Оглавление

0.1. Деривационные формулы

Теорема 1.

$$|n_u \times n_v| = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Доказательство.

$$n_u = Ar_u + Br_v$$

$$n_v = Cr_u + Dr_v$$

$$n_u \times n_v = (Ar_u + Br_v) \times (Cr_u + Dr_v) = r_u \times r_v (AD - BC)$$

$$|n_u \times n_v| = |\underbrace{r_u \times r_v}| \cdot |AD - BC|$$

$$0 \xlongequal[\text{касательный вектор на нормальный}]{} (\overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{n})_u = r_{uu} \cdot n + r_u \cdot n_u \xlongequal{\text{def } L} L + r_u \cdot n_u$$

Аналогично,

$$0 = (r_v \cdot n)_u \xlongequal{\text{def } M} M + r_v \cdot n_u$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} AE + DF = n_u \cdot r_u = -L \\ AF + BG = n_u \cdot r_v = -M \end{cases}$$

$$A = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, \qquad B = \frac{FL - EM}{EG - F^2}$$

Аналогично найдём C и D:

$$\begin{cases} CE + DF = n_v \cdot r_u = -M \\ CF + DG = n_v \cdot r_v = -N \end{cases}$$

$$C = \frac{FN - GM}{EG - F^2}, \qquad D = \frac{FM - EN}{EG - F^2}$$

$$AD - BC = \frac{1}{(EG - F^2)^2}\Big((FM - GL)(FM - FN) - (FL - EM)(FN - GM)\Big) =$$
$$= \frac{1}{(EG - F^2)^2}\Big(F^2M^2 - \cancel{FMEN} - \cancel{GFLM} + GLEN - F^2LN + \cancel{EGLM} + \cancel{EFMN} - EGM^2\Big) =$$
$$= \frac{EG - F^2)(LN - M^2)}{(EG - F^2)^2}$$

□

0.2. Уравнения Петерсона—Майнарди—Кодаци

Вспомним, как мы вводили симолы Кристофеля:

$$r_{uu} = \Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + Ln$$

$$r_{uv} = \Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} + Mn$$

$$r_{uuv} = \Gamma^1_{11v} v r_u + \Gamma^1_{11} r_{uv} + \Gamma^2_{11v} r_v + \Gamma^2_{11} r_{vv} + L_v n + L n_v$$

$$= r_{uvu} = \Gamma^1_{12u} r_u + \Gamma^1_{12} r_{uu} + \Gamma^2_{12u} r_v + \Gamma^2_{12} r_{uv} + M_u n + M n_u$$

Домножим последние два выражения скалярно на n и приравняем:

$$\Gamma^1_{11} \cdot M + \Gamma^2_{11} \cdot N + L_v = \Gamma^1_{12} \cdot L + \Gamma^2_{12} M + M_u$$

Обычно это записывается как

$$\boxed{L_v - M_u = \Gamma^1_{12} L + \Gamma^2_{12} M - \Gamma^1_{11} M - \Gamma^2_{11} N}$$

Аналогично,

$$r_{uv} = \Gamma^1_{12} r_u + \Gamma^2_{12} r_v + M_n, \qquad r_{vv} = \Gamma^1_{22} r_u + \Gamma^2_{22} r_v + M_n$$

Дифференцируем первое по v, второе — по u, домножаем оба на n, приравниваем:

$$\Gamma^1_{12} M + \Gamma^2_{12} N + M_v = \Gamma^1_{22} L + \Gamma^2_{22} M + N_u$$

$$\boxed{M_v - N_u = \Gamma^1_{22} L + \Gamma^2_{22} M - \Gamma^1_{12} M - \Gamma^2_{12} N}$$

Теорема 2. Γ^k_{ij} относятся к внутренней геометрии.

Доказательство.

$$r_{uu} = \Gamma^1_{11} r_u + \Gamma^2_{11} r_v + Ln \qquad \Big| \cdot r_u \qquad \Big| \cdot r_v$$

$$\begin{cases} r_{uu} \cdot r_v = \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F \\ r_{uu} \cdot r_v = \Gamma^1_{11} \cdot F + \Gamma^2_{11} \cdot G \end{cases}$$

$$E_u = (r_u \cdot r_u)_u = 2 r_{uu} \cdot r_u$$

$$F_u = (r_u \cdot r_v)_u = r_{uu} r_v + r_u r_{uv}$$

$$E_v = (r_u \cdot r_u)_v = 2 r_{uv} r_u$$

$$r_{uu} r_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}}$$

Остальные — аналогично. □

Глава 1

Геодезическая кривизна

Есть поверхность. Есть кривая на поверхности. Есть вектор кривизны (вектор нормали умножить на кривизну). Есть картинка.

Определение 1. k_g — проекция $\overrightarrow{k}$ на касательную плоскость.
Можно рассматривать как скаляр или как вектор.

Утверждение 1. $k^2 = k_n^2 + k_g^2$

Доказательство. См. картинку. □

Теорема 3. k_g относится к внутренней геометрии.

Доказательство.

$$u = u(s), \qquad v = v(s)$$

S — постоянный параметр

$$\begin{aligned}\overrightarrow{k} = \frac{\mathrm{d}^2\, r\big(u(s); v(s)\big)}{\mathrm{d}\, s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, s}(r_u \cdot u_s + r_v \cdot v_s) = \overrightarrow{r}_{uu} u_s^2 + 2\overrightarrow{r}_{uv} u_s v_v + \overrightarrow{r}_{vv} (v_s)^2 = \\ = (\Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + Ln) u_s^2 + 2(\Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + Mn) u_s v_s + (\Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + Nn) v_s^2\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{k}_g = \underbrace{(\Gamma_{11}^1 u_s^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_s v_s + \Gamma_{22}^1 v_s^2)}_{\text{зависит от I}} \cdot r_u + \underbrace{(\Gamma_{11}^2 u_s^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_s v_s + \Gamma_{22}^2 v_s^2)}_{\text{зависит от II}} r_v$$

□

1.1. Вычисление k_g

$$r(u, u), \qquad u(t), \quad v(t)$$

$\overrightarrow{n}$ — нормаль к поверхности.

$$(r_t', r_t'', n)(r_u u' + r_v v'; r_{uu} u') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$