Оглавление

0.1 Теорема о неявной функции (отображении)

Теорема 1. $\mathbb{R}^{n\geq 1}, \qquad \mathbb{R}^{m\geq 1}, \qquad \mathbb{R}^{n+m}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^n, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^m, \qquad Z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

$E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – откр., $\qquad F : E \to \mathbb{R}^n, \qquad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)}$

$Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \in E$ такая, что $\boldsymbol{F(Z_0) = \mathbb{O}_n}, \qquad f_j(Z) = f_j\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right), \qquad \boldsymbol{\det \mathcal{D}F(Z_0) \neq 0}$

$$\implies \exists \underset{\text{окрестность}}{W(Y_0)} \subset \mathbb{R}^n, \quad \exists! g : W \to \mathbb{R}^n : \begin{cases} g \in \mathcal{C}^1\Big(W\Big) \\ g(Y_0) = X_0 \\ \forall\ Y \in W \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \in E \\ F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \end{cases} \end{cases}$$

Доказательство. Выпишем матрицу Якоби для F:

$$\mathcal{D}F(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & \dots & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & \dots & f'_{1y_m}(Z_0) \\ . & . & . & . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z_0) & \dots & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & \dots & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

1. Построение g, W, E

   Определим отображение $\Phi(Z) := \begin{bmatrix} F(Z) \\ Y \end{bmatrix}$

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\Phi(Z) = \Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \varphi_1(Z) \\ \vdots \\ \varphi_{n+m}(Z) \end{bmatrix}$$

Напоминание. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$$\varphi_k\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} y_{k-n}, & k > n \\ f_k\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right), & 1 \le k \le n \end{cases}$$

$$\Phi \in \mathcal{C}^1\left(E\right)$$

Временно обозначим $x_{n+k} \coloneqq y_k$
Напишем матрицу Якоби для Φ:

$$\mathcal{D}\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc} \varphi'_{1x_1}(Z) & \dots & \varphi_{1x_{n+m}}(Z) \\ . & . & . \\ \hline . & . & . \\ \varphi'_{n+mx_1}(Z) & \dots & \varphi_{n+m}x_{n+m}'(Z) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f'_{1x_n}(Z) & f'_{1y_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) & f'_{ny_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{ny_m}(Z) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(черта стоит после n-го ряда)
Обозначим

$$A(Z) \coloneqq \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f1x_n'(Z) \\ . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) \end{bmatrix}, \qquad B(Z) \coloneqq \begin{bmatrix} f'_{1y_1}(Z) & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ . & . & . \\ f'_{ny_1}(Z) & \dots & f'_{ny_m}(Z) \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях

$$\mathcal{D}F(Z) = \Big[A(Z)B(Z)\Big], \qquad \mathcal{D}\Phi(Z) = \begin{bmatrix} A(Z) & B(Z) \\ \mathbb{O}_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}$$

Найдём Якобиан Φ:
Раскладвыая по последней строке, получаем новую матрицу поряка $(m-1)\times(n-1)$
Будем так делать, пока внизу стоит I_m (т. е. m раз)
Останется $A(Z)$:

$$\det \mathcal{D}F(Z) = \det A(Z), \qquad \text{в частности, } \det \mathcal{D}F(Z_0) = \det A(Z_0) \underset{\text{по усл.}}{\neq} 0$$

То есть, матрица Якоби в Z_0 обратима. Значит, к Φ можно применить теорему об обратном отображении
Будем верхним индексом к шарам обозначать, в каком пространстве они находятся

$$\exists\, \mathsf{B}_r^{n+m}(Z_0), \quad V \coloneqq \Phi\Big(\mathsf{B}_r^{n+m}(Z_0)\Big), \qquad \exists\, \Psi : V \to B_r^{n+m}(Z_0), \text{ такое что:}$$

$$\Psi \in \mathcal{C}^1\Big(V\Big)$$

$$\Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \in V, \qquad S \in \mathbb{R}^n, \quad T \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

$$\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in B_r^{n+m}(Z_0) \tag{2}$$

Обозначим

$$\Psi\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right) =: \begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\\ \lambda\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\end{bmatrix}$$

