Оглавление

0.1 Многочлены от оператора

Теорема 1 (ядро и образ многочлена от оператора)**.** $\mathcal{A}$ – оператор на V, p – многочлен, $\mathcal{B} = p(\mathcal{A})$
Тогда $\ker \mathcal{B}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{B}$ – ивариантные подпространства относительно $\mathcal{A}$

Доказательство. По лемме,

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} \tag{1}$$

- $\ker \mathcal{B}$

$$v \in \ker \mathcal{B} \implies \mathcal{B}(v) = 0 \implies \mathcal{A}\Big(\mathcal{B}(v)\Big) = 0 \underset{(1)}{\implies} \mathcal{B}\Big(\mathcal{A}(v)\Big) = 0 \implies \mathcal{A}(v) \in \ker \mathcal{B}$$

- $\operatorname{Im} \mathcal{B}$

$$v \in \operatorname{Im} \mathcal{B} \implies v = \mathcal{B}(w) \implies \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}\Big(\mathcal{B}(w)\Big) \underset{(1)}{=} \mathcal{B}\Big(\mathcal{A}(w)\Big)$$

$\square$

Определение 1. $\mathcal{A}$ – оператор на V, $\qquad v \in V$

- Аннулятором v называется такой многочлен p, что $p(\mathcal{A})(v) = 0$
- Минимальным аннулятором v называется многочлен наименьшей степени среди ненулевых аннуляторов

Замечание. Минимальный аннулятор задаётся с точностью до умножения на константу

Примеры.

1. v – с. в., соответствующие λ (т. е. $\mathcal{A}v = \lambda v$)

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} \qquad \mathcal{B}(v) = \mathcal{A}(v) - \lambda\mathcal{E}(v) = \lambda v - \lambda v = 0$$

   Найдём p, такой что $\mathcal{B} = p(\mathcal{A})$:

$$p(t) = t - \lambda$$

   $p(t)$ – минимальный аннулятор

2. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A} : x \mapsto Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Докажем, что $p(t) = (t-2)^2$ – аннулятор $\forall v$:
   Найдём матрицу оператора $p(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \mathcal{E})^2$:

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Возьмём теперь $Q(t) = t - 2$
Найдём v, такие что $Q(t)$ – аннулятор v:

$$(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(v) = 0$$

$$\mathcal{A}(v) = 2v$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Свойства.

1. V – конечномерно. Тогда

   (a) у любого вектора существует ненулевой аннулятор

   (b) если P_0 – минимальный аннулятор, то $\deg P_0 \le \dim V$

Доказательство. Пусть $n \coloneqq \dim V$
Докажем, что $\exists\, P : \deg P \le n$, P – аннулятор, $P \ne 0$
Возьмём

$$\underbrace{v_1 \mathcal{A}(v), \mathcal{A}^2(v), ..., \mathcal{A}^n(v)}_{n+1 \text{ вектор}}$$

Они ЛЗ, т. к. их больше, чем размерность пространства. Значит,

$$\exists\, a_i \text{ не все равные } 0 : a_0 v + a_1 \mathcal{A}(v) + ... + a_n \mathcal{A}^n(v) = 0$$

Подойдёт $P(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0$ □

2. $P_1, ..., P_k$ – аннуляторы v
Тогда

$$\forall \text{ многочл. } Q_1, ..., Q_k \quad \text{многочлен } S(t) = Q_1(t)P_1(t) + ... + Q_k(t)P_k(t) \text{ – аннулятор}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_i \coloneqq P_i(\mathcal{A})$, $\quad \mathcal{C}_i = Q_i(\mathcal{A})$, $\quad \mathcal{D} = S(\mathcal{A})$

$$\mathcal{D}(v) = \mathcal{C}_1\Big(\underbrace{\mathcal{B}_1(v)}_{=0}\Big) + ... + \mathcal{C}_k\Big(\underbrace{\mathcal{B}_k(v)}_{=0}\Big) = \mathcal{C}_1(0) + ... + \mathcal{C}_k(0) = 0$$

□

3. $P_0(t)$ – минимальный аннулятор. Тогда

$$P(t) \text{ – аннулятор} \iff P(t) \,\vdots\, P_0(t)$$

Доказательство. Поделим с остатком:

$$P(t) = Q(t)P_0(t) + R(t), \qquad \deg R < \deg P_0$$

- $\Longleftarrow$

$$R(t) = 0, \qquad P(t) = \underbrace{P_0(t)}_{\text{аннулятор}} Q(t) \text{ – аннулятор (по (2.))}$$

