Оглавление

Глава 1

Жорданова форма

1.1 Существование жордановой формы нильпотентного оператора

Определение 1. Жордановой клеткой порядка r с собств. знач. 0 называется квадратная матрица порядка r вида

$$\begin{pmatrix} 0 & - & . & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначение. $J_r(0)$

Определение 2. Жордановой матрицей с собств. знач. 0 назвыается матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{r_2}(0) & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & F_{r_k}(0) & 0 \end{pmatrix}$$

Пример.

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Пусть это матрица оператора в базисах e_1, e_2, e_3, e_4, e_5

$$Je_1 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 = e_2$$

$$Je_2 = e_3, \qquad Je_3 = 0, \qquad Je_4 = e_5, \qquad Je_5 = 0$$

Обозначение. $e_1 \to e_2 \to e_3 \to 0, \qquad e_4 \to e_5 \to 0$

Определение 3. $\mathcal{A}$ – нильпотентный оператор
Жордановой цепочкой называется такой набор векторов $e_1, e_2, ..., e_r$, что $\mathcal{A}(e_i) = e_{i+1}$ при $i < r$ и $\mathcal{A}(e_r) = 0$

Обозначение. $e_1 \to e_2 \to ... \to e_r \to 0$

Замечание. Вектор e_r является собственным вектором, соотв. $\lambda = 0$

Пример. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X \mapsto AX$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = 0$$

- $e_1 \to e_2 \to e_3 \to 0$ не бывает, т. к. $\mathcal{A}^2(e_1) = 0$
- Построим цепочку $e_1 \to e_2 \to 0$
  Найдём $\ker \mathcal{A}$
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + 2y - 3z = 0$$
  $$\dim \ker \mathcal{A} = 2$$
  Найдём e_1, такой что $e_1 \to e_2 \to 0$:
  Любой вектор за 2 шага перейдёт в 0, т. к. $\mathcal{A}^2 = 0$
  Найдём e_1, который за 1 шаг **не** перейдёт в 0:
  Возьмём $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  $$e_2 = \mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  Найдём e_1', который перейдёт в 0:
  Возьмём e_1', линейно независимый с e_2
  Подойдёт $e_1' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  $$\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \to \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underset{e_1'}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  e_1, e_2, e_1' – жорданов базис
  Жорданова форма:
  $$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Лемма 1 (ЛНЗ жордановых цепочек)**.** Дано несколько жордановых цепочек:

$$e_1^{(1)} \to e_2^{(1)} \to \ldots \to e_{r_1}^{(1)} \to 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_1^{(k)} \to e_2^{(k)} \to \ldots \to e_{r_k}^{(k)} \to 0$$

Если последние векторы цепочек, т. е. $e_{r_1}^{(1)}, \ldots, e_{r_k}^{(k)}$ ЛНЗ, то объединение цепочек ЛНЗ

Доказательство. **Индукция** по $r \coloneqq \max\{ r_1, \ldots, r_k \}$

- **База.** $r = 1$
  Все цепочки длины 1
  Все векторы – последние и, по условию, ЛНЗ

- **Переход.** $r-1 \to r$

$$\mathcal{A}(e_i^{(j)}) = \begin{cases} e_{i+1}^{(j)}, & i < r_j \\ 0, & i = r_j \end{cases}$$

Применим s раз:

$$\mathcal{A}^s(e_i^{(j)}) = \begin{cases} e_{i+s}^{(j)}, & i+s \leq r_j \\ 0, & i+s < r_j \end{cases}$$

Цепочки бывают двух видов: у некоторых длина r, а у некоторых – меньше (по определению r) НУО считаем, что цепочки с номерами $1, 2, ..., m$ имеют длину r, а остальные – меньше, т. е.

$$r_1 = r_2 = ... = r_m = r, \qquad r_i < r \text{ при } i > m$$

От противного: пусть набор ЛЗ:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} a_i^{(j)} e_i^{(j)} = 0, \qquad \text{не все } a_i^{(j)} \text{ равны } 0$$

Применим к этому равентсву $\mathcal{A}^{r-1}$:

