Оглавление

Глава 1

Метрические пространства

1.1 Определение и примеры

Определение 1. M – множество, $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$
(M, ρ) – метрическое пространство, если:

1. $\rho(x, y) \geq 0, \qquad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Примеры.

1. $\mathbb{R}, \quad \rho(x, y) = |x - y|$
2. $\mathbb{R}^2, \qquad \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ – обобщается до $\mathbb{R}^n$
$$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
$$\rho_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \Big(|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p\Big)^{1/p}, \qquad p \geq 1$$
Каждая ρ_p является метрикой. Свойтсва 1 и 2 очевидны. Проверим неравенство треугольника:

Доказательство.
$$\left(\sum_i |x_i + p_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p}$$
$\square$

$$\rho_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\ |\ x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\ \}$$ – без доказательства

ρ_1 – манхэтенская метрика (если в городе все улицы перпендикулярны "осям", то ρ_1 – **любое** кратчайшее расстояние по улицам)

3. M – множество
$$\rho(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$
$B(x_0, 1/2) = \{\ x_0\ \}$
4. (M, ρ) – метрическое пространство
$$\rho'(x, y) := \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$ – тоже метрика

Теперь $\rho'(x, y) < 1$

$$\rho''(x, y) = \max\{\,\rho(x, y), 1\,\}$$ – рассматриваем только расстояния, меньшие 1. Тоже метрика

5. M – множество строк из 0 и 1 длины n
   $\rho(x, y)$ – количество различных символов

   Задача. Есть строки из n символов
   При передаче может возникнуть не более k ошибок
   Посылаем сколько-то строк (часть из них искажается)
   Нужно, чтобы:

   - Хотя бы одна строчка не исказилась
   - Получатель мог однозначно определить, какая строчка не исказилась

6. M – пространство (хороших) функций на $[a, b]$

$$\rho_1(f, g) \coloneqq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

   У хороших функций такой интеграл точно существует (например, хорошими будут непрерывные)

$$\rho_2(f, g) \coloneqq \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$$

$$\rho_p(f, g) \coloneqq \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\rho_\infty \coloneqq \sup |f(x) - g(x)|, \qquad x \in [a, b]$$

7. M – множество (хороших) фигур на плоскости (например, многоугольников)

$$\rho(F, G) \coloneqq S_{F \triangle G}$$

   Метрика Хауссдорфа:

   - Есть 2 кривые
   - По одной из них движется поливальная машина (поливает кружочек вокруг себя, радиусом ε)
   - Хотим так подобрать ε, чтобы вторая кривая была полностью полита

$$\text{“}\rho(F, G)\text{”} \coloneqq \inf\{\,\varepsilon \mid \forall x \in F \quad \exists y \in G : \rho(x, y) \le \varepsilon\,\}$$

   Очевидно, что такой ε не будет симметричным. Поэтому, берём максимум из них двоих:

$$\rho(F, G) \coloneqq \max\{\,\inf\{\,\varepsilon \mid \forall x \in F \quad \exists y \in G : \rho(x, y) \le \varepsilon\,\}, \inf\{\,\varepsilon \mid \forall x \in G \quad \exists y \in F : \rho(x, y) \le \varepsilon\,\}\,\}$$

8. $\mathbb{Z}$

$$|n| = \begin{cases} n, & n \ge 0 \\ -n, & n < 0 \end{cases}$$

   Возьмём $p \in \mathbb{P}$
   Положим $||n|| = 2^{-v_p(n)}$, где $v_p(n)$ – степень вхождения p в n

