Оглавление

0.1. Блистательная теорема Гаусса (Theorema Egregium)

Theorema Egregium — (лат.) “Замечательная теорема”

Лемма 1 (о смешанных произведениях).

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \begin{vmatrix} u \cdot l & u \cdot m & u \cdot n \\ v \cdot l & v \cdot m & v \cdot n \\ w \cdot l & w \cdot m & w \cdot n \end{vmatrix}$$

Доказательство. Можно доказать в координатах. Мы так делать не будем.

$$\text{Л. ч.} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 2_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \det(\text{произведение матриц}) = \text{П. ч.}$$

Второй определитель транстпонирован, т. к. он при этом не меняется. □

Теорема 1 (Egregium). Гауссова кривизна зависит только от E, F, G и их производных.

Доказательство. Достаточно доказать, что $LN - M^2$ зависит только от I, т. к.

$$k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}}{|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|}$$

Уже было вычислено, что $|r_u \times r_v| = EG - F^2$

$$L = \overrightarrow{r_{uu}} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{(r_{uu}; r_u; r_v)}{EG - F^2}$$

Аналогично,

$$M = \frac{(r_{uv}; r_u; r_v)}{EG - F^2}, \qquad N = \frac{(r_{vv}; r_u; r_v)}{EG - F^2}$$

$$LN - M^2 = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \cdot \Big((r_{uu}; r_u; r_v) \cdot (r_{vv}; r_u; r_v) - (r_{uv}; r_u; r_v)^2\Big) \xlongequal[\text{лемма}]{}$$
$$= \begin{vmatrix} r_{uu} \cdot r_{vv} & r_{uu} r_u & r_{uu} r_v \\ r_u r_{vv} & r_u r_{vv} & r_u r_v \\ r_v r_{vv} & r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}^2 & r_{uv} r_u & r_{uv} r_v \\ r_{uv} r_u & r_u r_u & r_u r_v \\ r_{uv} r_v & r_v r_u & r_v r_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{uu} r_{vv} & r_{uu} r_u & r_{uu} r_v \\ . & E & F \\ . & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & E & F \\ . & F & G \end{vmatrix} \quad (1)$$

TODO: Определители надо проверить по лемме

$$E_u = (r_u \cdot r_u)_u = 2 r_u r_{uu}$$

$$G_v = (r_v \cdot r_v)_v = 2 r_v r_{vv}$$

$$E_v = 2 r_u r_{uv}$$

$$G_u = 2 r_v r_{vu}$$

$$F_u = (r_u \cdot r_v)_u = r_{uu} r_v + r_u + r_{uv}$$

$$r_v r_{uu} = F_u - r_u r_{uv} = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$F_v = r_{uv} r_v + r_u r_{vv}$$

$$r_u r_{vv} = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

$$(1) = \begin{vmatrix} r_{uu} r_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} =$$

$r_{uu} r_{vv}$ и r_{uv}^2 **не** вычисляются по-отдельности. Распишем определители по первой строке:

$$= r_{uu} \cdot r_{uv} \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \dots - r_{uv}^2 \cdot \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} + \dots = \underline{(r_{uu} r_{vv} - r_{uv}^2)} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \dots$$

Пропущенные члены зависят только от II. Осталось доказать, что скобка зависит только от II:

$$F_{uv} = r_{uuv} r_v + \underline{r_{uu} r_{vv}} + \underline{r_{uv} r_{uv}} + r_u r_{uvv}$$

$$G_{uu} = 2 r_{uv} r_{uv} + 2 r_v r_{uuv}$$

$$E_{vv} = 2 r_{uv} r_{uv} + 2 r_u r_{uvv}$$

$$F_{uv} - \frac{1}{2} G_{uu} - \frac{1}{2} E_{vv} = r_{uu} r_{vv} - r_{uv} r_{uv}$$

□

Замечание. Можно вывести формулу гауссовой кривизны, зависящую только от I, но использовать её будет неудобно.

Теорема 2 (Петерсона)**.** Пусть E, F, G, L, M, N — функции от u, v, удовлетворяющие следующим соотношениям:

1. $E > 0, \quad G > 0$;
2. $EG - F^2 > 0$;
3. теорема Гаусса;
4. соотношение Петерсона—Майнарди—Кодаци (будут получены потом).

Тогда существует поверхность с такими квадратичными формами.

Без доказательства. □

0.2. Деривационные формулы

Разложим вторые производные по базису из первых и n:

$$\boxed{r_{uu} = \Gamma_{11}^1 \overrightarrow{r_u} + \Gamma_{11}^2 \overrightarrow{r_v} + L \overrightarrow{n}}$$

$$\boxed{r_{uv} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + M n}$$

$$\boxed{r_{vv} = \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + N n}$$

Коэффициенты при $\overrightarrow{n}$ находятся скалярным умножением на $\overrightarrow{n}$.
Γ_{ij}^k — функции u и v. Они называются символами Кристофеля.

Производная единичного вектора перпендикулярна самому вектору, так что n_u, n_v не зависят от $\overrightarrow{n}$:

$$\boxed{n_u = ar_u + br_v}$$

$$\boxed{n_v = cr_u + dr_v}$$

$$\begin{cases} n_u \cdot r_u = aE + bF n_u \cdot r_v = aF + bG \end{cases}$$

Решим методом Крамера:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} n_u r_u & F \\ n_u r_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}, \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} E & n_u r_u \\ F & n_u r_v \end{vmatrix}}{EG - F^2}, \qquad c = \dots, \qquad d = \dots$$