Оглавление

Глава 1

Функциональные последовательности и ряды

1.1. Равномерно сходящиеся комплексные функциональные ряды

Определение 1. E — метрическое пространство, $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \gamma E \to \mathbb{C}$
Комплексным функциональным рядом называется символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x) \tag{1.1}$$

Частичной суммой называется $w_n(x) \coloneqq \gamma_1(x) + \cdots + \gamma_n(x)$
Говорят, что ряд равномерно сходится на множестве E, если

$$\exists\, w : E \to \mathbb{C} : \quad w_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in E}{\rightrightarrows}} w(x)$$

1.1.1. Критерий Коши

Теорема 1. Для того чтобы ряд (1.1) **равномерно** сходился на E, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in E \quad |\gamma_{n+1}(x) + \cdots + \gamma_m(x)| < \varepsilon$$

Определение 2. МОжно применить критерий Коши для комплексной функциональной последовательности

1.1.2. Признак Вейерштрасса

Теорема 2.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n > 0 : \quad |\gamma_n(x)| \le a_n \quad \forall n \quad \forall x \in E \tag{1.2}$$

Ряд a_n сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \tag{1.3}$$

$$\implies \text{(1.1) сходится равномерно}$$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$$(1.3) \implies \exists N : \quad \forall m > n > N \quad a_{n+1} + \cdots + a_n < \varepsilon \tag{1.4}$$

$$|\gamma_{n+1}(x)+\dots+\gamma_n(x)| \le |\gamma_{n+1}(x)|+\dots+|\gamma_m(x)| \underset{a_n>0}{\le} a_{n+1}+\dots+a_m \underset{(1.4)}{<} \varepsilon$$

По критерию Коши получаем равномерную сходимость $\square$

1.2. Комплексные степенные ряды

$E=\mathbb{C}$

$$\{\, c_n \,\}_{n=0}^{\infty}, \qquad c_n \in \mathbb{C}$$

$z_0 \in \mathbb{C}$

Положим $\gamma_0(z) \coloneqq c_0, \quad \gamma_n(z) \coloneqq c_n(z-z_0)^n$

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{1.5}$$

Такое выражение будем называть комплексным степенным рядом с центром z_0 (рядом по степеням $(z-z_0)$)

Замечание. $\{\, c_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \qquad c_n \to c \in \mathbb{C}$

$$\implies \exists\, M: \quad |c_n| \le M \quad \forall n$$

Доказательство. Положим $c_n=a_n+ib_n, \quad c=a+ib$

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b$$

Дальше применяем теорему из первого семестра $\square$

Замечание (необходимый признак сходимости комплексных числовых рядов).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{сх.} \implies \gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказательство. $c_n=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$

$$\left.\begin{aligned} c_n &\to c \\ c_{n-1} &\to c \end{aligned}\right\} \implies \underbrace{c_n-c_{n-1}}_{\gamma_n} \to c-c=0$$

$\square$

Следствие.

$$\exists\, M: \quad |\gamma_n| \le M \quad \forall n$$

Лемма 1 (Абеля).

$$\exists\, z_1 \ne z_0: \quad \text{(1.5) сходится при } z_1$$

Обозначим $R \coloneqq |z_1-z_0|$

$$\implies \text{(1.5) сх.} \quad \forall z: |z-z_0|<R \tag{1.6}$$

$$\implies \forall 0<r<R \quad \text{(1.5) равн. сх. при } |z-z_0| \le r \tag{1.7}$$

Доказательство. Докажем (1.7):

Обозначим $0<q \coloneqq \frac{r}{R}<1$

Сходимость при z_1, по первому замечанию, означает, что

$$c_n(z_1-z_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{1.8}$$

Тогда, по следствию,

$$\exists\, M: \quad |c_n(z_1-z_0)^n| \le M \tag{1.9}$$

$$\iff |c_n| \cdot |z_1 - z_0| \le M \overset{\text{def } R}{\iff} |c_n| \le \frac{M}{R^n} \tag{1.10}$$

$$|c_n(z - z_0)^n| = |c_n| \cdot |z - z_0|^n \underset{\text{усл. (1.7),(1.10)}}{\le} \frac{M}{R^n} \cdot r^n = Mq^n \tag{1.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Mq^n = \frac{Mq}{1-q}$$

Можно применить признак Вейерштрасса, тем самым доказывая (1.7)

$$(1.7) \implies (1.5) \text{ сх. абс. при } |z - z_0| < R$$

□

1.2.1. Радиус сходимости и круг сходимости

Определение 3.