$$v_p(\frac{m}{n}) \coloneqq v_p(m) - v_p(n)$$

   Таким образом, мы расширили $||\cdot||$ на $\mathbb{Q}$

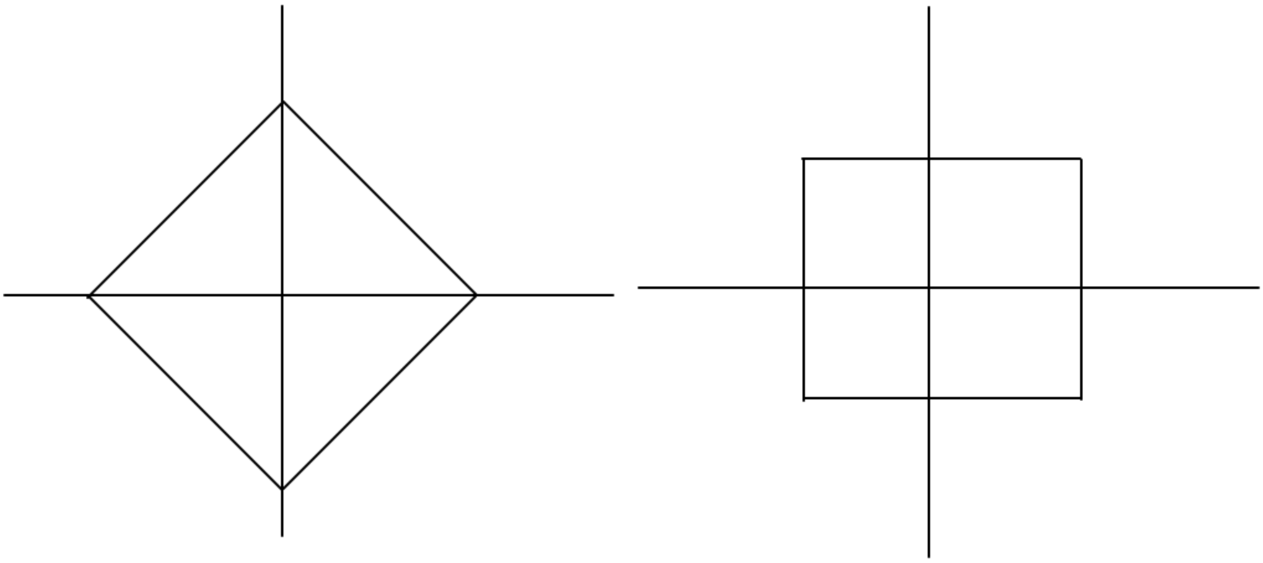
$$\rho_p(a, b) \coloneqq \begin{cases} ||a - b||, & a \ne b \\ 0, & a = b \end{cases}, \qquad a, b \in \mathbb{Q}$$

   ρ_p – p-адическая метрика

Доказательство того, что это всё – метрики, остаётся упражнением (хотя бы часть)

Определение 2. Шар с центром x_0 и радиусом ε:

$$B(x_0, \varepsilon) \coloneqq \{ \, x \in M \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon \, \}$$



(a) ρ_1 (b) ρ_∞

Рис. 1.1: Шары по различным метрикам (из примера 2)

1.2 Расположение точки относительно множества

(M, ρ) – метрическое пространство
$A \subset M, \qquad x_0 \in M$

Определение 3. x_0 называется внутренней для A, если $\exists\, \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset A$

Определение 4. x_0 называется внешней для A, если $\exists\, \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

Определение 5. Иначе x_0 – граничная, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} B(x_0, \varepsilon) \not\subset A \\ B(x_0, \varepsilon) \not\subset M \setminus A \end{cases}$$

Определение 6. Множество внутренних точек называется внутренностью ($\operatorname{Int}(A)$)
Множество внешних точек называется внешностью ($\operatorname{Ex}(A)$)
Множество граничных точек называется границей (δA, $\operatorname{Fr}(A)$)

Очевидно, что. $\operatorname{Int}(M \setminus A) = \operatorname{Ex} A$

Определение 7. $\operatorname{Cl} A \coloneqq \operatorname{Int} A \cup \delta A$ – замыкание A

Определение 8. Множество A называется открытым, если $A = \operatorname{Int} A$, то есть

$$\forall x_0 \in A \quad \exists\, \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset A$$

Определение 9. Множество A называется замкнутым, если $A = \operatorname{Cl} A$, то есть $M \setminus A$ открыто