Оглавление

Глава 1

Определённый интеграл

1.1 Интеграл с переменным верхним пределом

Определение 1. $f(x) \in \mathcal{R}([a,b]), \quad x \in (a,b] \quad \Longrightarrow f \in \mathcal{R}([a,x])$

$$\Phi(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad \Phi(a) := 0 \tag{1.1}$$

Теорема 1. Для Φ справедливы следующие свойства:

- $$\Phi(x) \in C([a,b]) \tag{1.2}$$
- $$f \text{ непр. в } x_0 \implies \exists\, \Phi'(x_0) = f(x_0) \tag{1.3}$$

Доказательство.

- $a < x_1 < x_2 \le b$

$$\begin{aligned}\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \\ = \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y + \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\exists\, M : \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \le M \tag{1.5}$$

$$(1.4), (1.5) \implies |\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| \le M(x_2 - x_2) \implies (1.2) \tag{1.6}$$

- $x_0 \in (a,b)$
  Положим $h \neq 0 : x_0 + h \in [a,b]$
  - $h > 0$

$$(1.4) \implies \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(y)\,\mathrm{d}\,y \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}(1.7) \implies \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(y)\,\mathrm{d}\,y + \int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y = \\ = hf(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y\end{aligned} \tag{1.8}$$

  - $h < 0$

$$(1.4) \implies \Phi(x_0) - \Phi(x_0+h) = \int_{x_0+h}^{x_0} f(y)\,\mathrm{d}\,y \tag{1.9}$$

$$(1.9) \implies \Phi(x_0) - \Phi(x_0+h) = \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)\,\mathrm{d}\,x_0 + \int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y =$$

$$= -hf(x_0) + \int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \quad (1.10)$$

$$(1.10) \iff \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = hf(x_0) - \int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \quad (1.11)$$

$$(1.8), (1.11) \implies \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0) \begin{matrix} +\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \\ -\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \end{matrix} \quad (1.12)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \underset{0<|h|<\delta}{\forall y} \quad |y - x_0| < \delta \implies |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1.13)$$

$$(1.13) \implies \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y\right| \le \frac{1}{h}\varepsilon \cdot h = \varepsilon \quad (1.14)$$

$$(1.13) \implies \left|\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y\right| \le \frac{1}{h}\varepsilon \cdot (-h) = \varepsilon \quad (1.15)$$

$$(1.12), (1.14), (1.15) \implies \underset{h\neq 0}{|h| < \delta} \quad \left|\frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \left|\frac{1}{h}\int_{\dots}^{\dots} \dots\right| < \varepsilon \implies (1.2)$$

□

Следствие. $f \in C([a,b]) \implies \forall x \in [a,b] \quad \exists \Phi'(x) = f(x)$

Теорема 2 (формула Ньютона-Лейбница (напоминание)). $f \in C([a,b]), \qquad \forall x \in [a,b]\ \exists f'(x) \implies f' \in \mathcal{R}([a,b])$

Теорема 3 (формула Ньютона-Лейбница (в новых обозначениях)). f, F, определённые на $[a,b]$
$f \in \mathcal{R}([a,b]), \qquad F$ – первообразная для f

$$\implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a)$$

1.2 Интеграл с переменным нижним пределом

Определение 2. $f \in \mathcal{R}([a,b]), \qquad x \in [a,b)$

$$\Psi(x) := \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad \Psi(b) := 0 \quad (1.16)$$

Теорема 4. Для Ψ справедливы следующие свойства:

- $$\Psi \in C([a,b]) \quad (1.17)$$
- $$f \text{ непр. в } x_0 \implies \exists \Psi'(x_0) = -f(x_0) \quad (1.18)$$

Доказательство. $x \in (a,b)$

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y + \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}\,y = \Phi(x) + \Psi(x) \quad (1.19)$$

(1.19) верно при $x \in [a, b]$
$$(1.19) \implies \Psi(x) = I - \Phi(x) \implies (1.17)$$
$$(1.19) \implies \Psi'(x_0) = I' - \Phi(x_0) = -\Phi(x_0) = -f(x_0) \implies (1.18)$$

□

1.3 Расширение символа определённого интеграла

Определение 3. Пусть $a > b$
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x := -\int_b^a f(x)\, \mathrm{d}\, x$$
$$\int_a^a f(x)\, \mathrm{d}\, x := 0$$

