Оглавление

Глава 1

$\mathbb{R}^n$

1.1 Непрерывность суперпозиции отображений

Теорема 1. $E \subset \mathbb{R}^n$, $\quad G \subset \mathbb{R}^k$, $\quad A \in E$ – т. сг. E, $\quad \alpha \in G$ – т. сг. G, $\quad n, k, l \geq 1$
$F : E \to \mathbb{R}^k$, $\quad \forall x \in E \quad F(X) \in G$, $\quad F(A) = \alpha$, $\quad F$ непр. в A
$\Phi : G \to \mathbb{R}^l$, $\quad \Phi$ непр. в α, $\quad K : E \to \mathbb{R}^l$, $\quad K(X) = \Phi(F(X))$

$$\text{Тогда } K \text{ непр. в } A \tag{1.1}$$

Доказательство. Т. к. Φ непр. в α,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 : \forall y \in B_\eta(\alpha) \cap G \quad \|\Phi(y) - \Phi(\alpha)\|_l < \varepsilon \tag{1.2}$$

Т. к. F непр. в A,

$$\exists \delta > 0 : \forall X \in B_\delta(A) \cap E \quad \|F(X) - F(A)\|_k < \eta \tag{1.3}$$

$$(1.3) \implies F(X) \in B_\eta(F(A)) \cap G \implies F(X) \in B_\eta(\alpha) \cap G \tag{1.4}$$

$$(1.4), (1.2) \implies \forall X \in B_\delta(A) \cap E \quad \|\Phi(F(X)) - \Phi(\alpha)\|_l < \varepsilon \tag{1.5}$$

$$(1.5) \underset{(F(A)=\alpha)}{\iff} \|\Phi(F(X)) - \Phi(F(A))\|_l < \varepsilon \iff \|K(X) - K(A)\|_l < \varepsilon$$

$\square$

Определение 1. $K \subset \mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 1$, $\quad K \neq \emptyset$
Множество K называется компактом, если оно ограничено и замкнуто

Теорема 2 (первая Вейерштрасса)**.** K – компакт в $\mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 1$, $\quad f : K \to \mathbb{R}^n$, $\quad f$ непр. во всех т. сг.
Тогда f ограничена, т. е.

$$\exists M : \forall X \in K \quad |f(X)| \leq M \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть это не так, т. е.

$$\forall N \geq 2 \quad \exists X_N \in K : |f(X_N)| > |f(X_1)| + \ldots + |f(X_{N-1})| + N, \qquad |f(X_1)| > 1 \tag{1.7}$$

$$(1.7) \implies \forall p \neq q \quad X_p \neq X_q$$

Поскольку все они принадлежат K, а K – это ограниченное множество, то

$$\exists R > 0 : \forall N \quad \|X_N\| \leq R \tag{1.8}$$

Можно применить принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{X_{N_m}\}_{m=1}^{\infty}, \quad \exists X_* : X_{N_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} X_* \tag{1.9}$$

$$X_{N_m} \in K$$

Поскольку они все различны, X_* – т. сг. $K \xRightarrow[K\text{ (замкн.)}]{} X_* \in K$

Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда, в силу непрерывности f в X_*,

$$\exists \delta_0 : \forall X \in K \cap B_{\delta_0}(X_*) \quad |f(X) - f(X_*) < 1 \tag{1.10}$$

$$(1.10) \implies |f(X)| \overset{\triangle}{\leq} |f(X) - f(X_*) + |f(X_*)| < 1 + |f(x_*) \tag{1.11}$$

$$\text{Возьмём } N_0 > 1 + |f(X_*)| \tag{1.12}$$

$$(1.9) \implies \exists N_1 : \forall m > N_1 \quad \|X_{N_m} - X_*\| < \delta_0 \tag{1.13}$$

$$\text{Возьмём } m_0 \coloneqq \max\{\, N_0, N_1 + 1 \,\} \tag{1.14}$$

$$(1.7), (1.12), (1.14) \implies |f(X_{N_{m_0}})| > N_{m_0} \geq N_0 > |f(X_*)| + 1 \tag{1.15}$$