1. Пусть (1.5) сходится только при $z = z_0$
   Будем полагать радиус сходимости $R := 0$, круг сходимости $\mathtt{B} := \emptyset$
2. (1.5) сходится при всех z
   Полагаем $R := +\infty$, $\quad \mathtt{B} := \mathbb{C}$
3. $\exists\, z_1 \ne z_0 : \quad (1.5)$ сх. в z_1, $\qquad \exists\, z_2 : \quad (1.5)$ расх. в z_2

$$R := \sup \{\, r \mid r = |\, z_* - z_0|, \quad (1.5) \text{ сх. в } z_* \,\}, \qquad \mathtt{B} := \{\, z_0 \mid |\, z - z_0| < R \,\}$$

Положим $r_1 := |z_1 - z_0|$, $\quad r_2 := |z_2 - z_1|$
По определению R

$$R \ge r_1 > 0$$

Возьмём $z_3 : \quad r_3 := |z_3 - z_0| > r_2$
Если бы (1.5) сходился при z_3, можно было бы применить к z_3 лемму Абеля. Тогда бы (1.5) сходился в z_2 — $\lightning$
То есть, в z_3 ряд расходится
Значит, $R \le r_2$, $\quad r_1 < r_2$

1.2.2. Свойства круга сходимости

Рассматриваем только случай, когда $0 < R < \infty$

Теорема 3.

$$(1.5) \text{ сх.} \quad \forall z \in \mathtt{B} \tag{1.12}$$

$$(1.5) \text{ расх.} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{B} \tag{1.13}$$

Доказательство.

- Докажем (1.12):
  Возьмём $r := |z - z_0| < R$
  По определению R
  $$\exists\, z_* : \quad |z_* - z_0| > R, \quad (1.5) \text{ сх. в } z_*$$
  По лемме Абеля (1.5) сх. в z
- Докажем (1.13):
  Возьмём $\rho := |\widehat{z} - z_0| > R$
  Если ряд сходится, то ρ больше супремума, что невозможно

□

Определение 4. Определим

$$t := \overline{\lim}\, n \to \infty \sqrt[n]{c_n} \tag{1.14}$$

Теорема 4.

1. $R = 0$, если $t = +\infty$
2. $R = +\infty$, если $t = 0$
3. $R = \frac{1}{t}$ иначе

Доказательство. Будем рассматривать только последний случай
Определим $R_0 := \frac{1}{t}$

- Возьмём $z_2 : \quad |z_2 - z_0| > R_0$
  Обозначим $\varepsilon := |z_2 - z_0| - R_0 > 0$
  Определим
$$\delta := \frac{\varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t}$$
  По определению верхнего предела
$$\exists \{ n_k \}_{k=1}^{\infty} : \quad \sqrt[n_k]{c_{n_k}} > t - \delta \tag{1.15}$$
$$\iff |c_{n_k}| > (t - \varepsilon)^{n_k}$$
$$\implies |c_{n_k}(z_2 - z_0)^{n_k}| = |c_{n_k}| \cdot |z_2 - z_0|^{n_k} > (t - \delta)^{n_k} \cdot (R_0 + \varepsilon)^{n_k} = \Big((t - \delta)(R_0 + \varepsilon) \Big)^{n_k}$$
$$(t - \delta)(R_0 + \varepsilon) = \left(t - \frac{\varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t} \right) \left(\frac{1}{t} + \varepsilon \right) = \frac{t + \varepsilon t^2 - \varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t} \cdot \frac{1 + \varepsilon t}{t} = 1$$
$$\implies |c_{n_k}(z_2 - z_0)^{n_k}| \geq 1 \tag{1.16}$$
  По второму замечанию ряд в z_2 расходится

- Возьмём $z_1 : \quad |z_1 - z_0| < R_0$
  Пусть
$$\varepsilon_0 := R_0 - |z_1 - z_0|, \quad \delta_0 := \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t}$$
  По свойствам верхнего предела
$$\exists N : \quad \forall n > N \quad \sqrt[n]{|c_n|} < t + \delta_0$$
$$\iff |c_n| < (t + \delta_0)^n$$
$$\implies \forall n > N \quad |c_n(z_1 - z_0)^n| = |c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < (t + \delta_0)^n \cdot (R_0 - \varepsilon_0)^n = \Big((t - \delta_0)(R_0 - \varepsilon_0) \Big)^n$$
$$(t + \delta_0)(R_0 - \varepsilon_0) \overset{\text{def } \delta}{=\!=} \left(t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t} \right) \left(\frac{1}{t} - \varepsilon_0 \right) = \frac{t - \varepsilon_0 t^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t} \cdot \frac{1 - \varepsilon_0 t}{t} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 t$$
$$0 < q := 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 t < 1$$
$$\implies |c_n(z_1 - z_0)^n| < q^n < 1$$
  Значит, ряд сходится при z_1

$\square$

Теорема 5. $c_n \neq 0 \quad \forall n, \qquad \exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$
Тогда этот предел и равен радиусу сходимости