Содержание

1. Определение сечений $\mathbb{Q}$; определение $\alpha<\beta$; связь $\alpha<\beta$ и $\alpha\subset\beta$

Определение 1.

$$\alpha\subset\mathbb{Q}\text{ -- сечение }\mathbb{Q}\iff\begin{cases}\alpha\neq\emptyset,\ \alpha\neq\mathbb{Q}\\ \left.\begin{matrix}p\in\alpha\\ q<p\end{matrix}\right\}\implies q\in\alpha\\ \text{в }\alpha\text{ нет наибольшего числа}\end{cases}$$

$$\alpha < \beta \iff \begin{cases} \exists p \in \alpha \\ p \notin \beta \end{cases}$$

$$\alpha < \beta \iff \begin{cases} \alpha \subset \beta \\ \alpha \neq \beta \end{cases}$$

2. Определение $\alpha + \beta$; $\alpha + 0^* = \alpha$; свойства сложения

Определение 2. $\alpha + \beta = \{\, p + q \mid p \in \alpha, q \in \beta \,\}$

Свойства. α, β, γ – сечения

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$

Доказательство.

$$p \in \alpha,\ \underset{\iff q<0}{q \in 0^*} \implies p + q < p \implies p + q \in \alpha \implies \alpha + 0^* \subset \alpha \tag{1}$$

Пусть $p \in \alpha \implies \exists p_1 > p, p_1 \in \alpha$

$$q = p - p_1, q \in 0^*$$

$$p = q + p_1 \implies p \in 0^* + \alpha \implies \alpha \subset \alpha + 0^* \tag{2}$$

$$(1), (2) \implies \alpha + 0^* = \alpha$$

□

3. Лемма о $q - p = d$; существование и единственность $-\alpha$

Лемма 1. α – сечение, $r \in \mathbb{Q}, r > 0 \implies \exists p \in \alpha, \underset{q \text{ не наим. в верхн. классе}}{q \notin \alpha} : q - p = r$

Доказательство.

$$p_0 \in \alpha$$

$$p_1 = p_0 + r$$

$$r = p_1 - p_0$$

- Случай 1 ($p_1 \notin \alpha$):
  - Если p_1 – не наименьшее в верхнем классе, то $q = p_1$
  - Если p_1 – наименьшее в верхнем классе, то

$$p = p_0 + \frac{r}{2}, \quad p \in \alpha$$

$$q = p_1 + \frac{r}{2}, \quad q \notin \alpha$$

- Случай 2 ($p_1 \in \alpha$):

$$p_2 = p_1 + r$$

$$\dots$$

$$p_{n-1} = p_n + r$$

$$p_n = p_0 + rn$$

Пусть m – наибольшее число, такое, что $p_m \in \alpha,\ p_{m+1} \notin \alpha$

Очевидно, что. $p_{m+1} = p_m + r$

- Если p_{m+1} не наименьшее число в верхнем классе, то $p = p_m, q = p_{m+1}$
- Если p_{m+1} наименьшее число в верхнем классе, то $p = p_m + \frac{r}{2}, q = p_{m+1} + \frac{r}{2}$

$\square$

Доказательство $(-\alpha)$**.**

- Единственность:
  Пусть $\exists\, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие условию

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$$

- Существование:
  Пусть $\beta = \{\, p \mid -p \notin \alpha,\ -p$ не является наименьшим в верхнем классе $\alpha \,\}$.
  Очевидно, что $\beta \neq \emptyset,\ \neq \mathbb{Q}$
  Возьмём $p \in \beta,\ q < p \iff -q > -p \implies -q \notin \alpha \implies q \in \beta$

$$-p \notin \alpha \implies \exists\, p_1 > p \underset{-p\ \textbf{не}\ \text{наим. в верхн. классе}}{\implies} -p_1 < -p \implies -p_1 \notin \alpha \implies p_1 \in \beta$$

$$p \in \beta \implies -p \text{ не наименьшее в верхнем классе } \alpha \implies \begin{cases} r > p \\ r \in \beta \end{cases}$$

Проверим, что $\alpha + \beta = 0^*$:

1. Возьмём $p \in \alpha, q \in \beta$

$$\underset{\text{(По определению } \beta)}{-q \notin \alpha} \implies -q > p \iff p + q < 0 \implies p + q \in 0^* \implies \alpha + \beta \subset 0^*$$

2. Возьмём, по теореме о разности верхних и нижних чисел сечения, $q - p = r \iff p - q = -r \in 0^*$

$$q \notin \alpha \implies -q \in \beta \implies p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta \implies 0^* \subset \alpha + \beta$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta \subset 0^* \\ 0^* \subset \alpha + \beta \end{matrix}\right\} \implies \alpha + \beta = 0^*$$

$\square$

4. Определение и свойства $\alpha\beta$; свойства $(p+q)^*$, $(pq)^*$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Определение 3. $\alpha > 0^*, \beta > 0^*$

$$\alpha\beta = \{\, r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \text{ или } \underset{p \geq 0, q \geq 0, p \in \alpha, q \in \beta}{r = pq} \,\}$$

Свойства.

- $\alpha\beta = \beta\alpha$
- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
- $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
- $\alpha \cdot 1^* = \alpha$
- $\alpha \cdot 0^* = 0^*$

- $\alpha\beta = 0^* \implies \alpha = 0^*$ или $\beta = 0^*$
- $\alpha > \beta$ и $\gamma > 0^* \implies \alpha\gamma > \beta\gamma$
- $\alpha \neq 0^* \implies \exists! \beta : \alpha\beta = 1, \quad \beta = \frac{1}{\alpha}$
- $\alpha \neq 0^*, \beta \implies \exists! \gamma : \alpha\gamma = \beta, \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$
- $(p+q)^* = p^* + q^*$

Доказательство.

$$r \in (p+q)^* \implies r < p+q$$

$$h = p + q - r, h > 0$$

$$p_1 = p - \frac{h}{2}, q_1 = q - \frac{h}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} p_1 < p \implies p_1 \in p^* \\ q_1 < q \implies q_1 \in q^* \end{aligned}\right\} \implies p_1 + q_1 \in p^* + q^*$$

$$p_1 + q_1 = p + q - h = r \implies r \in p^* + q^* \implies (p+q)^* \subset p^* + q^*$$

$$r \in p^* + q^* \implies \underset{(p_1 \in p^*, q_1 \in q^*)}{r = p_1 + q_1} \implies p_1 < p, q_1 < q \implies$$
$$\implies p_1 + q_1 < p + q \implies r = p_1 + q_1 \in (p+q)^* \implies p^* + q^* \subset (p+q)^*$$

$\square$

- $(pq)^* = p^* q^*$

$\mathbb{R}$ – множество сечений $\mathbb{Q}$

5. Сечения $\mathbb{R}$ по Дедекинду. Теорема Дедекинда

Определение 4.

$$(A, B) \text{ – сечение } \mathbb{R} \iff \begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = \mathbb{R} \\ \left.\begin{aligned} \alpha \in A \\ \beta \in B \end{aligned}\right\} \implies \alpha < \beta \end{cases}$$

Теорема 1 (Дедекинда)**.**

$$(A, B) \text{ – сечение } \implies \exists! \gamma : \begin{cases} \forall \alpha \in A \quad \alpha \leq \gamma \\ \forall \beta \in B \quad \beta \geq \gamma \end{cases}$$

Доказательство.

