Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

1.1. Вещественные степенные ряды

Определение 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{1.1}$$

Будем называть (1.1) вещественным степенным рядом, если $x_0 \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{R},\ n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Можно найти радиус сходимости и круг сходимости соответсвующего комплексного степенного ряда:

1. $R = 0, \quad \mathtt{B} = \emptyset$
   Ряд сходится только при $x = x_0$
2. $R = \infty, \quad \mathtt{B} = \mathbb{C}$
   Ряд сходится при любых $z \in \mathbb{C}$, а значит, и при любых $x \in \mathbb{R}$
3. $0 < R < \infty, \quad \mathtt{B} \neq \emptyset, \mathbb{C}$
   Пусть $I \coloneqq \mathtt{B} \cap \mathbb{R}$
   $$I = (x_0 - R, x_0 + R)$$
   - $x \in I \implies x \in \mathtt{B} \implies$ ряд сходится в x
   - $x_1 \notin \overline{I} \implies x_1 \notin \overline{\mathtt{B}} \implies$ ряд расходится в x_1

   Пусть есть $0 < r < R$
   Рассмотрим промежуток $[x_0 - r, x_0 + r] \subset \mathtt{B} \quad \implies$ ряд сходится равномерно на $[x_0 - r, x_0 + r]$

При доказательстве теоремы о радиусе сходимости для комплексных рядов мы пользовались признаком Вейерштрасса. Если перейти к вещественным рядам, то при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ будет равномерно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$$

Теорема Абеля

Бывает, что при $r = R$ ряд сходится

Теорема 1 (Абеля)**.** Ряд (1.1) сходится при $x_0 - R$ или при $x_0 + R$

$$S(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{1.2}$$

Тогда ряд сходится равномерно на $[x_0 - R, x_0]$ или $[x_0, x_0 + R]$, и

$$\implies \left[\begin{array}{l} S \in \mathcal{C}\Big([x_0 - R, x_0]\Big) \\ S \in \mathcal{C}\Big([x_0, x_0 + R]\Big) \end{array} \right.$$

Если ряд сходится и при $x_0 - R$, и при $x_0 + R$, то верны оба утверждения

Доказательство. Докажем для $[x_0 - R, x_0]$:
Так как $x_0 - R - x_0 = -R$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \text{ сходится} \tag{1.3}$$

Пусть $x_0 - R < x < x_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \cdot \left(\frac{x - x_0}{-R}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-R)^n \cdot \left(\frac{x_0 - x}{R}\right)^n \tag{1.4}$$

Положим

$$u_n(x) \coloneqq a_n (-R)^n, \qquad v_n(x) \coloneqq \left(\frac{x_0 - x}{R}\right)^n$$

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $[x_0 - R, x_0]$ (т. к. он не зависит от x)

$$0 \le v_n(x) \le 1, \qquad v_n(x) \text{ монотонн. по } n \quad \forall x \in [x_0 - R, x_0]$$

По признаку Абеля, последние два утверждения влекут, что

$$S(x) \xlongequal{\text{def } u_n, v_n} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x) \text{ равномерно сходится при } x \in [x_0 - R, x_0]$$

$$a_n (x - x_0)^n \in \mathcal{C}\Big([x_0 - R, x_0]\Big)$$

Можно применить следствие о непрерывности ряда непрерывных функций □

1.1.1. Дифференцирование степенного ряда

Теорема 2. Имеется вещественный степенной ряд

$$S(x) \coloneqq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad R > 0 \tag{1.5}$$

$$T(x) \coloneqq a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \qquad R_0 \text{ — его радиус сх.} \tag{1.6}$$

$$\implies R_0 = R \tag{1.7}$$

Примечание. $R > 0$ только потому, что иначе неинтересно рассматривать

Замечание.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n = (x - x_0) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \qquad x \neq x_0 \tag{1.8}$$

Ряды слева и справа сходится или расходятся одновременно, так как они различаются умножением на ненулевую константу

Доказательство.