(где ψ задаёт первые n столбцов, а λ – оставшиеся m)

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\\ \lambda\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\end{bmatrix}\right) \overset{\text{def }\Phi}{=\!=\!=} \begin{bmatrix}F\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\\ \lambda\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\end{bmatrix}\right)\\ \lambda\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\end{bmatrix} \underset{(1)}{=\!=} \begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix} \tag{3}$$

$$(3) \implies \lambda\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right) = T \tag{4}$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right) \overset{\text{def }\Psi,(4)}{=\!=\!=\!=} \begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}S\\T\end{bmatrix}\right)\\ T\end{bmatrix} \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда $S = \mathbb{O}_n$:

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\T\end{bmatrix}\right)\\ T\end{bmatrix}\right) \underset{(5)}{=\!=} \Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\T\end{bmatrix}\right)\right) \underset{(1)}{=\!=} \begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\T\end{bmatrix}$$

При этом,

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\T\end{bmatrix}\right)\\ T\end{bmatrix}\right) \overset{\text{def }\Phi}{=\!=\!=} \begin{bmatrix}F\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\T\end{bmatrix}\right)\\ T\end{bmatrix}\right)\\ T\end{bmatrix}$$

Из последних двух выражений следует, что

$$F\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\T\end{bmatrix}\right)\\ T\end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \tag{6}$$

Из того, что V открытое и $\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y_0\end{bmatrix} \in V$, следует, что

$$\exists\, \rho > 0: \quad \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y_0\end{bmatrix}\right) \subset V$$

При этом, если $Y \in \mathtt{B}_\rho^m(Y_0)$, то

$$\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y\end{bmatrix} \in \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y_0\end{bmatrix}\right)$$

Поэтому (6) выполнено при $T \in \mathtt{B}_\rho^m(Y_0)$

Вспомним про отображение g из формулировки теоремы. Оно действует из некоторого W

Возьмём

$$W := \mathtt{B}_\rho^m(Y_0), \qquad E := \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y_0\end{bmatrix}\right), \qquad g(Y) := \psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y\end{bmatrix}\right)$$

Тогда мы действительно имеем $g : W \to \mathbb{R}^n$

$$F\left(\begin{bmatrix}g(Y)\\Y\end{bmatrix}\right) \overset{\text{def }g}{=\!=\!=} F\left(\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y\end{bmatrix}\right)\\ Y\end{bmatrix}\right) \underset{(6)}{=\!=} \mathbb{O}_n$$

2. Теперь надо выяснить, чему равно $g(Y_0)$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right)\right) \overset{}{\underset{(2)}{=\!=}} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \\ &\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right)\right) \underset{(7)}{=\!=} \Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{def } \Psi}{=\!=\!=} \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \\ Y_0 \end{bmatrix} \overset{\text{def } g}{=\!=\!=} \begin{bmatrix} g(Y_0) \\ Y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies g(Y_0) = X_0$$

3. Осталось проверить единственность g

Пусть есть другое $g_1 \in \mathcal{C}^1\left(B_\rho^m(Y_0)\right)$, такое что

$$g_1(Y_0) = X_0, \qquad F\left(\begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n$$

$$(2) \implies \Psi\left(\begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

При этом,

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

Правые части равны, а значит, и левые части равны
Значит, $g_1(Y) = g(Y)$

□

0.1.1 Вычисление матрицы Якоби для неявного отображения

$$P(Y) = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \qquad g \in \mathcal{C}^1\left(W\right), \qquad P \in \mathcal{C}^1\left(W\right)$$

По последнему утверждению из теоремы,

$$F\left(P(Y)\right) = \mathbb{O}_n \quad \forall Y \in W$$

$$\implies \mathcal{D}\left(F\big(P(Y)\big)\right) = \mathbb{O}_{n\times m}$$

Применим теорему о матрице Якоби суперпозиции:

$$\mathcal{D}F\left(P(Y)\right)\mathcal{D}P(Y) = \mathbb{O}_{n\times m} \tag{8}$$

$$\mathcal{D}P(Y) \overset{\text{def } P(Y)}{=\!=\!=\!=} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} \tag{9}$$