- $\Longrightarrow$

$$R(t) = \underbrace{P(t)}_{\text{annул.}} - Q(t) \underbrace{P_0(t)}_{\text{аннул.}} \text{ – аннулятор (по (2.))}$$

□

4. Минимальный аннулятор – единственный с точностью до ассциированности (умножения на обратимый, т. е. на константу)

Доказательство.
$$\exists\, P_1, P_2 \text{ – мин. аннул.} \implies \underbrace{P_1}_{\text{аннул.}} \vdots \underbrace{P_2}_{\text{мин. аннул.}}$$
□

0.2 Циклические подпространства

Определение 2. $\mathcal{A}$ – оператор на V, $\quad v \in V$
Циклическим подпространством, порождённым v называется минимальное по включению инвариантное подпространство, содержащее v

Теорема 2 (базис циклического подпространства). $k \in \mathbb{N}$ такое, что:

1. $v, \mathcal{A}(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v)$ ЛНЗ
2. $v, \mathcal{A}(v), ..., \mathcal{A}^{k-1}(v), \mathcal{A}^k(v)$ ЛЗ

Тогда первый набор является базисом цикического подпространства, порождённого v

Доказательство. Пусть U – циклическое, порождённое v
$$U \text{ – инвар.} \implies v \in U \implies \mathcal{A}v \in U \implies \underbrace{\mathcal{A}^2 v}_{=\mathcal{A}(\mathcal{A}(v))} \in U \implies \dots\dots\dots\dots$$
$$v, \mathcal{A}v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v \in U$$
Они ЛНЗ. Чтобы доказать, что это базис, надо доказать, что они прождают U:
Положим $W = \langle v, \mathcal{A}v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v \rangle$
Докажем, что $W = U$:

- Докажем, что W – инвар.:
$\mathcal{A}^k v$ – ЛК $v, \mathcal{A}v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v$
$$w \in W, \qquad w = a_0 v + ... + a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}v$$
$$\mathcal{A}(w) = a_0\mathcal{A}v + ... + a_{k-2}\mathcal{A}^{k-1}v + \underbrace{a_{k+1}\mathcal{A}^k v}_{\text{ЛК } v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v}$$
Значит, w является ЛК $v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v$

- Докажем, что W – минимальное:
Докажем, что если W_1 инвариантно и $v \in W_1$, то $W \subset W_1$:
$$\left.\begin{matrix} W_1 \text{ инвар.} \\ v \in W_1 \end{matrix}\right\} \implies \mathcal{A}v \in W_1, \qquad \left.\begin{matrix} W_1 \text{ инвар.} \\ \mathcal{A}v \in W_1 \end{matrix}\right\} \implies \mathcal{A}^2 v \in W_1, \quad \dots\dots\dots, \quad \underbrace{\mathcal{A}^i v}_{\text{порожд.} W} \in W_1 \implies$$
$$\implies W_1 \subset W$$
□

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}(v_1) = v_1$$

Циклическое подпространство – $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}^2(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Они все лежат в плоскости $X, Y, 0$, а их три штуки. Значит, они ЛЗ

Циклическое подпространство – $\langle v_2, \mathcal{A}(v_2) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}^2(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Они ЛНЗ. Размерность нашего пространства – 3, значит, если добавить четвёртый вектор, они будут ЛЗ

Циклическое подпространство – $\mathbb{R}^3$

Обозначение. $a_1, .., a_n \neq \odot \iff$ **не** все они равны нулю

Теорема 3 (циклическое подпространство и минимальный аннулятор). V – конечномерное

$\mathcal{A}$ – оператор на V, $\qquad v \in V$, $\qquad U$ – цикл. подпр-во, порождённое v

χ – хар. многочлен $\mathcal{A}$ на U

Тогда χ – минимальный аннулятор v

Доказательство. Пусть k такое, что

1. $v, \mathcal{A}v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v$ ЛНЗ
2. $v, \mathcal{A}v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v, \mathcal{A}^k v$ ЛЗ

Путь a_i, не все равные нулю, такие, что

$$a_0 v + a_1 \mathcal{A}v + ... + a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}v + a_k \mathcal{A}^k v = 0$$

