Оглавление

Глава 1

Теория групп

1.1 Циклические группы

Теорема 1 (разложение циклической группы в прямое произведение примарных подгрупп). Пусть G – конечная циклическая группа. Тогда её можно разложить в прямое произведение примарных циклических подгрупп

Доказательство. Пусть $|G| \coloneqq n, \qquad G = \langle a \rangle, \qquad n = \underset{p_i \in \mathbb{P}}{p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}}$

Пусть $q_i \coloneqq \frac{n}{p_i^{s_i}}, \qquad b_i \coloneqq a^{q_i}, \qquad H_i \coloneqq \langle b_i \rangle$

$\operatorname{ord} b_i = p_i^{s_i}$, так как $b_i^{p_i^{s_i}} = a^{q_i p_i^{s_i}} = a^n = e$

При $0 < x < p_i^{s_i}, \quad b_i^{p_i^{s_i}} = a^{q_i x} \neq e, \qquad 0 < q_i x < n$

Значит, $H_i \cong \mathbb{Z}_{p^{s_i}}, \qquad H_i$ – примарная

- Докажем, что $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$:
  $H_i \triangleleft G$, так как G абелева
- Докажем, что $H_1 H_2 \dots H_{i-1} \cap H_i = \{ e \}$:
  Пусть $x \in H_1 \dots H_{i-1} \cap H_i$

$$x \in H_i = \left(a^{q_i}\right)^{t_i} = a^{q_i t_i} \quad \text{для некоторого } t_i$$

$$x \in H_1 \dots H_{i-} \implies x = a^{q_1 t_1} a^{q_2 t_2} \dots a^{q_{i-1} t_{i-1}} = a^{q_1 t_1 + \dots + q_{i-1} t_{i-1}} \quad \text{для которого } q_i$$

$$a^{q_i t_i} = a^{q_1 t_1 + \dots + q_{i-1} t_{i-1}} \implies q_1 t_1 + \dots + q_{i-1} t_{i-1} - q_i t_i \vdots \operatorname{ord} a = n$$

$$\left.\begin{aligned} & q_1 t_1 + \dots + q_{i-1} t_{i-1} - q_i t_i \vdots p_i^{s_i} \\ & q_1, \dots, q_{i-1} \vdots p_i^{s_i} \end{aligned}\right\} \implies q_i t_i \vdots p_i^{s_i} \underset{q_i \not\vdots p_i}{\implies} t_i \vdots p_i^{s_i}$$

$$t_i \vdots p_i^{s_i} \implies q_i t_i \vdots \frac{n}{p^{s_i}} \cdot p^{s_i} = n$$

$$x = a^{q_i t_i} = e$$

- Докажем, что $H_1 H_2 \dots H_k = G$:
  Пусть $x \in G$
  Тогда $x = a^t$ для некоторого t
  По теореме о линеном представлении НОД,

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k = 1 \quad \text{так как НОД}(()q_1, \dots, q_k) = 1$$

$$a^t = a^{(t\alpha_1) q_1 + (t\alpha_2) q_2 + \dots + (t\alpha_k) q_k} = \underset{\in H_1}{\left(a^{q_1}\right)^{t\alpha_1}} \cdot \dots \dots \cdot \underset{\in H_k}{\left(a^{q_k}\right)^{t\alpha_k}} \in H_1 \dots H_k$$

□

Следствие. G – циклическая, $|G| = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$, где m_i попарно взаимно просты
Тогда G можно разложить в произведение циклических подгрупп порядков $m_1, \dots, m_k$

Доказательство. Разложим G в произведение примарных подгрупп
Пусть $m_i = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}$

$$G = \dots\dots \times \underbrace{H_1}_{\cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}} \times \dots\dots \times \underbrace{H_2}_{\cong \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}}} \times \dots\dots$$

□

Глава 2

Евклидовы и унитарные пространства

2.1 Определение и примеры

Идея. В $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ есть скалярное произведение:

$$(u, v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v)$$

Из него выводились разные свойства, например,

- Билинейность:
$$(tu, v) = t(u, v), \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$$
- Симметричность: $(u, v) = (v, u)$
- Положительная определённость: $(u, u) \geq 0$

Будем считать, что в Евклидовом пространстве есть скалярное произведение с такими свойствами. Через него выразим cos и длину вектора

Определение 1. Векторное пространство над $\mathbb{R}$ называется вещественным
Векторное пространство над $\mathbb{C}$ называется комплексным

Определение 2. V – вещественное векторное пространство. Скалярным произведением на V называется функция $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, такая, что выполнены свойства:

1. Линейность по первому аргументу: $(au + bv, w) = a(u, w) + b(v, w)$
2. Симметричность: $(u, v) = (v, u)$
3. Положительная определённость: $(v, v) \geq 0$

Замечание. Из 1 и 2 следует линейность по второму аргументу. Говорят, что $(\cdot, \cdot)$ билинейна

Замечание. $(0, v) = 0$, т. к. $\underbrace{(u + 0, v)}_{=(u,v)} = (u, v) + (0, v)$
В частности, $(0, 0) = 0$

Определение 3. Евклидово пространство – конечномерное вещественное пространтство со скалярным произведением

Определение 4. Пусть V – комплексное векторное пространство. Скалярным произведением на V называется функция $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$, такая, что:

1. Линейность по первому аргументу: $(au + bv, w) = a(u, w) + b(v, w)$

2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$

3. (v, v) является вещественным положительным числом

Определение 5. Унитарным пространством называется конечномерное комплексное пространство со скалярным произведением

2.2 Неравенство Коши

Определение 6. Длина вектора V в евклидовом или унитарном пространстве определяется как $|v| = \sqrt{(v, v)}$

Теорема 2 (неравенство Коши)**.** Пусть V – евклидово или унитарное пространство

$$\forall u, v \in V \quad |(u, v)^2 \leq (u, u) \cdot (v, v)$$

Равенство достигается, если $u = sv$, где s – скаляр, или $v = 0$

Доказательство. Будем пользоваться линейностью по первой координате и

$$(u, av + bw) = \overline{a}(u, v) + \overline{b}(u, w)$$

Пусть $u \neq 0$

Положим $a := (u, u), \qquad b := (u, v), \qquad c := (v, v), \qquad t := \frac{b}{c}$

$$\begin{aligned} 0 \leq (u - tv, u - tv) = (u, u) + (u, -tv) + (-tv, u) + (-tv, -tv) = \\ = a - \overline{t}b - t\overline{b} + t\overline{t} \cdot c \underset{(-t\overline{b} + t\overline{t} \cdot c = \overline{t}(-b + tc) = 0)}{=} a - t\overline{b} \overset{\text{def}}{=} a - \frac{b}{c}\overline{b} = a - \frac{1}{c}|\overline{b}|^2 \end{aligned}$$

□