– Если цепочка короче r, то она вся перейдёт в 0

– Иначе – останется только поледний вектор

То есть,

$$e_1^{(j)} \to e_r^{(j)}, \qquad a_1^{(j)} e_1^{(j)} \to a_1^{(j)} e_r^{(j)}, \qquad \text{остальные } \to 0$$

Получится сумма:

$$\sum_{j=1}^{m} a_1^{(j)} e_r^{(j)}$$

Заметим, что это ЛК последних векторов (которые, по условию, ЛНЗ)

$$\implies a_1^{(j)} = 0 \quad \text{при } j \leq m$$

Уберём слагаемые $0 \cdot e_1^{(j)}$ при $j \leq m$

$$\sum_{j \leq m} \sum_{i=2}^{r} a_i^{(j)} e_i^{(j)} + \sum_{j > m} a_i^{(j)} e_i^{(j)} = 0$$

Это – ЛК векторов из цепочек длины $r-1$ с теми же последними векторами
Применим **индукционное предположение**. Вместе с условием, что последние векторы ЛНЗ, получаем, что все они ЛНЗ

□

Лемма 2 (базис из жордановых цепочек). $\mathcal{A}$ – оператор на V, базис $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис, являющийся объединением жордановых цепочек (в естественном порядке):

$$e_1 \to e_2 \to ... \to e_{r_1} \to 0$$

$$e_{r_1+1} \to e_{r_2+2} \to ... \to e_{r_1+r_2} \to 0$$

. . . .

$$e_{r_1+...+r_{k-1}+1} \to ... \to e_{r_1+r_2+...+r_{k-1}+r_k} \to 0$$

Тогда матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе

$$A = \begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & 0 & . & 0 \\ 0 & J_{r_2}(0) & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & J_{r_k}(0) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(e_{r_1}) = \mathcal{A}(e_{r_1+r_2}) = \ldots = \mathcal{A}(e_{r_1+\ldots+r_k}) = 0$$

Значит, при $i = r_1, r_1 + r_2, \ldots\ldots\ldots, r_1 + \ldots + r_k, \quad i$-й столбец – нулевой
При $i \neq r_1, \ldots\ldots\ldots, r_1 + \ldots + r_k, \quad \mathcal{A}(e_i) = e_{i+1} \implies i$-й столбец:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

□

Теорема 1 (жорданова форма нильпотентного оператора)**.** Для любого нильпотентного оператора на конечномерном векторном пространстве существует жорданов базис

Доказательство. Будем доказывать, что существует базис из жордановых цепочек
Положим $W := \ker \mathcal{A}$
Если мы возьмём ЛНЗ векторы из ядра и достроим (слева от них) цепочки, то получим жорданов базис
Положим $U_i := \operatorname{Im} \mathcal{A}^i$

$$V = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_{k-1} \supset U_k = \{\, 0 \,\}$$

где k – степень нильпотентности $\mathcal{A}$
Заметим, что если $v \in U_t \cap W$, то существует цепочка длины $t + 1$ с концом v
Построим базис W (такой, чтобы можно было достроть цепочки):
Будем пересекать W с U_i
Выберем базис $W \cap U_{k-1}$. Он ЛНЗ, значит его можно дополнить до базиса $W \cap U_{k-2}$
В итоге получим базис $W \cap U_0 = W$
Получили базис $e_1, e_2, \ldots$ пространства W
Для $e_i \in W \cap U_t$ построим цепочку длины $t + 1$ с концом e_i:

$$e_1^{(i)} \to e_2^{(i)} \to \ldots \to e_{t+1}^{(i)} = e_i \to 0$$

Объединение цепочек – ЛНЗ (по лемме)
Докажем, что это базис, т. е. что набор порождающий:
Докажем, что если $\mathcal{A}^s(v) = 0$, то v является ЛК векторов цепочек
Докажем **индукцией** по s:

- **База.** $s = 1$

$$\mathcal{A}^1(v) = 0, \qquad v \in W, \qquad e_1, e_2, \ldots \text{ – базис } W$$

