Оглавление

Глава 1

1

1.1 527

1.1.1 a

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{Vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\Big((2-\lambda)(5-\lambda) - 2\cdot 2\Big) - (5-\lambda) + 2\cdot 0 = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 4\cdot(1-\lambda) - 5 + \lambda =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 + \lambda - 5 + \lambda = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 9 + 2\lambda = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 2(5-\lambda) + 1 =$$

$$= (5-\lambda)\Big((1-\lambda)(2-\lambda) + 1\Big)$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ (1-\lambda)(2-\lambda) + 1 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 1 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ \lambda^2 - 3\lambda + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 + 3 - \frac{9}{4} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ \lambda - \frac{3}{2} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} \lambda &= 5 \\ \lambda &= \frac{3+\sqrt{3}i}{2} \\ \lambda &= \frac{3-\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}\right.$$

- $\lambda = 5$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-5 & 1 & 0 \\ 1 & 2-5 & 2 \\ 0 & 2 & 5-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x + y = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$\begin{cases} -4x = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$2z = 0$$

$$z = 0$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \frac{3+\sqrt{3}i}{2}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{3+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \frac{3+\sqrt{3}i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 5 - \frac{3+\sqrt{3}i}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2-3+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{4-3+\sqrt{3}i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & \frac{10-3+\sqrt{3}i}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & \frac{7+\sqrt{3}i}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}y + 2z = 0 \\ 2y + \frac{7+\sqrt{3}i}{2}z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (-1+\sqrt{3}i)x + 2y = 0 \\ 2x + (1+\sqrt{3}i)y + 4z = 0 \\ 4y + (7+\sqrt{3}i)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{2y}{-1+\sqrt{3}i} \\ z = -\frac{4y}{7+\sqrt{3}i} \end{cases}$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \frac{3-\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{3}i)x + 2y = 0 \\ 2x + (1-\sqrt{3}i)y + 4z = 0 \\ 4y + (7-\sqrt{3}i)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2y}{1+\sqrt{3}i} \\ z = -\frac{4y}{7-\sqrt{3}i} \end{cases}$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u_2}, \vec{u_3}) = \frac{4}{1-3i^2} + 1 + \frac{16}{7-3i^2} = -\frac{4}{2} + 1 + \frac{16}{4} = -2 + 1 + 4 \neq 0$$

Воспользуемся ортогонализацией Грама-Шмидта:

$$\vec{v_2} \coloneqq \vec{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_3} \coloneqq \vec{u_3} - proj_{\vec{v_2}}\vec{u_3} = \vec{u_3} - \frac{(\vec{u_3}, \vec{v_2})}{(\vec{v_2}, \vec{v_2})}\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{\frac{4}{1-3} + 1 + \frac{16}{7-3}}{\frac{4}{(1-\sqrt{3}i)^2} + 1 + \frac{16}{(7+\sqrt{3}i)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{(-2+1+4)(1-\sqrt{3}i)^2(7+\sqrt{3}i)^2}{4(7+\sqrt{3}i)^2 + (1-\sqrt{3}i)^2(7+\sqrt{3}i)^2 + 16(1-\sqrt{3}i)^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(1-2\sqrt{3}i+3)(49+14\sqrt{3}i+3)}{4(49+14\sqrt{3}i+3) + (1-2\sqrt{3}i+3)(49+14\sqrt{3}i+3) + 16(1-2\sqrt{3}i+3)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(2-\sqrt{3}i)(26+7\sqrt{3}i)}{2(26+7\sqrt{3}i) + (2-\sqrt{3}i)(26+7\sqrt{3}i) + 8(2-\sqrt{3}i)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(52+14\sqrt{3}i-26\sqrt{3}i-21)}{52+14\sqrt{3}i+52+14\sqrt{3}i-26\sqrt{3}i-21+16-8\sqrt{3}i} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(31-12\sqrt{3}i)}{99-6\sqrt{3}i} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{3(31-12\sqrt{3}i)}{3(33-2\sqrt{3}i)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} \\ 1 \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ -\frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{3}i} - \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \\ 1 - \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ -\frac{4}{7-\sqrt{3}i} + \frac{31-12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \cdot \frac{4}{7+\sqrt{3}i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{(33-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)-(31-12\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(33-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\ \frac{33-2\sqrt{3}i-31+12\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 4 \cdot \frac{-(33-2\sqrt{3}i)(7+\sqrt{3}i)+(31-12\sqrt{3}i)(7-\sqrt{3}i)}{(7-\sqrt{3}i)(33-2\sqrt{3}i)(7+\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{33-33\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+6-31-31\sqrt{3}i+12\sqrt{3}i+36}{(1-3)(33-2\sqrt{3}i)} \\ 2 \cdot \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 4 \cdot \frac{-231-33\sqrt{3}i+14\sqrt{3}i+6+217-31\sqrt{3}i-84\sqrt{3}i+36}{(49-3)(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{22-27\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 2 \cdot \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 4 \cdot \frac{14-67\sqrt{3}i}{23(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{22-27\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ \frac{2(14-67\sqrt{3}i)}{23(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{1-\sqrt{3}i} & -\frac{22-27\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 0 & 1 & \frac{1+5\sqrt{3}i}{33-2\sqrt{3}i} \\ 0 & -\frac{4}{7+\sqrt{3}i} & \frac{2(14-67\sqrt{3}i)}{23(33-2\sqrt{3}i)} \end{pmatrix}$$

$$5x_1^2 + \frac{3+\sqrt{3}i}{2}x_2^2 + \frac{3-\sqrt{3}i}{2}x_3^2$$

1.1.2 b

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + (-2)\cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot (4-\lambda) \cdot 1 - (-2)\cdot(-2)\cdot(1-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 0 \cdot 0 =$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda) - (4-\lambda) - 4\cdot(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 4 + \lambda - 4 + 4\lambda = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - (8-5\lambda)$$

1.1.3 c

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3+(1/2)^3+(1/2)^3-(-\lambda)\cdot(1/2)^2\cdot 3 = -\lambda^3+2\cdot\frac{1}{2^3}+3\cdot\frac{1}{2^2} = -\lambda^3+1/4+3/4 =$$

$$= 1-\lambda^3 = (1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

- $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{vmatrix}$$

. . . .

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} (1+i\sqrt{3})x+y+z=0 \\ x+(1+i\sqrt{3})y+z=0 \\ x+y+(1+i\sqrt{3})z=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{y+z}{1+i\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \frac{y+z}{1+i\sqrt{3}}+(1+i\sqrt{3})y+z=0 \\ \frac{y+z}{1+i\sqrt{3}}+y+(1+i\sqrt{3})z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z+(1+i\sqrt{3})^2y+(1+i\sqrt{3})z=0 \\ y+z+(1+i\sqrt{3})y+(1+i\sqrt{3})^2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1+(1+i\sqrt{3})^2\right)y+(2+i\sqrt{3})z=0 \\ (2+i\sqrt{3})y+\left(1+(1+i\sqrt{3})^2\right)z=0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1+(1+i\sqrt{3})^2}{2+i\sqrt{3}}y = \frac{1+1+2i\sqrt{3}+i^2\cdot 3}{2+i\sqrt{3}}y = \frac{2+2i\sqrt{3}+3}{2+i\sqrt{3}}y = \frac{5+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}y$$

$$y = \frac{2+i\sqrt{3}}{5+2i\sqrt{3}}z$$

$$x = \frac{y+\frac{5+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}y}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1+\frac{5+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}}{1+i\sqrt{3}}y = \frac{\frac{2+i\sqrt{3}+5+2i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}}{1+i\sqrt{3}}y = \frac{7+3i\sqrt{3}}{(2+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}y =$$

$$= \frac{7+3i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i^2\cdot 3}y = \frac{7+3i\sqrt{3}}{5+3i\sqrt{3}}y$$

$$x = \frac{\frac{2+i\sqrt{3}}{5+2i\sqrt{3}}z + z}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2+i\sqrt{3}+5+2i\sqrt{3}}{(5+2i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}z = \frac{7+3i\sqrt{3}}{5+5i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}+2i^2\cdot 3}z = \frac{7+3i\sqrt{3}}{11+7i\sqrt{3}}z$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5+3i\sqrt{3}}{7+3i\sqrt{3}} \\ \frac{11+7i\sqrt{3}}{7+3i\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+3i\sqrt{3} \\ 5+3i\sqrt{3} \\ 11+7i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

. . . .

$$\begin{cases} (1-i\sqrt{3})x + y + z = 0 \\ x + (1-i\sqrt{3})y + z = 0 \\ x + y + (1-i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{y+z}{1-i\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \frac{y+z}{1-i\sqrt{3}} + (1-i\sqrt{3})y + z = 0 \\ \frac{y+z}{1-i\sqrt{3}} + y + (1-i\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z + (1-i\sqrt{3})^2 y + (1-i\sqrt{3})z = 0 \\ y + z + (1-i\sqrt{3})y + (1-i\sqrt{3})^2 z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 + (1-i\sqrt{3})^2\right)y + (2-i\sqrt{3})z = 0 \\ (2-i\sqrt{3})y + \left(1 + (1-i\sqrt{3})^2\right)z = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1+(1-i\sqrt{3})^2}{2-i\sqrt{3}}y = \frac{1+1-2i\sqrt{3}+i^2\cdot 3}{2-i\sqrt{3}}y = \frac{2-2i\sqrt{3}+3}{2-i\sqrt{3}}y = \frac{5-2i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}y$$

$$y = \frac{2-i\sqrt{3}}{5-2i\sqrt{3}}z$$

$$x = \frac{y + \frac{5-2i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}y}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2-i\sqrt{3}+5-2i\sqrt{3}}{(2-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}y = \frac{7-3i\sqrt{3}}{2-2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}y = \frac{7-3i\sqrt{3}}{5-3i\sqrt{3}}y$$

$$x = \frac{\frac{2-i\sqrt{3}}{5-2i\sqrt{3}}z + z}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2-i\sqrt{3}+5-2i\sqrt{3}}{(5-2i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}z = \frac{7-3i\sqrt{3}}{5-5i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+2\cdot 3}z = \frac{7-3i\sqrt{3}}{11-7i\sqrt{3}}$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5-3i\sqrt{3}}{7-3i\sqrt{3}} \\ \frac{11-7i\sqrt{3}}{7-3i\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3i\sqrt{3} \\ 5-3i\sqrt{3} \\ 11-7i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 7+3i\sqrt{3} & 7-3i\sqrt{3} \\ 1 & 5+3i\sqrt{3} & 5-3i\sqrt{3} \\ 1 & 11+7i\sqrt{3} & 11-7i\sqrt{3} \end{Vmatrix}$$

$$x_1^2 + (-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})x_2^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})x_3^2$$

1.1.4 d

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1-\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \left(-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \right) +$$

$$+ (1-\lambda)\left((1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -(1-\lambda)(-2-\lambda) + (-2)(-2) + (-1)(-2-\lambda) - (-1)(-2) + (-1)(-2-\lambda) - (-2)(-1) -$$

$$- (1-\lambda)(-2-\lambda) + (-1)(-1) + (1-\lambda)(1-\lambda)\Big((1-\lambda)(-2-\lambda) -$$

$$- (-2)(-2) \Big) + (1-\lambda)\Big((-1)(-2-\lambda) - (-1)(-2) \Big) + (1-\lambda)\Big((-1)(-2) - (-1)(1-\lambda) \Big) =$$

$$= -(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2) + 4 + 2 + \lambda - 2 + 2 + \lambda - 2 + -(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2) + 1 +$$

$$+ (1-\lambda-\lambda+\lambda^2)\Big((-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2) - 4 \Big) + (1-\lambda)(2+\lambda-2) + (1-\lambda)(2+1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^2 - \lambda + 2 + 6 + 2\lambda - 2 - \lambda^2 - \lambda + 3 + (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) + (1-\lambda)\cdot\lambda + (1-\lambda)(3-\lambda) =$$

$$= -2\lambda^2 + 9 + \lambda^4 + \lambda^3 - 6\lambda^2 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda + \lambda^2 + \lambda - 6 + \lambda - \lambda^2 + 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 =$$

$$= \lambda^4 - \lambda^3 - 9\lambda^2 + 10\lambda + 6$$

1.1.5 e

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\cdot \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{4}\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda(\lambda-1) - \frac{1}{4} \right)\cdot \left((-\lambda)(-\lambda) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \right) = (\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4})(\lambda^2 - \frac{1}{4})$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda &= \frac{1}{2} \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

- $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=0\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{y}{2}=0\\ \frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{z}{2}+\frac{t}{2}=0\\ \frac{z}{2}+\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{t}{2}=0\end{cases}\qquad \begin{cases}(1+\sqrt{2})x+y=0\\ x+(\sqrt{2}-1)y=0\\ (\sqrt{2}-1)z+t=0\\ z+(\sqrt{2}-1)t=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=-(1+\sqrt{2})x\\ t=-(\sqrt{2}-1)z\end{cases}$$

$$\vec{u_1}=\begin{pmatrix}1\\ -1-\sqrt{2}\\ 1\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

- $\lambda=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2} & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2} & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=0\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{y}{2}=0\\ -\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{z}{2}+\frac{t}{2}=0\\ \frac{z}{2}-\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{t}{2}=0\end{cases}\qquad \begin{cases}(1-\sqrt{2})x+y=0\\ x-(\sqrt{2}+1)y=0\\ -(\sqrt{2}+1)z+t=0\\ z-(\sqrt{2}+1)t=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=(\sqrt{2}-1)x\\ t=(\sqrt{2}+1)z\end{cases}$$

$$\vec{u_2}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}-1\\ 1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$$

- $\lambda=\frac{1}{2}$

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}x+y=0\\ x-y=0\\ -z+t=0\\ z-t=0\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-y\\ x=y\\ z=t\end{cases}\qquad \begin{cases}x=y=0\\ z=t\end{cases}$$

$$\vec{u_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

- $\lambda=-\frac{1}{2}$

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}3/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}3x+y=0\\ x+y=0\\ z+t=0\end{cases}\qquad \begin{cases}x=y=0\\ z=-t\end{cases}$$

$$\vec{u_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1-\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-\sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x_2^2 + \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_4^2}{2}$$

1.2 528

$$\sum_{l=1}^{n} x_l^2 + \sum_{i<k} x_i x_k$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & . & . & . & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & . & . & 1/2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1/2 & . & . & . & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & . & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda & 1/2 & 1/2 \\ . & . & . & . \\ 1/2 & . & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^n + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\cdot(1-\lambda)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= (1-\lambda)^n + \frac{n-1}{2^n} - \frac{n(1-\lambda)}{2^{n-1}} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^{n-1} - \frac{n}{2^{n-1}}\right) + \frac{n-1}{2^n}$$

1.3 535

1.3.1 a

$$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\Big((1-\lambda)(-\lambda) - (-2)(-2)\Big) + 2\cdot(-2)(-\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-4) + 4\lambda = -2\lambda + 2\lambda^2 - 8 + \lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda &= -2 \\ \lambda &= 1 \\ \lambda &= 4 \end{aligned}\right.$$

- $\lambda = -2$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 2+2 & -2 & 0 \\ -2 & 1+2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$y = 2x$$

$$z = y = 2x$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2-2=0\\-2+6-4=0\\-2+2=0\end{cases}$$

- $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix}2-1 & -2 & 0\\-2 & 1-1 & -2\\0 & -2 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\-2 & 0 & -2\\0 & -2 & -1\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}x-2y=0\\x+z=0\\2y+z=0\end{cases} \qquad \begin{cases}y=\frac{x}{2}\\z=-x\\2\cdot\frac{x}{2}-x=0\end{cases}$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\chi(4) = \begin{vmatrix}2-4 & -2 & 0\\-2 & 1-4 & -2\\0 & -2 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & -2 & 0\\-2 & -3 & -2\\0 & -2 & -4\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}x+y=0\\2x+3y+2z=0\\y+2z=0\end{cases} \qquad \begin{cases}y=-x\\2x-3x+\frac{x}{2}\\z=-\frac{y}{2}=\frac{x}{2}\end{cases}$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix}1\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) = 1\cdot 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot(-1) = 1+1-2 = 0$$

$$(u_1, u_3) = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 2\cdot\frac{1}{2} = 1-2+1 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & \frac{1}{2} & -1\\2 & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$-2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2$$

1.3.2 b

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\-2 & 2 & -2\\0 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\chi = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 0\\-2 & 2-\lambda & -2\\0 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}2-\lambda & -2\\-2 & 3-\lambda\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2\\0 & 3-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\Big((2-\lambda)(3-\lambda)-4\Big) + 2\Big(-2(3-\lambda)+0\Big) = (1-\lambda)(6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-4) - 4(3-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(2-5\lambda+\lambda^2) - 12 + 4\lambda = 2-5\lambda+\lambda^2-2\lambda+5\lambda^2-\lambda^3-12+4\lambda = -\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+10$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda=-1\\\lambda=2\\\lambda=5\end{array}\right.$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 1+1 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -2 \\ 0 & -2 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ -2x+3y-2z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x \\ -2x+3x-2\frac{x}{2}=0 \\ z=\frac{y}{2}=\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} 1-2 & -2 & 0 \\ -2 & 2-2 & -2 \\ 0 & -2 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ x+z=0-2y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{x}{2} \\ z=-x \\ 2\frac{x}{2}-x=0 \end{cases}$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$

$$\chi(5) = \begin{vmatrix} 1-5 & -2 & 0 \\ -2 & 2-5 & -2 \\ 0 & -2 & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ 2x-6x+4x=0 \\ z=-y=2x \end{cases}$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$(u_1, u_3) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$$

1.3.3 c

$$3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\Big((4-\lambda)(5-\lambda)-4\Big) - 4(5-\lambda) = (3-\lambda)\Big(20-5\lambda-4\lambda+\lambda^2-4\Big) - 20 + 4\lambda =$$

$$= (3-\lambda)(16-9\lambda+\lambda^2) - 20 + 4\lambda = 48 - 27\lambda + 3\lambda^2 - 16\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 - 20 + 4\lambda = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28$$

$$\chi(1) = -1 + 12 - 39 + 28 = 0$$

$-\lambda^3$	$+12\lambda^2$	-39λ	$+28$	λ	-1	
$-\lambda^3$	$+\lambda^2$			$-\lambda^2$	11λ	-28
	$11\lambda^2$	-39λ				
	$11\lambda^2$	-11λ				
		-28λ	$+28$			

$$D = 121 - 4 \cdot 28 = 121 - 112 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-11 \pm 3}{2} = \left[\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix}\right.$$

Проверим:

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 = 0$$

$$\chi(7) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$$

$$\chi(4) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = -x_2 = -2x_3 \\ -4x_3 + 6x_3 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_1 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4 Задачник Проскурятова

1.4.1 1175

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1(1-\lambda)1 - 1\cdot 1(1-\lambda) - 2\cdot 2(3-\lambda) =$$

$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(3-\lambda) + 2 + 2 - 2(1-\lambda) - 4(3-\lambda) = 3 - \lambda - 6\lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 2 + 2\lambda - 12 + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 + 6\lambda - 10 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 7$$

$$\chi(-1) = 1 + 5 + 1 - 7 = 0$$

$$\begin{array}{crrrr|rrr}
 & -\lambda^3 & +5\lambda^2 & -\lambda & -7 & \lambda & +1 & \\ \hline
- & & & & & & & \\
 & -\lambda^3 & -\lambda^2 & & & -\lambda^2 & +6\lambda & -7 \\
= & & & & & & & \\
 & & 6\lambda^2 & -\lambda & -7 & & & \\
- & & & & & & & \\
 & & 6\lambda^2 & +6\lambda & & & & \\
= & & & & & & & \\
 & & & -7\lambda & -7 & & & \\
- & & & & & & & \\
 & & & -7\lambda & -7 & & & \\
= & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

$$\chi(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2+6\lambda-7) = -(\lambda+1)(\lambda-3+\sqrt{2})(\lambda-3-\sqrt{2})$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 1 \\ 2 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x+2y+z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-2x-2y \\ x+y-8x-8y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-2x-2y \\ 7x+7y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-y \\ z=2y-2y=0 \end{cases}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 3-\sqrt{2}$

$$\chi(\lambda=3-\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 1-3+\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1-3+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 3-3+\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2+\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 0 & -4+\sqrt{2} & 1-2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} (-2+\sqrt{2})x+2y+z=0 \\ (-4+\sqrt{2})y+(1-2\sqrt{2})z=0 \\ x+y+\sqrt{2}z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{(1-2\sqrt{2})z}{-4+\sqrt{2}} \\ (-2+\sqrt{2})x+\frac{(2-4\sqrt{2})z}{-4+\sqrt{2}}+z=0 \\ x+\frac{(1-2\sqrt{2})z}{-4+\sqrt{2}}+\sqrt{2}z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2+\sqrt{2})x+\frac{2z-4\sqrt{2}z-4z+\sqrt{2}z}{-4+\sqrt{2}}=0 \\ x+\frac{z-2\sqrt{2}z-4\sqrt{2}z+2z}{-4+\sqrt{2}}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (-2+\sqrt{2})(-4+\sqrt{2})x-(2+3\sqrt{2})z=0 \\ (-4+\sqrt{2})x+(3-6\sqrt{2})z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2+3\sqrt{2}}{8-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2}z \\ x=-\frac{3-6\sqrt{2}}{-4+\sqrt{2}}z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{2+\sqrt{2}}{10-6\sqrt{2}}z \\ x=-\frac{3-6\sqrt{2}}{-4+\sqrt{2}}z \end{cases}$$

$$x=y=z=0$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 3+\sqrt{2}$

$$\chi(\lambda = 3+\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 1-3-\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1-3-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 3-3-\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -2-\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 0 & -4-\sqrt{2} & 1+2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} (-2-\sqrt{2})x + 2y + z = 0 \\ (-4-\sqrt{2})y + (1+2\sqrt{2})z = 0 \\ x + y + -\sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

