

Оглавление

0.1	Теорема Лагранжа для вектор-функций	1
0.2	Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому	2
0.3	Обратимые отображения	3

0.1 Теорема Лагранжа для вектор-функций

Определение 1. Отображение $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 2}$ называют вектор-функцией, заданной на (a, b)

Замечание. \mathbb{R} можно трактовать как пространство вектор-столбцов, состоящих из одного элемента

Утверждение 1. $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 2}$, $F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$, $t_0 \in (a, b)$

Напоминание. По теореме из прошлого семестра, F дифференцируема в t_0 тогда и только тогда, когда $f_j(t)$ дифф. в t_0 $j = 1, \dots, n$

Напоминание. $f_j(t)$ дифф. в t_0 тогда и только тогда, когда $\exists f'_j(t_0)$

$$\mathcal{D}F(t_0) = \begin{bmatrix} f'_1(t_0) \\ \vdots \\ f'_n(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}F(t_0)\|_{\text{(как линейного отображения)}} &= \sup_{\substack{|h| \leq 1 \\ h \in \mathbb{R}}} \|\mathcal{D}F(t_0)h\|_n = \sup_{h \in \mathbb{R}} \|h\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \sup_{h \in \mathbb{R}} |h| \|\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \\ &= \|\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \left\| \begin{bmatrix} f'_1(t_0) \\ \vdots \\ f'_n(t_0) \end{bmatrix} \right\|_n \end{aligned}$$

Теорема 1 (Лагранжа). $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 2}$, $F \in \mathcal{C}([a, b])$

Напоминание. $F \in \mathcal{C}([a, b]) \iff f_j \in \mathcal{C}([a, b]) \quad j = 1, \dots, n$

$\forall t \in (a, b) \quad F$ дифф. в t

$$\implies \exists c \in (a, b) : \|F(b) - F(a)\|_n \leq \|\mathcal{D}F(c)\|_n (b - a) \quad (1)$$

Доказательство. Возьмём

$$\varphi(t) := F(t)^T (F(b) - F(a)) = f_1(t) (f_1(b) - f_1(a)) + \dots + f_n(t) (f_n(b) - f_n(a)) \quad (2)$$

Будем считать, что $F(b) \neq F(a)$ (иначе – очевидно)

По напомним из условия теоремы, $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$. Значит, $\forall t \in (a, b) \quad \exists \varphi'(t)$

$$\varphi'(t) = f'_1(t)(f_1(b) - f_1(a)) + \dots + f'_n(t)(f_n(b) - f_n(a)) \quad (3)$$

К φ можно применить теорему Лагранжа из первого семестра:

$$\exists c \in (a, b) : \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &\stackrel{(2)}{=} \left[f_1(b)(f_1(b) - f_1(a)) + \dots \right] - \left[f_1(a)(f_1(b) - f_1(a)) + \dots \right] = \\ &= \left(f_1(b) - f_1(a) \right)^2 + \dots + \left(f_n(b) - f_n(a) \right)^2 = \|F(b) - F(a)\|_n^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Применим к (3) неравенство КБШ:

$$\begin{aligned} |\varphi'(c)| &\leq \left[\left(f'_1(c) \right)^2 + \dots + \left(f'_n(c) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(f_1(b) - f_1(a) \right)^2 + \dots + \left(f_n(b) - f_n(a) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|\mathcal{D}F(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\| \end{aligned} \quad (6)$$

$$(5), (6) \implies \|F(b) - F(a)\|^2 \leq \|\mathcal{D}F(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\| \implies (1)$$

□

0.2 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Теорема 2. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейное, т. е. $\mathcal{A}(X) = AX$, $X \in \mathbb{R}^n$

A обратимо, т. е. $\exists D : AD = I$ и $DA = I$ (D называется обратной матрицей и обозначается $D = A^{-1}$)

Вспомним две теоремы из алгебры:

Напоминание. A обратима $\iff \det A \neq 0$

Напоминание. A обратима $\iff AX \neq \mathbb{O}_n \quad \forall X \neq \mathbb{O}_n$

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \|B - A\| = \beta, \quad 0 < \beta < \alpha$$

Тогда B обратима и $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\beta - \alpha)}$

Доказательство.

