Оглавление

Глава 1

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 1. Пространством $\mathbb{R}^n$ называется множество всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел

Обозначение. $(x_1, ..., x_n)$ или $\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$

Обозначение. $\mathbb{O}_n = (0, ..., 0)$

Арифметические операции. Положим $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$c \in \mathbb{R} \qquad cX \coloneqq (cx_1, ..., cx_n)$$

Возьмём $Y = (y_1, ..., y_n)$

$$X + Y \coloneqq (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$-X = (-1)X = (-x_1, ..., -x_n)$$

$$Y - X = Y + (-1)X, \qquad X - X = \mathbb{O}_n$$

Скалярное произведение:

$$(X, Y) \coloneqq x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (Y, X)$$

Свойство. $(cX, Y) = (X, cY) = c(X, Y)$

Возьмём $W = (w_1, ..., w_n)$

Свойство. $(X, Y + W) = x_1(y_1 + w_1) + ... + x_n(y_n + w_n) = (X, Y) + (X, W)$

Определение 2 (норма)**.** $\|X\| \coloneqq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$

Замечание. $(X, X) = \|X\|^2$

Свойства.

1. $\|X\| \geq 0, \qquad \|X\| = 0 \iff X = \mathbb{O}_n$
2. $c \in \mathbb{R} \qquad \|cX\| = \sqrt{c^2 x_1^2 + ... + c^2 x_n^2} = |c|\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = |c| \cdot \|X\|$

Утверждение 1. неравенство КБШ

$$|(X, Y)| = |x_1 y_1 + ... + x_n y_n| \leq |x_1| \cdot |y_1| + ... + |x_n| \cdot |y_n| \underset{\text{(нер-во КБШ)}}{\leq} \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2} = \|X\| \cdot \|Y\|$$

Утверждение 2 (неравенство треугольника).

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \tag{1.1}$$

Доказательство. $X+Y \coloneqq U$

- Если $U = \mathbb{O}_n$, то (1.1) выполнено
- $U \neq \mathbb{O}_n \implies \|U\| > 0$
  Положим $t \coloneqq \|U\|, \quad W \coloneqq \frac{1}{t}U$
  $$\|W\| = \|\frac{1}{t}U\| = \frac{1}{t}\|U\| = 1 \tag{1.2}$$

$$\Big((X+Y)W\Big) = (X,W) + (Y,W) \implies \Big|((X+y)W)\Big| \leq \Big|(X,W)\Big| + \Big|(Y,W)\Big| \leq$$
$$\leq \|X\|\cdot\|W\| + \|Y\|\cdot\|W\| \underset{(1.2)}{=} \|X\| + \|Y\| \tag{1.3}$$

$$\Big((X+Y)W\Big) = (UW) = (U\frac{1}{t}U) \implies \frac{1}{t}(U,U) = \frac{1}{t}\|U\|^2 = \frac{1}{t}\cdot\|U\|\cdot\|U\| = \|U\| = \|X+Y\| \underset{3}{\Rightarrow} 1 \tag{1.4}$$

□

Утверждение 3. Пространство $\mathbb{R}^n$ является метрическим пространством

Доказательство. $X, Y \in \mathbb{R}^n$
Возьмём
$$d(X,Y) \coloneqq \|X-Y\| \tag{1.5}$$
$d(X,Y)$ будем называть расстоянием между X и Y
Проверим, что $d(X,Y)$ является метрикой:

- $d(X,Y) \geq 0, \qquad d(X,Y) = 0 \iff X = Y$
- $d(Y,X) = \|Y-X\| = \|(-1)(X-Y)\| = |-1|\cdot\|X-Y\| = d(X,Y)$
- Нужно проверить, что $d(X<Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$
  То есть, нужно проверить, что $\|X-Z\| \leq \|X-Y\| + \|Y-Z\|$:
  $$X - Z = (X-Y) + (Y-Z)$$
  $$\|X-Z\| \leq \|X-Y\| + \|Y-Z\|$$

