

# Типы уравнений первого порядка

## Содержание

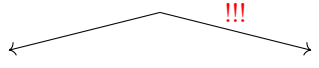
1	Уравнение с разделёнными переменными	1
2	Уравнение с разделяющимися переменными	1
3	Линейное уравнение	1
4	Уравнение Бернулли	2
5	Уравнение Риккати	3
6	Однородное уравнение	4
7	Дробно-линейное уравнение	4
8	Обобщённо-однородное уравнение	5

## I. Уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{dx}{g(x)} + \frac{dy}{h(y)} = 0$$
$$U(x, y) = \int \frac{dx}{g(x)} + \int \frac{dy}{h(y)} + C$$

## II. Уравнение с разделяющимися переменными

$$g_1(x)h_2(y) dx + g_2(x)h_1(y) dy = 0$$


$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx + \frac{h_1(y)}{h_2(y)} dy = 0$$
$$\begin{cases} g_2(x) = 0 & \iff x \equiv x_1, x_2, \dots \\ h_2(y) = 0 & \iff y \equiv y_1, y_2, \dots \end{cases}$$

Это решения (т. к.  $dx$  и  $g_2(x)$  одновременно обращаются в 0)

## III. Линейное уравнение

$$y' + p(x)y = \underset{\text{неоднородность}}{q(x)}, \quad p(x), q(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$$

- Если  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение  $y' + p(x)y = 0$  называется линейным однородным (ЛОУ)
- Иначе  $y' + p(x)y = q(x)$  – линейным неоднородным (ЛНУ)

$$\underset{\text{общее неоднородное}}{y_{\text{ОН}}(x, C)} = \underset{\text{общее однор.}}{y_{\text{ОО}}(x, C)} + \underset{\text{частное неоднор.}}{y_{\text{ЧН}}(x, C)}$$

(все реш. ЛНУ)                      (все реш. ЛОУ)                      (какое-то решение ЛНУ)

### Алгоритм.

1. Ищем  $y_{\text{ОО}}$ :

$$y_{\text{ОО}} = C e^{-\int p(x) dx}$$

**Примечание.** Сюда, при допуске  $C = 0$ , входит  $y \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , “потерянное” при выводе этой формулы

2. Ищем  $y_{\text{ЧН}}$ :

Будем искать в виде

$$y_{\text{ЧН}} = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

**Замечание.** Эту формулу обязательно надо записать

Подставим это в ЛНУ:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x))}_{y'_{\text{ЧН}} \text{ как производная произведения}} + \underbrace{p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx}}_{y_{\text{ЧН}}} \equiv q(x)$$

**Контрольная точка.** Второй и третий член **должны** сократиться

$$C'(x) = e^{\int p(x) dx} q(x)$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + \underset{(C_2)}{0}$$

Подставляем в формулу для  $y_{\text{ЧН}}$ :

$$y_{\text{ЧН}} = \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

**Замечание.** Если  $p(x)$  можно проинтегрировать (т. е.  $\int p(x) dx = \xi(x) + C_1$ ), нужно вместо  $C_1$  записать какую-то конкретную константу (читайте: ноль). Мы ведь искали **частное** решение, а не континуум

3. Ищем  $y_{\text{ОН}}$ :

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} = C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \cdot \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx$$

**Замечание.** Неберущийся неопределённый интеграл нужно записывать в виде интеграла с переменным верхним пределом, в нижнем пределе которого стоит выбранная числовая константа

$$y_{\text{ОН}} = e^{-P(x)} \left( C + \int_{x_0}^x e^{P(s)} q(s) ds \right), \quad P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$$

**Замечание.** Не стоит здесь пользоваться готовой формулой. Нужно идти по алгоритму

## IV. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y + r(x)y^\tau = 0, \quad p(x), r(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$$

### Замечание.

- При  $\tau > 0$  уравнение имеет тривиальное решение  $y \equiv 0$ ,  $x \in (a, b)$

- При  $\tau = 0, 1$  – это не уравнение Бернулли, а линейное

Стандартная замена:

$$u = y^{1-\tau}, \quad u' = (1-\tau)y^{-\tau}y'$$

**Замечание.** Здесь прямая замена не нужна – просто делим на  $y^\tau$

Получаем уравнение:

$$(1-\tau)^{-1}u' + p(x)u + r(x) = 0$$

## V. Уравнение Риккати

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

Иногда решается:

1. Если известно какое-то частное решение:

