
Пусть $w_i = u_i + v_i$
Докажем, что $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ — базис U:
$u_1 + iv_1, u_2 - iv_1, u_2 + iv_2u_2 - iv_2, \dots\dots\dots$ — базис $\widehat{U}$
$u_1 + iv_1, (u_1 - iv_1) + (u_1 + iv_1), u_2 + iv_2, (u_2 - iv_2) + (u_2 + iv_2), \dots\dots\dots$ — базис $\widehat{U}$
$u_1, u_1 + iv_1, u_2, u_2 + iv_2, \dots\dots\dots$ — базис $\widehat{U}$

$u_1, u_1 + iv_1 - u_1, u_2, u_2 + iv_2 - v_2, \dots\dots\dots$ — базис $\widehat{U}$
$u_1, v_1, u_2, v_2, \dots\dots\dots$ — базис $\widehat{U}$, а значит и базис U
Проверим, что в этом базисе получается правильная жорданова матрица:
Рассмотрим жордановы цепочки

$$w_1, \dots, w_{r_1}, w_{r_1+1}, \dots, w_{r_1+r_2}, \dots\dots\dots$$

Докажем, что им соотвествуют клетки размера $2r_1, 2r_2, \dots$:
Рассмотрим первую цепочку:

$$\widehat{\mathcal{A}}(u_m + iv_m) = \begin{cases} \lambda(u_m + iv_m) + (u_m + iv_m), & m < r_1 \\ \lambda(u_r + iv_r), & m = r \end{cases}$$

Пусть $\lambda = a + bi$
При $m < r$,

$$\mathcal{A}(u_m) + \mathcal{A}(v_m)i = (au_m - bv_m) + (bu_m + av_m)i = \underbrace{(au_m - bv_m + u_{m+1})}_{\mathcal{A}(u_m)} + \underbrace{(bu_m + av_m + v_{m+1})}_{\mathcal{A}(v_m)} i$$

тут надо проверить
При $m = r$,

$$\mathcal{A}(u_m) = (au_m - bv_m) + (bu_m + av_m)i = (au_m - bv_m) + (bu_m + av_m)i$$

$\square$