# Содержание

**Обозначение.** $x \in [a \between b]$ – $x$ между $a$ и $b$

# 1. Условие постоянства функции

**Теорема 1.** $f \in \mathcal{C}\Big((a, b)\Big)$, $\quad \forall x \in (a, b) \quad \exists f'(x)$

$$\forall x \in (a, b) \qquad \underset{(\text{то есть, } f(x) = \text{const})}{f(x) = f(x_0)} \tag{1}$$

$$\iff \forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0 \tag{2}$$

**Доказательство.**

- $\implies$
  (1) $\iff$ (2), так как $c' \equiv 0$
- $\impliedby$
  Пусть $x \neq x_0$
  По теореме Лагранжа,

$$\exists\, x_1 \in [x_0 \between x] : f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_1)}_{=0}(x - x_0) = 0$$

□

# 2. Условие монотонности функции; условие строгой монотонности

**Теорема 2** (условие возрастания функции)**.** $f \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big)$, $\quad \forall x \in (a, b) \quad \exists f'(x)$

$$\forall x_1 < x_2 \in [a, b] \quad f(x_1) \le f(x_2) \tag{3}$$

$$\iff \forall x \in (a, b) \quad f'(x) \ge 0 \tag{4}$$

**Доказательство.**

- $\implies$
  Пусть выполнено (3)
  Рассмотрим любую точку $x \in (a, b)$
  Возьмём $h > 0 : x + h < b$

$$(3) \implies f(x + h) \ge f(x) \iff \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \ge 0 \implies \lim_{h \to 0+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \ge 0 \iff f'(x) \ge 0$$

- $\impliedby$
  Пусть выполнено (4)
  Возьмём $x_1, x_2 \in [a, b]$
  По теореме Лагранжа,

$$\exists\, x_3 \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_3)}_{\ge 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\ge 0} \ge 0 \iff f(x_2) \ge f(x_1)$$

□

**Теорема 3** (условие строгого возрастания функции). $f \in C\big([a,b]\big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f'(x)$

$$\forall x_1 < x_2 \in [a,b] \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in (a,b) \quad f'(x) \geq 0 & (5) \\ \nexists\,(\alpha,\beta) \subset (a,b) : \forall x \in (\alpha,\beta) \quad f'(x) = 0 & (6) \end{cases}$$

**Доказательство.**

- $\implies$
  Пусть $f$ строго возрастает
  По предыдущей тоереме, выполнено (5)
  Пусть **не** выполнено (6), то есть

$$\exists\,(\alpha,\beta) \subset (a,b) : \forall x \in (\alpha,\beta) \quad f'(x) = 0$$

  По теореме об условии постоянства функции, $\forall x_1 < x_2 \in (\alpha,\beta) \quad f(x_1) = f(x_2)$ – $\lightning$ с предположением, что $f$ строго возрастает

- $\impliedby$
  Пусть выполнены (5) и (6)
  Докажем, что $f$ строго возрастает:

$$(5) \implies \forall x_1 < x_2 \in [a,b] \quad f(x_1) \leq f(x_2) \tag{7}$$

  То есть, $f$ возрастает
  Предположим, что $f$ не строго возрастает, то есть

$$\exists\, x', x'' \in [a,b] : f(x') = f(x'') \tag{8}$$

$$(7),(8) \implies \forall x \in (x',x'') \quad f(x') \leq f(x) \leq f(x'') \iff \forall x \in (x',x'') \quad f(x) = f(x') \implies \\ \implies \forall x \in (x',x'') \quad f'(x) = 0 \text{ – } \lightning$$

□

## 3. Неравенства $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $\ln(1+x) \leq x, x > -1$; $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \alpha > 1, x > -1$; $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, 0 < \alpha < 1, x > -1$

**Утверждение 1.** $\forall x \in \big[0, \dfrac{\pi}{2}\big] \quad \sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x < x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

По замечательному пределу для $\dfrac{\sin x}{x}, \quad f \in \mathcal{C}\Big(\big[0, \dfrac{\pi}{2}\big]\Big)$

Найдём производную $f$:

$$f'(x) = \frac{\sin' x \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x)$$

При доказательстве существенного неравенства для $\sin x$ было доказано, что $\forall x \in \big(0, \dfrac{\pi}{2}\big) \quad x < \operatorname{tg} x$

Значит,

$$f'(x) = \underbrace{\frac{\cos x}{x^2}}_{>0} \underbrace{(x - \operatorname{tg} x)}_{<0} < 0$$

По теореме о строгом убывании, $f$ строго убывает, то есть, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

□

**Утверждение 2.**

$$\forall x > -1 \quad \ln(1+x) \le x$$

$$\ln(1+x) = x \iff x = 0$$

**Доказательство.** Возьмём $-1 < a < 0 < b$
Рассмотрим $f(x) \coloneqq \ln(1+x) - x, \qquad x \in [a, b]$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$$

- Рассмотрим отрезок $[a, 0]$:

$$\forall x \in [a, 0] \quad \begin{cases} -x > 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases} \qquad \implies f(x) \text{ строго возр. на } [a, 0]$$

  То есть,

$$\forall x \in [a, 0] \quad f(x) \le f(0) = 0$$

- Рассмотрим отрезок $[0, b]$:

$$\forall x \in [0, b] \quad \begin{cases} -x < 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases} \qquad \implies f(x) \text{ строго убывает на } [0, b]$$

  То есть,

$$\forall x \in [0, b] \quad f(x) \le f(0) = 0$$

Получили, что

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \le 0 \iff \ln(1+x) \le x$$

□

**Утверждение 3** (неравенство Бернулли). $\alpha > 1$

$$\forall x > -1 \quad (1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x \iff x = 0$$

**Доказательство.** Рассмотрим $f(x) \coloneqq (1+x)^\alpha - \alpha x \quad$ для $x \in [a, b], \quad -1 < a < 0 < b$
Теперь $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\Big((1+x)^{\alpha-1} - 1\Big)$
Обозначим $\beta \coloneqq \alpha - 1 > 0$

- $-1 < x < 0$

$$1 + x < 1 \quad \implies \quad (1+x)^\beta < 1^\beta \quad \implies \quad (1+x)^\beta - 1 < 0$$

  То есть, $f$ строго убывает на $[a, 0]$ и $f(x) < f(0) = 1$

- $0 < x$

$$1 + x > 1 \quad \implies \quad (1+x)^\beta > 1^\beta \quad \implies \quad (1+x)^\beta - 1 > 0$$

  То есть, $f$ строго убывает на $[a, 0]$ и $f(x) < f(0) = 1$

Получили, что $f(x) \le 1$ $\square$

**Утверждение 4** (неравенство Бернулли)**.** $0 < \alpha < 1$

$$\forall x > -1 \quad (1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x \iff x = 0$$

**Доказательство.** Доказательство точно такое же, но $\beta \coloneqq 1 - \alpha$ $\square$

## 4. Определение выпуклых, вогнутых функций; связь выпуклых и вогнутых функций; критерий выпуклости (вогнутости) функции $f$ через $f'$; через $f''$; точки перегиба

**Определение 1.** $f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

$$f \text{ выпукла} \iff \forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad \forall t_1, t_2 > 0 : t_1 + t_2 = 1$$

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \le t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \tag{9}$$

**Определение 2.** $g \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

$$g \text{ вогнута} \iff \forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad \forall t_1, t_2 > 0 : t_1 + t_2 = 1 \quad g(t_1x_1 + t_2x_2) \ge t_1 g(x_1) + t_2 g(x_2)$$

**Теорема 4.** $f$ выпукла $\implies -f$ вогнута
$g$ вогнута $\implies -g$ выпукла

**Доказательство.** Домножим (9) на $-1$:

$$-f(t_1x_1 + t_2x_2) \ge t_1\big(-f(x_1)\big) + t_2\big(-f(x_2)\big)$$

$\square$

**Теорема 5** (характеристика выпуклых функций в терминах производной)**.**
$f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists f'(x)$

$$f \text{ выпукла} \iff f'(x) \text{ возрастает}$$

**Доказательство.**

- $\implies$
  Пусть $f'$ возрастает
  НУО положим $a \le x_1 < x_2 \le b$
  Нужно доказать (9)

  $$\underbrace{(t_1+t_2)}_{\overset{\text{def}}{=}1} f(t_1x_1 + t_2x_2) \le t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \iff$$

  $$\iff t_1\Big(f(t_1x_1 + t_2x_2) - f(x_1)\Big) \le t_2\Big(f(x_2) - f(t_1x_1 + t_2x_2)\Big)$$

  Обозначим $x \coloneqq t_1x_1 + t_2x_2$

  $$x_1 \overset{\text{def}}{<} x_2 \implies \begin{cases} x > t_1x_1 + t_2x_1 = x_1 \\ x < t_1x_2 + t_2x_2 = x_2 \end{cases}$$

То есть, $x_1 < x < x_2$
По теореме Лагранжа,

$$\begin{cases}\exists\, c_1 \in (x_1, x) : f(x) - f(x_1) = f'(c_1) \cdot (x - x_1) \\ \exists\, c_2 \in (x, x_2) : f(x_2) - f(x) = f'(c_2) \cdot (x_2 - x)\end{cases}$$

Теперь достаточно доказать, что

$$t_1 f'(c_1)(x - x_1) \le t_2 f'(c_2)(x_2 - x) \tag{10}$$

$$t_1 + t_2 \overset{\text{def}}{=} 1 \implies \begin{cases} t_1 - 1 = -t_2 \\ 1 - t_2 = t_1 \end{cases} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &\overset{\text{def}}{=} t_1x_1 + t_2x_2 - x_1 = x_1(t_1 - 1) + t_2x_2 \underset{(11)}{=} -t_2x_1 + t_2x_2 = t_2(x_2 - x_1) \\ x_2 - x &\overset{\text{def}}{=} x_2 - (t_1x_1 + t_2x_2) = (1 - t_2)x_2 - t_1x_1 \underset{(11)}{=} t_1x_2 - t_1x_1 = t_1(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\}$$

Подставим это в (10):

$$t_1t_2(x_2 - x_1)f'(c_1) \le t_1t_2(x_2 - x_1)f'(c_2)$$

То есть, нужно проверить, что $f'(c_1) \le f'(c_2)$, а производная возрастает

- $\Longleftarrow$
  Пусть $f$ выпукла
  Возьмём $a < x_1 < x < x_2 < b$
  Положим $t_1 \coloneqq \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad t_2 \coloneqq \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$t_1x_1 + t_2x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2 = \frac{\cancel{x_1x_2} - xx_1 + xx_2 - \cancel{x_1x_2}}{x_2 - x_1} = x$$

Подставим в (9):

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$\underbrace{\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)}_{=t_1+t_2=1} f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\Big(f(x) - f(x_1)\Big) \le \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\Big(f(x_2) - f(x)\Big)$$

$$(x_2 - x)\Big(f(x) - f(x_1)\Big) \le (x - x_1)\Big(f(x_2) - f(x)\Big)$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Перейдём к пределу:

–

$$\lim_{x \to x_1+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \lim_{x \to x_1+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{12}$$

–

$$\lim_{x \to x_2-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \lim_{x \to x_2-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2) \tag{13}$$

$$(12), (13) \implies f'(x_2) \text{ возр.}$$

□

**Теорема 6** (характеристика выпуклых функций в терминах второй производной).
$f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f''(x)$

$$f \text{ выпукла} \iff \forall x \in (a,b) \quad f''(x) \geq 0$$

**Доказательство.** $f'(x)$ возр. $\iff \forall x \in (a,b) \quad (f')'(x) = f''(x) \geq 0$ □

## 5. Неравенство Йенсена

**Теорема 7.**

- $f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big), \qquad f$ выпукла, $\qquad \underset{\substack{t_k > 0 \\ t_1 + \ldots + t_n = 1}}{\forall t_1, \ldots, t_n}, \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$

$$f\big(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n\big) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \ldots + t_n f(x_n) \tag{14}$$

- $g \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big), \qquad g$ вогнута, $\qquad \underset{\substack{t_k > 0 \\ t_1 + \ldots + t_n = 1}}{\forall t_1, \ldots, t_n}, \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$

$$g\big(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n\big) \geq t_1 g(x_1) + t_2 g(x_2) + \ldots + t_n g(x_n) \tag{15}$$

**Доказательство.** **Индукция**

- **База.** $n = 2$ – по определению выпуклости
- **Переход.** $n \to n+1$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n + t_{n+1} = 1$$

Определим числа

$$\widetilde{t_n} := t_n + t_{n+1}, \qquad \widetilde{x_n} := t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}$$

Получается, что

$$\begin{cases} t_1 + \ldots + \widetilde{t_n} = 1 \\ t_1 x_1 + \ldots + \widetilde{t_1}\widetilde{x_n} = t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1} \end{cases} \implies \widetilde{x_n} = \frac{t_n}{\widetilde{t_n}} x_n + \frac{t_{n+1}}{\widetilde{t_n}} x_{n+1}$$

По индукционному предположению,

$$\underbrace{(t_1 x_1 + \ldots + \widetilde{t_n}\widetilde{x_n})}_{= f(t_1 x_1 + \ldots + t_{n+1} x_{n+1})} \leq t_1 f(x_1) + \ldots + \widetilde{t_n} f(\widetilde{x_n})$$

$$\widetilde{t_n} f(\widetilde{x_n}) = \widetilde{t_n} f\left(\frac{t_n}{\widetilde{t_n}} x_n + \frac{t_{n+1}}{\widetilde{t_n}} x_{n+1}\right) \leq \widetilde{t_n}\frac{t_n}{\widetilde{t_n}} f(x_n) + \widetilde{t_n}\frac{t_n}{\widetilde{t_n}} f(x_{n+1}) = t_n f(x_n) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

□

## 6. Неравенство Гёльдера

**Применение неравенства Йенсена к $x^p$.** Рассмотрим $f(x) = x^p, \qquad p > 1, \quad x > 0$

$$(x^p)' = p x^{p-1}, \qquad (x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$$

Значит, $f(x)$ – выпуклая
Рассмотрим $x_1, \ldots, x_n > 0$ и $t_1, \ldots, t_n > 0 : t_1 + \ldots + t_n = 1$
По неравенству Йенсена,

$$(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)^p \leq t_1 x_1^p + \ldots + t_n x_n^p$$

Возьмём любые $y_1, ..., y_n > 0$
Положим $T := y_1 + ... + y_n$
Теперь $t_k = \dfrac{y_k}{T}$
Перепишем неравенство:

$$\left(\frac{y_1}{T}x_1 + ... + \frac{y_n}{T}x_n\right)^p \le \frac{y_1}{T}x_1^p + ... + \frac{y_n}{T}x_n^p$$

Умножим на $T^p$:

$$(y_1x_1 + ... + y_nx_n)^p \le (y_1x_1^p + ... + y_nx_n^p)\underbrace{(y_1 + ... + y_n)}_{=T}{}^{p-1}$$

Введём числа

$$a_k, b_k > 0 : \begin{cases} a_kb_k = x_ky_k \\ a_k^p = y_kx_k^p \end{cases}$$

**Решим эту систему относительно $a_k$ и $b_k$.** Возведём первое уравнение в степень $p$:

$$\begin{cases} a_k^pb_k^p = x_k^py_k^p \\ a_k^p = y_kx_k^p \end{cases}$$

Поделим первую строчку на вторую:

$$\begin{cases} b_k^p = y_k^{p-1} \\ a_k^p = y_kx_k^p \end{cases}$$

$$b_k = y_k^{\frac{p-1}{p}} \iff y_k = b_k^{\frac{p}{p-1}}$$

Следовательно, мы можем взять любые положиетльные $a_k, b_k$ и восстановить по ним $x_k, y_k$

Перепишем неравенство:

$$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^p \le (a_1^p + ... + a_n^p)\left(b_1^{\frac{p}{p-1}} + ... + b^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}$$

Извлечём корень степени $p$:

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n \le (a_1^p + ... + a_n^p)^{1/p} \cdot \left(b_1^{\frac{p}{p-1}} + .. + b_n^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Это называется **неравенство Гёльдера**

## 7. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

**Применение неравенства Йенсена к $ln$.**
Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$ при $x > 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Значит, $f(x)$ – вогнутая
Рассмотрим $x_1, ..., x_n > 0, \quad n \ge 2$
Возьмём $t_1 = t_2 = ... = t_n = \dfrac{1}{n}$
Применим неравенство Йенсена:

$$\ln\left(\frac{x_1}{n} + ... + \frac{x_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}\ln x_1 + ... + \frac{1}{n}\ln x$$

$$\ln\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \ge \ln(x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n}$$

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n}$$

## 8. Первообразная; структура множества первообразных

**Определение 3.** $f : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad F : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad -\infty \leq a < b \leq +\infty$
$F$ – первообразная $f$ на $(a, b) \iff \forall x \in (a, b) \quad \exists F'(x) = f(x)$

**Утверждение 5.** Если первообразная существует, то их бесконечно много

**Доказательство.** Возьмём $c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$

$$(F + c)'(x) = F'(x) + c' = f(x) + 0$$

□

**Теорема 8.** $f : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad F$ – первообр. $f$

$$\forall x \in (ab) \quad F_0'(x) = f(x) \iff \exists c_0 \in \mathbb{R} : F_0(x) = F(x) + c_0$$

