Оглавление

0.1 Продолжаем комплексификацию

Напоминание. Мы ввели элементы вида $u + vi$, определили для них сложение и умножение, доказали, что это векторное пространство

Теорема 1 (базис комплексификации). Пусть $e_1, .., e_n$ – бизс V
Тогда $e_1 = e_1 + 0 \cdot i, ..., e_n = e_n + 0 \cdot i$ – базс $\widehat{V}$

Доказательство.

- Докажем, что система является порождающей:
  Пусть $w \in \widehat{V}$
  Разложим u и v по базису $e_1, ..., e_n$ в V:

$$u = a_1e_1 + ... + a_ne_n, \qquad v = b_1e_1 + ... + b_ne_n, \qquad a_s, b_s \in \mathbb{R}$$

$$w = \underbrace{(a_1 + b_1i)}_{\in\mathbb{C}}e_1 + ... + \underbrace{(a_n + b_ni)}_{\in\mathbb{C}}e_n$$

- Докажем ЛНЗ:
  Пусть $c_1e_1 + ... + c_ne_n = 0, \quad c_s \in \mathbb{C}, \quad c_s = a_+b_si, \quad a_s, b_s \in \mathbb{R}$

$$(a_1 + b_1i)(e_1 + 0i) + \dots\dots\dots + (a_n + b_ni)(e_n + 0i) = 0$$

  Разделим вещественную и мнимую части:

$$\Big((a_1e_1 - b_10) + \dots\dots\dots + (a_ne_n - b_n0)\Big) + \Big((a_10 + b_1e_1) + \dots\dots\dots + (a_n0 + b_ne_n)\Big)i = 0 + 0i$$

  Значит, каждое большое слагаемое равно нулю:

$$\begin{cases} a_1e_1 + ... + a_ne_n = 0 \\ b_1e_1 + ... + b_ne_n = 0 \end{cases} \xRightarrow[e_1,...,e_n \text{ ЛНЗ в } V]{} \begin{cases} a_1 = ... = a_n = 0 \\ b_1 = ... = b_n = 0 \end{cases}$$

□

Следствие. $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{V} = \dim_{\mathbb{R}} V$

Свойства (сопряжённых векторов).

1. $\overline{\overline{w}} = w$

Доказательство. $w = u + vi, \qquad \overline{w} = u - vi, \qquad \overline{\overline{w}} = u - (-v)i = u + vi = w$ ☐

2. $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}, \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

   Доказательство. Первое равенство – упражнение. Проверим второе:
   Пусть $z = a + bi, \quad w = u + vi$

   $$\overline{(a+bi)(u+vi)} = \overline{(au - bv) + (av + bu)i} = (au - bv) - (av + bu)i$$

   $$\overline{(a+bi)} \cdot \overline{(u+vi)} = (a - b_i)(u - v_i) = \left(\underbrace{au - (-b)(-v)}_{au-bv}\right) + \left(\underbrace{a(-v) + (-b)u}_{-(av+bu)}\right)$$

   ☐

3. $w_1, ..., w_n$ ЛНЗ $\iff \overline{w_1}, ..., \overline{w_n}$ ЛНЗ

   Доказательство. Достаточно доказать в одну сторону ($\implies$), дальше сошлёмся на первое свойство
   Пусть $\overline{w_1}, ..., \overline{w_n}$ ЛЗ, то есть

   $$c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}: \quad c_1\overline{w_1} + ... + c_n\overline{w_n} = 0, \qquad c_i \neq \odot$$

   $$0 = \overline{0} = \overline{c_1\overline{w_1} + ... + c_n\overline{w_n}} \xlongequal[\text{2 св-во}]{} \overline{c_1}\overline{\overline{w_1}} + ... + \overline{c_n}\overline{\overline{w_n}} \xlongequal[\text{1 св-во}]{} \overline{c_1}w_1 + ... + \overline{c_n}w_n$$

   $$c_i \neq \odot \implies \overline{c_i} \neq \odot$$

   $w_1, ..., w_n$ ЛЗ – $\lightning$ ☐

0.1.1 Операторы

Определение 1. $\mathcal{A}$ – оператор на V
Продолжением $\mathcal{A}$ на $\widehat{V}$ называется отображение $\widehat{\mathcal{A}} : \widehat{V} \to \widehat{V}$, заданный равенством $\widehat{\mathcal{A}}(u + vi) = \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)i$

Свойство. $\widehat{\mathcal{A}}$ линейно

Доказательство. Упражнение ☐

0.1.2 Многочлены от оператора

Обозначение. $P(t) = c_K t^k + c_{k-1}t^{k-1} + ... + c_0, \qquad c_s \in \mathbb{C}$
Тогда $\overline{P}(t) = \overline{c_k}t^k + \overline{c_{k-1}}t^{k-1} + ... + \overline{c_0}$ – сопряжённый к P