- Докажем, что B обратима:
Возьмём $X \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) &\implies \|X\| = \|A^{-1}(AX)\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \|AX\| \stackrel{\text{def } \alpha}{=} \frac{1}{\alpha} \|AX\| \implies \|AX\| \geq \alpha \|X\| \end{aligned} \quad (7)$$

$$BX = AX + (BX - AX) \implies \|BX\| \stackrel{\Delta}{\geq} \|AX\| - \|BX - AX\| \quad (8)$$

$$\|BX - AX\| = \|(B - A)X\| \leq \|B - A\| \|X\|_n \quad (9)$$

$$\|BX\|_n \stackrel{(8)}{\geq} \underbrace{\alpha \|X\|}_{(7)} - \underbrace{\|B - A\| \|X\|}_{(9)} = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{>0} \|X\| \quad (10)$$

Это означает, что B обратима (по второй теореме из алгебры)

- Докажем соотношение для $\|A^{-1} - B^{-1}\|$:
Возьмём $\forall Y \neq \mathbb{O}_n$ и $X := B^{-1}Y$

$$\|B(B^{-1}Y)\| \stackrel{\text{def } Y}{=} \|BX\| \underset{(10)}{\geq} (\alpha - \beta) \|X\| \stackrel{\text{def } X}{=} (\alpha - \beta) \|B^{-1}Y\| \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B(B^{-1}Y) &\stackrel{\text{асс.}}{=} (BB^{-1})Y = IY = Y \\ (11) &\implies \|B^{-1}Y\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \|Y\| \implies \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A(A^{-1} - B^{-1})B &\stackrel{\text{асс.}}{=} \left(A(A^{-1} - B^{-1}) \right) B \stackrel{\text{дистр.}}{=} (AA^{-1} - AB^{-1})B = (I - AB^{-1})B \stackrel{\text{дистр.}}{=} \\ &= IB - (AB^{-1})B \stackrel{\text{асс.}}{=} B - A(B^{-1}B) = B - AI = B - A \\ \implies \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I} (A^{-1} - B^{-1}) \underbrace{(BB^{-1})}_{=I} &= A^{-1}(B - A)B^{-1} \implies A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \underset{(13)}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| \cdot \|B^{-1}\| \underset{(12)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha - \beta}$$

определения α и β

□

0.3 Обратимые отображения

Утверждение 2. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, X_0 – внутр. точка, $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ – биекция, $G = F(E)$

Замечание. F – биекция $\iff F$ обратима

$$\Phi : G \rightarrow E, \quad \Phi(F(X)) = X \quad \forall X, \quad F(\Phi(Y)) = Y \quad \forall Y \in G \quad (\text{т. е. } \Phi = F^{-1})$$

F дифференцируемо в X_0 , $Y_0 = F(X_0)$, Φ дифференцируемо в Y_0

Обозначим $I(X) = X \quad \forall X \in E$ – тождественное отображение

Замечание. Тождественное отображение дифференцируемо. Его матрица Якоби: $DI(X) = I_n$

$$\text{Тогда } \Phi(F(X)) = I(X)$$

Применим теорему о дифференцируемости суперпозиции (утверждение про матрицы Якоби из неё):

$$\Phi(F(X)) = I(X) \implies \mathcal{D}\Phi(Y_0)\mathcal{D}F(X_0) = \mathcal{D}I(X_0) = I_n$$

По определению, если произведение матриц является единичной матрицей, то они обратны друг другу:

$$\mathcal{D}\Phi(Y_0) = \left(\mathcal{D}F(X_0) \right)^{-1}$$

Получили необходимое условие для обратных отображений

Теорема 3 (об обратном отображении). $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \rightarrow \mathbb{R}^1$
 $F \in \mathcal{C}^1(E)$, т. е. все координатные функции $\in \mathcal{C}^1$, $Y_0 = F(X_0)$, $\mathcal{D}F(X_0)$ обратима

$$\implies \exists U - \text{окрестность } X_0, V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F|_U \right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

Доказательство.

1. Определение множества U

Обозначим $A := \mathcal{D}F(X_0)$. По условию, она обратима

Положим $\lambda := \frac{1}{4\|A^{-1}\|}$

Обозначим $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

$$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) & \dots & f'_{1x_n}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1}(X) & \dots & f'_{nx_n}(X) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) - f'_{1x_1}(X_0) & \dots & f'_{1x_n}(X) - f'_{1x_n}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1}(X) - f'_{nx_1}(X_0) & \dots & f'_{nx_n}(X) - f'_{nx_n}(X_0) \end{bmatrix}$$

По свойству 6 нормы матрицы (лекция от 05.09.2024),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}F(X) - A\| &\stackrel{\text{def } A}{=} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \leq \left(\sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \left(f'_{ix_j}(X) - f'_{ix_j}(X_0) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{F \in C^1}{\implies} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \xrightarrow{X \rightarrow X_0} 0 \\ &\implies \exists r > 0 : \forall X \in B_r(X_0) \quad \|\mathcal{D}F(X) - A\| < 2\lambda \end{aligned} \quad (14)$$

