Оглавление

Глава 1

Криволинейный интеграл

Определение 1. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{n \geq 2}, \qquad \Gamma \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$
Γ будем называть разомкнутой кривой, если оно биективно

Образ $\Gamma([a,b])$ будем называть кривой и обозначать Γ

$$\mathtt{P} \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

Множество точек $\{\, \Gamma(t_k) \,\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть разбиением

1.1. Спрямляемые кривые

$$l\Big(\{\, \Gamma[m](t_k) \,\}_{k=1}^{\infty} \Big) \coloneqq \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\|_n$$

Рассмотрим величину

$$\sup_{\{\, \Gamma(t_k) \,\}} l\Big(\{\, \Gamma(t_k) \,\}_{k=1}^{\infty} \Big)$$

Если $\sup < \infty$, то Γ будем называть спрямляемой, а $\sup$ — длиной Γ

$$\Gamma_{[a,c]}(t) \coloneqq \Gamma(t)\Big|_{[a,c]}, \qquad \Gamma_{[c,b]}(t) \coloneqq \Gamma(t)\Big|_{[c,b]}$$

Утверждение 1. Если Γ спрямляема, то $\Gamma_{[a,c]}$ и $\Gamma_{[c,b]}$ тоже спрямляемы, и

$$l\Big(\Gamma([a,b])\Big) = l\Big(\Gamma([a,c])\Big) + l\Big(\Gamma([c,b])\Big)$$

Доказательство. Возьмём $c \in (t_{k_0}, t_{k_0+1})$

$$\|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| \leq \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(c)\| + \|\Gamma(c) - \Gamma(t_k)\|$$

$$l\Big(\{\, \Gamma(t_k) \,\}_{k=1}^{m} \Big) \leq l\Big(\{\, \Gamma(t_k) \cup \Gamma(c) \,\}_{k=1}^{\infty} \Big)$$

$$l\Big(\{\, \Gamma(t_k) \cup \Gamma(c) \,\} \Big) = l\Big(\{\, \Gamma(t_k) \,\}_{k=1}^{k_0} \cup \Gamma(c) \Big) + l\Big(\{\, \Gamma(t_k) \,\}_{k=k_0}^{m} \cup \Gamma(c) \Big)$$

....
TODO: Дописать доказательство $\square$

Определение 2. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Будем говорить, что Γ — C^1-кривая, если $\Gamma \in \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big)$

$$\Gamma(t) =: \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$

Γ — C^1 кривая, если $\gamma_k \in \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big) \quad \forall k = 1, \dots, n$

$$\mathcal{D}\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathcal{D}\Gamma(t)\| = \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n$$

Лемма 1. $F : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \qquad F \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Определим символ:

$$\int_a^b F(t)\, \mathrm{d}\, t := \begin{bmatrix} \int_a^b f_1(t)\, \mathrm{d}\, t \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}\, t \end{bmatrix}$$

Тогда справедливо соотношение:

$$\left\| \int_a^b F(t)\, \mathrm{d}\, t \right\| \le \int_a^b \|F(t)\|\, \mathrm{d}\, t$$

Доказательство. Будем считать, что $\int_a^b F(t)\, \mathrm{d}\, t \ne \mathbb{O}_n$ (иначе — очевидно)
Обозначим $q := \left\| \int_a^b F(t)\, \mathrm{d}\, t \right\| > 0$
Введём числа

$$\alpha_k := \int_a^b f_k(t)\, \mathrm{d}\, t, \qquad a_k := \frac{\alpha_k}{q}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n a_k \alpha_k \xlongequal{\text{def } a_k} \sum \frac{\alpha_k}{q} \alpha_k = \frac{1}{q} \sum \alpha_k^2 \xlongequal{\text{def } \alpha_k, q} \frac{q^2}{q} = q \tag{1.1}$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^n a_k \alpha_k \sum a_k \int_a^b f_k(t)\, \mathrm{d}\, t = \int_a^b \sum a_k f_k(t)\, \mathrm{d}\, t \underset{\text{КБШ}}{\le} \int_a^b \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum f_k^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\, t =$$

$$= \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_a^b \left(\sum f_k^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\, t = \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \|F(t)\|\, \mathrm{d}\, t \tag{1.2}$$

$$\sum a_k^2 \xlongequal{\text{def } a_k} \sum \frac{\alpha_k^2}{q^2} = \frac{1}{q^2} \sum \alpha_k^2 = \frac{q^2}{q^2} = 1 \tag{1.3}$$

$$(1.1), (1.2), (1.3) \implies \left\| \int_a^b F(t)\, \mathrm{d}\, t \right\| = q \le 1 \cdot \int_a^b F(t)\, \mathrm{d}\, t$$

□

Теорема 1. $\Gamma \in \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big)$

$$\implies l(\Gamma) = \int_a^b \|\lceil\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

Доказательство.

