Оглавление

Глава 1

Общий алгоритм решения

Алгоритм.

1. ОДЗ:

   (a) Школьное ОДЗ (подкоренные выражения, знаменатели, логарифмы)

   (b) В зависимости от вида уравнения:

   - Если уравнение содержит y', пишем $x \not\equiv C$
   - Если уравнение в симметрической форме, находим особые точки (в них уравнения нет):

   $$\begin{cases} M(x, y) = 0 \\ N(x, y) = 0 \end{cases}$$

   (c) Плохие границы (G^* и B^*):

   - Нули множителей при производной

   (d) Хорошие границы ($\widehat{G}$ и $\widehat{B}$):

   - Нестрогие неравенства в школьном ОДЗ (равенства из них)

2. Определяем тип уравнения

3. Решаем в соответствии с алгоритмом для нужного типа

4. Характеризуем граничные решения:

   - Теоремы единственности (если применимы)
   - Пусть $y = \psi(x)$ – граничное решение, а $y = \varphi(x, C)$ – общее
     Ищем C_* такое, что $\forall x_* \quad \psi(x_*) = \varphi(x_*, C_*)$
     - Если C_* нашлось и конечно, то решение частное
     - Если C_* не нашлось или бесконечное, то решение особое

5. Решаем ЗК

Особые случаи.

1. Замена переменных:

   - Выписываем три замены:

     (a) Прямая:

     $$x = u(x, y), \qquad y = v(x, y)$$

     (b) Производная (если необходимо) или дифференциал:

     $$x' = \ldots, \quad y' = \ldots \qquad \text{или} \qquad \mathrm{d}\ x = \ldots, \quad \mathrm{d}\ y = \ldots$$

     (c) Обратная:

     $$u = \ldots, \qquad v = \ldots$$

- Пишем ОДЗ и на прямую и на обратную замены
  Если оно меньше $\widetilde{G}$ или $\widetilde{B}$, то:
  - Если "отрезается" часть $\widehat{G}$ или $\widehat{B}$ (хорошей границы), то это может быть граничным решением – нужно проверять отдельно
  - Если в ОДЗ входят неравенства вида $u \succ 0$, то см. пункт 2

2. Полуплоскости
   Применяется, если:

   - В ОДЗ на замену входят неравенства вида $u(x) \succ 0$
   - В ходе решения получили множителем $\operatorname{sign} x$

   Порядок действий:

   (a) Проверяем инвариантность **исходного** уравнения относительно u или x

   > **Примечание.** Если получили несколько "знакозависимых" переменных, то проверяем инвариантность относительно обеих сразу. Если её нет, то относительно каждой по отдельности

   > **Замечание.** Здесь надо учитывать, что $y' = \frac{\mathrm{d}\ x}{\mathrm{d}\ y}$, т. е. y' **не** инвариантна относительно x

   - Если инвариантность есть:
     i. Пишем "Пусть $u > 0$" или "Пусть $x > 0$"
     ii. Решаем в этом случае
     iii. Пишем "Сделаем замену $x = -\widetilde{x}$. Так как уравнение инвариантно относительно u (или x), получим то же самое уравнение"
     iv. В ответе вместо x пишем $|x|$ (или $|u|$ вместо u)
   - Если инвариантности нет:
     - В случае $u(x) \succ 0$ в ОДЗ:
       i. Пишем "Пусть $u > 0$"
       ii. Решаем в этом случае
       iii. Пишем "Пусть $u < 0$"
       iv. Решаем в этом случае
       v. В ответ попадают оба решения (каждое со своей ОДЗ)
     - В случае $\operatorname{sign} x$:
       i. Обозначаем $\sigma \coloneqq \operatorname{sign} x$
       ii. Решаем, считая σ за константу
       iii. В ответе σ не должно быть (скорее всего, она будет множителем при $|x|$ – тогда просто пишем x)

3. Все логарифмы собираем под один. Константу заносим туда же:

$$\ln x + \ln y + C = \ln(xyC)$$

4. Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, её нужно разложить на простейшие