С другой стороны,

$$(1.11), (1.13), (1.14) \implies |f(X_{N_{m_0}}) < |f(X_*)| + 1 \tag{1.16}$$

$$(1.15) \lightning (1.16)$$

□

Теорема 3 (вторая Вейерштрасса). $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $f : K \to \mathbb{R}^n$ непрерывна во всех т. сг. K
Тогда

$$\exists X_-, X_+ \in K : \forall X \in K \quad f(X_-) \leq f(X) \leq f(X_+) \tag{1.17}$$

Доказательство.

- X_+
  Пусть такого X_+ не существует
  По теореме 2,

$$\exists M : \forall X \in K \quad f(X) \leq M \tag{1.18}$$

$$(1.18) \implies \sup_{x\in K} f(X) \coloneqq M_0 \leq M \tag{1.19}$$

$$\forall X \in K \quad f(X) < M_0 \tag{1.20}$$

$$\varphi(X) \coloneqq \frac{1}{M_0 - f(X)} \tag{1.21}$$

$$(1.20) \implies \forall X \in K \quad \varphi(X) > 0 \tag{1.22}$$

  $(1.20) \implies \varphi$ непрерывна во всех т. сг. K
  По теореме 2, φ ограничена, т. е

$$\exists L : \forall X \in K \quad \varphi(X) \leq L \tag{1.23}$$

$$(1.21), (1.23) \implies \frac{1}{M_0 - f(X)} \leq L \tag{1.24}$$

$$(1.24) \iff M_0 - f(X) \geq \frac{1}{L} \iff f(X) \leq M_0 - \frac{1}{L} \quad \forall X \in K \tag{1.25}$$

$$(1.25) \implies \sup_{X \in K} f(X) \leq M_0 - \frac{1}{L} \tag{1.26}$$

Вспомним, что через M_0 мы обозначили $\sup_{X\in K} f(X)$ – $\lightning$

- X_-
  Рассмотрим $g(X) = -f(X)$
  По только что доказанному,

$$\exists\, X_- : g(X) \leq g(X_-) \iff -f(X) \leq -f(X_-) \iff f(X) \geq f(X_-)$$

$\square$

Определение 2. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \qquad X_0, X_1, X_2 \in E$
X_0 будем называть внутренней точкой E, если $\exists\, B_r(X_0) \supset E$
X_1 будем называть внешней точкой E, если $\exists\, \delta : B_\delta(X_1) \cap E \neq \emptyset$
X_2 будем называть граничной точкой E, если она не внутренняя, и не внешняя

Утверждение 1. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \qquad E \neq \emptyset, \qquad E \neq \mathbb{R}^n$
Тогда множество его граничных точек не пусто

Определение 3. Множество граничных точек называется границей E

Обозначение. ∂E

Определение 4. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \qquad X = (x_1, ..., x_n) \in E$ – внутр. т. E
Обозначим $e_k := (0, ..., \underset{k \text{ место}}{1}, ..., 0)$

$$\exists\, \delta : \forall \underset{h \neq 0}{|h|} < \delta \quad \forall k = 1, ..., n \quad X + he_k = E \tag{1.27}$$

$f : E \to \mathbb{R}$ Чатсной производной по переменной x_k называется

$$f'_{x_k}(X) := \lim_{h \to 0} \frac{f(X + he_k) - f(X)}{h} \tag{1.28}$$

Рассмотрим $g(y) = f(x_1, ..., \underset{k \text{ место}}{y}, ..., x_n), \qquad y \in (x_k - \delta, x_k + \delta)$

$$(1.28) \implies g'(x_k) = f'_{x_k}(X)$$

Пример.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq \mathbb{O}_2 \\ f(\mathbb{O}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,0) + he_1 = (h, 0) \\ (0,0) + he_2 = (0, h) \end{cases}$$

