Оглавление

0.1 Теорема о неявной функции (отображении) 1
0.1.1 Вычисление матрицы Якоби для неявного отображения 4
0.2 Условные экстремумы 4
0.2.1 Теорема о множителях Лагранжа 5

0.1 Теорема о неявной функции (отображении)

Теорема 1. $\mathbb{R}^{n\geq 1}, \qquad \mathbb{R}^{m\geq 1}, \qquad \mathbb{R}^{n+m}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^n, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^m, \qquad Z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

$E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – откр., $\qquad F : E \to \mathbb{R}^n, \qquad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad F \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$

$Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \in E$ такая, что $F(Z_0) = \mathbb{O}_n, \qquad f_j(Z) = f_j\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)$

$$\Longrightarrow \exists \underset{\text{окрестность}}{W(Y_0) \subset \mathbb{R}^n}, \quad \exists ! g : W \to \mathbb{R}^n : \begin{cases} g \in \mathcal{C}^1\Big(W\Big) \\ g(Y_0) = X_0 \\ \forall\, Y \in W \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \in E \\ F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \end{cases} \end{cases}$$

Доказательство. Выпишем матрицу Якоби для F:

$$\mathcal{D}F(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & \dots & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & \dots & f'_{1y_m}(Z_0) \\ . & . & . & . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z_0) & \dots & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & \dots & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

1. Построение g, W, E

   Определим отображение $\Phi(Z) := \begin{bmatrix} F(Z) \\ Y \end{bmatrix}$

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\Phi(Z) = \Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \varphi_1(Z) \\ \vdots \\ \varphi_{n+m}(Z) \end{bmatrix}$$

Напоминание. $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$$\varphi_k\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} y_{k-n}, & k > n \\ f_k\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right), & 1 \le k \le n \end{cases}$$

$$\Phi \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$$

Временно обозначим $x_{n+k} \coloneqq y_k$
Напишем матрицу Якоби для Φ:

$$\mathcal{D}\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc} \varphi'_{1x_1}(Z) & \dots & \varphi_{1x_{n+m}}(Z) \\ . & . & . \\ \hline . & . & . \\ \varphi'_{n+mx_1}(Z) & \dots & \varphi_{n+m}x_{n+m}{}'(Z) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f'_{1x_n}(Z) & f'_{1y_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) & f'_{ny_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{ny_m}(Z) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(черта стоит после n-го ряда)
Обозначим

$$A(Z) \coloneqq \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f1x_n{}'(Z) \\ . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) \end{bmatrix}, \qquad B(Z) \coloneqq \begin{bmatrix} f'_{1y_1}(Z) & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ . & . & . \\ f'_{ny_1}(Z) & \dots & f'_{ny_m}(Z) \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях

$$\mathcal{D}F(Z) = \Big[A(Z)B(Z)\Big], \qquad \mathcal{D}\Phi(Z) = \begin{bmatrix} A(Z) & B(Z) \\ \mathbb{O}_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}$$

Найдём Якобиан Φ:
Раскладвыая по последней строке, получаем новую матрицу поряка $(m-1)\times(n-1)$
Будем так делать, пока внизу стоит I_m (т. е. m раз)
Останется $A(Z)$:

$$\det \mathcal{D}F(Z) = \det A(Z), \qquad \text{в частности, } \det \mathcal{D}F(Z_0) = \det A(Z_0) \underset{\text{по усл.}}{\neq} 0$$

То есть, матрица Якоби в Z_0 обратима. Значит, к Φ можно применить теорему об обратном отображении
Будем верхним индексом к шарам обозначать, в каком пространстве они находятся

$$\exists \mathsf{B}_r^{n+m}(Z_0), \quad V \coloneqq \Phi\Big(\mathsf{B}_r^{n+m}(Z_0)\Big), \qquad \exists\, \Psi : V \to B_r^{n+m}(Z_0), \text{ такое что:}$$

$$\Psi \in \mathcal{C}^1\Big(V\Big)$$

$$\Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \in V, \qquad S \in \mathbb{R}^n, \quad T \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

$$\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in B_r^{n+m}(Z_0) \tag{2}$$