1.4.2 1187

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1,5 \\ 2 & -1,5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -1,5 \\ 2 & -1,5 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + (-1)(-1,5)2 + (-1)(-1,5)2 - 2(3-\lambda)2 - (-1)(-1)(4-\lambda) - (2-\lambda)(-1,5)(-1,5) =$$
$$= (6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2)(4-\lambda)+3+3-4(3-\lambda)-4+\lambda-\frac{9}{4}(2-\lambda) = (6-5\lambda+\lambda^2)(4-\lambda)+6-12+4\lambda-4+\lambda-4,5+\frac{9}{4}\lambda =$$
$$= 24-6\lambda-20\lambda+5\lambda^2+4\lambda^2-\lambda^3-14,5+\frac{29}{4}\lambda = -\lambda^3+9\lambda^2-26\lambda+\frac{29}{4}\lambda+9,5 =$$
$$= -4\lambda^3+36\lambda^2-104\lambda+29\lambda+19 = 4\lambda^3-36\lambda^2+75\lambda-19$$

1.5 Задачник Гиниятовой

1.5.1 195

a

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(3-\lambda)^2 + 2(-1)2 + 2\cdot 2(-1) - 2(3-\lambda)2 - 2\cdot 2(3-\lambda) - (-\lambda)(-1)(-1) =$$
$$= -\lambda(9-6\lambda+\lambda^2) - 4 - 4 - 4(3-\lambda) - 4(3-\lambda) + \lambda = -9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 8 - 8(3-\lambda) + \lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda - 8 - 24 + 8\lambda = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32$$

$$\chi(-2) = -8 - 24 + 32 = 0$$
$$\frac{\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32}{\lambda + 2} = (\lambda - 4)^2$$

- $\lambda = -2$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+5y-z=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-x-y \\ 2x+5y+x+y=0 \\ 2x-y-5x-5y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=0 \\ -3x-6y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2y \\ -6y-6y=0 \\ z=y \end{cases}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+1+1}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\chi(4) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \qquad z = 2x-y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \qquad \vec{v_3} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v_2} \cdot \vec{v_3} = -4$$

$$\vec{u_2} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_3} = v_3 - proj_{u_2} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{u_2 \cdot v_3}{u_2 \cdot u_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}+1+\frac{4}{25}}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{5}{\sqrt{16+25+4}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \frac{5}{\sqrt{45}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$-2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2$$

1.6 mathproblems.ru

1.6.1 1951

$$\frac{x-17}{x^2-x-2} = \frac{x-17}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

- $x = 2$

$$2 - 17 = B(2+1)$$

$$B = -\frac{15}{3} = -5$$

- $x = -1$

$$-1 - 17 = A(-1-2)$$

$$A = \frac{18}{3} = 6$$

$$-\frac{5}{x-2} + \frac{6}{x+1}$$

1.6.2 1961

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2+7x-6}{x^2-4}=\frac{x^2(x^2-4)+4x^2-2x^3-4x^2+7x-6}{x^2-4}=x^2+\frac{-2x^3+7x-6}{x^2-4}=$$
$$=x^2+\frac{-2x(x^2-4)-8x+7x-6}{x^2-4}=x^2-2x-\frac{x+6}{(x-2)(x+2)}=x^2-2x-\frac{A}{x-2}-\frac{B}{x+2}$$

- $x=2$

$$2+6=A(2+2)$$
$$A=\frac{8}{4}=2$$

- $x=-2$

$$-2+6=B(-2-2)$$
$$B=-\frac{4}{4}=-1$$
$$x^2-2x-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}$$

1.6.3 1971

$$\frac{3x^2-3x+5}{x^3+x^2-2}=\frac{3x^2-3x+5}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$3x^2-3x+5=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)=Ax^2+2Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C=$$
$$=(A+B)x^2+(2A-B+C)x+(2A-C)$$

$$\begin{cases}3=A+B\\-3=2A-B+C\\5=2A-C\end{cases}\qquad\begin{cases}A=3-B\\6-2B-B+C+3=0\\6-2B-C-5=0\end{cases}\qquad\begin{cases}-3B+C+9=0\\-2B-C+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=3B-9\\-2B-3B+9+1=0\end{cases}\qquad -5B+10=0\qquad\begin{cases}B=2\\C=3B-9=6-9=-3\\A=3-B=1\end{cases}$$

$$-\frac{1}{x-1}+\frac{2x-3}{x^2+2x+2}$$

1.7 Варианты контрольной

1.7.1 1

$$3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$
$$A=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\-2&6&-2\\-4&-2&3\end{pmatrix}$$

$$\chi=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&-4\\-2&6-\lambda&-2\\-4&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(6-\lambda)(3-\lambda)-32-12+4\lambda-12+4\lambda-96+16\lambda=$$
$$=(6-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2)-140+24\lambda=54-36\lambda+6\lambda^2-9\lambda+6\lambda^2-\lambda^3-140+24\lambda=-\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda-98=$$
$$=-(\lambda-7)^2(\lambda+2)$$

$$\left[\begin{aligned}\lambda&=-2\\\lambda&=7\end{aligned}\right.$$

- $\lambda = -2$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 3+2 & -2 & -4 \\ -2 & 6+2 & -2 \\ -4 & -2 & 3+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -4x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$x = 4y - z$$

$$\begin{cases} 5(4y - z) - 2y - 4z = 0 \\ -4(4y - z) - 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 20y - 5z - 2y - 4z = 0 \\ -16y + 4z - 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{z}{2} \\ x = z \end{cases}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{u_1}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 7$

$$\chi(7) = \begin{vmatrix} 3-7 & -2 & -4 \\ -2 & 6-7 & -2 \\ -4 & -2 & 3-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2x + y + 2z = 0$$

$$x = -y - 2z$$

$$\begin{pmatrix} -y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(u_2, u_3) = (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 2$$

Ортогонализуем их:

$$\vec{v_2} = u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v_2}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_3} = u_3 - proj_{v_2} u_3 = u_3 - \frac{(v_2, u_3)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1+1+0} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v_3}| = \sqrt{3}$$

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$7x_1^2 + 7x_2^2 - 2x_3^2$$

1.7.2 2

$$7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)\Big((5-\lambda)(3-\lambda) - 16\Big) + 4\Big(-4(3-\lambda)\Big) = (7-\lambda)\Big(15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 16\Big) - 16(3-\lambda) =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 1) - 48 + 16\lambda = 7\lambda^2 - 56\lambda - 7 - \lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda - 48 + 16\lambda = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 39\lambda - 55$$

$$\chi(-1) = 1 + 15 + 39 - 55 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
-\lambda^3 & +15\lambda^2 & -39\lambda & -55 & \lambda & +1 & \\
\hline
-\lambda^3 & -\lambda^2 & & & -\lambda^2 & +16\lambda & -55 \\
 & 16\lambda^2 & -39\lambda & -55 & & & \\
 & 16\lambda^2 & +16\lambda & & & & \\
 & & -55\lambda & -55 & & & \\
 & & -55\lambda & -55 & & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

$$\chi(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 16\lambda + 55) = -(\lambda+1)\Big(\lambda^2 - 11\lambda - 5(\lambda - 11)\Big)$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda &= -1 \\ \lambda &= 5 \\ \lambda &= 11 \end{aligned}\right.$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 7+1 & -4 & 0 \\ -4 & 5+1 & 4 \\ 0 & 4 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ -y + 3y - 2y = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$

$$\chi(5) = \begin{vmatrix} 7-5 & -4 & 0 \\ -4 & 5-5 & 4 \\ 0 & 4 & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ z = x \\ x - x = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 11$

$$\chi(11) = \begin{vmatrix} 7-11 & -4 & 0 \\ -4 & 5-11 & 4 \\ 0 & 4 & 3-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -2x-3y+2z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} = \begin{cases} x=-y \\ 2y-3y+y=0 \\ z=\frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{4}{3} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$11x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2$$

1.7.3 3

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\Bigg((2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}\Bigg) + 2\Bigg(-2\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}\Bigg) -$$

$$- \Bigg(-2\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\Bigg) =$$

$$= (2-\lambda)\Bigg((2-\lambda)\big((2-\lambda)^2-4\big) - (2-\lambda)\Bigg) + 2\Bigg(-2\big((2-\lambda)^2-4\big) - 2\Bigg) - \Bigg((-2)(-2) - (2-\lambda)\big(-(2-\lambda)\big)\Bigg) =$$

$$= (2-\lambda)\Bigg((2-\lambda)\big(4-4\lambda+\lambda^2-4-1\big)\Bigg) + 2\Bigg(-2\Big(4-4\lambda+\lambda^2-4+1\Big)\Bigg) - \Bigg(4+(2-\lambda)^2\Bigg) =$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-1) - 4(\lambda^2-4\lambda+1) - 4 - 4 + 4\lambda - \lambda^2 =$$

$$= (4-4\lambda+\lambda^2)(\lambda^2-4\lambda-1) - 4\lambda^2 + 16\lambda - 4 - 8 + 4\lambda - \lambda^2 =$$

$$= 4\lambda^2 - 16\lambda - 4 - 4\lambda^3 + 16\lambda^2 + 4\lambda + \lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 20\lambda - 12 = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 14\lambda^2 + 8\lambda - 16$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 2 - \sqrt{5-\sqrt{17}} \\ \lambda = 2 + \sqrt{5-\sqrt{17}} \\ \lambda = 2 - \sqrt{5+\sqrt{17}} \\ \lambda = 2 + \sqrt{5+\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

- $\lambda = 2 - \sqrt{5-\sqrt{17}}$

$$\chi(2-\sqrt{5-\sqrt{17}}) = \begin{vmatrix} \sqrt{5-\sqrt{17}} & -2 & 0 & 1 \\ -2 & \sqrt{5-\sqrt{17}} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{5-\sqrt{17}} & -2 \\ 1 & 0 & -2 & \sqrt{5-\sqrt{17}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}\sqrt{5-\sqrt{17}}x-2y+t=0\\ -2x+\sqrt{5-\sqrt{17}}y+z=0\\ y+\sqrt{5-\sqrt{17}}z-2t=0\\ x-2z+\sqrt{5-\sqrt{17}}t=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\frac{2y-t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}}\\ -2\cdot\frac{2y-t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}}+\sqrt{5-\sqrt{17}}y+\frac{-y+2t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}}=0\\ z=\frac{-y+2t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}}\\ \frac{2y-t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}}-2\cdot\frac{-y+2t}{\sqrt{5-\sqrt{17}}}+\sqrt{5-\sqrt{17}}t=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4y+2t+(5-\sqrt{17})y-y+2t=0\\ 2y-t+2y-4t+(5-\sqrt{17})t=0\end{cases}\qquad\begin{cases}-5y+5y-\sqrt{17}y+4t=0\\ 4y-5t+5t-\sqrt{17}t=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y=\frac{4t}{\sqrt{17}}\\ y=\frac{\sqrt{17}t}{4}\end{cases}$$

. . . .

1.7.4 4

$$2x_1x_2+2x_3x_4$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\1&-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&1\\0&0&1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)^2$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=-1\end{array}\right.$$

- $\lambda=1$

$$\chi(1)=\begin{vmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}-x+y=0\\ x-y=0\\ -z+t=0\\ z-t=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=y\\ z=t\end{cases}$$

$$\vec{u_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix},\qquad\vec{u_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\-\frac12\\-\frac12\end{pmatrix}$$

- $\lambda=-1$

$$\chi(-1)=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}x=-y\\ z=-t\end{cases}$$

$$\vec{u_3}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\\frac12\\-\frac12\end{pmatrix},\qquad\vec{u_4}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&-\frac12&-\frac12\\\frac12&-\frac12&\frac12&-\frac12\\\frac12&-\frac12&-\frac12&\frac12\end{pmatrix}$$

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$$

1.8 prep

$$x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & . & . & 0 \\ & & . & & . & & & \\ & & & . & & . & & \\ & & & & . & & . & \\ & & & & & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_n = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 & . & . & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \chi_{n-1} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & . & 0 \\ 0 & \chi_{n-2} & & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \chi_{n-1} - \frac{1}{4} \cdot \chi_{n-2}$$

Глава 2

2

2.1 624

2.1.1 a

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$
$$x^2 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

- $x = 1$

$$1 = A \cdot 3 \cdot 4$$
$$A = \frac{1}{12}$$

- $x = -2$

$$4 = B \cdot (-3) \cdot 1$$
$$B = -\frac{4}{3}$$

- $x = -3$

$$9 = C \cdot (-4) \cdot (-1)$$
$$C = \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{12(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)} + \frac{9}{4(x+3)}$$

2.1.2 b

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x-4}$$
$$1 = A(x-2)(x-3)(x-4) + B(x-1)(x-3)(x-4) + C(x-1)(x-2)(x-4) + D(x-1)(x-2)(x-3)$$

- $x = 1$

$$1 = A \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$$
$$A = -\frac{1}{6}$$

- $x = 2$

$$1 = B \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)$$
$$B = \frac{1}{2}$$

- $x = 3$

$$1 = C \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)$$
$$C = -\frac{1}{2}$$

- $x = 4$

$$1 = D \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$D = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{6(x-4)}$$

2.1.3 c

$$\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3+x}{(x-1)(x+i)(x-i)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}$$
$$3 + x = A(x-i)(x+i) + B(x-1)(x+i) + C(x-1)(x-i)$$

- $x = 1$

$$3 + 1 = A(1-i)(1+i)$$
$$A = \frac{4}{1+1} = 2$$

- $x = i$

$$3 + i = B(i-1)(i+i)$$
$$B = \frac{3+i}{2i(i-1)} = \frac{3+i}{-2-2i} = -\frac{3+i}{2(1+i)} = -\frac{(3+i)(1-i)}{2(1+1)} = -\frac{3-3i+i+1}{4} = -\frac{4-2i}{4} = -\frac{2-i}{2}$$

- $x = -i$

$$3 - i = C(-i-1)(-i-i)$$
$$C = \frac{3-i}{2i(i+1)} = \frac{3-i}{-2+2i} = -\frac{3-i}{2(i-1)} = -\frac{(3-i)(i-1)}{2(-1-1)} = \frac{3i-3+1+i}{4} = \frac{-2+4i}{4} = \frac{2i-1}{2}$$

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2-i}{2(x-i)} + \frac{2i-1}{2(x+i)}$$

2.1.4 d

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-i} + \frac{D}{x+i}$$
$$x^2 = A(x+1)(x-i)(x+i) + B(x-1)(x-i)(x+i) + C(x-1)(x+1)(x+i) + D(x-1)(x+1)(x-i)$$

- $x = 1$

$$1 = A(1+1)(1-i)(1+i)$$
$$A = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

- $x = -1$

$$1 = B(-1-1)(-1-i)(-1+i)$$
$$B = \frac{1}{-2(1+1)} = -\frac{1}{4}$$

- $x = i$

$$-1 = C(i-1)(i+1)(i+i)$$
$$C = -\frac{1}{2i(-1-1)} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

- $x = -i$

$$-1 = D(-i-1)(-i+1)(-i-i)$$
$$D = -\frac{1}{-2i(-1-1)} = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}$$

$$\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)}$$

2.1.5 e

$$\frac{1}{x^3-1}$$

Обозначим $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-\omega} + \frac{C}{x-\omega^2}$$

$$1 = A(x-\omega)(x-\omega^2) + B(x-1)(x-\omega^2) + C(x-1)(x-\omega)$$

- $x = 1$

$$1 = (1-\omega)(1-\omega^2)A$$

$$A = \frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)}$$

- $x = \omega$

$$1 = B(\omega-1)(\omega-\omega^2)$$

$$B = \frac{1}{\omega(\omega-1)(1-\omega)} = -\frac{1}{\omega(\omega-1)^2}$$

- $x = \omega^2$

$$1 = C(\omega^2-1)(\omega^2-\omega)$$

$$C = \frac{1}{\omega(\omega^2-1)(\omega-1)}$$

$$\frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)(x-1)} - \frac{1}{\omega(\omega-1)(x-\omega)} + \frac{1}{\omega(\omega^2-1)(\omega-1)(x-\omega^2)}$$

2.1.6 f

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{-4})(x^2-\sqrt{-4})} = \frac{1}{(x^2+2i)(x^2-2i)} = \frac{1}{(x-\sqrt{-2i})(x+\sqrt{-2i})(x-\sqrt{2i})(x+\sqrt{2i})} =$$
$$= \frac{A}{x-\sqrt{-2i}} + \frac{B}{x+\sqrt{-2i}} + \frac{C}{x-\sqrt{2i}} + \frac{D}{x+\sqrt{2i}}$$

- $x = \sqrt{-2i}$

$$1 = A(\sqrt{-2i}+\sqrt{-2i})(\sqrt{-2i}-\sqrt{2i})(\sqrt{-2i}+\sqrt{2i})$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-2i}(\sqrt{-2i}-\sqrt{2i})(\sqrt{-2i}+\sqrt{2i})} = \frac{1}{2\sqrt{-2i}(-2i-2i)} = -\frac{1}{8i\sqrt{-2i}} = -\frac{1}{8i\cdot i\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

- $x = -\sqrt{-2i}$

$$B = \frac{1}{(-\sqrt{-2i}-\sqrt{-2i})(-\sqrt{-2i}-\sqrt{2i})(-\sqrt{-2i}+\sqrt{2i})} = \frac{1}{-2\sqrt{-2i}(-2i-2i)} = \frac{1}{-2i\sqrt{2}\cdot(-4i)} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

- $x = \sqrt{2i}$

$$C = \frac{1}{(\sqrt{2i}-\sqrt{-2i})(\sqrt{2i}+\sqrt{-2i})(\sqrt{2i}+\sqrt{2i})} = \frac{1}{(2i+2i)(2\sqrt{2i})} = \frac{1}{8i\sqrt{2i}} = -\frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}}$$

- $x = -\sqrt{2i}$

$$D = \frac{1}{(-\sqrt{2i}-\sqrt{-2i})(-\sqrt{2i}+\sqrt{-2i})(-\sqrt{2i}-\sqrt{2i})} = \frac{1}{(-2i-2i)(-2\sqrt{2i})} = \frac{1}{8i\sqrt{2i}} = -\frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{8\sqrt{2}(x-\sqrt{-2i})} - \frac{1}{8\sqrt{2}(x+\sqrt{-2i})} - \frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}(x-\sqrt{2i})} - \frac{\sqrt{i}}{8\sqrt{2}(x+\sqrt{2i})}$$

2.1.7 g

$$\frac{1}{x^n - 1}$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(x-\omega^k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{x-\omega^k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_k(x-\omega^0)...(x-\omega^{k-1})(x-\omega^{k+1})...(x-\omega^{n-1}) \right)$$

Подставим $x = \omega^m$:

$$1 = A_m(\omega^m-\omega^0)...(\omega^m-\omega^{m-1})(\omega^m-\omega^{m+1})...(\omega^m-\omega^{n-1})$$

$$A_m = \frac{1}{(\omega^m-\omega^0)...(\omega^m-\omega^{m-1})(\omega^m-\omega^{m+1})...(\omega^m-\omega^{n-1})}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\omega^k-\omega^0)...(\omega^k-\omega^{k-1})(x-\omega^k)(\omega^k-\omega^{k+1})...(\omega^k-\omega^{n-1})}$$

2.1.8 h

$$\frac{1}{x^n + 1}$$

Корень степени t из -1 – это корень степени $2t$ из 1
Обозначим $\omega \coloneqq e^{\frac{\pi i}{n}}$

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(x-\omega^k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{x-\omega^k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x-\omega^0)...(x-\omega^{k-1})(x-\omega^{k+1})...(x-\omega^{n-1})$$

Подставим $x = \omega^m$:

$$1 = A_m(\omega^m-\omega^0)...(\omega^m-\omega^{m-1})(\omega^m-\omega^{m+1})...(\omega^m-\omega^{n-1})$$

$$A_m = \frac{1}{(\omega^m-\omega^0)...(\omega^m-\omega^{m-1})(\omega^m-\omega^{m+1})...(\omega^m-\omega^{n-1})}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\omega^k-\omega^0)...(\omega^k-\omega^{k-1})(x-\omega^k)(\omega^k-\omega^{k+1})...(\omega^k-\omega^{n-1})}$$

2.1.9 i

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)...(x-n)} = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(x-i)}$$

2.2 626

2.2.1 a

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

- $x = 1$

$$1 = A(1+1+1)$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$1 = \frac{x^2+x+1}{3} + Bx(x-1) + C(x-1)$$

- $x = 0$

$$1 = \frac{1}{3} + C \cdot (-1)$$

$$C = -\frac{2}{3}$$

$$1 = \frac{x^2 + x + 1}{3} + Bx(x-1) + \frac{2(x-1)}{3}$$

- $x = -1$

$$1 = \frac{1 - 1 + 1}{3} + B \cdot (-1) \cdot (-2) + \frac{2 \cdot (-2)}{3}$$

$$1 = \frac{1}{3} + 2B - \frac{4}{3}$$

$$B = 1$$

$$\frac{1}{3(x-1)} + \frac{x - 2/3}{x^2 + x + 1}$$

2.2.2 b

$$\frac{x^2}{x^4 - 16} = \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x^2 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2)$$

- $x = 2$

$$4 = A \cdot 4 \cdot 8$$

$$A = \frac{1}{8}$$

- $x = -2$

$$4 = B \cdot (-4) \cdot 8$$

$$B = -\frac{1}{8}$$

$$x^2 = \frac{(x+2)(x^2+4)}{8} - \frac{(x-2)(x^2+4)}{8} + (Cx+D)(x-2)(x+2)$$

- $x = 0$

$$0 = \frac{2 \cdot 4}{8} - \frac{-2 \cdot 4}{8} + D \cdot (-2) \cdot 2$$

$$0 = 1 + 1 - 4D$$

$$D = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{(x+2)(x^2+4)}{8} - \frac{(x-2)(x^2+4)}{8} + Cx(x-2)(x+2) + \frac{(x-2)(x+2)}{2}$$

