# Типы уравнений первого порядка

## Содержание



# Уравнения, разрешённые относительно производной

## I. Уравение с разделёнными переменными

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{g(x)} + \frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)} = 0$$

$$U(x, y) = \int \frac{\mathrm{d}\, x}{g(x)} + \int \frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)} + C$$

## II. Уравнение с разделяющимися переменными

$$g_1(x) h_2(y)\, \mathrm{d}\, x + g_2(x) h_1(y)\, \mathrm{d}\, y = 0$$

!!!

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,\mathrm{d}\,x + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}\,\mathrm{d}\,y = 0$$

$$\left[\begin{array}{lcl} g_2(x) = 0 & \Longleftrightarrow & x \equiv x_1, x_2, \dots \\ h_2(y) = 0 & \Longleftrightarrow & y \equiv y_1, y_2, \dots \end{array}\right.$$

Это решения (т. к. $\mathrm{d}\,x$ и $g_2(x)$ одновременно обратятся в 0)

# III. Линейное уравнение

$$y' + p(x)y = \underset{\text{неоднородность}}{q(x)}, \qquad p(x), q(x) \in \mathcal{C}\Big(\langle a, b\rangle\Big)$$

- Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется линейным однородным (ЛОУ)
- Иначе $y' + p(x)y = q(x)$ – линейным неоднородным (ЛНУ)

$$\underset{\substack{\text{общее неоднородное}\\ \text{(все реш. ЛНУ)}}}{y_{\text{ОН}}(x, C)} = \underset{\substack{\text{общее однор.}\\ \text{(все реш. ЛОУ)}}}{y_{\text{ОО}}(x, C)} + \underset{\substack{\text{частное неоднор.}\\ \text{(какое-то решение ЛНУ)}}}{y_{\text{ЧН}}(x, C)}$$

**Алгоритм.**

1. Ищем $y_{\text{ОО}}$:

$$y_{\text{ОО}} = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Примечание.** Сюда, при допуске $C = 0$, входит $y \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}$, “потерянное” при выводе этой формулы

2. Ищем $y_{\text{ЧН}}$:
Будем искать в виде

$$y_{\text{ЧН}} = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Замечание.** Эту формулу обязательно надо записать

Подставим это в ЛНУ:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + \cancel{C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \cdot \big(-p(x)\big)}}_{y'_{\text{ЧН}}\text{ как производная произведения}} \cancel{+ p(x)\underbrace{C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}}_{y_{\text{ЧН}}}} \equiv q(x)$$

> **Контрольная точка.** Второй и третий член **должны** сократиться

$$C'(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)\,\mathrm{d}\,x + \underset{(C_2)}{0}$$

Подставляем в формулу для $y_{\text{ЧН}}$:

$$y_{\text{ЧН}} = \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)\,\mathrm{d}\,x \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Замечание.** Если $p(x)$ можно проинтегрировать (т. е. $\int p(x)\,\mathrm{d}\,x = \xi(x) + C_1$), нужно вместо $C_1$ записать какую-то конкретную константу (читайте: ноль). Мы ведь искали **частное** решение, а не континуум

3. Ищем $y_{\text{ОН}}$:
$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \cdot \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

**Замечание.** Неберущийся неопределённый интеграл нужно записывать в виде интеграла с переменным верхним пределом, в нижнем пределе которого стоит выбранная числовая константа
$$y_{\text{ОН}} = e^{-P(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)} q(s)\,\mathrm{d}\,s\right), \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$$

**Замечание.** Не стоит здесь пользоваться готовой формулой. Нужно идти по алгоритму

# IV. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y + r(x)y^{\tau} = 0, \qquad p(x), r(x) \in \mathcal{C}\Big(\langle a, b\rangle\Big)$$

**Замечание.**

- При $\tau > 0$ уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0, \quad x \in (a, b)$
- При $\tau = 0, 1$ – это не уравнение Бернулли, а линейное