Пусть  $y = \eta(x)$  – решение уравнения на некотором промежутке, то есть

$$\eta'(x) \equiv q(x) - p(x)\eta(x) - r(x)\eta^2(x), \quad \text{на } \langle a, b \rangle$$

Замена  $y = z + \eta(x)$  преобразует наше уравнение в уравнение Бернулли

$$z' - \left(p(x) + 2r(x)\eta(x)\right)z + r(x)\eta^2(x) = 0$$

2. Если  $r(x) \neq 0$  на  $\langle a, b \rangle$  и  $r(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$ :

Уравнение приводится к виду

$$u' + au^2 = s(x), \quad a \neq 0$$

при помощи композиции двух замен:

- (а) Линейная замена

$$y = \gamma(x)z, \quad y' = \gamma'z + \gamma z', \quad z = y\gamma^{-1}$$

позволяет сделать коэффициент при квадратичном члене ненулевой константой

- (б) Сдвигающая замена

$$z = u + \delta(x), \quad z' = u' + \delta'x', \quad u = z - \delta$$

позволяет аннулировать линейный член, сохраняя коэффициент при  $z^2$  неизменным

3. Если уравнение имеет вид

$$u' = au^2 + cx^\sigma, \quad \sigma \neq 0, -2$$

Оно называется специальным уравнением Риккати

**Замечание.** При  $\sigma = 0$  – это уравнение с разделяющимися переменными, а при  $\sigma = -2$  – обобщённо-однородное

В последнем случае замена

$$u = x^{-1}v^{-1}$$

сводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$xv' = -(cv^2 + v - a)$$

Специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах **тогда и только тогда**, когда

$$k = \frac{\sigma}{2\sigma + 4} \in \mathbb{Z} \quad (k \neq 0), \quad \text{то есть} \quad \sigma = \frac{4k}{1-2k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

### Алгоритм.

- (а) Сделаем замену обеих переменных:

$$\begin{cases} x = t^{1/2-k} = t^{\frac{1}{\sigma+2}}, & t = x^{\frac{2}{1-2k}} > 0 \\ u = z(t)t^{k-1/2} = zt^{-\frac{1}{\sigma+2}}, & z = ux \end{cases}$$

$$\frac{d u}{d x} = \frac{d(z t^{k-\frac{1}{2}})}{d t} \cdot \frac{d t}{d x} = \frac{t^{k-\frac{1}{2}} \dot{z} + (k - \frac{1}{2}) t^{k-\frac{3}{2}} \dot{z}}{(1/2 - k) t^{-1/2-k}} = \frac{t^{2k}}{1/2 - k} \dot{z} - t^{2k-1} z$$

Получаем уравнение

$$t \dot{z} + \left(k - \frac{1}{2}\right) z + a_0 z^2 = c_0 t, \quad a_0 := \left(\frac{1}{2} - k\right) a, \quad c_0 := \left(\frac{1}{2} - k\right) c$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если коэффициент при линейном члене равен  $-1/2$

(b) “Обнуляем”  $k$ :

В зависимости от знака  $k$  используется одна из замен, сохраняющих структуру уравнения и позволяющих уменьшать  $|k|$  на 1:

- $k > 0$ :

$$z = a^{-1} + t v_1^{-1}, \quad \dot{z} = v_1^{-1} - t v_1^{-2} \dot{v}_1, \quad v_1 = t(x - a^{-1})^{-1}$$

- $k < 0$ :

$$z = t(v_1 + d)^{-1}, \quad \dot{z} = (v_1 + d)^{-1} - t(v_1 + d)^{-2} \dot{v}_1, \quad v_1 = t z^{-1} - d$$

$$d := \left(\frac{1}{2} + k\right) \left(\frac{1}{2} - k\right)^{-1} c^{-1}$$

В результате нескольких таких замен придём к уравнению

$$t \dot{v}_k + \left(-\frac{1}{2}\right) v_k + a_k v_k^2 = c_k t$$

(c) Завершающая замена

$$v_k = t^{1/2} w, \quad \dot{v}_k = \frac{t^{-1/2} \dot{w}}{2} - t^{1/2} \dot{w}, \quad w = t^{-1/2} v_k$$

приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$t^{1/2} \dot{w} = a_k w^2 - c_k$$

## VI. Однородное уравнение

**Определение 1.**  $h(x, y)$  называется однородной функцией степени  $k$ , если  $h(sx, sy) = s^k h(x, y)$

Уравнения

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{и} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy, \quad M, N - \text{однородные порядка } k$$

