Оглавление

Глава 1

Многочлены

1.1 Рациональные дроби

Далее в этом паранрафе рассматриваются многочлены и рациональные функции над некоторым полем K

Определение 1. Рациональная дробь $\dfrac{F}{G}$ называется несократимой, если $(F, G) = 1$

Определение 2. Многочлен называется нормализованным, если его старший коэффициент равен единице

Рациональная дробь $\dfrac{F}{G}$ называется нормализованной, если $(F, G) = 1$ и G нормализованный

Свойство. Любую рациональную функцию можно записать в виде нормализованной дроби

Пример.

$$\frac{x^2 + x}{2x^2 - 2} = \frac{x(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}x}{x - 1}$$

Определение 3. Рациональная дробь $\dfrac{F}{G}$ называется правильной, $\deg F < \deg G$

Свойства.

1. Если $\dfrac{F_1}{G_1} = \dfrac{F_2}{G_2}$ и $\dfrac{F_1}{G_1}$ – правильная, то $\dfrac{F_2}{G_2}$ – тоже правильная

   Доказательство.

   $$F_1 G_2 = G_1 F_2 \implies \deg F_1 + \deg G_2 = \deg G_1 + \deg F_1 \implies \deg G_2 - \deg F_2 = \\ = \deg G_1 - \deg F_1 > 0$$

   □

2. Сумма и произведение правильных дробей – правильные дроби (т. е. правильные дроби образуют кольцо)

Доказательство. $\dfrac{F_1}{G_1}, \dfrac{F_2}{G_2}$ – правильные дроби
$a = \deg F_1, \quad b = \deg G_1, \quad c = \deg F_2, \quad d = \deg G_2$
$a < b, \quad c < d$

- Сумма: $\deg(F_1G_2 + G_1F_2) \le \max\{\underbrace{a+d}_{<b+d}, \underbrace{b+c}_{<b+d}\} \le b + d = \deg(G_1, G_2)$
- Произведение: $\deg(F_1F_2) = a + c < b + d = \deg(G_1G_2)$

□

3. Любую рациональную дробь можно единственным образом представить в виде суммы многочленов и правильной дроби

Доказательство.

- Существование: дробь $\dfrac{F}{G}$
  Поделим F на G с остатком: $F = GQ + R, \quad \deg R < \deg G$
  Выделим целую часть: $\dfrac{F}{G} = Q + \dfrac{R}{G}, \quad \dfrac{R}{G}$ – правильная
- Единственность: пусть $P_1 + \dfrac{R_1}{S_1} = P_2 + \dfrac{R_2}{S_2}, \quad P_1 \ne P_2$
  Перенесём: $P_1 - P_2 = \underbrace{\dfrac{R_2}{S_2} - \dfrac{R_1}{S_1}}_{\text{правильная дробь}} \implies P_1 - P_2 = \dfrac{R}{S}, \quad \deg S > \deg R$
  Умножим на знаменатель: $(P_1 - P_2) \cdot S = R$
  $\deg\Big((P_1 - P_2) \cdot S\Big) \ge \deg S > \deg R$ – $\lightning$

□

Лемма 1 (сумма дробей с взаимно простыми знаменателями)**.** Пусть $\dfrac{F}{G_1G_2...G_k}$ – правильная дробь, G_i попарно взаимно просты. Тогда $\dfrac{F}{G_1G_2...G_k}$ можно представить в виде $\dfrac{F_1}{G_1} + \dfrac{F_2}{G_2} + ... + \dfrac{F_k}{G_k}$, где все слагаемые правильные, причём такое представление единственно

Доказательство.

- Существование: индукция по k
  - База: $k = 2$
    $\dfrac{F}{G_1G_2}$
    Существуют $A_1, A_2 : A_1G_1 + A_2G_2 = 1$ (по теореме о линейном представлении НОД)
    Умножим это на F: $(A_1F)G_1 + (A_2F)G_2 = F$
    Пусть $\widetilde{F_2} = A_1F, \quad \widetilde{F_1} = A_2F$. Тогда $\widetilde{F_2}G_1 + \widetilde{F_1}G_2 = F \implies \dfrac{\widetilde{F_2}}{G_2} + \dfrac{\widetilde{F_1}}{G_1} = \dfrac{F}{G_1G_2}$
    Представим $\dfrac{\widetilde{F_1}}{G_1}$ и $\dfrac{\widetilde{F_2}}{G_2}$ в виде:
    $$\begin{cases} \frac{\widetilde{F_1}}{G_1} = P_1 + \frac{F_1}{G_1} \\ \frac{\widetilde{F_2}}{G_2} = P_2 + \frac{F_2}{G_2} \end{cases}, \text{ где } \frac{F_1}{G_1}, \frac{F_2}{G_2} \text{ – правильные дроби}$$
    $$\frac{F}{G_1G_2} = P_1 + P_2 + \frac{F_1}{G_1} + \frac{F_2}{G_2}$$

$$P_1 + P_2 = \underbrace{\frac{F}{G_1G_2} - \frac{F_1}{G_1} - \frac{F_2}{G_2}}_{\text{правильн.}}$$