Стандартная замена:
$$u = y^{1-\tau}, \qquad u' = (1-\tau)y^{-\tau}y'$$

**Замечание.** Здесь прямая замена не нужна – просто делим на $y^{\tau}$

Получаем уравнение:
$$(1-\tau)^{-1}u' + p(x)u + r(x) = 0$$

# V. Уравнение Риккати

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

Иногда решается:

1. Если известно какое-то частное решение:
   Пусть $y = \eta(x)$ – решение уравнения на некотором промежутке, то есть
   $$\eta'(x) \equiv q(x) - p(x)\eta(x) - r(x)\eta^2(x), \qquad \text{на } \langle a, b\rangle$$
   Замена $y = z + \eta(x)$ преобразует наше уравнение в уравнение Бернулли
   $$z' - \Big(p(x) + 2r(x)\Big)z + r(x)z^2 = 0$$

2. Если $r(x) \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$ и $r(x) \in \mathcal{C}^1\Big(\langle a, b\rangle\Big)$:
   Уравнение приводится к виду
   $$u' + au^2 = s(x), \qquad a \neq 0$$
   при помощи композиции двух замен:
   (a) Линейная замена
   $$y = \gamma(x)z, \qquad y' = \gamma'z + \gamma z', \qquad z = y\gamma^{-1}$$
   позволяет сделать коэффициент при квадратичном члене ненулевой константой

(b) Сдвигающая замена

$$z = u + \delta(x), \qquad z' = u' + \delta' x', \qquad u = z - \delta$$

позволяет аннулировать линейный член, сохраняя коэффициент при $z^2$ неизменным

3. Если уравнение имеет вид

$$u' = au^2 + cx^\sigma, \qquad \sigma \neq 0, -2$$

Оно называется специальным уравнением Риккати

> **Замечание.** При $\sigma = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными, а при $\sigma = -2$ – обобщённо-однородное
> В последнем случае замена
> $$u = x^{-1} v^{-1}$$
> сводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными
> $$xv' = -(cv^2 + v - a)$$

Специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах **тогда и только тогда**, когда

$$k = \frac{\sigma}{2\sigma + 4} \in \mathbb{Z} \quad (k \neq 0), \qquad \text{то есть} \quad \sigma = \frac{4k}{1 - 2k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Алгоритм.**

(a) Сделаем замену обеих переменных:

$$\begin{cases} x = t^{1/2 - k} = t^{\frac{1}{\sigma+2}}, & t = x^{\frac{2}{1-2k}} > 0 \\ u = z(t) t^{k - 1/2} = zt^{-\frac{1}{\sigma+2}}, & z = ux \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}(zt^{k-\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}\, t} \cdot \frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, x} = \frac{t^{k-\frac{1}{2}} \dot{z} + (k - 1/2) t^{k - 3/2} z}{(1/2 - k) t^{-1/2 - k}} = \frac{t^{2k}}{1/2 - k} \dot{z} - t^{2k-1} z$$

Получаем уравнение

$$t\dot{z} + \left(k - \frac{1}{2}\right) z + a_0 z^2 = c_0 t, \qquad a_0 \coloneqq \left(\frac{1}{2} - k\right) a, \quad c_0 \coloneqq \left(\frac{1}{2} - k\right) c$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если коэффициент при линейном члене равен $-1/2$

(b) "Обнуляем" $k$:
В зависимости от знака $k$ используется одна из замен, сохраняющих структуру уравнения и позволяющих уменьшать $|k|$ на 1:

- $k > 0$:
$$z = a^{-1} + tv_1^{-1}, \qquad \dot{z} = v_1^{-1} - tv_1^{-2} \dot{v}_1, \qquad v_1 = t(x - a^{-1})^{-1}$$
- $k < 0$:
$$z = t(v_1 + d)^{-1}, \qquad \dot{z} = (v_1 + d)^{-1} - t(v_1 + d)^{-2} \dot{v}_1, \qquad v_1 = tz^{-1} - d$$
$$d \coloneqq \left(\frac{1}{2} + k\right) \left(\frac{1}{2} - k\right)^{-1} c^{-1}$$