- **Переход.** $s \to s + 1$
  Пусть $\mathcal{A}^{s+1}(v) = 0, \quad \mathcal{A}^s(v) \neq 0$
  Положим $u = \mathcal{A}^s \implies u \in U_s$

$$\underbrace{\overbrace{v \to \cdot \to \ldots \to u}^{s} \to 0}_{s+1}$$

  Значит, $\mathcal{A}(u) = 0 \implies u \in W$
  Значит, $u \in U_s \cap W$
  Представим его в виде ЛК базиса $U_s \cap W$ (того, до которого мы дошли на каком-то очередном шагу дополнения базисов):

$$u = \sum_i a_i e_i$$

$$\forall e_i \text{ из этого бзиса выбрана цепочка длины хотя бы } s + 1$$

$$e_i = e_{s+t_i}^{(i)} \text{ – последний вектор цепочки}$$

Пусть e_i' – вектор цепочки, такой что $\mathcal{A}^s(e_i') = e_i$ (вектор, который на s шагов раньше)

$$\mathcal{A}^s\left(\sum a_i e_i'\right) = \sum a_i e_i = u$$

При этом, $\mathcal{A}^s(v) \overset{\text{def}}{=} u$
Получили 2 линейных представления u, значит,

$$\mathcal{A}^s(v) = \mathcal{A}^s\left(\sum a_i e_i'\right) \implies \mathcal{A}^s\left(v - \sum a_i e_i'\right) = 0$$

Тогда, **по индукционному предположению**, $v - \sum a_i e_i'$ представляется в виде ЛК векторов из цепочек
Значит, v представляется в виде ЛК векторов цепочек

$\square$

1.2 Многочлены от оператора

Обозначение. V – векторное пространство над K, $\quad \mathcal{A}$ – оператор на V, $\quad P \in K[x]$

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

Тогда $P(\mathcal{A}) = a_n \mathcal{A}^n + \ldots + a_1 \mathcal{A} + a_0 \mathcal{E}$, т. е. такой опператор $\mathcal{B}$, что

$$\mathcal{B}(v) = a_n \mathcal{A}^n(v) + \ldots + a_2 \mathcal{A}^2(v) + a_1 \mathcal{A}(v) + a_0 v$$

Лемма 3 (произведение многочленов от оператора)**.** P, Q – многочлены, $\mathcal{A}$ – оператор

$$\implies (PQ)(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}) \circ Q(\mathcal{A})$$

Доказательство. Пусть $P(t) = \sum p_i t^i, \quad Q(t) = \sum q_i t^i, \quad R(t) = P(t)Q(t)$

$$R(t) = \sum p_i q_j t^{i+j}$$

Положим $\mathcal{B} = P(\mathcal{A}), \quad \mathcal{C} = Q(\mathcal{A}), \quad \mathcal{D} = R(\mathcal{A})$
Нужно доказать, что $\mathcal{B}\Big(\mathcal{C}(v)\Big) = \mathcal{D}(v) \quad \forall v$
Пусть $w = \mathcal{C}(v)$

$$\implies \mathcal{B}(w) = \sum p_i \mathcal{A}^i(w), \qquad \mathcal{C}(v) = \sum q_j \mathcal{A}^j(v), \qquad \mathcal{D}(v) = \sum p_i q_j \mathcal{A}^{i+j}(v)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\Big(\mathcal{C}(v)\Big) = \mathcal{B}(w) = \mathcal{B}\left(\sum p_j \mathcal{A}^j(v)\right) = \sum q_j \mathcal{B}\Big(\mathcal{A}^j(v)\Big) = \sum q_j \left(\sum p_i \mathcal{A}^i(\dashv\!|(v))\right) = \\ = \sum q_j \left(\sum p_i \mathcal{A}^{i_j}\right) = \sum q_j p_i \mathcal{A}^{i+j} = \mathcal{D}(v)\end{aligned}$$

$\square$

Следствие. P, Q – многочлены, $\quad \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – операторы, $\qquad \mathcal{B} = P(\mathcal{A}), \quad \mathcal{C} = Q(\mathcal{A})$

$$\implies \mathcal{B} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{B}$$

Доказательство. $PQ = QP \implies (PQ)(A) = (QP)(A)$ $\square$