**Доказательство.** Рассмотрим $G(x) \coloneqq F_0(x) - F(x)$

$$\forall x \in (a, b) \quad G'(x) = F_0'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Применим критерий постоянства функции:

$$\exists c_0 : G(x) \equiv c_0$$

□

## 9. $\int cf(x) \,\mathrm{d}\, x$; $\int \big(f(x) + g(x)\big) \,\mathrm{d}\, x$

**Свойство.** $b \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}$

$$\int bf(x) \,\mathrm{d}\, x = b \int f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

**Доказательство.** $\big(bf(x)\big)' = bf'(x)$ □

**Свойство.**

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big) \,\mathrm{d}\, x = \int f(x) \,\mathrm{d}\, x + \int g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

**Доказательство.** $\Big(f(x) + g(x)\Big)' = f'(x) + g'(x)$ □

## 10. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

**Формула интегрирования по частям.** $f, g : (a, b), \qquad F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x)$
Продифференцируем их произведение:

$$\Big(F(x)G(x)\Big)' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + g(x)F(x)$$

$$\int \Big(f(x)G(x) + g(x)F(x)\Big) \,\mathrm{d}\, x = F(x)G(x) + c$$

$$\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}\,x + \int g(x)F(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x)G(x) + c$$

$$\int F'(x)G(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x)G(x) - \int G'(x)F(x)\,\mathrm{d}\,x$$

## 11. Замена переменной в неопределённом интеграле

**Замена переменной в неопределённом интеграле.** $f : (a,b) \to \mathbb{R}, \qquad F'(x) = f(x)$
$\varphi : (p,q), \qquad \forall t \in (p,q) \quad \varphi(t) \in (a,b),\ \exists \varphi'(t), \qquad G(t) := F\big(\varphi(t)\big)$

$$G'(t) = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \implies \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t = G(t) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c$$

$$\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad x = \varphi(t)$$

## 12. $\int R(x)\,\mathrm{d}\,x, R(x)$ – рациональная функция

**Определение 4.** Рациональной функцией называется дробь $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, где $p, q$ – многочлены, $q(x) \not\equiv 0$

**Напоминание.** Если $\deg p \geq \deg q$, то

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

где $r(x)$ – многочлен, $\deg p_1 < \deg q$

**Утверждение 6.**

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int r(x)\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{p_1(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

Пусть $r(x) = a_0 x^n + ... + a_n$

$$\int r(x)\,\mathrm{d}\,x = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + ... + a_n x + c$$

**Определение 5.** Простейшими дробями будем называть рациональные функции вида

- $\dfrac{a}{(x-b)^n}$
- $\dfrac{ax+b}{(x^2+hx+g)^n}, \qquad x^2 + hx + g > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Напоминание.** Любую рациональную функцию можно представить в виде суммы простеших дробей

**Важный пример замены переменной.** $a \neq 0, \qquad F'(x) = f(x)$

$$\Big(F(at+b)\Big)' = F'(at+b) \cdot (at+b)' = af(at+b)$$

$$\int af(at+b)\,\mathrm{d}\,t = F(at+b)$$

$$\int f(at+b)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a} \int f(x)\,\mathrm{d}\,x \Big|_{x=at+b}$$

**Утверждение 7.**

$$\int \frac{a}{(x-b)^n}\,\mathrm{d}\,x$$

Будем пользоваться важным примером:

- $n \geq 2$
$$\int \frac{a}{(x-b)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{a}{1-x}(x-b)1-n+c$$

- $n = 1$
$$\int \frac{a}{(x-b)^n}\,\mathrm{d}\,x = a\ln|x-b|+c$$

**Утверждение 8.**

$$x^2+hx+g = (x+\frac{h}{2})^2 + \underbrace{g-\frac{h^2}{4}}_{:=s}$$

$$ax+b = a(x+\frac{h}{2}) + \underbrace{b-\frac{ah}{2}}_{:=b_1}$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+hx+g)^n}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{a(x+\frac{h}{2})+b_1}{\Big((x+\frac{h}{2})^2+s^2\Big)^n}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= a\int \frac{x+\frac{h}{2}}{\Big((x+\frac{h}{2})^2+s^2\Big)^n}\,\mathrm{d}\,x + b_1\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\Big((x+\frac{h}{2})^2+s^2\Big)^n} \underset{(y:=x+\frac{h}{2})}{=} \underbrace{a\int \frac{y}{(y^2+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,y}_{:=I_1} + \underbrace{b_1\int \frac{\mathrm{d}\,y}{(y^2+s^2)^n}}_{:=I_2}$$

- $I_1$
Пусть $y^2 = t, \qquad y=\sqrt{t}=\varphi(t), \qquad \varphi'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$
$$\int \frac{y}{(y^2+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,y = \int \frac{\sqrt{t}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{(t+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,t}{(t+s^2)^n}$$

- $I_2$
Пусть $y = sz, \qquad z=\frac{1}{s}y$
$$\int \frac{s}{(x^2z^2+s^2)^n}\,\mathrm{d}\,z = s^{1-2n}\int \frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}$$
  – $n = 1$
$$\int \frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)} = \operatorname{arctg} z + c$$
  – Дальше будем определять первообразные индуктивно:
$$F_n'(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$$
  Проинтегрируем по частям:
$$\int \frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n} = z\cdot\frac{1}{(z^2+1)^n} - \int z\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{(z^2+1)^n}\right)'}_{=n\cdot\frac{2z}{(z^2+1)^{n+1}}}\mathrm{d}\,z = \frac{z}{(z^2+1)^n} + 2n\int \frac{z\cdot z}{(z^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z =$$
$$= \frac{z}{(z^2+1)^n} + 2n\int \frac{z^2+1-1}{(z^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z = \frac{z}{(z^2+1)^n} + 2n\int \frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n} - 2n\int \frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^{n+1}}$$

$$2n\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^{n+1}}=\frac{z}{(z^2+1)^n}+(2n-1)\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^{n+1}}=\frac{z}{2n(z^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{\mathrm{d}\,z}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{2n}\frac{z}{(z^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}F_n(z)+c$$

Здесь написано равенство множеств. Значит, мы можем сами назначить какую-нибудь первообразную из левой части

$$F_{n+1}(z)=\frac{1}{2n}\frac{z}{(z^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}F_n(z)$$

## 13. $\int R(\cos x,\sin x)\ \mathrm{d}\,x$

**Утверждение 9.** $\int R(\cos x,\sin x)\ \mathrm{d}\,x$
Положим $t:=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$t^2+1=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}$$

**Напоминание.** $\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{2}{1+t^2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

**Напоминание.** $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\int R(\cos x,\sin x)\ \mathrm{d}\,x=\int R\left(\frac{1+t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}\,x$$

## 14. $\int R\left(\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{1}{n}},x\right)\ \mathrm{d}\,x,$

**Утверждение 10.** $n\geq 2,\qquad a_1b_2-a_2b_1\neq 0$

$$\int R\left(\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{1/n},x\right)\ \mathrm{d}\,x$$

Положим

$$t:=\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{1/n}$$

$$t^n=\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$$

$$a_1x+b_1=a_2xt^n+b_2t^n$$

$$x=\frac{b_2t^n-b_1}{a_1-a_2t^n}$$

Подставим это в интеграл:

$$\int R\left(\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{1/n},x\right)\ \mathrm{d}\,t=\int R\left(t,\frac{b_2t^n-b_1}{a_1-a_2t^n}\right)\left(\frac{b_2t^n-b_1}{a_1-a_2t^n}\right)'\ \mathrm{d}\,t$$

## 15. Подстановки Эйлера

Будем рассматривать интеграл:

$$\int R(\sqrt{ax^2+bx+c},x)\ \mathrm{d}\,x,\qquad a\neq 0,\qquad |b|+|c|>0$$

**Утверждение 11** (первая подстановка Эйлера). $a > 0$
Определим $t$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t \tag{16}$$

$$\cancel{ax^2} + bx + c = \cancel{ax^2} + 2\sqrt{a}\cdot xt + t^2$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\cdot t}$$

Подставим это в (16):

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t} + t = \frac{-\sqrt{a}\cdot t^2 + bt - \sqrt{a}\cdot c}{b - 2\sqrt{a}\cdot t}$$

Подставим в интеграл:

$$\int R\big(\sqrt{ax^2+bx+c}, x\big)\,\mathrm{d}\,x = \int R\left(\frac{-\sqrt{a}\cdot t + bt - \sqrt{a}\cdot c}{b-2\sqrt{a}\cdot}, \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}\right)\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}\right)'\,\mathrm{d}\,t$$

**Утверждение 12** (вторая подстановка Эйлера). $c > 0, \qquad x \neq 0$
Определим $t$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c} \tag{17}$$

$$ax^2 + bx + \cancel{c} = t^2x^2 + 2tx\sqrt{c} + \cancel{c}$$

$$ax + b = t^2x + 2t\sqrt{c}$$

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}$$

Подставим это в (17):

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}\cdot t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}$$

Подставим в интеграл:

$$\int R\big(\sqrt{ax^2+bx+c}, x\big)\,\mathrm{d}\,x = \int R\left(\frac{\sqrt{c}\cdot t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a-t^2}, \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right)\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right)'\,\mathrm{d}\,t$$

**Утверждение 13** (третья подстановка Эйлера). $a < 0, \qquad c \leq 0$
Чтобы корень был определён, нужно, чтобы

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \qquad x_1 \neq x_2$$

Пусть, НУО, $x \neq x_1$
Введём $t$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1) \tag{18}$$

$$a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$$

$$a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$$

$$x = \frac{ax^2 - t^2x_1}{a - t^2}$$

$$x - x_1 = \frac{ax_2 - t^2x}{a - t^2x_1} - x_1 = \frac{a(x_2 - x_1)}{a - t^2}$$

Подставим это в (18):

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{at(x_2 - x_1)}{a - t^2}$$

Подставим в интеграл:

$$\int R\big(\sqrt{ax^2+bx+c},x\big)\,\mathrm{d}\,x = \int R\Big(\frac{at(x_2-x_1)}{a-t^2},\frac{ax^2-t^2x_1}{a-t^2}\Big)\Big(\frac{ax_2-t^2x}{a-t^2}\Big)'\,\mathrm{d}\,t$$

## 16. $\int x^m(ax^n+b)^p\,\mathrm{d}\,x$

**Утверждение 14.** $\int x^m(ax^n+b)^p\,\mathrm{d}\,x, \qquad m,n,p\in\mathbb{Q}, \qquad a,\neq 0$

- $p\in\mathbb{Z}$
  Положим
  $$m := \frac{m_1}{q}, \qquad n := \frac{n_1}{q}, \qquad q\in\mathbb{N}, \quad m,n\in\mathbb{Z}$$
  Перепишем подинтегральное выражение:
  $$x^m(ax^n+b)^p = \big(x^{1/q}\big)^{m_1}\Big(a\big(x^{1/q}\big)^{n_1}+b\Big)^p$$
  $$R(u) = u^{m_1}(au^{n_1}+b)^p$$
- $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$
  Положим
  $$p := \frac{p_1}{r_1}, \qquad r_1\in\mathbb{N}, \quad p_1\in\mathbb{Z}$$
  Возьмём $x^n = t$
  Тогда
  $$x = t^{1/n}, \qquad x'(t) = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}, \qquad x^m = t^{m/n}$$
  Перепишем интеграл:
  $$\int x^m(ax^n+b)^p\,\mathrm{d}\,x = \int t^{m/n}(at+b)^{p_1/r_1\cdot\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{n}\int t^{m+1}n-1\,\mathrm{d}\,t(at+b)^{p_1/r_1}$$
  $$R(u,v) = u^{\overbrace{\frac{m+1}{n}-1}^{\in\mathbb{Z}}}v^{p_1}, \qquad v = (at+b)^{1/r_1}$$
- $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$
  $$\int x^m(ax^n+b)^p\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\Big(\frac{at+b}{t}\Big)^p\,\mathrm{d}\,t$$

## 17. Суммы Дарбу; $\mathtt{L}(\mathtt{P})\le\mathtt{U}(\mathtt{P})$; $\mathtt{L}(\mathtt{P})\le\mathtt{L}(\mathtt{P}\cup\{\,y\,\})$; $\mathtt{U}(\mathtt{P}\cup\{\,y\,\})\le\mathtt{U}(\mathtt{P})$

**Определение 6.** $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad n\ge 1$$

Разбиением отрезка $[a,b]$ будем называть

$$\mathtt{P} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$$

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$\exists\, M : |f(x)|\le M \quad \forall x\in[a,b]$$
$$M_k := \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{\,f(x)\,\}, \qquad k=1,\ldots,n$$
$$m_k := \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{\,f(x)\,\}, \qquad k=1,\ldots,n$$
$$-M\le m_k\le M_k\le M$$

**Определение 7** (верхняя сумма Дарбу).

$$\mathtt{U}(f,\mathtt{P}) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

**Определение 8** (нижняя сумма Дарбу).

$$\mathtt{L}(f,\mathtt{P}) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

**Свойства.**

1. $M(b-a) \le \mathtt{L}(f,\mathtt{P}) \le \mathtt{U}(f,\mathtt{P}) \le M(a-b)$

**Доказательство.**

$$-M \le m_k \le M_k \le M$$

$$-M(x_k - x_{k-1}) \le m_k(x_k - x_{k-1}) \le M_k(x_k - x_{k-1}) \le M(x_k - x_{k-1})$$

$$-M\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \le M\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k = x_n - x_0 = a - b$$

$\square$

2. $x_{l-1} < y < x_l, \qquad \widetilde{\mathtt{P}} \coloneqq \mathtt{P} \cup \{\, y \,\}$

$$\implies \begin{cases} \mathtt{L}(f,\mathtt{P}) \le \mathtt{L}(f,\widetilde{\mathtt{P}}) \\ \mathtt{U}(f,\mathtt{P}) \ge \mathtt{U}(f,\widetilde{\mathtt{P}}) \end{cases}$$

**Доказательство.**

$$\mathtt{U}(f,\mathtt{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{l-1} M_k(x_k - x_{k-1}) + M_l(x_l - x_{l-1}) + \sum_{k=l+1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$M_l' \coloneqq \sup_{x\in[x_{l-1},y]} \{\, f(x) \,\}, \qquad M_l'' = \sup_{x\in[y,x_l]} \{\, f(x) \,\}$$

$$\mathtt{U}(f,\widetilde{\mathtt{P}}) = \sum_{k=1}^{l-1} M_k(x_k - x_{k-1}) + M_l'(y - x_{l-1}) + M_l''(x_l - y) + \sum_{k=l+1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\begin{aligned} \mathtt{U}(f,\mathtt{P}) - \mathtt{U}(f,\widetilde{\mathtt{P}}) = M_l(x_l - x_{l-1}) - M_l'(y - x_{l-1}) - M_l''(x_l - y) = \\ = \underbrace{(M_l - M_l')}_{\ge 0}(y - x_{l-1}) + \underbrace{(M_l - M_l'')}_{\ge 0}(x_l - y) \ge 0 \end{aligned}$$

$\square$

## 18. $\mathtt{L}(\mathtt{P}), \mathtt{L}(\mathtt{P}_1), \mathtt{U}(\mathtt{P}), \mathtt{U}(\mathtt{P}_1)$ при $\mathtt{P} \subset \mathtt{P}_1$

**Определение 9.** $\mathtt{P}_1, \mathtt{P}_2$
Будем говорить, что $\mathtt{P}_2$ является измельчением разбиения $\mathtt{P}_1$, если

$$\mathtt{P}_1 \subset \mathtt{P}_2, \quad \mathtt{P}_1 \ne \mathtt{P}_2$$

**Замечание.** $\exists\, y_1, ..., y_m \in (a, b), \qquad y_i \notin \mathtt{P}_1, \qquad y_i \neq y_j$

$$\mathtt{P}_2 = \mathtt{P}_1 \cup \bigcup_{q=1}^{m} \{\, y_q \,\}$$

**Свойство.** $\mathtt{P}_2$ является измельчением $\mathtt{P}_1$

$$\implies \begin{cases} \mathtt{L}(f, \mathtt{P}_1) \le \mathtt{L}(f, \mathtt{P}_2) \\ \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_2) \ge \mathtt{L}(f, \mathtt{P}_2) \end{cases}$$

**Доказательство.**

$$\mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1) \ge \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1 \cup \{\, y_1 \,\}) \ge \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1 \cup \{\, y_1 \,\} \cup \{\, y_2 \,\}) \ge \dots\dots\dots \ge \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1 \cup \bigcup_{q=1}^{m} \{\, y_q \,\}) = \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_2)$$

$\square$

## 19. $L(P_i), U(P_i)$; определение $\int_a^{b*} f, \int_{a*}^{b} f$; $\int_{a*}^{b} f \le \int_a^{b*} f$

**Свойство.** $\mathtt{P}_1, \mathtt{P}_2$ – произвольные разбиения

$$\implies \mathtt{L}(f, \mathtt{P}_1) \le \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим $\mathtt{P} \coloneqq \mathtt{P}_1 \cup \mathtt{P}_2$

- Если $\mathtt{P}_1 = \mathtt{P}_2$, то $\mathtt{P} = \mathtt{P}_1 = \mathtt{P}_2$ – это было проверено в первом свойстве
- Если $\mathtt{P}_1 \neq \mathtt{P}_2$, то $\mathtt{P}$ – измельчение и $\mathtt{P}_1$, и $\mathtt{P}_2$
  Тогда, по предыдущему свойству,

$$\mathtt{L}(f, \mathtt{P}_1) \le \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \le \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) \le \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_2)$$

