Оглавление

Глава 1

Производные и дифференцируемость

1.1 Достаточное условие локального экстремума со второй производной

Теорема 1.

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$
$$\forall x \in (a, b)\ \exists f'(x)$$
$$x_0 \in (a, b)$$
$$\exists f''(x_0)$$
$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) > 0$$
$$\implies x_0 \text{ – строгий локальный минимум } f$$

$$g : (a, b) \to \mathbb{R}$$
$$\exists g'(x)$$
$$\exists g''(x_0)$$
$$g'(x_0) = 0$$
$$g''(x_0) < 0$$
$$\implies x_0 \text{ – строгий локальный максимум } g$$

Доказательство (для f)**.**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + r(x) \tag{1.1}$$

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \tag{1.2}$$

$$(1.1) \implies f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + r(x) \tag{1.3}$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{4}f''(x_0)$. Тогда

$$(1.2) \implies \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \quad \left|\frac{r(x)}{(x - x_0)^2}\right| < \varepsilon = \frac{1}{4}f''(x) \tag{1.4}$$

$$x \neq x_0, \quad x \in \omega$$

$$(1.3), (1.4) \implies f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 - |r(x)| >$$

$$> f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 - \underset{((1.4)\cdot(x-x_0)^2)}{\frac{1}{4} f''(x_0)(x - x_0)^2} = f(x_0) + \frac{1}{4} f''(x_0)(x - x_0)^2 > f(x_0)$$

□

Теорема 2 (О достаточном условии локального экстремума чётной производной)**.**

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

$$n \geq 2 \quad \forall x \in (a, b) \begin{cases} \exists f'(x),\ f''(x), ..., f^{(2n-1)}(x) \\ \exists f^{(2n)}(x_0) \end{cases}$$

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0, ..., f^{(2n-1)} = 0$$

$$f^{(2n)} \neq 0$$

- Если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 – строгий лок. мин.
- Если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 – строгий лок. макс.

Доказательство.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0^3) + ... +$$

$$+ \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0^{2n}) + r(x) \quad (1.5)$$

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^{2n}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad (1.6)$$

$$(1.5) \implies f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} + r(x) \quad (1.7)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)$$

$$(1.6) \implies \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \quad \left| \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2n}} \right| < \varepsilon \quad (1.8)$$

$$x \in \omega(x_0), \quad x \neq x_0$$

$$(1.7), (1.8) \implies f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} - |r(x)| >$$

$$> f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} > f(x_0)$$

□

Теорема 3 (Достаточное условие отсутствия локального экстремума нечётной производной).

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in (a, b)$$

$$N \geq 1 \quad \forall x \in (a, b) \begin{cases} \exists f'(x),\ f''(x), ..., f^{(2n)}(x) \\ \exists f^{(2n+1)}(x_0) \end{cases}$$

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0, ..., f^{(2n)}(x_0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$$

$$\implies x_0 \text{ не является точкой локального экстремума}$$

Доказательство.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} + r(x)$$

$$\left| \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2n+1}} \right| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Возьмём $\omega(x_0)$

$$\left| \frac{r(x)}{(x - x_0)^{2n+1}} \right| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)|$$

2 случая:

- $x > x_0$:

$$f(x) > f(x_0) + \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} > f(x_0)$$

- $x < x_0$:

$$f(x) < f(x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!} |(x - x_0)^{2n+1}| =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1} < f(x_0)$$

□

1.2 Правило Бернулли-Лопиталя

Теорема 4.

$$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$$

$$\forall x \in (a, b)\ \exists f'(x),\ \exists g'(x)$$

$$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a+0]{} 0, \quad g(x) \xrightarrow[x \to a+0]{} 0$$

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \tag{1.9}$$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to a+0]{} A \tag{1.10}$$

Доказательство.