- Единственность:
  Пусть $\gamma_1 \neq \gamma_2$, γ_1 и γ_2 удовлетворяют условию теоремы

$$\gamma_1 < \gamma_2 \implies \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2 \implies \begin{Bmatrix} \gamma_3 \in B \\ \gamma_3 \in A \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} \gamma_3 \in A \cap B \\ A \cap B = \emptyset \end{Bmatrix} \lightning$$

- Существование:

$$\gamma = \{\, p \in \mathbb{Q} \mid \exists \alpha \in A : p \in \alpha \,\} \text{ – множество рациональных чисел в } A$$

Докажем, что γ – сечение (т. е. $\gamma \in \mathbb{Q}$):

- Возьмём $\beta_0 \in B$ и $p \in \gamma$
  $p \in \gamma \implies \exists\, \alpha : p \in \alpha$
  По определению сечений $\beta_0 > \alpha \implies \beta_0 \supset \alpha$, то есть $p \in \beta_0$. Значит $\gamma \neq 0$
- Возьмём $q \notin \beta_0 \xRightarrow[\text{(по предыдущему пункту)}]{} q \notin \gamma$. Значит $\gamma \neq \mathbb{Q}$
- Возьмём $p \in \gamma$ и $p_1 < p$

$$\left.\begin{aligned} p \in \gamma &\implies \exists\, \alpha \in A : p \in \alpha \\ p_1 < p &\implies p_1 \in \alpha \end{aligned}\right\} \implies p_1 \in \gamma$$

- Возьмём $p \in \gamma \implies \exists\, \alpha : p \in \alpha$
  По свойствам сечений $\exists\, q \in \alpha : q > p \implies q \in \gamma$. Значит в γ нет наибольшего числа

Возьмём $\forall \alpha \in A$
Тогда, по определению, $\forall p \in \alpha \quad p \in \gamma \implies \alpha \leq \gamma$
Возьмём $\forall \beta \in B$
Докажем, что $\beta \geq \gamma$

Предположим, что это не так $(\beta < \gamma) \implies \exists\, p : \begin{cases} p \in \gamma \\ p \notin \beta \end{cases}$

$p \in \gamma \implies \exists\, \alpha \in A : p \in \alpha$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} p \in \alpha \\ p \notin \beta \end{aligned}\right\} \implies \alpha > \beta \\ &\left.\begin{aligned} \alpha \in A \\ \beta \in B \end{aligned}\right\} \implies \alpha < \beta \end{aligned}\right\} \lightning$$

Значит, наше предположение неверно, и $\beta \geq \gamma$

□

Следствие.

$$\left[\begin{aligned} &\text{Если } \gamma \in A, \text{ то } \gamma \text{ – наибольшее вещественное число в } A \\ &\text{Если } \gamma \in B, \text{ то } \gamma \text{ – наименьшее вещественное число в } B \end{aligned}\right.$$

6. Существование $\sup E$ и $\inf E$

Доказательство (Существование $\sup E$). Пусть $A = \{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in E : x > \alpha \,\}$ – множество чисел, "входящих" в E

$$B = \mathbb{R} \setminus A, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R}$$

$$\exists\, x_0 \in E, \quad \alpha < x_0 \implies \alpha \in A \implies \begin{cases} A \neq \emptyset \\ B \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha \in A &\implies \exists\, x_0 \in E : x_0 > \alpha \\ \beta \in B &\implies \underset{\text{(в том числе } x_0)}{\forall x \in E} \quad x \leq \beta \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} \alpha < x_0 \\ x_0 \leq \beta \end{aligned}\right\} \implies \alpha < \beta$$

Значит, (A, B) – сечение

По т. Дедекинда $\exists\, \gamma : \begin{cases} \forall \alpha \in A & \alpha \leq \gamma \\ \forall \beta \in B & \beta \leq \gamma \end{cases}$

- Если $\gamma \in B \implies \gamma = \sup E$
- Пусть $\gamma \notin B$, то сеть $\gamma \in A \implies \exists\, x_1 \in E : x_1 > \gamma$

$$\gamma < \gamma_1 < x_1 \implies \left\{\begin{aligned} \gamma_1 \in B \\ \gamma_1 \in A \end{aligned}\right\} \implies \gamma_1 \in A \cap B = \emptyset \text{ – } \lightning \implies \gamma \in B$$

□

7. Сопоставление $\alpha \in \mathbb{R}$ десятичной дроби

Алгоритм.

$$x > 0, x \in \mathbb{R}$$

Берём $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ – максимальное : $n_0 \le x$

- Если $n_0 = x$, процедуру останавливаем
- Если $n_0 < x$, то продолжаем $n_0 < x < n_0 + 1$ (по выбору n_0)
  Выбираем n_1:
  $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ – максимальное : $n_0 + \frac{n_1}{10} \le x$
  $0 \le n \le 9$ (если бы $n_1 \ge 10$, то $n_1 = 10 + b, b \ge 0, n_0 + \frac{n_1}{10} = n_0 + 1 + \frac{b}{10} \le x$, то есть $n_0 + 1 \ge x$)
  - Если $n_0 + \frac{n_1}{10} = x$, процедуру останавливаем
  - Если нет, продолжаем
    Выбираем n_2:
    $n_2 \in \mathbb{Z}_+$ – максимальное : $n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10} \le x$
    $0 \le n_2 \le 9$ (аналогично с n_1)
    ...
    Выбраны $n_1 ... n_k$, $n_1 \le 9, ..., n_k \le 9$
    * Если $n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k} = x$, то процедуру останавливаем
    * Если нет, продолжаем

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k} < x < n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k + 1}{10^k} \tag{3}$$

Выбираем n_{k+1} – максимальное : $n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k} + \frac{n_{k+1}}{10^{k+1}} \le x$

- Если $x = n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_l}{10^l}$ при каком-то l, процедуру останавливаем
- Если нет, то получаем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\quad 0 \le n_k \le 9$
  Возьмём $E = \{\, r \mid r = n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k}, k \in \mathbb{N} \,\}$ – множество “уточнений”
  Докажем, что $x = \sup E$:

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k} < x \implies \sup E \le x$$

Пусть $\sup E < x, \quad r := x - \sup E > 0$
Выберем $k : \frac{1}{9k} < r$

$$a_k := n_0 + \frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k} \underset{(3)}{>} x - \frac{1}{10^k} > x - \frac{1}{9k} > x - r$$

$$\left.\begin{aligned} & a_k \in E \\ & a_k > x - r \\ & x - r \overset{\text{def}}{=} \sup E \end{aligned}\right\} - \lightning \text{, значит, } x = \sup E$$

8. Существование и единственность $x^{1/n}$

Доказательство.

- Единственность:
  Пусть $y_2 > y_1 > 0 : \begin{Bmatrix} y_2^n = x \\ y_1^n = x \end{Bmatrix} \implies y_2^n - y_1^n = 0$

$$\underbrace{(y_2 - y_1)}_{>0}\underbrace{(y_2^{n-1} + y_2^{n-2}y_1 + ... + y_1^{n-1})}_{>0} = 0 - \lightning$$

- Существование:
  Пусть $E = \{\, t \mid t \ge 0, t^n < x \,\}$ – множество “меньших оснований”

$0 \in E \implies E \neq \emptyset$

Пусть $t_0 = 1 + x \implies t_0^n = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot q^{n-k} \cdot x^k = 1 + nx + \underbrace{\ldots}_{>0} > x \implies t_0 \notin E \implies E$ ограничено сверху

Пусть $y = \sup E$

- $y^n < x$:

  Возьмём $n : \begin{cases} 0 < n < 1 \\ n < \dfrac{x - y^n}{(y+1)^n - y^n} \end{cases}$

  $$\text{Тогда } (y+n)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot y^{n-k} \cdot n^k = y^n + \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot y^{n-k} \cdot n^k = y^n + n \cdot \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot y^{n-k} \cdot n^{k-1} <$$
  $$< y^n + n \cdot \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot y^{n-k} = y^n + n \cdot ((1+y)^n - y^n) <$$
  $$< y^n + (x - y^n) = x \implies y \text{ не верхняя граница } E$$

- $y^n > x$:

  Возьмём $k : \begin{cases} 0 < k < 1 \\ k < \dfrac{y^n - x}{(y+1)^n - y^n} \\ k < y \end{cases}$

  Аналогично получим, что $y - k$ – верхняя граница E, то есть $y \neq \sup E$ – $\lightning \implies y^n = x$

$\square$

9. Определение x^r, $r \in \mathbb{Q}$ и x^a, $a \in \mathbb{R}$

Определение 5.

$$a > 0, \quad r = \frac{m}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \neq 0$$
$$a^0 := 1$$
$$a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m$$

- Если $m > 0$, то $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m}$
- Если $m < 0$, то $x^m = \frac{1}{x^{|m|}}$

Определение 6.

$$a > 1, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$
$$E = \{\, a^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < \beta, r \neq 0 \,\} \text{ – рациональные степени, меньшие нужной}$$
$$a^\beta := \sup E$$

10. Определение $\log_a x$

Определение 7.

$$a > 1, \quad b > 0$$
$$E = \{\, \beta \in \mathbb{R} \mid a^\beta < b \,\} \text{ – рациональные показатели, меньшие нужного}$$
$$\log_a b := \sup E$$

11. Определение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$; определение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in E$, E – метрическое пространство; теорема об ограниченности v_n в случае существования $\lim v_n$