Положим $U := B_r(X_0)$

2. Инъективность F

Далее будем рассматривать F только на U (т. е. будем писать $F := F|_U$)

Замечание (о выпуклости шара). $X_1, X_2 \in U, \quad 0 < t < 1$

$$\implies tX_1 + (1-t)X_2 \in U$$

(см. рис. 1)

Замечание. Используем наши обозначения (т. е. $U = B_r(X_0)$)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|tX_1 + (1-t)X_2 - X_0\| &= \|t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - X_0)\| \stackrel{\Delta}{\leq} \\ &\leq \|t(X_1 - X_0)\| + \|(1-t)(X_2 - X_0)\| < t \cdot r + (1-t) \cdot r = r \end{aligned}$$

□

Следствие. $X \in U, \quad X + H \in U, \quad 0 < t < 1$

$$\implies X + tH \in U$$

Доказательство. $X_1 := X + H, \quad X_2 := X$

$$tx_1 + (1-t)x_2 = tX + tH + (1-t)X = X + tH$$

□

Возьмём $X \in U$ и $H \neq \mathbb{O}_n$, такие что $X + H \in U$

Докажем, что $F(X + H) - F(X) \stackrel{?}{\neq} \mathbb{O}_n$. Это и будет означать инъективность

Возьмём $t \in [0, 1]$ и $P(t) := F(X + tH) - tAH$
 Это вектор-функция $P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D}P(t) \stackrel{\text{def } P}{=} \mathcal{D}\left(F(X + tH)\right) - \mathcal{D}(tAH) \quad (15)$$

Положим $q(t) := X + tH$
 Теперь можно переписать (15):

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}\left(F(q(t))\right) - \mathcal{D}(tAH) \quad (16)$$

Напоминание. Мы уже доказали, что для $Y \in \mathbb{R}^n$ и отображения $t \mapsto tY$ выполнено $\mathcal{D}(tY) = Y$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(tAH) &= AH, & \mathcal{D}q(t) &= H \\ \mathcal{D}F(q(t)) &= \mathcal{D}F(q(t))\mathcal{D}q(t) = \mathcal{D}F(X + tH)H \end{aligned}$$

Подставим это в (16):

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}F(X + tH)H - AH \quad (17)$$

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\|A^{-1}\|} \implies \|A^{-1}\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём $H \neq \mathbb{O}_n$

$$\begin{aligned} H &= (A^{-1}A)H = A^{-1}AH \implies \|H\| = \|A^{-1}(AH)\| \leq \|A^{-1}\| \|AH\| = \frac{1}{4\lambda} \|AH\| \implies \\ &\implies \|AH\| \geq 4\lambda \|H\| \end{aligned} \quad (18)$$

$$P(1) - P(0) \stackrel{\text{def } P}{=} F(X + H) - AH - F(X) = F(X + H) - F(X) - AH \quad (19)$$

Применим к P теорему Лагранжа для вектор-функции:

$$\begin{aligned} \exists c \in [0, 1] : \|P(1) - P(0)\| &\leq \|\mathcal{D}P(c)\| \cdot (1 - 0) = \|\mathcal{D}P(c)\| \stackrel{(17)}{=} \left\| \left(\mathcal{D}F(X + cH) - A \right) H \right\| \leq \\ &\leq \left\| \underbrace{\mathcal{D}F(X + cH)}_{\in U} - A \right\| \|H\| \stackrel{(14)}{<} 2\lambda \|H\| \stackrel{(18)}{\leq} \frac{1}{2} \|AH\| \end{aligned} \quad (20)$$

$$\|F(X + H) - F(X) - AH\| \stackrel{(19)}{=} \|P(1) - P(0)\| \stackrel{(20)}{<} \frac{1}{2} \|AH\| \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \|F(X + H) - F(X)\| &= \left\| AH + \left(F(X + H) - F(X) - AH \right) \right\| \geq \\ &\geq \|AH\| - \|F(X + H) - F(X) - AH\| \stackrel{(21)}{>} \|AH\| - \frac{1}{2} \|AH\| = \frac{1}{2} \|AH\| \stackrel{(18)}{\geq} 2\lambda \|H\| > 0 \end{aligned}$$

□

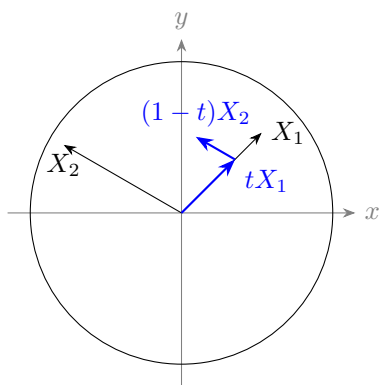


Рис. 1: Выпуклость шара