Оглавление

0.1 Вычисление кривизны

$r = \vec{f}(t)$
Как вычислить кривизну k через эту параметризацию?
Есть перепараметризация $\vec{f}(t) = \vec{g}(s)$, $\qquad s$ – натуральный параметр

$$|\vec{g}'(s)| = 1 \qquad k = |g''(s)|$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |f'(t)| \,\mathrm{d}\,\tau \qquad s'(t) = |f'(t)|$$

$$f(t) = g\Big(s(t)\Big)$$

$$f'(t) = g'\Big(s(t)\Big) \cdot s'(t)$$

$$f''(t) = g'' \cdot s'^2 + g' \cdot s''$$

g'' – то, что нам нужно, но мешает s'' (там будет производная от модуля, это не очень хорошо)
Домножим векторно на f' $(= g's')$:

$$f'' \times f' = (\vec{g''}s'^2) \times \vec{g'}s' + \underbrace{(\vec{g'}s'') \times \vec{g'}s'}_{=0}$$

$$f'' \times f' = s'^3 \cdot (g'' \times g')$$

$$|f'' \times f'| = |s'|^3 \cdot \underbrace{|g''|}_{=k} \cdot \underbrace{|g'|}_{=1} \cdot \underbrace{\sin(\widehat{g'', g'})}_{=1}$$

$$|f'' \times f'| = |f'|^3 \cdot k$$

$$\boxed{k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}}$$

Примеры (общие формулы для разных способов задания кривой)**.**

1. Кривая задана на плоскости, в явном виде

$$y = f(x)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r} = (t, f(t), 0) \text{ – то, что в формуле было } \vec{f}$$

$$\vec{r'} = (1, f', 0), \qquad \vec{r''} = (0, f'', 0), \qquad r' \times r'' = (0, 0, f'')$$

$$\boxed{k = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}}$$

2. В полярных координатах

$$r = r(\varphi)$$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{f}(t) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0), \qquad f' = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi; r'\sin\varphi + r\cos\varphi; 0)$$

Напоминание. $|f'| = \sqrt{r^2 + r'^2}$

Напоминание. $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + f'g''$

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)}g + \ln^1 f^{(n-1)}g' + \ln^2 f^{(n-2)}g'' + \dots$$

$$f'' = (r''\cos\varphi - 2r'\cos\varphi - r\cos\varphi; r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\cos\varphi; 0)$$

Векторно умножаем два вектора с нулевой третьей координатой, получаем вектор с единственной третьей ненулевой координатой:

$$f' \times f'' = \Big(0; 0;$$

$$(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)(r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi) - (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)(r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi)\Big)$$

$$|f' \times f''| =$$

$$= |\cancel{r'r''\cos\varphi\sin\varphi} + 2r'^2\cos^2\varphi - \cancel{r'r\cos\varphi\sin\varphi} - r''r\sin^2\varphi - \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} +$$

$$+ r^2\sin^2\varphi - \cancel{r''r'\cos\varphi\sin\varphi} + 2r'^2\sin^2\varphi + \cancel{r'r\sin\varphi\cos\varphi} - rr''\cos^2\varphi + \cancel{2rr'\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\cos\varphi| =$$

$$= 2r'^2 - r''r + r^2$$

$$\boxed{k = \frac{r''r - 2r'^2 - r^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}}$$

3. $f(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$

$$f' = (x', y', z'), \qquad f'' = (x'', y'', z''), \qquad f'' \times f' = (y''z' - z''y'; z''x' - x''z'; x''y' - y''x')$$

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{(y''z' - z''y')^2 + (z''x' - x''z')^2 + (x''y' - y''x')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}$$

Теорема 1. $k(t) = 0 \iff$ кривая является частью прямой (отрезком)

Доказательство.