Обозначим

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) =: \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

(где ψ задаёт первые n столбцов, а λ – оставшиеся m)

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } \Phi} \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} \xlongequal[(1)]{} \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$(3) \implies \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) = T \tag{4}$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } \Psi,(4)} \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix} \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда $S = \mathbb{O}_n$:

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) \xlongequal[(5)]{} \Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right)\right) \xlongequal[(1)]{} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}$$

При этом,

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } \Phi} \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}$$

Из последних двух выражений следует, что

$$F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \tag{6}$$

Из того, что V открытое и $\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V$, следует, что

$$\exists\, \rho > 0 : \quad \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \subset V$$

При этом, если $Y \in \mathtt{B}_\rho^m(Y_0)$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix} \in \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right)$$

Поэтому (6) выполнено при $T \in \mathtt{B}_\rho^m(Y_0)$
Вспомним про отображение g из формулировки теоремы. Оно действует из некоторого W
Возьмём

$$W := \mathtt{B}_\rho^m(Y_0), \qquad E := \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right), \qquad g(Y) := \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right)$$

Тогда мы действительно имеем $g : W \to \mathbb{R}^n$

$$F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } g} F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix}\right) \xlongequal[(6)]{} \mathbb{O}_n$$

2. Теперь надо выяснить, чему равно $g(Y_0)$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}X_0\\Y_0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}F\left(\begin{bmatrix}X_0\\Y_0\end{bmatrix}\right)\\Y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y_0\end{bmatrix}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix}X_0\\Y_0\end{bmatrix}\right)\right)\underset{(2)}{=\!=}\begin{bmatrix}X_0\\Y_0\end{bmatrix}\\&\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix}X_0\\Y_0\end{bmatrix}\right)\right)\underset{(7)}{=\!=}\Psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y_0\end{bmatrix}\right)\overset{\text{def }\Psi}{=\!=\!=}\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y_0\end{bmatrix}\right)\\Y_0\end{bmatrix}\overset{\text{def }g}{=\!=\!=}\begin{bmatrix}g(Y_0)\\Y_0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\implies g(Y_0)=X_0$$

3. Осталось проверить единственность g

   Пусть есть другое $g_1\in\mathcal{C}^1\Big(B^m_\rho(Y_0)\Big)$, такое что

$$g_1(Y_0)=X_0,\qquad F\left(\begin{bmatrix}g_1(Y)\\Y\end{bmatrix}\right)=\mathbb{O}_n$$

$$(2)\implies\Psi\left(\begin{bmatrix}F\left(\begin{bmatrix}g_1(Y)\\Y\end{bmatrix}\right)\\Y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}g_1(Y)\\Y\end{bmatrix}$$

   При этом,

$$\Psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\psi\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_n\\Y\end{bmatrix}\right)\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g(Y)\\Y\end{bmatrix}$$

   Правые части равны, а значит, и левые части равны
   Значит, $g_1(Y)=g(Y)$

$\square$

0.1.1 Вычисление матрицы Якоби для неявного отображения

$$P(Y)=\begin{bmatrix}g(Y)\\Y\end{bmatrix},\qquad g\in\mathcal{C}^1\Big(W\Big),\qquad P\in\mathcal{C}^1\Big(W\Big)$$

$$F\Big(P(Y)\Big)=\mathbb{O}_n\quad\forall Y\in W\tag{8}$$

$$(8)=\mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big)=\mathbb{O}_{n\times m}\tag{9}$$

Применим теорему о матрице Якоби суперпозиции:

$$(9)\implies\mathcal{D}F\Big(P(Y)\Big)\mathcal{D}P(Y)=\mathbb{O}_{n\times m}\tag{10}$$

$$\mathcal{D}P(Y)=\begin{bmatrix}\mathcal{D}g(Y)\\I_m\end{bmatrix}\tag{11}$$

Обозначим $Z\coloneqq P(Y)$

$$\mathcal{D}F(Z)=\Big[A(Z)B(Z)\Big]$$

$$(11)\implies\mathcal{D}F(Z)\mathcal{D}P(Y)=\Big[A(Z)B(Z)\Big]\begin{bmatrix}\mathcal{D}g(Y)\\I_m\end{bmatrix}=A(Z)\mathcal{D}g(Y)+B(Z)I_m=A(Z)\mathcal{D}g(Y)+B(Z)\tag{12}$$

$$(10),(12)\implies A(Z)\mathcal{D}g(Y)+B(Z)=\mathbb{O}_{n\times m}\implies\mathcal{D}g(Y)=-A^{-1}(Z)B(Z)$$

