Оглавление

Глава 1

Векторные пространства

1.1 Продолжение изоморфизма

Следствие. Отношение изоморфизма симметрично и транзитивно

Свойство. $f : U \to V$ – линейное отображение. Тогда

1. f – инъекция $\iff \ker f = \{0\}$

   Доказательство.

   - $\implies$
   $$\left.\begin{aligned} f(0) = 0 \\ f \text{ – инъекция} \end{aligned}\right\} \implies \forall u \neq 0 \quad f(u) \neq 0 \implies \forall u \neq 0 \quad u \notin \ker f$$
   - $\impliedby$
   Пусть $f(u_1) = f(u_2) \implies f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = 0 \implies u_1 - u_2 \in \ker f = set0 \implies u_1 - u_2 = 0 \implies u_1 = u_2$

   ☐

2. $\ker f = \{0\} \implies f$ – изоморфизм из U в $\operatorname{Im} f$

   Доказательство. f – инъекция (по предыдущему пункту)
   f – сюръекция (по определению $\operatorname{Im} f$)
   Значит, f – биекция
   f линейно
   Значит, f – изоморфизм ☐

Свойство. Пусть $f : U \to V$ – изоморфизм. Тогда

1. $e_1, \dots, e_k$ ЛНЗ $\iff f(e_1), \dots, f(e_k)$ ЛНЗ

   Доказательство. f^{-1} – изоморфизм $\implies$ достаточно доказать $\impliedby$, то есть, если $e_1, \dots, e_k$ ЛЗ, то $f(e_1), \dots, f(e_k)$ ЛЗ
   Пусть $a_1 e_1 + \dots + a_k e_k = 0$, не все a_i равны 0
   Тогда $a_1 f(e_1) + \dots + a_k f(e_k) = f(0) = 0 \implies f(e_i)$ ЛЗ ☐

2. $e_1, \dots, e_k$ – базис $U \implies f(e_1), \dots, f(e_k)$ – базис V

   Доказательство. Базис – максимальный ЛНЗ. Применим предыдущий пункт ☐

3. $\dim U = \dim V$

   Доказательство. Следует из предыдущего пункта ☐

Лемма 1 (выделение ядра прямым сложением)**.** Пусть U, V – конечномерны, $f : U \to V$ линейно
Тогда $\exists W$ – подпространство U, такое что:

1. $W \cong \operatorname{Im} f, \qquad f\Big|_W \to \operatorname{Im} f$ – изоморфизм

2. $\ker f \oplus W = U$

Доказательство. Пусть $g_1, ..., g_k \in V, \quad g_1, ..., g_k$ – базис $\operatorname{Im} f$

$$g_i \in \operatorname{Im} f \implies \exists e_i : f(e_i) = g_i, \quad e_i \in U$$

Положим $W = \langle e_1, ..., e_k \rangle$
Докажем, что W подходит:

1. Пусть $f_1 : W \to \operatorname{Im} f, \quad f_1 = f\Big|_W$. Докажем, что f_1 – изоморфизм:

   - Проверим сюръективность:
     Пусть $v \in \operatorname{Im} f \implies \exists a_i : v = a_1 g_1 + ... + a_k g_k \implies v = a_1 f(e_1) + ... + a_k f(e_k) = f_1(a_1 e_1 + ... + a_k e_k)$
   - Проверим инъективность:
     Достаточно проверить, что в 0 переходит только 0
     Пусть $w \in W, \quad f_1(w) = 0$

     $$w = a_1 e_1 + ... + a_k e_k$$

     $$f_1(w) = a_1 f(e_1) + ... + a_k f(e_k) = a_1 g_1 + ... + a_k g_k \xRightarrow[g_i \text{ ЛНЗ}]{} \forall i \quad a_i = 0 \implies w = 0 \cdot e_1 + ... + 0 \cdot e_k = 0$$

2. Проверим, что $\ker f + W = U$:
   Пусть $u \in U$
   Пусть $f(u) = v \in \operatorname{Im} f$
   Пусть $x \in W : f(x) = v$ (такой x существует, так как $f\Big|_W$ – изоморфизм)
   Положим $y = u - x$
   Тогда $f(y) = f(u) - f(x) = v - v = 0 \implies y \in \ker f$

   $$\left.\begin{aligned} u &= y + x \\ y &\in \ker f \\ x &\in W \end{aligned}\right\} \implies u \in \ker f + W$$

3. Докажем, что $U = \ker f \oplus W$:
   Достаточно доказать, что $\underset{\substack{x \in \ker f \\ y \in W}}{x + y = 0} \implies x = y = 0$

   $$x \in \ker f \implies f(y) = f(-x) = -f(x) = 0$$

   $$\left.\begin{aligned} &f\Big|_W \text{ – инъекция} \\ &f(y) = 0 \end{aligned}\right\} \implies y = 0 \implies x = 0$$

$\square$

Теорема 1 (размерность ядра и образа)**.** Пусть U конечномерно, $f : U \to V$ линейно
Тогда $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U$

Доказательство. Положим $W : W \cong \operatorname{Im} f, \quad U = \ker f \oplus W$
По свойству прямой суммы, $\dim U = \dim \ker f + \dim W \implies \dim U = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ $\square$

Теорема 2 (каноническая форма матрицы линейного отображения)**.** Пусть U, V конечномерны, $f : U \to V$ линейно