- $x = 1$

$$1 = \frac{3 \cdot 5}{8} - \frac{-1 \cdot 5}{8} + C \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 + \frac{-1 \cdot 3}{2}$$

$$1 = \frac{15}{8} + \frac{5}{8} - 3C - \frac{3}{2}$$

$$1 = \frac{5}{2} - 3C - \frac{3}{2}$$

$$1 = 1 - 3C$$

$$C = 0$$

$$\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$$

2.2.3 c

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{x^4+4x^2+4-4x^2} = \frac{1}{(x^2+2)^2-4x^2} = \frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$1 = Ax(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + Cx(x^2-2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

- $x = 0$

$$1 = 2B + 2D$$

$$D = \frac{1}{2} - B$$

$$1 = Ax(x^2+2x+2) + \cancel{B(x^2+2x+2)} + Cx(x^2-2x+2) + \frac{x^2-2x+2}{2} - \cancel{B(x^2-2x+2)}$$

$$1 = Ax(x^2+2x+2) + Cx(x^2-2x+2) + \frac{x^2-2x+2}{2}$$

- $x = 1$

$$1 = 5A + C + \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{2} - 5A$$

$$1 = (x^2-2x+2)\left(Ax + \frac{1}{2} - 5A + \frac{1}{2}\right)$$

$$1 = (x^2-2x+2)\Big(A(x-5)+1\Big)$$

- $x = 4$

$$1 = (16-8+2)(1-A)$$

$$1 = 10 - 10A$$

$$A = \frac{9}{10}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{5\cdot 9}{10} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$1 = \frac{9x(x^2+2x+2)}{10} + B(x^2+2x+2) - 4x(x^2-2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

$$1 = \frac{9x^3+18x^2+18x-40x^3+80x^2-80x}{10} + B(x^2+2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

$$1 = \frac{-31x^3+98x^2-62x}{10} + B(x^2+2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

$$1 = -x\cdot\frac{31x^2-98x+62}{10} + B(x^2+2x+2) + D(x^2-2x+2)$$

- $x = -1$

$$1 = \frac{31+98+62}{10} + B + 5D$$

$$1 = \frac{191}{10} + B + 5D$$

2.2.4 d

$$\frac{x^2}{x^6+27} = \frac{x^2}{(x^2+3)(x^4-3x^2+9)} \underset{y:=x^2}{=} \frac{y}{(y+3)(y^2-3y+9)} = \frac{A}{y+3} + \frac{By+C}{y^2-3y+9}$$
$$y = A(y^2-3y+9) + By(y+3) + C(y+3)$$

- $y = -3$

$$-3 = A \cdot (9+9+9)$$
$$-3 = 27A$$
$$A = -\frac{1}{9}$$
$$y = -\frac{y^2-3y+9}{9} + By(y+3) + C(y+3)$$

- $y = 0$

$$0 = -1 + 3C$$
$$C = \frac{1}{3}$$
$$y = -\frac{y^2-3y+9}{9} + By(y+3) + \frac{y+3}{3}$$

- $y = 1$

$$1 = -\frac{1-3+9}{9} + 4B + \frac{4}{3}$$
$$1 = -7 + 36B + 12$$
$$36B = -4$$
$$B = -\frac{1}{9}$$

$$-\frac{1}{9(y+3)} + \frac{-\frac{1}{9}y + \frac{1}{3}}{y^2-3y+9} = -\frac{1}{9(y+3)} + \frac{\frac{-y+3}{9}}{y^2-3y+9} = -\frac{1}{9(y+3)} + \frac{-y+3}{9(y^2-3y+9)} = \frac{\frac{1}{y+3} - \frac{y-3}{y^2-3y+9}}{9} =$$
$$= \frac{\frac{y^2-3y+9-(y-3)(y+3)}{(y+3)(y^2-3y+9)}}{9} = \frac{y^2-3y+9-y^2+9}{9(y+3)(y^2-3y+9)} = \frac{-3y+18}{9(y+3)(y^2-3y+9)} = -\frac{3(y-6)}{9(y+3)(y^2-3y+9)} =$$
$$= -\frac{y-6}{3(y+3)(y^2-3y+9)} = -\frac{y-6}{3(y+3)(y^2-6y+9+3y)} = -\frac{y-6}{3(y+3)\Big((y-3)^2+3y\Big)}$$

2.3 627

2.3.1 a

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$
$$x = (x^2+1)^2A + (x+1)(x^2+1)(Bx+C) + (x+1)(Dx+E)$$

- $x = -1$

$$-1 = 2A$$
$$A = -\frac{1}{2}$$

- $x = 0$

$$0 = -\frac{1}{2} + C + E$$
$$C = \frac{1}{2} - E$$
$$x = -\frac{(x^2+1)^2}{2} + x(x+1)(x^2+1)B + (x+1)(x^2+1)(\frac{1}{2} - E) + x(x+1)D + (x+1)E$$
$$x = -\frac{(x^2+1)^2}{2} + x(x+1)(x^2+1)B + \frac{(x+1)(x^2+1)}{2} + (x+1)(1-x^2-1)E + x(x+1)D$$
$$x = \frac{(x^2+1)(-x^2+x)}{2} + (x+1)\Big(x(x^2+1)B + x^2E + xD\Big)$$

- $x = 1$

$$1 = \frac{2 \cdot 0}{2} + 2\Big(2B + E + D\Big)$$

$$2B + E + D = \frac{1}{2}$$

$$D = \frac{1}{2} - 2B - E$$

$$x = -\frac{x(x^2+1)(x-1)}{2} + (x+1)\Big(x(x^2+1)B + x^2E + x(\frac{1}{2} - 2B - E)\Big)$$

$$x = -\frac{x(x^2+1)(x-1)}{2} + (x+1)\Big(xB(x^2+1-2) + xE(x-1) + \frac{x}{2}\Big)$$

$$x = -\frac{x(x^2+1)(x-1)}{2} + x(x+1)\Big(B(x^2-1) + E(x-1) + \frac{1}{2}\Big)$$

$$1 = -\frac{(x^2+1)(x-1)}{2} + (x+1)\Big(B(x^2-1) + E(x-1) + \frac{1}{2}\Big)$$

$$B(x^2-1) + E(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{1 + \frac{(x^2+1)(x-1)}{2}}{(x+1)} = \frac{2 + (x^2+1)(x-1)}{2(x+1)}$$

$$E = \frac{\frac{2+(x^2+1)(x-1)}{2(x+1)} - B(x^2-1) - \frac{1}{2}}{(x-1)} = \frac{2 + (x^2+1)(x-1) - 2(x-1)(x+1)^2B - (x+1)}{2(x+1)(x-1)}$$

2.4 628

Пусть $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

2.4.1 a

Он же – 3 из вариантов контрольной

$$\sum \frac{1}{x - x_i} = \frac{\sum (x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)} = \frac{\sum \frac{\varphi(x)}{x - x_i}}{\varphi(x)}$$

$$(x - x_i)' = 1 \implies \varphi'(x) = \sum_i \frac{\varphi(x)}{x - x_i} \implies \sum \frac{1}{x - x_i} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

2.4.2 b

Он же – 4 из вариантов контрольной

$$\sum \frac{x_i}{x - x_i} = \frac{\sum (x - x_1)...(x - x_{i-1})x_i(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{\varphi(x)} = \frac{\sum \frac{\varphi(x)x_i}{x - x_i}}{\varphi(x)} = \frac{\sum - \frac{\varphi(x)x - \varphi(x)x_i - \varphi(x)x}{x - x_i}}{\varphi(x)} =$$

$$= \frac{\sum - \Big(\varphi(x) - \frac{\varphi(x)x}{x - x_i}\Big)}{\varphi(x)} = \frac{\sum \frac{\varphi(x)x}{x - x_i} - \sum \varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{x\varphi'(x) - n\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

Утверждение 1 (формула Лагранжа).

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\varphi'(x_k)} \qquad (x_1, x_2, ..., x_n \text{ – корни } \varphi(x))$$

2.5 629

2.5.1 c

$$S \coloneqq \frac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\frac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\frac{1}{x_3^2-2x_3+1}, \qquad \varphi(x)=x^3+x^2-1$$

$$\varphi'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$$

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$$

Хотим, чтобы

$$\frac{1}{x_k^2-2x_k+1}=\frac{f(x_k)}{(x^{(1)}-x_k)x_k(3x_k+2)}\cdot\frac{f(x_k)}{(x^{(2)}-x_k)x_k(3x_k+2)}$$

Пусть $x^{(1)}=x^{(2)}=1$:

$$\frac{1}{(x_k-1)^2}=\frac{f(x_k)}{(1-x_k)x_k(3x_k+2)}\cdot\frac{f(x_k)}{(1-x_k)x_k(3x_k+2)}=\frac{f^2(x_k)}{(1-x_k)^2x_k^2(3x_k+2)^2}$$

$$1=\frac{f^2(x)}{x^2(3x+2)^2}$$

$$1=\frac{f(x)}{x(3x+2)}$$

$$f(x)=x(3x+2)$$

$$S=\frac{f(1)}{\varphi(1)}\cdot\frac{f(1)}{\varphi(1)}=\left(\frac{1\cdot(3+2)}{1+1-1}\right)^2=25$$

2.6 Варианты контрольной

2.6.1 1

Он же – 629.a

x_1,x_2,x_3 – корни $\varphi(x)$. Найти сумму

$$S \coloneqq \frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}$$

$$\varphi(x)=x^3-3x-1$$

$$\varphi'(x)=3x^2-3$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(x-x_k)(3x_k^2-3)}=\sum_{k=1}^{3}\frac{f(x_k)}{3(x-x_k)(x_k-1)(x_k+1)}$$

Хотим, чтобы

$$\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}=\sum_{k=1}^{3}\frac{f(x_k)}{3(x-x_k)(x_k-1)(x_k+1)}$$

То есть,

$$\frac{1}{2-x_k}=\frac{f(x_k)}{3(x-x_k)(x_k-1)(x_k+1)}$$

Пусть $x=2$

$$\frac{1}{2-x_k}=\frac{f(x_k)}{3(2-x_k)(x_k-1)(x_k+1)}$$

$$f(x_k)=3(x_k-1)(x_k+1)$$

$$f(x)=3(x-1)(x+1)$$

Подставим $x=2$ в формулу для S:

$$S=\frac{f(2)}{\varphi(2)}=\frac{3(2-1)(2+1)}{8-6-1}=9$$

2.6.2 2

Он же – 629.b

$$S \coloneqq \frac{1}{x_1^2 - 3x_1 + 2} + \frac{1}{x_2^2 - 3x_2 + 2} + \frac{1}{x_3^2 - 3x_3 + 2}$$

$$\varphi(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\varphi'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)}$$

Хотим, чтобы

$$\frac{1}{x_k^2 - 3x_k + 2} = \frac{f(x_k)}{(x^{(1)} - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)} + \frac{f(x_k)}{(x^{(2)} - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)}$$

Пусть $x^{(1)} = 1, \quad x^{(2)} = 2$:

$$\frac{1}{(x_k - 1)(x_k - 2)} = \frac{f(x_k)}{(1 - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)} + \frac{f(x_k)}{(2 - x_k)(3x_k^2 + 2x_k - 4)} = \frac{f(x_k)}{3x_k^2 + 2x_k - 4} \cdot \frac{2 - x_k + 1 - x_k}{(1 - x_k)(2 - x_k)}$$

$$1 = \frac{(3 - 2x_k)f(x_k)}{3x_k^2 + 2x_k - 4}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 4}{3 - 2x}$$

Подставим $x^{(1)} = 1, \quad x^{(2)} = 2$:

$$S = \frac{f(1)}{\varphi(1)} + \frac{f(2)}{\varphi(2)} = \frac{3 + 2 - 4}{(3 - 2)(1 + 1 - 4 + 1)} + \frac{12 + 4 - 4}{(3 - 4)(8 + 4 - 8 + 1)} = \frac{1}{1 \cdot (-1)} + \frac{12}{(-1) \cdot 5} = -1 - \frac{12}{5} = -\frac{17}{5}$$

Глава 3

3

3.1 838

Доказать, что квадратные невырожденные матрицы порядка n с элементами из данного поля K образуют группу (она назвыается полной линейной группой степени n над полем K и обозначается $GL(n, K)$)

Доказательство.

- Замкнутость относительно операции:
  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, значит, матрицы остаются неособенными
  При умножении двух квадратных матриц одного размера получается матрица того же размера
- Ассоциативность:
  Умножение матриц ассоциативно
- Нейтральный:
  E, $\det E = 1 \neq 0$
- Обратный:
  Неособенная матрица имеет единственную обратную

$\square$

3.2 prep

Доказать, что пары (a, b), $a \neq 0$ элементов поля K образуют группу относительно операции

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1)$$

Доказательство.

- Ассоциативность:
$$(a_1, b_1) * \Big[(a_2, b_2) * (a_3, b_3)\Big] = (a_1, b_1) * (a_2a_3, a_2b_3 + b_2) = \Big(a_1a_2a_3, a_1(a_2b_3 + b_2) + b_1\Big)$$
$$\Big[(a_1, b_1) * (a_2, b_2)\Big] * (a_3, b_3) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1) * (a_3, b_3) = \Big(a_1a_2a_3, a_1a_2b_3 + a_1b_2 + b_1\Big)$$
- Нейтральный:
$$(a_1, b_1) * (1, 0) = (a_1 \cdot 1, a_1 \cdot 0 + b_1) = (a_1, b_1)$$
- Обратный:
$$(a_1, b_1) * (\frac{1}{a_1}, -\frac{b_1}{a_1}) = (\frac{a_1}{a_1}, -\frac{a_1 \cdot b_1}{a_1} + b_1) = (1, -b_1 + b_1) = (1, 0)$$

$\square$

3.3 Задачник Кузнецова

3.3.1 3.1

Проверить, какие из отображений являются гомоморфизмами:

a

$$f(z) = |z|$$
$$f(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| = f(z_1) + f(z_2)$$

b

$$f(z) = 1 + |z|$$
$$f(z_1 + z_2) = 1 + |z_1 + z_2| \neq f(z_1) + f(z_2)$$

c

$$f(z) = 2$$
$$f(z_1 + z_2) = 2 \neq f(z_1) + f(z_2)$$

3.4 Варианты из контрольной

3.4.1 1

> **Доказать.** Пусть $A, B \lhd G, \qquad a \in A, \quad b \in B$
> Тогда $aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B$

$$B \lhd G \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} aba^{-1} \in B \implies (aba^{-1})b^{-1} \in B$$
$$A \lhd G \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} ba^{-1}b^{-1} \in A \implies a(ba^{-1}b^{-1}) \in A$$

3.4.2 2

> **Доказать.** Пусть $A, B \lhd G, \qquad A \cap B = \{ e \}$
> Тогда элементы A коммутируют с элементами B

$$ba[a, b] = ab$$
$$[a, b] \in A \cap B \implies [a, b] = e \implies bae = ab \iff ba = ab$$

3.4.3 3

> **Доказать.** G – конечная группа
> Тогда число элементов в каждом классе сопряжённых элементов делит $|G|$

Классы сопряжённых элементов можно считать орбитами при действии G (как группы) на саму себя (как множество)
Для конечной группы верно

$$|G| = |\operatorname{Orb}(m)| \cdot |\operatorname{St}(m)|$$

3.4.4 4

> **Доказать.** Пусть G – конечная абелева группа
> Пусть $|G| \vdots p$
> Тогда $\exists\, g \in G : \operatorname{ord} g = p$

Индукция по $n = |G|$

- **База.** $n = p$
  Любой элемент имеет порядок p (кроме e)
- **Переход**
  Рассмотрим любой нетождественный элемент a и порождённую им циклическую группу H
  По теореме Лагранжа, $|G| = [G : H] \cdot |H|$
  - Если $|H| \vdots p$, то $a^{|H|/p}$ является искомым элементом
  - Иначе $[G : H] \vdots p$
    По индукционному предположению, факторгруппа содержит элемент порядка p. Им является один из классов xH, где $x \in G$
    Если он имеет порядок m в группе G, то $m \vdots p$, т. к. в группе G $x^m = e$, $(xH)^m = eH$ в факторгруппе
    Поэтому $m \vdots p$
    Аналогично $x^{\frac{m}{p}}$ окажется элементом порядка p в группе G

Глава 4

4

4.1 Задачник Горковца

4.1.1 1

Линейно зависимы ли векторы в $\mathbb{R}^4$?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + 6c + 4d = 0 \\ -5a - 2b - 3c - d = 0 \\ 2a + b + 3c + 5d = 0 \\ 2a + b + 3c + 2d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -5a - 2b - 3c \\ 4a + 2b + 6c - 20a - 8b - 12c = 0 \\ 2a + b + 3c - 25a - 10b - 15c = 0 \\ 2a + b + 3c - 10a - 4b - 6c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8a + 3b + 3c = 0 \\ 23a + 9b + 12c = 0 \\ 8a + 3b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -\frac{8a}{3} - b \\ 23a + 9b - \frac{12 \cdot 8a}{3} - 12b = 0 \\ 8a + 3b - \frac{3 \cdot 8a}{3} - 3b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 23a + 9b - 32a - 12b = 0 \\ 8a + 3b - 8a - 3b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение
Ответ: ЛЗ.

4.1.2 2

Выделить максимальную ЛНЗ подсистему векторов в $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдём размерность пространства, порождённого этими векторами. По определению, это будет количество векторов в максимальном ЛНЗ наборе. Она равна рангу матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ -I \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rk} A = 2$, значит, максимальный ЛНЗ набор состоит из двух векторов. Подойдут, например, a_1 и a_2
Ответ: a_1, a_2

4.1.3 3

Дополнить до базиса пространства $\mathbb{R}^4$ систему векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Векторы a_1 и a_2 ЛНЗ. Значит, достаточно добавить ещё два вектора так, чтобы вся система осталась ЛНЗ Добавим к нашей системе стандартный базис $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Эта система порождающая, т. к. содержит базис. Сузим её до базиса:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Его можно убрать, и система останется порождающей:

$$\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Его можно убрать, и система останется порождающей:

$$\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Получили порождающий набор из 4 векторов. Значит, это – базис $\mathbb{R}^4$

4.1.4 4

Доказать, что система векторов $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ является базисом $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $x = (8, -4, 4)$ в этом базисе.
Размерность $\mathbb{R}^3$ совпадает с количеством векторов в наборе, значит, достаточно доказать, что они ЛНЗ:

$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 0 \\ a - b + 4c = 0 \\ 2a + 4b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b - 4c \\ 2b - 8c + 3b + 2c = 0 \\ 2b - 8c + 4b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5b - 6c = 0 \\ 6b - 7c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \frac{6c}{5} \\ \frac{6 \cdot 6c}{5} - 7c = 0 \end{cases}$$

$$36c - 35c = 0 \qquad a = b = c = 0$$

Система ЛНЗ, значит, это базис

$$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 8 \\ a - b + 4c = -4 \\ 2a + 4b + c = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b - 4c - 4 \\ 2b - 8c - 8 + 3b + 2c - 8 = 0 \\ 2b - 8c - 8 + 4b + c - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5b - 6c - 16 = 0 \\ 6b - 7c - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{6c+16}{5} \\ \frac{36c+96}{5} - 7c - 12 = 0 \end{cases} \qquad 36c + 96 - 35c - 60 = 0 \qquad \begin{cases} c = -36 \\ b = \frac{-6\cdot 36+16}{5} = \frac{-216+16}{5} = -\frac{200}{5} = -40 \\ a = -40 + 144 - 4 = 100 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ -40 \\ -36 \end{pmatrix}$$

4.1.5 5

Доказать, что каждая из систем

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

является базисом $\mathbb{R}^3$ и найти матрицу перехода от E к F
E и F содержат по 3 вектора, значит, достаточно доказать ЛНЗ:

- E
  Уже доказано
- F
  $$\begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = c \\ b = -2c \\ -c - 4c + c = 0 \end{cases}$$
  Это верно только при $a = b = c = 0$, значит, F ЛНЗ

Найдём матрицу перехода. Для этого выразим векторы F через E:

- f_1
  $$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = -1 \\ a - b + 4c = 0 \\ 2a + 4b + c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b - 4c \\ 2b - 8c + 3b + 2c + 1 = 0 \\ 2b - 8c + 4b + c - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5b - 6c + 1 = 0 \\ 6b - 7c - 1 = 0 \end{cases}$$
  $$\begin{cases} b = \frac{6c-1}{5} \\ \frac{36c-6}{5} - 7c - 1 = 0 \end{cases} \qquad 36c - 6 - 35c - 5 = 0 \qquad c - 11 = 0 \qquad \begin{cases} c = 11 \\ b = \frac{66-1}{5} = \frac{65}{5} = 13 \\ a = 13 - 44 = -31 \end{cases}$$
  $$f_1 = \begin{pmatrix} -31 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$
- f_2
  $$\begin{cases} 2a + 3b + 2c = 2 \\ a - b + 4c = 1 \\ 2a + 4b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -2a - 4b \\ 2a + 3b - 4a - 8b - 2 = 0 \\ a - b - 8a - 16b - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2a - 5b - 2 = 0 \\ -7a - 17b - 1 = 0 \end{cases}$$
  $$\begin{cases} a + 5b + 2 = 0 \\ 7a + 17b + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -5b - 2 \\ -35b - 14 + 17b + 1 = 0 \end{cases} \qquad -18b - 13 = 0$$
  $$\begin{cases} b = -\frac{13}{18} \\ a = \frac{13\cdot 5}{18} - 2 = \frac{65}{18} - 2 = \frac{65-36}{18} = \frac{29}{18} \\ c = -\frac{29\cdot 2}{18} + \frac{13\cdot 4}{18} = -\frac{29}{9} + \frac{26}{9} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$
  $$f_2 = \begin{pmatrix} \frac{29}{18} \\ -\frac{13}{18} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- f_3

$$\begin{cases} 2a+3b+2c=1 \\ a-b+4c=2 \\ 2a+4b+c=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=b-4c+2 \\ 2b-8c+4+3b+2c-1=0 \\ 2b-8c+4+4b+c+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5b-6c+3=0 \\ 6b-7c+5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\frac{6c-3}{5} \\ \frac{36c-18}{5}-7c+5=0 \end{cases} \qquad 36c-18-35c+25=0 \qquad \begin{cases} c=-7 \\ b=\frac{6\cdot(-7)-3}{5}=\frac{-42-3}{5}=-9 \\ a=-9+28+2=21 \end{cases}$$

$$f_3=\begin{pmatrix} 21 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -31 & \frac{29}{18} & 21 \\ 13 & -\frac{13}{18} & -9 \\ 11 & -\frac{1}{3} & -7 \end{pmatrix}$$

