Типы уравнений первого порядка

Содержание

I. Уравение с разделёнными переменными

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{g(x)} + \frac{\mathrm{d}\,y}{h(y)} = 0$$

$$U(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{g(x)} + \int \frac{\mathrm{d}\,y}{h(y)} + C$$

II. Уравнение с разделяющимися переменными

$$g_1(x)h_2(y)\,\mathrm{d}\,x + g_2(x)h_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

!!!

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,\mathrm{d}\,x + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}\,\mathrm{d}\,y = 0$$

$$\left[\begin{aligned} g_2(x) = 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad x \equiv x_1, x_2, \dots \\ h_2(y) = 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad y \equiv y_1, y_2, \dots \end{aligned}\right.$$

Это решения (т. к. $\mathrm{d}\,x$ и $g_2(x)$ одновременно обратятся в 0)

III. Линейное уравнение

$$y' + p(x)y = \underset{\text{неоднородность}}{q(x)}, \qquad p(x), q(x) \in \mathcal{C}\Big(\langle a, b\rangle\Big)$$

- Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется линейным однородным (ЛОУ)
- Иначе $y' + p(x)y = q(x)$ – линейным неоднородным (ЛНУ)

$$\underset{\substack{\text{общее неоднородное}\\ \text{(все реш. ЛНУ)}}}{y_{\text{ОН}}(x,C)} = \underset{\substack{\text{общее однор.}\\ \text{(все реш. ЛОУ)}}}{y_{\text{ОО}}(x,C)} + \underset{\substack{\text{частное неоднор.}\\ \text{(какое-то решение ЛНУ)}}}{y_{\text{ЧН}}(x,C)}$$

Алгоритм.

1. Ищем $y_{\text{ОО}}$:
$$y_{\text{ОО}} = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Примечание.** Сюда, при допуске $C = 0$, входит $y \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}$, “потерянное” при выводе этой формулы

2. Ищем $y_{\text{ЧН}}$:
Будем искать в виде
$$y_{\text{ЧН}} = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Замечание.** Эту формулу обязательно надо записать

Подставим это в ЛНУ:
$$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + \cancel{C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \cdot \big(-p(x)\big)}}_{y'_{\text{ЧН}}\text{ как производная произведения}} \cancel{+p(x)\underbrace{C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}}_{y_{\text{ЧН}}}} \equiv q(x)$$

> **Контрольная точка.** Второй и третий член **должны** сократиться

$$C'(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} q(x)$$
$$C(x) = \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} q(x)\,\mathrm{d}\,x + \underset{(C_2)}{0}$$

Подставляем в формулу для $y_{\text{ЧН}}$:
$$y_{\text{ЧН}} = \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} q(x)\,\mathrm{d}\,x \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Замечание.** Если $p(x)$ можно проинтегрировать (т. е. $\int p(x)\,\mathrm{d}\,x = \xi(x) + C_1$), нужно вместо C_1 записать какую-то конкретную константу (читайте: ноль). Мы ведь искали **частное** решение, а не континуум

3. Ищем $y_{\text{ОН}}$:
$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \cdot \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

> **Замечание.** Неберущийся неопределённый интеграл нужно записывать в виде интеграла с переменным верхним пределом, в нижнем пределе которого стоит выбранная числовая константа
$$y_{\text{ОН}} = e^{-P(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)} q(s)\,\mathrm{d}\,s\right), \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$$

> **Замечание.** Не стоит здесь пользоваться готовой формулой. Нужно идти по алгоритму

IV. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y + r(x)y^{\tau} = 0, \qquad p(x), r(x) \in \mathcal{C}\Big(\langle a, b\rangle\Big)$$

> **Замечание.**
>
> - При $\tau > 0$ уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0, \quad x \in (a, b)$

- При $\tau = 0, 1$ – это не уравнение Бернулли, а линейное

Стандартная замена:

$$u = y^{1-\tau}, \qquad u' = (1-\tau)y^{-\tau}y'$$

> **Замечание.** Здесь прямая замена не нужна – просто делим на y^τ

Получаем уравнение:

$$(1-\tau)^{-1}u' + p(x)u + r(x) = 0$$

V. Уравнение Риккати

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

Иногда решается:

1. Если известно какое-то частное решение:
   Пусть $y = \eta(x)$ – решение уравнения на некотором промежутке, то есть

   $$\eta'(x) \equiv q(x) - p(x)\eta(x) - r(x)\eta^2(x), \qquad \text{на } \langle a, b\rangle$$

   Замена $y = z + \eta(x)$ преобразует наше уравнение в уравнение Бернулли

   $$z' - \Big(p(x) + 2r(x)\Big)z + r(x)z^2 = 0$$

2. Если $r(x) \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$ и $r(x) \in \mathcal{C}^1\Big(\langle a, b\rangle\Big)$:
   Уравнение приводится к виду

   $$u' + au^2 = s(x), \qquad a \neq 0$$

   при помощи композиции двух замен:

   (a) Линейная замена

   $$y = \gamma(x)z, \qquad y' = \gamma' z + \gamma z', \qquad z = y\gamma^{-1}$$

   позволяет сделать коэффициент при квадратичном члене ненулевой константой

   (b) Сдвигающая замена

   $$z = u + \delta(x), \qquad z' = u' + \delta' x', \qquad u = z - \delta$$

   позволяет аннулировать линейный член, сохраняя коэффициент при z^2 неизменным

3. Если уравнение имеет вид

   $$u' = au^2 + cx^\sigma, \qquad \sigma \neq 0, -2$$

   Оно называется специальным уравнением Риккати

   > **Замечание.** При $\sigma = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными, а при $\sigma = -2$ – обобщённо-однородное
   > В последнем случае замена
   >
   > $$u = x^{-1}v^{-1}$$
   >
   > сводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными
   >
   > $$xv' = -(cv^2 + v - a)$$

   Специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах **тогда и только тогда**, когда

   $$k = \frac{\sigma}{2\sigma + 4} \in \mathbb{Z} \quad (k \neq 0), \qquad \text{то есть} \quad \sigma = \frac{4k}{1-2k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

   > **Алгоритм.**
   >
   > (a) Сделаем замену обеих переменных:
   >
   > $$\begin{cases} x = t^{1/2 - k} = t^{\frac{1}{\sigma+2}}, & t = x^{\frac{2}{1-2k}} > 0 \\ u = z(t)t^{k - 1/2} = zt^{-\frac{1}{\sigma+2}}, & z = ux \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}(zt^{k-\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}\,t} \cdot \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{t^{k-\frac{1}{2}}\dot{z} + (k - {}^1\!/\!_2)t^{k-{}^3\!/\!_2}z}{({}^1\!/\!_2 - k)t^{-{}^1\!/\!_2-k}} = \frac{t^{2k}}{{}^1\!/\!_2 - k}\dot{z} - t^{2k-1}z$$

Получаем уравнение

$$t\dot{z} + \left(k - \frac{1}{2}\right)z + a_0z^2 = c_0t, \qquad a_0 \coloneqq \left(\frac{1}{2} - k\right)a, \quad c_0 \coloneqq \left(\frac{1}{2} - k\right)c$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если коэффициент при линейном члене равен $-{}^1\!/\!_2$

(b) “Обнуляем” k:
В зависимости от знака k используется одна из замен, сохраняющих структуру уравнения и позволяющих уменьшать $|k|$ на 1:

- $k > 0$:

$$z = a^{-1} + tv_1^{-1}, \qquad \dot{z} = v_1^{-1} - tv_1^{-2}\dot{v}_1, \qquad v_1 = t(x - a^{-1})^{-1}$$

- $k < 0$:

$$z = t(v_1 + d)^{-1}, \qquad \dot{z} = (v_1 + d)^{-1} - t(v_1 + d)^{-2}\dot{v}_1, \qquad v_1 = tz^{-1} - d$$

$$d \coloneqq \left(\frac{1}{2} + k\right)\left(\frac{1}{2} - k\right)^{-1} c^{-1}$$

В результате нескольких таких замен придём к уравнению

$$t\dot{v}_k + \left(-\frac{1}{2}\right)v_k + a_kv_k^2 = c_kt$$

(c) Завершающая замена

$$v_k = t^{{}^1\!/\!_2}w, \qquad \dot{v}_k = \frac{t^{-{}^1\!/\!_2}w}{2} - t^{{}^1\!/\!_2}\dot{w}, \qquad w = t^{-{}^1\!/\!_2}v_k$$

приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$t^{{}^1\!/\!_2}\dot{w} = a_kw^2 - c_k$$

VI. Однородное уравнение

Определение 1. $h(x, y)$ называется однородной функцией степени k, если $h(sx, sy) = s^kh(x, y)$

Уравнения

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{и} \qquad M(x, y)\,\mathrm{d}\,x + N(x, y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad M, N \text{ -- однородные порядка } k$$

называются однородными (порядка 0)
То есть, уравнение однородное, если каждое его слагаемое имеет одну и ту же суммарную степень по x и y
Стандартная замена:

$$y(x) = u(x)x, \qquad \left[\begin{array}{l} y' = u'x + u \\ \mathrm{d}\,y = u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u \end{array}\right., \qquad u = x^{-1}y$$

Контрольная точка. После замены **каждое** слагаемое должно содержать x^k

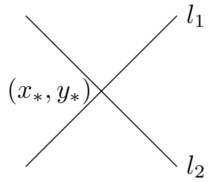
Сокращаем на x^k, группируем слагаемые при $\mathrm{d}\,x$ и $\mathrm{d}\,y$ – получаем уравнение с разделяющимися переменными

