

Оглавление

1		2
1.1	Парабола (продолжение)	2
1.2	Классификация КВП (кривых второго порядка)	3

Глава 1

1.1 Парабола (продолжение)

Теорема 1 (Касательная к параболу).

$$y^2 = 2px$$

(x_0, y_0) – точка на параболу
 $yy_0 = p(x + x_0)$ – касательная

Доказательство.

$$\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

$$px = yy_0 - px_0$$

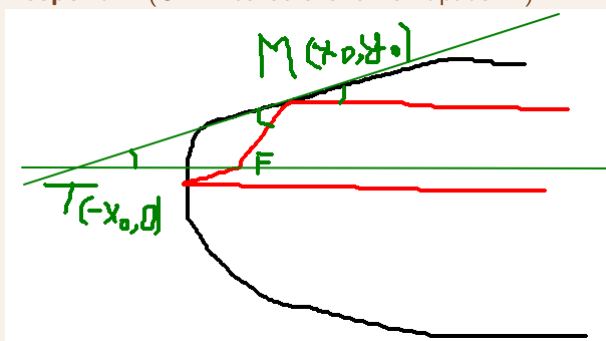
$$y^2 = 2yy_0 - 2px_0 = 2yy_0 - y_0^2$$

$$y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = 0$$

$$(y - y_0)^2 = 0$$

□

Теорема 2 (Оптическое свойство параболы).



Доказательство.

$$TF \stackrel{?}{=} FM$$

$$TF = x_0 + \frac{p}{2}$$

$$FM = |M, \text{ директриса}| = x_0 + \frac{p}{2}$$

□

1.2 Классификация КВП (кривых второго порядка)

Уравнение второго порядка: $\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная форма}(\neq 0)} + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0$

Немного его упростим:

1. Поворотом плоскости избавляемся от $2a_{12}xy$:

$$a_{11}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2a_{12}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) \cdot (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + a_{22}(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + \dots$$

$$x'y' - 2a_{11} \cos \alpha \sin \alpha + 2a_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2a_{22} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$(a_{22} - a_{11}) \sin 2\alpha + a_{12} \cos 2\alpha = 0 \quad | : \sin \alpha$$

$$a_{22} - a_{11} + 2a_{12} \operatorname{ctg} 2\alpha = 0$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}}$$

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{11}x' + 2b'_2y' + b'_3 = 0$$

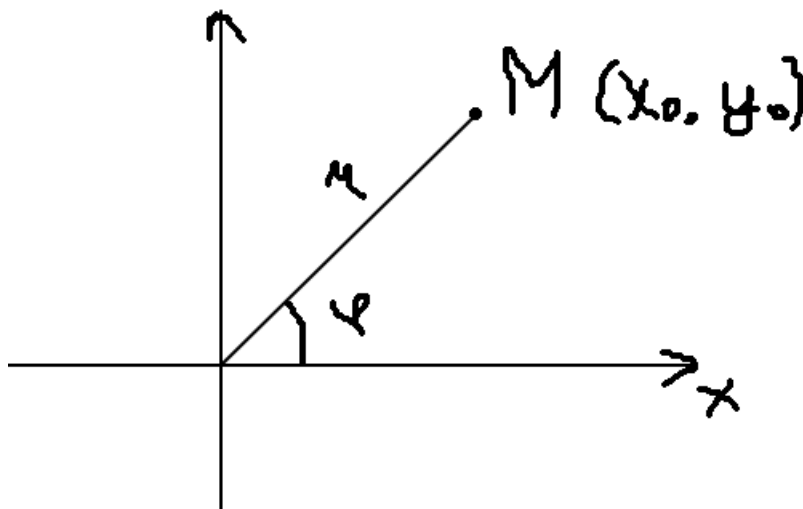
$(b'_3 = b_3)$

2. • Если $a'_{11} \neq 0$, то считаем $b'_1 = 0$:

$$a'_{11}x^2 + 2b'_1x = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{b'_1}{a'_{11}}x + \frac{b'^2_1}{a'^2_{11}}\right)$$

- Если $a'_{11} = 0$, то считаем $b'_3 = 0$

Полярная система координат. Поворот



(r, φ) – полярные координаты M

Переход:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Поворот на α :

$$x' = r \cos \varphi' = r \cos(\varphi - \alpha) = r \cos \varphi \cdot \cos \alpha + r \sin \varphi \cdot \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = \dots = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$