Обозначим $Z \coloneqq P(Y)$

$$\mathcal{D}F(Z) = \begin{bmatrix} A(Z) B(Z) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}F(Z)\mathcal{D}P(Y) \underset{(9)}{=\!=} \begin{bmatrix} A(Z) B(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} = A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z)I_m = A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z) \tag{10}$$

$$(8), (10) \implies A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z) = \mathbb{O}_{n\times m} \implies \mathcal{D}g(Y) = -A^{-1}(Z)B(Z)$$

0.2 Условные экстремумы

Определение 1. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}, \qquad M \subset E, \qquad X_0 \in M, \qquad f : E \to \mathbb{R}$
Говорят, что X_0 – точка локального экстремума f при условии M, если X_0 – точка локального экстремума функции $f\Big|_M$

Определение 2. $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – открытое, $\qquad F : E \to \mathbb{R}^n, \qquad X_0 \in E, \qquad f(X_0) = \mathbb{O}_n, \qquad f : E \to R$
Говорят, что X_0 – точка локального экстремума f при условии $F(X) = \mathbb{O}_n$, если X_0 – точка локального экстремума f при условии $\ker F$

0.2.1 Теорема о множителях Лагранжа

Теорема 2 (о множиетелях Лагранжа)**.** $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – открытое, $\qquad F \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$
$\operatorname{rk} \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in E, \qquad X_0 \in E : \quad F(X_0) = \mathbb{O}_n$

$$\implies \exists! \Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) : \quad \text{для } \varphi(X, \Lambda) := f(X) + \underset{\text{строка}}{\Lambda} \underset{\text{столбец}}{F(X)} \qquad \nabla\varphi(X_0, \Lambda) = \underset{\text{строка}}{\mathbb{O}^T_{n+m}} \tag{11}$$

Замечание. Числа λ_i называются множителями Лагранжа

Доказательство.

- Существование
  Пусть $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$
  Запишем матрицу Якоби для F:

$$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} F'_{1x_1}(X) & \dots & F'_{1x_{n+m}}(X) \\ . & . & . \\ F'_{nx_1}(X) & \dots & F'_{nx_{n+m}}(X) \end{bmatrix}$$

  По условию, её ранг равен n при любом X. НУО считаем, что не равен нулю “верхний левый” минор, в том числе при X_0:

$$\begin{vmatrix} F'_{1x_1}(X_0) & \dots & F'_{1x_n}(X_0) \\ . & . & . \\ F'_{nx_1}(X_0) & \dots & F'_{nx_n}(X_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{12}$$

  Обозначим $X' := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$
  Определим матрицы A и B так же, как в теореме о неявном отображении, то есть так, что

$$\mathcal{D}F(X) = \Big[A(X) B(X)\Big], \qquad \det A(X_0) \neq 0$$

  Обозначим $X'_0 := \begin{bmatrix} x^0_1 \\ \vdots \\ x^0_n \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} x^0_{n+1} \\ \vdots \\ x^0_{n+m} \end{bmatrix}$
  По теореме о неявном отображении

$$\exists W \ni Y_0, \qquad \exists! g : W \to \mathbb{R}^n : \quad g \in \mathcal{C}^1\Big(W\Big), \quad F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \quad \forall\, Y \in W \tag{13}$$

  Из единственности g следует, что

$$\exists U \subset E \subset \mathbb{R}^{n+m}, \ X_0 \in U : \quad \forall X \in U \quad \left(F(X) = \mathbb{O}_n \iff X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \quad Y \in W\right)$$

X из условия теоремы подходит под правое условие, значит,

$$\varphi(X,\Lambda) \xlongequal{\text{def } \varphi} f(X) + \Lambda F(x) = f(X) + \Lambda \mathbb{O}_n = f(X)$$

$$\text{То есть, } X_0 \text{ – т. лок. экстеремума функции } \varphi(X,\Lambda) \quad \forall \Lambda \text{ при условии } F(X) = \mathbb{O}_n \tag{14}$$

