Оглавление

Глава 1

Полиномы

1.1 Продолжение чего-то

Следствие. c – корень $P(x)$, $P(c) = P'(c) = ... = P^{(k-1)}(c) = 0$, $P^{(k)} \neq 0$. Тогда k – показатель кратности корня c

Доказательство. Индукция.
База: $k = 1$, следует из теоремы

$$k = 1 \quad P(c) = 0,\ P'(c) \neq 0 \implies c \text{ – простой корень}$$

Переход: $k - 1 \to k,\ k \geq 2$
Положим $P_1(x) = P'(x)$, c – корень $P_1(x)$. Докажем, что показатель кратности c для P_1 на 1 меньше, чем для P. Пусть $P(x) = (x-c)^m Q(x)$, $Q(x) \not\vdots\ x - c$

$$\begin{aligned} P_1(x) = \Big((x-c)^m Q(x)\Big)' = \Big((x-c)^m\Big)' \cdot Q(x) + (x-c)^m \cdot Q'(x) = \\ = \underbrace{m(x-c)^{m-1} \underbrace{Q(x)}_{\not\vdots x-c}}_{\vdots (x-c)^{m-1},\ \not\vdots (x-c)^m} + (x-c)^m Q'(x) \implies P_1(x) \vdots (x-c)^{m-1},\ \not\vdots (x-c)^m \end{aligned}$$

□

Теорема 1 (Формула Тейлора). Пусть $P \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P = n$. Тогда

$$P(x) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(x-c) + ... + \frac{P^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + ... + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Доказательство.

1. Докажем, что $\exists d_0, d_1, ..., d_n : P(x) = d_0 + d_1(x-c) + ... + d_n(x-c)^n$:
   Индукция:
   - База: $\deg P = 0$ или $\deg P = -\infty$, $P(x)$ – костанта $\implies P(x) = d_0$
   - Переход: $n - 1 \to n$
     Разделим $P(x)$ на $x - c$ с остатком:
     $$P(x) = Q(x) \cdot (x-c) + r, \quad \deg Q = n - 1$$
     По индукционному предположению $\exists c_i : Q(x) = c_0 + c_1(x-c) + ... + c_{n-1}(x-c)^{n-1}$
     $$P(x) = c_0(x-c) + c_1(x-c)^2 + ... + c_{n-1}(x-c)^n + r$$

Подойдёт $d_0 = r$, $d_i = c_{i-1}$, при $i \geq 1$

2. Докажем, что $d_i = \frac{P^{(i)}(c)}{i!}$, $i \geq 1$, $d_0 = P(c)$

$$\left((x-c)^i\right)^{(k)} = \begin{cases} 0 & i < k \\ k(k-1)...1 & i = k \\ i(i-1)...(i-k+1)(x-c)^{i-k} & i > k \end{cases}$$

$$\left((x-c)^i\right)^k \Big|_{x=c} = 0$$

$$P^{(k)}(c) = d_0 0 + ... + d_{k-1}0 + d_k \cdot k! + d_{k+1}0 + ...$$

$$d_k = \frac{P^{(k)}(c)}{k!}$$

□

1.2 §8. Поле частных области целостности

Примеры.

1. $A = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$
2. A – кольцо многочленов над полем. K – поле рациональных функций $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Обозначение. A – область целостности. M – множество пар (a, b), где $b \neq 0$
ρ – отношение эквивалентности на M, заданное правилом $(a, b)\ \rho\ (c, d)$, если $ad = bc$

Лемма 1. ρ – отношение эквивалентности

Доказательство.

- Рефлексивность: $ab = ab \implies (a, b)\ \rho\ (a, b)$
- Симметричность: $(a, b)\ \rho\ (c, d) \implies ad = bc \implies cb = ad \implies (c, d)\ \rho\ (a, b)$
- Транзитивность:

$$\left.\begin{matrix} (a, b)\ \rho\ (c, d) \\ (c, d)\ \rho\ (e, f) \end{matrix}\right\} \stackrel{?}{=} (a, b)\ (\ e, f)$$

$$0 = (ad - bc)f + (cf - de)b = adf - bde = d(af - be) \underset{\text{обл. цел.}}{\implies} af = be$$

□

Определение 1. Пусть (a, b), $(c, d) \in M$. Их суммой и произведением называются пары $(ad + bc, bd)$, $(ac, bd) \in M$

Лемма 2. Пусть $u, v, u', v' \in M$, $u\ \rho\ u'$, $v\ \rho\ v'$. Тогда $(u + v)\ \rho\ (u' + v')$, $(uv)\ \rho\ (u'v')$