Значит, $a_k \neq 0$ (т. к. $v..., \mathcal{A}^{k-1}v$ ЛНЗ)

Делим на a_k, НУО считаея что $a_k = 1$:

$$\mathcal{A}^k v + ... + a_1 \mathcal{A}v + a_0 v = 0$$

Положим $P(t) \coloneqq t^k + a_{k-1}t^{k-1} + ... + a_1 t + a_0 \implies P(t)$ – аннулятор

Докажем, что $P(t)$ – минимальныйю **Пусть это не так**:

$$\exists\, Q'(t) = b_m t^m + ... + t_0, \qquad Q \neq 0, \qquad Q \text{ – аннул. }, \qquad m < k$$

$$b_m \mathcal{A}^m v + ... + b_0 v = 0$$

$b_i \neq \odot \implies \mathcal{A}^m v, ..., v$ – ЛЗ – $\lightning$ (это был не первый момент линейной зависимости)

Докажем, что $P(t) = \pm\chi$:

Знаем, что

$$v, ..., \mathcal{A}^{k-1}v \text{ – базис } U$$

Матрица $\mathcal{A}\Big|_U$ в этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} v & \mathcal{A}v & ... & \mathcal{A}^{k-2}v & \mathcal{A}^{k-1}v \\ 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & . & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & . \\ 1 & 1 & ... & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

В первом столбце (начиная со второй строки) – координаты $\mathcal{A}v = 0 \cdot v + 1 \cdot \mathcal{A}v + 0 \cdot ...$
Во втором столбце – координаты $\mathcal{A}^2 v$

. . . .

В последнем столбце – координаты $\mathcal{A}^k v$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & ... & 0 & -a_0 \\ 1 & -t & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -t & 0 & -a_{k-2} \\ . & . & . & . & . & -a_{k-1} - t \end{vmatrix}$$

Прибавим ко 2-й строке 1-ю, умноженную на ${}^1\!/\!_t$
Прибавим к 3-й строке 2-ю, умноженную на ${}^1\!/\!_t$ . . . .

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & ... & 0 & -a_1 \\ 0 & -t & 0 & ... & 0 & -a_1 - \frac{a_0}{t} \\ 0 & 0 & -t & ... & 0 & -a_2 - \frac{a_1}{t} - \frac{a_0}{t^2} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & t - a_{k-1} - \frac{a_{k-2}}{t} - ... - \frac{a_1}{t^{k-2}} - \frac{a_1}{t^{k-1}} \end{vmatrix}$$

Это будет $(-1)^k P(t)$ □

0.3 Минимальный многочлен оператора

Определение 3. Многочлен $P(t)$ аннулирует $\mathcal{A}$, если $P(\mathcal{A}) = 0$

Замечание. Он является аннулятором для всех векторов

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A} : X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$$

$$P(t) = (t-2)^2 \text{ – аннулирует } A$$

$Q(t) = t - 2$ не аннулирует $\mathcal{A}$, т. к. $\Big(Q(\mathcal{A})\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Определение 4. Минимальным многочленом оператора $\mathcal{A}$ называется ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий $\mathcal{A}$

Свойства. $\mathcal{A}$ – оператор на V

1. $P_1, ..., P_k$ аннулируют $\mathcal{A}$
   Тогда для любых многочленов $Q_1, ..., Q_k$ многочлен $S(t) = P_1(t)Q_1(t) + ... + Pk(t)Q_k(t)$ аннулирует $\mathcal{A}$

   Доказательство. $\forall v \quad P_i$ – аннулятор $v \implies S(\mathcal{A})$ – аннулятор $v \implies S$ аннулирует $\mathcal{A}$ □

2. P_0 – минимальный многочлен для $\mathcal{A}$. Тогда

$$P \text{ аннулирует } \mathcal{A} \iff P \,\vdots\, P_0$$

   Доказательство. Пусть $P = P_0 Q + R$

   - Если $P \,\vdots\, P_0$, то $P = P_0 Q \underset{1.}{\implies} P$ аннулирует $\mathcal{A}$
   - Если P аннулирует $\mathcal{A}$, то $R = P - P_0 Q$ аннулирует $\mathcal{A} \underset{1.}{\implies} R = 0 \implies P \,\vdots\, P_0$

   □

3. Минимальный многочлен $\mathcal{A}$ единственнен с точностью до ассоциирования