Возьмём $Y \in W$
Рассмотрим функцию

$$h(Y,\Lambda) \coloneqq \varphi\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \Lambda\right) = f\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) + \Lambda F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right), \qquad Y_0 \in W \tag{15}$$

$$\varphi(X,\Lambda) \xlongequal[\text{при } X\in U \text{ и } F(X)=\mathbb{O}_n]{} h(Y,\Lambda), \qquad \text{где } X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

Вместе с (14) это означает, что Y_0 – точка локального экстремума $h(Y)$ (без условий)
Для h действует необходиомое условие локального экстремума:

$$\nabla h(Y_0,\Lambda) = \mathbb{O}_m^T$$

Рассмотрим теперь h как отображение в $\mathbb{R}^1$
Его градиент будет матрицей Якоби $n \times 1$:

$$\mathcal{D}h(Y_0,\Lambda) = \nabla h(Y_0,\Lambda) = \mathbb{O}_m^T \tag{16}$$

Определим отображение $P(Y) \coloneqq \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$
Возьмём $Y \in W$

$$h(Y,\Lambda) \xlongequal[(15)]{} f\Big(P(Y)\Big) + \Lambda F\Big(P(Y)\Big)$$

$$\implies \mathcal{D}h(Y,\Lambda) = \mathcal{D}\Big(f\big(P(Y)\big)\Big) + \Lambda \mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big) \tag{17}$$

Вспомним, чему равны матрицы Якоби суперпозиции:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}\Big(f\big(P(Y)\big)\Big) &= \mathcal{D}f\Big(P(Y)\Big) \cdot \mathcal{D}P(Y) \\ \mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big) &= \mathcal{D}F\Big(P(Y)\Big) \cdot \mathcal{D}P(Y) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

При доказательстве теоремы о неявной функции мы получили, что

$$\mathcal{D}P(Y) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\mathcal{D}F(X_0) = \Big[A(X_0) B(X_0)\Big]$$

Подставим Y_0 в (17) и (18):

$$P(Y_0) = X_0$$

Снова будем вместо матрицы Якоби писать градиент:

$$\mathcal{D}f(X_0) = \Big(f'_{x_1}(X_0), ..., f'_{x_{x+m}}(X_0)\Big)$$

Запишем его как два градиента:

$$\nabla_1 f(X_0) \coloneqq \Big(f'_{x_1}(X_0), ..., f'_{x_n}(X_0)\Big), \qquad \nabla_2 f(X_0) \coloneqq \Big(f'_{x_{n+1}}(X_0), ..., f'_{x_{n+m}}(X_0)\Big)$$

$$\mathcal{D}f(X_0) = \Big(\nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0)\Big) \tag{20}$$

$$(18)-(19) \implies \mathbb{O}_m^T \underset{(16)}{=\!=\!=} \mathcal{D}h(Y_0,\Lambda) \underset{(17)}{=\!=\!=}$$

$$= \underbrace{\Big(\nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0)\Big)}_{(20)} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y_0) \\ I_m \end{bmatrix} + \Lambda \Big[A(X_0) B(X_0)\Big] \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla_1 f(X_0)\underline{\mathcal{D}g(Y_0)} + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda\Big(A(X_0)\underline{\mathcal{D}g(Y_0)} + B(X_0)\Big) =$$

$$= \underbrace{\Big(\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0)\Big)} \mathcal{D}g(Y_0) + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0) \quad (21)$$

Хотим выбрать Λ так, чтобы скобка обратилась в 0:

$$\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_m^T$$

$$\Lambda = -\nabla_1 f(X_0) A^{-1}(X_0)$$

При таком Λ выделенная скобка равна 0, а значит из (21) остаётся только

$$\nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0) = \mathbb{O}_m^T$$

Вернёмся к полному градиенту:

$$\nabla f(X_0) + \Lambda \Big[A(X_0) B(X_0)\Big] = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

"Склеивая" A и B, получаем

$$\nabla f(X_0) + \Lambda \mathcal{D}F(X_0) = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

- Единственность
  Возьмём какой-то другой набор Λ

$$\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_n^T$$

Так мы определяли Λ, а значит она единственна

□