Оглавление

0.1 Минимальный многочлен оператора

Свойства (минимального многочлена оператора).

4. $e_1, \dots, e_n$ – базис V, $\quad P_1(t), \dots, P_n(t)$ – минимальные аннуляторы для $e_1, \dots, e_n$
Тогда НОК $(P_1, \dots, P_n)$ является минимальным многочленом для A

Доказательство. Пусть $P = \text{НОК}\,(P_1, \dots, P_n)$

- Проверим, что P аннулирует A:
  Пусть $v \in V, \quad v = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$
  Применим P:
  $$P(\mathcal{A})(v) = a_1P(\mathcal{A})e_1 + \dots + a_nP(\mathcal{A})e_n$$
  $$P \,\vdots\, P_i \implies P \text{ – аннул. для } e_i \implies P(\mathcal{A})e_i = 0$$
  $$P(\mathcal{A})(v) = a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0$$

  > **Замечание.** Тем самым, мы доказали, что аннулятор многочлена существует

- Проверим, что P минимальный:
  Пусть $Q(t)$ аннулирует $\mathcal{A}$
  $$\implies Q(\mathcal{A})v = 0 \quad \forall v \implies Q(\mathcal{A})e_i = 0 \quad \forall i \xRightarrow[P_i \text{ – мин. аннул.}]{} $$
  $$\implies Q \,\vdots\, P_i \quad \forall i \implies Q \,\vdots\, P \implies \deg Q \geq \deg P$$

□

Теорема 1 (Гамильтона-Кэли). Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ аннулирует $\mathcal{A}$, т. е.
$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$$

Доказательство. Нужно доказать, что $\forall v \quad \chi(\mathcal{A})v = 0$
Докажем, что $\chi_{\mathcal{A}} \,\vdots\, P_0$, где P_0 – минимальный аннулятор (было свойство, что все аннуляторы делятся на минимальный):
Пусть U – циклическое подпространство, порождённое v
χ_U – характеристический многочлен $\mathcal{A}\Big|_U$ (он определён, т. к. пространство иварианто)
По следствию о делителях характеристического многочлена, $\chi \,\vdots\, \chi_U$
Знаем, что χ_U – минимальный аннулятор для v на U (по теореме о циклическом подпространстве и минимальном аннуляторе)
$$\left.\begin{aligned} \chi_U &= P_0 \\ \chi &\,\vdots\, \chi_U \end{aligned}\right\} \implies \chi \,\vdots\, P_0$$

□

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_{\mathcal{A}}(t) = (1-t)^2 = t^2 - 2t + t$$

$$A^2 - 2A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следствие. P_0 – минимальный многочлен $\mathcal{A}$
Тогда $\chi \mathrel{\vdots} P$

0.2 Примарные и корневые подпространства

Определение 1. K – поле, $\qquad V$ – векторное пространство над K, $\qquad \mathcal{A}$ – оператор на V
$P(t)$ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$, такой, что старший коэффициент P равен 1
Пространство V называется примарным относительно $\mathcal{A}$, если $P(t) = Q^s(t)$ для некоторого $Q(t)$, неприводимого над K

Замечание. Если $s = 0$, то $P = \text{const} \implies V = \{0\}$. Можно считать, что оно примарно

Примеры.

1. $K = \mathbb{R}, \qquad V = \mathbb{R}^4, \qquad \mathcal{A} : X \mapsto AX$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 0 & 2 & * & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \chi_A = (2-t)^4$$

$(2-t)^4 \mathrel{\vdots}$ минимальный многочлен $\implies$ минимальный многочлен $= (2-t)^s, \quad s \le 4$

2. $V = \mathbb{R}^2, \qquad \mathcal{A} : X \mapsto AX$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{\mathcal{A}} = t^2 + 1 - \text{неприв.} \implies \text{примарно}$$

3. То же самое, но $K = \mathbb{C}$

$$\chi_{\mathcal{A}} = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$$

$$P_1(t) = t - i, \qquad P_2(t) = t + i$$

P_1, P_2 – не аннул. $\mathcal{A}$:

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \ne 0, \qquad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \ne 0$$

$\implies \chi_{\mathcal{A}}(t)$ – минимальный многочлен. Пространство не примарно

Свойства (взаимно простых многочленов от оператора)**.** $\mathcal{A}$ – оператор на V