$P_1 + P_2$ – правильн. $\implies P_1 + P_2 = 0$

– Переход: $k \to k+1$

$\dfrac{F}{G_1 ... G_k G_{k+1}}$

Пусть $G = G_1 ... G_k \implies (G, G_{k+1}) = 1 \implies \exists H, F_{k+1} : \dfrac{F}{G_1 ... G_k G_{k+1}} = \dfrac{H}{G_1 ... G_k} + \dfrac{F_{k+1}}{G_{k+1}}$ – применяем предположение индукции

- Единственность:
  Пусть $\dfrac{F_1}{G_1} + \dfrac{F_2}{G_2} + ... + \dfrac{F_k}{G_k} = \dfrac{H_1}{G_1} + ... + \dfrac{H_k}{G_k}$
  Докажем, что $F_1 = H_1$:

$$\frac{F_1 - H_1}{G_1} = \frac{H_2 - F_2}{G_2} + ... + \frac{H_k - F_k}{G_k}$$

$$\frac{F_1 - H_1}{G_1} = \frac{(H_2 - F_2) \cdot \prod_{\substack{i\neq 1 \\ i \neq 2}} G_i + ... + (H_k - F_k) \cdot \prod_{\substack{i\neq 1 \\ i \neq k}} G_i}{\prod_{i \neq 1} G_i}$$

$$(F_1 - H_1) G_2 ... G_k = (H_2 - F_2) G_1 \cdot \prod_{\substack{i\neq 1 \\ i \neq 2}} G_i + ... + (H_k - F_k) G_1 \cdot \prod_{\substack{i\neq 1 \\ i \neq k}} G_i$$

$$(F_1 - H_1) \underbrace{G_2 ... G_k}_{\text{вз. просты}} \vdots G_1 \implies F_1 - H_1 \vdots G_1 \implies (F_1 - H_1) = G_1 \cdot K \implies$$

$$\implies \deg(F_1 - H_1) \geq \deg G_1 \xRightarrow[\text{прав. дробь}]{} F_1 = H_1$$

□

Определение 4. Рациональная дробь называется примарной, если она имеет вид $\dfrac{F}{P_n}$, где P – нормализованный и неприводимый

Пример. $\dfrac{x^2 + x + 1}{(x+1)^3}$ – примарная

Лемма 2 (сумма примарных дробей)**.** Любую правильнцю дробь можно представить в виде суммы правильных примарных дробей

$$\frac{F_1}{P_1^{S_1}} + ... + \frac{F_k}{P_k^{S_k}}, \quad P_i \text{ различны}$$

Причём такое представление единственно

Доказательство.

- Существование: $\dfrac{F}{G}$ – правильная нормализованная дробь

$$G_1 = P_1^{S_1} \cdot ... \cdot P_k^{S_k}, \quad P_i \text{ – различные неприводимые нормализованные дроби}$$

$$\frac{F}{G} = \frac{F}{P_1^{S_1} \cdot \ldots \cdot P_k^{S_k}}$$

Применяем лемму 1 к $G_i = P_i^{S_i}$

- Единственность: пусть есть два представления

$$\frac{F_1}{P_1^{S_1}} + \ldots + \frac{F_k}{P_k^{S_k}} = \frac{H_1}{P_1^{t_1}} + \ldots + \frac{H_k}{P_k^{t_k}}$$

$$\frac{F_1 P_1^{t_1} - H_1 P_1^{S_1}}{P_1^{S_1+t_1}} + \ldots + \frac{F_k P_k^{t_k} - H_k P_k^{S_k}}{P_k^{S_k+t_k}} = 0$$

Получили представление нуля в виде суммы дробей с попарно простыми знаменателями, значит, по лемме 1 все слагаемые – нули

$$\forall i \quad \frac{F_i P_i^{t_i} - H_i P_i^{S_i}}{P_i^{S_i+t_i}} = 0 \implies F_i P_i^{t_i} = H_i P_i^{S_i} \implies \frac{F_i}{P_i^{S_i}} = \frac{H_i}{P_i^{t_i}}$$

□

Определение 5. Дробь называется простейшей, если она имеет вид $\frac{F}{P^n}$, где P – неприводимый нормализованный, $\deg F < \deg P$

Пример. $\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$ – примарная, **не** простейшая
$\frac{5}{(x+1)^3}$ – простейшая

Простейшие над $\mathbb{C}$: $\frac{A}{(x-a)^n}$

Простейшие над $\mathbb{R}$: $\frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, где x^2+px+q не имеет вещественных корней

Пример. $\frac{x}{x^2+1}$ – простейшая над $\mathbb{R}$, **не** простейшая над $\mathbb{C}$

Лемма 3 (разложение примарной дроби в сумму простейших)**.** Правильная примарная дробь $\frac{F}{P^n}$ может быть представлена в виде суммы правильных простейших дробей со знаменателем P^i, причём такое представление единственно

Доказательство.

