Оглавление

Глава 1

Числовые ряды

1.1 Продолжение доказательства какого-то признака сходимости

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geq 0$ Положим $q \coloneqq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

- $q > 1$
  Возьмём $\varepsilon \coloneqq q - 1 > 0, \quad q - \varepsilon = 1$
  Вспомним, что $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$

  $$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q - \varepsilon = 1 \iff a_{n_k} > q^{n_k} \implies a \not\to 0$$

  Ряд расходится

1.2 Признак Даламбера

Теорема 1 (признак Даламбера).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n > 0 \tag{1.1}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Тогда:

$q < 1 \implies$ (1.1) сходится

- $q > 1 \implies$ (1.1) расходится
- $q = 1$

Доказательство.

- $q < 1$
  Возьмём $\varepsilon > 0 : r \coloneqq q + \varepsilon < 1$

  $$\exists N : \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = r \tag{1.2}$$

  Будем считать, что $n \geq N + 1$

  $$(1.2) \implies \begin{cases} \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r \\ \dfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < r \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r \end{cases} \tag{1.3}$$

  Здесь $n - N$ неравенств. Перемножим их:

  $$(1.3) \implies \frac{\cancel{a_{N+2}}}{a_N + 1} \cdot \frac{\cancel{a_{N+3}}}{\cancel{a_{N+2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n+1}}} \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} < r^{n-N} \tag{1.4}$$

$$(1.4) \iff \frac{a_{n+1}}{a_{N+1}} < \frac{r^n}{r^N} \tag{1.5}$$

$$(1.5) \iff a_{n+1} < \frac{a_{N+1}}{r^N} \cdot r^n \tag{1.6}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_{N+1}}{r^N} \cdot r^n \text{ сходится } \implies \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

Последний ряд – это остаток ряда (1.1). Значит, ряд (1.1) сходится

- $q > 1$
  Пусть $\varepsilon \coloneqq q - 1 > 0$
  По свойствам предела,

$$\exists\, N : \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = 1 \tag{1.7}$$

Будем считать, что $n > N + 1$

$$(1.7) \implies \begin{cases} \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > 1 \\ \dfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}} > 1 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \end{cases}$$

Здесь $n - N$ неравенств. Перемножим их:

$$\frac{\cancel{a_{N+2}}}{a_N + 1} \cdot \frac{\cancel{a_{N+3}}}{\cancel{a_{N+2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n+1}}} \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} > 1 \iff \frac{a_{n+1}}{a_{N+1}} > 1 \iff a_{n+1} > a_{N+1} > 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Значит, ряд (1.1) расходится

□

1.3 Интегральный признак сходимости рядов

Теорема 2. $f : [1, \infty]$, $\quad f(x) \geq 0$, $\quad f(x)$ убывает

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1.8}$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}\, x \tag{1.9}$$

Тогда (1.8) и (1.9) сходятся или расходятся одновременно

Доказательство.

- Пусть (1.8) сходится
  Тогда, если $x \in [n, n+1]$, имеем неравенство

$$f(n) \geq f(x) \tag{1.10}$$

Применим свойство определённых интегралов:

$$(1.10) \implies \underbrace{\int_n^{n+1} f(n)\, \mathrm{d}\, x}_{=f(n)(n+1-n)=f(n)} \geq \int_n^{n+1} f(x)\, \mathrm{d}\, x \tag{1.11}$$

$$(1.11) \iff f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\, \mathrm{d}\, x \tag{1.12}$$

Возьмём произволное N и $n = 1, 2, ..., N$

$$(1.12) \implies \begin{cases} f(1) \geq \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}\,x \\ f(2) \geq \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}\,x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(N) \geq \int_N^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \end{cases} \tag{1.13}$$

Сложим все неравенства:

$$(1.13) \implies f(1) + ... + f(N) \geq \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}\,x + \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}\,x + ... + \int_N^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_1^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \tag{1.14}$$

Поскольку ряд (1.8) сходится,

$$f(1) + ...f(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = M \in \mathbb{R}$$

Таким образом,

$$(1.14) \implies \int_1^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \leq M \quad \forall N \tag{1.15}$$

Возьмём $\forall 1 < b < \infty$ и рассомтрим интеграл $\int_1^b f(x)\ \mathrm{d}\,x$
Возьмём $N : N + 1 > b$. Тогда

$$\int_1^b f(x)\ \mathrm{d}\,x = \int_1^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x - \underbrace{\int_b^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x}_{\geq 0} \leq \int_1^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \underset{(1.15)}{\leq} M \tag{1.16}$$

$(1.16) \implies (1.9)$ сходится
Пусть сходится интеграл (1.9)
Для $x \in [n, n+1]$, в силу монотонности f, справедливо

$$f(x) \geq f(n+1) \implies \int_n^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \geq \int_n^{n+1} = \mathrm{d}\,x f(n+1) \tag{1.17}$$