- $\Longleftarrow$ – очевидно (у линейной функции вторая производная равна нулю)
- $\Longrightarrow$
  Рассмотрим натуральную параметризацию $g(s)$
  По условию, $g''(s) = 0$
  Значит, $g(s)$ – линейная функция (решаем простенький дифур, получаем)

$\square$

0.2 Высисление кручения

Как кручение вычисляется в натуральной параметризации?.

$$g' = v, \qquad g'' = v' = k \cdot n, \qquad g''' = k'n + kn' \underset{\text{Френе}}{=} k'n + k(-k\vec{v} + æ\vec{b})$$

$$(g', g'', g''') = (\vec{v}, k\vec{n}, \cancel{k'\vec{n}} - k^2\vec{v} + kæ\vec{b}) = k^2 æ \underbrace{(v, n, b)}_{=1}$$

$$\boxed{æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}}$$

$$v = \vec{f}(t) = \vec{g}(s) = g\Big(s(t)\Big)$$
$$f' = g' \cdot s'$$
$$f'' = g''s'^2 + g's''$$

Напоминание. $(g')' = g''s'$ (как сложная функция)

$$f''' = g''' \cdot s'^3 + g''2s' \cdot s'' + g''s's'' + g's''' = g'''s'^3 + 3g''s''s' + g's'''$$

Избавимся от s'' и s''':

Напоминание. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} + \lambda\vec{c}, \vec{c})$

$$(f', f'', f''') = \Big(\vec{g}'s'; g''s'^2 + \cancel{\vec{g}'s''}; g'''s'^3 + \cancel{3g''s''s'} + \cancel{g's'''}\Big) = |\underbrace{f'}_{s'}|^6(g', g'', g''') = |f'|^6 k^2 æ$$

$$æ = \frac{(f', f'', f''')}{k^2|f'|^6}$$

Напоминание.

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

$$\boxed{æ = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}}$$

Замечание. Кручение определено только для бирегулярной кривой ($\iff k \neq 0$)

Теорема 2. $æ = 0 \iff$ кривая плоская

Доказательство. Докажем в натуральной параметризации:
По формуле Френе, $b' = -æ\vec{n}$
$b' = 0$, если $æ = 0$
Значит, $b = \text{const} \implies$ все соприкасающиеся плоскости параллельны
То есть, все соприкасающиеся плоскость – это одна и та же плоскость (*есть объяснение на рисунке*) □

0.3 Натуральные уравнения

Теорема 3. Кривая задаётся кривизной и кручением (с точностью до положения в пространстве)

Доказательство. Пусть есть две кривые, у которых $k_1 = k_2$ и $æ_1 = æ_2$
Рассмотрим $\vec{g_1}(s); \vec{g_2}(s)$ – натуральные параметризации

Совместим так, чтобы

$$\begin{cases} v_1(s_0) = v_2(s_0) \\ n_1(s_0) = n_2(s_0) \\ b_1(s_0) = b_2(s_0) \end{cases}$$

Это и означает “с точностью до положения в пространстве”
Рассмотрим функцию

$$f(s) = \vec{v_1}(s) \cdot \vec{v_2}(s) + \vec{n_1}(s) \cdot \vec{n_2}(s) + \vec{b_1}(s) \cdot \vec{b_2}(s)$$

$f(s_0) = 3$ (скалярное произведение соотв. функций равно 1)
При этом, $f(s) \leq 3$ (по тем же соображениям)
$f(s) = 3 \iff v_1 = v_2, n_1 = n_2, b_1 = b_2$ в точке s
Хотим доказать, что $f(s) = 3$ везде
Возьмём производную:

$$f'(s) = v_1' v_2 + v_1 v_2' + n_1' n_2 + n_1 n_2' + b_1' b_2 + b_1 b_2'$$

Распишем по формуле Френе:

$$f'(s) = k_1 n_1 v_2 + k_2 v_1 n_2 - k_1 v_1 n_2 + æ_1 b_1 n_2 - k_2 n_1 v_2 + æ_2 n_1 b_2 - æ_1 n_1 b_2 - æ_2 b_1 n_2 \underset{\substack{k_1 = k_2 \\ æ_1 = æ_2}}{=} 0$$

$\square$