1. $P_1, P_2, ..., P_k$ – попарно взаимно просты, $\qquad T(t) = P_1(t) ... P_k(t), \qquad v \in V, \qquad T$ аннулирует V
Тогда $\exists\, v_1, ..., v_k : v = v_1 + ... + v_k$ и P_i аннулирует v_i

Доказательство. **Индукция.**

- **База.** $k = 2$
  P, Q взаимно просты, $\qquad v \in V$
  Докажем, что $\exists\, v, w : v = u + w, \qquad P(\mathcal{A})u = 0, \qquad Q(\mathcal{A})w = 0$
  Т. к. P, Q взаимно просты, можно разложить их НОД $(= 1)$:

$$\exists\, F(t), G(t) : P(t)F(t) + Q(t)G(t) = 1$$

  Применим к $\mathcal{A}$:

$$P(\mathcal{A}) \circ F(\mathcal{A}) + Q(\mathcal{A}) \circ G(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$$

  Применим к v:

$$(PF)(\mathcal{A})v + (QG)(\mathcal{A})v = v$$

  Положим $u = (QG)(\mathcal{A})v, \qquad w = (PF)(\mathcal{A})v$
  Проверим, что $P(\mathcal{A})u = 0$ (для w – аналогично):

$$P(\mathcal{A}) \circ \Big(QG(\mathcal{A})\Big)v = \Big(PQG\Big)(\mathcal{A})v \underset{\text{коммут.}}{=\!=\!=} \Big(GPQ\Big)(\mathcal{A})v =$$
$$= G(\mathcal{A}) \qquad \underbrace{(PQ)(\mathcal{A})v}_{=0 \text{ (т. к. } T=PQ \text{ аннулирует } v)} \qquad = 0$$

- **Переход.** $k - 1 \to k$

$$T = \underbrace{P_1 ... P_{k-1}}_{P} \underbrace{P_k}_{Q}$$

$$(PQ)(\mathcal{A})v = 0 \underset{\textbf{база}}{\Longrightarrow} \exists\, u, w : v = u + w, \qquad P(\mathcal{A})u = 0, \quad Q(\mathcal{A})w = 0$$

  По **индукционному предположению**,

$$\exists\, v_1, ..., v_{k-1} : P_i \text{ аннул. } v_i, \qquad u = v_1 + ... + v_{k-1}$$

$$v = v_1 + ... + v_{k-1} + \underset{:= v_k}{w}$$

$\square$

2. P, Q взаимно просты, $\qquad P, Q$ аннуляторы v

$$\Longrightarrow \ v = 0$$

Доказательство. Пусть T – минимальный аннулятор v

$$\left.\begin{matrix} P \,\vdots\, T \\ Q \,\vdots\, T \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \ T = \text{const}, \qquad T(t) = c \ \Longrightarrow \ cv = 0 \ \Longrightarrow \ v = 0$$

$\square$

Теорема 2 (разложение пространства в прямую сумму примарных подпространств). K – поле, $\qquad V$ – векторное пространство над K, $\qquad \mathcal{A}$ – оператор на V
$P(t)$ – минимальный моногочлен $\mathcal{A}$, он разложен в сумму:

$$P(t) = P_1(t) ... P_k(t), \qquad \text{где } P_i(t) = Q_i^{s_i}(t), \qquad Q_i \text{ – неприривод. над } K$$

Тогда $\exists$ подпространства $U_1, ..., U_k$, такие что

1. все U_i иварианты
2. $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$
3. $P_i(t)$ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$ на $U_i \quad \forall i$

Доказательство. Положим $U_i = \ker P_i(\mathcal{A})$. Докажем, что они подойдут:

1. Ядро многочлена от оператора инвариантно (было такое свойство)

2. (a) Докажем, что $V = U_1 + ... + U_k$
   $P_1, ..., P_k$ попарно взаимно просты, и $P_1 \cdot ... \cdot P_k$ аннулируют любой v, значит

$$\forall v \quad \exists\, v_1, ..., v_k : v_1 + ... + v_k, \qquad P_i \text{ аннул. } v_i \implies v_i \in U_i$$