Доказательство. Отношение ρ транзитивно, значит достаточно проверить, что $v \rho v' \implies (u + v)\ \rho\ (u + v')$, $(uv)\ \rho\ (uv')$ и $u\ u' \implies (u + v)\ \rho\ (u' + v)$, $(uv)\ \rho\ (u'v)$
Пусть $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, $v' = (c', d')$, $cd' = c'd$

$$(ad + bc)bd' - bd(ad' + bc') = b^2(cd' - dc') = 0$$

$$ac \cdot bd' - bd \cdot ac' = ab(cd' - dc') = 0$$

$\square$

Следствие. Операции сложения и умножения можно определить на классах эквивалентности

Теорема 2. Пусть A – область целостности с единицей. K – множество классов эквивалентности множества M по отношению ρ с определёнными выше операциями сложения и умножения. Тогда K – поле

Определение 2. K называется полем частных A

Доказательство. $\overline{x}$ – класс x

1. Ассоциативность сложения:

$$x = (a, b),\ \ y = (c, d),\ \ z = (e, f)$$

$$x + y = (ad + bc, bd)$$

$$(x + y) + z = (ad + bd, bd) + (e, f) = ((ad + bc) \cdot f + bd \cdot e, bd \cdot f) = (adf + bcf + bde, bdf)$$

$$(y + z) = (cf + de, df)$$

$$x + (y + z) = (a, b) + (cf + de, df) = (adf + b(cf + de), bdf) = (adf + bcf + bde, bdf)$$

2. Нейтральный по сложению: $0 = \overline{(0, 1)}$
   Пусть $x = (a, b)$

$$x + (0, 1) = (a, b) + (0, 1) = (a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1) = (a, b) = x$$

$$(0, 1) + x = (0, 1) + (a, b) = (0 \cdot b + 1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = x$$

   Докажем, что $b \neq 0 \implies \overline{(0, b)} = 0$. То есть, докажем, что $(0, b)\ \rho\ (0, 1)$:

$$0 \cdot 1 = b \cdot 0 \implies (0, b)\ \rho\ (0, 1) \implies \overline{(o, b)} = 0$$

   Докажем, что $\overline{(a, b)} = 0 \implies a = 0$:

$$(a, b)\ \rho\ (0, 1) \implies a \cdot 1 = b \cdot 0 = 0 \implies a = 0$$

3. Оратный по сложению. Проверим, что $\overline{(-a, b)} = -\overline{(a, b)}$:

$$(-a, b) + (a, b) = (-ab + ba, bb) = (0, b^2) = 0$$

$$(a, b) + (-a, b) = (ab + b(-a), bb) = (0, b^2) = 0$$

4. Коммутативность сложения, дистрибутивность, ассоциативность умножения, коммутативность умножения – упражненеия

5. Нейтральный по умножению: $1 = \overline{(1, 1)}$
   Пусть $x = (a, b)$

$$x \cdot (1, 1) = (a, b) \cdot (1, 1) = (a \cdot 1 + b \cdot 1) = (a, b) = x \implies \overline{x \cdot (1, 1)} = \overline{x}$$

   Докажем, что $\forall b \neq 0$ выполнено $\overline{(b, b)} = 1$: (не докажем)

6. Обратный по умножению:
   Пусть $\overline{(a, b)} \neq 0$. Докажем, что $\overline{(b, a)} = \overline{(a, b)^{-1}}$:

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(ab, ab)} = 1$$

$\square$

<ins>Переход к стандартным обозначениям</ins>: Вложим A в K по правилу $a \mapsto \overline{(a,1)}$
Сложение, умножение согласованы:

$$(a,1)+(b,1)=(a\cdot 1+1\cdot b, 1\cdot 1)=(a+b,1)$$

$$(a,1)\cdot(b,1)=(ab,1\cdot 1)=(ab,1)$$

Проверим, что $(a,b)=a:b$, то есть

$$\overline{(a,b)}\cdot b=a$$

$$(a,b)\cdot(b,1)=(ab,b)$$

$$ab\cdot 1=ba \implies (ab,b)\ \rho\ (a,1) \implies (\overline{ab},b)\ \rho\ a$$

Класс $\overline{(a,b)}$ записывают как $\frac{a}{b}$

1.3 §9. Поле рациональных функций

Определение 3. Пусть K – поле. Полем рациональных функций над K называется поле частных кольца $K[x]$

Обозначение. $K(x)$

Пример.

$$x^2+1\in\mathbb{R}[x],\ \in\mathbb{R}(x)$$

$$\frac{x^2+1}{x+2}\in\mathbb{R}(x)$$

Определение 4. Элементы $K(x)$ называются рациональными функциями (над K) или рациональными дробями (над K)