□

Определение 3. $X \in \mathbb{R}^n, \qquad r > 0$
$B_r(X) = \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y-X\| = d(Y,X) < r \,\}$ – открытый шар
$\omega(X) = B_r(X)$ – окрестность

Напоминание. Рассмотрим последовтельность $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}, \quad Y_m \in \mathbb{R}^n$
$$Y_m = (y_{1m}, ..., y_{nm})$$
$X \in \mathbb{R}^n$
$$Y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} X \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists M : \forall m > M \quad d(Y_m, X) < \varepsilon \tag{1.6}$$

$X = (x_1, ..., x_n)$

Утверждение 4.
$$Y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} X \iff \forall k = 1, ..., n \quad y_{km} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k \tag{1.7}$$

Доказательство.

- $\implies$
  Возьмём $1 \le k \le n$
  Тогда
  $$|y_{km} - x_k| \le \sqrt{(y_{1m} - x_1)^2 + ... + (y_{nm} - x_n)^2} < \varepsilon \implies y_{km} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k$$
- $\impliedby$
  $$\forall k = 1, ..., n \quad \exists M_k; \forall m > M_k \quad |y_{km} - x_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \tag{1.8}$$
  Возьмём $M = \max\limits_{1\le k\le n} M_k$
  Тогда для $\forall m > M$ выполнено (1.8)
  $$\|Y_m - X\| = \sqrt{(y_{1m} - x)^2 + ... + (y_{nm} - x_n)^2} \underset{(1.8)}{<} \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + ... + \frac{\varepsilon^2}{n}}}_{n\text{ слагаемых}} = \varepsilon \tag{1.9}$$

$\square$

Определение 4. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad E \ne \emptyset, \qquad X_0 \in \mathbb{R}^n$
X_0 называется точкой сгущения, если
$$\forall \omega(X_0) \quad \exists \underset{X_1 \ne X_0}{X_1} \in E \cap \omega(X_0)$$
Если $X_* \in E$ **не** является точкой сгущения E, она называется изолированной точкой E, т. е.
X_* – изолированная, если
$$\exists \omega(X_*) : E \cap \omega(X_*) = \{ X_* \}$$

Определение 5. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad E \ne \emptyset$
Будем говорить, что множество E открыто, если
$$\forall X \in E \quad \exists \omega(X) : \omega(X) \subset E$$
Пустое множество считаем открытым

Очевидно, что. $\mathbb{R}^n$ открыто

Определение 6. $F \subset \mathbb{R}^n, \quad F \ne \emptyset$
F замкнуто, если $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто
В частности, $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ замкнуты

Теорема 1. Никакое подмножество $\mathbb{R}^n$, кроме $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$, не является одновременно открытым и замкнутым

Теорема 2. $F \subset \mathbb{R}^n, \quad F \ne \emptyset, \quad F \ne \mathbb{R}^n$
$$F \text{ замкнуто} \iff \forall X_0 \text{ – т. сг. } F \quad X_0 \in F \tag{1.10}$$

Доказательство.

- $\implies$
  Пусть F замкнуто, X_0 – т. сг. F
  Пусть $X_0 \notin F \implies X_0 \in \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F}_{\text{открытое}} \implies \exists \omega_0(X_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus F \implies \omega_0(X_0) \cap F = \emptyset \implies X_0$ – не т. сг.
  F – $\lightning$
- $\impliedby$
  Нужно доказать, что $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто
  Пусть это не так
  Тогда $\exists X_* \in \mathbb{R}^n \setminus F : \forall \omega(X_*) \quad \omega(X_*) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus F$

Возьмём $\omega_m(X_*) := B_{1/m}(X_*)$

$$\exists\, X_m \in \omega_m(X_*) : X_m \notin \mathbb{R}^n \setminus F$$

То есть,

$$X_m \in F \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{matrix} \|X_m - X_*\| < \frac{1}{m} \\ X_* \notin F \end{matrix}\right\} \implies X_* \text{ -- т. сг. } F$$

