

Оглавление

1	Жорданова форма оператора	2
1.1	Определения	2
1.1.1	Напоминание: собственные числа	2
1.2	Собственные подпространства	3
1.3	Операторы с диагональными и блочно-диагональными матрицами	4

Глава 1

Жорданова форма оператора

1.1. Определения

Определение 1. Жорданова клетка:

$$Jr(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \lambda & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Определение 2. Жорданова форма — матрица, у которой на главной диагонали жордановы клетки

$$\begin{pmatrix} Jr(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & Jr(\lambda_2) & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & Jr(\lambda_3) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

1.1.1. Напоминание: собственные числа

Определение 3. \mathcal{A} — оператор на V

Число λ называется собственным для \mathcal{A} , если

$$\exists v \in V : \underset{v \neq 0}{\mathcal{A}v = \lambda v}$$

v называется собственным вектором, соответствующим λ

Определение 4. A — квадратная матрица

Число λ называется собственным, если

$$\exists \text{ столбец } X : \underset{X \neq 0}{AX = \lambda X}$$

X называется собственным столбцом

Определение 5. A — квадратная матрица

Характеристическим многочленом A называется $\chi_A(t) = \det(A - tE)$

Теорема 1. Собственные числа A — корни $\chi_A(t)$

Определение 6. \mathcal{A} — оператор, A — его матрица в некотором базисе
Характеристическим многочленом \mathcal{A} называется $\chi_A(t)$

1.2. Собственные подпространства

Определение 7. V — векторное пространство, \mathcal{A} — оператор на V , λ — с. ч.
Собственным подпространством, соответствующим λ , называется множество с. в., соответствующих λ

Обозначение. V_λ

Определение 8. U — подпространство V
 U называется инвариантным относительно \mathcal{A} , если

$$\forall x \in U \quad \mathcal{A}x \in U$$

Утверждение 1. V_λ — инвариантное подпространство

Доказательство.

- Подпространство

$$\begin{aligned} - u, v \in V_\lambda &\implies \begin{cases} \mathcal{A}u = \lambda u \\ \mathcal{A}v = \lambda v \end{cases} \implies \mathcal{A}(u+v) \stackrel{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}u + \mathcal{A}v = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v) \implies \\ &u+v \in V_\lambda \\ - u \in V_\lambda, k \in K &\implies \mathcal{A}(ku) \stackrel{\text{линейность}}{=} k\mathcal{A}(u) = k\lambda u = \lambda(ku) \implies ku \in V_\lambda \end{aligned}$$

- Инвариантность

$$u \in V_\lambda \implies \mathcal{A}u = \lambda u \in V_\lambda$$

□

Теорема 2 (о сумме собственных подпространств). $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные собственные числа
Тогда сумма $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$ является прямой

Доказательство. Индукция по k

- База. $k = 1$ — очевидно

- Переход. $k - 1 \rightarrow k$

Пусть $u_1 + \dots + u_{k-1} + u_k = 0$, $u_i \in V_{\lambda_i}$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{A}(\underbrace{u_1 + \dots + u_{k-1}}_{=0} + u_k) - \lambda_k(\underbrace{u_1 + \dots + u_{k-1}}_{=0} + u_k) = \\ &= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_k u_k - \lambda_k u_1 - \dots - \lambda_k u_{k-1} - \lambda_k u_k = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} u_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} u_{k-1} \end{aligned}$$

(т. к. по условию собственные числа различны)

$$(\lambda_1 - \lambda_k)u_1 \in V_{\lambda_1}, \quad \dots, \quad (\lambda_{k-1} - \lambda_k)u_{k-1} \in V_{\lambda_{k-1}}$$

По индукционному предположению, $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{k-1}}$

А мы представили 0 в виде суммы. Значит, все слагаемые нулевые:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)u_1 = \dots = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)u_{k-1} = 0 \implies u_1 = \dots = u_{k-1} = 0 \implies u_k = 0$$

□

Следствие. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные с. ч., $u_i \in V_{\lambda_i}$, $u_i \neq 0$
Тогда u_1, \dots, u_k ЛНЗ

Доказательство. Пусть $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0$

$$a_1 u_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, a_k u_k \in V_{\lambda_k} \implies a_1 u_1 = \dots = a_k u_k = 0 \implies a_1 = \dots = a_k = 0$$

□

1.3. Операторы с диагональными и блочно-диагональными матрицами

В этом параграфе рассматриваем конечномерные пространства

Определение 9. Оператор \mathcal{A} , действующий на V называется диагонализуемым, если его матрица в некотором базисе диагональна

Определение 10. \mathcal{A} — оператор, λ — с. ч.