Определение 8.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Определение 9.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_n \in X, \quad a \in X$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Теорема 2.

$$X, \rho, \quad x_n \in X, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \in X$$

$$\implies \exists R > 0 : \forall n \quad \rho(x_n, a) < R$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N : \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < 1$

$$R = \max\Big(\rho(x_1, a) + 1, ..., \rho(x_N, a) + 1, 1\Big)$$

- Если $n > N$, то $\rho(x_n, a) < 1 \leq R$
- Если $1 \leq n \leq N$, то $R \geq \rho(x_n, a) + 1 > \rho(x_n, a)$

$\square$

12. Определение $\lim x_n = \pm\infty$; $o(1)$; $O(1)$; $x_n \to a \iff x_n = a + \alpha_n$, $\alpha_n = o(1)$

Определение 10.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim x_n = +\infty \iff \forall L \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n > N \quad x_n > L$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim y_n = -\infty \iff \forall L_0 \in \mathbb{R}\ \exists N_0 : \forall n > N_0 \quad y_n < L_0$$

$$x_n = o(1) \iff \lim x_n = 0$$

$$y_n = O(1) \iff \exists M > 0 : \forall n \quad |y_n| \leq M$$

Утверждение 1. $x_n \to a \iff x_n = a + \alpha_n, \quad \alpha_n = o(1)$

Доказательство.

- $\implies$
  Пусть $x_n \to a$. Тогда, по определению предела последовательности, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$. Если положить $\alpha_n = x_n - a$, то получим, что $\forall n > N \quad |\alpha_n| < \varepsilon$, то есть $\alpha_n = o(1)$

- $\impliedby$
  Пусть $x_n = a + \alpha_n, \alpha_n = o(1)$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad |\alpha_n| < \varepsilon$. Тогда $\forall n > N \quad |x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$, то есть $x_n \to a$

$\square$

13. $\alpha_n + \beta_n$; $\alpha_n\beta_n$ в случае $o(1)$, $O(1)$

Утверждение 2. $\alpha_n = o(1), \quad \beta_n = o(1), \quad \alpha_n + \beta_n = \gamma_n \quad \Longrightarrow \gamma_n = o(1)$

Доказательство. $\left.\begin{array}{l}\alpha_n = o(1) \iff \lim \alpha_n = 0 \\ \beta_n = o(1) \iff \lim \beta_n = 0\end{array}\right\} \implies \lim(\alpha_n + \beta_n) = 0$ □

Утверждение 3. $\alpha_n = o(1), \quad \beta_n = o(1), \quad \alpha_n\beta_n = \gamma_n \quad \Longrightarrow \gamma_n = o(1)$

Доказательство. $\left.\begin{array}{l}\alpha_n = o(1) \iff \lim \alpha_n = 0 \\ \beta_n = o(1) \iff \lim \beta_n = 0\end{array}\right\} \implies \lim(\alpha_n\beta_n) = 0$ □

14. $\lim(x_n + y_n)$; $\lim x_n y_n$

Свойство. $x_n \to a, \quad y_n \to b \implies x_n + y_n \to a + b$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists N_1 > 0 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon \\ \exists N_2 > 0 : \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

При $n > N_1 + N_2 + 1$ выполнены оба

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \underset{\text{нер-во треуг.}}{\leq} |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

Свойство. $x_n \to a, \quad y_n \to b \implies x_n y_n \to ab$

Доказательство.

$$\begin{cases} \forall \varepsilon_1 \ \exists N_1 > 0 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon_2 \ \exists N_2 > 0 : \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \underset{\text{нер-во треуг.}}{\leq} |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|$$

Поскольку y_n имеет конечный предел, то она ограничена сверху, т. е. $\exists M > 0 : \forall n \quad y_n < M \implies \forall n \quad |y_n| \leq M$
Получили, что $|x_n y_n - ab| \leq |x_n - a| \cdot M + |a| \cdot |y_n - b| = M\varepsilon_1 + |a|\varepsilon_2$
Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$ и $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$
Тогда, при $N = \max(N_1, N_2)$:

$$\forall n > N \quad |x_n y_n - ab| < M\varepsilon_1 + |a|\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

15. $\lim \frac{1}{x_n}$; $\lim \frac{y_n}{x_n}$

Свойство. $x_n \to a, \quad a \neq 0, \quad x_n \neq 0 \ \forall n \implies \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

Доказательство. Перепишем неравенство треугольника в таком виде:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \iff |a| \geq |a + b| - |b| \tag{4}$$

$$x_n \to a \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon \ \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Положим $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$

$$|x_n| \underset{(4)}{\geq} |x_n + (a - x_n)| - |a - x_n| = |a| - \underbrace{|x_n - a|}_{<\varepsilon} > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} \implies |x_n| > \frac{|a|}{2} \implies \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$$

Очевидно, что. $\left|\frac{1}{|x_n|} - \frac{1}{|a|}\right| = \left|\frac{|a| - |x_n|}{|x_n| \cdot |a|}\right| = \frac{|a - x_n|}{|x_n||a|}$

При $N = \max(N_1, N_2)$:

$$\left|\frac{1}{|x_n|} - \frac{1}{|a|}\right| = \frac{|a - x_n|}{|x_n||a|} = \frac{1}{|x_n|} \cdot \frac{1}{|a|} \cdot |x_n - a| < \frac{2}{|a|} \cdot \frac{1}{|a|} \cdot \varepsilon$$

□

Свойство. $x_n \to a, a \neq 0, x_n \neq 0, y_n \to b \implies \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n}$

Доказательство. $\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n} \cdot y_n$ □

16. Свойства о $x_n \leq y_n$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Свойство. $x_n \leq y_n \ \forall n, \quad x_n \to a, \quad y_n \to a \implies a \leq b$

Доказательство. Пусть $a > b$

$$\forall \varepsilon \begin{cases} \exists\, N_1 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon \\ \exists\, N_2 : \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

При $N := N_1 + N_2 + 1$ выполняются оба, то есть:

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \iff x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \\ |y_n - b| < \varepsilon \iff y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \end{cases}$$

Положим $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$:

$$\begin{cases} x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \implies x_n > a - \dfrac{a-b}{2} & (5) \\ y_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \implies y_n < b + \dfrac{a-b}{2} & (6) \end{cases}$$

$$y_n \underset{(6)}{<} b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b + a - b}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{2a - a + b}{2} = \frac{2a - (a-b)}{2} = a - \frac{a-b}{2} \underset{(5)}{<} x_n$$

□

Свойство. $x_n \leq y_n \leq z_n \ \forall n, \quad x_n \to a, \quad z_n \to a \implies y_n \to a$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists\, N_1 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon \\ \exists\, N_2 : \forall n > N_2 \quad |z_n - a| < \varepsilon \end{cases}$$

При $N := \max(N_1, N_2)$ выполнены оба:

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \iff x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) & (7) \\ |z_n - a| < \varepsilon \iff z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) & (8) \end{cases}$$

$$\forall n > N \quad a - \varepsilon \underset{(7)}{<} x_n \leq y_n \leq z_n \underset{(8)}{<} a + \varepsilon \implies y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \iff |y_n - a| < \varepsilon$$

□

17. Свойства о $\lim(x_n + y_n)$, $\lim(x_n y_n)$, $\lim \frac{x_n}{y_n}$ в случае бесконечных пределов

Свойство. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\quad a_n \to +\infty$, $\quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\quad b_n \to -\infty$

$$x_n \to x, \quad x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \implies a_n + x_n \to +\infty$$

$$y_n \to y, \quad y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \implies b_n + y_n \to -\infty$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \implies \forall n \quad \exists M : |x_n - x| < M \implies x_n > x - M \\ \forall L \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n > N \quad a_n > L \end{array}\right\} \implies a_n + x_n > L + x - M$$

$\square$

Свойство.

$$x > 0 \implies a_n x_n \to +\infty,\ b_n x_n \to -\infty$$

$$y < 0 \implies a_n y_n \to -\infty,\ b_n y_n \to -\infty$$

Доказательство. Аналогично $a_n x_n > L(x - M)$ и $b_n x_n < L(x + M)$ $\square$

Свойство.

$$\left.\begin{array}{l} a_n \neq 0 \\ b_n \neq 0 \end{array}\right\} \forall n \implies \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a_n} \to 0 \\ \frac{1}{b_n} \to 0 \end{array}\right.$$

$$x_n > 0, \quad x_n \to 0 \implies \frac{x_n}{\to} + \infty$$

$$y_n < 0, \quad y_n \to 0 \implies \frac{1}{y_n} \to -\infty$$

Доказательство. $a_n \to +\infty \implies a_n > L\ \forall n \implies \frac{1}{a_n} < \frac{1}{L}$ $\square$

18. Предел монотонной последовательности; критерий конечности предела монотонной последовательности

Теорема 3. Чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.
Чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.
При этом справедливы следующие неравентсва:

- Если монотонно возр., то $\forall m \quad c_m \leq \lim c_n$
- Если строго монотонно возр., то $\forall m \quad c_m < \lim c_n$
- Если монотонно убыв., то $\forall m \quad c_m \geq \lim c_n$
- Если строго монотонно убыв., то $\forall m \quad c_m > \lim c_n$

Доказательство (Для возрастающей).