- $l \le \int$
  Пусть имеется любое разбиение любой Γ:

$$\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{\infty}$$

  Тогда

$$\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k) \\ \vdots \\ \gamma_n(t_[k+1]) - \gamma_n(t_k) \end{bmatrix} \xlongequal[\text{ф. Ньютона–Лейбница}]{} $$

$$= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_1'(t)\,\mathrm{d}\,t \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_n'(t)\,\mathrm{d}\,t \end{bmatrix} \xlongequal{\text{def} \int F} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\xRightarrow[\text{лемма}]{} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| = \left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t)\,\mathrm{d}\,t\right\| \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t \tag{1.4}$$

$$\implies \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| \le \sum \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}(t)\|\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

  Перепишем в обозначениях длины:

$$l\Big(\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{\infty}\Big) \le \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t \implies l(\Gamma) \le \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

- $l \ge \int$
  Т. к. $\Gamma \in C^1$,

$$\gamma_k' \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$$

  То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0: \quad \forall t'', t' \in [a,b] \quad \Big(|t'' - t'| < \delta \implies |\gamma_1'(t'') - \gamma_k'(t')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\Big), \qquad k = 1, \dots, n \tag{1.5}$$

$$\implies \sqrt{\Big(\gamma_1'(t'') - \gamma_1'(t')\Big)^2 + \dots + \Big(\gamma_n'(t'') - \gamma_n'(t')\Big)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}} \cdot n = \varepsilon \tag{1.6}$$

$$\iff \|\mathcal{D}\Gamma(t'') - \mathcal{D}\Gamma(t')\| < \varepsilon$$

$$\overset{\triangle}{\le} \Big|\,\|\mathcal{D}\Gamma(t'')\| - \|\mathcal{D}\Gamma(t')\|\,\Big| \le \|\mathcal{D}\Gamma(t'') - \mathcal{D}\Gamma(t')\| < \varepsilon \tag{1.7}$$

  Возьмём разбиение $\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{m}$ такое, что $t_{k-1} - t_k < \delta \quad k = 0, \dots, m-1$

Рассмотрим выражение

$$\Gamma(t_[k+1]) - \Gamma(t_k) - (t_{k+1}-t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k) = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_1'(t)\ \mathrm{d}\,t \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_n'(t)\ \mathrm{d}\,t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (t_{k+1}-t_k)\gamma_1'(t_k) \\ \vdots \\ (t_{k+1}-t_k)\gamma_n'(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\gamma_1'(t) - \gamma_1'(t_k)\Big)\ \mathrm{d}\,t \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\gamma_n'(t) - \gamma_n'(t_k)\Big)\ \mathrm{d}\,t \end{bmatrix} \xlongequal{\text{def} \int F} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) - \mathcal{D}\Gamma(t_k)\ \mathrm{d}\,t \tag{1.8}$$

Применим лемму:

$$\|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) - (t_{k+1}-t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t) + \mathcal{D}\Gamma(t_k)\|\ \mathrm{d}\,t \underset{(1.6)}{\le} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon\ \mathrm{d}\,t = \varepsilon(t_{k+1}+t_k)$$

$$\implies \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| \overset{\triangle}{\ge} \|(t_{k+1}-t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| - \varepsilon(t_{k+1}-t_k) \tag{1.9}$$

$$(t_{k+1}-t_k)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| = \sqrt{(t_{k+1}-t_k)^2\Big(\gamma_1'(t_k)\Big)^2 + \dots + (t_{k+1}-t_k)^2\Big(\gamma_n'(t_k)\Big)^2} \tag{1.10}$$

Если взять $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то

$$\|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \ge \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| - \|\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t)\| > \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| - \varepsilon$$