0.2 Условные экстремумы

Определение 1. $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}, \qquad M \subset E, \qquad X_0 \in M, \qquad f : E \to \mathbb{R}$
Говорят, что X_0 – точка локального экстремума f при условии M, если X_0 – точка локального экстремума функции $f\Big|_M$

Определение 2. $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – открытое, $\qquad F : E \to \mathbb{R}^n, \qquad X_0 \in E, \qquad f(X_0) = \mathbb{O}_n, \qquad f : E \to R$
Говорят, что X_0 – точка локального экстремума f при условии $F(X) = \mathbb{O}_n$, если X_0 – точка локального экстремума f при условии $\ker F$

0.2.1 Теорема о множителях Лагранжа

Теорема 2 (о множиетелях Лагранжа). $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – открытое, $\qquad F \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$
$\operatorname{rk} \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in E, \qquad X_0 \in E : \quad F(X_0) = \mathbb{O}_n$

$$\implies \exists \Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) : \quad \text{для } \varphi(X, \Lambda) \coloneqq f(X) + \underset{\text{строка}}{\Lambda} \underset{\text{столбец}}{F(X)} \qquad \nabla\varphi(X_0, \Lambda) = \underset{\text{строка}}{\mathbb{O}^T_{n+m}} \tag{13}$$

Замечание. Числа λ_i называются множителями Лагранжа

Доказательство. Пусть $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$
Запишем матрицу Якоби для F:

$$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} F'_{1x_1}(X) & ... & F'_{1x_{n+m}}(X) \\ . & . & . \\ F'_{nx_1}(X) & ... & F'_{nx_{n+m}}(X) \end{bmatrix}$$

По условию, её ранг равен n при любом X, в том числе

$$\begin{vmatrix} F'_{1x_1}(X_0) & ... & F'_{1x_n}(X_0) \\ . & . & . \\ F'_{nx_1}(X_0) & ... & F'_{nx_n}(X_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{14}$$

Обозначим $X' \coloneqq \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$
Определим матрицы A и B так же, как в теореме о неявном отображении, то есть так, что

$$\mathcal{D}F(X) = \Big[A(X)B(X)\Big], \qquad \det A(X_0) \neq 0$$

Обозначим $X'_0 \coloneqq \begin{bmatrix} x^0_1 \\ \vdots \\ x^0_n \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} x^0_{n+1} \\ \vdots \\ x^0_{n+m} \end{bmatrix}$
По теореме о неявном отображении

$$\exists W \ni Y_0, \qquad \exists! g : W \to \mathbb{R}^n : \quad g \in \mathcal{C}^1\Big(W\Big), \quad F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \tag{15}$$

Из единственности g следует, что

$$\exists U \subset E \subset \mathbb{R}^{n+m}, \ X_0 \in U : \quad \forall X \in U \quad \left(F(X) = \mathbb{O}_n \iff X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \quad Y \in W\right) \tag{16}$$

$$\varphi(X, \Lambda) \xlongequal{\text{def } \varphi} f(X) + \Lambda F(X) \tag{17}$$

$$\varphi(X,\Lambda) = f(X) + \Lambda\mathbb{O}_n = f(X)$$

$$\text{То есть, } X_0 \text{ – т. лок. экстеремума функции } \varphi(X,\Lambda) \quad \forall\Lambda \text{ при условии } F(X) = \mathbb{O}_n \tag{18}$$