В результате нескольких таких замен придём к уравнению

$$t\dot{v_k} + \left(-\frac{1}{2}\right) v_k + a_k v_k^2 = c_k t$$

(c) Завершающая замена

$$v_k = t^{1/2} w, \qquad \dot{v_k} = \frac{t^{-1/2} w}{2} - t^{1/2} \dot{w}, \qquad w = t^{-1/2} v_k$$

приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$t^{1/2}\dot{w} = a_k w^2 - c_k$$

## VI. Однородное уравнение

**Определение 1.** $h(x,y)$ называется однородной функцией степени $k$, если $h(sx, sy) = s^k h(x,y)$

Уравнения

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{и} \qquad M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad M, N - \text{однородные порядка } k$$

называются однородными (порядка 0)
То есть, уравнение однородное, если каждое его слагаемое имеет одну и ту же суммарную степень по $x$ и $y$
Стандартная замена:

$$y(x) = u(x)x, \qquad \left[\begin{array}{l} y' = u'x + u \\ \mathrm{d}\,y = u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u \end{array}\right., \qquad u = x^{-1}y$$

**Контрольная точка.** После замены **каждое** слагаемое должно содержать $x^k$

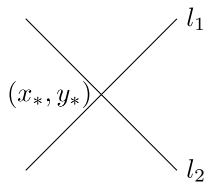
Сокращаем на $x^k$, группируем слагаемые при $\mathrm{d}\,x$ и $\mathrm{d}\,y$ – получаем уравнение с разделяющимися переменными

## VII. Дробно-линейное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Числитель и значенатель задают прямые, пусть $l_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad l_2 = a_2 x + b_2 y + c_2$
Возможны два случая:

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$




Пусть $(x_*, y_*)$ – решение системы

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

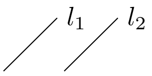
или, что то е самое, точка пересечения прямых $l_1$ и $l_2$
После сдвига начала координат в точку $(x_*, y_*)$ прямые не будут иметь свободных членов
Итак, после замены

$$u = x - x_*, \qquad v = y - y_*, \qquad \mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x, \qquad \mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,y$$

или $y'(x) = v'(u)$ получаем однородное уравнение

$$v' = h\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$$

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$



Тогда $b_1 \neq 0$ и $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_2}{a_1} = k$
В этом случае замена

$$u = a_1 x + b_1 y, \qquad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1 x), \qquad y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$$

сразу приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' = b_1 h\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1$$

## VIII. Обощённо-однородное уравнение

**Определение 2.** Уравнение называется обощённо-однородным, если каждое его слагаемое имеет один и тот же суммарный порядок по $x$ и $y$ при условии, что $x, \mathrm{d}\,x$ имеют порядок 1, а $y, \mathrm{d}\,y$ – порядок $m \neq 0$

Тогда $y' = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}$ имеет порядок $m - 1$
Аргументы входящих в уравнение функций типа логарифма или тригонометрических должны иметь нулевой порядок
Таким образом, чтобы установить, является ли уравнение обобщённо-однородным, надо приравнять порядки всех слагаемых, получая систему многих уравнений с одной неизвестной $m$. Если повезёт, такое число $m$ найдётся. Тогда замена

$$y = z^m, \qquad y' = mz^{m-1}z', \qquad z = y^{1/m}$$

сведёт уравнение к однородному, но не всегда:

**Проблема** Проблема возникает, когда $y$ может принимать значения разных знаков (ОДЗ этого не запрещает), и отсутсвует инвариантность относительно замены $y = -\widetilde{y}$

В таком случае надо отдельно проверить $y(x) \equiv 0$
Дальше возможно три случая:

- Общий:
  Замена
  $$y = (xu)^m, \qquad y' = m(xu)^{m-1}(u + xu'), \qquad u = x^{-1}y^{1/m}$$
  приведёт к уравнению с разделяющимися переменными (но придётся решить два раза для разных знаков $y$)