- Существование: индукция по n
  - База $n = 1$:
    $\frac{F}{P}$ – простейшая правильная $\implies \deg F < \deg P$
  - Переход $n \to n+1$:
    Дробь $\frac{F}{P^{n+1}}$
    Делим F на P с остатком: $F = PQ + R, \quad \deg R < \deg P$

$$\frac{F}{P^{n+1}} = \frac{PQ+R}{P^{n+1}} = \frac{Q}{P^n} + \frac{R}{P^{n+1}}, \qquad \frac{R}{P^{n+1}} \text{ – простейшая, правильная}$$

$\dfrac{Q}{P^n} = \dfrac{F}{P^{n+1}} - \dfrac{R}{P^{n+1}}$ – правильная
Применяем индукционное предположение

– Единственность: пусть есть 2 представления
Рассмотрим их разность

$$\frac{T_1}{P} + \ldots + \frac{T_n}{P^n} = \frac{H_1}{P} + \ldots + \frac{H_n}{P^n}, \quad T_i \neq 0, \quad H_i \neq 0$$

$$\frac{T_1 - H_1}{P} + \ldots + \frac{T_n - H_n}{P^n} = 0, \quad \left.\begin{matrix} \deg T_1 < \deg P \\ \deg H_1 < \deg P \end{matrix}\right\} \implies \deg(T_i - H_i) < \deg P$$

Обозначим $F_i \coloneqq T_i - H_i$

$$\frac{F_1}{P} + \frac{F_2}{P^2} + \ldots + \frac{F_k}{P^k} = 0$$

$$\underbrace{F_1 P^{k-1} + F_2 P^{k-2} + \ldots + F_{k-1} P}_{\vdots P} + F_k = 0$$

$$F_1 P^{k-1} + \ldots + F_{k-1} P \vdots P \implies \left.\begin{matrix} F_k \neq 0 \\ F_k \vdots P \end{matrix}\right\} \implies \deg F_k \geq \deg P - \lightning$$

□

Теорема 1 (разложение дроби в сумму простейших). Правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших, причём такое представление единственно

Доказательство.

- Существование: правильную дробь можно представить в виде суммы примарных, а примарную – в виде суммы простейших

- Единственность: пусть есть 2 представления

$$\left(\frac{T_{11}}{P_1} + \frac{T_{12}P_1^2}{+}\ldots\right) + \left(\frac{T_{21}}{P_2} + \frac{T_{22}}{P_2^2} + \ldots\right) + \ldots = \left(\frac{H_{11}}{P_1} + \frac{H_1 2}{P_1^2} + \ldots\right) + \left(\frac{H_{21}}{P_2} + \frac{H_{22}}{P_2^2} + \ldots\right) + \ldots$$

Обозначим $F_{ij} \coloneqq T_{ij} - H_{ij}$

$$\left.\begin{matrix} \deg T_{ij} < \deg P_i \\ \deg H_{ij} < \deg P_i \end{matrix}\right\} \implies \deg F_{ij} < \deg P_i \implies \frac{F_{ij}}{P_i^j} \text{ – простейшая}$$

$$\left(\frac{F_{11}}{P_1} + \frac{F_{12}}{P_1^2} + \ldots\right) + \left(\frac{F_{21}}{P_2} + \frac{F_{22}}{P_2^2} + \ldots\right) = 0$$

Сумма в i-й скобке правильная, $\dfrac{F_i}{P_i^{N_i}}$ – примарная

$$\frac{F_1}{P_1^{N_1}} + \frac{F_2}{P_2^{N_2}} + \ldots = 0$$

Разложение в сумму примарных удинственно, значит $F_i = 0$
Рассмотрим i-ю скобку:

$$\frac{F_{i1}}{P_i} + \frac{F_{i2}}{P_i^2} + \ldots + \frac{F_{iN_i}}{P_i^{N_i}} = 0$$

Разложение примарной дроби $\dfrac{0}{P_i^{N_i}}$ в сумму простейших единственно, значит $F_{ij} = 0$

□