Проинтегрируем:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\|\ \mathrm{d}\,t > \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t - \varepsilon\int_{t_k}^{t_{k+1}}\ \mathrm{d}\,t$$

$$(t_{k+1}-t_k)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \ge \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t - \varepsilon(t_{k+1}-t_k) \tag{1.11}$$

$$(1.9), (1.10), (1.11) \implies \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| > \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t - \varepsilon(t_{k+1}-t_k) \tag{1.12}$$

$$\implies \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| > \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t - \varepsilon\sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k) = \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t - \varepsilon(b-a) \tag{1.13}$$

$$\iff l\Big(\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=0}^m) > \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t - \varepsilon(b-a)$$

$$\implies l(\Gamma) > \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t - \varepsilon(b-a)$$

$$\implies l(\Gamma) \ge \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\ \mathrm{d}\,t$$

□

1.2. Криволинейный интеграл первого рода

Определение 3. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \Gamma \in C^1, \qquad f \in \mathcal{C}\Big(\underset{(\text{образ})}{\Gamma}\Big)$

Криволинейным интегралом первого рода по кривой Γ называется

$$\int\limits_{\Gamma f(M)} \coloneqq \mathrm{d}\,l(M) \int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\, \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

Определение 4. $\Gamma_\circ : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad c_0 = a < c_1 < \dots < c_m = b$

$$\forall [c_k, c_{k+1}] \quad \Gamma_\circ([c_k, c_{k+1}]) - C^1\text{-кривая}$$

$f \in \mathcal{C}\Big(\Gamma_0\Big)$

Криволинейный интеграл первого рода для “кусочной” кривой определяется как

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) = \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\Gamma_0([c_k, c_{k+1}])} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M)$$

Свойства.

1. $\int\limits_\Gamma A\,\mathrm{d}\,l(M) = Al(\Gamma)$

Доказательство.

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k, \qquad \Gamma_k = \Gamma([c_{k-1}, c_k])$$

$$\int\limits_\Gamma A\,\mathrm{d}\,l(M) = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k}^A = \mathrm{d}\,l(M) \sum_{k=1}^m \int_{c_{k-1}}^{c_k} A\,\|\mathcal{D}\Gamma_k(t)\|\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=1}^m A \int_{c_{k-1}}^{c_k} \|\mathcal{D}\Gamma_k(t)\|\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \sum_{k=1}^m Al(\Gamma_k) = A \sum l(\Gamma_k) = Al(\Gamma)$$

$\square$

2. $\int\limits_\Gamma cf(M)\,\mathrm{d}\,l(M) = c\int\limits_\Gamma f(M)\,\mathrm{d}\,l(M)$

Доказательство.

$$\int\limits_\Gamma cf(M)\,\mathrm{d}\,l(M) = \int_a^b cf\big(\Gamma(t)\big)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t = c\int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t = c\int\limits_\Gamma f(M)\,\mathrm{d}\,l(M)$$

$\square$

3. $\int\limits_\Gamma \Big(f(M) + g(M)\Big)\,\mathrm{d}\,l(M) = \int\limits_\Gamma f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) + \int\limits_\Gamma (\,\mathrm{d}\,l(M) g(M))$

4. $f(M) \le g(M) \quad \forall M \in \Gamma$

$$\implies \int\limits_\Gamma f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) \le \int\limits_\Gamma g(M)\,\mathrm{d}\,l(M)$$

Доказательство.

$$f(M) \le g(M) \implies f\big(\Gamma(t)\big)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \le g\big(\Gamma(t)\big)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|$$

$\square$

5. $\Big|\int\limits_\Gamma f(M)\,\mathrm{d}\,l(M)\Big| \le \int\limits_\Gamma |f(M)|\,\mathrm{d}\,l(M)$

Доказательство.