$$t = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad t_0 = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|n a_n|}$$

Видно, что $t_0 \geq t$

$$R = \frac{1}{t}, \qquad R_0 = \frac{1}{t_0} \tag{1.9}$$

$$\implies R_0 \leq R \tag{1.10}$$

Нужно доказать, что они совпадают
Возьмём x такой, что $|x - x_0| =: r < R$
Докажем, что при таком x будет сходится ряд $T(x)$:
Возьмём $r < \rho < R, \quad q := \frac{r}{\rho}, \quad 0 < q < 1$
Докажем, что $T(x)$ абсолютно сходится (из этого будет следовать, что он сходится):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\rho^n \cdot \left(n\frac{r^n}{\rho^n}\right) \xlongequal{\text{def } q} \sum |a_n|\rho^n \cdot (nq^n) \tag{1.11}$$

Рассмотрим $\varphi(x) := xq^x, \quad x \geq 0$
Понятно, что $\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$
Найдём её максимум:

$$\varphi'(x) = q^x + x\ln q q^x$$

$$q^{x_0} + x_0 \ln q q^{x_0} = 0$$

$$x_0 = -\frac{1}{\ln q} = \frac{1}{\ln\frac{1}{q}} =: M \tag{1.12}$$

$$\implies nq^n \leq M \quad \forall n$$

$$\xRightarrow[(1.11)]{} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\rho^n(nq^n) \leq \sum |a_n|\rho^n \cdot M \underset{S(x)\text{ сх.}}{<} \infty \tag{1.13}$$

$$\implies [x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R_0, x_0 + R_0)$$

$$\xRightarrow[\text{в силу произвольности } r]{} (x_0 - R, x_0 + R) \subset (x_0 - R_0, x_0 + R_0) \quad \implies R \leq R_0 \quad \xRightarrow[(1.10)]{} (1.7)$$

□

Следствие. Обозначим $u_n(x) := a_n(x - x_0)^n$
Тогда $u_n'(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$
Если взять $\forall 0 < r < R$, то ряд $T(x)$ сходится равномерно при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$
Ряд $S(x)$ сходится равномерно там же

$$\implies \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \quad \exists S'(x) = T(x)$$

Это верно при $\forall x \in I$ (т. к. можно обозначить $|x - x_0| =: r < R$)

Рассмотрим ряд $T(x)$ как первоначальный ряд.
По теореме получаем, что радиус сходимости $T'(x)$ будет таким же, то есть,

Следствие.

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} = \Big(S'(x)\Big)' = S''(x)$$

Это можно продолжать. Получаем следующую теорему:

Теорема 3.

$$\forall m \quad \forall x \in I \quad \exists S^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x - x_0)^n\Big)^{(m)} \tag{1.14}$$

1.1.2. Степенной ряд как ряд Тейлора

$$\Big((x - x_0)^n\Big)' = n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\Big((x-x_0)^n\Big)'' = n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Big((x-x_0)^n\Big)^{(m)} = n(n-1)\dots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m}, \qquad m<n \tag{1.15}$$

$$\Big((x-x_0)^n\Big)^{(n)} = n! \tag{1.16}$$

$$\Big((x-x_0)^n\Big)^{(m)} \equiv 0, \qquad m>n \tag{1.17}$$

Если в этих формулах положить $x=x_0$, то почти везде будет ноль:

$$\Big((x-x_0)^n\Big)^{(m)}\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} n!, & m=n \\ 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Подставим в (1.14):

$$S^{(m)}(x_0) = a_m \cdot m! \quad\Longrightarrow\quad a_m = \frac{S^{(m)}(x_0)}{m!} \tag{1.19}$$

Подставим в сам ряд:

