Оглавление

Глава 1

Дифференциальная геометрия кривых

1.1 Вектор-функция

Замечание. Все функции, которые будут в курсе, будут предполагаться достаточно гладкими (т. е. нужная производная всегда существует и непрерывна)

Определение 1. $f : [a, b]$ (можно считать $[0, 1]$) $\to \mathbb{R}^3$ (непр.; дифф. настолько, насколько нам надо) – вектор-функция
$f([a, b])$ – кривая; $f(a)$ – начало; $f(b)$ – конец

Определение 2. $A = \lim\limits_{t \to t_0} f(t), \quad A \in \mathbb{R}^3$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |f(\vec{t}) - A| < \varepsilon$$

Операции с вектор-функциями.

- $\left(\vec{(f)} + \vec{(g)}\right)(t) := f(\vec{t}) + g(\vec{t})$
- $(\alpha \cdot \vec{f})(t) = \alpha f(\vec{t})$
- – $\vec{f} \cdot \vec{g}(t) = \left(f(\vec{t}), g(\vec{t})\right)$ – скалярное произведение
  – $\vec{f} \times \vec{g}(t) = f(\vec{t}) \times g(\vec{t})$ – векторное произведение
  – $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})(t) = \left(f(\vec{t}), g(\vec{t}), h(\vec{t})\right)$ – смешанное произведение

  Утверждение 1. Эти операции перестановочны с пределом:

  $$\lim_{t \to t_0} (f \times g)(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right) \times \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right)$$

Доказательство.

$$\vec{f(t)} = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big)$$

$$\vec{g(t)} = \Big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\Big)$$

$$f \times g = (f_2g_3 - f_3g_2; f_3g_1 - f_1g_3; f_1g_2 - f_2g_1)$$

$$\lim_{t\to t_0}(f\times g)(t) \stackrel{?}{=} \left(\lim_{t\to t_0}(f_2g_3 - f_3g_2)(t); \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = (\widetilde{f_2}\widetilde{g_3} - \widetilde{f_3}\widetilde{g_2}; \ldots\ldots\ldots\ldots) =$$
$$= (\widetilde{f_1}; \widetilde{f_2}; \widetilde{f_3}) \times (\widetilde{g_1}; \widetilde{g_2}; \widetilde{g_3})$$

$$\lim_{t\to t_0}\Big(f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t)\Big) = \underbrace{\lim_{t\to t_0} f_2(t)}_{=\widetilde{f_2}} \lim_{t\to t_0} g_3(t) - \lim_{t\to t_0}(t) \lim_{t\to t_0} f_3g_3(t)$$

$\square$

- $\alpha(t) \cdot \vec{f(t)}$

Почему предел можно брать по координатам?. $f(t) = \Big(f_1(t); f_2(t); f_3(t)\Big)$

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = A = (A_1, A_2, A_3) \iff \lim_{t\to t_0} f_i(t) = A_i \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies |f_i(t) - A_i| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Доказательство.

- $\Longleftarrow$
$$|\vec{f(t)} - A| = \sqrt{\Big(\underbrace{f_1(t) - A_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{f_2(t) - A_2}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{f_3(t) - A_3}_{<\frac{\varepsilon}{3}}\Big)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3}} < \varepsilon$$

- $\Longrightarrow$
Допустим противное:
$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 \quad \exists t_\delta : |t_\delta - t_0| < \delta; \quad |f_1(t_\delta) - A_1| \geq \varepsilon_0$$

$\square$

Определение 3. $f(t)$ непр. в t_0, если $f(t_0) = \lim_{t\to t_0} f(t)$

Определение 4. $\vec{f}'(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

Утверждения.

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(\alpha\vec{f})' = \alpha'\vec{f} + \alpha\vec{f}'$
3. $(\vec{f}\vec{g})' = \vec{f}'\vec{g} + \vec{f}\vec{g}'$
4. $(\vec{f}\times\vec{g})' = \vec{f}'\times\vec{g} + \vec{f}\times\vec{g}'$

Доказательство.

$$(f\times g)'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)\times g(t)-f(t_0)\times g(t_0)}{t-t_0}=$$
$$=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)\times g(t)-f(t_0)\times g(t)+f(t_0)\times g(t)-f(t_0)\times g(t_0)}{t-t_0}=$$
$$=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\times g(t)\right)+f(t_0)\times\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}=f'(t_0)\times g(t_0)+f(t_0)\times g'(t_0)$$

□

5. $(f,g,h)'=(f',g,h)+(f,g',h)+(f,g,h')$

Утверждение, которое не переносится на вектор-функции.

