Оглавление

Глава 1

Теория функции комплексной переменной

Косплексная плоскость $\mathbb{C}$ является метрическим пространством, поскольку $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_{R^2}$, если $z = x+iy$. Поэтому определны понятия точки сгущения множества и предела функции:

Определение 1. c является *точкой сгущения* множетсва $E \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall \delta > 0 \quad \exists z \in E \setminus \{ c \} : \quad |z-c| < \delta$$

Определение 2.

$$f(z) \xrightarrow[z \to c]{} A \in \mathbb{C} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{ c \} : |z-c| < \delta \qquad |f(z) - c| < \varepsilon$$

Для $w = u + iv$ полагаем $\mathfrak{Re}\, w = u, \quad \mathfrak{Im}\, w = v, \quad \overline{w} = u - iv$. Множеству $x + i \cdot 0$ соспоставим $\mathbb{R}$. Полагаем, что $i \cdot 0 = 0$, и $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Утверждение 1. Если $u(z) = \mathfrak{Re}\, f(z), \quad v(z) = \mathfrak{Im}\, f(z)$, то

$$f(z) \xrightarrow[z \to c]{} A \iff \begin{cases} u(z) \xrightarrow[z \to c]{} \mathfrak{Re}\, A \\ v(z) \xrightarrow[z \to c]{} \mathfrak{Im}\, A \end{cases}$$

Из свойств функций нескольких переменных получаем:

$$f(z) \xrightarrow[z \to c]{} A \in \mathbb{C} \implies \exists \delta > 0,\ M > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{ c \} : |z-c| < \delta \qquad |f(z)| \le M \tag{1.1}$$

Утверждения.

1. $f(z) \xrightarrow[z \to c]{} A, \quad A \neq 0$

$$\implies \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{ c \} : |z-c| < \delta \qquad |f(z)| > \frac{|A|}{2}$$

2. $f(z) \xrightarrow[z \to c]{} \quad \implies \quad kf(z) \xrightarrow[z \to c]{} kA$
3. $f(z) \xrightarrow[z \to c]{}, \quad g(z) \xrightarrow[z \to c]{} \to B$

$$\implies f(z) + g(z) \xrightarrow[z \to c]{} A + B$$

4. $f(z) \xrightarrow[z \to c]{} A, \qquad g(z) \xrightarrow[z \to c]{} B$

$$\implies f(z)g(z) \xrightarrow[z \to c]{} AB$$

5. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A, \quad A \neq 0, \quad f(z) \neq 0$ при $z \in E \setminus \{\, c \,\}$

$$\implies \frac{1}{f(z)} \xrightarrow[z\to c]{} \frac{1}{A}$$

6. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A, \qquad f(z) \neq 0, \quad A \neq 0, \quad g(z) \xrightarrow[z\to c]{} B$

$$\implies \frac{g(z)}{f(z)} \xrightarrow[z\to c]{} \frac{B}{A}$$

Доказательство.

1. Положим $\varepsilon := \frac{|A|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} : |z - c| < \delta \qquad |f(z) - A| < \frac{|A|}{2}$$

При таких z выполнено

$$|f(z)| = |f(z) - A + A| \overset{\Delta}{\geq} |A| - |f(z) - A| > |A| - \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2}|A|$$

2. Следует из линейности и аддитивности предела вещественных функций.

3. Аналогично.

4.
$$\exists\, \delta' > 0,\ M' > 0,\ \delta'' > 0,\ M'' > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} \quad \begin{cases} |z - c| < \delta' \implies |f(z)| < M' \\ |z - c| < \delta'' \implies |g(z)| < M'' \end{cases}$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta'_\circ,\ \delta''_\circ : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} \quad \begin{cases} |z - c| < \delta'_\circ \implies |f(z) - A| < \varepsilon \\ |z - c| < \delta''_\circ \implies |g(z) - B| < \varepsilon \end{cases}$$

Пусть $|z - c| < \delta_\circ = \min\{\, \delta', \delta'', \delta'_\circ, \delta''_\circ \,\}$. Тогда

$$|f(z)g(z) - AB| = \big|\big(f(z) - A\big)g(z) + A\big(g(z) - B\big)\big| \overset{\Delta}{\leq} |f(z) - A| \cdot |g(z)| + |A| \cdot |g(z) - B| < \\ < \varepsilon \cdot M'' + |A| \cdot \varepsilon = \varepsilon(M'' + |A|)$$

5. Возьмём δ_1 из 1. Выберем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta_2 > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} \quad |z - c| < \delta_2 \implies |f(z) - A| < \varepsilon \tag{1.2}$$

Выберем $\delta_3 := \min\{\, \delta_1, \delta_2 \,\}$. Тогда

$$1., (1.2) \implies \left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|A - f(z)|}{|A| \cdot |f(z)|} < \frac{\varepsilon}{|A| \cdot \frac{|A|}{2}} = \frac{2\varepsilon}{|A|^2}$$

При $z \in E \setminus \{\, c \,\}, \quad |z - c| < \delta_3$ это то, что требовалось доказать.

6.
$$\frac{g(z)}{f(z)} = g(z) \cdot \frac{1}{f(z)} \to B \cdot \frac{1}{A} = \frac{B}{A}$$

$\square$