4.1.6 6

Проверить, образуют ли подпространство векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x_1+x_2+...+x_n=a, \qquad \text{где } a\in\mathbb{R} \text{ – фиксированное число}$$

Достаточно проверить замкнутость относительно сложения и умножения на скаляр:

- $\cdot$
  Пусть $v=(x_1,x_2,...,x_n)\in V$, то есть
  $$x_1+...+x_n=a$$
  Нужно проверить, что $kv\in V$, то есть
  $$kx_1+...+kx_n=a \qquad k(\underbrace{x_1+...+x_n}_{=a})=a$$
  Это верно только при $a=0$
- $+$
  Пусть $v=(x_1,...,x_n),u=(y_1,...,y_n)\in V$, то есть
  $$x_1+...+x_n=a \qquad y_1+...+y_n=a$$
  Нужно проверить, что $v+u\in V$, то есть что
  $$(x_1+y_1)+...+(x_n+y_n)=a \qquad \underbrace{x_1+...+x_n}_{=a}+\underbrace{y_1+...+y_n}_{=a}=a$$
  Это верно только при $a=0$

Ответ: V является подпространством только при $a=0$

4.1.7 7

Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов

$$a_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, a_5=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Размерность пространства равна рангу матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ +2I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 \\ \cdot 4 \\ \cdot(-4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -9 \\ 0 & 12 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -II \\ -II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\2&0&-4&-3\\0&4&8&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&-4\\0&4&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2+2-2+1\neq 0\implies \operatorname{rk}A=4$$

Представим a_4 в виде ЛК остальных:

$$\begin{cases}a+2b+c-d=1\\-a+2b-c-2d=-5\\-2a-b-c+d=-3\\a-b+c+d=4\end{cases}\qquad\begin{cases}a=-2b-c+d+1\\2b+c-d-1+2b-c-2d+5=0\\4b+2c-2d-2-b-c+d+3=0\\-2b-c+d+1-b+c+d-4=0\end{cases}\qquad\begin{cases}4b-3d+4=0\\3b+c-d+1=0\\-3b+2d-3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=\frac{3d-4}{4}\\\frac{9d-12}{4}+c-d+1=0\\\frac{-9d+12}{4}+2d-3=0\end{cases}\qquad\begin{cases}9d-12+4c-4d+4=0\\-9d+12+8d-12=0\end{cases}\qquad\begin{cases}5d+4c-8=0\\-d=0\end{cases}\qquad\begin{cases}d=0\\c=2\\b=0\\a=-1\end{cases}$$

Значит, a_4 можно убрать

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

4.1.8 8

Найти базис суммы и пересечения линейных оболочек

$$S=\left\langle\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\4\end{pmatrix}\right\rangle,\qquad T=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-9\\6\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\-5\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

1. Найдём базисы S и T:
   Для этого достаточно проверить ЛНЗ соотв. наборов:

   (a) S

   $$\begin{cases}a+3b+9c=0\\3a+b+4c=0\\-2a-c=0\\a+b+4c=0\end{cases}\qquad\begin{cases}c=-2a\\a+3b-18a=0\\3a+b-8a=0\\a+b-8a=0\end{cases}\qquad\begin{cases}-17a+3b=0\\-5a+b=0\\-7a+b=0\end{cases}\qquad a=b=c=0$$

   $$\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\4\end{pmatrix}\quad\text{– базис } S$$

   (b) T
   Заметим, что

   $$\begin{pmatrix}0\\7\\-5\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-9\\6\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

   Значит,

   $$\begin{pmatrix}-1\\-9\\6\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\quad\text{– базис } T$$

2. $S\cap T$
   Возьмём $v\in S\cap T$

   $$v\in S\implies v=a_1\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$v \in T \implies v = b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 9a_3 = -b_1 - b_2 \\ 3a_1 + a_2 + 4a_3 = -2b_1 - 9b_2 \\ -2a_1 - a_3 = b_1 + 6b_2 \\ a_1 + a_2 + 4a_3 = b_1 + b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = -2a_1 - a_3 - 6b_2 \\ a_1 + 3a_2 + 9a_3 - 2a_1 - a_3 - 6b_2 + b_2 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 4a_3 - 4a_1 - 2a_3 - 12b_2 + 9b_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_1 + a_3 + 6b_2 - b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 + 8a_3 - 5b_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 - 3b_2 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 5a_3 + 5b_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 3a_2 + 8a_3 - 5b_2 \\ -3a_2 - 8a_3 + 5b_2 + a_2 + 2a_3 - 3b_2 = 0 \\ 9a_2 + 24a_3 - 15b_2 + a_2 + 5a_3 + 5b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2 - 3a_3 + b_2 = 0 \\ 10a_2 + 29a_3 - 10b_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = -3a_3 + b_2 \\ -30a_3 + 20b_2 + 29a_3 - 10b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = 10b_2 \\ a_2 = -30b_2 + b_2 = -29b_2 \\ a_1 = -87b_2 + 80b_2 - 5b_2 = -12b_2 \\ b_1 = 24b_2 - 10b_2 - 6b_2 = 8b_2 \end{cases}$$

Пусть $b_2 = 1$

$$\begin{cases} a_1 = -12 \\ a_2 = -29 \\ a_3 = 10 \\ b_1 = 8 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} -12 - 87 + 90 - 8 - 1 \\ -36 - 29 + 40 - 16 - 9 \\ 24 - 10 + 8 + 6 \\ -12 - 29 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -50 \\ 28 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. $S + T$

$$S + T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 & -9 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3I \\ +2I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 17 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 4 \\ \cdot 4 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 24 & 68 & -4 & 16 \\ 0 & -8 & -20 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3II \\ -II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -43 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -44 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -23 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 9 & -1 \\ 0 & -8 & 1 & -23 & -6 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & -8 & 1 & -23 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 1 & -23 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{rk} A = 4$$

Значит, базис содержт 4 вектора. Найдём тот, который является ЛК остальных:

- v_3

$$\begin{cases} a+3b-c-d=9 \\ 3a+b-2c-9d=4 \\ -2a+c+6d=-1 \\ a+b+c+d=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=2a-6d-1 \\ a+3b-2a+6d-1-d-9=0 \\ 3a+b-4a+12d+2-9d-4=0 \\ a+b+2a-6d-1+d-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a+3b+5d-10=0 \\ -a+b+3d-2=0 \\ 3a+b-5d-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-3b-5d+10 \\ 3b+5d-10+b+3d-2=0 \\ -9b-15d+30+b-5d-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2d-3=0 -8b-20d+25=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=3-2d \\ -24+16d-20d+25=0 \end{cases} \qquad -4d+1=0$$

$$\begin{cases} d=-\frac{1}{4} \\ b=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ a=-\frac{5\cdot 3}{2}+\frac{5}{4}+10=\frac{-30+5+40}{4}=\frac{15}{4} \\ c=\frac{15}{2}-15-1=\frac{15-32}{2}=-\frac{17}{2} \end{cases}$$

Значит, v_3 можно “выкинуть”

Ответ:

- $S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -18 \\ -50 \\ 28 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $S + T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4.1.9 10

Отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ задано правилом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1+x_2-3x_3 \\ x_1-x_2+3x_3 \\ -x_2+2x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$$

Доказать, что φ является линейным отображением и найти его матрицу
Докажем линейность:

- $\varphi(v+u) = \varphi(v) + \varphi(u)$

$$\varphi(v+u) = \varphi\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} v_1+u_1 \\ v_2+u_2 \\ v_3+u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -(v_1+u_1)+(v_2+u_2)-3(v_3+u_3) \\ (v_1+u_1)-(v_2+u_2)+3(v_3+u_3) \\ -(v_2+u_2)+2(v_3+u_3) \\ (v_1+u_1)+(v_3+u_3) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -v_1+v_2-3v_3 \\ v_1-v_2+3v_3 \\ -v_2+2v_3 \\ v_1+v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_1+u_2-3u_3 \\ u_1-u_2+3u_3 \\ -u_2+2u_3 \\ u_1+u_3 \end{pmatrix} = \varphi(u) + \varphi(v)$$

- $\varphi(kv) = k\varphi(v)$ – аналогично

Обозначим

$$i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.10 11

Найти базис ядра и образа линейного отображения f, заданного в некотором базисе матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдём $\operatorname{Im} f$:

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} F$$

Найдём $\operatorname{rk} F$:

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rk} F = 2 \implies \dim \operatorname{Im} f = 2$$

Найдём $\ker f$:

$$\dim \ker F = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 4 - 2 = 2$$

По определению матрицы линейного отображения,

$$g_1 \coloneqq f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_2 \coloneqq f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad g_3 \coloneqq f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_4 \coloneqq f(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Эта система будет порождающей в $\operatorname{Im} f$. Нужно сузить её до базиса.

$$\begin{cases} 1 = 2a - b + c \\ 2 = a - b \\ 3 = 3a - 2b + c \\ 0 = -3a + b - 2c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -a + 2 \\ 2a + a - 2 + c - 1 = 0 \\ 3a + 2a - 4 + c - 3 = 0 \\ -3a - a + 2 - 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + c - 3 = 0 \\ 5a + c - 7 = 0 \\ -4a - 2c + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -3a + 3 \\ 5a - 3a + 3 - 7 = 0 \\ -4a + 6a - 6 + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a - 4 = 0 \\ 2a - 4 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет решение, значит, g_1 выражается через остальные, и $\operatorname{Im} f = \langle g_2, g_3, g_4 \rangle$. Нужно убрать ещё один вектор.
Заметим, что $g_2 = -g_3 + g_4$. Значит,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ – базис } \operatorname{Im} f$$

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2-x_3=0\\ 3x_1+3x_2-2x_3+x_4=0\\ -3x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=2x_1+x_2\\ x_1+2x_2-2x_1-x_2+x_4=0\\ 3x_1+3x_2-4x_1-2x_2+x_4=0\\ -3x_2+2x_1+x_2-2x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1+x_2+x_4=0\\ -x_1+x_2+x_4=0\\ 2x_1-2x_2-2x_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=x_2+x_4\\ x_3=2x_2+2x_4+x_2=3x_2+2x_4 \end{cases}$$

$$\ker f=\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Очевидно, что это базис $\ker f$

4.1.11 12

Найти какой-нибудь прообраз вектора $(1,2,3)$ под действием линейного отображения f, заданного в некотором базисе матрицей

$$F=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&4&2\\1&3&3\end{pmatrix}$$

Пусть $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$, и $f(v)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$f(v)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \iff Fv=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&4&2\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}2v_1-v_2+v_3\\-v_1+4v_2+2v_3\\v_1+3v_2+3v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1-v_2+v_3=1\\ -v_1+4v_2+2v_3=2\\ v_1+3v_2+3v_3=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2=2v_1+v_3-1\\ -v_1+8v_1+4v_3-4+2v_3-2=0\\ v_1+6v_1+3v_3-3+3v_3-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7v_1+6v_3-6=0\\ 7v_1+6v_3-6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3=-\frac{7}{6}v_1+1\\ v_2=2v_1-\frac{7}{6}v_1+1-1=\frac{12-7}{6}v_1=\frac{5}{6}v_1 \end{cases}$$

Возьмём $v_1=6$

$$v=\begin{pmatrix}6\\5\\-6\end{pmatrix}$$

4.1.12 13

Линейное отображение $\varphi: V\to W$ в базисах $\{\,e_1,e_2,e_3\,\}$ пространства V и $\{\,f_1,f_2\,\}$ пространства W имеет матрицу

$$\Phi=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Найти матрицу отображения φ в базисах $\{\underbrace{e_1+e_2+e_3}_{:=e_1'}, \quad \underbrace{-e_1+e_2}_{:=e_2'}, \quad \underbrace{e_1+e_2}_{:=e_3'}\}$ и $\{\underbrace{2f_1+f_2}_{:=f_1'}, \quad \underbrace{f_1+f_2}_{:=f_2'}\}$ Запишем e_1',e_2',e_3' в базисах e_1,e_2,e_3 и f_1',f_2' в базисах f_1,f_2:

$$e_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad e_2'=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad f_1'=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad f_2'=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$f(e_1')=\Phi e_1'=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2-1\\1+0+1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}}_{\text{в базисах } f_1,f_2}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}_{\text{в базисах } f_1',f_2'}$$

$$f(e_2') = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{в базисах } f_1, f_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{в базисах } f_1', f_2'}$$

$$f(e_3') = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{в базисах } f_1, f_2}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a + b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 - b \\ 2 - 2b + b - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$f(e_3') = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\text{в базисах } f_1', f_2'}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4.1.13 14

Линейное преобразование φ задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти собственные векторы и собственные значения преобразования φ

$$\chi(\lambda) = |A - E\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\Big((-\lambda)(1-\lambda)^2 + (-2)(-1)1 + 2 \cdot 1(-1) - 2(1-\lambda)1 - (-2)1(1-\lambda) - (-\lambda)(-1)(-1)\Big) =$$

$$= (2-\lambda)\Big(-\lambda(1 - 2\lambda + \lambda^2) + 2 - 2 - 2(1-\lambda) + 2(1-\lambda) + \lambda\Big) = (2-\lambda)\lambda\Big(-(1 - 2\lambda + \lambda^2) + 1\Big) =$$

$$= \lambda(2-\lambda)(-1 + 2\lambda - \lambda^2 + 1) = \lambda(2-\lambda)(2\lambda - \lambda^2) = \lambda^2(2-\lambda)^2$$

- $\lambda = 0$

$$\chi(0) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

  Найдём ядро:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_1 + x_4 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1-2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Найдём ядро:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ 2x_2 + 2x_4 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1.14 15

Доказать, что преобазование $\mathcal{A}$, заданное в некотором базисе матрицей A имеет в некотором другом базисе диагональный вид и найти этот вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)$$

Все с. ч. различны, значит, преобразование диагонализуемо

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.1.15 16

Построить ортогональный базис линейной оболочки следующей системы векторов:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём базис U:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ -1 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что $\operatorname{rk} A = 3 \implies \dim U = 3$
Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Значит, базис U:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}$$

Построим ортогональный базис, используя ортогонализацию Грама-Шмидта:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \frac{(v_1, u_2)}{(v_1, v_1)} v_1 = u_2 - \frac{1+2-10-3}{1+4+4+1} v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix} + \frac{10}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\1+2\\-5+2\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_3) - \mathrm{proj}_{v_2}(u_3) = u_2 - \frac{(v_1, u_3)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(v_2, u_3)}{(v_2, v_2)} v_2 = u_3 - \frac{3+4+16+7}{10} v_1 - \frac{6+6-24-14}{4+9+9+4} v_2 =$$
$$= \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

4.1.16 17

Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Для начала найдём базис U. Мы его уже нашли в предыдущем задании:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$U^{\perp} = \{\, x \mid x \perp u \quad \forall u \in U \,\} = \{\, x \mid \begin{cases} x \perp a \\ x \perp b \\ x \perp c \end{cases} \,\}$$

Возьмём $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}(x,a) = 0\\(x,b) = 0\\(x,c) = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\\x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0\\2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1 = -2x_2 - 2x_3 + x_4\\-2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0\\-4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0\\-x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2 = -7x_3 + 4x_4\\x_1 = 14x_3 - 8x_4 - 2x_3 + x_4 = 12x_3 - 7x_4\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}12x_3 - 7x_4\\-7x_3 + 4x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

4.2 studylib.ru

4.2.1 2

В линейном пространстве A^4 даны подпространства

$$A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\2\\8\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad B = \left\langle \begin{pmatrix}6\\6\\6\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\7\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\8\\6\end{pmatrix} \right\rangle$$

Найти базис и размерность $A + B$
Найдём базисы A и B. Для этого проверим, что соответствующие наборы ЛНЗ:

- A
  Заметим, что
  $$\begin{pmatrix}4\\5\\2\\8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}$$
  Значит, $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}$ – базис A
- B
  Заметим, что
  $$B = \left\langle \begin{pmatrix}6\\6\\6\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\7\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\8\\6\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\7\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$
  Теперь видно, что второй вектор равен сумме первого и третьего, значит, $\begin{pmatrix}3\\3\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix}$ – базис B

$$A + B = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём размерность $A + B$:

$$M = \begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&1&3&1\\-1&4&3&4\\3&2&4&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\+I\\-3I\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-3&-3&-3\\0&6&6&6\\0&-4&-5&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\:2\\\cdot(-3)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&-3&-3&-3\\0&3&3&3\\0&12&15&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\+II\\+4II\end{matrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&3&-7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&1&1\\0&0&3&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{rk} M = 3 \implies \dim A + B = 3$$

Значит, одни из векторов "лишний". Проверим четвёртый:

$$\begin{cases}a + 2b + 3c = 2\\2a + b + 3c = 1\\-a + 4b + 3c = 4\\3a + 2b + 4c = 3\end{cases} \qquad \begin{cases}a = -2b - 3c + 2\\-4b - 6c + 4 + b + 3c - 1 = 0\\2b + 3c - 2 + 4b + 3c - 4 = 0\\-6b - 9c + 6 + 2b + 4c - 3 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}-3b - 3c + 3 = 0\\6b + 6c - 6 = 0\\-4b - 5c + 3 = 0\end{cases}$$

Очевидно, что эта система имеет нетривиальное решение

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

4.2.2 3

Для пространств из предыдущего задания найти базис и размерность $A \cap B$
Воспользуемся формулой Грассмана:

$$\dim(A+B) + \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B$$

$$\dim(A \cap B) = 1$$

Значит, достаточно найти один ненулевой вектор из $A \cap B$ Возьмём $v \in A \cap B$

$$v \in A \implies v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v \in B \implies v = c \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 3c + 2d \\ 2a + b = 3c + d \\ -a + 4b = 3c + 4d \\ 3a + 2b = 4c + 3d \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2b + 3c + 2d \\ -4b + 6c + 4d + b - 3c - d = 0 \\ 2b - 3c - 2d + 4b - 3c - 4d = 0 \\ -6b + 9c + 6d + 2b - 4c - 3d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3b + 3c + 3d = 0 \\ 6b - 6c - 6d = 0 \\ -4b + 5c + 3d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = c + d \\ -4c - 4d + 5c + 3d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = d \\ b = 2d \\ a = -4d + 3d + 2d = d \end{cases}$$

Пусть $d = 1$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.2.3 4

Пространства A и B заданы соответственно системами уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \quad (A) \qquad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \quad (B)$$

Найти базис и размерность пространств $A + B$ и $A \cap C$
Найдём базис A:

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_1 + 6x_2 + 10x_4 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_1 - 9x_2 - 15x_4 + 6x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 - 8x_2 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4x_2 - \frac{9}{2}x_4 \\ -28x_2 - \frac{63}{2}x_4 + 5x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad -46x_2 - 57x_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{57}{46}x_4 \\ x_1 = \frac{4\cdot 57}{46} - \frac{9}{2}x_4 = \frac{228-207}{46}x_4 = \frac{21}{46}x_4 \\ x_3 = \frac{21\cdot 2}{46}x_4 - \frac{57\cdot 3}{46}x_4 + 5x_4 = \frac{42-171+230}{46}x_4 = \frac{101}{46}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 21 \\ -57 \\ 101 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Найдём базис B:

$$\begin{cases} x_2 = -5x_1 + 2x_3 - 5x_4 \\ 3x_1 - 20x_1 + 8x_3 - 20x_4 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 15x_1 - 6x_3 + 15x_4 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -17x_1 + 3x_3 - 13x_4 = 0 \\ 17x_1 - 3x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{17x_1+13x_4}{3} \\ x_2 = -5x_1 + 2\cdot\frac{17x_1+13x_4}{3} - 5x_4 = \frac{-15x_1+34x_1+26x_4-15x_4}{3} = \frac{19x_1+11x_4}{3} \end{cases}$$

Базис B:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19+11}{3} \\ \frac{17+13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{19-11}{3} \\ \frac{17-13}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4.3 yagubov.ru

Даны подпространства U и W, порождённые системами векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Найти базисы $U+W$ и $U\cap W$ Найдём базис U:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ -3I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{rk} A = 3 \implies \dim U = 3$$

Найдём базис W:
Векторы b_1 и b_2 ЛНЗ, значит они образуют базис W
Найдём базис $U+W$:

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2I \\ +3I \\ +2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 6 & 4 & 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2II \\ -3II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 21 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -2 & -2\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 3 & 2\\0 & 0 & -6 & 21\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 3 & 2\\0 & -6 & 21\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 2\\-6 & 21\end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{rk} A = 4 \implies \dim U + W = 4$$

Значит, один из векторов “лишний”. Проверим пятый:

$$A \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & -2 & -3\\0 & 1 & 2 & 1 & 3\\0 & 0 & 3 & 2 & 5\\0 & 0 & 0 & 25 & 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a + 2b + 2c - d = 3\\-a + 2b + 2c + 2d = 3\\3a - 2b + c - 2d = 2\\2a - b - 2c + d = -2\end{cases} \qquad \begin{cases}a - b - 2c - 2d = -3\\b + 2c + d = 3\\3c + 2d = 5\\25d = 7\end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение. Значит,