Тогда существуют базисы u, v, в которых матрица f имеет вид

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. $U = \ker f \oplus W$, $\quad f\Big|_W$ – изоморфизм из W в $\operatorname{Im} f$
Пусть $e_1, ..., e_k$ – базис W, $\quad e_{k+1}, ..., e_n$ – базис $\ker f$
Тогда $e_1, ..., e_n$ – базис U (по свойству прямой суммы)
$f(e_1), ..., f(e_k)$ – базис $\operatorname{Im} f$ (по свойству изоморфизма)
$f(e_1), ..., f(e_k)$ ЛНЗ
Положим $g_1 = f(e_1), ..., g_k = f(e_k)$
Дополним $g_1, ..., g_k$ до базиса V
Пусть $g_1, ..., g_m$ – базис V
Докажем, что базисы $e_1, ..., e_n$ и $g_1, ..., g_m$ подходят

- Пусть $i \le k$
$$f(e_1) = g_i = 0 \cdot g_1 + ... + 1 \cdot g_i + ... + 0 \cdot g_k + ...$$
- Пусть $i > k$
$$e_i \in \ker f \implies f(e_i) = 0 = 0 \cdot g_1 + ... + 0 \cdot g_m$$

□

Следствие. Пусть A – матрица $n \times n$ с коэффициентами из поля K
Тогда $\exists\, C, D$ – обратимые матрицы $n \times n$, такие, что

$$c^{-1}AD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть $U = K^n$, $\quad e_1, ..., e_n$ – базис U, $\quad f : A$ – матрица f в $e_1, ..., e_n$
Пусть $e'_1, ..., e'_n$, $\quad e''_1, ..., e''_n$ – базисы U, в которых f имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies C^{-1}AD = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где C, D – матрицы перехода □

Теорема 3 (линейное отображение и ранг матрицы)**.** Пусть U, V конечномерны, $f : U \to V$ линейно, A – матрица f в некоторых базисах
Тогда $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} A$

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис U, $g_1, ..., g_m$ – базис V
Пусть $w_i = f(e_i)$
Тогда $\operatorname{Im} f = \langle w_1, ..., w_n \rangle$, т. к.

$$\left.\begin{matrix} \forall v \in \operatorname{Im} f \ \exists\, u \in U : f(u) = v \\ \exists\, a_i : u = a_1 e_1 + ... + a_k e_k \end{matrix}\right\} \implies v = a_1 f(e_1) + ... + a_k f(e_k) = a_1 w_1 + ... + a_k w_k$$

Пусть $X_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ – j-й столбец матрицы f
Тогда $w_j = a_{1j} g_1 + ... + a_{mj} g_m$

$$\operatorname{rk} A = \dim\langle X_1, ..., X_n \rangle, \qquad \dim f = \dim\langle w_1, ..., w_n \rangle$$

Из любой порождающей системы можно выбрать базис $\implies$ $\dim\langle w_1, ..., w_n \rangle$ равна максимальному количеству ЛНЗ векторов из $w_1, ..., w_n$

Аналогично для $X_1, ..., X_n$
Пусть $v = c_1 w_1 + ... + c_n w_n, \quad X$ – столбец координат базиса
Тогда $X = c_1 X_1 + ... + c_n X_n$

$$v = c_1 w_1 + ... + c_n w_n = c_1(a_{11} g_1 + ... + a_{i1} g_1 + ... + a_{m1} g_m) + ... + c_n(a_{1n} g_1 + ... + a_{in} g_i + ... + a_{mn} g_m) = \\ = (c_1 a_{11} + ... + c_n a_{1n} g_1 + ... + (c_1 a_{i1} + ... + c_n a_{1n}) g_i + ...$$

$$v = 0 \iff x = 0$$

$$c_1 w_1 = ... + c_n w_n = 0 \iff c_1 x_1 + ... + c_n x_n = 0$$

□

1.2 Действия над линейными отображениями

Определение 1. Пусть $f, g : U \to V, \quad k$ – скаляр
Отображением $f + g$ называется такое отображение, что $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$
Отображением kf называется такое отображение, что $(kf)(u) = k \cdot f(u)$

Замечание. $f + g, \ kf$ линейны

Определение 2. Произведением $f : V \to W$ и $g : U \to V$ называется $fg = f \circ g : U \to V$
В частности, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n} : U \to U$

Замечание. $fg, \ f^n$ линейны

Лемма 2 (действия над отображением и матрицей).

1. Пусть U, V конечномерны, e_i, e'_i – их базисы, $f, g : U \to V$ линейны, A, B – матрицы f и g, a, b – скаляры
   Тогда $aA + bB$ – матрица $af + bg$
   Доказательство. Пусть $u \in U, \quad X$ – столбец координат u в $e_i, \quad Y_1, Y_2$ – столбцы координат $f(u), g(u)$ в $e_i \implies Y_1 = AX, \ Y_2 = BX \implies aY_1 + bY_2 = aAX + bBX = (aA + bB)X$

   $(af + bg)(u) = af(u) + bg(u) \implies$ столбец координат $(af + bg)(u) = aY_1 + bY_2 = (aA + bB)X$

   □

2. Пусть U, V, W конечномерны, e_i, e'_i, e''_i – их базисы, $f : V \to W, g : U \to V$ линейны, A, B – матрицы f, g
   Тогда AB – матрица fg
   Доказательство. $u \in U, w \in W : (fg)(u) = w$
   X, Z – столбцы координат
   Пусть $v = g(u), \quad Y$ – толбец координат $V \implies Y = BX, \ Z = AY \implies Z = A(BX) = (AB)X$ □

Теорема 4 (пространство линейных отображений). U, V – векторные пространства над полем K. Тогда:

1. Множество линейных отображений образует векторное пространство над K
2. Если $\dim U = m, \ \dim V = n$, то пространство линейных отображений изоморфна пространству матриц размера $m \times n$, его размерность равна mn