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = 2q$
  Делаем замену
  $$y = x^{2q}u, \qquad y' = 2qx^{2q-1}u + x^{2q}u', \qquad u = x^{-2q}y$$
  Она не фиксирует знак $y$, так что не придётся решать уравнение второй раз
  Также получаем сразу уравнение с разделяющимися переменными

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = (2q)^{-1}$, при этом $x$ тоже меняет знак, и отсутсвует инвариантность относительно замены $x = -\widetilde{x}$
  Надо следать замену
  $$y = |x|^{\frac{1}{2q}}u, \qquad y' = \sigma\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,|x|} = \sigma\left((2q)^{-1}|x|^{\frac{1}{2q}-1}u + |x|^{\frac{1}{2q}}u'\right), \quad \text{где } u' = \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,|x|}, \qquad u = |x|^{-\frac{1}{2q}}y$$
  где $\sigma = \operatorname{sign} x$
  Получается уравнение с разделяющимися переменными и параметром $\sigma$

  **Контрольная точка.** В ответе не должно остаться $\sigma$ (т. е. каждая $\sigma$ должна "найти" свой $|x|$)

  **Примечание.** $\sigma|x| = x$

# IX. Уравнение в полных дифференциалах

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{1}$$

**Определение 3.** Уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД), если

$$\exists U(x,y) \in \mathcal{C}^1\Big(B\Big): \quad \begin{cases} U'_x = M \\ U'_y = N \end{cases}$$

Если нашлась такая $U$, то $U(x,y) \equiv C$ – ответ

**Утверждение 1.** Уравнение (1) является УПД **тогда и только тогда**, когда

$$M'_y - N'_x \equiv 0 \quad \text{локально} \tag{2}$$

Проверяем (2)
Ищем $U$:

$$\begin{gathered} U'_x = M \implies \quad U(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + C(y) \\ U'_y = N \implies \quad \left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)'_y + C'(y) = N(x,y) \\ C(y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \int \left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)'_y \mathrm{d}\,y + 0 \end{gathered} \tag{3}$$

или

$$\begin{gathered} U'_y = N \implies \quad U(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y + C(x) \\ U'_x = M \implies \quad \left(\int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)'_x + C'(x) = M(x,y) \\ C(y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int \left(\int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)'_x \mathrm{d}\,x + 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Подставляем $C(y)$ в первое выражение, получаем $U(x,y)$

**Контрольная точка.** В (3) и (4) **не** должно остаться $x$

**Замечание.** Может оказаться, что $C' \equiv 0$. Тогда можно считать, что $C(y) \equiv 0$ (нужна ведь произвольная константа)

# X. Поиск интегрирующего множителя

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

Если это не УПД, то есть $M'_y - N'_x \not\equiv 0$, то можно попытаться найти интегрирующий множитель
Это будет $\mu(x,y) \in \mathcal{C}^1\Big(B^0\Big)$, такая что

$$\mu M\,\mathrm{d}\,x + \mu N\,\mathrm{d}\,y = 0$$

станет УПД, то есть

$$N\mu'_x - M\mu'_y = (M'_y - N'_x)\mu$$

Это уравнение мат. физики. Его можно попытаться решить:
Пусть $\mu$ – функция от $\omega$:

$$\mu(\omega) = \mu\Big(\omega(x,y)\Big), \qquad \mu'_x = \frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_x, \qquad \mu'_y = \frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_y$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega} = \frac{\overbrace{M'_y - N'_x}^{A}}{N\omega'_x - N\omega'_y} \cdot \mu(\omega)$$

Нужно подобрать $\omega$ так, чтобы $A$ зависело от $\omega$
Если подобрали, то

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega} = A(\omega)\mu$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\mu(\omega) = 1 \cdot e^{\int A(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega}$$

Как выбрать $\omega$:

- $\omega = x$
$$A(x) \stackrel{?}{=} \frac{M'_y - N'_x}{N}$$
- $\omega = y$
$$A(y) \stackrel{?}{=} \frac{M'_y - N'_x}{-M}$$
- $\omega = x^\alpha y^\beta$ или $\omega = x^\alpha \pm y^\beta$
Подставляем, например, $\alpha = 1$, и подбираем $\beta$ так, чтобы привелись подобные

# Уравнения, не разрешённые относительно производной

## XI. Уравнение, не разрешённое относительно производной

$$F(x, y, y') = 0, \qquad D \in \mathcal{C}\Big(W\Big), \qquad W \text{ связно}$$

Варианты решения:

1. Свести к
$$y' = f_k(x, y), \qquad k = 1, 2, ...$$
$k$ может быть сколько угодно – конечное число (например, если уравнение содержало $y'^2$), счётно (например, $\sin y'$) или континуум
Каждое из них решаем как обычно

2. Свести к

   (a) $y = g(x, y')$
   Положим $p = y'$, тогда $\mathrm{d}\,y = p\,\mathrm{d}\,x$. Подставим:
$$y = g(x, p) \tag{5}$$
   Берём дифференциалы от левой и правой частей:
$$\Big(g'_x(x, p) - p\Big)\,\mathrm{d}\,x + g'_p(x, p)\,\mathrm{d}\,p = 0$$
   Как правило, левая часть раскладывается на множители:
$$\chi(x, p)\Big(M(x, p)\,\mathrm{d}\,x + N(x, p)\,\mathrm{d}\,p\Big) = 0 \tag{6}$$
   где равенство $\chi(x, p) = 0$ задаёт особые решения в неявном виде, а уравнение в симметричной форме $M\,\mathrm{d}\,x + N\,\mathrm{d}\,p = 0$ предстоит решить

**Совет** На этом моменте надо забыть, что $p = y'$ – исходное уравнение мы уже проинтегрировали

Если (6) решается только относительно:

***p*.** Решения будут иметь вид

$$\left[\begin{array}{l} p = \varphi(x, C) \\ p = \varphi_k(x), \qquad k = 0, 1, \ldots \end{array}\right.$$

где $\varphi_0(x)$ – решение уравнения $\chi(x, p) = 0$, а $\varphi_k$ – решения, не попавшие в формулу $p = \varphi(x, C)$

Подставим в (5):

$$\left[\begin{array}{l} y = g\Big(x, \varphi(x, C)\Big) \\ y = g\Big(x, \varphi_k(x)\Big) \end{array}\right.$$

***x*.** Аналогично:

$$\left[\begin{array}{l} x = \psi(p, C) \\ x = \psi_k(p) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \psi(p, C) \\ y = g\big(\psi(p, C), p\big) \end{cases} \\ \begin{cases} x = \psi_k(p) \\ y = g\big(\psi_k(p), p\big) \end{cases} \end{array}\right.$$

Если уравнение можно решить и относительно $x$, и относительно $p$, то надо решать относительно $p$

**Решение ЗК** Если сразу подставить начальные данные $x_0, y_0$ в формулу общего решения, записанного в параметрическом виде, то придётся решать двумерную систему относительно $p$ и $C$

Лучше сначала найти значения $p$, отвечающие выбранным начальным данным. Для этого надо подставить $x_0, y_0$ в равенство (5) и найти $p_1, p_2, \ldots$ – корни полученного уравнения, после чего для всякого $m$ из уравнения $x_0 = \psi(p_m, C)$ найти константы $C_m$

**Контрольная точка.** Сожно проверить выполнение равенства:

$$y_0 = g\Big(\psi(p_m, C_m), p_m\Big)$$

(b) $x = h(y, y')$

Положим $y' = p$, $\qquad \mathrm{d}\,x = p^{-1}\,\mathrm{d}\,y$

!!!