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём базис $U \cap W$:
По формуле Грассмана, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 1$
Возьмём $v \in U \cap W$

$$v \in U \implies v = aa_1 + ba_2 + ca_3$$

$$v \in W \implies v = db_1 + eb_2$$

$$\begin{cases}2a + 2b + 2c = -d + 3e\\-a + 2b + 2c = 2d + 3e\\3a - 2b + c = -2d + 2e\\2a - b - 2c = d - 2e\end{cases} \qquad \begin{cases}d = -2a - 2b - 2c + 3e\\-a + 2b + 2c + 4a + 4b + 4c - 6e - 3e = 0\\3a - 2b + c - 4a - 4b - 4c + 6e - 2e = 0\\2a - b - 2c + 2a + 2b + 2c - 3e + 2e = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}a + 2b + 2c - 3e = 0\\-a - 6b - 3c + 4e = 0\\4a + b - e = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}e = 4a + b\\a + 2b + 2c - 12a - 3b = 0\\-a - 6b - 3c + 16a + 4b = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}-11a - b + 2c = 0\\15a - 2b - 3c = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}b = -11a + 2c\\15a + 22a - 4c - 3c = 0\end{cases}$$

$$37a - 7c = 0 \qquad \begin{cases}c = \frac{37}{7}a\\b = -11a + \frac{37\cdot 2}{7}a = \frac{-77+74}{7}a = -\frac{3}{7}a\\e = 4a - \frac{3}{7}a = \frac{28-3}{7}a = \frac{25}{7}a\\d = -2a + \frac{2\cdot 3}{7}a - \frac{37\cdot 2}{7}a + \frac{25\cdot 3}{7}a = \frac{-14+6-74+75}{7}a = -a\end{cases}$$

Пусть $a = 7$
Тогда $d = -7, \quad e = 25$

$$v = -7\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{pmatrix} + 25\begin{pmatrix}3\\3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 + 75\\-14 + 75\\14 + 50\\-7 - 50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}82\\61\\64\\-57\end{pmatrix}$$

4.4 Варианты контрольной

4.4.1 1

$V = \mathcal{P}_{\leq 3}$ – многочлены степени ≤ 3

$$U = \operatorname{Ker}\left(L(p) = \int_1^2 p \,\mathrm{d}\, x\right), \qquad W = \langle x, x^2 + x^3 \rangle$$

Найти разм. и базисы $U, W, U \cap W, U + W$

Пусть $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\int p(x)\ \mathrm{d}\,x = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + C$$

$$\int_1^2 p(x)\ \mathrm{d}\,x = \frac{a}{4}(16-1) + \frac{b}{3}(8-1) + \frac{c}{2}(4-1) + d(2-1) = \frac{15a}{4} + \frac{7b}{3} + \frac{3c}{2} + d$$

$$45a + 28b + 18c + 12d = 0$$

Пусть $a = b = c = t$

$$45t + 28t + 18t + 12d = 0$$

$$91t + 12d = 0$$

$$d = -\frac{91}{12}$$

$$U = \mathrm{Ker}(...) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{91}{12} \end{pmatrix}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -91 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Возьмём $v \in W \cap U$

$$v \in W \implies v = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v \in U \implies v = c\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12c \\ 12c \\ 12c \\ -91c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = c \\ b = c \\ -91c = 0 \end{cases}$$

$$W \cap U = \langle 0 \rangle, \qquad \dim W \cap U = 0$$

Возьмём $v \in W + U$, то есть

$$v \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -91 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & -91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & -91 \end{vmatrix} = 91$$

$$\mathrm{rk}\, A = 3 \implies \dim U + W = 3$$

$$\dim U \cap W = 0 \implies U \oplus W$$

4.4.2 2

$$V = \mathcal{P}_{\leq 3}$$

$$U = \operatorname{Ker}(L(p) = \int_0^2 p \, \mathrm{d}\, x))$$

$$W = \langle 1 + x, x^2 + 2x^3 \rangle$$

Найти размерность и базисы $U, W, U \cap W, U + W$

Пусть $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\int p(x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + C$$

$$\int_0^2 p(x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{a}{4}(16-0) + \frac{b}{3}(8-0) + \frac{c}{2}(4-0) + 2d = 4a + \frac{8}{3}b + 2c + 2d$$

$$2a + \frac{4}{3}b + c + d = 0$$

Пусть $a = b = c = t$

$$2t + \frac{4}{3}t + t + d = 0$$

$$d = \frac{13}{3}t$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim U = 1$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Пусть $v \in U \cap W$

$$v \in U \implies v = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$v \in W \implies v = c \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2b \\ b \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ 3c \\ 3c \\ 13c \end{pmatrix}$$

$$U \cap W = \langle 0 \rangle, \qquad \dim U \cap W = 0$$

Возьмём $v \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 \neq 0$$

$$\operatorname{rk} A = 3 \implies \dim U + W = 3$$

$$U \cap W = \{0\} \implies U \oplus W$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4.4.3 3

$$V = \mathcal{P}_{\leq 3}, \qquad U = \langle x, x + x^3 \rangle, \qquad W = \langle 1 + x^2, 1 + 2x + x^2 + x^3 \rangle$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Докажем, что эти векторы – базис U:
Докажем ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что это верно только при $a = b = 0$

$$\dim U = 2, \quad \dim W = 2$$

Найдём базис $U \cap W$:
Возьмём $v \in U \cap W$

$$v \in U \implies v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a+b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v \in W \implies v = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ 2d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c+d \\ 2d \\ c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = d \\ 0 = c + d \\ a + b = 2d \\ 0 = c + d \end{cases} \qquad \begin{cases} b = d \\ c = -d \\ a = d \end{cases}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \dim U \cap W = 1$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \implies \operatorname{rk} A = 3 \implies \dim U + W = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит, его можно “выкинуть”. Докажем, что оставшийся набор – ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\0\\b\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\c\\0\\c\end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что это верно только при $a = b = c = 0$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

4.4.4 4

$$V = \mathcal{P}_{\leq 3}, \qquad U = \langle x^3, x + x^2 \rangle, \qquad W = \langle 1 + x, 1 + 2x + x^2 + x^3 \rangle$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Очевидно, что эти наборы ЛНЗ $\implies$ это – базисы, $\dim U = \dim W = 2$
Возьмём $v \in U \cap W$:

$$v \in U \implies v = \begin{pmatrix}a\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\b\\0\end{pmatrix}, \qquad v \in W \implies v = \begin{pmatrix}0\\0\\c\\c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d\\d\\2d\\d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = d \\ b = d \\ b = c + 2d \\ 0 = c + d \end{cases} \qquad \begin{cases} a = d \\ b = d \\ c = -d \end{cases}$$

$$U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \dim U \cap W = 1$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Значит, этот вектор можно убрать. Докажем, что оставшийся набор – базис. Достаточно доказать, что он – ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\b\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\\c\end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \dim U + W = 3$$

4.5 prep

Пусть $V = \mathbb{R}^4$

W – подпространство V, натянутое на векторы $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

U – подпространство V, наятнутое на векторы $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$

Найти размерность и базис для $W \cap U$ и $W + U$

- $W \cap U$
  Возьмём $v \in W \cap U$:

$$v \in W \implies v = a\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v \in U \implies v = c\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - b = 2c + d \\ 2a + b = -c - d \\ a + b = 3d \\ b = -c + 7d \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -c + 7d \\ a = 3d - b = 3d + c - 7d = c - 4d \\ c - 4d + c - 7d - 2c - d = 0 \\ 2c - 8d - c + 7d + c + d = 0 \end{cases} \qquad a = b = c = d = 0 \implies W \cap U = \{0\}$$

- $W + U$

$$\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) = 4$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix} \text{ – базис } U + W$$

$$U \cap W = \{0\} \implies U \oplus W$$

Глава 5

Коллок. 1

5.1 1

Являются ли ЛЗ векторы

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$a_1 a + a_2 bb + a_3 c + a_4 d = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ -3a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 4a_2 \\ 5a_2 \\ -2a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ 0 \\ -a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_4 \\ 2a_4 \\ 3a_4 \\ 8a_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 \\ -3a_1 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 \\ a_1 + 5a_2 + 3a_4 \\ a_1 - 2a_2 - a_3 + 8a_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ -3a_1 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_1 + 5a_2 + 3a_4 = 0 \\ a_1 - 2a_2 - a_3 + 8a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = -5a_2 - 3a_4$$

$$\begin{cases} -5a_2 - 3a_4 + 2a_2 + a_3 + 3a_4 = 0 \\ 15a_2 + 9a_4 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 = 0 \\ -5a_2 - 3a_4 - 2a_2 - a_3 + 8a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a_2 + a_3 = 0 \\ 19a_2 + a_3 + 11a_4 = 0 \\ -7a_2 - a_3 + 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_3 = 3a_2$$

$$\begin{cases} 19a_2 + 3a_2 + 11a_4 = 0 \\ -7a_2 - 3a_2 + 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21a_2 + 11a_4 = 0 \\ -10a_2 + 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_4 = 2a_2$$

$$21a_2 + 22a_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Ответ: ЛНЗ.

5.2 2

$$a=\begin{pmatrix}2\\2\\4\\6\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\7\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\2\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a_1+a_2+3a_3=0\\2a_1-3a_2+4a_3+3a_4=0\\4a_1-5a_2-a_3+a_4=0\\6a_1+7a_2+2a_3+6a_4=0\end{cases}\quad\begin{cases}a_2=-3a_3-2a_1\\2a_1+9a_3+6a_1+4a_3+3a_4=0\\4a_1+15a_3+10a_1-a_3+a_4=0\\6a_1-21a_3-14a_1+2a_3+6a_4=0\end{cases}\quad\begin{cases}8a_1+13a_3+3a_4=0\\14a_1+14a_3+a_4=0\\-9a_1-19a_3+6a_4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_4=-14a_1-14a_3\\8a_1+13a_3-42a_1-42a_3=0\\-9a_1-19a_3-84a_1-84a_3=0\end{cases}\quad\begin{cases}-34a_1-29a_3=0\\-93a_1-103a_3=0\end{cases}\quad\begin{cases}a_1=-\frac{29a_3}{34}\\\frac{29\cdot 93a_3}{34}-103a_3=0\end{cases}$$

$$a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

Ответ: ЛНЗ.

5.3 3

$$a=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\\-4\\1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}5\\3\\-8\\0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}4\\2\\-8\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3a_1+a_2+5a_3+4a_4=0\\-2a_1+2a_2+3a_3+2a_4=0\\a_1-4a_2-8a_3-8a_4=0\\-2a_1+a_2+2a_4=0\end{cases}\quad\begin{cases}a_2=2a_1-2a_4\\3a_1+2a_1-2a_4+5a_3+4a_4=0\\-2a_1+4a_1-4a_4+3a_3+2a_4=0\\-2a_1+2a_1-2a_4+2a_4=0\end{cases}\quad\begin{cases}5a_1+5a_3+2a_4=0\\2a_1+3a_3-2a_4=00=0\end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальные решения
Ответ: ЛЗ.

5.4 4

$$a=\begin{pmatrix}3\\6\\0\\12\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}4\\7\\1\\1\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3a_1+a_2+4a_3-a_4=0\\6a_1+2a_2+7a_3+5a_4=0\\a_2+a_3+3a_4=0\\12a_1+4a_2+a_3+2a_4=0\end{cases}\quad\begin{cases}a_2=-a_3-3a_4\\3a_1-a_3-3a_4+4a_3-a_4=0\\6a_1-2a_3-6a_4+7a_3+5a_4=0\\12a_1-4a_3-12a_4+a_3+2a_4=0\end{cases}\quad\begin{cases}3a_1+3a_3-4a_4=0\\6a_1+5a_3-a_4=0\\12a_1-3a_3-10a_4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_4=6a_1+5a_3\\3a_1+3a_3-24a_1-20a_3=0\\12a_1-3a_3-60a_1-50a_3=0\end{cases}\quad\begin{cases}-21a_1-17a_3=0\\-48a_1-53a_3=0\end{cases}\quad\begin{cases}a_1=-\frac{17a_3}{21}\\\frac{48\cdot 17a_3}{21}-53a_3=0\end{cases}$$

$$a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

Ответ: ЛНЗ.

5.5 5

$$4x_1x_2 - 6x_1x_3 + x_2^2 + 8x_2x_3 - x_3^2$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ -3 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2\cdot 4\cdot(-3) + 2\cdot 4\cdot(-3) - (-3)\cdot(1-\lambda)\cdot(-3) - 2\cdot 2\cdot(-1-\lambda) - (-\lambda)\cdot 4\cdot 4 =$$
$$= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) - 24 - 24 - 9(1-\lambda) + 4(1+\lambda) + 16\lambda = \lambda(1-\lambda^2) - 48 - 9 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 16\lambda =$$
$$= \lambda - \lambda^3 - 53 + 29\lambda = -\lambda^3 + 30\lambda - 53$$

5.6 6

$$4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ 3 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(-1-\lambda)(1-\lambda) + 2(-4)3 + 3\cdot 2(-4) - 2\cdot 2(1-\lambda) - (-\lambda)(-4)(-4) - 3\cdot 3\cdot(-1-\lambda) =$$
$$= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) - 24 - 24 - 4(1-\lambda) + 16\lambda + 9(1+\lambda) = \lambda - \lambda^3 - 48 - 4 + 4\lambda + 16\lambda + 9 + 9\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 30\lambda - 41$$

5.7 7

$$4x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & -3 \\ 4 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2(-3)4 + 4\cdot 2(-3) - 4(1-\lambda)4 - (-3)(-3)(-\lambda) - 2\cdot 2(-1-\lambda) =$$
$$= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) - 24 - 24 - 16 + 16\lambda + 9\lambda + 4 + 4\lambda$$

5.8 11

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 + 5a_3 + 4a_4 = 0 \\ -a_1 + 3a_2 + 6a_3 + a_4 = 0 \\ \cancel{2}a_1 + \cancel{2}a_2 + \cancel{2}a_4 = 0 \\ 7a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -a_2 - a_4 \\ -a_2 - a_4 + 4a_2 + 5a_3 + 4a_4 = 0 \\ a_2 + a_4 + 3a_2 + 6a_3 + a_4 = 0 \\ -7a_2 - 7a_4 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a_2 + 5a_3 + 3a_4 = 0 \\ 2a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \\ -6a_2 - 3a_3 - 5a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = -2a_2 - 3a_3 \\ 3a_2 + 5a_3 - 6a_2 - 9a_3 = 0 \\ -6a_2 - 3a_3 + 10a_2 + 15a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3a_2 - 4a_3 = 0 \\ 4a_2 + 12a_3 = 0 \end{cases} \qquad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Ответ: ЛНЗ.

Глава 6

Коллок. 2

6.1 1

Линейное отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$ задано формулой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ 3y + 2z \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого отображения в базисах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

и

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 - 1 + 6 \\ 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 3,5 \cdot \Big(g_2 - g_1 \Big) = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 - 15 \\ 3 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = -16 \\ 2a_1 + 4a_2 = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -16 - 3a_2 \\ -32 - 6a_2 + 4a_2 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -12,5 a_1 = -16 - 3 \cdot (-12,5) = -16 + 37,5 = 21,5 \end{cases}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -12,5 \\ 21,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 21 \\ 2a_1 + 4a_2 = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 21 - 3a_2 \\ 42 - 6a_2 + 4a_2 = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 21 - 42 = -21 \\ a_2 = 14 \end{cases}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3,5 & -12,5 & -21 \\ 3,5 & 21,5 & 14 \end{pmatrix}$$

6.2 2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+3y \\ x-5y \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2+6 \\ 1-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} = -3g_1 + 14g_2 - 3g_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 3-8 \\ 6+12 \\ 3-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 28 \\ -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 14 & 28 \\ -3 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

6.3 3

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- g_1

$$\begin{cases} 3 = 5a_1 \\ 0 = a_1 - a_2 \\ 0 = a_1 + 3a_2 + 3a_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0,6 \\ a_2 = a_1 = 0,6 \\ a_3 = -\frac{a_1}{3} - a_2 = -0,2 - 0,6 = -0,8 \end{cases}$$

- g_2

$$\begin{cases} 1 = 5a_1 \\ -2 = a_1 - a_2 \\ 0 = a_1 + 3a_2 + 3a_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0,2 \\ a_2 = a_1 + 2 = 2,2 \\ a_3 = -\frac{a_1}{3} - a_2 = -\frac{1}{15} - \frac{11}{5} = -\frac{34}{15} \end{cases}$$

- g_3

$$\begin{cases} -1 = 5a_1 \\ 4 = a_1 - a_2 \\ 4 = a_1 + 3a_2 + 3a_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -0,2 \\ a_2 = a_1 - 4 = -3,8 \\ a_3 = \frac{4}{3} - \frac{a_1}{3} - a_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{15} + \frac{19}{5} = \frac{20+1+57}{15} = \frac{78}{15} \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & -0,2 \\ 0,6 & 2,2 & -3,8 \\ -0,8 & -\frac{34}{15} & \frac{78}{15} \end{pmatrix}$$

6.4 4

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- g_1

$$\begin{cases} 2a_1 = 5 \\ 5a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 2,5 \\ a_2 = -5a_1 = -12,5 \\ a_3 = -a_1 + 2a_2 = -2,5 - 25 = -27,5 \end{cases}$$

- g_2

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ 5a_1 + a_2 = 2 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0,5 \\ a_2 = 2 - 5a_1 = 2 - 2,5 = -0,5 \\ a_3 = -a_1 + 2a_2 = -0,5 - 1 = -1,5 \end{cases}$$

- g_3

$$\begin{cases} 2a_1 = 3 \\ 5a_1 + a_2 = 1 \\ -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 1,5 \\ a_2 = 1 - 5a_1 = 1 - 7,5 = -6,5 \\ a_3 = -0,5 - a_1 + 2a_2 = -0,5 - 1,5 - 13 = -15 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2,5 & 0,5 & 1,5 \\ -12,5 & -0,5 & -6,5 \\ -27,5 & -1,5 & -15 \end{pmatrix}$$

6.5 5

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-z \\ x+2y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-3 \\ 1+2+3 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0+5 \\ 0+2-5 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0-6 \\ 0+0+6 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ -0,4 & 1 & -1,2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

6.6 6

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ y-2z \\ x-y+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 1-4 \\ 1-1+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 1+12 \\ 0-1-6 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 13 \\ -7 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ -3 & 13 & -8 \\ 2 & -7 & 4 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7 7

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ y-2z \\ x-y+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$e_{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 1-4 \\ 1-1+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+12 \\ -1-6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 13 \\ -7 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ -3 & 13 & -8 \\ 2 & -7 & 4 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Глава 7

Умножение матриц

Элемент c_{ij} есть скалярное произведение i-й строки A и j-го столбца B

7.1 $A_{2\times 1} \cdot B_{1\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

7.2 $A_{2\times 2} \cdot B_{2\times 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

7.3 $A_{2\times 2} \cdot B_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 14 & 6 + 16 \\ 15 + 28 & 18 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

7.4 $A_{3\times 3} \cdot B_{3\times 1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 18 - 2 \\ 8 + 2 - 3 \\ 0 + 16 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

7.5 $A_{3\times 3} \cdot B_{3\times 3}$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -7 & -8 & -6 \\ -4 & -2 & -9 \end{pmatrix} = \\
&\quad = \begin{pmatrix} 1(-1) + 2(-7) + 3(-4) & 1(-5) + 2(-8) + 3(-2) & 1(-3) + 2(-6) + 3(-9) \\ 4(-1) + 5(-7) + 6(-4) & 4(-5) + 5(-8) + 6(-2) & 4(-3) + 5(-6) + 6(-9) \\ 7(-1) + 8(-7) + 9(-4) & 7(-5) + 8(-8) + 9(-2) & 7(-3) + 8(-6) + 9(-9) \end{pmatrix} = \\
&\quad\quad = \begin{pmatrix} -1 - 14 - 12 & -5 - 16 - 6 & -3 - 12 - 27 \\ -4 - 35 - 24 & -20 - 40 - 12 & -12 - 30 - 54 \\ -7 - 56 - 36 & -35 - 64 - 18 & -21 - 48 - 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -27 & -42 \\ -63 & -72 & -96 \\ -99 & -117 & -150 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Глава 8

Ядро линейного оператора

8.1 Греческий сайт

Лиейный оператор $\mathcal{L}$ задан матрицей L. Найти ядро и *дефект* $\mathcal{L}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2-2 \\ -2-1+3 \\ 4-4-1+1 \\ 4+1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker \mathcal{L} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Дефект есть размерность ядра, он равен 1.