$\square$

**Определение 10.** Верхним интегралом Дарбу функции $f$ по промежутку $[a, b]$ называется

$$\int_a^{b*} f \coloneqq \inf_{\mathtt{P}} \mathtt{U}(f, \mathtt{P})$$

**Определение 11.** Нижним интегралом Дарбу функции $f$ по промежутку $[a, b]$ называется

$$\int_{a*}^{b} f \coloneqq \sup_{\mathtt{P}} \mathtt{L}(f, \mathtt{P})$$

**Утверждение 15.** $\int_{a*}^{b} f \le \int_a^{b*} f$

**Доказательство.** Зафиксируем какое-нибудь $\mathtt{P}_1$
Тогда, по последнему свойству,

$$\mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \le \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1)$$

Значит, $\mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1)$ является верхней границей нижних сумм, т. е.

$$\underbrace{\sup_{\mathtt{P}} \mathtt{L}(f, \mathtt{P})}_{=\int_{a*}^{b} f} \le \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1)$$

Значит,

$$\int_{a*}^{b} f \leq \underbrace{\inf_{\mathtt{P}_1} \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_1)}_{=\int_a^{b*} f}$$

□

## 20. Определение $\mathcal{R}([a,b])$; функция Дирихле

**Определение 12.** $[a,b]$, $f$
Будем говорить, что функция $f$ интегрируема по Риману, если

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \iff \int_{a*}^{b} f = \int_a^{b*} f := \int_a^b f$$

**Пример** (функция Дирихле).

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Будем рассматривать $x \in [0,1]$, т. е.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_n = 1 \end{cases}$$

$$[x_{k-1}, x_k] \subset [0,1]$$

$$\begin{cases} M_k = 1 & \forall k \\ m_k = 0 & \forall k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 1 & \forall \mathtt{P} \implies \int_0^{1*} f = 1 \\ \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0 & \forall \mathtt{P} \implies \int_{0*}^{1} f = 0 \end{cases}$$

Значит, $f \notin \mathcal{R}([0,1])$

## 21. Критерий $f \in \mathcal{R}([a,b])$

**Теорема 9.** $f \in \mathcal{R}([a,b]) \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathtt{P} : \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) - \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) < \varepsilon \tag{19}$$

**Доказательство.**

- $\Longleftarrow$

$$\mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \leq \int_{a*}^{b} f \leq \int_a^{b*} f \leq \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) \underset{(19)}{\implies} \underbrace{\int_a^{b*} f - \int_{a*}^{b} f}_{\geq 0} \leq \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) - \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) < \varepsilon$$

  В силу произвольности $\varepsilon$,

$$\int_{a*}^{b} f = \int_a^{b*} f$$

- $\implies$
  Дано $I = \int_{a*}^{b} f = \int_a^{b*} f$
  Возьмём $\forall \varepsilon > 0$
  По определению нижнего интеграла как супремума и верхнего интеграла как инфимума,

$$\begin{cases} \exists \mathtt{P}_1 : \mathtt{L}(f, \mathtt{P}_1) > \int_{a*}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \mathtt{P}_2 : \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_2) < \int_a^{b*} f + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Перепишем с использованием обозначения $I$:

$$\begin{cases} \mathtt{L}(f, \mathtt{P}_1) > I - \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_2) < I + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{20}$$

Рассмотрим $\mathtt{P} := \mathtt{P}_1 \cup \mathtt{P}_2$
По одному из свойств,

$$\begin{cases} \mathtt{L}(f, \mathtt{P}_1) \le \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \\ \mathtt{U}(f, \mathtt{P}_2) \ge \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) \end{cases}$$

Подставим это в (20):

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \le \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mathtt{U}(f, \mathtt{P}) - \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) < (I + \frac{\varepsilon}{2}) - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$$

$\square$

**Немного преобразуем.**

$$\mathtt{U}(f, \mathtt{P}) - \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

Разность $(M_k - m_k)$ называется колебанием функции. Обозначим её $\omega_k \ge 0$
Теперь критерий переписывается следующим образом:

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathtt{P} : \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

## 22. $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff f \in \mathcal{R}([a, c])$ и $f \in \mathcal{R}([c, b])$; $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies cf \in \mathcal{R}([a, b])$

**Свойство.** $c \in (a, b)$

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff \begin{cases} f \in \mathcal{R}([a, c]) \\ f \in \mathcal{R}([c, b]) \end{cases}$$

**Доказательство.**

- $\implies$
  Будем пользоваться критерием (последним его преобразованием)

$$\mathtt{P} = \{x_k\}_{k=0}^{n}, \qquad x_0 = a, \quad x_n = b, \qquad c \in \mathtt{P}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

  Возьмём

$$\mathtt{P}_1 := \{x_k\}_{k=0}^{l}, \qquad \mathtt{P}_2 := \{x_k\}_{k=l}^{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{l} + \sum_{k=l+1}^{n}$$

$$\sum_{k=1}^{l} \omega_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=l+1}^{n} \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

- $\impliedby$

$$\widetilde{\mathtt{P}_1} = \{x_k\}_{k=0}^{m}, \qquad x_0 = 0, \qquad x_m = c, \qquad \mathtt{P}_2 = \{x_k\}_{k=m}^{m+q}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{k=m+1}^{m+q} \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмём

$$\widetilde{\mathrm{P}} := \widetilde{\mathrm{P}}_1 \cup \widetilde{\mathrm{P}}_2$$

$$\sum_{k=1}^{m+q} \omega_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^{m+q} \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

**Утверждение 16.** $\omega_{-f}([x_{k-1}, x_k]) = \omega_f([x_{k-1}, x_k])$

**Доказательство.**

$$\left.\begin{aligned} \sup\{-f\} = -\inf\{f\} \\ \inf\{-f\} = -\sup\{f\} \end{aligned}\right\} \implies \sup\{-f\} - \inf\{-f\} = \sup\{f\} - \inf\{f\}$$

□

**Свойство.** $f \in \mathcal{R}([a,b]), \qquad c \neq 0$

$$\implies cf \in \mathcal{R}([a,b])$$

**Доказательство.**

- $c > 0$

$$\forall [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b] \quad \omega_{cf}([x_{k-1}, x_k]) = c\omega_f([x_{k-1}, x_k])$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{cf}([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n} \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_[k-1]) < c\varepsilon$$

- $c < 0$
  $c = (-1) \cdot |c|$ (см. утв. 16)

□

## 23. $f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \implies f + g \in \mathcal{R}([a,b])$

**Утверждение 17.** $\sup\{f+g\} \leq \sup\{f\} + \sup\{g\}$
$\inf\{f+g\} \geq \inf\{f\} + \inf\{g\}$

**Доказательство.**

$$\left.\begin{aligned} &\forall \delta > 0 \quad \exists x_* \in [\alpha, \beta] : f(x_*) + g(x_*) > \sup\{f+g\} - \delta \\ &\sup\{f\} + \sup\{g\} \geq f(x_*) + g(x_*) \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies \sup\{f\} + \sup\{g\} > \sup\{f+g\} - \delta \implies \sup\{f\} + \sup\{g\} \geq \sup\{f+g\}$$

□

**Свойство.** $f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \quad \implies \quad f + g \in \mathcal{R}([a,b])$

**Доказательство.** Воспользуемся утверждением 17:

$$\left.\begin{aligned} \sup\{f+g\} \leq \sup\{f\} + \sup\{g\} \\ \inf\{f+g\} \geq \inf\{f\} + \inf\{g\} \end{aligned}\right\} \implies \omega_{f+g}([x_{k-1}, x_k]) \leq \omega_f([x_{k-1}, x_k]) + \omega_g([x_{k-1}, x_k])$$

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_{f+g}([x_{k-1},x_k])(x_k-x_{k-1}) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n}\omega_f([x_{k-1},x_k])(x_k-x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}\omega_g([x_{k-1},x_k])(x_k-x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

□

## 24. $f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies |f| \in \mathcal{R}([a,b]);\ f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$

**Утверждение 18.** $\omega_{|f|}([x_{k-1},x_k]) \le \omega_f([x_{k-1},x_k])$

**Доказательство.** $\omega_{|f|}([x_{k-1},x_k]) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\sup\{\,|f|\,\}}_{\le\sup\{\,f\,\}} - \underbrace{\inf\{\,|f|\,\}}_{\ge\inf\{\,f\,\}}$ □

**Свойства.**

1. $f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies |f| \in \mathcal{R}([a,b])$

   **Доказательство.** Следует из утверждения 18 □

2. $f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies f^2 \in \mathcal{R}([a,b])$

   **Доказательство.** $f^2 = |f|^2$

   Будем считать, что $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f \in \mathcal{R}([a,b]) \end{cases}$

   Значит, $\forall x \quad f(x) \le M$

   Положим $[a_1,b_1] \subset [a,b]$

   Возьмём
$$x_1, x_2 \in [a_1,b_1] : f(x_2) \ge f(x_1) \ge 0$$
$$\left.\begin{aligned} &f^2(x_2)-f^2(x_1) = \Big(f(x_2)-f(x_1)\Big)\Big(f(x_2)+f(x_1)\Big) \le 2M\Big(f(x_2)-f(x_1)\Big) \\ &\left.\begin{aligned} f(x_2) \le \sup\{\,f\,\} \\ f(x_1) \ge \inf\{\,f\,\} \end{aligned}\right\} \implies 2M\Big(f(x_2)-f(x_1)\Big) \le 2M\omega_f([a_1,b_1]) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$
$$\forall \delta > 0 \quad \begin{cases} f^2(x_2) > \sup\limits_{[a_1,b_1]}\{\,f^2\,\} - \delta \\ f^2(x_2) < \inf\limits_{[a_1,b_1]}\{\,f^2\,\} + \delta \end{cases}$$
$$2M\omega_f([a_1,b_1]) \underset{(21)}{\ge} f^2(x_2)-f^2(x_1) > \sup\{\,f^2\,\} - \delta - \inf\{\,f^2\,\} - \delta$$
$$\omega_{f^2}([a_1,b_1]) < 2M\omega_f([a_1,b_1]) + 2\delta \implies \omega_{f^2}([a_1,b_1]) \le 2M\omega_f([a_1,b_1]) \implies$$
$$\implies \sum_{k=1}^{n}\omega_{f^2}([x_k,x_{k-1}])(x_k-x_{k-1}) < 2m\varepsilon$$

   □

## 25. $f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \implies fg \in \mathcal{R}([a,b])$

**Свойство.** $f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \implies fg \in \mathcal{R}([a,b])$

**Доказательство.**
$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$
Все части этого выражения интегрируемы по Риману □

## 26. $f \in \mathcal{C}([a,b]) \implies f \in \mathcal{R}([a,b])$

**Свойство.** $f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big) \implies f \in \mathcal{R}([a,b])$

**Доказательство.** По теореме Кантора, $f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \underset{0<x_2-x_1<\delta}{x_1, x_2 \in [a,b]} \quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

$$\mathtt{P} := \{x_k\}_{k=0}^n, \qquad x_k := a + \frac{b-a}{n}k, \qquad k = 0, 1, ..., n$$
$$x_k - x_{k-1} < \delta$$

По второй теореме Вейерштрасса,

$$\begin{cases} \exists\, x_k^+ \in [x_{k-1}, x_k] : \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \quad f(x) \le f(x_k^+) \\ \exists\, x_k^- \in [x_{k-1}, x_k] : \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \quad f(x) \ge f(x_k^-) \end{cases}$$

$$\omega_f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_k^+) - f(x_k^-)$$
$$|x_k^+ - x_k^-| \le x_k - x_{k-1} < \delta \implies f(x_k^+) - f(x_k^-) < \varepsilon$$
$$\sum_{k=1}^n \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k-1}^n \varepsilon(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a)$$

□

## 27. $f$ монотонна на $[a,b] \implies f \in \mathcal{R}([a,b])$

**Теорема 10.** $f$ монотонна $\implies f \in \mathcal{R}([a,b])$

**Доказательство.** Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, выберем $n : \dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$

$$\mathtt{P} := \{x_k\}_{k=0}^n, \qquad x_k := a + \frac{b-a}{n}k, \qquad 0 \le k \le n$$

Пусть, НУО, $f$ возрастает (иначе, $g := -f$ возрастает)

$$\forall x \in [x_{k-1}, x_k] \quad f(x_{k-1}) \le f(x) \le f(x_k) \implies \begin{cases} M_k = f(x_k) \\ m_k = f(x_{k-1}) \end{cases} \implies$$
$$\implies \omega_f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$x_k - x_{k-1} \overset{\text{def}}{=} \left(a + \frac{b-a}{n}k\right) - \left(a + \frac{b-a}{n}(k-1)\right) = \frac{b-a}{n}$$

$$\sum_{k=1}^n \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \Big(f(x_k) - f(x_{k-1})\Big) = \frac{b-a}{n}\Big(f(x_n) - f(x_0)\Big) =$$
$$= \frac{b-a}{n}\Big(f(b) - f(a)\Big) \le \varepsilon\Big(f(b) - f(a)\Big)$$

□

## 28. Суммы Римана; $\mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \le \mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}) \le \mathtt{U}(f, \mathtt{P})$

**Определение 13.** $[a,b]$, $\quad \mathtt{P} = \{x_k\}_{k=0}^n$
Оснащением этого разбиения называется множество

$$\mathtt{T} = \{t_k\}_{k=1}^n : t_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

**Определение 14.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\mathtt{S}_f(\mathtt{P},\mathtt{T}) \coloneqq \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

$\mathtt{S}_f$ называется суммой Римана функции $f$ по разбиению $\mathtt{P}$ и оснащению $\mathtt{T}$

**Утверждение 19.** $\mathtt{L}(f,\mathtt{P}) \le \mathtt{S}_f(\mathtt{P},\mathtt{T}) \le \mathtt{U}(f,\mathtt{P})$

**Доказательство.** $m_k \le f(t_k) \le M_k, \qquad k = 1, ..., n$

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$$

□

## 29. Определение диаметра разбиения $\mathrm{d}(\mathtt{P})$; определение $S_f(P,T) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} A$

**Определение 15.** $[a,b]$, $\quad \mathtt{P} = \{x_k\}_{k=0}^n$

$$\mathrm{d}(\mathtt{P}) \coloneqq \max_{1\le k\le n} (x_k - x_{k-1})$$

$\mathrm{d}(\mathtt{P})$ называется диаметром разбиения

**Определение 16.** Будем говорить, что суммы Римана стремятся к $A \in \mathbb{R}$ при измельчении разбиения, если

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta > 0 : \underset{\mathrm{d}(\mathtt{P})<\delta}{\forall \mathtt{P}} \ : \quad \forall \mathtt{T} \quad |\mathtt{S}_f(\mathtt{P},\mathtt{T}) - A| < \varepsilon$$

**Обозначение.** $\mathtt{S}_f(\mathtt{P},\mathtt{T}) \xrightarrow[\mathrm{d}(\mathtt{P})\to 0]{} A$

## 30. $\mathtt{S}_f(\mathtt{P},\mathtt{T}) \xrightarrow[\mathrm{d}(\mathtt{P})\to 0]{} A \implies f \in \mathcal{R}([a,b])$

**Теорема 11.** $\mathtt{S}_f(\mathtt{P},\mathtt{T}) \xrightarrow[\mathrm{d}(\mathtt{P})\to 0]{} A \implies \begin{cases} f \in \mathcal{R}([a,b]) \\ A = \int_a^b f \end{cases}$

**Доказательство.**

- Возьмём $\forall \varepsilon > 0$
  Выберем
  $$\delta > 0 : \underset{\mathrm{d}(\mathtt{P})<\delta}{\forall \mathtt{P}} \quad \forall \mathtt{T} \quad |\mathtt{S}_f(\mathtt{P},\mathtt{T}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  Возьмём
  $$n : \frac{b-a}{n} < \delta, \qquad x_k \coloneqq a + \frac{b-a}{n} k$$
  $$\mathrm{d}(\mathtt{P}) = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$$

Положим
$$\mathtt{T}' := \{t'_k\}_{k=1}^n, \qquad \mathtt{T}'' := \{t''_k\}_{k=1}^n$$
Выберем $t'_k$ и $t''_k$ так, чтобы
$$\begin{cases} M_k < f(t''_k) + \frac{\varepsilon}{n} \\ m_k > f(t'_k) - \frac{\varepsilon}{n} \end{cases}$$
$$f(t''_k) - f(t'_k) > M_k - m_k - \frac{2\varepsilon}{n}$$
$$\sum_{k=1}^n \Big(f(t''_k) - f(t'_k)\Big)(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) - \frac{2\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) =$$
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^n \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1})}_{:=\Omega} - \frac{2\varepsilon}{n}(b-a)$$
$$\mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}'') - \mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}') > \Omega - \frac{2\varepsilon}{n}(b-a)$$
$$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}'') - A| + |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}') - A| \geq |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}'') - \mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}')|$$
$$\sum_{k=1}^n \omega_f([x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{n}(b-a) < 3\varepsilon$$
Значит, $f \in \mathcal{R}([a,b])$

•
$$M_k < f(t''_k) + \frac{\varepsilon}{n}$$
$$\mathtt{U}(f, \mathtt{P}) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n f(t''_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{n}(x_k - x_{k-1}) < \mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}'') + \varepsilon \leq \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) + \varepsilon$$
$$\mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}'') \in \Big(\mathtt{U}(f, \mathtt{P}), \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) + \varepsilon\Big)$$
$$|\mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}'') \in \left(A - \frac{\varepsilon}{2}, A + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\left.\begin{array}{l} \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) - \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) < 3\varepsilon \\ \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \leq \int_a^b f \leq \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) \end{array}\right\} \implies \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) \in \left(\int_a^b f - 3\varepsilon, \int_a^b f + 3\varepsilon\right)$$