Лемма 1 (применение операторов к сопряжённым векторам)**.** $\mathcal{A}$ – оператор на V. Тогда

1. $\widehat{\mathcal{A}}(\overline{w}) = \overline{\widehat{\mathcal{A}}(w)}$

   Доказательство. Пусть $w = u + iv, \qquad \overline{w} = u - iv$

   $$\widehat{\mathcal{A}}(w) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}vi, \qquad \mathcal{A}(\overline{w}) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}(-v)i = \mathcal{A}u - \mathcal{A}vi$$

   ☐

2. $P(\widehat{\mathcal{A}})(w_1) = w_2 \implies \overline{P}(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w_1}) = \overline{w_2}$

   Доказательство. Из первого свойства $\widehat{\mathcal{A}}^{(s)}(\overline{w_1}) = \overline{\mathcal{A}^{(s)}(w_1)}$
   Пусть $P(t) = c_k t^k + ... + c_0$

   $$w_2 = c_k P(\widehat{\mathcal{A}})(w_1) + ... + c_0 w_1$$

   $$\overline{w_2} = \overline{c_k}\overline{P}(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w_1}) + ... + c_0\overline{w_1} = \overline{P}(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w_1})$$

   ☐

3. Если $P(t)$ аннулирует w, то $\overline{P}(t)$ аннулирует $\overline{w}$:

Доказательство. $P(\widehat{\mathcal{A}})(w) = 0 \implies \overline{P}(\widehat{\mathcal{A}})(\overline{w}) \xlongequal[\text{2 св-во}]{} \overline{P(\widehat{\mathcal{A}})(w)} = \overline{0} = 0$ □

4. Если w – корневой вектор, соответствующий λ, то $\overline{w}$ – корневой вектор, соответствующий $\overline{\lambda}$

Доказательство. $P(t) = (t-\lambda)^k$ аннулирует w для некоторого k
$\implies \overline{P}(t)$ аннулирует $\overline{w}$ (из 3 св-ва)

$$\overline{P}(t) = (t - \overline{\lambda})^k$$

□

5. Если $w_1, ..., w_n$ – (жорданов) базис корневого подпространства, соответствующего λ, то $\overline{w_1}, ..., \overline{w_n}$ – (жорданов) базис корневого подпространства, соответствующего $\overline{\lambda}$ (если один жорданов, то и второй жорданов)

Доказательство.

- ЛНЗ доказана
- Докажем, что это порождающая система:
  Пусть $\overline{w}$ принадлежит пространству, соответстсвующему $\overline{\lambda} \implies w$ принадлежит пространству, соотв. λ
  Разложим по базису:
  $$\exists\, c_i : \quad w = c_1 e_1 + ... + c_n e_n$$
  $$\implies \overline{w} = \overline{c_1 e_1} + ... + \overline{c_n e_n}$$
- Докажем, что сопряжённый к жорданову базису жорданов:
  $$\widehat{\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{A}} - \lambda\widehat{\mathcal{E}}$$
  $$(\widehat{\mathcal{A}} - \lambda\widehat{\mathcal{E}})e_i = e_{i-1} \implies (\widehat{\mathcal{A}} - \overline{\lambda}\mathcal{E})\overline{e_i} = \overline{e_{i+1}}$$

□

Теорема 2. Пусть V - конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\quad\mathcal{A}$ – оператор на V
Тогда существует базис V, в котором матрица $\mathcal{A}$ является блочно-диагональной, и каждый блок – либо жорданова клетка, либо имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -b & a & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & a & b & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & -b & a & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & a & b & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & -b & a & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & a & b \\ . & . & . & . & . & . & . & . & -b & a \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть минимальный многочлен $\mathcal{A}$ равен

$$P(t) = (t - a_1)^{m_1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (t^2 + p_1 t + a_1)^{s_1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

где $t + p_1 t + q_1, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ не имеют вещественных корней
Разложим V в прямую сумму примарных подпространств
Достаточно доказать для одного подпростанства
Для пространства, соответствующего $(t-a)^m$ есть базис, в котором матрица $\mathcal{A}$ является блочно-диагональной, и в котром матрица $\mathcal{A}$ жорданова
Рассмотрим подпространство, соответствующе $t^2 + pt + q)^s$:
Пусть $\lambda, \overline{\lambda}$ – комплексные корни $t^2 + ptq$

$$(t^2 + pt + q)^s = (t - \lambda)^s (t - \overline{\lambda})^s$$

Пусть $P_1 = (t^2 + pt + q)^s$
Знаем, что $P_1(\mathcal{A}) = 0$ на корневом подпространстве U
Тогда $P_1(\widehat{\mathcal{A}}) = 0$ на $\widehat{U}$

$$\widehat{U} = \widehat{W_1} + \widehat{W_2}, \qquad \widehat{W_1}, \widehat{W_2} \text{ -- корневые подпространства для } \lambda, \overline{\lambda}$$

