Оглавление

0.1 Продолжаем репер Френе

Обозначение. $\dot{r}$ – производная по натуральному параметру

На чём мы остановились. $\overrightarrow{r}(s)$ – натуральная параметризация

$$v(t) := r'(s) \quad (:= \dot{r}(s)), \qquad |v| = 1$$

$\dot{v} \perp v$ (по лемме)

$$\overrightarrow{n} := \frac{\dot{v}}{|\dot{v}|} \qquad \overrightarrow{n}(s) \text{ – вектор главной нормали}$$

$$\overrightarrow{b}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{n}$$

Тем самым, (v, n, b) – правая тройка (называется репер Френе)

Замечание. Репер Френе существует только если $\dot{v} \neq \overrightarrow{0}$

Определение 1. Кривая называется бирегулярной, если $\dot{v} \neq \overrightarrow{0}$ ни при каких s (т. е. в любой точке существет репер Френе)

Примеры.

1. Прямая **не** бирегулярна
2. Если у кривой есть точка перегиба, то она **не** бирегулярна в этой точке (чуть позже будет объяснение)

Утверждение 1. Если $\forall$ регулярной параметризации $r''(t) \nparallel r'(t)$, то кривая бирегулярна
Обратное **верно**

Доказательство. Позже возникнет естественным образом ☐

- $\langle v, n \rangle$ называется соприкасающейся плоскостью
- $\langle b, n \rangle$ называется нормальной плоскостью
- $\langle v, b \rangle$ называется спрямляющей плоскостью

Замечание. Мы пока не умеем искать уравнения этих плоскостей (т. к. в начале нам нужна регулярная параметризация, к которой редко удаётся перейти)

0.1.1 Формула Френе

$$\boxed{\dot{v} = k \cdot \overrightarrow{n}} \text{ – первая формула Френе}$$

$k(s) \geq 0$ (значит, кривая бирегулярна)
$k(s)$ – скалярная функция

Определение 2. $k(s)$ называется кривизной кривой

Замечание. Первую формулу не надо доказывать. Она получается из определения

Пример. $x^2 + y^2 = R^2$

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{– \textbf{не} натуральная параметризация}$$

$$s = \int_0^t |r'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{R^2\sin^2\tau + R^2\cos^2\tau}\,\mathrm{d}\tau = R\int_0^t \mathrm{d}\tau = Rt$$

$$t = \frac{s}{R}$$

Натуральная параметризация:

$$\begin{cases} x = R\cos {}^{s}\!/\!_{R} \\ y = R\sin {}^{s}\!/\!_{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Интуитивно, это параметризация, такая, что мы проходим окружность за $2\pi R$. Для этого мы "замедлили время" в R раз

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}, 0\right)$$

$$\dot{v} = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}, 0\right)$$

$$|\dot{v}| = \frac{1}{R} = k$$

$$\vec{n} = \left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}, 0\right)$$

$$\vec{b} = (0, 0, 1)$$

$$\boxed{\dot{b} = -æ n} \text{ – вторая формула Френе}$$

Определение 3. æ называется кручением кривой

Теорема 1. $\vec{\dot{b}} \parallel \vec{n}$

Доказательство. $\dot{b} \perp b$ по лемме
Докажем, что $\dot{b} \perp v$:

$$\dot{b} = (v \times n)^{\cdot} = \underbrace{\dot{v} \times n}_{=0} + \underbrace{v \times \dot{n}}_{\perp v} \perp v$$