□

## 31. $f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies \mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}) \xrightarrow[\mathrm{d}(\mathtt{P}) \to 0]{} \int_a^b f$

**Теорема 12.** $f \in \mathcal{R}([a,b]) \implies \mathtt{S}_f(\mathtt{P}, \mathtt{T}) \xrightarrow[\mathrm{d}(\mathtt{P}) \to 0]{} \int_a^b f$

**Доказательство.** Возьмём произвольный $\varepsilon > 0$
Т. к. $f \in \mathcal{R}([a,b])$,
$$\exists \mathtt{P} = \{x_k\}_{k=0}^n : \mathtt{U}(f, \mathtt{P}) - \mathtt{L}(f, \mathtt{P}) < \varepsilon \tag{22}$$
Обозначим $I := \int_a^b f$
$$\mathtt{L}(f, \mathtt{P}) \leq I \leq \mathtt{U}(f, \mathtt{P})$$
Обозначим $\sigma := \min\limits_{1 \leq k \leq n}(x_k - x_{k-1})$

Функция $f$ ограничена:

$$|f(x)| \le M > 0, \qquad x \in [a,b]$$

Определим $\delta_2 := \dfrac{\varepsilon}{Mn}$

Возьмём $\delta := \min\left\{ \dfrac{\sigma}{4}, \delta_2 \right\}$

Возьмём

$$\forall \mathtt{P}_0 = \{y_l\}_{l=0}^{m} : \mathrm{d}(\mathtt{P}_0) < \delta, \qquad \forall \mathtt{T} = \{t_l\}_{l=1}^{m}$$

Рассмотрим $\mathtt{P}_1 := \mathtt{P} \cup \mathtt{P}_0$

По свойствам сумм Дарбу,

$$\mathtt{L}(f,\mathtt{P}) \le \mathtt{L}(f,\mathtt{P}_1) \le I \le \mathtt{U}(f,\mathtt{P}_1) \le \mathtt{U}(f,\mathtt{P})$$

$$\mathtt{U}(f,\mathtt{P}_1) - \mathtt{L}(f,\mathtt{P}_1) < \varepsilon \tag{23}$$

$$\mathrm{d}(\mathtt{P}_0) < \delta \overset{\text{def}}{\le} \frac{\sigma}{4}$$

Пусть в $\mathtt{P}_1$ $N$ точек

Определим оснащение

$$\Lambda = \{\lambda_q\}_{q=0}^{N}, \qquad \lambda_q = \begin{cases} t_l, & \text{если } [y_{l-1}, y_l] \subset [x_{k-1}, x_k] \\ \text{если какой-то } x_{k_0} \in (y_{l_0-1}, y_{l_0}) \text{ в } P_1 \ [y_{l_0-1}, x_{k_0}] \text{ и } [x_{k_0}, y_{l_0}] \end{cases}$$

$$\lambda_{q_0} = \lambda_{q_0+1} = x_k$$

$$\left.\begin{array}{l} (23) \implies \Big[\mathtt{L}(f,\mathtt{P}_1), \mathtt{U}(f,\mathtt{P}_1)\Big] \subset (I-\varepsilon, I+\varepsilon) \\ \mathtt{L}(f,\mathtt{P}_1) \le \mathtt{S}_f(\mathtt{P}_1,\Lambda) \le \mathtt{U}(f,\mathtt{P}_1) \end{array}\right\} \implies \mathtt{S}_f(\mathtt{P}_1,\Lambda) \in (I-\varepsilon, I+\varepsilon) \tag{24}$$

Но нас интересует сумма Римана для $\mathtt{P}_0$. Посмотрим на их разность. Там есть много общих слагаемых:

$$\mathtt{S}_f(\mathtt{P}_1,\Lambda) - \mathtt{S}_f(\mathtt{P}_0,\mathtt{T}) = \sum_{k \ : \ x_k \in (y_{l-1}, y_l)} \Big( f(x_k)(x_k - y_{l-1}) + f(x_k)(y_l - x_k) - f(t_l)(y_l - y_{l-1}) \Big) \underset{t_l \in [y_{l-1}, y_l]}{=}$$

$$= \sum_{\dots} \Big( f(x_k) - f(t_l) \Big)(y_l - y_{l-1}) := Q$$

$$|Q| \le \sum_{\dots} \Big| f(x_k) - f(t_l) \Big| (y_l - y_{l-1}) \underset{\substack{|f(x_k) - f(t_l)| \le 2M \\ y_l - y_{l-1} \le \delta_2}}{\le} 2M \sum_{\dots} \delta_2$$

В любом случае, таких $k$ не больше, чем внутренних точек разбиения $\mathtt{P}$, то есть $n-1$

Значит,

$$|Q| \le 2M - \frac{\varepsilon}{Mn} < 2\varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l} |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}_1,\Lambda) - \mathtt{S}_f(\mathtt{P}_0,\mathtt{T})| < 2\varepsilon \\ (24) \iff |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}_1,\Lambda) - I| < \varepsilon \end{array}\right\} \implies |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}_0,\mathtt{T}) - I| \overset{\triangle}{\le} |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}_0,\mathtt{T}) - \mathtt{S}_f(\mathtt{P}_1,\Lambda)| + |\mathtt{S}_f(\mathtt{P}_1,\Lambda) - I| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

□

## 32. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

**Свойство.** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \qquad c \in (a,b)$

**Доказательство.** Положим

$$\begin{cases} \widetilde{\mathtt{P}_1} := \mathtt{P}_n([a,c]) \\ \widetilde{\mathtt{P}_2} := \mathtt{P}_n([c,b]) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}(\widetilde{\mathtt{P}_1}) = \frac{c-a}{n} \\ \mathrm{d}(\widetilde{\mathtt{P}_2}) = \frac{b-c}{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c-a}{n} < \frac{b-a}{n} \\ \frac{b-c}{n} < \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathtt{P}} \coloneqq \widetilde{\mathtt{P}_1} \cup \widetilde{\mathtt{P}_2}$$

$$\widetilde{\mathtt{T}} \coloneqq \mathtt{T}_n([a,c]) \cup \mathtt{T}_n([c,b])$$

$$\underset{\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f}{\mathtt{S}_n(\widetilde{\mathtt{P}}, \widetilde{\mathtt{T}})} = \underset{\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^c f}{\mathtt{S}_n(f, [a,c])} + \underset{\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_c^b f}{\mathtt{S}_n(f, [c,b])}$$

$\square$

## 33. $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

**Свойство.** $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

**Доказательство.** $\mathtt{S}_n(cf) = c\mathtt{S}_n(f)$ $\square$

## 34. $\int_a^b c = c(b-a)$

**Свойство.** $\int_a^b c = c(b-a)$

**Доказательство.** $\mathtt{S}_n(c) = \sum_{k=1}^n c \cdot \dfrac{b-a}{n} = c(b-a)$ $\square$

## 35. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

**Свойство.** $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

**Доказательство.** $\mathtt{S}_n(f+g) = \mathtt{S}_n(f) + \mathtt{S}_n(g)$ $\square$

## 36. $f \le g \implies \int_a^b f \le \int_a^b g$; $g \ge 0 \implies \int_a^b g \ge 0$

**Свойство.** $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b] \qquad \implies \qquad \int_a^b f \le \int_a^b g$

**Доказательство.**

$$\mathtt{S}_n(f) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \frac{b-a}{n} \le \sum_{k=1}^n g(t_k) \cdot \frac{b-a}{n} = \mathtt{S}_n(g)$$

$\square$

## 37. $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

**Свойство.** $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

**Доказательство.**

$$|\mathtt{S}_n(f)| = \left|\sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \frac{b-a}{n}\right| \le \sum_{k=1}^n |f(t_k)| \cdot \left|\frac{b-a}{n}\right| = \mathtt{S}_n(|f|)$$

$\square$

## 38. $|f| \le M \implies \left| \int_a^b f \right| \le M(b-a)$

**Свойство.** $|f(x)| \le M \quad \forall x \in [a,b] \qquad \implies \qquad \left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| \le \int_a^b M = M(b-a)$

## 39. Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема 13.** $f \in \mathcal{C}\Big((a,b)\Big), \qquad \forall x \in (a,b) \quad \exists\, f'(x), \qquad f' \in \mathcal{R}([a,b])$

$$\implies \int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

**Доказательство.** Рассмотрим разбиение $\mathtt{P}_n([a,b]) = \{x_k\}_{k=0}^n$
Будем строить оснащение к нему особым образом
Для начала заметим, что

$$f(b) - f(a) = f(x_n) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \Big( f(x_k) - f(x_{k-1}) \Big) \tag{25}$$

Т. к. $f$ дифференцируема,

$$f \in \mathcal{C}\Big([x_{k-1}, x_k]\Big), \qquad \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \quad \exists\, f'(x)$$

Значит, можно применить теорему Лагранжа:

$$\exists\, t_k \in (x_{k-1}, x_k) : f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}) \underset{(25)}{\implies} f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n f'(t_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{26}$$

Положим $\mathtt{T} := \{t_k\}_{k=1}^n$

$$\mathrm{d}\Big(\mathtt{P}_n([a,b])\Big) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ещё раз посмотрим на соотношение (26):

$$f(b) - f(a) = \mathtt{S}_f(\mathtt{P}_n, \mathtt{T})$$

$$\mathtt{S}_n(\mathtt{P}_n, \mathtt{T}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f'$$

Это выражение постоянно (оно равно $f(a) - f(b)$), а значит, стремится само к себе $\square$

## 40. Свойства $\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y$; существование первообразной для $f \in \mathcal{C}([a,b])$

**Обозначение.** $\Phi(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad \Phi(a) := 0$

**Свойства.**

1. $\Phi(x) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

**Доказательство.** Возьмём $a < x_1 < x_2 \le b$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y =$$
$$= \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y + \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \xRightarrow[|f(x)|\le M]{}$$
$$\implies |\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| \le M(x_2 - x_1) \implies \Phi(x) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$$

□

2. $f$ непр. в $x_0 \implies \exists\,\Phi'(x_0) = f(x_0)$

**Доказательство.** Положим $h \ne 0 : x_0 + h \in [a,b]$

- $h > 0$

$$\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}\,y + \int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y =$$
$$= hf(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \quad (27)$$

- $h < 0$

$$\Phi(x_0) - \Phi(x_0+h) = \int_{x_0+h}^{x_0} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)\,\mathrm{d}\,x_0 + \int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y =$$
$$= -hf(x_0) + \int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \iff$$
$$\iff \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = hf(x_0) - \int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \quad (28)$$

$$(27),(28) \implies \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0) \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \\ &+\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y \end{aligned}\right. \quad (29)$$

Вспомним, что $f$ непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underset{0<|h|<\delta}{\exists\,\delta > 0} : \forall y \quad |y - x_0| < \delta \implies |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$
$$\implies \left\{\begin{aligned} \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y\right| &\le \frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot h = \varepsilon \\ \left|-\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(y) - f(x_0)\Big)\,\mathrm{d}\,y\right| &\le -\frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot(-h) = \varepsilon \end{aligned}\right\} \xRightarrow[(29)]{}$$
$$\implies \left|\frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \left|\frac{1}{h}\int \ldots\right| < \varepsilon$$

□

## 41. Свойства $\int_x^b f(y)\,\mathrm{d}\,y$

**Обозначение.** $\Psi(x) \coloneqq \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad \Psi(b) \coloneqq 0$

**Свойства.**

1. $\Psi \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

2. $f$ непр. в $x_0$ $\implies \exists\, \Psi'(x_0) = -f(x_0)$

**Доказательство.**

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_x^a f(y)\,\mathrm{d}\,y + \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}\,y = \Phi(x) + \Psi(x)$$

$$\Psi(x) = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}\,y - \Phi(x)$$

□

## 42. Определение $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ при любых $a, b \in \mathbb{R}$; формула Ньютона-Лейбница при любых $a$ и $b$

**Определение 17.** $a > b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}\,x := 0$$

**Утверждение 20.** Формула Ньютона-Лейбница справедлива при любых соотношениях $a$ и $b$

**Доказательство.** $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $\quad F$ – первообразная $f$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\Big(F(b) - F(a)\Big) = F(a) - F(b)$$

□

## 43. Замена переменной в определёном интеграле

**Теорема 14.** $f \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$, $\quad \varphi, \varphi' \in \mathcal{C}\Big([p,q]\Big)$, $\quad \forall t \in [p,q] \quad \varphi(t) \in [a,b]$, $\quad \varphi(p) = a$, $\quad \varphi(q) = b$

$$\implies \int_p^q f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

**Доказательство.** $\exists\, F$ – первообразная $f$ на $[a,b]$

$$\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)' = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) \implies F\big(\varphi(t)\big) \text{ – первообразная для } f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_p^q f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t = F\big(\varphi(q)\big) - F\big(\varphi(p)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

□

## 44. Интегрирование по частям в определённом интеграле

**Теорема 15.** $f, g \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$, $\quad \forall x \in [a,b] \quad \exists\, f'(x), g'(x) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

$$\implies \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

**Доказательство.**

$$\begin{cases} \exists\, F \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big) : \forall x \in [a,b] \quad F'(x) = f'(x)g(x) \\ \exists\, G \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big) : \forall x \in [a,b] \quad G'(x) = f(x)g'(x) \end{cases}$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\left.\begin{matrix} \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x = G(b) - G(a) \end{matrix}\right\} \implies \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \Big(F(b) + G(b)\Big) - \Big(F(a) + G(a)\Big) \qquad (30)$$

Продифференцируем:

$$\Big(F(x) + G(x)\Big)' = F'(x) + G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \Big(f(x)g(x)\Big)'$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\Big(F(b) + G(b)\Big) - \Big(F(a) + G(b)\Big) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Подставив в (30), получим нужный результат $\square$

## 45. Определение сходимости несобственных интегралов $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$ и $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$; критерий Коши сходимости несобственных интегралов

**Обозначение.**

$$\Phi(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad x < \beta$$

$$\Psi(x) := \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad x > \alpha$$

**Определение 18.** Говорят, что соответствующий несобственный интеграл сходится, если

- $\exists \lim\limits_{x\to\beta} \Phi(x) \in \mathbb{R}$
- $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} \Psi(x) \in \mathbb{R}$

**Криетрий Коши.** Через $\omega(\beta)$ и $\omega(\alpha)$ будем обозначать окрестности соответствующих точек
Вспомним критерий Коши для функций:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to\beta} \Phi(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega(\beta) : \forall x_1, x_2 \in [a, \beta) \cap \omega(\beta) \quad |\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| < \varepsilon \\ \exists \lim\limits_{x\to\alpha} \Psi(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega(\alpha) : \forall x_1, x_2 \in (\alpha, b] \cap \omega(\alpha) \quad |\Psi(x_2) - \Psi(x_1)| < \varepsilon \end{cases}$$

Будем считать, что $x_1 < x_2$

$$\begin{cases} \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \\ \Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \int_{x_2}^b f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_{x_1}^b f(y)\,\mathrm{d}\,y = -\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \end{cases}$$

Получаем критерий Коши для несобственных интегралов:

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to\beta} \Phi(x) \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\omega(\beta) : \forall x_1, x_2 \in [a, \beta) \cap \omega(\beta) & \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| < \varepsilon \\ \exists \lim\limits_{x\to\alpha} \Psi(x) \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\omega(\alpha) : \forall x_1, x_2 \in (\alpha, b] \cap \omega(\alpha) & \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| < \varepsilon \end{cases}$$

## 46. $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$; $\int_0^b \frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$

**Пример.** $a > 0$

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$$

**Напоминание.** $\int x^{-p}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{1-p}x^{1-p} + c$

- $p > 1$
  Пусть $x > a$
  $$\int_a^x \frac{\mathrm{d}\,y}{y^p} = \frac{1}{1-p}x^{1-p} - \frac{1}{1-p}a^{1-p} = \frac{1}{p-1}a^{1-p} + \frac{1}{1-p}x^{1-p} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{p-1}a^{1-p} \tag{31}$$
  Значит, интеграл сходится
- $p = 1$
  $$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$
  $$\int_a^x \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \ln x - \ln a \to +\infty$$
  Интеграл расходится
- $0 < p < 1$
  Снова получаем (31):
  $$\int_a^x \frac{\mathrm{d}\,y}{y^p} = \frac{1}{p-1}a^{1-p} + \frac{1}{1-p}x^{1-p} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$$
  Интеграл расходится

**Пример.**

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

Воспользуемся (31):

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}\,y}{y^p} = \frac{1}{1-p}b^{1-p} - \frac{1}{1-p}x^{1-p}$$

- $0 < p < 1$
  $$\frac{1}{1-p}b^{1-p} - \frac{1}{1-p}x^{1-p} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1-p}b^{1-p}$$
  Интеграл сходится
- $p > 1$
  $$\frac{1}{1-p}b^{1-p} - \frac{1}{1-p}x^{1-p} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$
  Интеграл расходится
- $p = 1$
  $$\int_o^b \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \ln b - \ln x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$$

Интеграл расходится

## 47. $\int_a^\beta cf(x)\,\mathrm{d}\,x, \int_\alpha^b cf(x)\,\mathrm{d}\,x, \int_a^\beta \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}\,x, \int_\alpha^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}\,x$