- Необходимость:
  Пусть $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху.
  Тогда $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists N : \forall n > N \quad c_n > L \iff \lim c_n = +\infty$ – $\lightning$ Значит, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и ограничена сверху.
  Тогда $cn \leq c_{n+1}, \exists M : \forall n \quad c_n \leq M$

Пусть $E = \{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists n \in N : \alpha = c_n \,\}$ – "заключили" последовательность в множество
Очевидно, что E ограничено сверху.
Положим $C = \sup E \implies c_n \le C \ \forall n$
$\forall \varepsilon > 0 \quad C - \varepsilon$ не верхняя граница $E \implies \exists N : c_N > C - \varepsilon$

$$\forall n > N \quad c_n \ge c_{n-1} \ge ... \ge c_N > C - \varepsilon \implies C - \varepsilon < c_n \le C < C + \varepsilon \implies |c_n - C| < \varepsilon \implies \\ \implies C = \lim c_n$$

- Достаточность:

$$\exists \lim c_n = C \in \mathbb{R} \implies \exists M : |c_n - C| \le M \implies c_n \le C + M \ \forall n$$

□

19. Теорема о вложенных промежутках

Теорема 4.

$$\left.\begin{matrix} \forall n \quad [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \\ b_n - a_n \to 0 \end{matrix}\right\} \implies \exists! c : \forall n \quad c \in [a_n, b_n]$$

Доказательство.

- Существование:

$$\forall n, m \quad a_n \le b_m \implies \exists \underset{\text{(сечение)}}{A, B} : \begin{Bmatrix} a_n \in A \\ b_m \in B \end{Bmatrix} \xRightarrow[\text{по т. Дедекинда}]{} \exists c : a_n \le c \le b_m$$

В частности, $a_n \le c \le b_n$

- Единственность:

$$\text{Пусть } \exists c' \ne c : \forall n \quad c, c' \in [a_n, b_n] \implies |c - c'| \le b_n - a_n \tag{9}$$

$$a_n - b_n \to 0 \implies \forall \varepsilon \, \exists N : \forall n > N \quad b_n - a_n < \varepsilon \tag{10}$$

В чатсности, это работает для $\varepsilon := \frac{|c-c'|}{2}$

$$(9), (10) \implies |c - c'| < \frac{|c - c'|}{2}$$

□

20. Возрастание $(1 + \frac{1}{n})^n$; убывание $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Примечание (Неравенство Бернулли). $(1 + x)^n \ge 1 + nx$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

Доказательство (Убывание y_n).

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \underset{\text{(нер-во Бернулли)}}{\geq} \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} = \frac{n^3+n^2-n-1+1}{n^3+n^2-n-1} = 1 + \frac{1}{n^3+n^2-n-1} > 1 \implies$$

$$\implies y_{n-1} > y_n$$

□

Примечание (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

Примечание.

$$\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$$

$$\frac{n-k+2}{n} = 1 - \frac{k-2}{n}$$

$$\dots$$

$$\frac{n-k+k}{n} = 1 - \frac{k-k}{n} = 1$$

Доказательство (Возрастание x_n).

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \underbrace{1 \cdot 1}_{k=0} + \underbrace{n \cdot \frac{1}{n}}_{k=1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= 2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\overbrace{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}^{k \text{ множителей}}}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0}$$

$$\forall r > 0 \quad 1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n} \implies$$

$$\implies \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \implies x_n > x_{n+1}$$

□

21. Критерий Коши существования конечного предела последовательности

Теорема 5.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n, m > N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon \tag{11}$$

Доказательство.

- $\implies$
  Предположим, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \forall n, m > N \quad |x_m - x_n| =$$
$$= |(x_m - a) - (x_n - a)| \le |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies (11)$$

- $\impliedby$

$$A = \{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists N : \forall n > N \quad x_n > \alpha \,\} \text{ – множество “частичных нижних границ”} \tag{12}$$

$$A' = \mathbb{R} \setminus A$$

Докажем, что (A, A') – сечение:

  – Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N_0 : \forall m, n > N_0 \quad |x_m - x_n| < 1$
  –

$$|x_n - x_m| < 1 \iff x_m - 1 < x_n < x_m + 1 \implies$$
$$\implies \begin{Bmatrix} x_m - 1 \in A \\ x_m + 1 \notin A \iff x_m + 1 \in A' \end{Bmatrix} \implies A \ne \emptyset, A' \ne \emptyset$$

  – Возьмём $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$
  Если бы $\forall n > N$ выполнялось $x_n > \beta$, то $\beta \in \alpha$, но $\beta \in A' \iff \exists n_0 > N : x_{n_0} \le \beta$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \in A \xRightarrow[(12)]{} \exists N : \forall n > N \quad x_n > \alpha \\ \exists n_0 > N : x_{n_0} \le \beta \end{matrix}\right\} \implies \begin{Bmatrix} \alpha < x_{n_0} \\ \alpha \le \beta \end{Bmatrix} \implies \alpha < \beta$$

$$\text{По теореме Дедекинда } \exists a \in \mathbb{R} : \forall \alpha \in A, \forall \beta \in A' \quad \alpha \le a \le \beta \tag{13}$$

Возьмём $m = N + 1$

$$(11) \implies \forall n \quad |x_n - x_{N+1}| < \varepsilon \iff x_n \in (x_{N+1} - \varepsilon, x_{N+1} + \varepsilon) \iff$$
$$\iff \left\{\begin{matrix} \left.\begin{matrix} x_n > x_{N+1} - \varepsilon \xRightarrow[(12)]{} x_{N+1} - \varepsilon \in A \\ x_n < x_{N+1} + \varepsilon \xRightarrow[(12)]{} x_{N+1} + \varepsilon \in A' \end{matrix}\right\} \xRightarrow[(13)]{} \begin{matrix} x_{N+1} - \varepsilon < a < x_{N+1} + \varepsilon \\ \text{(то есть } -x_{N+1} - \varepsilon < -a < -x_{N+1} + \varepsilon) \end{matrix} \\ x_{N+1} - \varepsilon < x_n < x_{N+1} + \varepsilon \end{matrix}\right\} \implies$$
$$\implies |x_n - a| < |(x_{N+1} + \varepsilon) + (-x_{N+1} + \varepsilon)| = 2\varepsilon \iff \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

□

22. Подпоследовательности. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Определение 11. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – последовательность
$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – не тождественное отображение
$f(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – подпоследовательность

Теорема 6.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \underbrace{\exists\, a, b : \forall n \quad a \le x_n \le b}_{\text{последовательность ограничена, и сверху, и снизу}}$$

Тогда $\exists\, \alpha \in [a, b],\ \exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \to \alpha$

Доказательство. Определим последовательность промежутков:

$$I_1 = [a, b], \quad I_2' = \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad I_2'' = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

Рассмотрим множество $n : x_n \in I_2'$ и множество $n : x_n \in I_2''$. Хотя бы одно из них бесконечно
Обозначим I_2 – тот из них, который бесконечен
Пусть n_1 – минимальное $n : x_{n_1} \in I_2$

$$I_2 = [a_2, b_2], \quad I_3' = \left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right], \quad I_3'' = \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$$

I_3 – тот из них, который бесконечен
Возьмём n_2 – минимальное $n : x_{n_2} \in I_3$ и $n_2 > n_1$
......