   (b) Докажем, что сумма прямая:
   Нужно проверить, что $U_s \cap \Big(U_1 + ... + U_{s-1} + U_{s+1} + ... + U_k\Big) = \{\,0\,\} \quad \forall s$
   НУО проверим, что $(U_1 + ... + U_k) \cap U_k = \{\,0\,\}$
   Возьмём $v \in (U_1 + ... + U_{k-1}) \cap U_k$

$$v = v_1 + ... + v_{k-1}, \qquad v_i \in U_i, \qquad v \in U_k$$

   По одному из свойств,

$$P_1 \cdot ... \cdot P_{k-1} \text{ аннулирует } v_1 + ... + v_{k-1} = v$$

   При этом, P_k аннулирует v
   Заметим, что $(P_1 \cdot ... \cdot P_{k-1}, P_k) = 1$
   По одному из свойств, это означает, что $v = 0$

3.
$$U_i = \ker P_i(\mathcal{A}) \implies P_i(\mathcal{A})\Big|_{U_i} = 0$$

   P_i аннулирует $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$
   Значит, P_i делится на минимальный многочлен $\mathcal{A}\Big|_{U_i}$
   При этом, $P_i = Q_i^{s_i}$
   Отсюда минимальный тоже является $Q_i^{r_i}, \qquad r_i \le s_i$
   Хотим доказать, что $r_i = s_i$
   Пусть $T = Q_1^{r_1} ... Q_k^{r_k}$
   Т. к. у нас прямая сумма, сущестует $e_1, ..., e_n$ – базис V, он является объединением базисов U_i

$$\implies T(\mathcal{A})e_1 = 0, \dots\dots\dots\dots, T(\mathcal{A})e_k = 0$$

$$\implies T \text{ аннулирует } \mathcal{A} \xRightarrow[P\text{ – мин. многочл.}]{} \underbrace{T}_{\prod Q_i^{r_i}} \,\vdots\, \underbrace{P}_{\prod Q_i^{s_i}}, \quad r_i \le s_i \implies r_i = s_i$$

□

Определение 2. λ – с. ч. $\mathcal{A}$
Вектор v называется корневым вектором, соответствующим λ, если для некоторого k многочлен $P(t) = (t-\lambda)^k$ является аннулятором V
Множество корневых векторов называется корневым попространством, соотв. λ

Свойства.

1. Корневое подпространство инвариантно

   Доказательство. Пусть $P(t) = (\lambda - t)^k$ – аннул. v, т. е. $P(\mathcal{A})v = 0$

$$P(\mathcal{A})(\mathcal{A}v) = \Big(P(\mathcal{A}) \circ \mathcal{A}\Big)v = \Big(\mathcal{A} \circ P(\mathcal{A})\Big)v = \mathcal{A}\Big(\underbrace{P(\mathcal{A})v}_{=0}\Big) = \mathcal{A}(0) = 0$$

□

2. V конечномерно, минимальный многочлен $\mathcal{A}$ раскладывается на линейные множители

$$P(t) = (\lambda_1 - t)^{s_1} ... (\lambda_k - t)^{s_k}$$

Тогда $\ker\left((\lambda_i\mathcal{E} - \mathcal{A})^{s_i}\right)$ – корневые подпространства

Доказательство. Пусть $U_i = \ker\left((\lambda_i\mathcal{E} - \mathcal{A})^{s_i}\right), \qquad W_i$ – корневое подпространство для λ_i

- $U_i \subset W_i$ – очевидно ($v \in U_i \implies (\lambda_i\mathcal{E} - \mathcal{A})^{s_i} v = 0, \qquad$ подойдёт $k = s_i$)
- $W_i \subset U_i$
  Пусть $v \in W_i$
  Пусть k – минимальное число, такое что $(\lambda_i\mathcal{E} - \mathcal{A})^k$ аннулирует v
  Тогда $(\lambda - t)^k$ – минимальный аннулятор v
  При этом, $P(t)$ – аннулятор v

$$\implies P(t) \,\vdots\, (\lambda - t)^k \implies k \leq s_i \implies v \in U_i$$

□

0.3 Существование жордановой формы

Повторим определения:

Определение 3. Жордановой клеткой порядка r с с. ч. λ называется матрица порядка r вида

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & 0 \\ 1 & \lambda & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 4. Жордановой матрицей называется блочно-диагональная матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \qquad \text{(как } r_i\text{, так и } \lambda_i \text{ могут совпадать)}$$

Определение 5. Жорданов базис – базис, в котором матрица оператора жорданова

Теорема 3 (существование жордановой формы). K – поле, $\qquad V$ – векторное пространство над K
$\mathcal{A}$ – оператор, $\qquad \chi_{\mathcal{A}}(t)$ раскладывается на линейные множители над K
Тогда для $\mathcal{A}$ существует жорданов базис