Оглавление

Глава 1

Производные и дифференцируемость

1.1 Таблица основных производных

1.1.1

$$c \quad \mathbb{R}$$

$$c' = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

1.1.2

$$x \quad \mathbb{R}$$

$$x' = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

Следствие.

$$(f(ax+b))' = f'(ax+b) \cdot (ax+b)' = af'(ax+b)$$

1.1.3

$$x^2 \quad \mathbb{R}$$

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 2x$$

$$n \geq 2 \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)x^n$$

1.1.4

$$n \in \mathbb{N}, \quad x^{-n}, \quad \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(x_{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = -\frac{(x^n)''}{x^{2n}} = \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

1.1.5

$$e^x \quad \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = \lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

1.1.6

$$\ln x \quad x > 0$$

$$(\ln x)' = \lim \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x} \cdot \lim \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

1.1.7

$$r \notin \mathbb{Z} \quad x \geq 0$$
$$(x^r)' = (e^{r\ln x})' = \underset{y=r\ln x}{(e^y)'} \cdot (r\ln x)' = e^{r\ln x} \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

1.1.8

$$\sin x \quad \mathbb{R}$$
$$(\sin x)' = \lim \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim \frac{2\sin\frac{h}{2} \cdot \cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \lim \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

1.1.9

$$\cos x \quad \mathbb{R}$$
$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$(\cos x)' = (\sin(x+\frac{\pi}{2}))' = \underset{y=x+\frac{\pi}{2}}{(\sin x)'} \cdot 1 = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x$$

1.1.10

$$\operatorname{tg} x \quad \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + \pi n\}$$
$$(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1.1.11

$$\operatorname{ctg} x \quad \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\pi n\}$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

1.1.12

$$\arcsin x \quad (-1, 1)$$
$$f(x) = \arcsin x \quad g(y) = \sin y\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$
$$x \in (-1,1) \quad \arcsin x = y \iff x = \sin y$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\underset{t=y}{(\sin t)'}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.1.13

$$\arccos x \quad (-1, 1)$$
$$f(x) = \arccos x \quad g(y) = \cos y\big|_{[0,\pi]}$$
$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$
$$(\arccos x)' = \frac{1}{\underset{t=y}{(\cos t)'}} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.1.14

$$\operatorname{arctg} x \quad \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \operatorname{tg} y\Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{pi}{,} 2)}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\underset{t=y}{(\operatorname{tg} t)'}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

1.1.15

$$\operatorname{arcctg} x \quad \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x \quad g(y) = \operatorname{ctg} y\Big|_{(0,\pi)}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{\underset{t=y}{(\operatorname{ctg} t)'}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y$$

$$x^2 + 1 = \operatorname{ctg}^2 y + 1 = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} + 1 = \frac{1}{\sin^2 y}$$

$$\sin^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

1.2 Экстремумы

Определение 1.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in [a, b]$$

x_0 – точка локального максимума f, если

$$\exists\, \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \cap [a, b] \quad f(x) \leq f(x_0)$$

x_0 – точка строгого локального максимума f, если

$$\exists\, \omega(x_0) : \forall x \neq x_0 \in \omega(x_0) \cap [a, b] \quad f(x) < f(x_0)$$

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$x_1 \in [a, b]$$

x_1 – точка локального минимума g, если

$$\exists\, \omega_1(x_1) : \forall x \in \omega_1(x_1) \cap [a, b] \quad g(x) \geq f(x_1)$$

x_1 – точка строгого локального минимума g, если

$$\exists\, \omega_1(x_1) : \forall x \neq x_1 \in \omega_1(x_1) \cap [a, b] \quad g(x) > f(x_1)$$

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$x_2 \in [a, b]$$

x_2 – точка локального экстремума h, если она является либо точкой локального максимума, либо точкой локального минимума
x_2 – точка строгого локального экстремума h, если она является либо точкой строгого локального максимума, либо точкой строгого локального минимума

Теорема 1 (Ферма (не великая)).

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in (a, b)$$

x_0 – локальный экстремум f

$$\exists\, f'(x_0)$$

Тогда

$$f'(x_0) = 0 \tag{1.1}$$

Доказательство.
Рассмотрим случай, когда x_0 – локальный максимум f
По определению локального максимума:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \text{при } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (a, b) \quad f(x) \le f(x_0) \tag{1.2}$$

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$$

$$0 < h < \varepsilon \quad (1.2) \implies f(x_0 + h) \le f(x_0) \implies \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \le 0 \implies$$
$$\implies \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \le 0 \tag{1.3}$$

$$-\varepsilon < h < 0 \quad (1.2) \implies f(x_0 + h) \le f(x_0) \implies \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ge 0 \implies$$
$$\implies \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ge 0 \tag{1.4}$$

$$(1.3), (1.4) \implies (1.1)$$

Рассмотрим случай, когда x_0 – локальный минимум f

$$g(x) - f(x)$$

$$f(x) \ge f(x_0) \iff -f(x) \le -f(x_0) \iff g(x) \le g(x_0)$$

x_0 – локальный максимум g
По свойствам производных, $\exists\, g'(x_0) = -f'(x_0)$
По только что доказанному, $g'(x_0) = 0 \implies f'(x_0) = -g(x_0) = 0$ $\square$

Теорема 2 (Ролля).

$$f \in C([a, b])$$

$$\forall x \in (a, b)\ \exists\, f'(x)$$

$$f(a) = f(b) \implies \exists\, x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0 \tag{1.5}$$

Доказательство.
1. $f(x) \equiv f(a)\ \forall x \in [a, b] \implies \forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$
2. $f(x) \not\equiv f(a) \implies \exists\, x_1 \in (a, b) : f(x_1) \ne f(a)$