Теорема 1 (Лагранжа). $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), \qquad \exists\, c\in[a,b]$

Не работает в векторном случае

Лемма 1. $|\vec{f}|=\mathrm{const}\iff\vec{f}'\perp\vec{f}$

Доказательство.

$$|\vec{f}|=\mathrm{const}\iff(\vec{f},\vec{f})=\mathrm{const}\iff\frac{\mathrm{d}\ f}{\mathrm{d}\ t}(f,f)=0\iff 2(f,f')=0\iff f\perp f'$$

□

1.1.1 Параметризация и перепарамаетризация

$\vec{f}$ называется параметризацией кривой

Определение 5 (перепараметризация). $f:[a,b]\to\mathbb{R}^3, \qquad g:[c,d]\to\mathbb{R}^3$
$\vec{f}$ и $\vec{g}$ – параметризации одной кривой, если

$$\exists\ \underset{\substack{\alpha\text{ непр.}\\ \alpha(a)=c\\ \alpha(b)=d\\ \alpha\text{ строго возрастает}}}{\alpha:[a,b]\to[c,d]}\ :f(t)=g\big(\alpha(t)\big)\quad\forall t\in[a,b]$$

Кривая $\equiv$ класс эквиваентности вектор-фукнций

1.2 Касательный вектор

Определение 6. $\vec{f}'(t_0)$ называется касательным вектором

Утверждение 2. $f\sim g\implies f'(t_0)\parallel g'\big(\alpha(t_0)\big)$

Доказательство.

$$\vec{f}(t)=\vec{g}\big(\alpha(t)\big)$$
$$\vec{f}'(t)=\vec{g}'\big(\alpha(t)\big)\cdot\underbrace{\alpha'(t)}_{>0}\implies\vec{f}'(t)\upuparrows\vec{g}'\big(\alpha(t)\big)$$

□

Определение 7. Касательная – совокупность касательных векторов и противоположных им и $\vec{0}$

Определение 8. Регулярная параметризация – параметизация с требованием, чтобы $\vec{f}'(t)\neq\vec{0}\quad\forall t$

Пример. $f(t) = (t^2, t^3, t^4)$ – не регулярная

Определение 9. Кривая называется регулярной, если она допускает регулярную параметризацию

Теорема 2. δ – расстояние от $f(t)$ до касательной прямой

$$\implies \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)|} = 0$$

Касательная – единственная прямая, обладающая таким свойством

Замечание. Предел – синус зелёного угла на рис. 1.1

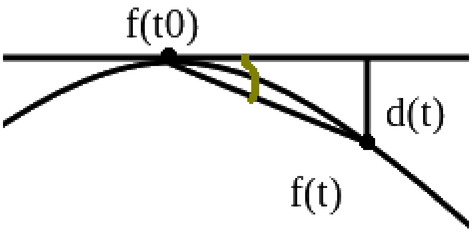

Рис. 1.1: Теорема о касательной

Уравнение касательной к прямой.

$$\vec{v}(t) = \vec{f}'(t_0) \cdot \tau + \vec{f}(t_0)$$

Доказательство (теоремы).

$$\delta(t) = \frac{\left|\Big(\big(f(t) - f(t_0)\big) \times f'(t_0)\Big) \times f'(t_0)\right|}{|f'(t_0)|^2}$$

Введём такую систему координат, чтобы касательная была осью OX:

$$\vec{f}(t) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big)$$

$$f'(t) = (1, 0, 0)$$

$$f(t_0) = (0, 0, 0)$$

Посчитаем двойное векторное произведение:

$$\Big(f(t) - f(t_0)\Big) \times f'(t_0) = \Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \times (1, 0, 0) = (0, f_3, -f_2)$$

$$(0, f_3, -f_2) \times (1, 0, 0) = (0, -f_2, f_3)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{f_2^2 + f_3^2}}{1}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\delta^2}{|f(t) - f(t_0)|^2} = \lim_{t \to t_0} \frac{f_2^2(t) + f_3^2(t)}{f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)}$$

Неопределённость – $(0, 0, 0)$

$$f_1(t_0) = f_2(t_0) = f_3(t_0)$$

$$\lim \ldots \underset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{t\to t_0} \frac{\cancel{2}f_2f_2' + \cancel{2}f_3f_3'}{\cancel{2}(f_1f_1' + f_2f_2' + f_3f_3')} \underset{\text{Лопиталь}}{=}$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{f_2'^2 + f_2f_2'' + f_3'^2 + f_3f_3''}{\underbrace{f_1'^2}_{\to 1} + \underbrace{f_1f_1'' + f_2'^2 + f_2f_2''}_{\to 0} + \underbrace{f_3'^2}_{\to 0} + \underbrace{f_3f_3''}_{\to 0}} = 0 \iff \overrightarrow{f}'(t) \parallel (1,0,0)$$

□