Утверждение 1. Формула Ньютона-Лейбница справедлива при любых соотношениях a и b

Доказательство. $f \in \mathcal{R}([a, b]), \qquad \forall x \in (a, b) \quad F'(x) = f(x)$
$$\implies \int_b^a f(x)\, \mathrm{d}\, x = -\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x = -\Big(F(b) - F(a)\Big) = F(a) - F(b)$$

□

1.4 Формула замены переменной в определённом интеграле

Теорема 5. $f \in C(I)$ (I – замкнутый промежуток с концами a и b)
$\varphi \in C([p, q]), \qquad \varphi' \in C([p, q]), \qquad \forall t \in [p, q] \quad \varphi(t) \in I, \qquad \varphi(p) = a, \quad \varphi(q) = b$
$$\implies \int_p^q f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, \mathrm{d}\, t = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x \tag{1.20}$$

Доказательство. $\exists\, F$ – первообразная f на I
$$\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)' = F'\Big(\varphi(t)\Big) \cdot \varphi'(t) = f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t) \tag{1.21}$$
$$(1.21) \implies F\Big(\varphi(t)\Big) \text{ – первообразная для } f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)$$
Применим формулу Ньютона-Лейбница:
$$\int_p^q f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\, \mathrm{d}\, t = F\Big(\varphi(q)\Big) - F\Big(\varphi(p)\Big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x$$

□

1.5 Интегрирование по частям в определённом интеграле

Теорема 6. $f, g \in C([a, b]), \qquad \forall x \in [a, b] \quad \exists\, f'(x), g'(x) \in C([a, b])$
$$\implies \int_a^b f'(x)g(x)\, \mathrm{d}\, x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\, \mathrm{d}\, x \tag{1.22}$$

Доказательство.
$$\exists\, F \in C([a, b]) : \forall x \in [a, b] \quad F'(x) = f'(x)g(x) \tag{1.23}$$

$$\exists G \in C([a,b]) : \forall x \in [a,b] \quad G'(x) = f(x)g'(x) \tag{1.24}$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) \tag{1.25}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x = G(b) - G(a) \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}(1.25), (1.26) \implies \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \\ = F(b) + G(b) - \Big(F(a) + G(a)\Big)\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\Big(F(x) + G(x)\Big)' = F'(x) + G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \Big(f(x)g(x)\Big)' \tag{1.28}$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$(1.28) \implies F(b) + G(b) - \Big(F(a) + G(a)\Big) = f(b)g(b) - f(a)g(a) \tag{1.29}$$

$$(1.27), (1.29) \implies (1.22)$$

□

Теорема 7 (о средних)**.** $f \in C([a,b])$, $g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\forall x \in [a,b] \quad g(x) \geq 0$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x > 0$

$$\implies \exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1.30}$$

Доказательство.

- $\forall x \in [a,b] \quad f(x) = A \implies \int_a^b Ag(x)\,\mathrm{d}\,x = A\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$
- $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$
  По второй теореме Вейерштрасса,

$$\exists x_- \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \quad f(x_-) \leq f(x) \tag{1.31}$$

$$\exists x_+ \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \quad f(x_+) \geq f(x) \tag{1.32}$$

Так как $f \not\equiv \mathrm{const}$, то $f(x_+) > f(x_-)$

Положим $r := \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x}$

Очевидно, что. $f(x)g(x) \geq f(x_-)g(x_-)$

$$(1.31) \implies \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_a^b f(x_-)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(x_-)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \implies r \geq f(x_-) \tag{1.33}$$

Очевидно, что. $f(x)g(x) \leq f(x_+)g(x_+)$

$$(1.32) \implies \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b f(x_+)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(x_+)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \implies f(x_+) \geq r \tag{1.34}$$

- $r = f(x_+) \implies c = x_+$
- $r = f(x_-) \implies c = x_-$
- $f(x_-) < r < f(x_+)$
  По теореме о промежуточном значении, $\exists\, c : f(c) = r$

$\square$

Замечание. В случае $g(x) \le 0$ и $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x < 0$, утверждение теоремы верно

Доказательство. Рассомтрим $h(x) \coloneqq -g(x) \ge 0$

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x > 0$$

По только что доказанному, $\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}\,x = f(c)\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\,x$

$$\int_a^b f(x)\big(-h(x)\big)\,\mathrm{d}\,x = f(c)\int_a^b \big(-h(x)\big)\,\mathrm{d}\,x$$