$$\text{Пусть уже выбраны } I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \tag{14}$$

$$\text{Длина } I_{k+1} \text{ равна половине длины } I_k \text{ и равна } \frac{b-a}{2^k} \tag{15}$$

$$\text{Выбраны } n_1 < n_2 < \dots < n_m \tag{16}$$

$$x_{n_1} \in I_2, \quad x_{n_2} \in I_3, \dots, x_{n_{m-1}} \in I_m \tag{17}$$

$$I_m = [a_m, b_m] \tag{18}$$

$$\exists \text{ бесконечно много } n : x_n \in I_m \tag{19}$$

$$I_{m+1}' = \left[a_m, \frac{a_m+b_m}{2}\right], \quad I_{m+1}'' = \left[\frac{a_m+b_m}{2}, b_m\right]$$

I_{m+1} – тот из них, который бесконечен
Пусть n_{m+1} – минимальное $n : x_{n_{m+1}} \in I_{m+1}$ и $n_{m+1} > n_m$
По индукции выполняются (15) – (19) для $k = m+1$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}(15) \implies \text{длина } I_m \to 0 \overset{}{\underset{(14)}{\implies}} \forall m\ \exists! \alpha : \alpha \in I_m \\ (17) \implies x_{n_m} \in I_{m+1}\end{array}\right\} \implies |x_{n_m} - \alpha| \le \dfrac{b-a}{2^m} \\ \text{Возьмём } \forall \varepsilon > 0 \text{ и } k : \dfrac{b-a}{2^k} < \varepsilon\end{array}\right\} \implies$$

$$\implies \forall m > k \quad |x_{n_m} - \alpha| \le \frac{b-a}{2^m} < \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \iff x_n \to \alpha$$

$$\alpha \in I_1 \iff a \le \alpha \le b$$

□

23. Определение $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$; существование этих пределов

Определение 12.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_n \in \mathbb{R}$$

- Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то $\overline{\lim}\, x_n := +\infty$
- Иначе:

$$\exists\, M : \forall n \quad x_n \le M \tag{20}$$

Рассмотрим $E_n = \{\, a \in \mathbb{R} \mid a = x_m, m > n \,\}$ – множество всех значений, начиная с n-го

$$g_n = \sup E_n$$

$$(20) \implies E_n \text{ ограничено сверху } \implies \forall n \quad g_n \le M \tag{21}$$

$$E_{n+1} \subset E_n \implies g_{n+1} \le g_n \implies \exists \lim g_n \le -\infty$$

$$(21) \implies \lim g_n \le M$$

$$\overline{\lim}\, x_n := \lim g_n$$

Определение 13. • Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена снизу, то $\underline{\lim}\, x_n := -\infty$

- Иначе:

$$\exists\, L : \forall n \quad x_n \ge L \tag{22}$$

$$h_n = \inf E_n \text{ (из определения } \overline{\lim})$$

$$(22) \implies \forall n \quad h_n \ge L$$

$$h_{n+1} \ge h_n \implies \exists \lim h_n \le +\infty$$

$$\underline{\lim}\, x_n := \lim h_n$$

24. Связь $\lim x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$

Теорема 7. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\exists \lim x_n \in \mathbb{R} \iff \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$$

Доказательство.

- $\implies$

Предположим, что $\lim x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \implies$

$$\implies E_n \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \implies \begin{Bmatrix} g_n \le a + \varepsilon \implies \overline{\lim}\, x_n \le a + \varepsilon \\ h_n \ge a - \varepsilon \implies \underline{\lim}\, x_n \ge a - \varepsilon \end{Bmatrix} \implies$$

$$\implies 0 \le \overline{\lim}\, x_n - \underline{\lim}\, x_n \le 2\varepsilon \implies \underset{\text{(в силу произвольности } \varepsilon)}{\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n}$$

- $\impliedby$

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = a$$

$$g_n \text{ убывает } \implies \forall n \quad g_n \ge a$$

$$h_n \text{ возрастает } \implies \forall n \quad h_n \le a$$

$$g_n \to a, \quad h_n \to a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists\, N_1 : \forall n > N_1 \quad a \le g_n < a + \varepsilon \\ \exists\, N_2 : \forall n > N_2 \quad a - \varepsilon < h_n \le a \end{cases} \tag{23}$$

Возьмём $N = \max(N_1, N_2)$

$$(23) \implies \forall n > N \quad a - \varepsilon < \inf E_n \le \sup E_n < a + \varepsilon \implies \forall m \ge n \quad a - \varepsilon < x_m < a + \varepsilon$$

В частности, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \iff \exists \lim x_n = a = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

$\square$

25. Свойства $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$

Свойство. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad a_n < \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon \tag{24}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N_1\ \exists n_1 > N_1 : a_{n_1} > \overline{\lim}\, a_n - \varepsilon \tag{25}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n_2 > N_2 \quad a_{n_2} > \underline{\lim}\, a_n - \varepsilon \tag{26}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N_3\ \exists N_3 > N_3 : a_{n_3} > \underline{\lim}\, a_n + \varepsilon \tag{27}$$

Доказательство ((24)).

$$E_n = \{\, a_m \mid m \geq n \,\} \text{ – множество значений, начиная с } n\text{-го}$$

$$g_n = \sup E_n, \quad \overline{\lim}\, a_n = \lim g_n \tag{28}$$

$$g_n \geq g_{n+1} \tag{29}$$

$$(28) \implies \begin{cases} \exists N : \forall n > N \quad g_n < \lim g_k + \varepsilon \\ \text{В частности, } g_{N+1} < \lim g_k + \varepsilon = \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon \end{cases} \tag{30}$$

$$\forall n \quad a_n \leq g_n \xRightarrow[(29),(30)]{} \forall n \geq N+1 \quad a_n \leq \sup E_{N+1} = g_{N+1} < \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon \implies (24)$$

□

Доказательство ((25)). Рассмотрим E_{N_1}, g_{N_1} $supE_{N_1}$, $g_{N_1} - \frac{\varepsilon}{2}$ не верхняя граница E_{N_1}
Возьмём $\widetilde{n_0} : g_{\widetilde{n_0}} < \overline{\lim}\, a_n + \frac{\varepsilon}{2}$
Считаем, что $\widetilde{n_0} \geq N_1$

$$g_{\widetilde{n_0}} - \frac{\varepsilon}{2} \text{ не верхняя граница } E_{\widetilde{n_0}} \implies \exists n_1 > \widetilde{n_0} : a_{n_1} > g_{\widetilde{n_0}} - \frac{\varepsilon}{2} \tag{31}$$

$$g_{\widetilde{n_0}} \geq \lim g_k = \overline{\lim}\, a_n$$
$$(31) \implies a_{n_1} > \overline{\lim}\, a_n - \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\lim}\, a_n - \varepsilon$$

□

(26), (27) доказываются аналогично

Свойство. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : a_{n_k} \to \overline{\lim}\, a_n$$
$$\exists \{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty} : a_{n_l} \to \underline{\lim}\, a_n$$
$$\exists \{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} : \exists \lim a_{n_m} \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\implies \underline{\lim}\, a_n \leq \lim a_{n_m} \leq \overline{\lim}\, a_n$$

Доказательство. Пусть $h_n = \inf E_n$

$$h_{n_m} \leq a_{n_m} \leq g_{n_m} \implies \underbrace{\lim h_{n_m}}_{=\underline{\lim}\, a_n} \leq \lim a_{n_m} \leq \underbrace{\lim g_{n_m}}_{=\overline{\lim}\, a_n}$$

□

26. Определение точки сгущения множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ и множества $\mathcal{E} \subset X$, X – метрическое пространство

Определение 14. X – метрическое пространство с метрикой ρ

$$\alpha \in X \text{ – точка сгущения } X \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{x \neq \alpha}{x \in X} : \rho(x, \alpha) < \varepsilon$$

$$\forall \omega(\alpha) \ \exists \underset{x \neq \alpha}{x \in X \cap \omega(\alpha)}$$

Определение 15. $E \subset \overline{\mathbb{R}}$

$$a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ – т. сг. } E \iff \forall \omega(a) \ \exists \underset{b \neq a}{b \in E \cap \omega(a)}$$

27. Лемма о существовании $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x \in E$ и $x \in \mathcal{E} \subset X$ и $x_n \to x_0$, x_0 – точка сгущения E или $\mathcal{E}$

Лемма 2.

$$\alpha \text{ – т. сг. } X \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \begin{cases} x_n \in X \\ x_n \neq \alpha \\ x_n \to \alpha \end{cases}$$

$$a \text{ – т. сг. } E \iff \exists \{b_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall n \begin{cases} b_n \in E \\ b_n \neq a \\ b_n \to a \end{cases}$$

Доказательство.