**Свойство.** $c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится } \implies \int_a^\beta cf(x)\,\mathrm{d}\,x = c\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится } \implies \int_\alpha^b cg(x)\,\mathrm{d}\,x = c\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

**Свойство.**

$$\left.\begin{matrix}\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}\\ \int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}\end{matrix}\right\} \implies \int_a^\beta f(x)+g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\left.\begin{matrix}\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}\\ \int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}\end{matrix}\right\} \implies \int_\alpha^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

## 48. Критерий сходимости $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x, \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ при $f(x) \geq 0$

**Критерий сходимости неотрицательных функций.**

- $\forall x \in [a,\beta) \quad f(x) \geq 0, \qquad a < x_1 < x_2 < \beta$

$$\int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \geq 0 \tag{32}$$

Рассмотрим

$$F := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$(32) \implies F \text{ возрастает}$$

Вспомним, когда возрастающая функция имеет конечный предел:

$$\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится } \iff \exists\, M > 0 : \forall x \in [a,\beta) \quad F(x) \leq M$$

- Аналогично,

$$G(x) := \int_x^b g(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$G(x)$ убывает

$$\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится } \iff \exists\, L : \forall x \in (\alpha,b] \quad G(x) \geq L$$

## 49. Признаки сравнения несобственных интегралов от неотрицательных функций

**Теорема 16.** $f_1, f_2 : [a,\beta), \qquad \forall x \in [a,\beta) \quad \begin{cases} f_1(x) \geq 0\\ f_2(x) \geq 0\end{cases}$

$$\exists\, c > 0 : \forall x \in [a,\beta) \quad f_1(x) \leq cf_2(x) \tag{33}$$

1. $\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x$ сходится

$$\implies \begin{cases} \int_a^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \\ \int_a^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}\,x \le c\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x \end{cases} \tag{34}$$

**Доказательство.** Рассмотрим

$$F_2(x) := \int_a^x f_1(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad F_2(x) := \int_a^x f_2(y)\,\mathrm{d}\,y$$

По критерию сходимости неотрицательных функций,

$$\exists\, M : F_2(x) \le M \quad \forall x$$

$$(33) \implies F_1(x) = \int_a^x f_1(y)\,\mathrm{d}\,y \le \int_a^x cf_2(y)\,\mathrm{d}\,y = c\int_a^x f_2(y)\,\mathrm{d}\,y = cF_2(x) \le cM$$

$$F_1(x) \le cF_2(x) \implies \lim_{x\to\beta} F_1(x) \le \lim_{x\to\beta} cF_2(x) \implies (34)$$

□

2. $\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x$ расходится $\implies \int_a^\beta f_1(x)\,\mathrm{d}\,x$ расходится

**Доказательство.** Пусть это неверно

$$\int_a^\beta f_2(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \implies \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

□

## 50. Абсолютная сходимость несобственных интегралов

**Определение 19.** Говорят, что $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$ абсолютно сходится, если сходится $\int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$

**Определение 20.** Абсолютно сходящийся интеграл сходится

**Доказательство.** Рассмотрим $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$
Будем пользоваться критерием Коши
Возьмём $\forall\varepsilon > 0$

$$\int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \iff \exists\,\omega(\beta) : \forall x_1, x_2 \in \omega(\beta) \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(y)|\,\mathrm{d}\,y\right| < \varepsilon$$

В силу одного из свойств, это означает, что

$$0 \le \int_{x_1}^{x_2} |f(y)|\,\mathrm{d}\,y < \varepsilon \tag{35}$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(y)|\,\mathrm{d}\,y \underset{(35)}{<} \varepsilon \implies \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

□

## 51. Признак Абеля

**Теорема 17.** $f, g, f', g' \in \mathcal{C}\Big([a,\beta)\Big)$, $\qquad g(x)$ монотонна, $\qquad \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x$ сходится

$$\exists\, M : \forall x \in [a,\beta) \quad |g(x)| \le M \tag{36}$$

$$\implies \int_a^\beta f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

**Доказательство.** По критерию Коши,

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\omega(\beta):\forall x_1,x_2\in\omega(\beta) \qquad \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right|<\varepsilon \tag{37}$$

Рассмотрим $\int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y$
Применим вторую теорему о среднем:

$$\exists\,c\in[x_1 \between x_2]: \int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y = g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y + g(x_2)\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \implies$$
$$\implies \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y\right| = \left|g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y + g(x_2)\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \le$$
$$\le |g(x_1)|\cdot\left|\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| + |g(x_2)|\cdot\left|\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \underset{(36),(37)}{<} M\cdot\varepsilon + M\cdot\varepsilon$$

Значит, интеграл сходится ☐

# 52. Признак Дирихле

**Теорема 18.** $f,g,g'\in\mathcal{C}\Big([a,\beta)\Big)$, $\qquad g(x)\xrightarrow[x\to\beta]{} 0$

$$\exists\,M:\forall x\in[a,\beta) \qquad \left|\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}\,y\right|\le M \tag{38}$$

$$\implies \int_a^\beta f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

**Доказательство.** Вспомним, когда монотонная функция стремится к нулю:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\omega(\beta):\forall x\in\omega(\beta) \quad |g(x)|<\varepsilon \tag{39}$$

Возьмём $x_1,x_2\in\omega(\beta)$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| = \left|\int_a^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \overset{\Delta}{\le} \left|\int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| + \left|\int_a^{x_1} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \underset{(38)}{\le} M+M=2M \tag{40}$$

По второй теореме о среднем,

$$\exists\,c\in[x_1 \between x_2]: \int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y = g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y + g(x_2)\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y \implies$$
$$\implies \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)g(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \le |g(x_1)|\cdot\left|\int_{x_1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| + |g_2(x)|\cdot\left|\int_{c}^{x_2} f(y)\,\mathrm{d}\,y\right| \underset{(39),(40)}{<} \varepsilon\cdot 2M + \varepsilon\cdot 2M$$

Значит, интеграл сходится ☐

# 53. Замена переменной в несобственном интеграле

**Теорема 19.** $\varphi,f,\varphi'\in\mathcal{C}\Big([p,q)\Big)$, $\qquad \forall t\in[p,q) \quad \varphi(t)\in[a,\beta)$, $\qquad \varphi$ монотонна

$\varphi(p) = a, \quad \varphi(q) = \beta, \qquad q, \beta \le +\infty$

$$I_1 := \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad I_2 := \int_p^q f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Если сходится один из $I_1, I_2$, то сходится и второй
При этом, $I_1 = I_2$

**Доказательство.** Положим $p < Q < q$

$$\int_a^{\varphi(Q)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_p^Q f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$Q \to q \iff \varphi(Q) \to \beta$$

□

## 54. $\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^p x}$; $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$

**Пример** (замена переменной).

$$\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^p x}$$

Положим $x := e^t$
Тогда $\ln x = t$ и $x' = e^t$

$$\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^p x} = \int_1^\infty \frac{1}{e^t t^p}\cdot e^t\,\mathrm{d}\,t = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,t}{t^p}$$

Этот интеграл:

- сходится при $p > 1$
- иначе – расходится

**Пример** (признак Дирихле).

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

- Проверим сходимость:
  Пусть

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

$$\left|\int_1^x \sin x\,\mathrm{d}\,x\right| = |\cos 1 - \cos x| \le 2 \xRightarrow[\text{Дирихле}]{} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

- Проверим абсолютную сходимость:

$$\text{Предположим, что } \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{41}$$

$$\forall x \quad |\sin x| \ge \sin^2 x$$

$$(41) \implies \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

**Напоминание.** $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

Значит,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\Big)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} \tag{42}$$

Это – сумма интегралов, а значит,

$$\text{сходится и } \int_1^\infty \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{x} \,\mathrm{d}\,x \tag{43}$$

Сложим (42) и (43):

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\cos 2x}\right) + \cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{x}}\right) \mathrm{d}\,x \text{ сходится } \implies \int_1^\infty \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\,x \text{ сходится } \implies$$
$$\implies \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x} \text{ сходится}$$

А это – неправда. Значит, наше предположение неверно, и $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} \,\mathrm{d}\,x$ расходится

## 55. Сходимость ряда $\sum_{n=k}^\infty a_n$; необходимый признак сходимости; остаток ряда

**Определение 21.** Частичной суммой ряда будем называть $S_N \coloneqq a_k + a_{k+1} + ... + a_{k+N-1}$

**Определение 22.** Будем говорить, что ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{N\to\infty} S_N \in \mathbb{R}$

**Теорема 20** (необходимый признак сходимости)**.**

$$\sum_{m=k}^\infty a_m \text{ сходится } \implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

**Доказательство.** Положим

$$\sum_{m=k}^\infty a_m \coloneqq S \in \mathbb{R}$$

Возьмём $n > k$

$$\left.\begin{aligned} S_{n-1} &= a_k + a_{k+1} + ... + a_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S \\ S_n &= a_k + a_{k+1} + ... + a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \end{aligned}\right\} \implies$$
$$\implies a_n = \big(a_k + a_{k+1} + ... + a_n\big) - \big(a_k + a_{k+1} + ... + a_{n-1}\big) \to S - S = 0$$

□

**Определение 23.** Возьмём $l > k$
Ряд $\sum_{m=l}^\infty a_m$ называется остатком ряда $\sum_{m=k}^\infty a_m$

## 56. Критерий Коши сходимости ряда

**Теорема 21.** Для того что бы ряд $\sum_{m=k}^\infty a_m$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n_2 > n_1 > N \quad |a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}| < \varepsilon$$

**Доказательство.**

$$\begin{cases} S_{n_1+1} = a_k + a_{k+1} + ... + a_{n_2} \\ S_{n_2+1} = a_k + a_{k+1} + ... + a_{n_1} \end{cases}$$

Вспомним критерий Коши для последовательностей:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n_2 > n_1 > N \quad |S_{n_2+1} - S_{n_1+1}| < \varepsilon$$

$$S_{n_2+1} - S_{n_1+1} = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}$$

□

## 57. Критерий сходимости рядов с неотрицательными слагаемыми

Будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \forall n \quad a_n \geq 0 \tag{44}$$

$$S_{n+1} - S_n = (a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + \ldots + a_n) = a_{n+1} \geq 0$$

То есть, последовательность $S_n$ не убывает

**Теорема 22.** Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_m$ сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists\, M : \forall n \quad S_n \leq M$$

**Доказательство.** Неубывающая последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена □

## 58. Признаки сравнения рядов с неотрицательными слагаемыми

**Теорема 23.** Рассмотрим также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \forall n \quad b_n \geq 0 \tag{45}$$

$$\exists\, c : \forall n \quad a_n \leq c b_n \tag{46}$$

- Если (45) сходится, то сходится и (44)
  При этом выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq c \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{47}$$

**Доказательство.** По предыдущему критерию,

$$\exists\, M : \forall n \quad b_1 + \ldots + b_n \leq M \tag{48}$$

$$\boldsymbol{a_1 + \ldots + a_n} \underset{(46)}{\leq} c b_1 + \ldots + c b_n = \boldsymbol{c(b_1 + \ldots + b_n)} \underset{(48)}{\leq} cM$$

Значит, по предыдущему критерию, (44) сходится
(47) выполняется по выделенному □

- Если (44) расходится, то расходится и (45)

**Доказательство.** От противного □

## 59. Признак Коши сходимости рядов

**Теорема 24.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \forall n \quad a_n \geq 0 \tag{49}$$

$$q := \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 0$$

- $q < 1 \implies$ (49) сходится

**Доказательство.** Выберем $\varepsilon > 0 : r := q + \varepsilon > 1$
По определению предела последовательности,

$$\exists\, N : \forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} < r$$

То есть,

$$a_n < r^n \tag{50}$$

**Очевидно, что.**

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \text{ сходится} \tag{51}$$

Применим признак сравнения:

$$(50), (51) \implies \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

А значит, сходится и (49) □

- $q > 1 \implies$ (49) расходится

**Доказательство.** Возьмём $\varepsilon := q - 1 > 0$
Применим принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\sqrt[n_k]{x_{n_k}} > q - \varepsilon = 1 \iff a_{n_k} > q^{n_k} \implies a \to 0$$

□

## 60. Признак Даламбера сходимости рядов

**Теорема 25.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n > 0 \tag{52}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

- $q < 1 \implies$ (52) сходится

**Доказательство.** Возьмём $\varepsilon > 0 : r \coloneqq q + \varepsilon < 1$
По определению предела последовательности,

$$\exists\, N : \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \tag{53}$$

Будем считать, что $n \geq N + 1$

$$(53) \implies \begin{cases} \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r \\ \dfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < r \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r \end{cases}$$

Перемножим эти неравенства:

$$\frac{\cancel{a_{N+2}}}{a_{N+1}} \cdot \frac{\cancel{a_{N+3}}}{\cancel{a_{N+2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n+1}}} \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} \underset{\text{здесь } n-N \text{ нер-в}}{<} r^{n-N} \iff \frac{a_{n+1}}{a_{N+1}} < \frac{r^n}{r^N} \iff a_{n+1} < \frac{a_{N+1}}{r^N} \cdot r^n$$

$$\sum n = N + 1^\infty \frac{a_{N+1}}{r^N} \cdot r^n \text{ сходится} \xRightarrow[\text{призн. сравн.}]{} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

Значит, (52) сходится □

- $q > 1 \implies$ (52) расходится

**Доказательство.** Пусть $\varepsilon \coloneqq q - 1 > 0$
По определению предела,

$$\exists\, N : \forall n > N \quad \frac{a_n + 1}{a_n} > q - \varepsilon = 1 \tag{54}$$

Будем считать, что $n > N + 1$

$$(54) \implies \begin{cases} \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > 1 \\ \dfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}} > 1 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \end{cases}$$

Перемножим эти неравенства:

$$\frac{\cancel{a_{N+2}}}{a_{N+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_{N+1}}} > 1 \iff a_{n+1} > a_{N+1} > 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Значит, (52) расходится □

## 61. Интегральный признак сходимости рядов

**Теорема 26.** $f : [1, \infty], \qquad f(x) \geq 0, \qquad f(x)$ убывает

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{55}$$

$$\int_1^\infty f \,\mathrm{d}\, x(x) \tag{56}$$

(55) и (56) сходятся или расходятся одновременно

**Доказательство.**

- Пусть (55) сходится
  При $x \in [n, n+1]$, имеем неравенство (вследствие убывания $f$):
$$f(n) \geq f(x)$$
  Проинтегрируем:
$$\underbrace{\int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}\,x}_{f(n)(n+1-n)=f(n)} \geq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$
  Возьмём произвольное $N$ и $n = 1, 2, ..., N$:
$$\begin{cases} f(1) \geq \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ f(2) \geq \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ \dots\dots\dots\dots \\ f(N) \geq \int_N^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \end{cases}$$
  Сложим все неравенства:
$$f(1) + ... + f(N) \geq \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x + ... + \int_N^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$
  Заметим, что слева записана частичная сумма ряда (55), а он сходится:
$$\int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq f(1) + ... + f(N) \leq \sum n = 1^{\infty} f(n) = M \in \mathbb{R} \tag{57}$$
  Возьмём $\forall\ 1 < b < \infty$ и рассмотрим интеграл $\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$
  Возьмём $N > b - 1$
$$\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \underbrace{\int_b^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x}_{\geq 0} \leq \int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \underset{(57)}{\leq} M$$
  Значит, (56) сходится

- Пусть сходится интеграл (56)
  Для $x \in [n, n+1]$ справедливо (в силу убывания $f$):
$$f(x) \geq f(n+1) \implies \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}\,x$$
  Распишем это для $n = 1, 2, ..., N$:
$$\begin{cases} \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq f(2) \\ \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq f(3) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \int_N^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq f(N+1) \end{cases}$$
  Сложим:
$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x + ... + \int_N^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq f(2) + f(3) + ... + f(N+1)$$

$$\int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq f(2) + f(3) + \ldots + f(N+1)$$

В силу произвольности $N$, это означает, что

$$\int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x \coloneqq L$$

Значит,

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(N+1) \leq L$$

Получили, что последовательность ограничена сверху числом $L$, которое не зависит от $N$, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится
Тогда сходится и ряд (55)

$\square$

## 62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}$

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p > 0, \qquad f(x) \coloneqq \frac{1}{x^p}$$

Этот ряд сходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$$

Мы знаем, что этот интеграл:

- сходится при $p > 1$
- расходится при $0 < p < 1$

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}, \qquad p > 0$$

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{(x+1)\ln^p(x+1)}$$

Ряд сходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)\ln^p(x+1)} \underset{(y:=x+1)}{=} \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,y}{y\ln^p y}$$

Этот интеграл сходится при $p > 1$

## 63. Абсолютная сходимость рядов

Пусть имеется некий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{58}$$

Рассмотрим также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{59}$$

**Определение 24.** Говорят, что ряд (58) абсолютно сходится, если сходится (59)

**Теорема 27.** Абсолютно сходящийся ряд сходится

**Доказательство.** Выпишем критерий Коши для ряда (59):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon \qquad \iff \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

Значит, ряд (58) сходится ☐

## 64. Признак Абеля сходимости ряда

**Преобразование Абеля.** Пусть имеется сумма $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n$
Определим числа следующим образом:

$$\begin{cases} A_0 \coloneqq 0 \\ A_1 \coloneqq a_1 \\ A_2 \coloneqq a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots \\ A_k \coloneqq a_1 + \dots + a_k \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = A_1 - A_0 \\ a_2 = A_2 - A_1 \\ \dots\dots \\ a_k = A_k - A_{k-1} \end{cases}$$