- Геометрической кратностью λ называется $\dim V_\lambda$
- Арифметической кратностью λ называется кратность λ как корня $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

Теорема 3 (критерий диагонализуемости в терминах геометрической кратности).

(I) \mathcal{A} диагонализуем \iff (II) сумма геометрических кратностей всех с. ч. равна $\dim V$

Доказательство.

\mathcal{A} диагонализуем \iff в нек. базисе e_1, \dots, e_n матрица \mathcal{A} имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

\iff для некоторого базиса e_1, \dots, e_n выполнено

$$\mathcal{A}e_i = 0e_1 + \dots + a_i e_i + \dots + 0e_n = a_i e_i$$

\iff (I') существует базис из с. в.

Докажем, что (I') \iff (II):

Пусть $U = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$

$$n := \dim V, \quad d_i := \dim V_{\lambda_i}$$

- (II) \implies (I')

Имеем $d_1 + \dots + d_k = n$

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \implies \dim U = n \xrightarrow[U - \text{подпр-во } V]{=} U = V$$

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \implies \text{объединение базисов } V_{\lambda_i} \text{ является базисом } U = V$$

Эти базисы состоят из с. в.

Объединение базисов состоит из с. в.

Это базис V

- (I') \implies (II)

Существует базис V из с. в.

Они распределяются по V_{λ_i} (но не обязательно для каждого V_{λ_i} представлен весь его базис):

$$\underbrace{e_1^{(1)}, \dots, e_{t_1}^{(1)}}_{\substack{\text{соотв. } \lambda_1 \\ \in V_{\lambda_1}}}, \underbrace{e_1^{(2)}, \dots, e_{t_2}^{(2)}}_{\substack{\text{соотв. } \lambda_2 \\ \in V_{\lambda_2}}}, \dots$$

$$e_1^{(i)}, \dots, e_{t_i}^{(i)} \text{ ЛНЗ} \implies t_i \leq d_i \quad \forall i$$

(т. к. они лежат в большом-большом базисе)

Сложим все эти неравенства:

$$\left. \begin{array}{l} d_1 + d_2 + \dots + d_k \geq t_1 + \dots + t_k = n \\ n \geq \dim U \stackrel{U=V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}}{=} d_1 + \dots + d_k \end{array} \right\} \Rightarrow n = d_1 + \dots + d_k$$

□

Следствие (достаточное условие диагонализуемости). Пусть $\dim V = n$. Если у \mathcal{A} есть n различных с. ч., то \mathcal{A} диагонализуем

Доказательство. $\dim V_{\lambda_i} \geq 1$

$$n \geq \dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}) \stackrel{\text{пр. сумма}}{=} \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k} \geq n$$

Значит, достигается равенство

□

Напоминание (определитель ступенчатой матрицы).

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A, C - \text{кв.} \Rightarrow |M| = |A| \cdot |C|$$

Теорема 4 (арифм. и геом. кратности). λ — с. ч. \mathcal{A}
Геом. кратность $\lambda \leq$ арифм. кратности λ

Доказательство. Пусть $n = \dim V$, k — геом. кр. λ

Выберем базис e_1, \dots, e_k пространства V_λ

Дополним его до базиса V : $e_1, \dots, e_k, \dots, e_n$

При $i \leq k$ выполнено $\mathcal{A}e_i = \lambda e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

Матрица \mathcal{A} в базисе e_1, \dots, e_n :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & . & B \\ . & \lambda & \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Для некоторых $B_{k \times n-k}$, $C_{n-k \times n-k}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} (\lambda - t)E_k & B \\ 0 & C - tE_{n-k} \end{vmatrix} = \det((\lambda - t)E_k) \cdot \det(C - tE_{n-k}) = (\lambda - t)^k \cdot \det(C - tE_{n-k})$$

□

Следствие (критерий диагонализуемости в терминах арифметических и геометрических кратностей). Оператор \mathcal{A} диагонализуем \iff

1. $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ раскладывается на линейные множители
2. \forall с. ч. λ арифм. кр. = геом. кр.

Доказательство. Пусть λ_i — с. ч., d_i — геом. кр., a_i — арифм. кр., $n = \dim C$

$$\chi(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} \dots (t - \lambda_k)^{a_k} \cdot f(t)$$

$$n = \deg \chi(t) \geq a_1 + \dots + a_k \geq d_1 + \dots + d_k$$

Диагональ. $\iff n = d_1 + \dots + d_k \iff$ везде достигаются равенства

□