Дифференцируем равентво $x = h(y, p)$:

$$\Big(h'_y(y, p) - p^{-1}\Big)\,\mathrm{d}\,y + h'_p(y, p)\,\mathrm{d}\,p = 0$$

Надо проверить, будет ли функция $y(x) = C$ при каких-либо $C$ решением

3. Если $F(x, y') = 0$ или $F(y, y') = 0$, то ищем $\xi(t), \mu(t)$ такие, что

$$F\Big(\xi(t), \mu(t)\Big) \overset{t}{\equiv} 0$$

Если нашлись, то уравнение можно проинтегрировать в общем виде:

(a) Если $F(y, y') = 0$ и допускает параметризацию аргументов $y$ и $y' = p$ $(\mathrm{d}\,y = p\,\mathrm{d}\,x)$ функциями $t$:

$$y = \varphi(t), \qquad p = \psi(t), \qquad F\Big(\varphi(t), \psi(t)\Big) \equiv 0$$

Интегрируя равенство $y = \varphi(t)$, поулчаем:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,y = p\,\mathrm{d}\,x = \psi(t)\,\mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,y = \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t \end{cases}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \,\mathrm{d}\, t + C, \qquad y = \varphi(t)$$

(b) Если $F(x, y') = 0$ – аналогично

# XII. Уравнения высокого пордяка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Существует 4 способа понизить порядок:

1. Нет первых нескольких производных:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}), \qquad 1 \le k \le n$$

   (если $k = 1$, то нет $y$)
   Замена:

$$z = y^{(k)}, \qquad z' = y^{(k+1)}, \qquad \dots\dots\dots\dots$$

   Порядок понижается на $k$:

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-k)})$$

$$z = z(x, C_1, \dots, C_{n-k}), \qquad y^{(k)} = z(y, C_1, \dots, C_{n-k})$$

2. Нет $x$:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

   $y$ становится независимой переменной:

$$y'(x) = p(y)$$

   Обязательно пишем ОДЗ на замену: $y \overset{?}{\equiv} C$

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}\, y'(x)}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\, p(y)}{\mathrm{d}\, y} \cdot \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = p'(y) \cdot p(y)$$

$$y'''(x) = \dots\dots\dots\dots = \Big(p''(y)p(y) + p'^2(y)\Big) \cdot p(y)$$

   Получаем уравнение на порядок ниже:

$$\widetilde{F}(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

$$p = p(y, C_1, \dots, C_{n-1}), \qquad y' = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$

!!!

$$p^{-1}(y, C_1, \dots, C_{n-1}) \,\mathrm{d}\, y = \mathrm{d}\, x \qquad\qquad p(y, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

3. Однородное относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$ порядка $k$ ($x$ не влияет):
   Замена $y' = z(x)y$

$$y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y, \qquad y''' = \dots\dots\dots = (z'' + 3zz' + z^3)y$$

$$\widetilde{F}(x, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0, \qquad z = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

   Получаем ЛОУ:

$$y' = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})y$$

!!!

$$y \equiv 0$$

$$\ln \frac{y}{C_n} = \int z \,\mathrm{d}\, x$$
$$y = C_n^\sigma, \qquad \sigma = 1, -1$$

4. ООУ относительно всех переменных:
Каждое слагаемое имеет суммарный порядок $s$, если считать, что $x$ имеет порядок 1, $\quad y$ имеет порядок $m$, $\quad y'$ имеет порядок $m-1$, и т. д.
Замена:
$$x = e^t > 0, \qquad y = u(t)e^{mt}$$
Смотрим инвариантность. Если нет, то смотрим на порядок выше — там скорее всего будет
Возвратная замена:
$$t = \ln x, \qquad u(t) = yx^{-m}$$
$$y' = (\dot{u} + mu)e^{(m-1)t}, \qquad y'' = \Big(\ddot{u} + (2m-1)\dot{u} + m(m-1)u\Big)e^{(m-2)t}$$
$$\widetilde{F}(\overset{(n)}{u}, \dots) = 0$$

**Контрольная точка.** Всё делится на $e^{st}$

Получаем случай 2