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

При этом, $S(x_0)=a_0$ Получаем формулу Тейлора:

$$S(x) = S(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad x\in I$$

1.1.3. Интегрирование степенного ряда

Теорема 4 (об интегрируемости вещественного степенного ряда).
По-прежнему рассматриваем ряд $S(x)$, $\quad p,q\in I$ (не обязательно $p<q$)

$$\Longrightarrow \int_p^q S(x)\,\mathrm{d}\,x = a_0(q-p) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(q-x_0)^{n+1}-(p-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{1.20}$$

Доказательство. S равномерно сходится на $[p \between q]$.
Его можно интегрировать почленно, что и записано в теореме. □

Утверждение 1. В частности, при $p=x_0, \quad q=y\in I$,

$$\int_{x_0}^{y} S(x)\,\mathrm{d}\,x = a_0(y-x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(y-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{1.21}$$

1.1.4. Применение свойств степенных рядов

Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \qquad x\in(-1,1)$$

Понятно, что при $r<1$ ряд сходится равномерно на $[-r,r]$.
Возьмём $|y|\le r$ и проинтегрируем по формуле (1.21):

$$\boxed{\ln(1+y)} = \int_0^y \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x} = y + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{n+1}}{n+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n}}$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1. При $y = 1$ он сходится. По теореме Абеля он сходится равномерно на $[0, 1]$.

$$\implies \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}} = \lim_{y \to 1} \ln(1+y) = \boxed{\ln 2}$$

Напишем в этом равенстве x^2 вместо x:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

Рассмотрим $|y| < 1$:

$$\boxed{\operatorname{arctg} y} = \int_0^y \frac{\mathrm{d}\, x}{1+x^2} = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n-1}}{2n-1}}$$

При $y = 1$ этот рад сходится как знакочередующийся. По теореме абеля он непрерывен на $[0, 1]$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}} = \lim_{y \to 1^-} \operatorname{arctg} y = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Лемма 1 (техническая). $r > 0$

$$\implies \frac{r^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Доказательство. Будем считать, что $n \geq [r] + 2$.
Пусть $M := \dfrac{r^{n_0}}{n_0!}$.
Если $n = n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots,$ то

$$\frac{r^n}{n!} = \frac{r^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{r}{n_0+1} \cdot \frac{r}{n_0+2} \cdot \dots \cdot \frac{r}{n_0+k}$$

Обозначим $\frac{r}{n_0+1} = \frac{r}{[r]+3} =: q < 1$

$$\frac{r^n}{n!} < M \cdot \underbrace{q \cdot \ldots q}_{k} = Mq^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

□

1.1.5. Разложение функций в степенной ряд

Обозначение. $\overset{T}{=}$ — “равно по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа”

Рассматриваем $x_0 = 0$

1. e^x

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(e^x)^{(n)}\Big|_{x=0} = 1$$

$$e^0 = 1$$

$$e^x \overset{T}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad c < |x|, \quad cx > 0 \tag{1.22}$$

$$\left| e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\xRightarrow[(1.22)]{} \boxed{e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}}$$

При $x = 1$ получаем

$$e = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Взяв сумму до пятого слагаемого, получаем очень хорошее приближение — с точностью до $\frac{1}{720}$

2. $\cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\cos x)'' = -\cos x$$
$$(\cos x)''' = \sin x$$
$$(\cos x)^{(4)} = \cos x$$
$$(\cos x)^{(2n-1)}\Big|_{x=0} = 0$$
$$(\cos x)^{(2n)}\Big|_{x=0} = (-1)^n$$
$$\cos x \overset{T}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\xRightarrow[\text{лемма}]{} \boxed{\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

3. $\sin x$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\sin x)'' = -\sin x$$
$$(\sin x)''' = -\cos x$$
$$(\sin x)^{(4)} = \sin x$$
$$(\sin x)^{(2n)}\Big|_{x=0} = 0$$
$$(\sin x)^{2n-1}\Big|_{x=0} = (-1)^{n-1}$$
$$\sin x \overset{T}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n}}{2n!}$$
$$\xRightarrow[\text{лемма}]{} \boxed{\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

1.1.6. Формула Тейлора с остатком в интеральной форме (в форме Коши)

Теорема 5. $f \in \mathcal{C}^n\Big((a, b)\Big), \qquad x, x_0 \in (a, b), \quad x \neq x_0$

$$\implies f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) \, \mathrm{d}\, t \quad (1.23)$$

Доказательство. Докажем **по индукции**.

