Оглавление

Глава 1

Векторные пространства

Теорема 1. Следующие определения базиса равносильны:

1. u_i – ЛНЗ и порождающая
2. u_i – максимальная ЛНЗ
3. u_i – минимальная порождающая
4. Любой вектор можно единственным образом представить в виде ЛК u_i

Доказательство. Уже доказаны: $2 \implies 1$, $3 \implies 1$

- $1 \implies 2$
  u_i – ЛНЗ
  Докажем, что $u_1, ..., u_n, v$ – ЛЗ для $\forall v$
  u_i – порождающая $\implies \exists a_i : v = a_1u_1 + ... + a_nu_n$
  Оказалось, что v – ЛК $u_i \implies u_1, ..., u_n, v$ – ЛЗ
- $1 \implies 3$
  u_i – порождающая
  Пусть u_i не минимальная. Пусть $u_1, ..., u_{n-1}$ тоже порождающая $\implies \exists a_i : un = a_nu_1 + ... + a_{n-1}u_{n-1} \implies u_i$ – ЛЗ
- $4 \iff 1$
  Система порождающая и в 1, и в 4
  Нужно доказать, что представление единственно $\iff$ ЛНЗ
  - $4 \implies 1$
    $$0 = 0 \cdot u_1 + ... + 0 \cdot u_n$$
    Представление нуля единственно. Значит, система ЛНЗ
  - $4 \implies 1$
    $$v = a_1u_1 + ... + a_nu_n, \quad v = b_1u_1 + ... + b_nu_n$$
    $$0 = v - v = (a_1 - b_1)u_1 + ... + (a_n - b_n)u_n$$
    ЛНЗ $\implies a_i - b_i = 0$

$\square$

Определение 1. Координатами вектора v в базисе $u_1, ..., u_n$ называется такой набор $a_i, ..., a_n \in K : v = a_1u_1 + ... + a_nu_n$

Свойства (базиса). V – конечномерное векторное пространство

1. Дополнение до базиса
   Любую ЛНЗ систему можно дополнить до базиса

Доказательство. $u_1, \ldots, u_k$ – ЛНЗ Если это не базис, можно добавить вектор так, что система останется ЛНЗ[a]
Докажем, что процесс когда-нибудь закончится:
Пусть есть порождающая система из n векторов $\implies$ в любой ЛНЗ системе не более n векторов $\square$

[a]Если ничего нельзя добавить, то она максимальная, и это базис

2. "Спуск" к базису
   Из любой порождающей системы можно выбрать базис
   Доказательство. Если система не минимальна, будем убирать векторы по одному $\square$

3. Количество векторов
   В любых двух базисах поровну элементов
   Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ и $w_1, \ldots, w_m$ – базисы
   Тогда, u_i – порождающая, и w_i – ЛНЗ
   По теореме о линейной зависимости линейной комбинации, $m \leq k$
   Аналогично, $m \geq k$ $\square$

Определение 2. Пусть V конечномерно
Размерностью V называется количество элементов в базисе

Обозначение. $\dim V, \quad \dim_K V$

Если $V = \{\, 0 \,\}$, то $\dim V = 0$

1.1 Подпространства

Определение 3. Пусть V – векторное пространство над K, $U \subset V$
U называется подпространством, если U – векторное пространство над K с теми же опреациями

Определение 4. U, W – подпространства V
Их суммой называется множество $\{\, u + w \mid u \in U, w \in W \,\}$

Обозначение. $U + W$

Определение 5. $U_1, \ldots, U_n$ – подпространства V

$$U_1 + \ldots U_n = \{\, u_1 + \ldots + u_n \mid u_i \in U_i \,\}$$

Замечание. $U_1 + U_2 + U_3 = (U_1 + U_2) + U_3$

Свойства.

1. Сумма подпространств является подпространством
2. Пересечение подпространств является подпространством

Теорема 2 (формула Грассмана)**.** Пусть U, W – конечномерные подпространства векторного пространства V
Тогда $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

Доказательство. Пусть $l_1, \ldots, l_k$ – базис $U \cap W \implies l_i$ – ЛНЗ
Дополним их до базиса $U : l_1, \ldots, l_k, u_1, \ldots, u_m$ – базис U
Аналогично, $l_1, \ldots, l_k, w_1, \ldots, w_n$ – базис W
Достаточно доказать, что $l_1, \ldots, l_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ – базис $U + W$, так как тогда $(k + m + n) + k = (k + m) + (k + n)$
Докажем, что это порождающая система:

Пусть $v \in U + W, \quad v = u + w$
Разложим по базису:

$$u = \sum a_i l_i + \sum b_i u_i, \quad w = \sum a_i l_i + \sum d_i w_i$$

Сложим:

$$v = \sum (a_i + b_i) l_i + \sum b_i u_i + \sum d_i w_i$$

Докажем ЛНЗ:
Пусть $\sum a_i l_i + \sum b_i u_i + \sum c_i w_i = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \sum b_i u_i \in U \\ \sum b_i u_i = -\sum a_i b_i - \sum d_i w_i \in W \end{array}\right\} \implies \sum b_i u_i \in U \cap W$$