Распишем (1.17) для $n = 1, 2, ..., N$

$$(1.17) \implies \begin{cases} \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}\,x \geq f(2) \\ \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}\,x \geq f(3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_N^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \geq f(N+1) \end{cases} \underset{\Sigma}{\implies}$$

$$\implies \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}\,x + \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}\,x + ... + \int_N^{N+1} f\ \mathrm{d}\,x(x) \geq f(2) + f(3) + ... + f(N+1) \tag{1.18}$$

$$(1.18) \iff \int_1^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \geq f(2) + f(3) + ... + f(N+1)$$

В наших обозначениях, это означает, что

$$\int_1^{N+1} f(x)\ \mathrm{d}\,x \leq \int_1^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}\,x \coloneqq L \tag{1.19}$$

$$(1.18), (1.19) \implies f(2) + f(3) + ... + f(N+1) \leq L \tag{1.20}$$

Получили, что последовательность ограничена сверху числом L, которое не зависит от N, а значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ сходится. Это – остаток ряда (1.8), значит, (1.8) сходится $\square$

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}, \quad p > 0$ и $f(x) \coloneqq \dfrac{1}{x^p}$

Этот ряд сходится одновременно с интегралом $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$, который сходится при $p > 1$
Получили, что наш ряд:

- сходится при $p > 1$
- расходится при $0 < p < 1$

В частности, ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ расходится. Этот ряд называется **гармоническим**

Пример. Рассотрим ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}, \qquad p > 0$$

И функцию

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^p(x+1)}$$

Ряд сходится одновременно с интегралом

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)\ln^p(x+1)} \underset{x+1:=y}{=} \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}\,y}{y\ln^p y}$$

Этот интеграл сходится при $p > 1$

1.4 Абсолютно сходящиеся ряды

Пусть имеется некий ряд

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \tag{1.21}$$

Рассмотрим также ряд

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| \tag{1.22}$$

Определение 1. Говорят, что ряд (1.21) абсолютно сходится, если сходится ряд (1.22)

Теорема 3. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится

Доказательство. Выпишем критерий Коши для ряда (1.22):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| < \varepsilon \tag{1.23}$$

$$(1.23) \iff \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \le \sum_{k=n+1}^m |a_k| \underset{(1.23)}{<} \varepsilon$$

Значит, ряд (1.21) сходится $\square$

Определение 2. Если ряд (1.21) сходится, а ряд (1.22) расходится, то говорят, что ряд (1.21) сходится неабсолютно или условно

1.5 Преобразование Абеля

Пусть имеется сумма $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n$
Определим числа следующим образом:

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_1 = a_1 \\ A_2 = a_1 + a_2 \\ \dots\dots \\ A_k = a_1 + \dots + a_k \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} a_1 = A_1 - A_0 \\ a_2 = A_2 - A_1 \\ \dots\dots \\ a_k = A_k - A_{k-1} \end{cases}$$

Тогда наша сумма равна

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N} A_{n-1} b_n \underset{\binom{n-1:=k}{n:=k+1}}{=} \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{k=0}^{N} A_k b_{k+1} \underset{(1.24)}{=}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1} \underset{(A_0=0)}{=} \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} = \left(A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_n \right) - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} =$$
$$= A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} (A_n b_n - A_n b_{n+1}) = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1})$$

В качестве счётчика суммы можно записать любую букву (1.24)

Теорема 4 (признак Абеля сходимости рядов)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1.25}$$

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \tag{1.26}$$

Последовательность

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ монотонна} \tag{1.27}$$

и ограничена:

$$\exists M : \forall n \quad |b_n| \le M \tag{1.28}$$

Тогда ряд (1.25) сходится

Доказательство. Так как ряд (1.26) сходится, то, по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \tag{1.29}$$

Положим

$$\begin{cases} A_1 := a_{n+1} \\ A_2 := a_{n+1} + a_{n+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_k := a_{n+1} + \dots + a_{n+k} \end{cases}$$

Применим преобразование Абеля в наших обозначениях:

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = A_{m-n} b_m + \sum_{k=1}^{m-n-1} A_k (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \le$$

$$\le |A_{m-n}| \cdot |b_m| + \sum_{k=1}^{m-n-1} |A_k| \cdot |b_{n+k} - b_{n+k+1}| \underset{(1.28)}{\le}$$

$$\le M \big| a_{n+1} + \ldots + a_m \big| + \sum_{k=1}^{m-n-1} \big| a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} \big| \cdot \big| b_{n+k} - b_{n+k+1} \big| \underset{(1.29)}{\le} M \cdot \varepsilon + \sum_{k=1}^{m-n-1} \varepsilon |b_{n+k} - b_{n+k+1}| =$$

$$= M\varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{m+n-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \right| = M\varepsilon + \varepsilon |b_{n+1} - b_m| \le M\varepsilon + \varepsilon \big(|b_{n+1}| + |b_m| \big) \le 3\varepsilon$$