называются однородными (порядка 0)

То есть, уравнение однородное, если каждое его слагаемое имеет одну и ту же суммарную степень по  $x$  и  $y$   
Стандартная замена:

$$y(x) = u(x)x, \quad \begin{cases} y' = u'x + u \\ dx = u dx + x du \end{cases}, \quad u = x^{-1}y$$

**Контрольная точка.** После замены **каждое** слагаемое должно содержать  $x^k$

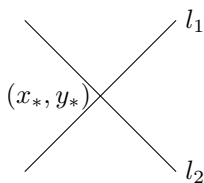
Сокращаем на  $x^k$ , группируем слагаемые при  $dx$  и  $dy$  – получаем уравнение с разделяющимися переменными

## VII. Дробно-линейное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Числитель и знаменатель задают прямые, пусть  $l_1 = a_1x + b_1y + c_1$ ,  $l_2 = a_2x + b_2y + c_2$   
Возможны два случая:

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$



Пусть  $(x_*, y_*)$  – решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

или, что то е самое, точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$

После сдвига начала координат в точку  $(x_*, y_*)$  прямые не будут иметь свободных членов

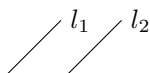
Итак, после замены

$$u = x - x_*, \quad v = y - y_*, \quad du = dx, \quad dv = dy$$

или  $y'(x) = v'(u)$  получаем однородное уравнение

$$v' = h\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$



Тогда  $b_1 \neq 0$  и  $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = k$

В этом случае замена

$$u = a_1x + b_1y, \quad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1x), \quad y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$$

сразу приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' = b_1h\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1$$

## VIII. Обобщённо-однородное уравнение

**Определение 2.** Уравнение называется обобщённо-однородным, если каждое его слагаемое имеет один и тот же суммарный порядок по  $x$  и  $y$  при условии, что  $x, dx$  имеют порядок 1, а  $y, dy$  – порядок  $m \neq 0$

Тогда  $y' = \frac{dx}{dy}$  имеет порядок  $m - 1$

Аргументы входящих в уравнение функций типа логарифма или тригонометрических должны иметь нулевой порядок

Таким образом, чтобы установить, является ли уравнение обобщённо-однородным, надо приравнять порядки всех слагаемых, получая систему многих уравнений с одной неизвестной  $m$ . Если повезёт, такое число  $m$  найдётся. Тогда замена

$$y = z^m, \quad y' = mz^{m-1}z', \quad z = y^{1/m}$$

сведёт уравнение к однородному, но не всегда:

**Проблема.** Проблема возникает, когда  $y$  может принимать значения разных знаков (ОДЗ этого не запрещает), и отсутствует инвариантность относительно замены  $y = -\tilde{y}$

В таком случае надо отдельно проверить  $y(x) \equiv 0$   
Дальше возможно три случая:

- Общий:

Замена

$$y = (xu)^m, \quad y' = m(xu)^{m-1}(u + xu'), \quad u = x^{-1}y^{1/m}$$

приведёт к уравнению с разделяющимися переменными (но придётся решить два раза для разных знаков  $y$ )

- Если  $\exists q \in \mathbb{Z} : m = 2q$

Делаем замену

$$y = x^{2q}u, \quad y' = 2qx^{2q-1}u + x^{2q}u', \quad u = x^{-2q}y$$

Она не фиксирует знак  $y$ , так что не придётся решать уравнение второй раз

Также получаем сразу уравнение с разделяющимися переменными

- Если  $\exists q \in \mathbb{Z} : m = (2q)^{-1}$ , при этом  $x$  тоже меняет знак, и отсутствует инвариантность относительно замены  $x = -\tilde{x}$

Надо следовать замене

$$y = |x|^{\frac{1}{2q}}u, \quad y' = \sigma \frac{d y}{d |x|} = \sigma \left( (2q)^{-1} |x|^{\frac{1}{2q}-1}u + |x|^{\frac{1}{2q}}u' \right), \quad \text{где } u' = \frac{d u}{d |x|}, \quad u = |x|^{-\frac{1}{2q}}y$$

где  $\sigma = \text{sign } x$

Получается уравнение с разделяющимися переменными и параметром  $\sigma$

**Контрольная точка.** В ответе не должно остаться  $\sigma$  (т. е. каждая  $\sigma$  должна “найти” свой  $|x|$ )

**Примечание.**  $\sigma|x| = x$