- $\Longrightarrow$
  Пусть α – т. сг. X.
  Это значит, что $\forall \omega(\alpha) \ \exists \underset{x \neq \alpha}{x \in \omega(\alpha) \cap X}$.
  В частности, $\forall n \in N \ \exists \underset{x_n \neq \alpha}{x_n \in \omega_{\frac{1}{n}}(\alpha) \cap X}$.
  То есть, $\rho(x_n, \alpha) < \frac{1}{n} \to 0$

- $\Longleftarrow$
  Пусть $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с перечисленными свойствами.

$$x_n \to \alpha \iff \forall \omega(\alpha) \ \exists N : \forall n > N \quad \left.\begin{matrix} \exists x_n \in \omega(\alpha) \\ x_n \neq \alpha \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha \text{ – т. сг. } X$$

□

28. Определение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x), f : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} F(x), F : X \to Y$

Определение 16. X – метрическое пространство с метрикой ρ
α – точка сгущения X
$F : X \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \alpha} F(x) = A \iff \forall \omega(A) \ \exists \Omega(\alpha) : \forall \underset{x \neq \alpha}{x \in \Omega(\alpha) \cap X} \quad F(x) \in \omega(A)$$

Определение 17. $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, a – точка сгущения E

$f : E \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \iff \forall \omega(c)\ \exists\, \Omega(a) : \forall x \in \underset{x\neq a}{\Omega(a) \cap E} \quad f(x) \in \omega(c)$$

29. Теорема о единственности предела функции или отображения

Доказательство. $B \in \overline{\mathbb{R}}, \quad B \neq A$

Предположим, что $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = B$

Очевидно, что. $\exists\, \omega_1(A), \omega_2(B) : \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$

$$\exists\, \Omega_1(\alpha) : \forall x \in \underset{x\neq\alpha}{\Omega_1(\alpha)} \quad F(x) \in \omega_1(A) \tag{32}$$

$$\exists\, \Omega_2(\alpha) : \forall x \in \underset{x\neq\alpha}{\Omega_2(\alpha)} \quad F(x) \in \omega_2(B) \tag{33}$$

Возьмём $\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cap \Omega_2(\alpha)$

$$\left.\begin{array}{r} \exists\, x \in \underset{x\neq\alpha}{\Omega(\alpha)}\colon \left\{\begin{array}{l} (32) \implies F(x) \in \omega_1(A) \\ (33) \implies F(x) \in \omega_2(B) \end{array}\right\} \\ \omega_1(A) \cap \omega_2(B) = \emptyset \end{array}\right\} - \lightning$$

$\square$

30. Связь пределов последовательностей и предела функции

Теорема 8. $E \subset \overline{\mathbb{R}}, \quad a$ – т. сг. E

$$b_n \to a, \qquad \forall n \quad b_n \neq a \tag{34}$$

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = c \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ из } (34) \quad f(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

Теорема 9. $X, \rho, \quad \alpha$ – т. сг. X

$$x_n \to \alpha, \qquad \forall n \quad x_n \neq \alpha \tag{35}$$

$$F : X \to \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x\to\alpha} F(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ из } (35) \quad F(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Доказательство.

- $\implies$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = A \iff \forall \omega(A)\ \exists\, \Omega(\alpha) : \forall x \in \underset{x\neq\alpha}{\Omega(\alpha)} \quad F(x) \in \omega(A) \\ x_n \to \alpha \iff \exists\, N : \forall n > N \quad x_n \in \Omega(\alpha) \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies \forall n > N \quad F(x_n) \in \omega(A) \iff F(x_n) \to A$$

- $\impliedby$

  Пусть неверно, что $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = A$, то есть:

$$\exists\, \omega_0(A) : \forall \widetilde{\Omega}(\alpha)\ \exists\, x \in \underset{x\neq\alpha}{\widetilde{\Omega}(\alpha)}\colon F(x) \notin \omega_0(\alpha)$$

Это будет верно, в том числе, для $\Omega_{1/n}(\alpha) \coloneqq \{\, x \in X \mid \rho(x, \alpha) < \frac{1}{n} \,\}$, то есть:

$$\exists\, \omega_0(A) : \exists\, x \in \underset{x \neq \alpha}{\Omega_{1/n}}(\alpha) : F(x) \notin \omega_0(A)$$

В том числе:

$$\left.\begin{aligned} \exists\, x_n \in \underset{x\neq\alpha}{\Omega_{\frac{1}{n}}}(\alpha)\colon F(x_n) \notin \omega_0(A) \iff \lim F(x_n) \neq A \\ \text{По условию, } F(x_n) \to A \end{aligned}\right\} - \lightning$$

$\square$

31. Свойства пределов функций для ситуаций с $f(x) \le g(x)$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $cf(x)$, $f(x) + g(x)$

Свойства.

- $\forall x \neq \alpha \quad F(x) \le G(x) \implies \lim\limits_{x\to\alpha} F(x) \le \lim\limits_{x\to\alpha} G(x)$
- $\left.\begin{aligned} &\forall x \neq \alpha \quad F(x) \le G(x) \le H(x) \\ &\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} H(x) \end{aligned}\right\} \implies \lim\limits_{x\to\alpha} G(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} F(x)$
- $q \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{x\to\alpha} qF(x) = q \lim\limits_{x\to\alpha} F(x)$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} (F(x) + G(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} F(x) + \lim\limits_{x\to\alpha} G(x)$

32. Свойства пределов функций для ситуаций с $f(x)g(x)$, $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{g(x)}{f(x)}$

Свойства.

- $\lim\limits_{x\to\alpha} (F(x) \cdot G(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} F(x) \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} G(x)$
- $\left.\begin{aligned} &\forall x \ F(x) \neq 0 \\ &\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) \neq 0 \end{aligned}\right\} \implies \lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{1}{F(x)}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\alpha} F(x)}$
- F такое же

$$\lim_{x\to\alpha} \left(\frac{F(x)}{G(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} G(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} F(x)}$$

33. Теорема о существовании предела монотонной функции; критерий конечности предела монотонной функции

Теорема 10.

- $a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E \quad x < a, a$ – т. сг.
  - $f : E \to \mathbb{R}, \quad f$ монотонно возрастает $\implies \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \exists\, M : \forall x \in E \quad f(x) \le M & (36) \\ \forall x_0 \in E \quad f(x_0) \le \lim\limits_{x\to a} f(x) & (37) \end{cases}$$

– $g : E \to \mathbb{R}, \quad g$ монотонно убывает $\implies \exists \lim\limits_{x \to a} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to a} g(x) \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \exists\, L : \forall x \in E \quad g(x) \geq L \\ \forall x_0 \in E \quad g(x_0) \geq \lim\limits_{x \to a} g(x) \end{cases}$$

- $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}, \quad E_1 \subset \mathbb{R}, \quad \forall x \in E_1 \quad x > a_1, \quad a$ – т. сг.
  - $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}, \quad f$ монотонно возрастает $\implies \exists \lim\limits_{x \to a_1} f_1(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to a} f_1(x) \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \exists\, L_1 : \forall x \in E_1 \quad f_1(x) \geq L_1 \\ \forall x_0 \in E_1 \quad f_1(x_0) \geq \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \end{cases}$$

  - $g_1 : E_1 \to \mathbb{R}, \quad f$ монотонно убывает $\implies \exists \lim\limits_{x \to a_1} g_1(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to a} g_1(x) \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \exists\, M_1 : \forall x \in E_1 \quad g_1(x) \leq M_1 \\ \forall x_0 \in E_1 \quad g_1(x_0) \leq \lim\limits_{x \to a} g_1(x) \end{cases}$$

Доказательство.