VII. Дробно-линейное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Числитель и значенатель задают прямые, пусть $l_1 = a_1x + b_1y + c_1, \quad l_2 = a_2x + b_2y + c_2$
Возможны два случая:

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$



Пусть (x_*, y_*) – решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

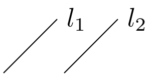
или, что то е самое, точка пересечения прямых l_1 и l_2
После сдвига начала координат в точку (x_*, y_*) прямые не будут иметь свободных членов
Итак, после замены

$$u = x - x_*, \qquad v = y - y_*, \qquad \mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x, \qquad \mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,y$$

или $y'(x) = v'(u)$ получаем однородное уравнение

$$v' = h\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$



Тогда $b_1 \neq 0$ и $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_2}{a_1} = k$
В этом случае замена

$$u = a_1x + b_1y, \qquad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1x), \qquad y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$$

сразу приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' = b_1h\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1$$

VIII. Обощённо-однородное уравнение

> **Определение 2.** Уравнение называется обощённо-однородным, если каждое его слагаемое имеет один и тот же суммарный порядок по x и y при условии, что $x, \mathrm{d}\,x$ имеют порядок 1, а $y, \mathrm{d}\,y$ – порядок $m \neq 0$

Тогда $y' = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}$ имеет порядок $m - 1$
Аргументы входящих в уравнение функций типа логарифма или тригонометрических должны иметь нулевой порядок
Таким образом, чтобы установить, является ли уравнение обобщённо-однородным, надо приравнять порядки всех слагаемых, получая систему многих уравнений с одной неизвестной m. Если повезёт, такое число m найдётся. Тогда замена

$$y = z^m, \qquad y' = mz^{m-1}z', \qquad z = y^{1/m}$$

сведёт уравнение к однородному, но не всегда:

Проблема. Проблема возникает, когда y может принимать значения разных знаков (ОДЗ этого не запрещает), и отсутсвует инвариантность относительно замены $y = -\widetilde{y}$

В таком случае надо отдельно проверить $y(x) \equiv 0$
Дальше возможно три случая:

- Общий:
  Замена
  $$y = (xu)^m, \qquad y' = m(xu)^{m-1}(u + xu'), \qquad u = x^{-1}y^{1/m}$$
  приведёт к уравнению с разделяющимися переменными (но придётся решить два раза для разных знаков y)

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = 2q$
  Делаем замену
  $$y = x^{2q}u, \qquad y' = 2qx^{2q-1}u + x^{2q}u', \qquad u = x^{-2q}y$$
  Она не фиксирует знак y, так что не придётся решать уравнение второй раз
  Также получаем сразу уравнение с разделяющимися переменными

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = (2q)^{-1}$, при этом x тоже меняет знак, и отсутсвует инвариантность относительно замены $x = -\widetilde{x}$
  Надо следать замену
  $$y = |x|^{\frac{1}{2q}}u, \qquad y' = \sigma\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\,|x|} = \sigma\left((2q)^{-1}|x|^{\frac{1}{2q}-1}u + |x|^{\frac{1}{2q}}u'\right), \quad \text{где } u' = \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\,|x|}, \qquad u = |x|^{-\frac{1}{2q}}y$$
  где $\sigma = \operatorname{sign} x$
  Получается уравнение с разделяющимися переменными и параметром σ

  Контрольная точка. В ответе не должно остаться σ (т. е. каждая σ должна “найти” свой $|x|$)

  Примечание. $\sigma|x| = x$

IX. Уравнение в полных дифференциалах

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{1}$$

Определение 3. Уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД), если

$$\exists\, U(x,y) \in \mathcal{C}^1\Big(B\Big) : \quad \begin{cases} U'_x = M \\ U'_y = N \end{cases}$$

Если нашлась такая U, то $U(x,y) \equiv C$ – ответ

Утверждение 1. Уравнение (1) является УПД **тогда и только тогда**, когда

$$M'_y - N'_x \equiv 0 \quad \text{локально} \tag{2}$$

Проверяем (2)
Ищем U:

$$U'_x = M \implies U(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + C(y)$$

$$U'_y = N \implies \left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)'_y + C'(y) = N(x,y) \tag{3}$$

$$C(y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \int\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)'_y \mathrm{d}\,y + 0$$

или

$$U'_y = N \implies U(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y + C(x)$$

$$U'_x = M \implies \left(\int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)'_x + C'(x) = M(x,y) \tag{4}$$

$$C(y) = \int M(x, y)\, \mathrm{d}\, x + \int \left(\int N(x, y)\, \mathrm{d}\, y \right)'_x \mathrm{d}\, x + 0$$

Подставляем $C(y)$ в первое выражение, получаем $U(x, y)$

Контрольная точка. В (3) и (4) **не** должно остаться x

Замечание. Может оказаться, что $C' \equiv 0$. Тогда можно считать, что $C(y) \equiv 0$ (нужна ведь произвольная константа)