Глава 9

Приведение матрицы к диагональному виду

9.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 + 3 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) =$$
$$= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(5-\lambda) + 6 - 45 + 9\lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda = 5 - \lambda - 10\lambda + 2\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 41 + 11\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36$$

$$\chi(-2) = 8 + 28 - 36 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
-\lambda^3 & +7\lambda^2 & & -36 & \lambda & +2 & \\
\hline
-\lambda^3 & -2\lambda^2 & & & -\lambda^2 & +9\lambda & -18 \\
\hline
 & 9\lambda^2 & & -36 & & & \\
 & 9\lambda^2 & +18\lambda & & & & \\
\hline
 & & -18\lambda & -36 & & &
\end{array}$$

$$\chi(\lambda) = (\lambda+2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18)$$

$$D = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{-2} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ 6 \end{array} \right.$$

Проверим:

$$\chi(3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}, \qquad \chi(6) = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

- $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -7x_2 - x_3 \\ -21x_2 - 3x_3 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -20x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 3x_3 \\ x_1 + 4x_1 - 6x_3 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_1 - 3x_3 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_3 = -x_3 \end{cases}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_3 \\ -5x_1 + x_1 + x_3 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_1 + x_3 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad -4x_1 + 4x_3 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\Bigg(-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \Bigg) + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\Big(\lambda\big(\lambda(1+\lambda) - 7\big) - 1\Big) + 6 =$$

$$= \lambda\Big(\lambda\big(\lambda + \lambda^2 - 7\big) - 1\Big) + 6 = \lambda\Big(\lambda^2 + \lambda^3 - 7\lambda - 1\Big) + 6 = \lambda^3 + \lambda^4 - 7\lambda^2 - \lambda + 6$$

$$\chi(1) = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$$

λ^4	$+\lambda^3$	$-7\lambda^2$	$-\lambda$	$+6$	λ	-1		
λ^4	$-\lambda^3$				λ^3	$+2\lambda^2$	-5λ	-6
	$2\lambda^3$	$-7\lambda^2$						
	$2\lambda^3$	$-2\lambda^2$						
		$-5\lambda^2$	$-\lambda$					
		$-5\lambda^2$	$+5\lambda$					
			-6λ	$+6$				

$$\chi(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$$

λ^3	$+2\lambda^2$	-5λ	-6	λ	$+1$	
λ^3	$+\lambda^2$			λ^2	$+\lambda$	-6
	λ^2	-5λ				
	λ^2	$+\lambda$				
		-6λ	-6			

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left[\begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

Проверим:

$$\chi(1)=\begin{vmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\-6&1&7&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&7&-2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\-6&7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\7&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\-6&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2-7-1+6=0$$

$$\chi(-1)=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\-6&1&7&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-6&1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&7\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\-6&7\end{vmatrix}=7-1+6=0$$

$$\chi(-3)=\begin{vmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\-6&1&7&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3&1&0\\0&3&1\\1&7&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1&0\\0&3&1\\-6&7&2\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}3&1\\7&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\-6&2\end{vmatrix}=9\cdot6-9\cdot7+3+6=0$$

$$\chi(2)=\begin{vmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\-6&1&7&-3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\1&7&-3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\-6&7&-3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-2&1\\7&-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0&1\\1&-3\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}1&0\\-2&1\end{vmatrix}=$$

$$=4(6-7)-2+6=0$$

- $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\-6&1&7&-2\end{pmatrix}$$

$$\ker=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

- $\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\-6&1&7&0\end{pmatrix}$$

$$\ker=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

- $\lambda=-3$

$$\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\-6&1&7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{cases}3x_1+x_2=0\\3x_2+x_3=0\\3x_3+x_4=0\\-6x_1+x_2+7x_3+2x_4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2=-3x_1\\x_3=-3x_2=9x_1\\x_4=-3x_3=-27x_1\\-6x_1-3x_1+63x_1-54x_1=0\end{cases}$$

$$\ker=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-3\\9\\-27\end{pmatrix}\right\rangle$$

- $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\-6&1&7&-3\end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & -27 & 8 \end{pmatrix}$$

9.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 9 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2-\lambda & 0 & 2 \\ 9 & 1-\lambda & 4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)\Big((2-\lambda)(1-\lambda)-4\Big)+4-4(2-\lambda)\right] = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)\Big(2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-4\Big)+\underbrace{4-8+4\lambda}_{=-4(1-\lambda)}\right] =$$

$$= (1-\lambda)^2\Big(\lambda^2-3\lambda-2-4\Big) = (1-\lambda)^2(\lambda^2-3\lambda-6)$$

$$D = 9 + 24 = 33$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Проверим:

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\chi\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1-\frac{3+\sqrt{33}}{2} & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2-\frac{3+\sqrt{33}}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1-\frac{3+\sqrt{33}}{2} & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1-\frac{3+\sqrt{33}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2-3+\sqrt{33}}{2} & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{4-3+\sqrt{33}}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 9 & \frac{2-3+\sqrt{33}}{2} & 4 \\ 1 & 2 & 0 & \frac{2-3+\sqrt{33}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+\sqrt{33} & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1+\sqrt{33} & 0 & 4 \\ 0 & 18 & -1+\sqrt{33} & 8 \\ 2 & 4 & 0 & -1+\sqrt{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (\sqrt{33}-1) \begin{vmatrix} \sqrt{33}-1 & 4 & 8 \\ 0 & 1+\sqrt{33} & 4 \\ 2 & 4 & \sqrt{33}-1 \end{vmatrix} \sim (\sqrt{33}-1) \begin{vmatrix} 1+\sqrt{33} & 4 \\ 4 & \sqrt{33}-1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1+\sqrt{33} & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (\sqrt{33}-1)\Big((1+\sqrt{33})(\sqrt{33}-1)-16\Big) + 2\Big(16-8(1+\sqrt{33})\Big) = (\sqrt{33}-1)(33-1-16) + 2(16-8-8\sqrt{33}) =$$

$$= 16\sqrt{33} - 16 + 16 - 16\sqrt{33} = 0$$

Аналогично $\chi(\frac{3-\sqrt{33}}{2})$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 9x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Матрица не диагонализуема

9.4 527

9.4.1 a

$$Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big((2-\lambda)(5-\lambda) - 4\Big) - (5-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4) - 5 + \lambda = (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) - 5 + \lambda = \lambda^2 - 7\lambda + 6 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda - 5 + \lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 1$$

9.4.2 b

$$Q = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 4 - \lambda + (1-\lambda)\Big((1-\lambda)(4-\lambda) + 4\Big) =$$

$$= 4 - \lambda + (1-\lambda)(4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 4) = 4 - \lambda + (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 8) = 4 - \lambda + \lambda^2 - 5\lambda + 8 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 14\lambda + 12$$

9.4.3 c

$$Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\operatorname{tr} A = \sum \lambda \implies \lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.4.4 d

$$Q = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^3 - 2x_4^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ (1-\lambda)\left((1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (1-\lambda)(2+\lambda) + 4 + (2+\lambda) - 2 + (2+\lambda) - 2 + (1-\lambda)(2+\lambda) + 1 + (1-\lambda)\Bigg((1-\lambda)\Big(-(1-\lambda)(2+\lambda) - 4\Big) +$$

$$+ (2+\lambda) - 2 - 2 - (1-\lambda)\Bigg) =$$

$$= 2+\cancel{\lambda}-\cancel{2\lambda}-\lambda^2+4+\cancel{2}+\cancel{\lambda}-\cancel{2}+\cancel{2}+\cancel{\lambda}-\cancel{2}+2+\cancel{\lambda}-\cancel{2\lambda}-\lambda^2+1+(1-\lambda)\Big((1-\lambda)(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-4)+\cancel{2}+\lambda-\cancel{2}-2-1+\lambda\Big) =$$

$$= 2-\lambda^2+4+2-\lambda^2+1+(1-\lambda)\Big((1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6)+2\lambda-3\Big) = -2\lambda^2+9+(1-\lambda)(\cancel{\lambda^2}+\lambda-6-\lambda^3-\cancel{\lambda^2}+6\lambda+2\lambda-3) =$$

$$= -2\lambda^2+9+(1-\lambda)(-\lambda^3+9\lambda-9) = -2\lambda^2+\cancel{9}-\lambda^3+9\lambda-\cancel{9}+\lambda^4-9\lambda^2+9\lambda = \lambda^4-\lambda^3-11\lambda^2+18\lambda =$$

$$= \lambda(\lambda^3-\lambda^2-11\lambda+18)$$

Проверим:

$$\chi(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cancel{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = 0$$

$$\chi(2) = -8 + 4 - 22 + 18 = 0$$

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
\lambda^3 & -\lambda^2 & -11\lambda & +18 & \lambda & -2 & \\
\hline
\lambda^3 & -2\lambda^2 & & & \lambda^2 & +\lambda & -9 \\
\hline
 & \lambda^2 & -11\lambda & & & & \\
 & \lambda^2 & -2\lambda & & & & \\
\hline
 & & -9\lambda & +18 & & &
\end{array}
$$

$$D = 1 + 36 = 37$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Проверим:

$$\chi\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{-1+\sqrt{37}}{2} & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 - \frac{-1+\sqrt{37}}{2} & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 - \frac{-1+\sqrt{37}}{2} & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 - \frac{-1+\sqrt{37}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2+1-\sqrt{37} & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2+1-\sqrt{37} & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2+1-\sqrt{37} & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -4+1-\sqrt{37} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\sqrt{37} & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3-\sqrt{37} & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 3-\sqrt{37} & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -3-\sqrt{37} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 3-\sqrt{37} & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -3-\sqrt{37} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3-\sqrt{37} & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -3-\sqrt{37} \end{vmatrix} + (3-\sqrt{37})\begin{vmatrix} 3-\sqrt{37} & -2 & -2 \\ -2 & 3-\sqrt{37} & -4 \\ -2 & -4 & -3-\sqrt{37} \end{vmatrix}$$

9.4.5 e

$$Q = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{4} + \lambda(1-\lambda)\right)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = \left(\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

$$D = 1 + 1 = 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = \frac{1}{2}$
  Проверим:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ Проверим:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\sqrt{2}) \begin{vmatrix} -(1+\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 1 & -(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 1 & -(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) \begin{vmatrix} -(1+\sqrt{2}) & 1 \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -(1+\sqrt{2}) & 1 \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(-(1-2) - 1 \Big) \Big((1+\sqrt{2})^2 - 1 \Big) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} (1-\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - (1+\sqrt{2})x_2 = 0 \\ -(1+\sqrt{2})x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - (1+\sqrt{2})x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -(1-\sqrt{2})x_1 \\ x_1 + (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})x_1 = 0 \\ x_4 = (1+\sqrt{2})x_3 = 0 \\ x_3 - (1+\sqrt{2})^2 x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + (1-2)x_1 = 0 \\ x_3 - (1+2\sqrt{2}+2)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = -(1-\sqrt{2})x_1 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} (1+\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - (1-\sqrt{2})x_2 = 0 \\ -(1-\sqrt{2})x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - (1-\sqrt{2})x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}x_4^2$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.5 535

9.5.1 a

$$Q = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\Big(-\lambda(1-\lambda) - 4\Big) + 4\lambda =$$
$$= (2-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-4) + 4\lambda = -2\lambda + 2\lambda^2 - 8 + \lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8$$

$$\chi(1) = -1 + 3 + 6 - 8 = 0$$

Проверим:

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} -\lambda^3 & +3\lambda^2 & +6\lambda & -8 & \lambda & -1 & \\ \hline -\lambda^3 & +\lambda^2 & & & -\lambda^2 & +2\lambda & +8 \\ \hline & 2\lambda^2 & +6\lambda & & & & \\ & 2\lambda^2 & -2\lambda & & & & \\ \hline & & 8\lambda & -8 & & & \end{array}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda^2 - 4\lambda) + (2\lambda - 8) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

Проверим:

$$\chi(4) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 4 = 0$$

$$\chi(-2) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 = 0$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_2 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = -x_2 = 2x_3 \\ 4x_3 - 6x_3 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_2 = 2x_1 \\ -2x_1 + 6x_1 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2$$

$$(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$(\vec{u_2}, \vec{u_3}) = 2 - 4 + 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = CY$$

9.5.2 b

$$Q = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big((2-\lambda)(3-\lambda) - 4\Big) - 4(3-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4) - 12 + 4\lambda = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) - 12 + 4\lambda = \lambda^2 - 5\lambda + 2 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 12 + 4\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10$$

$$\chi(-1) = 1 + 6 + 3 - 10 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} -\lambda^3 & +6\lambda^2 & -3\lambda & -10 & \lambda & +1 & \\ \hline -\lambda^3 & -\lambda^2 & & & -\lambda^2 & 7\lambda & -10 \\ \hline & 7\lambda^2 & -3\lambda & & & & \\ & 7\lambda^2 & +7\lambda & & & & \\ \hline & & -10\lambda & -10 & & & \end{array}$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \left[\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

- $\lambda = -1$
  Проверим:

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(12 - 4) - 16 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = x_2 = 2x_3 \\ -4x_3 + 6x_3 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$
  Проверим:

$$\chi(5) = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 - 6x_1 + 4x_1 = 0 \end{cases} \qquad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$
  Проверим:

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 2x_2 \\ x_1 = -x_3 = -2x_2 \\ -2x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) = 2 - 4 + 2 = 0, \qquad (u_2, u_3) = -2 - 2 + 4 = 0$$

$$v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{u_1}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = -x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

9.5.3 c

$$Q = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\Big((4-\lambda)(5-\lambda)-4\Big) - 4(5-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)\Big(20-5\lambda-4\lambda+\lambda^2-4\Big) - 20 + 4\lambda = (3-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+16) - 20 + 4\lambda = 3\lambda^2 - 27\lambda + 48 - \lambda^3 + 9\lambda^2 - 16\lambda - 20 + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28$$

$$\chi(1) = -1 + 12 - 39 + 28 = 0$$

$-\lambda^3$	$+12\lambda^2$	-39λ	$+28$	λ	-1	
$-\lambda^3$	$+\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+11\lambda$	-28
	$11\lambda^2$	-39λ				
	$11\lambda^2$	-11λ				
		-28λ	$+28$			

$$\lambda^2 - 11\lambda + 28$$

$$D = 121 - 4 \cdot 28 = 121 - 112 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \left[\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix}\right.$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2, \qquad C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

9.5.4 d

$$Q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\Big((5-\lambda)^2 - 16\Big) - 2\Big(2(5-\lambda) - 8\Big) - 2\Big(-8 + 2(5-\lambda)\Big) = (2-\lambda)(25 - 10\lambda + \lambda^2 - 16) - 4(10 - 2\lambda - 8) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) - 4(2 - 2\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 9\lambda + 9) + 8(\lambda - 1) = (2-\lambda)(\lambda - 9)(\lambda - 1) + 8(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda-1)\Big((2-\lambda)(\lambda-9)+8\Big) = (1-\lambda)\Big(2\lambda - 18 - \lambda^2 + 9\lambda + 8\Big) = -(1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = -(1-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-1)$$

- $\lambda = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 10$

$$\begin{vmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = -2\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-25 + 16) - 5 - 4 - 4 - 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$\vec{v_1} = \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_2} = \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_3} = u_2 - \operatorname{proj}_{v_1} u_2 - \operatorname{proj}_{v_2} u_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 - \frac{(u_2, v_2)}{(v_2, v_2)}v_2 = u_2 - \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{3}v_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ -1 - 0 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Нормализуем:

$$|v_3| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2$$

9.5.5 e

$$Q = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2-\lambda \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\Big((2+\lambda)^2 - 16\Big) + 2\Big(2(2+\lambda) - 8\Big) + 2\Big(-8 + 2(2+\lambda)\Big) = (1-\lambda)(4+4\lambda+\lambda^2-16) + 4(4+2\lambda-8) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-12) + 4(2\lambda-4) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+6\lambda-12) + 8(\lambda-2) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+6) + 8(\lambda-2) = (\lambda-2)\Big((1-\lambda)(\lambda+6)+8\Big) = (\lambda-2)(\lambda+6-\lambda^2-6\lambda+8) = -(\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14) =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2+7\lambda-2\lambda-14) = -(\lambda-2)(\lambda+7)(\lambda-2)$$

- $\lambda = 2$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -7$

$$\chi(-7) = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(25-16) - 5 - 4 - 4 - 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 - \frac{(u_2, v_2)}{(v_2, v_2)}v_2 = u_2 - \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{3}v_2 = \begin{pmatrix} 2-0-1 \\ 0-\frac{1}{2}-1 \\ 1-\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Нормализуем:

$$|v_3| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{22}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

$$Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2$$

9.5.6 f

$$Q = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$$
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 6-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -4(6-\lambda)+(4-\lambda)\Big((5-\lambda)(6-\lambda)-4\Big) = -24+4\lambda+(4-\lambda)\Big(30-11\lambda+\lambda^2-4\Big) = 4\lambda-24+(4-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+26) =$$
$$= 4\lambda - 24 + 4\lambda^2 - 44\lambda + 104 - \lambda^3 + 11\lambda^2 - 26\lambda = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 66\lambda + 80$$
$$\chi(2) = -8 + 60 - 132 + 80 = 0$$

$-\lambda^3$	$+15\lambda^2$	-66λ	$+80$	λ	-2	
$-\lambda^3$	$+2\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+13\lambda$	-40
	$13\lambda^2$	-66λ				
	$13\lambda^2$	-26λ				
		-40λ	$+80$			

$$\lambda^2 - 13\lambda + 40$$
$$D = 169 - 160 = 9 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{2} = \left[\begin{matrix} 5 \\ 8 \end{matrix}\right.$$

- $\lambda = 2$

$$\chi(2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$

$$\chi(5) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 8$

$$\chi(8) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 2 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 = u_2 - \frac{3}{9}v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ -1 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)}v_2 = u_3 - \frac{1}{9}v_1 + \frac{2}{9}v_2 = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \\ 1 - \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \\ 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{\sqrt{194}} \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{194}} \end{pmatrix}$$
$$Q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2$$

9.5.7 g

$$Q = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 6-\lambda \\ -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\Big((6-\lambda)(3-\lambda) - 4\Big) + 2\Big(-2(3-\lambda) - 8\Big) - 2\Big(4 + 4(6-\lambda)\Big) =$$

$$= (3-\lambda)(18 - 6\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4) + 2(-6 + 2\lambda - 8) - 2(4 + 24 - 4\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) + 2(2\lambda - 14) - 2(28 - 4\lambda) = 3\lambda^2 - 27\lambda + 42 - \lambda^3 + 9\lambda^2 - 14\lambda + 4\lambda - 28 - 56 + 8\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 29\lambda - 42$$

$$\chi(-1) = 1 + 12 + 29 - 42 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} -\lambda^3 & +12\lambda^2 & -29\lambda & -42 & \lambda & +1 & \\ \hline -\lambda^3 & -\lambda^2 & & & -\lambda^2 & +13\lambda & -42 \\ \hline & 13\lambda^2 & -29\lambda & & & & \\ & 13\lambda^2 & +13\lambda & & & & \\ \hline & & -42\lambda & -42 & & & \end{array}$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 42 \qquad D = 169 - 4\cdot 42 = 169 - 168 = 1 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{13 \pm 1}{2} = \left[\begin{matrix} 7 \\ 6 \end{matrix}\right.$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 - 2 - 2 - 2 - 1 - 7 = 0$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -a + 7b + 2c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a + c \\ -a + 7a + 7c + 2c = 0 \\ a + a + c + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a + 9c = 0 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = \frac{5}{2}c \end{cases} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 6$

$$\chi(6) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 3 - 2 = 0$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 7$

$$\chi(7) = \begin{vmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = -x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2$$

9.5.8 h

$$Q = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)\Big((5-\lambda)(3-\lambda)-16\Big)-16(3-\lambda) = (7-\lambda)(15-8\lambda+\lambda^2-16)-48+16\lambda = (7-\lambda)(\lambda^2-8\lambda-1)-48+16\lambda =$$

$$= 7\lambda^2 - 56\lambda - 7 - \lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda - 48 + 16\lambda = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 39\lambda - 55$$

$$\chi(-1) = 1 + 15 + 39 - 55 = 0$$

$-\lambda^3$	$+15\lambda^2$	-39λ	-55	λ	$+1$	
$-\lambda^3$	$-\lambda^2$			$-\lambda^2$	$+16\lambda$	-55
	$16\lambda^2$	-39λ				
	$16\lambda^2$	-16λ				
		-55λ	-55			

$$\lambda^2 - 16\lambda + 55 \qquad D = 256 - 220 = 36 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{16 \pm 6}{2} = 8 \pm 3 = \left[\begin{array}{l} 5 \\ 11 \end{array}\right.$$

- $\lambda = -1$

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 5$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 11$

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 = 0$$

$$\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 = u_2 - \frac{1}{3}v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} \\ 1 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)}v_2 = u_3 + \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = -x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2$$

9.5.9 i

$$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_4+2x_2x_3-4x_3x_4$$
$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0&1\\-2&2&1&0\\0&1&2&-2\\1&0&-2&2\end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0&1\\-2&2-\lambda&1&0\\0&1&2-\lambda&-2\\1&0&-2&2-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&-2\\0&-2&2-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&1&0\\0&2-\lambda&-2\\1&-2&2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2&2-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\\1&0&-2\end{vmatrix}=$$
$$=(2-\lambda)\left((2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&-2\\-2&2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-2\\0&2-\lambda\end{vmatrix}\right)+2\left(-2\begin{vmatrix}2-\lambda&-2\\-2&2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&-2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}\right)-$$
$$-\left(-2\begin{vmatrix}1&2-\lambda\\0&-2\end{vmatrix}-(2-\lambda)\begin{vmatrix}0&2-\lambda\\1&-2\end{vmatrix}\right)=$$
$$=(2-\lambda)^2\Big((2-\lambda)(2-\lambda)-4-1\Big)-4\Big((2-\lambda)(2-\lambda)-4\Big)-4-4-(2-\lambda)(2-\lambda)=$$
$$=(2-\lambda)^2\Big(4-4\lambda+\lambda^2-5\Big)-4\Big(4-4\lambda+\lambda^2-4\Big)-8-4+4\lambda-\lambda^2=(2-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda-1)-4\lambda(\lambda-4)-12+4\lambda-\lambda^2=$$
$$=(4-4\lambda+\lambda^2)(\lambda^2-4\lambda-1)-4\lambda^2+16\lambda-12+4\lambda-\lambda^2=4\lambda^2-16\lambda-4-4\lambda^3+16\lambda+4\lambda+\lambda^4-4\lambda^3-\lambda^2-5\lambda^2+20\lambda-12=$$
$$=\lambda^4-8\lambda^3-2\lambda^2+24\lambda-16$$

9.5.10 j

$$Q=2x_1x_2+2x_3x_4$$
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

- $\lambda=-1$

$$\chi(-1)=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$$
$$\dim\ker=4-\operatorname{rk}\chi=2$$
$$\ker=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