Существует жорданов базис $w_1, ..., w_k$ для $\widehat{W_1}$
Тогда $\overline{w_1}, ..., \overline{w_k}$ – жорданов базис для $\widehat{W_2}$
$w_1, ..., w_k, \overline{w_1}, ..., \overline{w_k}$ – базис $\widehat{U}$
Пусть $w_i = u_i + v_i$
Докажем, что $u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_k, v_k$ – базис U:
$u_1 + iv_1, u_2 - iv_1, u_2 + iv_2 u_2 - iv_2, \dots\dots\dots\dots$ – базис $\widehat{U}$
$u_1 + iv_1, (u_1 - iv_1) + (u_1 + iv_1), u_2 + iv_2, (u_2 - iv_2) + (u_2 + iv_2), \dots\dots\dots\dots$ – базис $\widehat{U}$
$u_1, u_1 + iv_1, u_2, u_2 + iv_2, \dots\dots\dots\dots$ – базис $\widehat{U}$
$u_1, u_1 + iv_1 - u_1, u_2, u_2 + iv_2 - v_2, \dots\dots\dots\dots$ – базис $\widehat{U}$
$u_1, v_1, u_2, v_2, \dots\dots\dots\dots$ – базис $\widehat{U}$, а значит и базис U
Проверим, что в этом базисе получается правильная жорданова матрица:
Рассмотрим жордановы цепочки

$$w_1, ..., w_{r_1}, w_{r_1+1}, ..., w_{r_1+r_2}, \dots\dots\dots\dots$$

Докажем, что им соотвествуют клетки размера $2r_1, 2r_2, ...$:
Рассмотрим первую цепочку:

$$\widehat{\mathcal{A}}(u_m + iv_m) = \begin{cases} \lambda(u_m + iv_m) + (u_m + iv_m), & m < r_1 \\ \lambda(u_r + iv_r), & m = r \end{cases}$$

Пусть $\lambda = a + bi$
При $m < r$,

$$\mathcal{A}(u_m) + \mathcal{A}(v_m)i = (au_m - bv_m) + (bu_m + av_m)i = \underbrace{(au_m - bv_m + u_{m+1})}_{\mathcal{A}(u_m)} + \underbrace{(bu_m + av_m + v_{m+1})}_{\mathcal{A}(v_m)} i$$

тут надо проверить
При $m = r$,

$$\mathcal{A}(u_m) = (au_m - bv_m) + (bu_m + av_m)i = (au_m - bv_m) + (bu_m + av_m)i$$

□

Глава 1

Линейные отображения в евклидовых и унитарных пространствах

1.1 Двойственное пространство

1.1.1 Более общие вещи

Определение 2. V – векторное пространство над полем K
Линейным функционалом на V называется линейное отображение $V \to K$

Примеры.

1. V конечномерное, $e_1, ..., e_n$ – базис
   Первая координата, т. е. отображение

   $$a_1 e_1 + ... + a_n e_n \mapsto a_1 \text{ – функционал}$$

   Любая линейная функция от координат будет функционалом

2. V – пространство многочленов над $\mathbb{R}$
   $P(t) \mapsto P(1)$ – функционал
   $P(t) \mapsto P'(2)$ – функционал

3. $\mathbb{C}$ – векторное пространство над $\mathbb{R}$
   $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ – функционалы

4. V – векторное пространство со скалярным произведением, зафиксирован $v \in V$

   $$y(x) = (x, v)$$

   Представим предыдущие примеры в таком виде:

   (a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   $$(a_1, ..., a_n) \mapsto 2a_1 + 3a_2$$

   Это скалярное умножение на $(2, 3, 0, ..., 0)$

   (b) V – пространство многочленов $at^2 + bt + c$

   $$P(t) \mapsto P(1)$$

   Рассмотрим соотвествующие векторы в $\mathbb{R}^3$

   $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a + b + c$$

   Это умножение на $(1, 1, 1)$

5. K – поле
   K^∞ – множество бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, ...)$, в которых только конечное количество членов отлично от нуля
   Сложение и умножение на скаляр – покомпонентно
   Получили векторное пространство над K
   Фиксируем бесконечную последовательность $(v_1, v_2, ...)$ (не обязательно из K^∞)
   Функционал на K^∞:
   $$(a_1, a_2, ...) \mapsto a_1 v_1 + a_2 v_2 + ...$$
   (это бесконечная сумма, но в ней только конечное количество слагаемых отлично от нуля)