- **База.** $n = 1$

$$f(x) \overset{?}{=} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) \, \mathrm{d}\, t$$

Это — формула Ньютона—Лейбница.

- **Переход.** $n \to n + 1$

$$f \in \mathcal{C}^{n+1}\Big((a, b)\Big)$$

Проинтегрируем по частям по t:

$$\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right)'_t = (x-t)^{n-1}$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right)' \mathrm{d}\, t f^{(n)}(t) = \left(-\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n)}(t)\right)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right) f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}\, t = \\ = \frac{(x-x_0)^n}{n} f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}\, t$$

$$\xLongrightarrow[\textbf{предп.}]{} f(x) =$$

$$= f(x_0)\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}\, t$$

□

1.1.7. Продолжаем раскладывать в ряд

4. $(1+x)^r, \qquad r \notin \mathbb{N}, \quad r \neq 0$ (чтобы была нетривиальность)

$$\Big((1+x)^r\Big)' = r(1+x)^{r-1}$$

$$\Big((1+x)^r\Big)'' = r(r-1)(1+x)^{r-2}$$

$$\Big((1+x)^r\Big)^{(n)} = r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$$

$$\Big((1+x)^r\Big)^{(n)}\Big|_{x=0} = r(r-1)\dots(r-n+1)$$

Применим формулу Тейлора с остатком в форме Коши:

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \\ + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n r(r-1)\dots(r-n)(1+t)^{r-n-1}\ \mathrm{d}\, t}_{I_n} \qquad (1.24)$$

$$(x-t)^n(1+t)^{-n} = \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n$$

Всё это верно при $0 \le |t| \le x, \quad tx \ge 0$

- $x > 0$

$$0 \le \frac{x-t}{1+t} \le x \qquad (1.25)$$

- $x < 0$

$$\frac{x-t}{1+t} = \frac{-|x|+|t|}{1-|t|} \implies \left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \frac{|x|-|t|}{1-|t|} \le |x| \qquad (1.26)$$

$$(1.8),(1.9) \implies \left|\frac{x-t}{1+t}\right| \le |x|, \qquad \text{при } |t| \le |x|, \quad tx \ge 0 \qquad (1.27)$$

$$\implies |I_n| \le \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!}\left|\int_0^x \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n \cdot (1+t)^{r-1}\ \mathrm{d}\, t\right| \le \\ \le \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!}|x^n|\left|\underbrace{\int_0^x (1+t)^{r-1}\ \mathrm{d}\, t}_{M(x)}\right| \qquad (1.28)$$

Обозначим

$$\alpha_n \coloneqq \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!}|x|^n$$

Считаем, что $n > r+1$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{n+1} \cdot |r-n-1| \cdot |x|$$

$$|r-n+1| = n+1-r$$

$$\implies \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n+1-r}{n+1} \cdot |x| = \left(1 - \frac{r}{n+1}\right)|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x| \tag{1.29}$$

Обозначим

$$q \coloneqq \frac{1+|x|}{2}, \qquad q < 1, \quad |x| < q$$

В новых обозначениях,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \le q \quad \forall n \ge \text{ некторого } n_0$$

Значит, при $n > n_0$, $\alpha_n > 0$, α_n монотонно убывает

$$\implies \exists \lim_{n\to\infty} \alpha_n =: \alpha \ge 0 \tag{1.30}$$

$$(1.29) \iff \alpha_{n+1} = \alpha_n\left(1 - \frac{r}{n+1}\right) \cdot |x|$$

$$\xRightarrow[(1.13)]{} \alpha = \alpha|x| \implies \alpha = 0$$

$$\xRightarrow[(1.24)]{} (1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \dots\dots\dots\dots$$