$\square$

Теорема 8 (вторая теорема о среднем). $f \in C([a,b]), \qquad g \in C([a,b]), \qquad \forall x \in [a,b] \quad \exists\, g'(x)$
g **монотонна**

$$\implies \exists\, c \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1.35}$$

Доказательство. f непрерывна на $[a,b] \implies \exists\, F : F'(x) = f(x)$
Воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b F'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1.36}$$

Будем считать, что $g(x) \not\equiv \mathrm{const}$ (иначе доказательство тривиально)
Тогда $g(b) - g(a) \ne 0$
Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}\,x = g(b) - g(a) \ne 0$$

К интегралу в правой части можно применить предыдущую теорему (или замечание к ней), поэтому:

$$\exists\, c \in (a,b) : \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x = F(c)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}\,x = F(c)\Big(g(b) - g(a)\Big) \tag{1.37}$$

Подставим в соотношение (1.36):

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = \ldots = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\Big(g(b) - g(a)\Big) = \Big(F(b) - F(c)\Big)g(b) + g(a)\Big(F(c) - F(a)\Big) \tag{1.38}$$

Положим $F(x) \coloneqq \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y, \quad F(a) \coloneqq 0$
Тогда $F(c) - F(a) = \int_a^c f(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad F(b) - F(c)$
Подставим в (1.38):

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = \ldots = g(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x \iff (1.35)$$

$\square$

1.6 Несобственные интегралы

Определение 4. • $[a, \beta)$, $\quad a < \beta \le +\infty$, $\quad \forall b < \beta f \in \mathcal{R}([a, b])$, $\quad f \notin \mathcal{R}(a, \beta)$, т. е.

  - $\beta = +\infty$
  - f неограничена на $[a, \beta)$

- $-\infty \le \alpha < b$, $\quad \forall \alpha < a < b \quad f \in \mathcal{R}([a, b])$, $\quad f \notin \mathcal{R}([\alpha, b])$, т. е.
  - $\alpha = -\infty$
  - f неограничена на $(\alpha, b]$

$\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$ и $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ называются несобственными интегралами

$$\Phi(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y, \quad x < \beta$$

$$\Psi(x) := \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}\,y, \quad x > \alpha$$

Определение 5. Говорят, что соотвествующий несобственный интеграл сходится, если

- $\exists \lim\limits_{x \to \beta} \Phi(x) \in \mathbb{R}$
- $\exists \lim\limits_{x \to \beta} \Psi(x) \in \mathbb{R}$

Иначе говорят, что он расходится

1.7 Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Через $\omega(\beta)$ и $\omega(\alpha)$ будем обозначать окрестности соотвествующих точек

Утверждение 2.

$$\exists \lim_{x \to \beta} \Phi(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \omega(\beta) : \forall x_1, x_2 \in [a, \beta) \cap \omega(\beta) \quad |\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| < \varepsilon$$

$$\exists \lim_{x \to \alpha} \Psi(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \omega(\alpha) : \forall x_1, x_2 \in (\alpha, b] \cap \omega(\alpha) \quad |\Psi(x_2) - \Psi(x_1)| < \varepsilon$$

Будем считать, что $x_1 < x_2$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \int_{x_2}^{b} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_{x_1}^{b} f(y)\,\mathrm{d}\,y = -\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Таким образом, критерий Коши переписываеся следующим образом:

$$\exists \lim_{x \to \beta} \Phi(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \omega(\beta) : \forall x_1, x_2 \in [a, \beta) \cap \omega(\beta) \quad \left| \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| < \varepsilon$$

$$\exists \lim_{x \to \alpha} \Psi(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \omega(\alpha) : \forall x_1, x_2 \in (\alpha, b] \cap \omega(\alpha) \quad \left| \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \right| < \varepsilon$$

1.8 Два важных конкретных примера, которые лекго проверяются

Пример. $a > 0, \quad p > 1, \qquad \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}\, x}{x^p}$

$$\int x^{-p} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{1-p} x^{1-p} + c$$

- $x > a$

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}\, y}{y^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} - \frac{1}{1-p} a^{1-p} = \frac{1}{p-1} a^{1-p} + \frac{1}{1-p} x^{1-p} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{p-1} a^{1-p}$$