- C^1-кривая

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) \right| = \left| \int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t \right| \le$$

$$\le \int_a^b \big|d\big(\Gamma(t)\big)\big| \cdot \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_{\Gamma} |f(M)|\,\mathrm{d}\,l(M)$$

- "кусочная" кривая

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \left| \int\limits_{\Gamma_k} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) \right| \le \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} |f(M)|\,\mathrm{d}\,l(M) = \int\limits_{\Gamma} |f(M)|\,\mathrm{d}\,l(M)$$

□

1.2.1. Сумма Римана для криволинейного интеграла первого рода

Определение 5. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — C^1-кривая, $\quad f \in \mathcal{C}\Big(\Gamma\Big), \quad \mathtt{T} = \{\, t_k \,\}_{k=1}^{m}, \quad a = t_0 < t_1 < \dots <$ $t_m = b$ — разбиение
$\mathtt{P}[m]\tau_k k, \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ — оснащение

$$\mathtt{S}_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} f\big(\Gamma(\tau_k)\big)\, l\big(\Gamma([t_{k-1}, t_k])\big)$$

Теорема 2.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} : t_k - t_{k-1} < \delta \quad \forall \mathtt{P} \quad \left| \mathtt{S}_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) - \int\limits_{\Gamma} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Gamma([a,b])$ — компакт в $\mathbb{R}^n$
$f \in \mathcal{C}\Big(\Gamma\Big) \xRightarrow[\text{т. Кантора}]{} f$ равномерно непрерывна на Γ, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \lambda > 0 : \quad \forall M', M'' \in \Gamma : \quad \|M'' - M'\| < \lambda \implies |f(M'') - f(M')| < \varepsilon \tag{1.14}$$

$$\Gamma \in \mathcal{C}^1\Big([a,b]\Big)$$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \gamma_k'(t) \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$$

$$\xRightarrow[\text{I т. Вейерештрасаа}]{} \exists\, c_1 : |\gamma_k'(t)| \le c_1 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall k$$

Рассмотрим любые два значения $t', t'' \in [a,b]$.
Применим теорему Лагранжа:

$$|\gamma_k(t'') - \gamma_k(t')| = |\gamma_k'(\widetilde{t})(t'' - t')| \le c_1 |t'' - t'| \tag{1.15}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\Big(\gamma_1(t'') - \gamma_1(t')\Big)^2 + \dots + \Big(\gamma_n(t'') - \gamma_n(t')\Big)^2} \le \sqrt{nc^2|t''-t'|^2} = \sqrt{n}c_1|t''-t'| \tag{1.16}$$

$$\Longleftrightarrow \ \|\Gamma(t'') - \Gamma(t')\| < \sqrt{n}c_1|t''-t'| \tag{1.17}$$

Выберем δ:

$$\delta \coloneqq \frac{\lambda}{\sqrt{n}c_1}$$

$$(1.14), (1.16), (1.17), \operatorname{def}\ \delta \implies \text{при } |t''-t'| < \delta \quad \Big|f\big(\Gamma(t'')\big) - f\big(\Gamma(t')\big)\Big| < \varepsilon \tag{1.18}$$

Обозначим $M_k \coloneqq \Gamma(\tau_k)$

$$\mathtt{S}_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) - \int\limits_\Gamma f(M)\ \mathrm{d}\,l(M) = \sum_{k=1}^m f\big(\Gamma(c_k)\big) l\big(\Gamma([t_{k-1}, t_k])\big) - \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1},t_k])} f(M)\ \mathrm{d}\,l(M) =$$

$$= \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1},t_k])} f(M_k)\ \mathrm{d}\,l(M) - \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1},t_k])} f(M)\ \mathrm{d}\,l(M) = \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1},t_k])} \Big(f(M_k) - f(M)\Big)\ \mathrm{d}\,l(M) \tag{1.19}$$

$$(1.18) \implies |f(M_k) - f(M)| < \varepsilon \tag{1.20}$$

$$(1.19), (1.20) \implies |S_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) - \int\limits_\Gamma f(M)\ \mathrm{d}\,l(M)| \overset{\Delta}{\le} \sum_{k=1}^m \Bigg| \int\limits_{\Gamma([t_{k-1},t_k])} \Big(f(M_k) - f(M)\Big)\ \mathrm{d}\,l(M) \le$$

$$\le \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1},t_k])} |f(M_k) - f(M)|\ \mathrm{d}\,l(M) \le \sum \int\limits_{\Gamma(t_{k-1},t_k)} \varepsilon\ \mathrm{d}\,l(M) = \varepsilon l\big(\Gamma([t_{k-1}, t_k])\big) = \varepsilon l(\Gamma)$$

$\square$