

Оглавление

| | |
|---|--------------------------------|
| 1 | Типы уравнений первого порядка |
|---|--------------------------------|

| |
|---|
| 2 |
|---|

Глава 1

Типы уравнений первого порядка

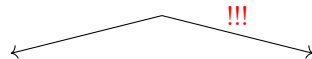
I. Уравнение с разделёнными переменными:

$$\frac{dx}{g(x)} + \frac{dy}{h(y)} = 0$$

$$U(x, y) = \int \frac{dx}{g(x)} + \int \frac{dy}{h(y)} + C$$

II. Уравнение с разделяющимися переменными:

$$g_1(x)h_2(y) dx + g_2(x)h_1(y) dy = 0$$



$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx + \frac{h_1(y)}{h_2(y)} dy = 0$$

$$\begin{cases} g_2(x) = 0 \\ h_2(y) = 0 \end{cases}$$

Это всё решается (т. к. dx и $g_2(x)$ одновременно обратятся в 0)

III. Линейное уравнение:

$$y' + p(x)y = \underset{\text{неоднородность}}{q(x)}, \quad p(x), q(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$$

- Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется линейным однородным (ЛОУ)
- Иначе $y' + p(x)y = q(x)$ – линейным неоднородным (ЛНУ)

$$\underset{\substack{\text{общее неоднородное} \\ \text{(все реш. ЛНУ)}}}{y_{\text{ОН}}(x, C)} = \underset{\substack{\text{общее однор.} \\ \text{(все реш. ЛОУ)}}}{y_{\text{ОО}}(x, C)} + \underset{\substack{\text{частное неоднор.} \\ \text{(какое-то решение ЛНУ)}}}{y_{\text{ЧН}}(x, C)}$$

Алгоритм (решения).

(а) Ищем $y_{\text{ОО}}$:

$$y_{\text{ОО}} = Ce^{-\int p(x) dx}$$

Примечание. Сюда, при допуске $C = 0$, входит $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, “потерянное” при выводе этой формулы

(б) Ищем $y_{\text{ЧН}}$:

Будем искать в виде

$$y_{\text{ЧН}} = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Замечание. Эту формулу обязательно надо записать

Подставим это в ЛНУ:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x))}_{y'_{\text{ЧН}} \text{ как производная произведения}} + \underbrace{p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx}}_{y_{\text{ЧН}}} \equiv q(x)$$

Контрольная точка. Второй и третий член **должны** сократиться

$$C'(x) = e^{\int p(x) dx} q(x)$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + \underset{(C_2)}{0}$$

Подставляем в формулу для $y_{\text{ЧН}}$:

$$y_{\text{ЧН}} = \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Замечание. Если $p(x)$ можно проинтегрировать (т. е. $\int p(x) dx = \xi(x) + C_1$), нужно вместо C_1 записать какую-то конкретную константу (читайте: ноль). Мы ведь искали **частное** решение, а не континуум

(с) Ищем $y_{\text{ОН}}$:

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} = C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \cdot \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx$$

Замечание. Неберущийся неопределённый интеграл нужно записывать в виде интеграла с переменным верхним пределом, в нижнем пределе которого стоит выбранная числовая константа

$$y_{\text{ОН}} = e^{-P(x)} \left(C + \int_{x_0}^x e^{P(s)} q(s) ds \right), \quad P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$$

Замечание. Не стоит здесь пользоваться готовой формулой. Нужно идти по алгоритму

IV. Уравнение Бернулли:

$$y' + p(x)y + r(x)y^\tau = 0, \quad p(x), r(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$$

Замечание.