- $\lambda=-1$

$$\chi(1)=\begin{vmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=0$$
$$\dim\ker=4=\operatorname{rk}\chi=2$$
$$\ker=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$Q=x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$$

9.5.11 k

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\dim\ker = 4 - \operatorname{rk}\chi(1) = 2$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(4-1) - 2(-2) - (4-1) - (-(-1)) + (-1) - (4-1) = 2(4-1) + 4 - 1 - 1 = 0$$

$$\dim\ker = 4 - \operatorname{rk}\chi(-1) = 1$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = \operatorname{tr} A - 1 - 1 + 1 = 4 - 1 - 1 + 1 = 3$

$$\chi(3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (4-1) - (-(-1)) + (-1) - (4-1) = 4(4-1) - 2(2) - (4-1) - 1 - 1 - (4-1) =$$

$$= 2(4-1) - 4 - 2 = 0$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_4^2$$

9.5.12 l

$$Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Любой минор 3×3 содержит одинаковые строки, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$

$$\dim\ker = 4 - \operatorname{rk} A = 3$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda = \operatorname{tr} A - 3 \cdot 1 = -3$

$$\chi(-3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\left(\underline{3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} + \widehat{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) - \left(\underline{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} + \widetilde{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}\right) +$$

$$+ \left(\widehat{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} - 3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}\right) + \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\widetilde{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}\right) =$$

$$= 8(9-1) + 4(-3-1) + 4(-1-3) - 4(3+1) - 4(1+3) = 64 + 8(-4) - 8 \cdot 4 = 0$$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2$$

9.5.13 m

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$

$$\chi(1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3\left(-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right) + 2\left(-\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 2(-2) + (1-9) + 3\Big(-(-(-3)) + 3(9-4)\Big) + 2\Big(-(2) - 2(9-4)\Big) = -4 - 8 + 3(-3+15) + 2(-2-10) =$$

$$= -12 + 36 - 24 = 0$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$

$$\chi(-1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(2\underline{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} + 3\overline{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}\right) - \underline{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} + 2\overbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} + 3\widetilde{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} +$$

$$+ 3\left(-\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} - 2\overbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right) + 2\left(-\overline{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} - 2\widetilde{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4-2) + (-4+3) + 4(2-6) - 4(6-2) - (-3+4) + 5(9-4) =$$

$$= 12 - \cancel{6} - \cancel{4} + \cancel{3} + \cancel{8} - 24 - 24 + 8 + \cancel{3} - \cancel{4} + 45 - 20$$

9.6 prep

$$Q = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & . & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A_{n-2} = ... = \frac{1}{*}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & . & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\chi_{n-1} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & & \chi_{n-2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\chi_{n-1} - \frac{1}{4}\chi_{n-2}$$

Глава 10

Разложение дроби на простейшие

10.1 Пример из Фаддеева

Разложить над $\mathbb{R}$ дробь

$$\frac{1}{x^{2n}+1}$$

Сперва разложим над $\mathbb{C}$:
Корни многочлена $F(x) = x^{2n}+1$ лежат на единичной окружности и попарно сопряжены.
Именно, с корнями

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

сопряжены корни $\overline{x_k} = x_{2n+1-k}$

$$F'(x) = 2nx^{2n-1}$$

$$F'(x_k) = 2nx_k^{2n-1} = 2nx_k^{-1}x_k^{2n} = -2nx_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{1}{x^{2n}+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x-x_k} - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{x_k}}{x-\overline{x_k}}$$

Объединив теперь попарно сопряжённые слагаемые, получаем

$$\frac{1}{x^{2n}+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x-x_k} + \frac{\overline{x_k}}{x-\overline{x_k}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k+\overline{x_k})x-2}{x^2-(x_k+\overline{x_k})x+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$

10.2 Задача с допсы

10.2.1

$$\frac{x^2}{x^5+1}$$

Над $\mathbb{C}$: Корни многочлена $F(x) = x^5+1$ лежат на единичной окружности и попарно сопряжены

$$x_k = \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{\cos\pi + i\sin\pi} = 1^{1/5}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{5},\ k = 0, ..., 4$$

Корни расположены как показано на рис. 10.1. То есть $\overline{x_4} = x_0, \overline{x_3} = x_1, x_2 = -1$

$$F'(x) = 5x^4, \qquad F'(x_k) = 5x_k^4 = 5x_k^{-1}x_k^5 = -5x_k^{-1}$$

При этом,

$$x_k + \overline{x_k} = 2\operatorname{Re} x_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}, \qquad x_k\overline{x_k} = |x_k|^2 = 1$$

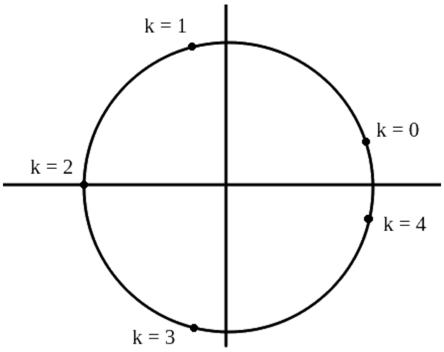

Рис. 10.1: Расположение x_k на единичной окружности

По формуле Лагранжа,

$$\frac{1}{x^5+1}=\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{(x-x_k)(-5x_k^{-1})}=-\frac{1}{5}\sum\frac{x_k}{x-x_k}=-\frac{1}{5}\left(\frac{x_1}{x-x_1}+\frac{x_2}{x-x_2}+\frac{x_3}{x-x_3}+\frac{x_4}{x-x_4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{x_1}{x-x_1}+\frac{\overline{x_1}}{x-\overline{x_1}}+\frac{x_3}{x-x_3}+\frac{\overline{x_3}}{x-\overline{x_3}}-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{x_1(x-\overline{x_1})+\overline{x_1}(x-x_1)}{(x-x_1)(x-\overline{x_1})}+\frac{x_3(x-\overline{x_3})+\overline{x_3}(x-x_3)}{(x-x_3)(x-\overline{x_3})}-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{x_1x-x_1\overline{x_1}+\overline{x_1}x-\overline{x_1}x_1}{x^2-xx_1-x\overline{x_1}+x_1\overline{x_1}}+\frac{x_3x-x_3\overline{x_3}+\overline{x_3}x-\overline{x_3}x_3}{x^2-xx_3-x\overline{x_3}+x_3\overline{x_3}}-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{x(x_1+\overline{x_1})-2}{x^2-x(x_1+\overline{x_1})+1}+\frac{x(x_3+\overline{x_3})-2}{x^2-x(x_3+\overline{x_3})+1}-\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}-2}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}+1}+\frac{2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}-2}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}+1}-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{4}{5}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}x-1}{x^2-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}x+1}+\frac{1}{5(x+1)}$$

10.3 626

10.3.1 a

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)$$

$$\begin{cases}A+B=0\\A-B+C=0\\A-C=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-B\\C=A-1=-B-1\\-B-B-B-1=0\end{cases}\qquad\begin{cases}B=-\frac{1}{3}\\C=-\frac{2}{3}\\A=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

10.3.2 b

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)}=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x^2=A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4)=$$

$$=Ax^3+2Ax^2+4Ax+8A+Bx^3-2Bx^2+4Bx-8B+Cx^3-4Cx+Dx^2-4D=$$

$$=(A+B+C)x^3+(2A-2B+D)x^2+(4A+4B-4C)x+(8A-8B-4D)$$

$$\begin{cases}A+B+C=0\\2A-2B+D=1\\A+B-C=0\\2A-2B-D=0\end{cases}\qquad\begin{cases}C=0\\A+B=0\\D=1-2A+2B\\2A-2B-1+2A-2B=0\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-B\\D=1+2B+2B=1+4B\\4A-4B-1=0\end{cases}$$

$$-B = B + \frac{1}{4} \qquad \begin{cases} B = -\frac{1}{8} \\ A = \frac{1}{8} \\ D = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$$

10.3.3 c

$$\frac{1}{x^4+4}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:

$$4 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$$

Корни многочлена $F(x) = x^4 + 4$ имеют вид

$$x_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

При этом,

- $x_0 = \sqrt{2}$
- $\overline{x_1} = x_3$
- $x_2 = -\sqrt{2}$
- $x_k + \overline{x_k} = 2\operatorname{Re} x_k = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi k}{2}$
- $x_k\overline{x_k} = |x_k|^2 = 1$

$$F'(x) = 4x^3, \qquad F'(x_k) = 4x_k^3 = -4x_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{1}{x^4+4} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{(x-x_k)(-4x_k^{-1})} = -\frac{1}{4}\left(\frac{x_0}{x-x_0} + \frac{x_2}{x-x_2} + \frac{x_1}{x-x_1} + \frac{\overline{x_1}}{x-\overline{x_1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{x_1(x-\overline{x_1}) + \overline{x_1}(x-x_1)}{(x-x_1)(x-\overline{x_1})}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{x(x_1+\overline{x_1}) - 2x_1\overline{x_1}}{x^2 - x(x_1+\overline{x_1}) + x_1\overline{x_1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + \frac{x\cdot 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2} - 2}{x^2 - x\cdot 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2} + 1}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - \frac{2}{x^2+1}\right)$$

10.3.4 d

$$\frac{x^2}{x^5+27}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:

$$-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Корни многочлена $F(x) = x^5 + 27$ имеют вид

$$x_k = 27^{1/5}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}\right), \qquad k = 0, 1, ..., 4$$

При этом,

- $x_0 = \overline{x_4}$
- $x_1 = \overline{x_3}$
- $x_2 = -\sqrt[5]{27}$
- $x_k + \overline{x_k} = 2\operatorname{Re} x_k = 2\cdot 27^{1/5}\cos\frac{(2k+1)\pi}{5}$
- $x_k\overline{x_k} = |x_k|^2 = 27^2$

$$F'(x) = 5x^4, \qquad F'(x_k) = 5x_k^4 = -27 \cdot 5x_k^{-1}$$

$$x_k^m = 27^{m/5}\left(\cos\frac{(2k+1)m\pi}{5} + i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{5}\right)$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{x^2}{x^5+27} = \sum_{k=0}^{4} \frac{x_k^2}{(x-x_k)(-27\cdot 5x_k^{-1})} = -\frac{1}{135}\left(\frac{x_2^3}{x-x_2} + \sum_{k=0}^{1}\frac{x_k^3}{x-x_k} + \sum_{k=0}^{1}\frac{\overline{x_k}^3}{x-\overline{x_k}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{135}\left(\frac{-27^{3/5}}{x-\sqrt[5]{27}} + \sum\frac{x_k^3(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}^3(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})}\right) =$$

$$= -\frac{1}{135}\left(\frac{-27^{3/5}}{x-\sqrt[5]{27}} + \sum\frac{x(x_k^3+\overline{x_k}^3) - x_k^2x_k\overline{x_k} - \overline{x_k}^2\overline{x_k}x_k}{x^2 - x(x_k+\overline{x_k}) + x_k\overline{x_k}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{135}\left(\frac{-27^{3/5}}{x-\sqrt[5]{27}} + \sum\frac{x\cdot 2\cdot 27^{3/5}\cos\frac{(2k+1)3\pi}{5} - 27^2(x_k^2+\overline{x_k}^2)}{x^2 - x\cdot 2\cdot\sqrt[5]{27}\cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + 27^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{135}\left(\frac{-27^{3/5}}{x-\sqrt[5]{27}} + \sum\frac{x\cdot 2\cdot 27^{3/5}\cos\frac{(2k+1)3\pi}{5} - 2\cdot 27^{4/5}\cos\frac{(2k+1)2\pi}{5}}{x^2 - x\cdot 2\cdot\sqrt[5]{27}\cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + 27^2}\right) =$$

$$= \frac{27^{3/5}}{135}\left(\frac{1}{x-\sqrt[5]{27}} - 2\sum_{k=0,1}\frac{x\cos\frac{(2k+1)3\pi}{5} - \sqrt[5]{27}\cos\frac{(2k+1)2\pi}{5}}{x^2 - 2x\sqrt[5]{27}\cos\frac{(2k+1)\pi}{5} + 27^2}\right)$$

10.3.5 e

$$\frac{x^m}{x^{2n+1}-1}, \qquad m < 2n+1$$

Разложим над $\mathbb{C}$:
Корни многочлена $F(x) = x^{2n+1} - 1$ имеют вид:

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{2n+1}, \qquad k = 0, 1, ..., 2n$$

Они разбиваются на пары сопряжённых: x_k при $k = 1, 2, ..., n$, сопряжённые к ним и $x_0 = 1$

$$F'(x) = (2n+1)x^{2n}, \qquad F'(x_k) = (2n+1)x_k^{2n} = (2n+1)x_k^{-1}$$

$$f(x_k) = x_k^m = \cos\frac{2\pi km}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi km}{2n+1} = x_{km}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{x^m}{x^{2n+1}-1} = \frac{x_0^m}{(x-x_0)(2n+1)x_0^{-1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^m}{(x-x_k)(2n+1)x_k^{-1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{x_k}^m}{(x-\overline{x_k})(2n+1)\overline{x_k}^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x-1} + \sum\left(\frac{x_k^{m+1}}{x-x_k} + \frac{\overline{x_k}^{m+1}}{x-\overline{x_k}}\right)\right] = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{x-1} + \sum\frac{x_{k(m+1)}(x-\overline{x_k}) + \overline{x_{k(m+1)}}(x-x_k)}{x^2 - xx_k - x\overline{x_k} + x_k\overline{x_k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{x-1} + \sum\frac{x_{k(m+1)}x - x_{k(m+1)}\overline{x_k} + \overline{x_{k(m+1)}}x - \overline{x_{k(m+1)}}x_k}{x^2 - x(x_k+\overline{x_k}) + 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{x-1} + \sum\frac{x\left(x_{k(m+1)} + \overline{x_{k(m+1)}}\right) - \left(x_{km}x_k\overline{x_k} + \overline{x_{km}x_k}x_k\right)}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{x-1} + 2\sum\frac{x\cos\frac{2\pi k(m+1)}{2n+1} - \cos\frac{2\pi km}{2n+1}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1}\right)$$

10.3.6 f

$$\frac{x^m}{x^{2n+1}+1}, \qquad m < 2n+1$$

Разложим над $\mathbb{C}$:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$$

Корни многочлена $F(x) = x^{2n+1} + 1$ имеют вид:

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}, \qquad k = 0, 1, ..., 2n$$

Они разбиваются на:

- x_k при $k = 0, .., n-1$
- сопряжённые им
- $x_n = -1$

$$F'(x) = (2n+1)x^{2n}, \qquad F'(x_k) = -(2n+1)x_k^{-1}$$

$$x_k^m = \cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n+1} + i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{x^m}{x^{2n+1}+1} = \frac{x_n^m}{(x-x_n)(-(2n+1)x_n^{-1})} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k^m}{(x-x_k)(-(2n+1)x_k^{-1})} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{x_k}^m}{(x-\overline{x_k})(-(2n+1)\overline{x_k}^{-1})} =$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum\left(\frac{x_k^{(m+1)}}{x-x_k} + \frac{\overline{x_k}^{(m+1)}}{x-\overline{x_k}}\right)\right) =$$

$$= -\frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum\frac{x_k^{(m+1)}(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}^{(m+1)}(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum\frac{x(x_k^{(m+1)} + \overline{x_k}^{(m+1)}) - (x_k^m x_k\overline{x_k} + \overline{x_k}^m\overline{x_k}x_k)}{x^2 - x(x_k+\overline{x_k}) + x_k\overline{x_k}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + \sum\frac{2x\cos\frac{(2k+1)(m+1)\pi}{2n+1} - (x_k^m + \overline{x_k}^m)}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{x+1} + 2\sum\frac{x\cos\frac{(2k+1)(m+1)\pi}{2n+1} - \cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n+1}}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1}\right)$$

10.3.7 g

$$\frac{1}{x^{2n}-1}$$

Над $\mathbb{C}$:
Корни многочлена $F(x) = x^{2n} - 1$ имеют вид

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{2n} + i\sin\frac{2\pi k}{2n} = \cos\frac{\pi k}{n} + i\sin\frac{\pi k}{n}, \qquad k = 0, ..., 2n-1$$

Они разбиваются на x_k при $k = 1, ..., n-1$, сопряжённые им $\overline{x_k} = x_{2n-1-k}$, $x_0 = 1$ и $x_n = -1$

$$F'(x) = 2nx^{2n-1}, \qquad F'(x_k) = 2nx_k^{2n-1} = 2nx_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{(x-x_0)(2nx_0^{-1})} + \frac{1}{(x-x_n)(2nx_n^{-1})} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(x-x_k)(2nx_k^{-1})} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(x-\overline{x_k})(2n\overline{x_k}^{-1})} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{x_0}{x-x_0} + \frac{x_n}{x-x_n} + \sum\left(\frac{x_k}{x-x_k} + \frac{\overline{x_k}}{x-\overline{x_k}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum\frac{x_k(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum\frac{x_kx - x_k\overline{x_k} + \overline{x_k}x - \overline{x_k}x_k}{x^2 - xx_k - x\overline{x_k} + x_k\overline{x_k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum\frac{x(x_k+\overline{x_k}) - 2}{x^2 - x(x_k+\overline{x_k}) + 1}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \sum\frac{2x\cos\frac{\pi k}{n} - 2}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n} + 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x\cos\frac{\pi k}{n} - 1}{x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n} + 1}\right)$$

10.3.8 h

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

Корни многочлена $F(x)=x^{2n}+1$ имеют вид:

$$x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n},\qquad k=0,...,2n-1$$

Они разбиваются на x_k при $k=0,...,n-1$ и сопряжённые к ним

$$F'(x)=2nx^{2n-1},\qquad F'(x_k)=2nx_k^{2n-1}=-2nx_k^{-1}$$

$$x_k^m=\cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k^{2m}}{(x-x_k)(-2nx_k^{-1})}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{x_k}^{2m}}{(x-\overline{x_k})(-2n\overline{x_k}^{-1})}=-\frac{1}{2n}\sum\left(\frac{x_k^{2m+1}}{x-x_k}+\frac{\overline{x_k}^{2m+1}}{x-\overline{x_k}}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2n}\sum\frac{x_k^{2m+1}(x-\overline{x_k})+\overline{x_k}^{2m+1}(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})}=-\frac{1}{2n}\sum\frac{x(x_k^{2m+1}+\overline{x_k}^{2m+1})-(x_k^{2m}x_k\overline{x_k}+\overline{x_k}^{2m}\overline{x_k}x_k)}{x^2-x(x_k+\overline{x_k})+x_k\overline{x_k}}=$$
$$=-\frac{1}{2n}\sum\frac{2x\cos\frac{(2k+1)(2m+1)\pi}{2n}-(x_k^{2m}+\overline{x_k}^{2m})}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1}=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x\cos\frac{(2k+1)(2m+1)\pi}{2n}-\cos\frac{(2k+1)m\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1}$$

10.3.9 i

$$P=\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)...(x^2+n^2)}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:

$$P=\frac{1}{(x-x_0)(x-x_1)(x+x_1)(x-x_2)(x+x_2)...(x-x_n)(x+x_n)},\qquad x_k=\begin{cases}\sqrt{-k^2}=ik, & k>0\\ 0, & k=0\end{cases}$$

Обозначим знаменатель за $F(x)$
Обозначим $\prod=(x-x_0)(x+x_0)...(x-x_n)(x+x_n)$

$$F'(x)=$$
$$=1\cdot(x-x_1)(x+x_1)...(x-x_n)(x+x_n)+(x-x_0)\cdot1\cdot(x-x_1)...(x-x_n)(x+x_n)+\dots\dots+(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\cdot1=$$
$$=\prod_{i\neq0}+\sum_k\left(\prod_{i\neq k}\cdot(x+x_k)+\prod_{i\neq k}\cdot(x-x_k)\right)=\prod_{i\neq0}+\sum_k\left(\prod_{i\neq k}\cdot(x+x_k+x-x_k)\right)=$$
$$=\prod_{i\neq0}+\sum_k\left(\prod_{i\neq k}\cdot2\underbrace{x}_{x+x_0}\right)=\prod_{i\neq0}+2\sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k}$$

Все слагаемые, кроме k-го, содержат $x-x_k$
Обозначим $\prod^{(t)}=(x_t-x_0)(x_t+x_0)...(x_t-x_n)(x_t+x_n)$

$$F'(x_0)=\prod_{i\neq0}^{(0)}=(-x_1)x_1...(-x_n)x_n=(-1)^nx_1^2...x_n^2=(-1)^n(-1^2)...(-n^2)=1^2...n^2=(n!)^2$$

$$F'(x_p)=2\prod_{i\neq p}^{(p)}=2\prod_{t\neq p}\Big((ip-it)(ip+it)\Big)=2\prod_{t\neq p}\Big(-(p-t)(p+t)\Big)=(-1)^{n-1}\cdot2\prod_{t\neq p}(p^2-t^2)$$

По формуле Лагранжа,

$$P = \frac{1}{(x-x_0)\cdot\prod_{i\neq 0}}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)\cdot 2\prod_{i\neq k}^{(k)}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+x_k)\cdot 2\prod_{i\neq k}^{(k)}} =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2 x} + \sum \frac{1}{(-1)^{n-1}\cdot 2\prod_{t\neq k}(k^2-t^2)}\left(\frac{1}{x-x_k}+\frac{1}{x+x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2 x} + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum\frac{1}{\prod_{t\neq k}(k^2-t^2)}\cdot\frac{x+x_k+x-x_k}{x^2-x_k^2} = \frac{1}{(n!)^2 x} + (-1)^{n-1}\sum\frac{1}{\prod_{t\neq k}(k^2-t^2)}\cdot\frac{x}{x^2+k^2}$$

10.4 628

Пусть $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$. Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