- $\implies$
  - (36)

$$\text{Пусть} \quad \nexists\, M \text{ из } (36) \implies \forall K \in \mathbb{R}\; \exists\, x_k \in E : f(x_k) > K \tag{38}$$

$$\text{Возьмём } \omega(a) : x_k \notin \omega(a) \xRightarrow[x<a]{} \forall x \in \omega(a) \cap E \quad x > x_k \xRightarrow[f \text{ возр.}]{}$$

$$\implies \forall x \in \underset{x \neq a}{\omega(a) \cap E} \quad f(x) \geq f(x_k) \xRightarrow[(38)]{} \forall x \in \underset{x \neq a}{\omega(a) \cap E} f(x) > K \iff \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

  - (37)
Пусть $\exists\, M$ из (36)
Пусть $G = f(E)$ – кодомен функции
(36) $\implies G$ ограничено сверху

$$\text{Пусть } M_0 = \sup G \implies \forall x \in E \quad f(x) \leq M_0 \tag{39}$$

Возьмём $\forall \varepsilon > 0$. $M_0 - \varepsilon$ не верхняя граница $G \implies \exists\, x_\varepsilon \in E : f(x_\varepsilon) > M_0 - \varepsilon$

$$\text{Возьмём } \omega(a) : x_\varepsilon \notin \omega(a) \xRightarrow[f \text{ возр.}]{} \forall x \in \underset{x \neq a}{\omega(a) \cap E} \quad f(x) \geq f(x_\varepsilon) \xRightarrow[(39)]{}$$

$$\implies \forall x \in \underset{x \neq a}{\omega(a) \cap E} \quad \boldsymbol{M_0 - \varepsilon} < f(x_\varepsilon) \leq \boldsymbol{f(x)} \leq M_0 < \boldsymbol{M_0 + \varepsilon} \iff \lim_{x \to a} f(x) = M_0$$

- $\impliedby$
Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M_1 \in \mathbb{R}$
Рассмотрим $\forall \underset{x_0 \neq a}{x_0 \in E}$

$$\forall x_1 < x_0 \quad f(x_1) \leq f(x_0) \tag{40}$$

$$x \in E, \quad x < a, \quad x > x_0, \quad f(x_0) \leq f(x) \tag{41}$$

Перейдём к пределу:

$$(41) \implies f(x_0) \leq \lim_{x \to a} f(x) = M_1 \tag{42}$$

$$(42) \implies (37)$$

$$(40), (42) \implies (36)$$

□

34. Критерий Коши существования конечного предела функции

Теорема 11. $E \subset R, \quad a \in \overline{\mathbb{R}}, \quad a$ – т. сг. $E, \quad f : E \to \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \omega(a) : \forall \underset{x_1 \neq a, x_2 \neq a}{x_1, x_2 \in \omega(a) \cap E} \quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \tag{43}$$

Доказательство.

- $\implies$

$$\text{Пусть } \exists \lim_{x \to a} f(x) = c \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \omega(a) : \forall \underset{x \neq a}{x \in \omega(a) \cap E} \quad |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{44}$$

$$\forall \underset{x_1 \neq a, x_2 \neq a}{x_1, x_2 \in \omega(a) \cap E} \quad |f(x_2) - f(x_1)| = |(f(x_2) - c) - (f(x_1) - c)| \leq |f(x_2) - c| + |f(x_1) - c| \underset{(44)}{<}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- $\impliedby$

$$\text{Возьмём } \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad x_n \in E, \qquad x_n \to a, \qquad \forall n \quad x_n \neq a \tag{45}$$

Возьмём $\omega(a)$ из (43):

$$(45) \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad x_n \in \omega(a) \tag{46}$$

$$(43), (46) \implies \forall n, m > N \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Это означает, что к $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ можно применить критерий Коши:

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c \in \mathbb{R} \tag{47}$$

Докажем, что для любой последовательности предел будет один и тот же. Предположим, что это не так:
Возьмём $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x'_n \in E$, $x'_n \to a$, $x'_n \neq a$

$$\text{Пусть } \lim f(x'_n) = c', \quad c' \neq c \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{x_{2n-1}} &= x_n \\ \widetilde{x_{2n}} &= x'_n \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

$$\widetilde{x_n} \to a, \quad \widetilde{x_n} \in E, \quad \widetilde{x_n} \neq a$$

$\{\widetilde{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию. Поэтому, по рассуждению для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\text{Аналогично } (47), \exists \lim f(\widetilde{x_n}) = \widetilde{c} \tag{50}$$

$$(50) \implies \lim f(\widetilde{x_{2n-1}}) = \widetilde{c} \tag{51}$$

$$(50) \implies \lim f(\widetilde{x_{2n}}) = \widetilde{c} \tag{52}$$

$$(49), (51) \implies \lim f(\widetilde{x_{2n-1}}) = \lim f(x_n) = c \tag{53}$$

$$(49), (52) \implies \lim f(\widetilde{x_{2n}}) = \lim f(x'_n) = c' \tag{54}$$

(48), (51) – (54) проивроечивы
Значит, $\exists \lim f(x_n) = c$, не зависящий от последовательности $\implies \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

$\square$

35. Существенные неравенства для логарифма

Утверждение 4.

$$\frac{x}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x}, \qquad -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}, \quad x \ne 0$$

Доказательство.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \ge 1$$

Прологарифмируем:

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

"Перевернём" дроби:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln(1+1/n)} > 1 > \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\ln(1+1/n)}$$

Домножим на $\ln(1+1/n)$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{55}$$

- $0 < x \le \frac{1}{2}$
  Выберем n так, что справедливо соотношение:

$$\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}, \quad n \ge 2 \tag{56}$$

$$(56) \iff n+1 > \frac{1}{x} \ge n \iff \begin{cases} \frac{1}{x} < n+1 \iff \frac{1}{x} - 1 < n \\ n \le \frac{1}{x} \end{cases} \iff \frac{1}{x} - 1 < n \le \frac{1}{x} \tag{57}$$

$$\boldsymbol{\ln(1+x)} \underset{(56)}{\le} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{(55)}{<} \frac{1}{n} \underset{(57)}{<} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \boldsymbol{\frac{x}{1-x}} \tag{58}$$

$$\boldsymbol{\ln(1+x)} \underset{(56)}{>} \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underset{(55)}{>} \frac{1}{n+2} \underset{(57)}{\ge} \frac{1}{\frac{1}{x}+2} = \boldsymbol{\frac{x}{1+2x}} \tag{59}$$

То есть, при $0 < x \le \frac{1}{2}$ имеем неравентсво:

$$\frac{x}{1+2x} \underset{(59)}{<} \ln(1+x) \underset{(58)}{<} \frac{x}{1-x} \tag{60}$$

- $-\frac{1}{3} \le x < 0$
  Выберем $y > 0$ так, чтобы выполнялось соотношение:

$$1 + x = \frac{1}{1+y} \tag{61}$$

$$\text{То есть, } y = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}, \qquad x = \frac{1}{1+y} - 1 \tag{62}$$

$$-\frac{1}{3} \le x < 0 \implies -\frac{1}{3} \le \frac{1}{1+y} - 1 < 0 \implies \frac{2}{3} \le \frac{1}{1+y} < 1 \implies 1 < 1+y \le \frac{3}{2} \implies 0 < y \le \frac{1}{2}$$

$$\ln(1+x) \underset{(61)}{=} \ln\frac{1}{1+y} = -\ln(1+y) \underset{(60)}{<} -\frac{y}{1+2y} \underset{(62)}{=} \frac{\frac{x}{1+x}}{1-\frac{2x}{1+x}} = \frac{x(1+x)}{(1+x)(1+x-2x)} = \frac{x}{1-x}$$

$$\text{То есть, при } -\frac{1}{3} \le x < 0, \text{ получаем } \ln(1+x) < \frac{x}{1-x} \tag{63}$$

$$\ln(1+x) \underset{(61)}{=} -\ln(1+y) \underset{(60)}{>} -\frac{y}{1-y} \underset{(62)}{=} \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x(1+x)}{(1+x)(1+x+x)} = \frac{x}{1+2x}$$

$$\text{То есть, при } -\frac{1}{3} \le x < 0, \text{ получаем } \frac{x}{1+2x} < \ln(1+x) \tag{64}$$

$$(63),(64) \implies \frac{x}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x}, \qquad -\frac{1}{3} \le x < 0 \tag{65}$$

$$(60),(65) \implies \frac{x}{1+2x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1-x}, \quad -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}, \quad x \ne 0$$

□

36. Существенные неравенства для e^x

Утверждение 5.

$$\frac{1-y}{1-2y} < e^y < \frac{1+2y}{1+y}, \quad y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], \quad y \ne 0$$

Доказательство.

$$\left.\begin{aligned} &\text{При } x > 0 \quad \frac{x}{1+2x} \le \frac{1}{4} \iff x \le \frac{1}{2} \\ &\text{При } x < 0 \quad -\frac{1}{4} \le \frac{x}{1-x} \iff -\frac{1}{3} \le x \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Положим $y = \ln(1+x)$. Тогда $1 + x = e^y, \quad x = e^y - 1$

$$(66) \implies y \in \underset{y\ne 0}{\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]} \iff x \in \underset{x \ne 0}{\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]} \tag{67}$$