$$f(a) \overset{\text{def}}{=} 0,\ \ g(a) \overset{\text{def}}{=} 0$$

$$f, g \in C([a, b])$$

$$b > x > a \quad \exists c \in (a, x) : \frac{f(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \tag{1.11}$$

$$(1.11) \implies \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \tag{1.12}$$

$$\forall \omega(A)\ \exists \delta > 0 : \forall g \in (a, a + \delta)$$

$$(1.9) \implies \frac{g'(y)}{f'(y)} \in \delta(A) \tag{1.13}$$

$$c \in (a, x) \implies c \in a(a + \delta)$$

$$(1.13) \implies \frac{g'(c)}{f'(c)} \in \omega(A) \tag{1.14}$$

$$(1.12).(1.14) \implies \frac{g(x)}{f(x)} \in \omega(A) \implies (1.10)$$

□

Теорема 5.

$$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$$

$$\forall x \in (a, b)\ \exists f'(x),\ \exists g'(x)$$

$$f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0, \quad g(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$$

$$\exists \lim_{x \to b-0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \tag{1.15}$$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to b-0]{} A \tag{1.16}$$

Доказательство совершенно аналогичное теореме 4

Теорема 6.

$$f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) \neq 0\ \forall x \in (a, +\infty)$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty \tag{1.17}$$

$$\forall x \in (a, \infty)\ \exists f'(x),\ g'(x)$$

$$f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, \infty)$$

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} A \tag{1.18}$$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} A \tag{1.19}$$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$$(1.18) \implies \exists L_1 : \forall x > L_1 \quad \frac{g'(x)}{f'(x)} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \tag{1.20}$$

Возьмём $x_0 > L_1$ и $x > x_0$. Применим теорему Коши:

$$\exists c \in (x_0, x) : \frac{g(x) - g(x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \tag{1.21}$$

В силу выбора чего-то мы получаем, что $c > L_1$

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \tag{1.22}$$

Поделим (1.21) на $f(x)$:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \tag{1.23}$$

Возьмём $L_2 \geq L_1$. При $x > L_2$:

$$\left|\frac{g(x_0)}{f(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{f(x_0)}{f(x)}\right| < \varepsilon \tag{1.24}$$

Не умаляя общности, можем взять $\varepsilon < \frac{1}{2}$
При $x > L_2$ выполняется

$$-2\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{2}} < \frac{\frac{g(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} < \frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{2}} = 2\varepsilon \tag{1.25}$$

$$(1.21), (1.22), (1.23) \implies A - 3\varepsilon < \frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} < A + \varepsilon + \frac{\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0}{f(x)}} < A + 3\varepsilon \tag{1.26}$$

$$(1.24), (1.26) \implies \frac{g(x)}{f(x)} < (A+3\varepsilon)(1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}) < (A+3\varepsilon)(1+\varepsilon) = A + (A+3)\varepsilon + 3\varepsilon^2 \tag{1.27}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} > (A-3\varepsilon)(1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}) > (A-3\varepsilon)(1-\varepsilon) = A - (A+3)\varepsilon + 3\varepsilon^2 \tag{1.28}$$

$$(1.27), (1.28) \implies (1.19)$$

□

Следствие.

$$x > 1, \quad g(x) = \ln x, \quad f(x) = x^r, \; r > 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = rx^{r-1}$$

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{rx^{r-1}} = \frac{1}{2x^r} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \implies \frac{\ln x}{x^r} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Теорема 7.

$$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in (a, b)$$

$$n \geq 2 \quad f(x) \neq 0, \text{ если } x \neq x_0$$

$$\forall x \in (a,b) \begin{cases} \exists f'(x), .., f^{(n-1)}(x) \\ \exists g'(x), ..., g^{(n-1)}(x) \\ \exists f^{(n)}(x_0),\ g^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

$$f(x_0) = f'(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = g'(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$f^{(n)} \neq 0$$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{g^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)} \tag{1.29}$$

Доказательство.

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_1(x)}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_2(x)} = \frac{g^{(n)}(x_0) + n!\frac{r_1(x)}{(x-x_0)^n}}{f^{(n)}(x_0) + n!\frac{r_2(x)}{(x-x_0)^n}} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{g^{(n)}(x_0)+0}{f^{(n)}(x_0)+0} \implies (1.29)$$

$\square$