Оглавление

Глава 1

Теория групп

1.1 Прямое произведение подгрупп

Определение 1. G – группа, $H_1, ..., H_k$ – нормальные подгруппы G
Говорят, что G является (внутренним) прямым произведением $H_1, ..., H_k$, если

1. Любой элемент G можно единственным образом представить в виде $g = h_1 h_2 ... h_k$, где $h_i \in H_i$
2. $\forall_{h_i \in H_i,\ h_j \in H_j} \quad i \neq j \qquad h_i h_j = h_j h_i$

Обозначение. $G = H_1 \times ... \times H_k$

Другое название. G разложена в произведение подгрупп

Лемма 1 (нормальные подгруппы с единичным пересечением). G – группа, $H \lhd G$, $K \lhd G$, $H \cap K = \{ e \}$
Тогда элементы . . . .

Теорема 1 (прямое произведение нескольких подгрупп). G – группа, $H_1 \lhd G, \ldots, H_k \lhd G$

$$\forall i \quad H_i \cdot ... \cdot H_{i-1} \cap H_i = \{ e \}$$

$$H_1 H_2 ... H_k = G$$

Тогда $G = H_1 \times ... \times H_k$

Доказательство. Докажем, что $H_i \cap H_j = \{ e \}$:
Пусть $j < i$
$H_j \subset H_1 ... H_j ... H_{i-1}$, т. к. $h_j = e ... e h_j e ... e$
$\implies H_j \cap H_i = \{ e \} \implies$ элементы H_i и H_j коммутируют
. . . . ∎

Теорема 2 (разложение циклической группы в прямое произведение двух подгрупп). Пусть G – циклическая, $|G| = m^n$, НОД$(m, n) = 1$
Тогда G можно разложить в прямое произведение подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}_m$ и $\mathbb{Z}_n$

Определение 2. Группа называется примарной, если она изоморфна $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_{p^n}$, где $p \in \mathbb{P}$

Замечание. Теорема о линейном представлении НОД верна для нескольких чисел:

$$\forall a_1, ..., a_k \quad \exists t_1, ..., t_k : t_1 a_1 + ... + t_k a_k = \text{НОД}(()a_1, ..., a_k)$$