- При $\tau > 0$ уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0$, $x \in (a, b)$
- При $\tau = 0, 1$ – это не уравнение Бернулли, а линейное

Стандартная замена:

$$u = y^{1-\tau}, \quad u' = (1-\tau)y^{-\tau}y'$$

Замечание. Здесь прямая замена не нужна – просто делим на y^τ

Получаем уравнение:

$$(1-\tau)^{-1}u' + p(x)u + r(x) = 0$$

V. Уравнение Риккати

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

Решается, если известно какое-то частное решение:

Пусть $y = \eta(x)$ – решение уравнения на некотором промежутке, то есть

$$\eta'(x) \equiv q(x) - p(x)\eta(x) - r(x)\eta^2(x), \quad \text{на } \langle a, b \rangle$$

Замена $y = z + \eta(x)$ преобразует наше уравнение в уравнение Бернулли

$$z' - \left(p(x) + 2r(x) \right) z + r(x) z^2 = 0$$

VI. Однородное уравнение

Определение 1. $h(x, y)$ называется однородной функцией степени k , если $h(sx, sy) = s^k h(x, y)$

Уравнения

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{и} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy, \quad M, N - \text{однородные порядка } k$$

называются однородными (порядка 0)

То есть, уравнение однородное, если каждое его слагаемое имеет одну и ту же суммарную степень по x и y

Стандартная замена:

$$y(x) = u(x)x, \quad \begin{cases} y' = u'x + u \\ dy = u dx + x du \end{cases}, \quad u = x^{-1}y$$

Контрольная точка. После замены **каждое** слагаемое должно содержать x^k

Сокращаем на x^k , группируем слагаемые при dx и dy – получаем уравнение с разделяющимися переменными

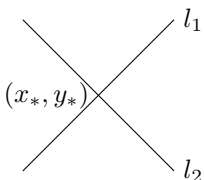
VII. Дробно-линейное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$$

Числитель и знаменатель задают прямые, пусть $l_1 = a_1x + b_1y + c_1$, $l_2 = a_2x + b_2y + c_2$

Возможны два случая:

$$\bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$



Пусть (x_*, y_*) – решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

или, что то е самое, точка пересечения прямых l_1 и l_2

После сдвига начала координат в точку (x_*, y_*) прямые не будут иметь свободных членов

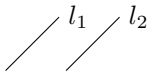
Итак, после замены

$$u = x - x_*, \quad v = y - y_*, \quad du = dx, \quad dv = dy$$

или $y'(x) = v'(u)$ получаем однородное уравнение

$$v' = h\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$



Тогда $b_1 \neq 0$ и $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = k$
 В этом случае замена

$$u = a_1x + b_1y, \quad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1x), \quad y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$$

сразу приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' = b_1 h\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1$$

VIII. Обобщённо-однородное уравнение:

Определение 2. Уравнение называется обобщённо-однородным, если каждое его слагаемое имеет один и тот же суммарный порядок по x и y при условии, что x, d x имеют порядок 1, а u, d y – порядок m

Тогда $y' = \frac{d}{dx} \frac{x}{y}$ имеет порядок $m - 1$

Аргументы входящих в уравнение функций типа логарифма или тригонометрических должны иметь нулевой порядок

Таким образом, чтобы установить, является ли уравнение обобщённо-однородным, надо приравнять порядки всех слагаемых, получая систему многих уравнений с одной неизвестной m . Если повезёт, такое число m найдётся. Тогда замена

$$y = z^m, \quad y' = mz^{m-1}, \quad z = y^{1/m}$$

сведёт уравнение к однородному

Проблема возникает, когда замена потребует выполнения условия $y > 0$, например, когда $m = 2$ или $m = -\frac{1}{2}$. При отсутствии инвариантности относительно замены y на $-\tilde{y}$ уравнение придётся решать два раза

Этого можно избежать, сделав более сложную замену:

- Будем считать, что x имеет порядок α , а y имеет порядок β
 Тогда y' имеет порядок $\beta - \alpha$. Приравнявая суммарные порядки всех слагаемых, находим связь между α и β : $\beta = k\alpha$
 После этого делается замена $y^\alpha = ux^\beta$ с выбранным должным образом значением α , в которой наличие новой переменной u в первой степени позволяет избежать фиксации знаков