Тогда наша сумма равна

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N} A_{n-1} b_n \underset{(k:=n-1)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_n b_n - \sum_{k=0}^{N-1} A_k b_{k+1} \underset{\left(\substack{\text{в качестве счётчика суммы} \\ \text{можно взять любую букву}}\right)}{=} \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1} \underset{(A_0 \overset{\text{def}}{=} 0)}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} = \left( A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_n \right) - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} =$$

$$= A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} (A_n b_n - A_n b_{n+1}) = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1})$$

**Теорема 28** (признак Абеля).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{60}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \tag{61}$$

Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена
Тогда ряд (60) сходится

**Доказательство.** Выпишем критерий Коши для ряда (60):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > n > N \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \tag{62}$$

Положим

$$\begin{cases} A_1 \coloneqq a_{n+1} \\ A_2 \coloneqq a_{n+1} + a_{n+2} \\ \dots\dots\dots \\ A_k \coloneqq a_{n+1} + \dots + a_{n+k} \end{cases}$$

Применим преобразование Абеля в наших обозначениях:

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = A_{m-n} b_m + \sum_{k=1}^{m} A_k (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \implies$$

$$\implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \le |A_{m-n}| \cdot |b_m| + \sum_{k=1}^{m-n-1} |A_k| \cdot |b_{n+k} - b_{n+k+1}| \underset{(\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ огр.})}{\le}$$

$$\le M \cdot |a_{n+1} + ... + a_m| + \sum_{k=1}^{m-n-1} |a_{n+1} + ... + a_{n+k}| \cdot |b_{n+k} - b_{n+k+1}| \underset{(62)}{M} \cdot \varepsilon + \sum_{k=1}^{m-n-1} \varepsilon |b_{n+k} - b_{n+k+1}| =$$

$$= M\varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{m-n-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \right| = M\varepsilon + \varepsilon |b_{n+1} - b_m| \le M\varepsilon + \varepsilon(|b_{n+1}| + |b_m|) \le 3\varepsilon$$

Значит, при $m > n > N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < 3M\varepsilon \implies (60) \text{ сходится}$$

□

## 65. Признак Дирихле сходимости ряда

**Теорема 29.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{63}$$

$$\exists\, L : \forall n \quad \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| \le L \tag{64}$$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, $\quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Тогда ряд (63) сходится

**Доказательство.** Будем пользоваться критерием Коши
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$
По определению предела последовательности,

$$\exists\, N : \forall n > N \quad |b_n| < \varepsilon \tag{65}$$

Возьмём $\forall m > n > N$
Выберем числа:

$$\begin{cases} A_1 := a_{n+1} \\ A_2 := a_{n+1} + a_{n+2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_k := a_{n+1} + ... + a_{n+k} \end{cases}$$

Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = A_{m-n} b_m + \sum_{k=1}^{m-n-1} A_k (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \tag{66}$$

$$A_k = (a_1 + ... + a_{n+k}) - (a_1 + ... + a_n)$$

$$|A_k| \le |a_1 + \ldots + a_{n+k}| + |a_1 + \ldots + a_n| \underset{(64)}{\le} L + L = 2L \underset{(66)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \le 2L \cdot |b_m| + \sum_{k=1}^{m-n-1} 2L|b_{k+n} - b_{k+n+1}| = 2L\left(|b_m| + \left|\sum_{k=1}^{m-n-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1})\right|\right) =$$

$$= 2L(|b_m| + |b_{n+1} - b_m|) \le 2L(|b_m| + |b_{n+1}| + |b_m|) \underset{(65)}{<} 6L\varepsilon$$

Значит, (63) сходится ☐

## 66. Сходимость знакопеременного ряда

**Определение 25.** Знакопеременным называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n, \qquad b_n > 0 \tag{67}$$

**Теорема 30 (признак сходимости знакопеременного ряда).** $b_n$ монотонно убывает, $\quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Тогда ряд (67) сходится

**Доказательство.** Положим $a_k \coloneqq (-1)^{k-1}$
Применим признак Дирихле

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{N-1} = \left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$$

☐

## 67. Пространство $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{O}_n$; операции с $X, X+Y, (X,Y)$; $(cX,Y), (X,Y+Z)$

**Определение 26.** Пространством $\mathbb{R}^n$ называется множество всех упорядоченных наборов из $n$ вещественных чисел

**Обозначение.** $\mathbb{O}_n \coloneqq (0, \ldots, 0)$

**Арифметические операции.** Положим $X \coloneqq (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y \coloneqq (y_1, \ldots, y_n)$

- $c \in \mathbb{R} \qquad cX \coloneqq (cx_1, \ldots, cx_n)$
  $-X = (-1)X = (x_1, \ldots, -x_n)$
- $X + Y \coloneqq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
  $X - Y = X + (-1)Y$
  $X - X = \mathbb{O}_n$
- Скалярное произведение:
  $$(X, Y) \coloneqq x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = (Y, X)$$

**Свойства.**

1. $(cX, Y) = (X, cY) = c(X, Y)$
2. Возьмём $Z = (z_1, \ldots, z_n)$
   $$(X, Y + Z) = x_1(y_1 + z_1) + \ldots + x_n(y_n + z_n) = (X, Y) + (X, Z)$$

## 68. $\|X\|$; $\|cX\|, (X,X), \|X+Y\| \le \ldots$; $\mathbb{R}^n$ как метрическое пространство

**Определение 27.** $\|X\| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$

**Замечание.** $(X, X) = \|X\|^2$

**Свойство.** $c \in \mathbb{R}$

$$\|cX\| = \sqrt{c^2x_1^2 + ... + c^2x_n^2} = |c|\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = |c| \cdot \|X\|$$

**Утверждение 21** (неравенство треугольника). $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

**Доказательство.** Возьмём $U := X + Y$

- Если $U = \mathbb{O}_n$, то утверждение выполнено
- $U \neq \mathbb{O}_n \implies \|U\| > 0$
  Положим $t := \|U\|, \qquad W := \frac{1}{t}U$

$$\|W\| = \left\|\frac{1}{t}U\right\| = \frac{1}{t}\|U\| = 1 \tag{68}$$

$$\Big((X+Y), W\Big) = (X, W) + (Y, W) \implies \left|\Big((X+Y), W\Big)\right| \leq \Big|(X, W)\Big| + \Big|(Y, W)\Big| \leq$$
$$\leq \|X\| \cdot \|W\| + \|Y\| \cdot \|W\| \underset{(68)}{=} \|X\| + \|Y\|$$

С другой стороны,

$$\Big((X+Y), W\Big) = (U, W) = (U, \frac{1}{t}U) = \frac{1}{t}(U, U) = \frac{1}{t} \cdot \|U\| \cdot \|U\| \overset{\text{def}}{=} \|U\| \overset{\text{def}}{=} \|X + Y\|$$

□

**Утверждение 22.** $\mathbb{R}^n$ является метрическим пространством

**Доказательство.** $X, Y \in \mathbb{R}^n$
Возьмём $d(X, Y) := \|X - Y\|$
Проверим, что $d(X, Y)$ является метрикой:

- $d(X, Y) \geq 0, \qquad d(X, Y) = 0 \iff X = Y$
- $d(Y, X) = \|Y - X\| = \|(-1)(X - Y)\| = |-1| \cdot \|X - Y\| = d(X, Y)$
- Нужно проверить, что $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$
  То есть, нужно проверить, что $\|X - Z\| \leq \|X - Y\| + \|Y - Z\|$:

$$X - Z = (X - Y) + (Y - Z)$$

$$\|X - Z\| \leq \|X - Y\| + \|Y - Z\|$$

□

## 69. Шары $B_r(X)$; открытые, замкнутые множества; характеристика замкнутых множеств

**Определение 28.** $X \in \mathbb{R}^n, \qquad r > 0$
(Открытым) шаром называется

$$B_r(X) := \{\, Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y - X\| < r \,\}$$

**Определение 29.** $E \subset \mathbb{R}^n, \qquad E \neq \emptyset$
Будем говорить, что множество $E$ открыто, если

$$\forall X \in E \quad \exists \omega(X) : \omega(X) \subset E$$

Пустое множество считаем открытым

**Определение 30.** $F \subset \mathbb{R}^n, \qquad F \neq \emptyset$
$F$ замкнуто, если $(\mathbb{R}^n \setminus F)$ открыто

**Теорема 31.** $F \subset \mathbb{R}^n, \qquad F \neq \emptyset, \quad F \neq \mathbb{R}^n$

$$F \text{ замкнуто} \iff \forall X_0 - \text{т. сг. } F \quad X_0 \in F$$

**Доказательство.**

- $\Longrightarrow$
  Пусть $F$ замкнуто, $X_0$ – т. сг. $F$
  Пусть $X_0 \notin F$

$$\Longrightarrow X_0 \in \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus F)}_{\text{откр.}} \Longrightarrow \exists \omega_0(X_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus F) \Longrightarrow \omega_0(X_0) \cap F = \emptyset \Longrightarrow X_0 - \text{не т. сг.} - \lightning$$

- $\Longleftarrow$
  Нужно доказать, что $(\mathbb{R}^n \setminus F)$ открыто
  Пусть это не так, т. е.

$$\exists X_* \in (\mathbb{R}^n \setminus F) : \forall \omega(X_*) \quad \not\subset (\mathbb{R}^n \setminus F)$$

  Возьмём $\omega_m(X_*) := B_{1/m}(X_*)$

$$\exists X_m \in \omega_m(X_*) : X_m \notin (\mathbb{R}^n \setminus F)$$

  То есть, $X_m \in F$

$$\left.\begin{aligned} &\|X_m - X_*\| < \tfrac{1}{m} \\ &X_* \notin F \end{aligned}\right\} \Longrightarrow X_* - \text{т. сг. } F$$

  Но $X_* \notin F$ – $\lightning$

□

## 70. $X_m \to X_0 \iff x_{km} \to x_{k0}, 1 \leq k \leq n$

**Напоминание.** Рассмотрим последовательность $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}, \qquad Y_m \in \mathbb{R}^n$

$$Y_m = (y_{1m}, ..., y_{nm})$$

Возьмём $X \in \mathbb{R}^n$
Вспомним определение предела последовательности:

$$Y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} X \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M : \forall m > M \quad \|Y_m - X\| < \varepsilon$$

**Утверждение 23.**

$$Y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} X \iff \forall k = 1, ..., n \quad y_{km} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k$$

**Доказательство.**

- $\Longrightarrow$
  Возьмём $1 \leq k \leq n$

$$|y_{km} - x_k| \leq \sqrt{(y_{1m} - x_1)^2 + \ldots\ldots + (y_{nm} - x_m)^2} < \varepsilon \Longrightarrow y_{km} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k$$

- $\Longleftarrow$
$$\forall k = 1, ..., n \quad \exists\, M_k : \forall m > M_k \quad |y_{km} - x_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \tag{69}$$
Возьмём $M := \max\limits_{1 \le k \le n} M_k$
$$\|Y_m - X\| = \sqrt{(y_{1m} - x)^2 + \ldots\ldots + (y_{nm} - x_n)^2} \underset{(69)}{<} \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + ... + \frac{\varepsilon^2}{n}}}_{n \text{ слагаемых}} = \varepsilon$$

$\square$

## 71. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

**Теорема 32.** $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}, \quad X_m \in \mathbb{R}^n$
$$\exists\, R : \forall m \quad \|X_m\| \le R \tag{70}$$
$$\implies \begin{Bmatrix} \exists\, \{X_{m_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \\ \exists\, X_* \in \mathbb{R}^n \end{Bmatrix} : X_{m_\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} X_*$$

**Доказательство.** $X_m = (x_{1m}, ..., x_{nm})$
$$(70) \implies \forall 1 \le k \le n \quad \forall m \ge 1 \quad |x_{km}| \le R$$
Получили, что последовательность $\{x_{km}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена сверху

- Значит, можно применить принцип выбора Больцано-Вейерштрасса для вещественных чисел:
$$\left.\begin{matrix} \exists\, \{x_{1m_l}\}_{l=1}^{\infty} \\ \exists\, x_{1*} \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} : x_{1m_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} x_{1*} \tag{71}$$
Переобозначим $\{x_{ml}\}_{l=1}^{\infty}$ как $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$:
$$x_l := (x_{1l}, ..., x_{nl})$$

- Рассмотрим последовательность $\{x_{2l}\}_{l=1}^{\infty}$
Применим к ней принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:
$$\left.\begin{matrix} \exists\, \{x_{2l_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty} \\ \exists\, x_{2*} \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} : x_{2l_\mu} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} x_{2*}$$
$$(71) \implies x_{1l_\mu} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} x_{1*}$$
Ещё раз упростим обозначения: вместо $x_{nl_\mu}$ будем писать $x_{n\nu}$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

- Дошли до последовательности $\{x_q\}_{q=1}^{\infty}$
Уже существуют $x_{1*}, ..., x_{n-1*}$ такие, что
$$\begin{cases} x_{1q} \to x_{1*} \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1,q} \to x_{n-1*} \end{cases} \tag{72}$$
Рассмотрим последовательность $\{x_{nq}\}_{q=1}^{\infty}$
$$|x_{nq}| \le R$$

Применим к ней принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\left.\begin{aligned}&\exists\,\{x_{q\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}\\&\exists\,x_{n*}\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\}:x_{nq_\nu}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}x_{n*}$$

Добавим эту подпоследовательность к (72):

$$\begin{cases}x_{1q_\nu}\to x_{1*}\\ \dots\dots\\ x_{nq_\nu}\to x_{n*}\end{cases}$$

Значит,

$$X_{q_\nu}\to X_*,\qquad X_*=(x_{1*},\dots,x_{n*})$$

□

## 72. Определение $f(X)\xrightarrow[X\to X_0]{}A,\ X_0\in\mathbb{R}^n$

**Функции от нескольких переменных.** $E\subset\mathbb{R}^n,\qquad E\neq\emptyset,\qquad f:E\to\mathbb{R},\qquad n\geq 2$
Будем говорить, что $f$ – функция от $n$ переменных
Её значение записывается в виде $f(x_1,\dots,x_n)$
Если $X=(x_1,\dots,x_n)$, то можно писать $f(X)$

**Определение 31.** $X_0$ – т. сг. $E$, $\qquad A\in\mathbb{R}$

$$f(X)\xrightarrow[X\to X_0]{}A\iff\forall\varepsilon>0\quad\exists\,\omega(X_0):\forall X\in E\cap\underset{X\neq X_0}{\omega(X_0)}\quad|f(X)-A|<\varepsilon$$

## 73. Связь предела функции с пределами последовательностей

**Теорема 33.** $X_0$ – т. сг. $E\subset\mathbb{R}^n$, $\qquad f:E\to\mathbb{R}$

$$\exists\lim_{X\to X_0}f(X)=A\in\mathbb{R}^n\iff\forall\{X_m\}_{m=1}^{\infty}:\begin{cases}X_m\to X_0\\ \forall m\quad X_m\neq X_0\end{cases}\qquad f(X_m)\xrightarrow[m\to\infty]{}A$$

**Доказательство.**

- $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{X\to X_0}f(X)=A\overset{\text{def}}{\iff}\forall\omega(A)\quad\exists\,\Omega(X_0):\forall X\in\underset{X\neq X_0}{\Omega(\alpha)}\quad f(X)\in\omega(A)\\&X_m\to X_0\overset{\text{def}}{\iff}\exists\,N:\forall m>N\quad X_m\in\Omega(X_0)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\forall m>N\quad f(X_m)\in\omega(A)\overset{\text{def}}{\iff}f(X_m)\to A$$

- $\Longleftarrow$
Пусть неверно, что $\lim\limits_{X\to X_0}f(X)=A$, т. е.

$$\exists\,\omega_0(A):\forall\widetilde{\Omega}(X_0)\quad\exists\,X\in\underset{X\neq X_0}{\widetilde{\Omega}(X_0)}:f(X)\notin\omega_0(A)$$

Это будет верно, в том числе, для

$$\Omega_{1/n}(X_0)\coloneqq\{\,X\in\mathbb{R}^n\mid\|X-X_0\|<\frac{1}{n}\,\}$$

То есть,

$$\exists\,\omega_0(A) : \exists \underset{X\neq X_0}{X \in \Omega_{1/n}}(X_0) : f(X) \notin \omega_0(A)$$

В том числе,

$$\exists\, X_m \in \Omega_{1/n}(X_0) : f(X_m) \notin \omega_0(A) \overset{\text{def}}{\iff} \lim f(X_m) \neq A \quad \lightning \quad f(X_m) \to A$$

$\square$

## 74. $f \to A \implies cf \to cA$; $f \to A, g \to B \implies f+g \to A+B, fg \to AB$; $f \to A \implies \frac{1}{f} \to \frac{1}{A}$; $f \to A, g \to B \implies \frac{g}{f} \to \frac{B}{A}$

**Свойства.**

1. $c \in \mathbb{R}$
$$f \to A \implies cf \to A$$
2. $\left.\begin{matrix} f \to A \\ g \to B \end{matrix}\right\} \implies \begin{cases} f+g \to A+B \\ fg \to AB \end{cases}$
3. $g(X) \neq 0, \qquad X \in E, \qquad B \neq 0$
$$g \to B \implies \frac{1}{g} \to \frac{1}{B}$$
$$\left.\begin{matrix} f \to A \\ g \to B \end{matrix}\right\} \implies \frac{f}{g} \to \frac{A}{B}$$

