

Оглавление

0.1	О мультииндексах	1
0.2	Классы гладкости	1
0.3	Формулы для производной порядка r одной сложной функции	3
0.4	Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции n переменных	5

0.1 О мультииндексах

Определение 1. Мультииндексом называется $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n \geq 2}$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Определение 2 (норма мультииндекса). $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $|\alpha| > 0$

Обозначение. $\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$

Обозначение. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad 0^0 := 1$$

Обозначение.

$$C_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!}$$

Обозначение. $\{v_\alpha(x)\}_{\alpha \in T}$

$$\sum_{\alpha \in T} v_\alpha(x)$$

0.2 Классы гладкости

Определение 3 ($C^r(E)$). $r \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $f \in C(E)$

$$\forall x_1, \dots, x_n \quad \forall X \in E \quad \exists f'_{x_j}(X)$$

- $f'_{x_j}(X) \in C(E) \implies f \in C^1(E)$

- Пусть $f \in C^1(E)$

$$\forall 1 \leq k \leq r \quad \forall x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \quad \forall X \in E \quad \exists f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}^{(k)}(X) \in C(E)$$

Тогда говорят, что $f \in C^r(E)$

Теорема 1. $r \geq 2$, $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открытое, $f \in C^r(E)$, $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r$

$$\forall X \in E \quad f_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}^{(r)}(X) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_r}}^{(r)}(X) \quad (1)$$

Доказательство. Докажем по индукции

• **База.** $r = 2$ – доказано в конце прошлой лекции

• **Переход.** Пусть $f \in C^{r+1}(E)$

$j_k \neq j_{k+1}$

Рассмотрим частные производные:

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X), \quad f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X)$$

Обозначим $g(X) := f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}}}^{(k-1)}(X)$

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}} x_{j_k} x_{j_{k+1}}}^{(k+1)}(X) = g_{x_{j_k} x_{j_{k+1}}}''(X) \quad (2)$$

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k}}^{(k+1)}(X) = g_{x_{j_{k+1}} x_{j_k}}''(X) \quad (3)$$

По следствию к теореме о смешанных производных, получаем

$$(2), (3) \implies g_{x_{j_k} x_{j_{k+1}}} = g_{x_{j_{k+1}} x_{j_k}}''(X) \quad (4)$$

$$(2) \implies f_{x_{j_1} \dots x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = g_{x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r-k+2)}(X) \quad \forall X \in E \quad (5)$$

$$(3) \implies f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = g_{x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r-k+2)}(X) \quad \forall X \in E \quad (6)$$

$$(4), (5), (6) \implies f_{x_{j_1} \dots x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) \quad \forall X \in E \quad (7)$$

$i_1, \dots, i_n, j_k = i_1, j_k$ – минимальный Рассмотрим две ситуации:

– $k = 1$

$$i_1, \dots, i_{r+1}$$

$$i_1, j_2, \dots, j_{r+1}$$

Тогда индексы i_2, \dots, i_{r+1} и j_2, \dots, j_{r+1} получаются друг из друга перестановкой. А тогда, по индукции,

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = \left(f_{x_{i_1}}' \right)_{x_{i_2} \dots x_{i_{r+1}}}^{(r)} \stackrel{\text{инд. предполож.}}{=} \left(f_{x_{i_1}}' \right)_{x_{j_2} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r)}(X) = f_{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) \quad (8)$$

– $k > 1$

Тогда $j_1, \dots, j_{k-1} \neq i_1$

Тогда,

$$(7) \implies f_{\dots x_{j_{k-1}} x_{j_k}}^{(r+1)} = f_{\dots x_{j_k} x_{j_{k-1}}}^{(r+1)} = f_{\dots x_{j_k} x_{j_{k-2}} x_{j_{k-1}}}^{(r+1)} = \dots = f_{x_{j_k} x_{j_2} \dots}^{(r+1)}$$

Теперь можно перименить первый случай

□

Обозначение. $i_1, \dots, i_r, 1 \leq i_k \leq n$

Среди них есть:

• l_1 равных 1

• l_2 равных 2

.....