$l_1, ..., l_k$ – базис $U \cap W$

$$\exists\, c_i : \sum b_i u_i = \sum c_i l_i \implies (-c1) l_1 + ... + (-c_k) l_k + b_1 u_1 + ... + b_m u_m = 0 \implies c_i = 0, l_i = 0$$

$$\exists\, a_i b_i + 0 + \sum d_i w_i = 0 \implies a_i = 0, d_i = 0$$

□

Определение 6. Подпространством, порождённым векторами $u_1, ..., u_k$ называется множество всех линейных комбинаций $u_1, ..., u_k$

Обозначение. $\langle u_1, ..., u_k \rangle$

Свойства.

1. $\langle u_1, ..., u_k \rangle$ является подпространством. Это минимальное по включению подпространство, содержащее все u_i
2. $\langle u_1, ..., u_k \rangle = \langle u_1 \rangle + ... + \langle u_k \rangle$

1.2 Прямая сумма подпространств

Определение 7. V – векторное пространство, U, W – подпространства
Сумма $U + W$ называется прямой, если $\forall v \in V$ представляется в виде $u + w, \quad u \in U, w \in W$ единственным образом

Обозначение. $U \oplus W$

Замечание. Прямая сумма $U_1, ..., U_k$ определяется одинаково
Если $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$, то говорят, что V раскладывается в прямую сумму U_i

Теорема 3. Равносильны определения прямой суммы в случае 2 подпространств U и W конечномерного просранства V:

1. Сумма $U + W$ прямая (по определению 7)
2. Если $u + w = 0, \quad u \in U, w \in W$, то $u = 0, w = 0$
3. $U \cap W = \{0\}$
4. Объединение базисов U и W является базисом $U + W$

Доказательство.

- $1 \implies 2$ очевидно
- $2 \implies 1$
  Пусть $u + w = u' + w' \implies (u - u') + (w - w') = 0 \implies u = u', w = w'$

- $2 \implies 3$
  Пусть $v \in U \cap W \implies -v \in U \cap W$
$$v + (-v) = 0 \implies v = 0$$

- $3 \implies 2$
  Пусть $u + w = 0, \quad u \in U, w \in W$
  $\underset{\in U}{u} = -\underset{\in W}{w} \implies u \in U \cap W \implies u = 0 \implies w = 0$

- $3 \iff 4$
$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$$
$$4 \iff \dim U + \dim W = \dim(U + W) \iff \dim(U \cap W) = 0 \iff U \cap W = 0$$

□

Теорема 4. Пусть V — конечномерное пространство, $U_1, ..., U_k$ – подпространства
Тогда следующие условия равносильны:

1. Сумма $U_1 + ... + U_k$ прямая
2. Если $u_1 + ...u_k, \quad u_i \in U$, то $u_i = 0$
3. $\forall i \quad U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k) = \{ 0 \}$
4. $U_1 \cap U_2 = \{ 0 \}, \quad (U_1 + U_2) \cap U_3 = \{ 0 \}, \quad ....$
5. Объединение любых базисов u_i является базисом $u_1 + ... + u_k$

Доказательство.

- $1 \implies 2$ очевидно
- $2 \implies 1$
  Пусть $v = u_1 + ... + u_k = u'_1 + ... + u'_k$
$$v - v = (u_1 - u'_1) + ... + (u_k - u'_k) = 0 \implies u_i = u'_i$$

- $2 \implies 3$
  Пусть $v \in U_1 \cap (U_2 + ... + U_k)$
$$v = u_1 + ... + u_k, \quad u_i \in U_i$$
$$v \in i \implies -v \in U_i$$
$$0 = (-v) + u_2 + ... + u_k \implies v = 0, \quad u_2 = ... = u_k = 0$$

- $3 \implies 4$
  Докажем, что $(U_1 + ... + U_{i-1}) \cap U_i = 0$
  Заметим, что $U_1 + ... + U_{i-1} \subset U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k \implies (U_1 + ... + U_{i-1}) \cap U_i \subset (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k) \cap U_i = \{ 0 \}$

- $4 \implies 2$
  Пусть $u_1 + ... + u_k = 0, \quad u_i \in U_i$
  Пусть не все $u_1, ..., u_k$ равны 0
  Положим $i := \max \{ s \mid u_s \neq 0 \}$
$$u_1 + ... + u_{i-1} + \underset{\neq 0}{u_i} = 0 \implies u_i = -u_1 - ... - u_{i-1} \in U_1 + ... + U_{i-1} \implies u_i \in (U_1 + ... + U_{i-1}) \cap U_i = \{ 0 \}$$

- $4 \iff 5$
  Пусть $n_i = \dim U_i$
  Пусть B – объединение базисов U_i
  Тогда B – порождающая система $U_1 + ... + U_k$
  B – базис $\iff B$ – минимальная порождающая система $\iff |B| = \dim(U_1 + ... + U_k)$

□