Но $X_* \notin F$ – $\lightning$

$\square$

Определение 7. $\overline{B_r}(X) = \{\, Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y - X\| \leq r \,\}$ – замкнутый шар
$S_r(x) = \{\, Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y - X\| = r \,\}$ – сфера

Утверждение 5. Открытый шар – открытое множество
Замкнутый шар и сфера – замкнутые множества

Определение 8. $E \subset \mathbb{R}^n$ Множество E называется ограниченым, если

$$\exists\, R > 0 : \forall x \in E \quad \|X\| \leq R$$

1.1 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса в пространстве $\mathbb{R}^n$

Теорема 3. $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}, \quad X_m \in \mathbb{R}^n, \qquad E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\, X_m \,\}$

$$\exists\, R : \forall m \quad \|X_M\| \leq R \tag{1.12}$$

$$\implies \begin{Bmatrix} \exists\, \{X_{m_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \\ \exists\, X_* \in \mathbb{R}^n \end{Bmatrix} : X_{m_\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} X_* \tag{1.13}$$

Доказательство. $X_m = (x_{1m}, ..., x_{nm})$

$$(1.12) \implies \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall m \geq 1 \quad |x_{km}| \leq R \tag{1.14}$$

Возьмём подпоследовательность $\{x_{1m}\}_{m=1}^{\infty}$ и применим принцип выбора Больцано-Вейерштрасса для вещественных чисел:

$$(1.14) \implies \begin{Bmatrix} \exists\, \{x_{1m_l}\}_{l=1}^{\infty} \\ \exists\, x_{1*} \in \mathbb{R} \end{Bmatrix} : x_{1m_l} \xrightarrow[l \to \infty]{} x_{1*} \tag{1.15}$$

Переобозначим $\{x_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ как $\{\, x_l \,\}$: $x_l = (x_{1l}, ..., x_{nl})$
Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{2l}\}_{l=1}^{\infty}$
Для неё справедливо соотношение $|x_{2l}| \leq R \quad \forall l$
Применим к неё принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\left.\begin{matrix} \exists\, \{x_{2l_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty} \\ \exists\, x_{2*} \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} : x_{2l_\mu} \xrightarrow[\mu \to \infty]{} x_{2*} \tag{1.16}$$

$$(1.15) \implies x_{1l_\mu} \xrightarrow[\mu \to \infty]{} x_{1*} \tag{1.17}$$

Ещё раз упростим обозначения: вместо x_{nl_μ} будем писать $x_{n\mu}$

. . . .

Дошли до подпоследовательности $\{x_q\}_{q=1}^{\infty}$
Уже существуют $x_{1*}, ..., x_{n-1,*}$ такие, что

$$x_{1q} \to x_{1*}, \ldots\ldots, x_{n-1,q} \to x_{n-1,*} \tag{1.18}$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{nq}\}_{q=1}^{\infty}$, $|x_{nq}| \leq R$ и применим принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\left.\begin{matrix} \exists \{x_{q_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \\ \exists x_{n*} \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} : x_{nq_\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_{n*} \tag{1.19}$$

$$(1.18), (1.19) \implies x_{1q_\nu} \to x_{1*}, \ldots\ldots, x_{nq_\nu} \to x_{n*} \tag{1.20}$$

$$(1.20) \implies X_{q_\nu} \to X_*, \qquad X_* = (x_{1*}, ..., x_{n*})$$

□

1.2 Предел функции в $\mathbb{R}^n$

$E \subset \mathbb{R}^n, \quad E \neq \emptyset, \qquad f : E \to \mathbb{R}$
$n \geq 2$
В таком случае будем говорить, что f – функция от n переменных
Её значение записывается в виде $f(x_1, ..., x_n)$, где $x_1, ..., x_n \in E$
Если $X = (x_1, ..., x_n)$, то можно писать $f(X)$

Определение 9. x_0 – точка сгущения E (не обязательно $\in E$), $\qquad A \in \mathbb{R}$

$$f(x) \xrightarrow[X\to X_0]{} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \omega(X_0) : \forall X \in \underset{X\neq X_0}{E \cap \omega(X_0)} \quad |f(X) - A| < \varepsilon \tag{1.21}$$

Лемма 1. X_0 – т. сг. E

$$\implies \exists \{X_m\}_{m=1}^{\infty} : \forall m \quad \begin{cases} X_m \in E \\ X_m \neq X_0 \end{cases} : X_m \xrightarrow[m\to\infty]{} X_0$$

Утверждения.

