

Оглавление

0.1	Длина кривой	1
0.2	Натуральная параметризация	3
0.3	Репёр Френе	4

0.1 Длина кривой

Разделим кривую на кусочки:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Найдём длину ломаной:

$$\sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| - \text{интегральная сумма}$$

Длина кривой – предел интегральных сумм

Определение 1.

$$\int := \lim_{\max\{t_i - t_{i-1}\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})|$$
$$\int := \sup \sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})|$$

Замечание. Определения равносильны (в предположении, что предел существует)

Доказательство.

- $\sup \geq \lim$ – очевидно

- $\lim \geq \sup$

\sup – тоже какой-то частичный предел

Пусть есть последовательность разбиений таких, что длина ломаной стремится к \sup

Разобьём максимальную (по длине) t_i на n равных частей

При этом, по неравенству треугольника, длина ломаной не уменьшилась, а $\max |t_i - t_{i-1}|$ теперь стремится к нулю

□

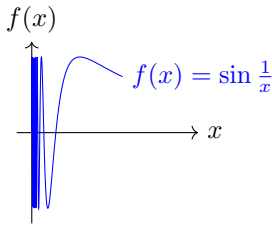
Определение 2. Кривая называется спрямляемой, если $\int < \infty$

Замечание. Тогда \sup можно заменить на $\overline{\lim}$

Для верхнего предела верно рассуждение о равносильности

Пример (неспрямляемой кривой).

$$y = \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1)$$



Теорема 1. f непр. дифференц. на $[a, b] \implies f$ спрямляема и

$$\int_a^b |f'(t)| dt$$

Примечание (геометрический смысл). $|f'(t)|$ – скалярная функция скорости, её первообразная – перемещение

Доказательство. Докажем формулу. Из неё будет следовать, что кривая спрямляема (производная непрерывна, а у непрерывной функции всегда есть конечный интеграл по конечному промежутку)

$$\left| \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| \right| \quad (1)$$

Хотим доказать, что это меньше 2ε
Обозначим

$$\Delta_i t := t_i - t_{i-1}, \quad \Delta_i f := f(t_i) - f(t_{i-1}), \quad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\begin{aligned} (1) & \stackrel{\pm \sum |f'(\tau_i)| \Delta_i t}{=} \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t + \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \\ & \leq \underbrace{\left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t \right|}_{:=I} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n (f'(\tau_i) \Delta_i t - |\Delta_i f|) \right|}_{:=II} \end{aligned}$$

- $I < \varepsilon$ (фиксируем ε и по нему подбираем мелкость разбиения)
-

$$\begin{aligned} II &= \sum_{i=1}^n \left(|f'(\tau_i)| \Delta_i t - |\Delta_i f| \right) \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{i=1}^n \left| f'(\tau_i) \Delta_i t - \Delta_i f \right| = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\tau_i) dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(\tau_i) - f'(t)| dt \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt = \sum \varepsilon \cdot \Delta_i t = \\ &= \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

$$|f'(\tau_i) - f'(t)| < \varepsilon \text{ при достаточно мелком разбиении} \quad (2)$$

Воспользовались равномерной непрерывностью $f'(t)$:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

□

Способы задания кривой.

1. Явно:
 $y = f(x)$ (плоская кривая)

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

2. Явно в полярных координатах:

$$\begin{aligned} r &= r(\varphi) \\ x &= r(\varphi) \cos \varphi, & y &= r(\varphi) \sin \varphi \\ x'_\varphi &= r' \cos \varphi - r \sin \varphi, & y'_\varphi &= r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2 + y'^2} &= \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi - 2r'r \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \varphi + 2r'r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{r'^2 + r^2} \end{aligned}$$

$$\int = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2} \, d\varphi$$

3. Неявно:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$F(x, y) = 0$$

Воспользуемся теоремой 2:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{кроме } x = \pm 1, \, y = 0$$

$$\int = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$$

$$f'(x) = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$\int = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{F'^2_x}{F'^2_y}} \, dx$$

Теорема 2 (о неявной функции). Если $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ в окрестности какой-то точки, то

$$\text{в нек. } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \exists f : F(x, f(x)) = 0$$

То есть $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, dt$$

0.2 Натуральная параметризация

Определение 3. Параметризация $\vec{f}(t)$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Теорема 3. Натуральная параметризация существует и единственна (с точностью начального момента времени и направления обхода кривой)

Доказательство.

- Существование

$$s(t) := \int_{t_0}^t |f'(\tau)| \, d\tau \implies s'(t) = |f'(t)|$$

Пусть $t(s) := \varphi(s)$, $\varphi = s^{-1}$

$$t'(s) = \varphi'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|f'(t)|}$$

Пусть $\vec{g}(s) := \vec{f}(\varphi(s))$

$$g'(s) = f'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(t)|} = \frac{f'(\varphi(s))}{|f'(\varphi(s))|}$$

$$|g'(s)| = \left| \dots \right| = 1 \implies s - \text{натур. параметр}, \quad g(s) - \text{натур. параметризация}$$

- Единственность

Пусть s и t – натуральные параметры

$$g(s) = f(\varphi(s)), \quad t = \varphi(s)$$

$$1 = |g'(s)| = |f'(t) \cdot \varphi'(s)| = |f'(t)| \cdot |\varphi'(s)|$$

При этом, $|f'(t)| = 1$, т. к. t – натур.

$$\implies |\varphi'(s)| = 1 \implies \varphi'(s) = \pm 1 \implies \varphi(s) = \pm s + \text{const}$$

□

0.3 Репёр Френе

Репер \equiv правая тройка ортонормированных векторов (зависит от t)

Пусть s – натуральный параметр

$$\vec{v} := f'(s), \quad |\vec{v}(s)| \equiv 1$$

Лемма 1. Если вектор постоянной длины, то $v'(s) \perp v(s)$

$$\vec{n} := \frac{v'}{|v'|} - \text{единичный}$$

$$\vec{b} := v \times n$$

Определение 4. Репер Френе: (v, n, b) (зависит от t или от s)

- \vec{v} – касательный вектор
- \vec{n} – вектор главной нормали
- \vec{b} – вектор бинормали