Возьмём $Y \in W$
Рассмотрим функцию

$$h(Y,\Lambda) \coloneqq \varphi\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \Lambda\right) = f\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) + \Lambda F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right), \qquad Y_0 \in W \tag{19}$$

$$\varphi(X,\Lambda) \xlongequal[\text{при } X\in U \text{ и } F(x)=\mathbb{O}_n]{} h(Y,\Lambda), \qquad \text{где } X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$(18),(20) \implies Y_0 \text{ – точка локального экстремума } h(Y) \quad \text{(без условий)}$$

Для h действует необходиомое условие локального экстремума:

$$\nabla h(Y_0,\Lambda) = \mathbb{O}_m^T$$

Рассмотрим теперь h как отображение в $\mathbb{R}^1$
Его градиент будет матрицей Якоби $n \times 1$:

$$\mathcal{D}h(Y_0,\Lambda) = \nabla = \mathbb{O}_m^T \tag{21}$$

Определим отображение $P(y) \coloneqq \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$
Возьмём $Y \in W$

$$h(Y,\Lambda) = f\Big(P(Y)\Big) + \Lambda F\Big(P(Y)\Big) \tag{22}$$

$$(22) \implies \mathcal{D}h(Y,\Lambda) = \mathcal{D}\Big(f\big(P(Y)\big)\Big) + \Lambda\mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big) \tag{23}$$

Вспомним, чему равны матрицы Якоби суперпозиции:

$$\mathcal{D}\Big(f\big(P(Y)\big)\Big) = \mathcal{D}f\Big(P(Y)\Big) \cdot \mathcal{D}P(Y) \tag{24}$$

$$\mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big) = \mathcal{D}F\Big(P(Y)\Big) \cdot \mathcal{D}P(Y) \tag{25}$$

При доказательстве теоремы о неявной функции мы получили, что

$$\mathcal{D}P(Y) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\mathcal{D}F(X_0) = \Big[A(X_0)B(X_0)\Big]$$

Подставим Y_0 в (23), (24) и (25):

$$P(Y_0) = X_0$$

Снова будем вместо матрицы Якоби писать градиент:

$$\mathcal{D}f(X_0) = \Big(f'_{x_1}(X_0), ..., f'_{x_{x+m}}(X_0)\Big)$$

Запишем его как два градиента:

$$\nabla_1 f(X_0) \coloneqq \Big(f'_{x_1}(X_0), ..., f'_{x_n}(X_0)\Big), \qquad \nabla_2 f(X_0) \coloneqq \Big(f'_{x_{n+1}}(X_0), ..., f'_{x_{n+m}}(X_0)\Big)$$

$$\mathcal{D}f(X_0) = \Big(\nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0)\Big) \tag{27}$$

$$(24)-(26) \implies \mathbb{O}_m^T \xlongequal[(21)]{} \mathcal{D}h(Y_0,\Lambda) \xlongequal[(23)]{}$$

$$= \underbrace{\Big(\nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0)\Big)}_{(27)} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y_0) \\ I_m \end{bmatrix} + \Lambda \Big[A(X_0) B(X_0)\Big] \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla_1 f(X_0)\underline{\mathcal{D}g(Y_0)} + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda\Big(A(X_0)\mathcal{D}g(Y_0) + B(X_0)\Big) =$$

$$= \underbrace{\Big(\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0)\Big)} \mathcal{D}g(Y_0) + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0) \quad (28)$$

Хотим выбрать Λ так, чтобы скобка обратилась в 0:

$$\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_m^T$$

$$\Lambda = -\nabla_1 f(X_0) A^{-1}(X_0) \quad (29)$$

При таком Λ выделенная скобка равна 0, а значит

$$(28),(29) \implies \nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0) = \mathbb{O}_m^T \quad (30)$$

Вернёмся к полному градиенту:

$$(29)(30) \implies \nabla f(X_0) + \Lambda\Big[A(X_0)B(X_0)\Big] = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

“Склеивая” A и B, получаем

$$\nabla f(X_0) + \Lambda \mathcal{D}F(X_0) = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

Существование доказано. Докажем единственность:
Возьмём какой-то другой набор Λ

$$\operatorname{grad}_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_n^T$$

Так мы определяли Λ, а значит она единственна $\square$