10.4.1 a

$$\sum\frac{1}{x-x_i} = \frac{(x-x_2)...(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)+\dots\dots + (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1})}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}$$

$$\varphi'(x) = \underbrace{(x-x_1)'}_{=1}(x-x_2)...(x-x_n)+\dots\dots\dots + (x-x_1)(x-x_2)...\underbrace{(x-x_n)'}_{=1}$$

$$\sum = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

10.4.2 b

$$\sum\frac{x_i}{x-x_i} = \frac{x_1(x-x_2)...(x-x_n)+(x-x_1)x_2...(x-x_n)+\dots\dots + (x-x_1)...(x-x_{n-1})x_n}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)} =$$

$$= \frac{\left(x_1\prod_{i\neq 1}+x_2\prod_{i\neq 2}+\dots\dots + x_n\prod_{i\neq n} - x\prod_{i\neq 1} - \dots\dots - x\prod_{i\neq n}\right) + x\prod_{i\neq 1}+\dots\dots + x\prod_{i\neq n}}{\varphi(x)} =$$

$$= \frac{-\left(\overbrace{(x-x_1)\prod_{i\neq 1}+\dots\dots + (x-x_n)\prod_{i\neq n}}^{n}\right) + x(\prod_{i\neq 1}+...+\prod_{i\neq n})}{\varphi(x)} = \frac{-n\varphi(x)+x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

10.4.3 c

$$\sum\frac{1}{(x-x_i)^2} =$$

$$= \frac{(x-x_2)^2...(x-x_n)^2+(x-x_1)^2...(x-x_n)^2+\dots\dots\dots + (x-x_1)^2(x-x_2)^2...(x-x_{n-1})^2}{(x-x_1)^2...(x-x_n)^2} =$$

$$= \frac{\sum_t\left(\prod_{i\neq t}\right)^2}{\varphi^2(x)}$$

$$(\varphi')^2(x) = \left(\prod_{i\neq 1}+...+\prod_{i\neq n}\right)^2 = \sum_{k,p}\prod_{i\neq k}\prod_{i\neq j} = \sum_t\left(\prod_{i\neq t}\right)^2 + \sum_{k\neq p}\left[\left(\prod_{i\neq k,p}\right)^2(x-x_p)(x-x_k)\right]$$

$$\varphi''(x) = \prod_{i\neq 1,2}+...+\prod_{i\neq 1,n}+\dots\dots\dots + \prod_{i\neq n,1}+...+\prod_{i\neq n,n-1} = \sum_{k\neq p}\prod_{i\neq k,p}$$

$$\varphi(x)\varphi''(x) = \prod\cdot\sum_{k\neq p}\prod_{i\neq k,p} = \sum\left[\prod\prod_{i\neq k,p}\right] = \sum_{k\neq p}\left[\left(\prod_{i\neq k,p}\right)^2(x-x_k)(x-x_p)\right]$$

$$\sum = \frac{(\varphi')^2(x)-\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi^2(x)}$$

Глава 11

ДЗ к пересдаче

11.1 Вычисление варианта

$$var = (numbers \mod 2) + 1$$

С	е	н	и	ч	е	н	к	о	в		П	ё	т	р
19	6	15	10	25	6	15	12	16	3		17	7	20	18

$$numbers = 19 + 6 + 15 + 10 + 25 + 6 + 15 + 12 + 16 + 3 + 17 + 7 + 20 + 18 = 189$$

$$numbers \mod 2 = 1$$

$$var = 1 + 1 = 2$$

11.2 1

Привести к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичную форму

11.2.1 1

$$Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & . & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \frac{1}{2}$

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dim\ker(A - \frac{1}{2}I) = n - \operatorname{rk}(A - \frac{1}{2}I) = n - 1$$

- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr} A \implies \lambda = n - (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2n-n+1}{2} = \frac{n+1}{2}$

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{2} + \frac{(n+1)x_n^2}{2}$$

11.2.2 2

$$\sum_{i<j} x_i x_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & . & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$A + \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dim\ker = n - \operatorname{rk}(A - \frac{1}{2}I) = n - 1$$

- $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$

$$\lambda = \operatorname{tr} A + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$$

$$Q = -\sum_{i}^{n-1} \frac{x_i^2}{2} + \frac{(n-1)x_n^2}{2}$$

11.3 2

11.3.1 1

$$\frac{x^3}{x^9 - 1}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:
Корни многочлена $F(x) = x^9 - 1$ – это корни из единицы девятой степени:

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{9} + i\sin\frac{2\pi k}{9}, \qquad k = 0, 1, ..., 8$$

При этом, $x_0 = 1$, а остальные разбиваются на пары сопряжённых: $\overline{x_k} = x_{9-k}$

$$F'(x) = 9x^8, \qquad F'(x_k) = 9x_k^8 = 9x_k^{-1}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{x^3}{x^9-1} = \sum_{k=0}^{8} \frac{x_k^3}{(x - x_k)(9x_k^{-1})} = \frac{1}{9}\left(\frac{x_0^4}{x - x_0} + \sum_{k=0}^{8}\left(\frac{x_k^4}{x - x_k} + \frac{\overline{x_k}^4}{x - \overline{x_k}}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \sum \frac{x_k^4(x - \overline{x_k}) + \overline{x_k}^4(x - x_k)}{(x - x_k)(x - \overline{x_k})}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \sum \frac{x(x_k^4 + \overline{x_k}^4) - (x_k^3 x_k\overline{x_k} + \overline{x_k}^3\overline{x_k}x_k)}{x^2 - x(x_k + \overline{x_k}) + x_k\overline{x_k}}\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \sum \frac{2x\cos\frac{8\pi k}{9} - (x_k^3 + \overline{x_k}^3)}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{9} + 1}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \sum \frac{2x\cos\frac{8\pi k}{9} - 2\cos\frac{6\pi k}{9}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{9} + 1}\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + 2\sum \frac{x\cos\frac{8\pi k}{9} - \cos\frac{2\pi k}{3}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{9} + 1}\right)$$

11.3.2 2

$$\frac{x^3}{x^9 + 1}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:
Корни многочлена $F(x) = x^9 + 1$ имеют вид

$$x_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{9} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{9}, \qquad k = 0, 1, ..., 8$$

Они разбиваются на пары сопряжённых: $\overline{x_k} = x_{8-k}$, кроме $x_4 = -1$

$$F'(x) = 9x^8, \qquad F'(x_k) = 9x_k^8 = 9\underbrace{x_k^9}_{=1}x_k^{-1} = -9x_k^{-1}$$

$$x_k + \overline{x_k} = 2\operatorname{Re} x_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{9}, \qquad x_k\overline{x_k} = |x_k|^2 = 1, \qquad x_k^m = \cos\frac{(2k+1)m\pi}{9} + i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{9}$$

По формуле Лагранжа,

$$\frac{x^3}{x^9+1} = \sum_{k=0}^{8} \frac{x_k^3}{(x-x_k)(-9x_k^{-1})} = -\frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{x_k^4}{x-x_k} + \frac{x_4^4}{x-x_4} + \sum_{k=0}^{3}\frac{\overline{x_k}^4}{x-\overline{x_k}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^{3}\frac{x_k^4(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}^4(x-x_4)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})}\right) = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^{3}\frac{x(x_k^4+\overline{x_k}^4) - x_k^3x_k\overline{x_k} - \overline{x_k}^3\overline{x_k}x_k}{x^2 - x(x_k+\overline{x_k}) + x_k\overline{x_k}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^{3}\frac{2x\cos\frac{(2k+1)4\pi}{9} - (x_k^3+\overline{x_k}^3)}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{9} + 1}\right) = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+1} + 2\sum_{k=0}^{3}\frac{x\cos\frac{4(2k+1)\pi}{9} - \cos\frac{3(2k+1)\pi}{9}}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{9} + 1}\right)$$

11.4 3

11.4.1 1

Утверждение 2. Пусть конечная группа G состоит из чётного числа элементов. Доказать, что существует элемент порядка 2

Доказательство. Каждый элемент в группе имеет обратный
Единица обратная сама к себе, остальные разбиваются на пары обратных
Значит, чтобы группа имела чётное число элементов, какой-то элемент (кроме 1) должен совпасть со своим обратным, то есть

$$a = a^{-1} \implies 1 = aa^{-1} = aa = a^2 \implies \mathrm{ord}(a) = 2$$

□

11.4.2 2

Утверждение 3. Пусть группа G не имеет нетривиальных подгрупп. Доказать, что G конечна и $|G|$ простое

Доказательство.

- Докажем, что G конечна. Пусть это не так.
  Пусть $C = \{\, \langle g\rangle \mid g \in G \,\}$ – множество всех циклических подгрупп G
  Возможно два случая:
  - $|C| = \infty \implies G$ содержит бесконечное число циклических подгрупп
  - C – конечно (некоторые из $\langle g\rangle$ совпали)
    Пусть $C = \{\, H_1, H_2, ..., H_n \,\}$
    Хотя бы одна из них бесконечна, пусть это $H_1 = \langle g_1\rangle$
    Она изоморфна $\mathbb{Z}$ и содержит бесконечное число циклических подгрупп
    Значит и G содержит бесконечное число циклических подгрупп

  При этом, единственная тривиальная циклическая подгруппа – $\langle e\rangle$ – $\lightning \implies G$ конечна
- Докажем, что $|G| = p \in \mathbb{P}$
  Пусть это не так, то есть $|G| = n$, где $n = pm$
  Возьмём $a \in G, \quad a \neq e \implies a^{pm} = e$
  Рассмотрим два случая:
  - $a^p \neq e$
    Возьмём циклическую подгруппу $H = \langle a^p\rangle$
    $1 < |H| \leq m < pm$ – $\lightning$
  - $a^p = e$
    Возьмём циклическую подгурппу $H = \langle a\rangle$
    $1 < |H| \leq p < pm$ – $\lightning$

□

11.5 4

11.5.1 1

Пусть $V = \mathbb{R}^4$, W – подпространство V, натянутое на векторы $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$, U – подпространство V, натянутое на векторы $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\3\\2\\2\end{pmatrix}$. Найти размерность и базис для $W \cap U$, $W + U$. Является ли $W + U$ прямой суммой?

- $W \cap U$
  Возьмём $v \in W \cap U$

$$v \in W \implies v = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \qquad v \in U \implies v = c\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}3\\3\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b-3c-3d=0\\ a-c-3d=0\\ a-b+c-2d=0\\ 2a-b-2d=0\end{cases} \qquad \begin{cases} a=c+3d\\ c+3d-3c-3d=0\\ c+3d-b+c-3d=0\\ 2c+6d-b-2d=0\end{cases} \qquad \begin{cases}-2c=0\\ \dots\end{cases} \qquad a=b=c=d=0$$

$$W \cap U = \{\,0\,\}, \qquad \dim(W \cap U) = 0$$

- $W + U$

$$W + U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W \cap U = \{\,0\,\} \implies W \oplus U, \qquad \dim(W \cap U) = \dim V = 4$$

  Значит, этот набор и является базисом

11.5.2 2

Пусть $V = \mathbb{R}^4$, W – подпространство V, натянутое на векторы $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\2\end{pmatrix}$, U – подпространство V, натянутое на векторы $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}$

Найти размерность и базис для $W \cap U$ и $W + U$. Является ли $W + U$ прямой суммой?

- $W \cap U$
  Возьмём $v \in W \cap U$

$$v \in W \implies v = a\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\2\end{pmatrix}, \qquad v \in U \implies v = c\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\5\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -b+c-3d=0\\ a-2b-c-3d=0\\ -a+2b+c-2d=0\\ a+2b-5c-d=0\end{cases} \qquad \begin{cases} b=c-3d\\ a-2c+6d-c-3d=0\\ -a+2c-6d+c-2d=0\\ a+2c-6d-5c-d=0\end{cases} \qquad \begin{cases} a-3c+3d=0\\ -a+3c-8d=0\\ a-3c-7d=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3c - 3d \\ -3c + 3d + 3c - 8d = 0 \\ 3c - 3d - 3c - 7d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -5d = 0 \\ -10d = 0 \end{cases} \qquad a = b = c = d = 0$$

$$W \cap U = \{\, 0 \,\}, \qquad \dim(W \cap U) = 0$$

- $W + U$

$$W + U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W \cap U = \{\, 0 \,\} \implies W \oplus U \implies \dim(W + U) = 4$$

Значит, этот набор будет базисом

11.6 ДЗ к пересдаче. Дубль 2

11.6.1 Квадратичные формы

1

$$Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & . & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & . & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & . & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

- $\lambda = \frac{1}{2}$

$$A - \frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \\ . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен 1. Значит, размерность ядра равна $n - 1$

- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr} A = n$

$$\lambda = n - (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$Q = \sum_{i}^{n-1} \frac{{x_i}^2}{2} + \frac{(n+1)x_n^2}{2}$$

11.6.2 2

$$Q = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & . & \frac{1}{2} \\ . & . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$A + \frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \\ . & . & . \\ \frac{1}{2} & . & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен 1, значит, размерность ядра равна $n - 1$

- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr} A = 0$

$$\lambda = \frac{n-1}{2}$$

$$Q = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{2} + \frac{(n-1)x_n^2}{2}$$

11.7 Разложение на простейшие

11.7.1 1

$$\frac{x^3}{x^9 - 1}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:
Корни многочлена $F(x) = x^9 - 1$ – это корни из единицы 9 степени:

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{9} + i\sin\frac{2\pi k}{9}, \qquad k = 0, ..., 8$$

При этом, $x_0 = 1$, а остальные разбиваются на пары сопряжённых: $\overline{x_k} = x_{9-k}$

$$F'(x) = 9x^8, \qquad F'(x_k) = 9x_k^8 = 9x_k^9 x_k^{-1} = 9x_k^{-1}$$

$$x_k + \overline{x_k} = 2\operatorname{Re} x_k = 2\cos\frac{2\pi k}{9}, \qquad x_k\overline{x_k} = |x_k|^2 = 1, \qquad x_k^m = \cos\frac{2\pi km}{9} + i\sin\frac{2\pi km}{9}$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\frac{x^3}{x^9-1} = \sum_{k=0}^{8} \frac{x_k^3}{(x-x_k)(9x_k^{-1})} = \frac{1}{9}\left(\frac{x_0^4}{x-x_0} + \sum_{k=1}^{4}\frac{x_k^4}{x-x_k} + \sum_{k=1}^{4}\frac{\overline{x_k}^4}{x-\overline{x_k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \sum_{k=1}^{4}\frac{x_k^4(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}^4(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \sum_{k=1}^{4}\frac{x(x_k^4+\overline{x_k}^4) - (x_k^3 x_k\overline{x_k} + \overline{x_k}^3\overline{x_k}x_k)}{x^2 - x(x_k+\overline{x_k}) + x_k\overline{x_k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + \sum_{k=1}^{4}\frac{2x\cos\frac{8\pi k}{9} - (x_k^3+\overline{x_k}^3)}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{9} + 1}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} + 2\sum_{k=1}^{4}\frac{x\cos\frac{8\pi k}{9} - \cos\frac{2\pi k}{3}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{9} + 1}\right)$$

11.7.2 2

$$\frac{x^3}{x^9 + 1}$$

Разложим над $\mathbb{C}$:
Корни многочлена $F(x) = x^9 + 1$ имеют вид

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{9} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{9}, \qquad k = 0, ..., 8$$

При этом, $x_4 = -1$, а остальные разбиваются на пары сопряжённых: $\overline{x_k} = x_{9-k}$

$$F'(x) = 9x^8, \qquad F'(x_k) = 9x_k^8 = 9x_k^9 x_k^{-1} = -9x_k^{-1}$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\frac{x^3}{x^9+1} = \sum_{k=0}^{8} \frac{x_k^3}{(x-x_k)(-9x_k^{-1})} = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^{3}\frac{x_k^4(x-\overline{x_k}) + \overline{x_k}^4(x-x_k)}{(x-x_k)(x-\overline{x_k})}\right) =$$

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+1} + \sum_{k=0}^{3}\frac{x(x_k^4+\overline{x_k}^4) - (x_k^3+\overline{x_k}^3)}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{9} + 1}\right) = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x+1} + 2\sum_{k=0}^{3}\frac{x\cos\frac{4(2k+1)\pi}{9} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{3}}{x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{9} + 1}\right)$$

11.8 Теория групп

11.8.1 1

Утверждение 4. Пусть конечная группа G состоит из чётного числа элементов. Доказать, что существует элемент порядка 2

Доказательство. Каждый элемент группы имеет обратный, при этом обратный к единице – это единица. Значит, все элементы, единицы, разбиваются на пары обратных.
Чтобы группа содержала чётное число элементов, должен быть ещё один элемент, обратный сам к себе, т. е. $\exists\, a \neq e: \quad a^{-1} = a \iff aa^{-1} = e \iff a^2 = e \iff \operatorname{ord}(a) = 2$ □

11.8.2 2

Утверждение 5. Пусть группа G не имеет нетривиальных подгрупп. Доказать, что G конечна и $|G|$ простое

Доказательство.

- Докажем, что G циклическая:
  Пусть это не так. Тогда порождающее множество G состоит из нескольких элементов. Возьмём из него $a \neq b$
  Рассмотрим циклические подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$. Они не равны (т. к. $a \notin \langle b \rangle$ и наоборот). Значит, хотя бы одна из них нетривиальна – $\lightning$
- Докажем, что G конечна:
  G циклическая $\implies G \sim \begin{cases} \mathbb{Z}, & G \text{ бесконечна} \\ \mathbb{Z}_n, & n = \operatorname{ord} G < \infty \end{cases}$
  $\mathbb{Z}$ содержит нетривиальные подгруппы, значит G конечна и изоморфна $\mathbb{Z}_n$
- Докажем, что $n \in \mathbb{P}$:
  Пусть это не так, и $n = mp$
  Зафиксируем элемент $a \in G$, $a \neq e$. Тогда $a^{pm} = e$. Возможно два случая:
  - $a^p = e$
    Рассмотрим циклическую подгруппу $\langle a \rangle$
    $$1 < \operatorname{ord}(\langle a \rangle) \leq p < mp \implies \langle a \rangle \text{ нетривиальна}$$
  - $a^p \neq e$
    Рассмотрим циклическую подгруппу $\langle a^p \rangle$
    $$1 < \operatorname{ord} \langle a^p \rangle \leq m < mp \implies \langle a^p \rangle \text{ нетривиальна}$$

  В обоих случаях получили противоречие, значит, $n \in \mathbb{P}$

□

11.9 Базисы подпространств

subsection1
Пусть $V = \mathbb{R}^4$, W – подпространство V, натянутое на векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

U – подпространство V, натянутое на векторы

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найти размерность и базис для $W \cap U$ и $W + U$. Является ли $W + U$ прямой суммой?

- $W \cap U$
  Возьмём $v \in U \cap W$

$$v \in W \implies v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v \in U \implies v = c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b - 3c - 3d = 0 \\ a - c - 3d = 0 \\ a - b + c - 2d = 0 \\ 2a - b - 2d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = c + 3d \\ c + 3d + b - 3c - 3d = 0 \\ c + 3d - b + c - 2d = 0 \\ 2c - 6d - b - 2d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b - 2c = 0 \\ -b + 2c + d = 0 \\ -b + 2c - 8d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2c \\ -2c + 2c + d = 0 \\ -2c + 2c - 8d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = c \\ b = 2c \\ d = 0 \end{cases}$$

$$U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \dim(W \cap U) = 1$$

- $W + U$
  $\dim(W \cap U) \neq 0 \implies$ сумма не прямая

$$W \cap U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

  По формуле Грассмана, $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3$
  Значит, нужно исключить один вектор

$$\begin{cases} a + b + 3c = 3 \\ a + c = 3 \\ a - b - c = 2 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3 - c \\ 3 - c + b + 3c - 3 = 0 \\ 3 - c - b - c - 2 = 0 \\ 6 - 2c - b - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2c = 0 \\ -b - 2c + 1 = 0 \\ -b - 2c + 4 = 0 \end{cases} \qquad b = -2c$$

  Четвёртый вектор выражается через остальные, значит его можно исключить. Базис $U + W$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11.9.1 2

Пусть $V = \mathbb{R}^4$, W – подпространство V, натянутое на векторы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

U – подпространство V, натянутое на векторы

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найти размерность и базис для $W \cap U$ и $W + U$. Является ли $W + U$ прямой суммой?

- $W \cap U$

  Возьмём $v \in W \cap U$

$$v \in W \implies v = a\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\2\end{pmatrix}, \qquad v \in U \implies v = c\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\5\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-b+c-3d=0\\a-2b-c-3d=0\\-a+2b+c-2d=0\\a+2b-5c-d=0\end{cases} \qquad \begin{cases}b=c-3d\\a-2c+6d-c-3d=0\\-a+2c-6d+c-2d=0\\a+2c-6d-5c-d=0\end{cases} \qquad \begin{cases}b=c-3d\\a-3c+3d=0\\-a+3c-8d=0\\a-3c-7d=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=3c-3d\\-3c+3d+3c-8d=0\\3c-3d-3c-7d=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a=3c\\b=c\\d=0\end{cases}$$

$$W \cap U = \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \dim(W \cap U) = 1$$

- $W + U$

  $\dim(W \cap U) \neq 0 \implies$ сумма не прямая

  По формуле Грассмана,

$$\dim(W+U) = \dim U + \dim W - \dim(W \cap U) = 3$$

$$W + U = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

  Базис должен состоять из трёх векторов, значит один ветор надо исключить

$$\begin{cases}-a-b+3c=0\\-2a+b+3c=1\\2a-b+2c=-1\\2a+5b+c=1\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-b+3c\\2b-6c+b+3c=1\\-2b+6c-b+2c=-1\\-2b+6c+5b+c=1\end{cases} \qquad \begin{cases}3b-3c-1=0\\-3b+8c+1=0\\3b+7c-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\b=\frac{1}{3}\\c=0\end{cases}$$

  Первый вектор выражается через остальные. Базис $W + U$:

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$