□

Утверждение 2. Кривая плоская $\iff$ æ $= 0$

Доказательство. Упражнение □

$$\dot{n} = (b \times v)^{\cdot} = \dot{b} \times v + b \times \dot{v} = -æ\underbrace{n \times v}_{=-b} + \underbrace{b \times kn}_{=-kv} = æb - kv$$

$$\boxed{\vec{\dot{n}} = æ\vec{b} - k\vec{v}} \text{ – тертья формула Френе}$$

Все формулы Френе:

	v	n	b
$\dot{v}$	0	k	0
$\dot{n}$	$-k$	0	æ
$\dot{b}$	0	-æ	0

Таблица антисимметрична

0.2 Соприкасающаяся плоскость

Теорема 2. $r(t)$ – произвольная регулярная параметризация бирегулярной кривой

$$\implies r''(t) \in \langle v, n \rangle$$

Доказательство. Пусть s – натуральный параметр

$$\frac{\mathrm{d}\ r}{\mathrm{d}\ t} = \frac{\mathrm{d}\ r}{\mathrm{d}\ s} \cdot \frac{\mathrm{d}\ s}{\mathrm{d}\ t} = \dot{r} \cdot s'$$

$$r'' = \frac{\mathrm{d}\ ^2 r}{\mathrm{d}\ t^2} = \frac{\mathrm{d}\ \dot{r}}{\mathrm{d}\ t} s' + \dot{r} \cdot s'' = \ddot{r} \cdot (s')^2 + \dot{r} s'' = k\overrightarrow{n} \cdot (s')^2 + v s''$$

$$\boxed{r'' = k(s')^2 \cdot \overrightarrow{n} + s''\overrightarrow{v}}$$

То есть, r'' раскладывается по векторам v и n
Причём, если параметризация бирегулярна, то $k(s')^2 \neq 0$ □

Следствие. Соприкасающаяся плоскость $= \langle r'(t), r''(t) \rangle$

Задача. Вычислить v, n, b и плоскости для произвольной параметризации $r(t)$

$$\overrightarrow{v} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

$$\overrightarrow{b} = \frac{r'' \times r'}{|r' \times r''|}$$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{n} = \frac{(r' \times r'') \times r'}{|r'| \cdot |r' \times r''|}$$

Пусть

$$r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

$$\overrightarrow{v} \parallel (x', y', z') = r' \text{ – вектор нормали для нормальной плоскости}$$

Тогда нормальная плоскость пишется так:

$$\boxed{x'\Big|_{t_0}(x - x_0) + y'\Big|_{t_0}(y - y_0) + z'\Big|_{t_0}(z - z_0) = 0}$$

Найдём соприкасающуюся плоскость:

$$\begin{vmatrix} x'\Big|_{t_0} & y'\Big|_{t_0} & z'\Big|_{t_0} \\ x''\Big|_{t_0} & y''\Big|_{t_0} & z''\Big|_{t_0} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

(это – смешанное произведение трёх векторов)
Спрямляющая плоскость – упражнение

$$A = r(t_0), \qquad B = r(t_0)$$

$$\delta := \operatorname{dist}(B, \text{сопряж.})$$

Теорема 3.

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\delta}{AB^2}=0$$

Доказательство. Введём подходящие координаты, такие, что:

- Соприкас. $= OXY$
- Кас. прямая $= OX$
- A – начало координат
- $t_0 = 0$
- $y''(t) \neq 0$
- $x'(0) \neq 0$

Тогда $r(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$

$$x(0)=y(0)=z(0)=0,\quad \text{т. к. } A \text{ – начало координат}$$

$$y'(0)=z'(0)=0,\quad \text{т. к. касательная прямая} - OX$$

$$z''(0)=0,\quad \text{т. к. соприкас.} - OXY$$

$$\delta = z(t)$$

Нужно сосчитать предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{z(t)}{x^2+y^2+z^2}$$

Разложим по Тейлору:

$$z(t)=o(t^2)$$

$$y(t)=\frac{y''(t)}{2}t^2+o(t^2)$$

$$x(t)=x'(0)t+\frac{x''(0)}{2}t^2+o(t^2)$$

$$\lim = \lim_{t\to 0}\frac{o(t^2)}{x'^2(0)t^2+o(t^2)}=0$$

□

Следствие. Соприкасающаяся плоскость – единственная, обладающая таким свойством