2.1 $f(x_1) > f(a)$
2.2 $f(x_1) < f(a)$
Случаи аналогичные, поэтому рассмотрим только 2.1
Вспомним вторую теорему Вейерштрасса:

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \quad f(x) \le f(x_0)) \tag{1.6}$$

В частности:

$$(1.6) \implies f(x_1) \le f(x_0) \tag{1.7}$$

$$(1.7) \implies \begin{Bmatrix} f(x_0) > f(a) \\ f(x_0) > f(b) \end{Bmatrix} \implies x_0 \in (a,b) \tag{1.7'}$$

$$\exists\, f'(x_0) \tag{1.8}$$

$$(1.6), (1.7'), (1.8) \implies f'(x_0) = 0$$

□

Теорема 3 (Лагранжа).

$$f \in C([a,b])$$
$$\forall x \in (a,b) \quad \exists\, f'(x)$$
$$\implies \exists\, x_0 \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a) \tag{1.9}$$

Доказательство.

$$g(x) = (f(x) - f(a) - f(b))(b-a) - (f(b) - f(a))(x-a) \tag{1.10}$$

$$(1.10) \implies g \in C([a,b]) \tag{1.10'}$$

$$\begin{multline}(1.10) \implies \forall x \in (a,b)\ \exists g'(x),\ g'(x) = (b-a)\cdot f'(x) - (f(b)-f(a))(x-a)' = \\ = (b-a)f'(x) - (f(b)-f(a)) \end{multline} \tag{1.11}$$

$$g(a) = 0,\ g(b) = 0 \tag{1.12}$$

Применим теорему Ролля

$$(1.10'), (1.11), (1.12) \implies \exists\, x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0 \tag{1.13}$$

$$(1.11), (1.13) \implies (b-a)f'(x_0) - (f(b) - f(a)) = 0 \implies (1.9)$$

□

Следствие.

$$f \in C([a,b]),\ \forall x \in (a,b)\ \exists\, f'(x) \text{ и } f'(x) \ne 0\ \forall x \in (a,b)$$
$$\implies f(b) \ne f(a)$$

Доказательство.
По теореме Лагранжа $\exists\, x_0 \in (a,b) : f(b) - f(a) = \underbrace{f'(x_0)}_{\ne 0}(b-a)$ □

Теорема 4 (Коши).

$$f \in C([a,b]), \quad g \in C([a,b])$$
$$\forall x \in (a,b)\ \exists\, f'(x),\ \exists\, g'(x)$$
$$g'(x) \ne 0\ \forall x \in (a,b)$$

$$\implies \exists\, x_0 \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \tag{1.14}$$

Доказательство.
Рассмотрим вспомогательную функцию h:

$$h(x) = (g(x)-g(a))(f(b)-f(a)) - (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) \tag{1.15}$$

$$(1.15) \implies h \in C([a,b]) \tag{1.16}$$

$$(1.15) \implies \forall x \in (a,b)\ \exists\, h'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x) \tag{1.17}$$

$$(1.15) \implies h(a) = 0,\ \ h(b) = 0 \tag{1.18}$$

$$(1.16), (1.17), (1.18) \implies \exists\, x_0 \in (a,b) : h'(x_0) = 0 \tag{1.19}$$

$$(1.17), (1.19) \implies (f(b)-f(a))g'(x_0) - (g(b)-g(a))f'(x_0) = 0 \tag{1.20}$$

$$(1.20) \iff (1.14)$$

□

1.3 Производные второго и последующего порядков

Определение 2.

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$
$$\forall x \in (a,b)\ \exists\, f'(x)$$
$$x_0 \in (a,b)$$
$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

Пусть $\exists\, (f')'(x_0)$. Тогда говорят, что существует вторая производная функции f:

$$\exists\, f''(x_o) := (f')'(x_0)$$

Пусть $\forall x \in (a,b)\ \exists\, f''(x)$. Тогда получаем функцию $f''(a,b) \to \mathbb{R}$
Пусть $\exists\, (f'')'(x_0)$. Тогда говорят, что функция f имеет третью производную:

$$f'''(x_0) := (f'')'(x_0)$$

Обозначение.

$$f^{(1)}(x) = f'(x)$$
$$f^{(2)}(x) = f''(x)$$

Предположим, мы уже определили $f^{(n)}(x)$

$$\forall x \in (a,b)\ \exists\, f^{(n)}(x)$$

Пусть $\exists\, (f^{(n)})'(x_0)$

$$f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$$

Если такая функция существует, то говорят, что $\exists\, f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0)$

Теорема 5 (О линейности и аддитивности чего-то).

$$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$$

$$\forall x \in (a,b) \begin{cases} \exists\, f'(x),\ f^{(2)}(x), ..., f^{(n-1)}(x) \\ \exists\, g'(x),\ g^{(2)}(x), ..., g^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

$$x \in (a,b) \quad \exists\, f^{(n)}(x_0),\ \exists\, g^{(n)}(x_0)$$

$$\implies \exists\, (f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$$

$$c \in \mathbb{R} \implies \exists\, (cf)^{(n)}(x_0) = cf^{(n)}$$

Доказательство. (Сложение)
Индукция по n
База. $n = 1$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

Переход.

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x), \quad x \in (a,b)$$

$$(f+g)^{(n+1)}(x_0) = ((f+g)^{(n)})'(x_0) = (f^{(n)} + g^{(n)})(x_0) = \\ = f^{(n+1)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0) + (g^{(n)})'(x_0) \quad (1.21)$$

□

Доказательство. (Умножение на константу)
Индукция по n
База. $n = 1$

$$((f))'(x_0) = cf'(x_0)$$

Переход.

□