## 75. Определение $F(X) \xrightarrow[X \to X_0]{} \alpha, X \in E \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^q$

**Координатные функции.** $E \subset \mathbb{R}^n, \qquad n \geq 1, \qquad F : E \to \mathbb{R}^q, \qquad q \geq 2$
Можно записать $F(X)$ как $F(X) = \Big(f_1(X), ..., f_q(X)\Big)$
$f_1, ..., f_q$ называются координатными функциями $F(X)$

**Определение 32.** $X_0$ – т. сг. $E \subset \mathbb{R}^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^q$

$$F(X) \xrightarrow[X \to X_0]{} \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta : \forall \underset{X \neq X_0}{X \in E} : \|X - X_0\|_n < \delta \quad \|F(X) - \alpha\|_q < \varepsilon$$

## 76. $F = (f_1, ..., f_q)$; $F(X) \xrightarrow[X \to X_0]{} \alpha \iff f_\nu(X) \xrightarrow[X \to X_0]{} \alpha_\nu, 1 \leq \nu \leq q$

**Утверждение 24.** $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_q), \qquad \alpha_\nu \in \mathbb{R}$

$$F(X) \xrightarrow[X \to X_0]{} \alpha \iff \forall 1 \leq \nu \leq q \quad f_\nu(X) \xrightarrow[X \to X_0]{} \alpha_\nu$$

**Доказательство.**

- $\implies$
Воспользуемся определением предела отображения:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : |f_\nu(X) - \alpha_\nu| \leq \|F(X) - \alpha\|_q < \varepsilon$$
- $\impliedby$

Воспользуемся правой частью утверждения:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \underset{X \neq X_0}{X \in E} : \|X - X_0\|_n < \delta_n \qquad |f_\nu(X) - \alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}} \tag{73}$$

Положим $\delta := \min\limits_{1 \le \nu \le q} \delta_\nu$

$$\|F(X) - \alpha\|_q \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\Big(f_1(X) - \alpha\Big)^2 + \ldots\ldots + \Big(f_q(X) - \alpha_q\Big)^2} \underset{(73)}{<} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{q} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{q}} = \varepsilon$$

□

## 77. Непрерывность функции $f$ в точке $X_0 \in \mathbb{R}^n$; $f$ непр. в $X_0 \implies cf$ непр. в $X_0$; $f, g$ непр. в $X_0 \implies f + g, fg$ непр. в $X_0$; $f$ непр. в $X_0 \implies \frac{1}{f}$ непр. в $X_0$; $\frac{g}{f}$ непр. в $X_0$

**Определение 33.** $E \subset \mathbb{R}^{n \ge 1}$, $\quad f : E \to \mathbb{R}$, $\quad X_0 \in E$ – т. сг. $E$
Будем говорить, что $f$ непр. в $X_0$, если $\exists \lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$

**Свойства.** $E \subset \mathbb{R}^n$, $\quad n \ge 1$, $\quad X_0 \in E$ – т. сг. $E$, $\quad c \in \mathbb{R}$

1. $f$ непр. $\implies cf$ непр.
2. $f, g$ непр. $\implies f + g, fg$ непр.
3. $\forall X \in E \quad f(X) \neq 0$, $\quad g$ непр. $\implies \dfrac{1}{g}$ непр.
4. $g$ как в предыдущем пункте, $\quad f$ непр. $\implies \dfrac{f}{g}$ непр.

## 78. $F : E \to \mathbb{R}^q, E \subset \mathbb{R}^n, F = (f_1, \ldots, f_q)$; определение непрерывности $F$ в $X_0$; $F$ непр. в $X_0 \iff f_\nu$ непр. в $X_0$

**Определение 34.** $F : E \to \mathbb{R}^{q \ge 2}$
Будем говорить, что $F$ непр. в $X_0$, если $\exists \lim\limits_{X \to X_0} F(X) = F(X_0)$

**Утверждение 25.** $F$ непр. в $X_0 \iff \forall \nu = 1, \ldots, q \quad f_\nu(X)$ непр. в $X_0$

**Доказательство.**

- $F$ непр. $\implies \exists \lim\limits_{X \to X_0} f_\nu(X) = \alpha_\nu = f_\nu(X_0)$
- В обратную сторону – так же

□

## 79. $F : E \to \mathbb{R}^q, \Phi : G \to \mathbb{R}^l, F$ непр. в $X_0, \Phi$ непр. в $Y_0 \implies \Phi(F)$ непр. в $X_0$

**Теорема 34.** $A \in E \subset \mathbb{R}^{n \ge 1}$ – т. сг. $E$, $\quad \alpha \in G \subset \mathbb{R}^{k \ge 1}$ – т. сг. $G$, $\quad F : E \to \mathbb{R}^k$
$\forall x \in E \quad F(X) \in G$, $\quad F(A) = \alpha$, $\quad F$ непр. в $A$, $\quad \Phi : G \to \mathbb{R}^{l \ge 1}$, $\quad \Phi$ непр. в $\alpha$
$K : E \to \mathbb{R}^l$, $\quad K(X) = \Phi\big(F(X)\big)$
Тогда $K$ непр. в $A$

**Доказательство.** Выпишем определение непрерывности $\Phi$ (подставив определение предела):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mu > 0 : \forall Y \in B_\mu(\alpha) \cap G \quad \|\Phi(Y) - \Phi(\alpha)\|_l < \varepsilon \tag{74}$$

Сделаем то же самое для $F$ (взяв $\mu$ в качестве $\varepsilon$):

$$\exists\, \delta > 0 : \forall X \in B_\delta(A) \cap E \qquad \underbrace{\|F(X) - F(A)\|_k < \mu}_{\iff F(X) \in B_\mu\left(F(A)\right) \overset{\text{def}}{=} B_\mu(\alpha) \cap G} \quad \underset{(74)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \ \forall X \in B_\delta(A) \cap E \quad \left\|\Phi\big(F(X)\big) - \Phi(\alpha)\right\|_l < \varepsilon \underset{\left(F(A) \overset{\text{def}}{=} \alpha\right)}{\iff} \left\|\Phi\big(F(X)\big) - \Phi\big(F(A)\big)\right\|_l < \varepsilon \iff$$

$$\iff \|K(X) - K(A)\|_l < \varepsilon$$

□

## 80. Определение внутренних, внешних, граничных точек

**Определение 35.** $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}, \qquad X_0, X_1, X_2 \in E$

- $X_0$ будем называть внутренней точкой $E$, если $\exists\, B_r(X_0) \subset E$
- $X_1$ будем назвывать внешней точкой $E$, если $B_\delta(X_1) \cap E = \emptyset$
- $X_2$ будем называть граничной точкой $E$, если она не внутренняя и не внешняя

## 81. Первая теорема Вейерштрасса

**Теорема 35.** $K$ – компакт в $\mathbb{R}^{n \geq 1}, \qquad f : K \to \mathbb{R}^n, \qquad f$ непр. во всех т. сг.
Тогда $f$ ограничена, т. е.

$$\exists\, M : \forall X \in K \quad |f(X)| \leq M$$

**Доказательство.** Пусть это не так, т. е.

$$\forall N \geq 2 \quad \exists\, X_N \in K : |f(X_N)| > |f(X_1)| + ... + |f(X_{N-1})| + N, \qquad |f(X_1)| > 1 \tag{75}$$

Отсюда следует, что $\forall p \neq q \quad X_p \neq X_q$ (т. к. каждая следующая больше предыдущей)
Поскольку они все принадлежат $K$, а $K$ – ограниченное мн-во, то

$$\exists\, R > 0 : \forall N \quad \|X_N\| \leq R$$

Значит, можно применить принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, \{X_{N_m}\}_{m=1}^\infty \\ \exists\, X_* \end{array}\right\} : X_{N_m} \xrightarrow[mm \to \infty]{} X_* \tag{76}$$

**Очевидно, что.** $X_{N_m} \in K$

Поскольку они все различны,

$$X_* \text{ – т. сг. } K \underset{(K \text{ замкн.})}{\Longrightarrow} X_* \in K$$

Возьмём $\varepsilon = 1$
В силу непрерывности $f$ в $X_*$,

$$\exists\, \delta_0 : \forall X \in K \cap B_{\delta_0}(X_*) \quad |f(X) - f(X_*)| < 1 \tag{77}$$

При этом,

$$(76) \implies \exists\, N_1 : \forall m > N_1 \quad X_{N_m} \in B_{\delta_0}(X_*)$$

То есть,

$$\forall m > N_1 \quad |f(X_{N_m}) - f(X_*)| < 1 \tag{78}$$

$$|f(X)| \overset{\triangle}{\leq} |f(X) - f(X_*)| + |f(X_*)| \underset{(77)}{<} 1 + |f(X_*)|$$

Возьмём $N_0 > 1 + |f(X_*)|$
Возьмём $N_{m_0} := \max\{\, N_0, N_1 + 1 \,\}$

$$|f(X_{N_{m_0}})| \underset{(75)}{>} N_{m_0} \overset{\text{def}}{\geq} N_0 \overset{\text{def}}{>} |f(X_*)| + 1$$

С другой стороны,

$$|f(X_{N_{m_0}})| \underset{(78)}{<} |f(X_*)| + 1$$

□

## 82. Вторая теорема Вейерштрасса

**Теорема 36.** $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $\quad f : K \to \mathbb{R}^n$ непр. во всех т. сг. $K$
Тогда

$$\exists\, X_-, X_+ \in K : \forall X \in K \quad f(X_-) \leq f(X) \leq f(X_+)$$

**Доказательство.**

- $X_+$
  Пусть такого $X_+$ не существует
  По первой теореме Вейерштрасса,

  $$\exists\, M : \forall X \in K \quad f(X) \leq M$$

  То есть,

  $$\sup_{X \in K} f(X) := M_0 \leq M \overset{\text{def}}{\iff} \forall X \in K \quad f(X) \leq M_0 \tag{79}$$

  Положим

  $$\varphi(X) := \frac{1}{M_0 - f(X)}$$

  $$(79) \implies \forall X \in K \quad \varphi(X) > 0$$

  Значит, $\varphi$ непр. во всех т. сг. $K$
  По первой теореме Вейерштрасса, $\varphi$ ограничена, т. е.

  $$\exists\, L : \forall X \in K \quad \varphi(X) \leq L \overset{\text{def}}{\iff} \frac{1}{M_0 - f(X)} \leq L \iff M_0 - f(X) \geq \frac{1}{L} \iff f(X) \leq M_0 - \frac{1}{L} \implies$$

  $$\implies \sup_{X \in K} f(X) \leq M_0 - \frac{1}{L} \overset{\text{def}}{\iff} \sup f(X) \leq \sup f(X) - \frac{1}{L} \text{ – } \lightning$$

- $X_-$
  Рассмотрим $g(X) := -f(X)$
  По только что доказанному,

  $$\exists\, X_- : g(X) \leq g(X_-) \iff -f(X) \leq -f(X_-) \iff f(X) \geq f(X_-)$$

□

## 83. Определение $f'_x(X_0)$; пример $\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$

**Обозначение.** $e_k := (0, ..., \underset{k\text{ место}}{1}, ..., 0)$

**Определение 36.** $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $\quad X = (x_1, ..., x_n) \in E$ – внутр. т. $E$, $\quad f : E \to \mathbb{R}$

$$\exists\, \delta : \forall \underset{h\neq 0}{|h| < \delta} \quad \forall k = 1, ..., n \quad X + he_k \in E$$

Частной производной по переменной $x_k$ называется

$$f'_{x_k}(X) := \lim_{h\to 0} \frac{f(X+he_k) - f(X)}{h}$$

**Замечание.** Рассмотрим $g(y) := (x_1, ..., \underset{k\text{ место}}{y}, ..., x_n)$, $\qquad y \in (x_k - \delta, x_k + \delta)$

$$g'(x_k) = f'_{x_k}(X)$$

**Пример.**

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq \mathbb{O}_2 \\ f(\mathbb{O}_2) = 0 \end{cases}$$

Найдём частные производные в $\mathbb{O}_2$:

$$\begin{cases} (0,0) + he_1 = (h, 0) \\ (0,0) + he_2 = (0, h) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(\mathbb{O}_2 + he_1) - f(\mathbb{O}_2)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \\ \frac{f(\mathbb{O}_2 + he_2) - f(\mathbb{O}_2)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \end{aligned}\right\} \implies \exists\, f'_{x_1}(\mathbb{O}_2),\ f'_{x_2}(\mathbb{O}_2)$$

Положим $X_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

**Очевидно, что.** $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{O}_2$

$$f(X_n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

## 84. Определение дифференцируемости функции, дифференциал функции; непрерывность дифференцируемой функции

**Определение 37.** $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 1}$, $\quad X \in E$ – внутр. т., $\quad f : E \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что $f$ дифференцируема в $X$, если

$$\exists\, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} : \forall \begin{cases} H \in \mathbb{R}^2 \\ X + H \in E \\ H = (h_1, ..., h_n) \end{cases} \qquad f(X+H) - f(X) = a_1h_1 + ... + a_nh_n + r(H)$$

$$\frac{r(H)}{\|H\|} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0$$

**Определение 38.** Дифференциалом функции $f$ в точке $X$ при значении $H$ называется

$$f(X+H)-f(X)=f'_{x_1}(X)h_1+\dots\dots+f'_{x_n}(X)h_n+r(H)$$

**Обозначение.** $\mathrm{d}\ f(X,H)\coloneqq f'_{x_1}(X)h_1+\dots\dots+f'_{x_n}(X)h_n+r(H)$

**Теорема 37.** $f$ диффер. в $X\implies f$ непр. в $X$ и

$$\forall k=1,\dots,n\quad \exists\, f'_{x_k}(X)=a_k$$

**Доказательство.**

- Непрерывность
  Выберем $\varepsilon=1$
  По определению дифференцируемости и предела функции,

$$\exists\,\delta>0:\forall 0<\|H\|<\delta\quad \left|\frac{r(H)}{\|H\|}\right|<1$$

  То есть,

$$|r(H)|<\|H\| \tag{80}$$

  Обозначим $A\coloneqq\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}$
  Применим неравенство КБШ:

$$|a_1h_1+\dots+a_nh_n|\le A\,\|H\| \tag{81}$$

$$|f(X+H)-f(X)|\underset{f\text{ дифф.}}{=}|a_1h_1+\dots+a_nh_n+r(H)|\overset{\Delta}{\le}|a_1h_1+\dots+a_nh_n|+|r(H)|\underset{(80),(81)}{\le}$$
$$\le A\,\|H\|+\|H\|\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0$$

  Тем самым, непрерывность доказана

- Соотношение
  Возьмём $\forall k=1,\dots,$
  Пусть $H_k\coloneqq he_k$
  Тогда $\|H_k\|=|h|$
  Воспользуемся определением дифференцируемости:

$$f(X+H_k)-f(X)=a_kh+r(H_k)\implies\frac{f(X+H_k)-f(X)}{h}=a_k+\frac{r(H)}{h}$$

  По определению дифференцируемости,

$$\left|\frac{r(H)}{h}\right|=\left|\frac{r(H_k)}{\|H_k\|}\right|\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

  Значит,

$$\frac{f(X+H_k)-f(X)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}a_k$$

  Этот предел и определяет частную производную

□

## 85. Производная по направлению; градиент

**Определение 39.** $\nu\in\mathbb{R}^{n\ge 2},\qquad \|\nu\|=1,\qquad \nu=a_1e_1+\dots+a_ne_n$

Частной производной по направлению $\nu$ называется

$$f'_\nu(X) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h\nu)-f(X)}{h}$$

**Определение 40.** $f$ дифференцируема в $X$
Градиентом $f$ называется вектор-строка

$$\operatorname{grad} f \coloneqq \Big(f'_{x_1}(X), \dots\dots, f'_{x_n}(X)\Big)$$

## 86. Необходимое условие локального экстремума

**Теорема 38.** $X \in E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $\quad X$ – внутр. т., $\quad f : E \to \mathbb{R}$, $\quad f$ дифференц. в $X$
$X$ – т. лок. экстремума

$$\implies \operatorname{grad} f(X) = \mathbb{O}_n$$

**Доказательство.** Возьмём $\forall 1 \leq k \leq n$
Вспомним определние частной производной:

$$\exists\, \delta > 0 : \forall |h| < \delta \quad X + he_k \in E$$

Зафиксируем $k$ (так, что $x_k$ – т. лок. экстремума) и рассмотрим функцию

$$g(y) \coloneqq f(x_1, \dots, \underset{k \text{ место}}{y}, \dots, x_n), \qquad y \in (x_k - \delta, x_k + \delta)$$

$$\exists\, g'(x_k) = f'_{x_k}(X)$$

По теореме Ферма,

$$g'(x_k) = 0 \implies f_{x_k}(X) = 0$$

$\square$

## 87. Дифференцируемость отображения; $F = [f_1 \dots f_q], F$ дифференцируема в $X \iff f_\nu$ дифференцируема в $X, 1 \leq \nu \leq q$

**Определение 41.** $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 1}$, $\quad x \in E$ – внутр. т., $\quad F : E \to \mathbb{R}^{k\geq 2}$
Говорят, что $F$ дифференцируемо, если

$$\forall \underset{H \neq \mathbb{O}_n}{H \in \mathbb{R}^n} : X + H \in E \qquad F(X+H) - F(X) = L(X) + r(H) \tag{82}$$

