Оглавление

Глава 1

Общий алгоритм решения

Алгоритм.

1. ОДЗ:
   (a) Школьное ОДЗ (подкоренные выражения, знаменатели, логарифмы)
   (b) В зависимости от вида уравнения:
      - Если уравнение содержит y', пишем $x \not\equiv C$
      - Если уравнение в симметрической форме, находим особые точки (в них уравнения нет):
      $$\begin{cases} M(x,y) = 0 \\ N(x,y) = 0 \end{cases}$$
   (c) Плохие границы (G^* и B^*):
      - Нули множителей при производной
   (d) Хорошие границы ($\widehat{G}$ и $\widehat{B}$):
      - Нестрогие неравенства в школьном ОДЗ (равенства из них)
2. Определяем тип уравнения
3. Решаем в соответствии с алгоритмом для нужного типа
4. Характеризуем граничные решения:
   - Теоремы единственности (если применимы)
   - Пусть $y = \psi(x)$ – граничное решение, а $y = \varphi(x, C)$ – общее
     Ищем C_* такое, что $\forall x_* \quad \psi(x_*) = \varphi(x_*, C_*)$
     – Если C_* нашлось и конечно, то решение частное
     – Если C_* не нашлось или бесконечное, то решение особое
5. Решаем ЗК

Особые случаи.

1. Замена переменных:
   - Выписываем три замены:
     (a) Прямая:
     $$x = u(x,y), \qquad y = v(x,y)$$
     (b) Производная (если необходимо) или дифференциал:
     $$x' = ..., \quad y' = ... \qquad \text{или} \qquad \mathrm{d}\,x = ..., \quad \mathrm{d}\,y = ...$$
     (c) Обратная:
     $$u = ..., \qquad v = ...$$

- Пишем ОДЗ и на прямую и на обратную замены
  Если оно меньше $\widetilde{G}$ или $\widetilde{B}$, то:
  - Если “отрезается” часть $\widehat{G}$ или $\widehat{B}$ (хорошей границы), то это может быть граничным решением – нужно проверять отдельно
  - Если в ОДЗ входят неравенства вида $u \succ 0$, то см. пункт 2

2. Полуплоскости
   Применяется, если:

   - В ОДЗ на замену входят неравенства вида $u(x) \succ 0$
   - В ходе решения получили множителем $\operatorname{sign} x$

   Порядок действий:

   (a) Проверяем инвариантность **исходного** уравнения относительно u или x

   > **Примечание.** Если получили несколько “знакозависимых” переменных, то проверяем инвариантность относительно обеих сразу. Если её нет, то относительно каждой по отдельности

   > **Замечание.** Здесь надо учитывать, что $y' = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}$, т. е. y' **не** инвариантна относительно x

   - Если инвариантность есть:
     i. Пишем “Пусть $u > 0$” или “Пусть $x > 0$”
     ii. Решаем в этом случае
     iii. Пишем “Сделаем замену $x = -\widetilde{x}$. Так как уравнение инвариантно относительно u (или x), получим то же самое уравнение”
     iv. В ответе вместо x пишем $|x|$ (или $|u|$ вместо u)
   - Если инвариантности нет:
     - В случае $u(x) \succ 0$ в ОДЗ:
       i. Пишем “Пусть $u > 0$”
       ii. Решаем в этом случае
       iii. Пишем “Пусть $u < 0$”
       iv. Решаем в этом случае
       v. В ответ попадают оба решения (каждое со своей ОДЗ)
     - В случае $\operatorname{sign} x$:
       i. Обозначаем $\sigma \coloneqq \operatorname{sign} x$
       ii. Решаем, считая σ за константу
       iii. В ответе σ не должно быть (скорее всего, она будет множителем при $|x|$ – тогда просто пишем x)

3. Все логарифмы собираем под один. Константу заносим туда же:

$$\ln x + \ln y + C = \ln(xyC)$$

4. Чтобы корень назвать новой буквой, надо, чтобы подкоренное выражение **линейно** зависело от старой переменной

5. Чтобы проинтегрировать рациональную дробь, её нужно разложить на простейшие