$$\frac{f(\mathbb{O}_2 + he_1) - f(\mathbb{O}_2)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$\frac{f(\mathbb{O}_2 + he_2) - f(\mathbb{O}_2)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$\implies \exists\, f'_{x_1}(\mathbb{O}_2), f'_{x_2}(\mathbb{O}_2)$$

$$X_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{O}_2$$

$$f(X_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Определение 5. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \qquad X \in E$ – внутр. т., $\qquad f : E \to \mathbb{R}$
Бдуем говорить, что f дифференцируема в X, если

$$\exists\, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} : \forall \begin{cases} H \in \mathbb{R}^n \\ X + H \in E \\ H = (h_1, ..., h_n) \end{cases} \qquad f(X+H) - f(X) = a_1h_1 + ... + a_nh_n + r(H) \tag{1.29}$$

$$\frac{r(H)}{\|H\|} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \tag{1.30}$$

Теорема 4. f дифференц. в X

$$\implies \forall k = 1, ..., n \quad \exists\, f'_{x_k}(X) = a_k \tag{1.31}$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon = 1$

$$\exists\, \delta > 0 : \forall 0 < \|H\| < \delta \quad \left|\frac{r(H)}{\|H\|}\right| < 1 \tag{1.32}$$

$$(1.32) \implies |r(H)| < \|H\|$$

Возьмём $A \coloneqq \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$

$$|a_1h_1 + ... + a_nh_n| \leq A\,\|H\| \tag{1.33}$$

$$(1.29), (1.32), (1.33) \implies |f(X+H) - f(X)| \leq |a_1h_1 + ... + a_nh_n| + |r(H)| \leq A\,\|H\| + \|H\| \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0$$

Возьмём $\forall 1 \leq k \leq n$

> **Напоминание.** Мы обозначаем $e_k \coloneqq (0, ..., \underset{k}{1}, ..., 0)$

Определим $H_k \coloneqq he_k$
Тогда $\|H_k\| = |h|$

$$f(X + H_k) - f(X) = a_kh + r(H_k) \tag{1.34}$$

Поделим на h:

$$\underbrace{\frac{f(X+H_k) - f(X)}{h}}_{\coloneqq F} = a_k + \frac{r(H_k)}{h}$$

$$(1.30) \implies \left|\frac{r(H_k)}{h}\right| = \left|\frac{r(H_k)}{\|H_k\|}\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \implies F \xrightarrow[h\to 0]{} a_k$$

□

Следствие. f дифференцируема в X

$$\implies f(X+H) - f(X) = f'_{x_1}(X)h_1 + ... + f'_{x_n}(X)h_n + r(H) \tag{1.35}$$

Определение 6. Эта функция называется дифференциалом функции f в точке X при значении H

Обозначение. $\mathrm{d}\ f(X, H) \coloneqq f'_{x_1}(X)h_1 + ... + f'_{x_n}(X)h_n + r(H)$

1.2 Производная по направлению

Определение 7. $\nu \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\nu\| = 1, \qquad \nu = \alpha_1e_1 + ... + \alpha_ne_n, \qquad n \geq 2$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(X+h\nu)-f(X)}{h} := f'_\nu(X)$ называется частной производной по направлению ν

Теорема 5. f дифференцируема в X. Тогда для любого ν

$$\exists\, f'_\nu(X) = \alpha_1 f'_{x_1}(X) + \ldots + \alpha_n f'_{x_n}(X) \tag{1.36}$$

Доказательство. $H = h\nu, \qquad \|H\| = |h|\cdot\|\nu\| = |h|$

$$f(X+H) - f(X) = f'_{x_1}(X)h_1 + \ldots + f'_{x_n}(X)h_n + r(H) \tag{1.37}$$

$$H \underset{(h_k = h\alpha_k)}{=} (h\alpha_1, \ldots, h\alpha_n)$$

$$(1.37) \iff f(X+H) - f(X) = hf'_{x_1}(X)\alpha_1 + \ldots + hf'_{x_n}(X)\alpha_n + r(H)$$

$$(1.37) \implies \frac{f(X+h\nu)-f(X)}{h} = f'_{x_1}(X)\alpha_1 + \ldots + f'_{x_n}(X)\alpha_n + \frac{r(h\nu)}{h} \tag{1.38}$$

$$\left|\frac{r(h\nu)}{h}\right| = \left|\frac{r(H)}{\|H\|}\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \tag{1.39}$$

$$(1.38), (1.39) \implies \frac{f(X+h\nu)-f(X)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'_{x_1}(X)\alpha_1 + \ldots + f'_{x_n}(X)\alpha_n$$