- l_n равных n

$$l_1 + \dots + l_n = r$$

Можно получить перестановку этих индексов:

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{l_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{l_2}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{l_n}$$

$$f \in \mathcal{C}^r(E)$$

Тогда, по доказанной теореме,

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}^{(r)}(X) = f_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{l_1} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{l_n}}^{(r)}(X) \quad (9)$$

Определим мультииндекс $\alpha := (l_1, \dots, l_n)$, $|\alpha| = r$

Введём обозначение для частной производной:

$$(9) := \partial^\alpha f(X)$$

0.3 Формулы для производной порядка r одной сложной функции

Теорема 2. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ – открытое, $f \in \mathcal{C}^{r \geq 1}(E)$, $Y \in E$, $H \in \mathbb{R}^n$, $H \neq 0_n$, $t \in (-a, a)$

$$Y + tH \in E \quad \forall t \in (-a, a)$$

$$g(t) := f(Y + tH) \quad (10)$$

$$\implies g^{(r)}(0) = \sum_{\alpha: |\alpha|=r} C_r^\alpha \partial^\alpha f(Y) H^\alpha \quad (11)$$

Доказательство. Докажем по индукции:

- **База.** $r = 1$

То есть, $|\alpha| = 1$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geq 0$

Значит,

$$\exists \nu : \begin{cases} \alpha_\nu = 1 \\ \alpha_j = 0, \quad j \neq \nu \end{cases}$$

$$\alpha = (0, \dots, \underbrace{1}_\nu, \dots, 0) := e_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n$$

$$C_1^{e_\nu} = \frac{1!}{0! \cdot \dots \cdot 1! \cdot \dots \cdot 0} = 1 \quad (12)$$

$$\partial^{e_\nu} f(X) = f'_{x_\nu}(X) \quad (13)$$

$$\text{Если } H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \text{ то}$$

$$H^{e_\nu} = h_\nu \quad (14)$$

$$(11), (12), (13), (14) \implies g'(0) = \sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(Y) h_\nu \quad (15)$$

По условию, $f \in \mathcal{C}^1(E)$, а значит, применяя теорему о достаточном условии дифференцируемости, f дифф. в $X \quad \forall X \in E$

Рассмотрим отображение

$$\Psi : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi(t) = Y + tH \quad (16)$$

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\Psi(t)), \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (17)$$

То есть, $g : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^1$ и можно применить теорему о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемых отображений:

$$\mathcal{D}g(t) = \mathcal{D}f(V) \Big|_{V=Y+tH} \cdot \mathcal{D}\Psi(t) \quad (18)$$

Матрица Якоби для отображения $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – матрица 1×1 :

$$\mathcal{D}g(t) = g'(t) \quad (19)$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, значит, её матрица Якоби – это вектор-строка:

$$\mathcal{D}f(V)\Big|_{V=Y+tH} = \left(f'_{x_1}(Y+tH), \dots, f'_{x_n}(Y+tH)\right) \quad (20)$$

$$\mathcal{D}\Psi(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$(18), (19), (20), (21) \implies g'(t) = \sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(Y + tH)h_\nu, \quad t \in (-a, a) \quad (22)$$

Подставляя $t = 0$, получаем (15)

- Переход.

$$f \in \mathcal{C}^{r+1}\left(E\right)$$

Рассмотрим мультииндекс $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $|\beta| = r + 1$

$$\beta = (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_l}, \dots, 0), \quad \beta_{i_k} \neq 0, \quad 1 \leq k \leq l$$

То есть, некоторые члены не равны нулю, остальные – нули

Пусть

$$\alpha^{(1)} = (0, \dots, 0, \beta_{i_1} - 1, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_l}, \dots, 0)$$

$$\alpha^{(2)} = (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_2} - 1, \dots, \beta_{i_l}, \dots, 0)$$

$$\alpha^{(l)} = (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_l} - 1, \dots, 0)$$

$$|\alpha| = r, \quad \alpha + e_\nu = \beta \text{ для некоторого } \nu$$

$$\nu \in \{i_1, \dots, i_l\} \text{ (иначе на месте одного из нулей была бы 1)} \quad (23)$$

По индукционному предположению,

$$g^{(r)}(Y + tH) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^{(\alpha)} \partial^\alpha f(Y + tH) H^\alpha \quad (24)$$

$$(22), (24) \implies g^{(r+1)}(Y + tH) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha H^\alpha \left(\underbrace{\frac{\partial f(Y + tH)}{\partial x^\alpha}}_{:= f_\alpha \in C^1\left(\begin{smallmatrix} E \end{smallmatrix}\right)} \right)' := F \quad (25)$$

