Оглавление

Глава 1

Комплексные числа

1.1 Тригонометрическая форма комплексного числа (продолжение)

Утверждение.

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \implies z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Доказательство.

- $n = 0$

$$z^0 = 1 \quad r_0(\cos(0\cdot\varphi) + i\sin(0\cdot\varphi)) = 1$$

- $n > 0$

$$z^n = \underbrace{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)...}_{n \text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{r\cdot r\cdot ...\cdot r}_{n \text{ раз}}(\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+...}_{n \text{ раз}}) + i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+...}_{n \text{ раз}})) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

- $n < 0$
  Положим $k = -n,\ k > 0$

$$z^n = \frac{1}{z^k} = \frac{1}{r^k(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))} = \frac{1}{r^k}(\cos(-k\varphi) + i\sin(-k\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

□

Пример. Найти $(-\sqrt{3} + i)^{10}$

$$z = -\sqrt{3} + i$$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\varphi = \frac{1}{2} \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$

$$z^{10} = 2^{10}(\cos(\frac{5\pi}{6}\cdot 10 + i\sin(\frac{5\pi}{6}c\dot{1}0))) = 1024(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 512 + 512\sqrt{3}i$$

Теорема 1 (Извлечение корня в тригонометрической форме). Пусть $a \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$.
Тогда уравнение $z^n = a$ имеет n решений.
Если $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то решениями уравнения являются числа:

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

Доказательство. Ищем решение в виде $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Возведём z в n степень:

$$\rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Проверим, что при $k = 0, 1, .., n-1$ корни различны, и любой корень совпадает с одним из них:
Положим $z_k = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$

$$z_k = z_l \implies \arg z_k = \arg z_l \iff \frac{\phi + 2\pi k}{n} = \frac{\phi + 2\pi l}{n} + 2\pi m \iff$$
$$\iff \phi + 2\pi k = \phi + 2\pi l + 2\pi m \cdot n \iff k = l + mn \iff k \underset{n}{\equiv} l$$

□

Пример.

$$\sqrt[3]{8i}$$
$$z^3 = 8i$$
$$r = 8 \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$
$$z_k = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}), \quad k = 0, 1, 2$$

- $k = 0$
$$z_0 = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$$
- $k = 1$
$$z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$$
- $k = 2$
$$z_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i$$

Определение 1. Число $\varepsilon \in \mathbb{C}$ называется корнемм n-й степени из единицы, если $\varepsilon^n = 1$

Обозначение.

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

Пример. $n = 4$

$$\varepsilon_0 = 1$$
$$\varepsilon_1 = i$$
$$\varepsilon_2 = -1$$
$$\varepsilon_3 = -i$$

Свойства.

1. Корни n-й степени из единицы образуют группу по умножению

   Доказательство.

   (a) Ассоциативность – всегда верно в $\mathbb{C}$

   (b) Нейтральный элемент: 1 – корень n-й степени из 1

   (c) Обратный элемент:
   $$(\frac{1}{x})^n = \frac{1^n}{x^n} = \frac{1}{1} = 1$$

   (d) Замкнутость относительно операции:
   $$(xy)^n = x^n y^n = 1 \cdot 1 = 1$$

   □

2. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, x – корень n-й степени из a. Тогда $\varepsilon_0 x, \varepsilon_1 x, ..., \varepsilon_n x$ – все корни n степени из a

   Доказательство. Докажем, что, если $y = \varepsilon_i x$, то y – корень n-й степени из 1:
   $$y^n = \varepsilon_i^n x^n = 1 \cdot a$$
   Докажем, что, если y – корень n-й степени из 1, то $y = \varepsilon_i x$, т. е. $\frac{y}{x}$ – корень n-й степени из 1:
   $$(\frac{y}{x})^n = \frac{y^n}{x^n} = \frac{a}{a} = 1$$
   □

Определение 2. Число $\varepsilon \in \mathbb{C}$ называется перовообразным корнем n-й степени из 1, если $\varepsilon^n = 1$, $\varepsilon^k \neq 1$ при $1 \leq k < n$. Также называется корнем, принадлежащим показателю n

Пример. $n = 4 \quad 1, i, -1, -i$
$i, -i$ – первообразные (принадлежат показателю 4)
-1 – первообразный корень степени 2
1 – первообразный корень степени 1

Свойства.

1. ε_k – первообразный корень n-й степени из 1 $\iff$ $(k, n) = 1$

   Доказательство. Пусть $km = nq + r, \quad 0 \leq r \leq n$
   $$\varepsilon_k = (\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n})^m = \cos\frac{2\pi km}{n} + i\sin\frac{2\pi km}{n} = \cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}$$

   - Пусть $(k, n) = 1$. Если $\varepsilon_k^m = 1$, то $mk \,\vdots\, n \implies m \,\vdots\, n \implies m \geq n$
   - Пусть $(k, n) = d \neq 1 \implies \frac{n}{d} \cdot k \,\vdots\, n \implies \varepsilon_k^{\frac{n}{d}} = 1 \implies \varepsilon_k$ – не первообр.

   □

2. Пусть ε_k – первообразный корень. Тогда любой корень n-й степени из 1 равен ε_k^m для некоторого m

   Доказательство. $\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, .., \varepsilon_k^n$ – корни n-й степени из 1. Докажем, что они различны:
   Пусть $\varepsilon_k^m = \varepsilon_m^l, \quad 1 \leq m < l \leq n \implies \varepsilon_k^{l-m} = 1, \quad 1 \leq l - m < n$ □

Глава 2

Полиномы

2.1 §1. Кольцо многочленов

Будем рассматривать многочлены как бесконечные последовательность коэффициентов (начиная с какого-то момента – нули)

Определение 3. Пусть A – кольцо. Многочленом над A будем называть последовательность $(a_1, a_2, ...)$, в которой только конечное количество членов отлично от нуля.

Определение 4. Суммой многочленов $(a_0, a_1, ...)$ и $(b_0, b_1, ...)$ называется многочлен $(c_0, c_1, ...)$, где $c_k = a_k + b_k \ \forall k$

Определение 5. Произведением многочленов $(a_0, a_1, ...)$ и $(b_0, b_1, ...)$ называется многочлен $(d_0, d_1, ...)$, где $d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0$, то есть $d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

Обозначение. Множество многочленов над A обозначается $A[x]$

Теорема 2.

1. Сумма и произведение многочленов определены корректно, т. е. в последовательностях $(c_0, c_1, ...)$ и $(d_0, d_1, ...)$ только конечное колическто членов отлично от нуля
2. $A[x]$ – кольцо

Доказательство.

1. Пусть $N, M : \begin{Bmatrix} a_i = 0 \text{ при } i > N \\ b_i = 0 \text{ при } i > M \end{Bmatrix} \implies c_i = 0 \text{ при } i > \max\{N, M\}$
2. Докажем, что $d_k = 0$ при $k > M + N$:

$$d_k = a_0 b_k + ... + a_k b_0 = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

$$i + j = k \implies i + j > M + N \implies \begin{bmatrix} i > N \\ j > M \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a_i = 0 \\ b_j = 0 \end{bmatrix} \implies a_i b_j = 0$$

□