□

Определение 8. f дифференцируема в X
Градиентом f в точке X называется **вектор-строка** $\big(f'_{x_1}(X), \ldots, f'_{x_n}(X)\big)$

Обозначение. $\operatorname{grad} f$

Утверждение 2. $\nu = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
Тогда f дифференцируема в X
Воспользуемся нераенством Коши-Буняковского:

$$|f'_\nu(X)| = \sqrt{f'^2_{x_1}(X) + \ldots + f'^2_{x_n}(X)} \cdot \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} = \sqrt{f'^2_{x_1}(X) + \ldots + f'^2_{x_n}(X)} \tag{1.40}$$

$$(1.40) \iff |f'_\nu(X)| \le \|\operatorname{grad} f(X)\|$$

Пусть $\operatorname{grad} f(X) \ne \mathbb{O}_n$
Положим $t := \|\operatorname{grad} f(X)\| > 0$ и

$$\nu_0 := \frac{1}{t}\operatorname{grad} f(X), \qquad \|\nu_0\| = 1 \tag{1.41}$$

$$(1.41) \implies \nu_0 = \left(\frac{1}{t}f'_{x_1}(X), \ldots, \frac{1}{t}f'_{x_n}(X)\right) \tag{1.42}$$

$$(1.36), (1.42) \implies f'_{\nu_0}(X) = \frac{1}{t}f'^2_{x_1}(X) + \ldots + \frac{1}{t}f'^2_{x_n}(X) = \frac{1}{t}\|\operatorname{grad} f(X)\|^2 \underset{t \overset{\text{def}}{=} \|\operatorname{grad} f(X)\|}{=} \|\operatorname{grad} f(X)\| \tag{1.43}$$

Утверждение 3. Если $\nu \ne \nu_0$, то $f'_\nu(X) < f'_{\nu_0}(X)$

Доказательство. Без доказательства □

1.3 Необходимое условие локального экстремума функции

Теорема 6. $X \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \qquad X$ – внутр. т., $\qquad f : E \to \mathbb{R}, \qquad f$ дифференц. в X
X – точка локального экстремума f

$$\implies \operatorname{grad} f(X) = \mathbb{O}_n$$

Доказательство. Возьмём $\forall 1 \leq k \leq n$

$$\exists\, \delta > 0 : \forall |h| < \delta \quad X + he_k \in E$$

Зафиксируем k и рассомтрим функцию $g(y) \coloneqq f(x_1, ..., \underset{k}{y}, ..., x_n), \qquad y \in (x_k - \delta, x_k + \delta)$
x_k – точка локального экстремума

$$\exists\, g'(x_k) = f'_{x_k}(X)$$

По теореме Ферма,

$$g'(X_k) = 0 \implies f'_{x_k}(X) = 0$$

$\square$

Начиная с этого момента, будем трактовать $\mathbb{R}^n$ как пространство вектор-столбцов, т. е.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad X^T = (x_1, ..., x_n)$$

Дифференциал можно записать как $\mathrm{d}\ f(X, H) = \operatorname{grad} f(X) H$

Определение 9. $n \geq 2, \quad k \geq 1, \qquad L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
L называется линейным, если

1. $L(cX) = cL(X), \qquad c \in \mathbb{R}$
2. $L(X_1 + X_2) = L(X_1) + L(X_2)$

Теорема 7. L – линейное

$$\implies \exists!\, A_{k \times n} : L(X) = A_{k \times n} X$$