1. $f \to A, \quad c \in \mathbb{R} \implies cf \to A$
2. $f \to A, \quad g \to B \implies f + g \to A + B, \quad fg \to AB$
3. $g(x) \neq 0, \quad x \in E, \quad B \neq 0, \quad g \to B \implies \dfrac{1}{g} \to \dfrac{1}{B}$
4. $f \to A, \quad g$ как в 3 $\implies \dfrac{f}{g} \to \dfrac{A}{B}$

Определение 10. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \qquad q \geq 2, \qquad F : E \to \mathbb{R}^q$
Можно записать $F(X)$ как $F(X) = \Big(f_1(X), ..., f_q(X)\Big)$
$f_1, ..., f_q$ называются координатными функциями $F(X)$

Будем обозначать метрику в $\mathbb{R}^n$ как $\|X\|_n$, а метрику в $\mathbb{R}^q$ – как $\|F(X)\|_q$

Определение 11. X_0 – т. сг. $E \subset \mathbb{R}^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^q$

$$F(X) \xrightarrow[X\to X_0]{} \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \forall X \in E : \underset{X\neq X_0}{\|X - X_0\|_n < \delta} \quad \|F(X) - \alpha\|_q < \varepsilon \tag{1.22}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_q), \quad \alpha_\nu \in \mathbb{R}$

Утверждение 6.

$$F(x) \xrightarrow[X\to X_0]{} \alpha \iff \forall 1 \leq \nu \leq q \quad f_\nu(X) \xrightarrow[X\to X_0]{} \alpha_n \tag{1.23}$$

Доказательство.

- $\implies$

Воспользуемся соотношением (1.22):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f_\nu(X) - \alpha_\nu| \le \|F(x) - \alpha\|_q < \varepsilon \tag{1.24}$$

- $\Longleftarrow$

  Воспользуемся правой частью соотношения (1.23):

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \underset{X \ne X_0}{X \in E} : \|X - X_0\|_n < \delta_n \qquad |f_\nu(X) - \alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}} \tag{1.25}$$

  Положим $\delta = \min 1 \le \nu \le q \delta_\nu$

  $$\|F(x) - \alpha\|_q = \sqrt{\big(f_1(X) - \alpha\big)^2 + ... + \big(f_q(X) - \alpha_q\big)} \underset{(1.25)}{<} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{q} + ... + \frac{\varepsilon^2}{q}} = \varepsilon$$

$\square$

1.3 Непрерывность функции в точке

Определение 12. $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \ge 1, \qquad f : E \to \mathbb{R}^1, \qquad X_0 \in E$ – т. сг. E
Будем говорить, что f непрерывна в x_0, если $\exists \lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$

Свойства (непрервных в точке функций). $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \ge 1, \qquad X_0 \in E$ – т. сг. E

1. f непр. $\Longrightarrow$ cf непр.
2. f, g непр. $\Longrightarrow$ $f + g, fg$ непр.
3. $g(x) \ne 0 \quad \forall X \in E, \quad g$ непр. $\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{g}$ непр.
4. g как в 3 $\Longrightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ непр.

Определение 13. $F : E \to \mathbb{R}^q, \quad q \ge 2$
F непр. в X_0, если $\exists \lim\limits_{X \to X_0} F(X) = F(X_0)$

Утверждение 7. F непр. в X_0 $\iff$ $\forall n = 1, ..., q \quad f_\nu(X)$ непр. в X

Доказательство. F непр. $\Longrightarrow$ $\exists \lim\limits_{X \to X_0} f_\nu(X) = \alpha_\nu = f_\nu(X_0)$
В обратную сторону – так же $\square$