Воспользуемся базой индукции для f_α :

$$(25) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha H^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^n f'_{\alpha x_\nu}(Y+tH) h_\nu \right) = \sum_{|\alpha|=1} \sum_{\nu=1}^n C_r^\alpha H^\alpha h_\nu \left(\partial^\alpha f(Y+tH) \right)'_{x_\nu} \quad (26)$$

$$\alpha = (l_1, \dots, l_\nu, \dots, l_n)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial^\alpha f(X) \right)'_{x_\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} f(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{l_1} \dots \underbrace{x_\nu \dots x_\nu}_{l_\nu} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{l_n} x_\nu)(X) \stackrel{\text{т. о. классах } \mathcal{C}^r}{=} \\ &= f(\underbrace{x_1 \dots x_1}_{l_1} \dots \underbrace{x_\nu \dots x_\nu}_{l_\nu+1} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{l_n})(X) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^{\alpha+e_\nu} f(X) \end{aligned} \quad (27)$$

$$H^\alpha h_\nu = h_1^{e_1} \dots h_\nu^{e_\nu} \dots h_n^{e_n} h_\nu = h_1^{e_1} \dots h_\nu^{e_\nu+1} \dots h_n^{e_n} = H^{\alpha+e_\nu} \quad (28)$$

$$(26) \stackrel{(24),(27)}{=} \sum_{|\alpha|=r} \sum_{\nu=1}^n C_r^\alpha H^{\alpha+e_\nu} \partial^{\alpha+e_\nu} f(Y+tH) \quad (29)$$

При этом, $\alpha + e_\nu = \beta$, $|\beta| = r+1$

$$(29) = \sum_{|\beta|=r+1} \partial^\beta f(Y+tH) H^\beta \sum_{\alpha, \nu: \alpha+e_\nu=\beta} C_r^\alpha \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(\mu)} &:= (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_\mu} - 1, 0, \dots, \beta_{i_l}, 0, \dots) \\ \alpha^{(\mu)} + e_{i_\mu} &= \beta, \quad 1 \leq \mu \leq l \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} (31) \Rightarrow \sum_{\alpha+e_\nu=\beta} C_r^\alpha &= \sum_{\mu=1}^l C_r^{\alpha^{(\mu)}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^l \frac{r!}{\beta_{i_1}! \dots (\beta_{i_\mu} - 1)! \dots \beta_{i_l}!} = \frac{r!}{\beta_{i_1}! \dots \beta_{i_l}!} \sum_{\mu=1}^l \beta_{i_\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \frac{r!}{\beta!} |\beta| = \frac{r!}{\beta!} (r+1) = \frac{(r+1)!}{\beta!} = C_{r+1}^\beta \end{aligned} \quad (32)$$

$$(30) \stackrel{(32)}{=} g^{(r+1)}(t) = \sum_{|\beta|=r+1} \partial^\beta f(Y+tH) H^\beta C_{r+1}^\beta$$

□

0.4 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции n переменных

Теорема 3. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ – открытое, $X_0 \in E$, $B_\delta(X_0) \subset E$, $f \in \mathcal{C}^{r+1}(E)$
 $H \in \mathbb{R}^n$, $\|H\| < \delta$

$$\Rightarrow \exists 0 < c < 1 : f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^r \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha \quad (33)$$

Доказательство. Рассмотрим $g(t) := f(X_0 + tH)$

$$g(1) = f(X_0 + H), \quad g(0) = f(X_0)$$

$$g \in \mathcal{C}^{r+1}\left((-a, a)\right), \quad a > 1$$

так как $\|H\| < \delta \Rightarrow$ для некоторого $a > 1$ $\|aH\| = a\|H\| < \delta$

Для функции g можно применить теорему Лагранжа для одной переменной:

$$\begin{aligned}
 g(1) &= g(0) + \sum_{k=1}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot 1^k + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) \cdot 1^{r+1} = \\
 &= g(0) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) \quad \text{формула для } k\text{-й производной} \\
 &= f(X_0) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} C_k^\alpha \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} C_{r+1}^\alpha \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha = \\
 &= f(X_0) + \sum_{k=1}^r \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha
 \end{aligned}$$

□