Оглавление

1 Геодезическая кривизна **2**
1.1 Геодезические линии 2
1.2 Полугеодезическая параметризация 3

Глава 1

Геодезическая кривизна

Теорема 1.

$$k_g = \frac{(r''_{tt}, r'_t, n)}{|r'_t|^3}$$

Доказательство. Пусть $r''_{tt} = r''_1 + r''_2$, где $r''_1 \perp n, \quad r''_2 \parallel n$

$$r' \perp n$$

$$r''_{tt} \times r'_t = \underbrace{r''_1 \times r'}_{\parallel n} + \underbrace{r''_2 \times r'}_{\perp n}$$

$$k = \frac{|r'' \times r'|}{|r'|^3}$$

Утверждение 1.

$$k_g \overset{?}{=} \frac{\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}(r'' \times r')}{|r'|^3} = \frac{(r'' \times r') \cdot n}{|n| \cdot |r'|^3} = \frac{(r'', r', n)}{|r'|^3}$$

Доказательство. Кривизна — проекция r'' на вектор нормали к кривой, а значит,

$$r'' \times r' \parallel \overrightarrow{b} \quad \Longrightarrow (r'' \times r') \times r' \perp \overrightarrow{b}, \perp \overrightarrow{v} \quad \Longrightarrow \perp \overrightarrow{n}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{k} = \frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}$$

$$|(r'' \times r') \times r'| = |r'' \times r'| \cdot |r'| \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{1, \text{ т. к.} \alpha = \pi/2}$$

$$\Longrightarrow k = \frac{|r'' \times r'|}{|r'|^3} = \frac{|(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}$$

$$\text{Пр}_{\text{кас. пл.}} \overrightarrow{k} = \frac{\Big((r''_1 + r''_2) \times r'\Big) \times r'}{|r'|^4} = \underbrace{\frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}}_{\perp n} + \underbrace{\frac{\overbrace{(r''_2 \times r')}^{\perp n} \times \overbrace{r'}^{\perp n}}{|r'|^4}}_{\parallel n} = \frac{(r'' \times r') \times r'}{|r'|^4}$$

$$k_g = \left|\text{Пр}_{\text{кас. пл.}} \overrightarrow{k}\right| = \frac{|r''_1 \times r'| \cdot |r'|}{|r'^4|} = \frac{|r''_1 \times r'}{|r'|^3} = \frac{(r'', r', r)}{|r'|^3}$$

□

□

1.1. Геодезические линии

Теорема 2. Задана кривая на поверхности. Следующие определения геодезических линий равносильны:

1. $k_g = 0$;
2. вектор главной нормали к кривой параллелен нормали к поверхности;
3. соприкасающаяся плоскость кривой содержит нормаль к поверхности;
4. спрямляющая плоскость кривой является касательной плоскостью к поверхности;
5. k — min для всех кривых в данном направлении;

(6). локально кратчайшие линии.

Доказательство. Очевидно (действительно 😐)
Шестое — не доказываем. □

Пример (геодезичсекая линия на сфере). Геодезические на сфере — большие окружности (те, у которых центр совпадает с центром сферы).
Самолёты летают по ним.

1.2. Полугеодезическая параметризация

Теорема 3. В любой точке в любом направлении можно провести ровно одну геодезичсекую (локально).

Доказательство. Условие геодезичсекой — $k_g = 0$, т. е. $(r''_{tt}, r'_t, n) = 0$ — это дифур второго порядка. Надо доказать, что у него существует единственное решение.

Утверждение 2 (из дифуров). $y'' = f(x, y, y')$, $\quad f$ непр. по каждому аргументу
$\implies$ решение существует и единственно (локально).

Нам надо разрешить дифур относительно r''.

$$\begin{cases} u = t \\ v = \varphi(t) \end{cases}$$

Нужно доказать, что существует такая φ.

$$r'_t(u, v) = r_u \cdot u' + r_v \cdot v' = r_u + r_v\varphi'$$

$$r''_{tt} = r_{uu}u'^2 + 2r_{uv}u'v' + r_{vv}v'^2 + r_u u'' + r_v v'' = r_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2 + r_v\varphi''$$

$$0 = (r'', r', n) = (r_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2 + r_v\varphi'', r_u + r_v\varphi', n) =$$
$$= \underbrace{(r''_{uu} + 2r_{uv}\varphi' + r_{vv}\varphi'^2, r_u + r_v\varphi', n)}_{I} + \underbrace{(r_v\varphi'', r_u + r_v\varphi', n)}_{II}$$

$$II = \varphi'' \cdot (r_v, r_u + \cancel{r_v\varphi'}, n) = -\varphi'' \cdot (r_u, r_v, n)$$

(т. к. $(r_v, r_u + r_v\varphi', n) = (r_v, r_u, n) + \underbrace{(r_v, r_v\varphi', n)}_{0,\ \text{т. к.} r_v \| r_v\varphi'})$

$$\boxed{\varphi'' = \frac{I}{(r_u, r_v, n)}}$$

$(r_u, r_v, n) \neq 0$ (т. к. r_u, r_v, n — базис, т. к. повехность регулярная).
Значит, у такого дифура есть ровно одно решение с начальными данными

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \varphi'(t_0) = \varphi_1 \end{cases}$$

□

Полугеодезическая параметризация: $E = 1,\ F = 0,\ G > 0$

Теорема 4. Полугеодезическая параметризация всегда существует (локально).

Доказательство.

$$(r_u \cdot r_v)_u = \underbrace{r_{uu} \cdot r_v}_{0} + r_u \cdot r_{uv} = \cancel{f'' \cdot g'} + f' \cdot r_{uv} = \underbrace{f' \cdot (f')_v}_{0} = 0$$

$r_{uu} = f'' \parallel$ вектору главной нормали для f (т. к. f в натуральной параметризации) $\parallel$ нормали к поверхности (т. к. f — геодезическая)
r_v — касательный вектор.
На первой лекции доказывали полезную лемму:

$$|f'| = 1 \implies \frac{\partial f'}{\partial v} \perp f'$$

$$F = r_u \cdot r_v = \mathrm{const}$$

Но при $u = 0 \quad F = 0$

$$\implies F = 0 \text{ всюду}$$

□

Доказательство (пункта (5) теоремы про геодезические)**.**
Рассмотрим полугеодезическую параметризацию.
Возьмём точки A, B на геодезической.
Пусть $\big(u(t), v(t)\big)$ — внутренние координаты некоторой кривой, соединяющей A и B. Её длина:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\underset{1}{E}u'^2 + 2\underset{0}{F}u'v' + Gv'^2}\, \mathrm{d}\,t = \int_{t_0}^{t_1} u'^2 + \underset{>0}{G}v'^2\, \mathrm{d}\,t \geq \int_{t_0}^{t_1} u'^2\, \mathrm{d}\,t =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} u'\, \mathrm{d}\,t = u(t_1) - u(t_0) = \text{ длина геодезической}$$

Мы доказали, что геодезическая — кратчайшая. В другую сторону — без доказательства. □