Значит, при $m > n > N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < 3M\varepsilon \implies (1.25) \text{ сходится}$$

□

Теорема 5 (признак Дирихле сходимости рядов).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1.30}$$

$$\exists\, L : \forall n \quad \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \le L \right. \tag{1.31}$$

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ монотонна} \tag{1.32}$$

$$b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{1.33}$$

Тогда ряд (1.30) сходится

Доказательство. Будем пользоваться критерием Коши
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$$(1.33) \implies \exists\, N : \forall n > N \quad |b_n| < \varepsilon \tag{1.34}$$

Возьмём $\forall m > n > N$
Выберем числа:

$$\begin{cases} A_1 := a_{n+1} \\ A_2 = a_{n+1} + a_{n+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_k = a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} \end{cases}$$

Воспользуемся преобразованием Абеля для такой суммы:

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = A_{m-n} b_m + \sum_{k=1}^{m-n-1} A_k (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \tag{1.35}$$

$$A_k = (a_1 + \ldots + a_{n+k}) - (a_1 + \ldots + a_n)$$

$$(1.31) \implies |A_k| \le |a_1 + \ldots + a_{n+k}| + |a_1 + \ldots + a_n| \le L + L = 2L \tag{1.36}$$

$$(1.34), (1.35), (1.36) \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \le 2L \cdot |b_m| + \sum_{k=1}^{m-n-1} 2L|b_{k+n} - b_{k+n+1}| =$$

$$= 2L\left(|b_m| + \left| \sum_{k=1}^{m-n-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \right| \right) = 2L\big(|b_m| + |b_{n+1} - b_m|\big) \le 2L\big(|b_m| + |b_{n+1}| + |b_m|\big) \underset{(1.34)}{<} 6L\varepsilon \implies$$

$$\implies (1.30) \text{ сходится}$$

□

Определение 3. Знакопеременным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, \qquad b_n > 0 \tag{1.37}$$

Теорема 6 (признак сходимости знакопеременного ряда).

$$\left. \begin{aligned} & b_n \text{ монотонна} \\ & b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned} \right\} \tag{1.38}$$

Тогда ряд (1.37) сходится

Доказательство. Положим $a_k := (-1)^{k-1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{N-1} = \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

□

1.6 Перестановка слагаемых в рядах

Приготовления к теореме. Пусть имеется некое взаимно однозначное отображение (биекция) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
Положим $\tau := \sigma^{-1}$
Пусть имеется некая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
Определим

$$b_n := a_{\sigma(n)} \iff a_n = b_{\tau(n)} \tag{1.39}$$

Будем считать, что $\sigma(n) \not\equiv n$

Теорема 7. $\forall n \quad a_n \ge 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится} \tag{1.40}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \tag{1.41}$$

(Строго говоря, третья сумма не определена, и в формулировку входит только равенство первых двух)

Доказательство. • (1.40)
Обозначим $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := A \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\forall N \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \le A \tag{1.42}$$

Возьмём $\forall K$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{\nu=1}^{K} b_\nu = a_{\sigma(1)} + ... + a_{\sigma(K)}$$

Пусть $N := \max\{\,\sigma(1), ..., \sigma(K)\,\}$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{K} b_\nu = a_{\sigma(1)} + ... + a_{\sigma(K)} \le a_1 + a_2 + ... + a_N \underset{(1.42)}{\le} A \tag{1.43}$$

$$(1.43) \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \le A \tag{1.44}$$

- (1.41) Обозначим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu := B$$

Вспомним, что $a_n = b_{\tau(n)}$
Заменяя буквы, аналогичными соображениями получаем $B \le A$
При этом, $A \le B$. Значит, суммы этих рядов совпадают $\implies$ (1.41)

□

Возьмём $a \in \mathbb{R}$ и определим

$$a_+ := \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}, \qquad a_- := \begin{cases} |a|, & a < 0 \\ 0, & a \ge 0 \end{cases}$$

Очевидно, что. $a = a_+ - a_-, \qquad |a| = a_+ + a_-$

Теорема 8. Пусть есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textbf{абсолютно сходящийся}$$

Опять есть биекция σ и $b_n = a_{\sigma(n)}$ Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tag{1.45}$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+} + a_{n-}) \text{ сходится} \tag{1.46}$$

$$(1.46) \implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+} \text{ сходится} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-} \text{ сходится} \end{cases} \tag{1.47}$$

$$b_{n+} = a_{\sigma(n)+}, \qquad b_{n-} = a_{\sigma(n)-}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-} \end{array}\right\} \tag{1.48}$$

$$(1.48) \implies \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+} - b_{n-}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+} - a_{n-}) \tag{1.49}$$

□

Теорема 9 (Римана)**.** Пусть **не**абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
Пусть $c \in \mathbb{R}$ Тогда $\exists\, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что при $b_n = a_{\sigma(n)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = c$