где $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – линейное и

$$\frac{\|r(H)\|_k}{\|H\|_n} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0$$

**Напоминание.** $L$ – линейное, если

$$\exists\, A_{k\times n} : L(H) = AH \tag{83}$$

Представим $F$ в виде

$$F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(Y) \\ . \\ . \\ . \\ f_k(Y) \end{bmatrix}$$

**Утверждение 26.** $F$ дифференцируемо в $X$ тогда и только тогда, когда каждая координатная функция $f_1, \dots, f_k$ дифференцируема в $X$

**Доказательство.**

- $\implies$
  Пусть $F$ дифференцируема
  Умножим (82) слева на $e_j$:

$$e_j\big(F(X+H)-F(X)\big)=e_jL(H)+e_jr(H)\underset{(83)}{=}e_j(AH)+e_jr(H) \tag{84}$$

Посмотрим на левую часть:

$$e_j\big(F(X+H)-f(X)\big)=e_j\cdot\left(\begin{bmatrix}f_1(X+H)\\ .\\ .\\ .\\ f_k(X+H)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f_1(X)\\ .\\ .\\ .\\ f_k(X)\end{bmatrix}\right)=f_j(X+H)-f_i(X) \tag{85}$$

Обозначим

$$A:=\begin{bmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ . & . & .\\ a_{k1} & ... & a_{kn}\end{bmatrix}$$

Умножим $e_j$ на $A$:

$$e_jA=(0,...,1,...,0)\cdot\begin{bmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ . & . & .\\ a_{k1} & ... & a_{kn}\end{bmatrix}=(a_{j1},...,a_{jn})$$

Обозначим $H:=\begin{bmatrix}h_1\\ .\\ .\\ .\\ h_n\end{bmatrix}$

Посмотрим на правую часть (84):

$$e_j(AH)=(a_{j1},...,a_{jn})\cdot\begin{bmatrix}h_1\\ .\\ .\\ .\\ h_n\end{bmatrix}=a_{j1}h_1+...+a_{jn}h_n \tag{86}$$

Обозначим $r(H):=\begin{bmatrix}r_1(H)\\ .\\ .\\ .\\ r_n(H)\end{bmatrix}$

$$e_jr(H)=r_j(H) \tag{87}$$

Соберём всё это вместе:

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{f_j(X+H)-f_j(X)}_{(85)}=\underbrace{a_{j1}h_1+...+a_{jn}h_n}_{(86)}+\underbrace{r_j(H)}_{(87)}\\ \\ \dfrac{|r_j(H)|}{\|H\|_n}\le\dfrac{\|r(H)\|_k}{\|H\|_n}\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0\end{array}\right\}\implies f_j\ \text{дифф. в } X\implies$$

$$\implies\forall l=1,...,n\quad\exists f'_{jx_i}(X)=a_{jl}$$

$$A=\begin{bmatrix}f'_{1x_1}(X) & ... & f'_{1x_n}(X)\\ . & . & .\\ f'_{kx_1}(X) & ... & f'_{kx_n}(X)\end{bmatrix}$$

Эта матрица называется матрицей Якоби

**Обозначение.** $A=\mathcal{D}F(X)$

Теперь можно записать:

$$F(X+H)-F(X)=\mathcal{D}F(X)H+r(H)$$

- $\Longleftarrow$

Пусть все координатные функции дифференцируемы
Запишем это при помощи градиента:

$$f_l(X+H)-f_l(X)=\operatorname{grad} f_l(X)H+r_l(H),\qquad 1\le l\le k$$

Запишем это всё в столбик:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X+H)-f_l(X)=\operatorname{grad} f_1(X)H+r_1(H) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_k(X+H)-f_k(X)=\operatorname{grad} f_k(X)H+r_k(H) \end{array}\right\}\iff$$

$$\iff F(X+H)-F(X)=\begin{bmatrix}\operatorname{grad} f_1(X)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \operatorname{grad} f_k(X)\end{bmatrix}\cdot H+\begin{bmatrix}r_1(H)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ r_k(H)\end{bmatrix}$$

Заметим, что это – матрица Якоби, т. е.

$$F(X+H)-F(X)=\mathcal{D}F(X)+\begin{bmatrix}r_1(H)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ r_k(H)\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\|H\|_n}\cdot\left\|\begin{bmatrix}r_1(H)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ r_k(H)\end{bmatrix}\right\|_k=\sqrt{\underbrace{\left(\frac{r_1(H)}{\|H\|_n}\right)^2}_{\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0}+\dots\dots+\underbrace{\left(\frac{r_k(H)}{\|H\|_n}\right)^2}_{\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0}}\xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{}0$$

Значит, $F$ диффер. в $X$

□

## 88. Матрица Якоби; $\mathcal{D}\big(\Phi(F)\big)=\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}F$

**Лемма 1** (важное неравенство).

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{l1} & \dots & a_{ln}\end{bmatrix}\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}b_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_k\end{bmatrix}}^{:=B}=\begin{bmatrix}a_{11}b_1+\dots+a_{1k}b_k\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{l1}b_1+\dots+a_{lk}b_k\end{bmatrix}\implies$$

$$\implies\left\|\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{bmatrix}\right\|_l=\sqrt{\left(a_{11}b_1+\dots+a_{1k}b_k\right)^2+\dots\dots\dots+\left(a_{l1}b_1+\dots+a_{lk}b_k\right)^2}\underset{\text{КБШ}}{\le}$$

$$\le\sqrt{\left(a_{11}^2+\dots+a_{1k}^2\right)\left(b_1^2+\dots+b_k^2\right)+\dots\dots\dots+\left(a_{l1}^2+\dots+a_{lk}^2\right)\left(b_1^2+\dots+b_k^2\right)}=\|B\|_k\cdot\sqrt{\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{k}a_{\nu\mu}^2}$$

**Теорема 39** (дифференцируемость суперпозиции). $X_0$ – внутр. т. $E\subset\mathbb{R}^{n\ge1}$, $\qquad Y_0$ – внутр. т. $G\subset\mathbb{R}^{k\ge1}$

$F : E \to \mathbb{R}^k, \qquad F(X_0) = Y_0, \qquad \forall X \in E \quad F(X) \in G, \qquad \Phi : G \to \mathbb{R}^{l \geq 1}, \qquad T(X) = \Phi\big(F(X)\big)$
$F$ дифф. в $X_0$, $\qquad \Phi$ дифф. в $Y_0$

$$\implies \begin{cases} T \text{ дифф. в } X_0 \\ \mathcal{D}T(X_0) = \mathcal{D}\Phi(Y_0)\mathcal{D}F(X_0) \end{cases}$$

**Доказательство.** Запишем то, что нам нужно рассмотреть:

$$\begin{aligned} T(X_0 + H) - T(X_0) &\overset{\text{def}}{=} \Phi\big(F(X_0+H)\big) - \Phi\big(F(X_0)\big) = \Phi\big(F(X_0+H)\big) - \Phi(Y_0) = \\ &= \Phi\Big(Y_0 + \big(F(X_0+H) - Y_0\big)\Big) - \Phi(Y_0) = \Phi\Big(Y_0 + \big(F(X_0+H) - F(X_0)\big)\Big) - \Phi(Y_0) \end{aligned} \tag{88}$$

Обозначим $\Lambda := F(X_0 + H) - F(X_0)$

**Очевидно, что.** $\Lambda \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_k$

Воспользуемся дифференцируемостью $\Phi$:

$$\Phi(Y_0 + \Lambda) - \Phi(Y_0) = \mathcal{D}\Phi(Y_0)\Lambda + r(\Lambda), \qquad \frac{\|r(\Lambda)\|_l}{\|\Lambda\|_k} \xrightarrow[\Lambda \to \mathbb{O}_k]{} 0 \tag{89}$$

Положим

$$\frac{r(\Lambda)}{\|\Lambda\|_k} := \delta(\Lambda) \in \mathbb{R}^l, \qquad \delta(\mathbb{O}_k) := \mathbb{O}_l$$

Воспользуемся дифференцируемостью $F$:

$$\Lambda \overset{\text{def}}{=} F(X_0 + H) - F(X_0) = \mathcal{D}F(X_0)H + \rho(H), \qquad \frac{\|\rho(H)\|_k}{\|H\|_n} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0 \tag{90}$$

$$\begin{aligned} T(X_0+H) - T(X_0) &\underset{(88)}{=} \Phi\Big(Y_0 + \underbrace{\big(F(X_0+H) - F(X_0)\big)}_{\overset{\text{def}}{=}\Lambda}\Big) - \Phi(Y_0) \underset{(89)}{=} \mathcal{D}\Phi(Y_0)\Lambda + r(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \\ &= \mathcal{D}\Phi(Y_0)\Big(F(X_0+H) - F(X_0)\Big) + r(\Lambda) \underset{(90)}{=} \mathcal{D}\Phi(Y_0)\Big(\mathcal{D}F(X_0)H + \rho(H)\Big) + r(\Lambda) = \\ &= \mathcal{D}\Phi(Y_0)\mathcal{D}F(X_0)H + \underbrace{\mathcal{D}\Phi(Y_0)\rho(H) + r(\Lambda)}_{:=r_1(H)} \end{aligned}$$

Если мы докажем, что $r_1(H)$ обладает свойствами остатка, то теорема будет доказана

$$\begin{aligned} \|r_1(H)\|_l = \|\mathcal{D}\Phi(Y_0)\rho(H) + r(\Lambda)\|_l &\overset{\triangle}{\leq} \|\mathcal{D}\Phi(Y_0)\rho(H)\|_l + \|r(\Lambda)\|_l \overset{\text{def}}{=} \\ &= \|\mathcal{D}\Phi(Y_0)\rho(h)\|_l + \big\|\|\Lambda\|_k \cdot \delta(\Lambda)\big\|_l = \|\mathcal{D}\Phi(Y_0)\rho(H)\|_l + \|\Lambda\|_k \cdot \|\delta(\Lambda)\|_l \end{aligned} \tag{91}$$

Обозначим

$$\rho(H) := \begin{bmatrix} \rho_1(H) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_k(H) \end{bmatrix}, \qquad \Phi := \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_l \end{bmatrix}$$

Применим важное неравенство:

$$\|\mathcal{D}\Phi(Y_0)\rho(H)\|_l \leq \|\rho(H)\|_k \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{k}\Big(\varphi'_{\nu\ y_\mu}(Y_0)\Big)^2}}_{:=C} \tag{92}$$

$$\|\Lambda\|_k \underset{(90)}{\leq} \|\mathcal{D}F(X_0)H\|_k + \|\rho(H)\|_k$$

Обозначим

$$F := \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k \end{bmatrix}$$

Применим важное неравенство:

$$\|\mathcal{D}F(X_0)H\|_k \leq \|H\|_n \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{n}\left(f'_{\alpha\ x_\beta}(X_0)\right)^2}}_{:=K}$$

Таким образом,

$$\|\Lambda\|_k \leq K\,\|H\|_n + \|\rho(H)\|_k$$

$$\|\Lambda\|_k \cdot \|\delta(\Lambda)\|_l \leq K\,\|H\|_n \cdot \|\delta(\Lambda)\|_l + \|\rho(H)\|_k \cdot \|\delta(\Lambda)\|_l \tag{93}$$

Поделим (92) и (93) на $\|H\|$:

$$\begin{cases} \dfrac{\|\mathcal{D}\Phi(Y_0)\rho(H)\|_l}{\|H\|_n} \leq \dfrac{C\,\|\rho(H)\|_l}{\|H\|_n} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \qquad \text{(т. к. } \rho(H) \text{ – остаток)} \\ \\ \dfrac{\|\Lambda\|_k \cdot \|\delta(\Lambda)\|_l}{\|H\|_n} \leq \dfrac{\left(K\,\|H\|_n + \|\rho(H)\|_k\right)\cdot\|\delta(\Lambda)\|_l}{\|H\|_n} = F\,\|\delta(\Lambda)\|_l + \dfrac{\|\rho(H)\|_k}{\|H\|_n}\cdot\|\delta(\Lambda)\|_l \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \end{cases} \tag{94}$$

Получили, что все части $\dfrac{\|r_1(H)\|_l}{\|H\|_n}$ стремятся к нулю при $H \to \mathbb{O}_n$

Значит, это – остаток, и теорема доказана □

## 89. Достаточное условие дифференцируемости функции

**Обозначение.** $\Pi(a_1, a_2, ..., b_1, b_2) := \{\, X = (x_1, ..., x_n) \mid a_1 < x_1 < a_2, \ldots\ldots, b_1 < x_n < b_2 \,\}$

**Обозначение.** $(x_1, ..., x_n)^T := \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$

**Теорема 40.** $X_0 \in E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$ – внутр. т., $\quad f : E \to \mathbb{R}, \quad B_\delta(X_0) \subset E$
$\forall j = 1, ..., n \quad \forall X \in B_\delta(X_0) \quad \exists\, f'_{x_j}(X), \quad f'_{x_j}(X)$ непр. в $X_0$
Тогда $f$ дифференцируема в $X_0$

**Доказательство.** Пусть $X_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)^T$

$$\Pi_0 := \Pi(x_1^0 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}, x_1^0 + \frac{\delta}{\sqrt{n}}, \ldots\ldots\ldots, x_n^0 - \frac{\delta}{\sqrt{n}}, x_n^0 + \frac{\delta}{\sqrt{n}}) \subset B_\delta(X_0)$$

Обозначим $\delta_1 := \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$

Пусть

$$H := \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{bmatrix}, \qquad H \neq \mathbb{O}_n, \qquad |h_j| \leq \delta_1 \quad 1 \leq j \leq n$$

Положим

$$\begin{cases} H_0 \coloneqq H \\ H_1 \coloneqq (0, h_2, ..., h_n)^T \\ H_2 \coloneqq (0, 0, h_3, ..., h_n)^T \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H_{n-1} \coloneqq (0, ..., 0, h_n)^T \\ H_n \coloneqq \mathbb{O}_n \end{cases}$$

Тогда

$$f(X_0 + H) - f(X_0) = f(X_0 + H_0) - f(X_0 + H_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big( f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1}) \Big) \tag{95}$$

Рассмотрим выражение $f(X_0 + H_K) - f(X_0 + H_{k+1})$
Имеем:

$$\begin{cases} X_0 + H_k = (x_1^0, ..., x_k^0, x_{k+1}^0 + h_{k+1}, ..., x_n^0 + h_n)^T \\ X_0 + H_{k+1} = (x_1^0, ..., x_k^0, x_{k+1}^0, x_{k+2}^0 + h_{k+2}, ..., x_n^0 + h_n)^T \end{cases} \tag{96}$$

Отвюда следует, что разность $f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1})$ можно рассматривать как функцию $g_k$ от аргумента $x_{k+1} \coloneqq x_{k+1}^0 + h_{k+1}$ при $x_{k+1}^0 - \delta_1 < x_{k+1} < x_{k+1}^0 + \delta_1$
По определению частной производной, данная функция $g_k(x_{k+1})$ имеет производную, именно, при указанных значениях $x_{k+1}$ имеем

$$g_k'(x_{k+1}) = \Big( f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1}) \Big)'_{k+1} \tag{97}$$

Поэтому к функции $g_k$ применима теорема Лагранжа
Значит, найдутся $c_{k+1}, \quad 0 < |c_{k+1}| < |h_{k+1}|, \quad c_{k+1} \cdot h_{k+1} > 0$, такие что

$$g_k(x_{k+1}^0 + h_{k+1}) - g_k(x_{k+1}^0) = g_k'(x_{k+1}^0 + c_{k+1}) \cdot h_{k+1} \tag{98}$$

Функция $f(X_0 + H_{k+1})$, в силу (96), не зависит от аргумента $x_{k+1}$, поэтому $f_{k+1}'(X_0 + H_{k+1}) = 0$, и тогда (97) влечёт

$$g_k'(x_{k+1}^0 + c_{k+1}) = f_{k+1}'(x_1^0, ..., x_k^0, x_{k+1}^0 + c_{k+1}, ..., x_n^0 + h_n)^T \tag{99}$$

Теперь

$$f(X_0 + H) - f(X_0) \underset{(95)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \Big( f(X_0 + H_k) - f(X_0 + H_{k+1}) \Big) \underset{(98),(99)}{=}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} f_{x_{k+1}}'(x_1^0, x_{k+1}^0 + c_{k+1}, \dots\dots, x_n^0 + h_n)^T \cdot h_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}'(x_1^0, x_j^0 + c_j, \dots\dots, x_n^0 + h)^T \cdot h_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}'(X_0) h_j + \sum_{j=1}^{n} \Big( f_{x_j}'(x_1^0, ..., x_j^0 + c_j, ..., x_n^0 + h_n)^T - f_{x_j}'(x_1^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0)^T \Big) h_j \tag{100}$$

Поскольку $|c_j| < |h_j|$, если $h_j \neq 0$, то $(c_1, ..., c_n)^T \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n$
Непрерывность фкнций $f_{x_j}'(X)$ в точке $X_0$ влечёт

$$0 \leq \frac{|f_{x_j}'(x_1^0, ..., x_j^0 + c_j, ..., x_n^0 + h_n) - f_{x_j}'(X_0)| \cdot |h_j|}{\|H\|^n} \leq |f_{x_j}'(x_1^0, ..., x_j^0 + c_j, ..., x_n^0 + h_n) - f_{x_j}'(X_0)| \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0$$

Вместе с (100) это влечёт, что $f$ дифференцируема в точке $X_0$ $\square$