Оглавление

Глава 1

1.1 Ещё одну теорему забыл

Теорема 1 (Вейерштрасса о прямом умножении). X – связное топологическое пространство
$f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция

$$f(x_0) = a, \qquad f(x_1) = b, \qquad a \le c \le b$$

$$\implies \exists\, x_2 \in X : f(x_2) = c$$

Доказательство. X – связное $\implies$ $f(X)$ – связное
Какие связные подмножества есть в $\mathbb{R}$? □

Теорема 2. (X, Ω) – топологическое пространство
Равносильны следующие утверждения:

1. Компоненты связности X открыты
2. $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ (X_i – *компоненты*, топология X – топология объединения, контрпример – $\mathbb{Q}$)
3. У любой точки существует связная окрестность

Доказательство. Упражнение □

1.2 Линейная связность

Определение 1. Пусть в X – непрерывная $f : [0, 1] \to X$

- $f(0) = x_0$ – начало пути
- $f(1) = x_1$ – конец пути

Определение 2. X называется линейно свяным, если $\forall x_0, x_1 \in X \quad \exists$ путь, соединяющий x_0 и x_1

Определение 3. $A \subset X$ линейно связно, если $\forall x_0, x_1 \quad \exists \underset{\text{(не выходящий за пределы } A)}{\text{путь в } A}$ между ними

Теорема 3. Линейно связное пространство связно

Доказательство. Допустим, не связно

$$X = U_1 \cup U_2, \qquad U_1 \cap U_2 \ne \emptyset, \qquad x_1 \in U_1, \quad x_2 \in U_2$$

Соединим их путём:

$$\exists\, f : [0, 1] \to X : \begin{cases} f(0) = x_1 \\ f(1) = x_2 \end{cases}$$

$f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ разбивают $[0, 1]$ $\implies$ $[0, 1]$ не связен – $\lightning$ (доказано, что $[0, 1]$ связен) □

Верна ли обратная стрелка?. Нет

Пример. $y = \sin\frac{1}{x}$ – непрерывна на $(0, +\infty)$

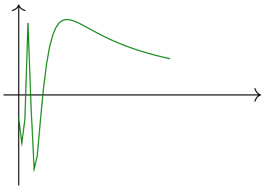

Рис. 1.1: Связная, но не линейно связная функция

1.3 Компактность

1.3.1 Понятие компактности

Определение 4. X – топологическое пространство
$\{U_i\}_{i\in I}$ – (открытое) покрытие X, если $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ и $\forall i \quad U_i \in \Omega$
В этом курсе, покрытие $\equiv$ открытое покрытие

Если $\{U_i\}_{i\in I}$ – покрытие X и $\{U_{ij}\}_{ij\in J\subset I}$ – покрытие X, то это – подпокрытие $\{U_i\}_{i\in I}$

Определение 5. X называют компактным, если для любого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

Определение 6. $A \subset X$ компактно, если A компактно в индуцированной топологии, то есть

$$\underset{(U_i \text{ открыто в } X)}{\forall \{U_i\}_{i\in I}} : \bigcup_{i\in I} U_i \supset A \quad \exists U_{i1}, U_{i2}, ..., U_{in} : \bigcup_{k=1}^{n} U_{ik} \supset A$$

Теорема 4. X компактно, $\quad A$ замкнуто в $X \quad \implies \quad A$ компактно

Доказательство. Рассмотрим любое $\{U_i\}_{i\in I}$ – покрытие A
Рассмотрим $V := X \setminus A$ – открытое
$\{U_i, V\}_{i\in I}$ – покрытие X
$\implies \exists$ конечное подпокрытие. Выпишем его:

$$V, U_{i1}, U_{i2}, ..., U_{in}$$

□

Теорема 5. $f : X \to Y$ непрерывна, $\quad A \subset X$ компактно $\quad \implies \quad f(A)$ компактно

Доказательство. Возьмём $\{V_i\}_{i\in I}$ – покрытие $f(A)$

$$V_i \subset Y \implies f^{-1}(V_i) \text{ – открытое в } X$$

$\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ – покрытие A
$\implies f^{-1}(V_{i1}), ..., f^{-1}(V_{in})$ – конечное подпокрытие A □

Следствие. Компактность – топологическое свойство (т. е. она сохраняется при гомеоморфизме)

1.3.2 Компактность и хаусдорфовость

Определение 7. X называется хаусдорфовым, если $\underset{x\neq y}{\forall x, y \in X} \quad \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$

Пример. X – метрическое $\implies$ X – хаусдорфово

$$U_x \coloneqq B\left(x, \frac{\rho(x,y)}{3}\right), \qquad U_y \coloneqq B\left(y, \frac{\rho(x,y)}{3}\right)$$

Теорема 6. X – хаусдорфово, A компактно $\implies$ A замкнуто

Доказательство. Нужно доказать, что $X \setminus A$ открыто
Зафиксируем $x_0 \in X \setminus A$

$$\forall a \in A \quad \exists \left\{ \begin{matrix} U_{ax_0} \text{ – окрестность } a \\ V_{ax_0} \text{ – окрестность } x_0 \end{matrix} \right\} : U_{ax_0} \cap V_{ax_0} = \emptyset$$

$\{ U_{ax_0} \}_{a \in A}$ – покрытие A
$\implies \exists U_{ax_0 1}, ..., U_{ax_0 n}$ – подпокрытие
Возьмём $V \coloneqq \bigcap_{k=1}^{n} V_{ax_0 k}$
V открыто, $\quad V \cap A = \emptyset, \quad x_0 \in V$
$\implies X \setminus A$ открыто $\square$

Следствие. X – компактно и хаусдорфово, $A \subset X$
A компактно $\iff$ A замкнуто