По существенному неравенству для логарифма (65) получаем:

$$\frac{e^y - 1}{1 + 2(e^y - 1)} < y < \frac{e^y - 1}{1 - (e^y - 1)} \iff \frac{e^y - 1}{2e^y - 1} < y < \frac{e^y - 1}{-e^y + 2} \tag{68}$$

Домножим правую часть неравенства на знаменатель:

$$e^y - 1 > y(2 - e^y) \iff e^y(1+y) > 1 + 2y \iff e^y > \frac{1+2y}{1+y} \tag{69}$$

Домножим левую часть неравенства на знаменатель:

$$e^y - 1 < y(2e^y - 1) \iff e^y(1-2y) < 1 - y \iff e^y < \frac{1-y}{1-2y} \tag{70}$$

$$(69),(70) \implies \text{при } y \in \underset{y\ne 0}{\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]} \qquad \frac{1-y}{1-2y} < e^y < \frac{1+2y}{1+y}$$

□

37. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Утверждение 6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{1 - 2|x|}$$

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$h(x) = 1 + \frac{2|x|}{1-2|x|}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) \to 1 \\ h(x) \to 1 \end{aligned}\right\} \implies g(x) \to 1$$

$\square$

38. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Утверждение 7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\frac{1+2x}{1+x} < e^x < \frac{1-x}{1-2x}$$

$$\frac{x}{1+x} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x}$$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x}$$

$$1 - \frac{2|x|}{1-2|x|} < \frac{e^x - 1}{x} < 1 + \frac{2|x|}{1-2|x|}$$

$\square$

39. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$

Утверждение 8.

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство.

$$e \cdot \frac{1-6|x|}{1-4|x|} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \cdot \frac{1-4|x|}{1-6|x|}$$

$\square$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x}$

Утверждение 9.

$$r \neq 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

Доказательство.

$$x_n \to 0, \quad \forall n \; x_n \neq 0$$

$$y_n := \ln(1+x_n), \quad y_n \to 0, \quad \forall n \; y_n \neq 0$$

$$\frac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = \frac{e^{r\ln(1+x_n)} - 1}{x_n} = \frac{e^{ry_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{ry_n} - 1}{y_n} \cdot r \cdot \frac{y_n}{x_n}$$

$\square$

41. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

Утверждение 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство. Сравним площади фигур на рисунке ниже:

$$\triangle\ AOB < \text{сектор } AOB < \triangle\ AOC$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sin x\cdot 1\cdot 1<\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1\cdot 1<\frac{1}{2}\cdot \operatorname{tg} x\cdot 1\cdot 1$$

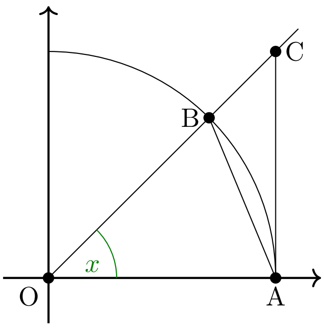
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{71}$$

Возьмём $0 < x \le 1$

$$\boldsymbol{\cos x}=\sqrt{1-\sin^2 x}\underset{(71)}{>}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1-x)(1+x)}\underset{0<x\le 1}{\ge}\sqrt{(1-x)(1-x)}=\boldsymbol{1-x} \tag{72}$$

$$\boldsymbol{\sin x}\underset{(71)\cdot\cos x}{>}x\cos x\underset{(72)\cdot x}{>}\boldsymbol{x(1-x)}\underset{:x}{\Longrightarrow}\overbrace{1-x}^{\to 1}<\frac{\sin x}{x}\underset{(71)}{<}\overbrace{1}^{\to 1}$$

□



42. Непрерывность функции в точке; арифметические свойства непрерывных в точке функций

Определение 18. $X,\rho,\quad A$ – т. сг., $\quad A\in X,\quad f: X\to\mathbb{R}$

$$f \text{ непрерывна в } A \iff \exists\lim_{x\to A} f(x)=f(A)$$

Что эквивалентно:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\in X\quad \rho(x,A)<\delta\implies |f(x)-f(A)|<\varepsilon$$

Или:

$$\forall\omega(f(A))\ \exists\Omega(A):\forall x\in\Omega(A)\quad f(x)\in\omega(f(A))$$

Свойства.

1. $f(x)\equiv C\implies f$ непр. в A
2. f непр. в $A\implies cf$ непр. в A
3. f,g непр. в $A\implies f+g$ непр. в A
4. f,g непр. в $A\implies f\cdot g$ непр. в A
5. $\left.\begin{array}{l} f \text{ непр. в } A\\ \forall x\in X\quad f(x)\neq 0\end{array}\right\}\implies \dfrac{1}{f}$ непр. в A

Доказательство. $\lim\limits_{x\to A} = f(A) \neq 0 \implies \lim\limits_{x\to A} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to A} \dfrac{1}{f(A)} \neq 0$ □

6. $\left.\begin{matrix} f \text{ как в 5 пункте} \\ g \text{ непр. в } A \end{matrix}\right\} \implies \dfrac{g}{f} \text{ непр. в } A$

43. Непрерывность суперпозиции непрерывных в точках функций

Свойство. $E \subset \mathbb{R}, \quad a \in E$ – т. сг. E
$F \subset \mathbb{R}, \quad b \in F$ – т. сг. F
$f : E \to F, \quad f(a) = b$
$g : F \to \mathbb{R}$
$h(x) = g(f(x)), \quad h : E \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} f(x) \text{ непр. в } a \\ g(y) \text{ непр. в } b \end{matrix}\right\} \implies h \text{ непр. в } a$$

Доказательство.

$$h(a) \overset{\text{def}}{=} g(f(a)) \overset{\text{def}}{=} g(b) \implies \forall \omega(h(a)) = \omega(g(b))$$

$$g \text{ непр. в } b \iff \exists\, \Omega(b) : \forall y \in \Omega(b) \cap F \quad g(y) \in \omega(g(b)) \tag{73}$$

$$b = f(a) \implies \Omega(b) = \Omega(f(a))$$

$$f \text{ непр. в } a \iff \exists\, \Lambda(a) : \forall x \in E \cap \Lambda(a) \quad f(x) \in \Omega(f(a)) \tag{74}$$

Возьмём $\forall x \in E \cap \Lambda(a)$

$$(74) \implies f(x) \in \Omega(f(a)) \cap F = \Omega(b) \cap F$$

То есть, можно применить (73)

$$(73) \implies g(f(x)) \in \omega(g(b)) = \omega(h(a)) \implies h(x) \in \omega(h(a))$$

□

44. Непрерывность $p(x)$, $\frac{p(x)}{q(x)}$, e^x

Свойство. $p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$
$p(x) \in C(\mathbb{R})$

Свойство. $q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_t x^t$
$a_1, ..., a_n$ – все числа : $p(a_k) = 0$

$$\frac{q(x)}{p(x)} \in C(\mathbb{R} \setminus a_1, ..., a_n)$$

Свойство. $e^x \in C(\mathbb{R})$

Доказательство.

$$e^h \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$

$$\forall x_0 \neq 0 \left\{\begin{matrix} e^x = x^{x_0} \cdot e^{x - x_0} \\ x - x_0 \in C(\mathbb{R}) \end{matrix}\right\} \xRightarrow[\text{как суперпозиция}]{} e^x \text{ непр. в } x_0 \xRightarrow[\text{в силу произв. } x_0]{} e^x \in C(\mathbb{R})$$

□

45. Непрерывность $\ln x$, x^r

Доказательство (непрерывность $\ln x$).

$$\ln(1+h) \xrightarrow[h\to 0]{} \ln 1$$

$$\ln(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{h} \cdot h \implies \ln(x) \text{ непр. в } 1$$

Возьмём $x_0 > 0, \quad x_0 \neq 1$

$$\ln x = \ln x \cdot \frac{x}{x_0} + \ln x_0 \implies \ln x \text{ непр. в } x_0$$

$$\frac{x}{x_0} \in C(\mathbb{R}), \quad \frac{x_0}{x} = 1 \implies \ln x \in C(0, +\infty)$$

□

Доказательство (непрерывность x^r).

$$x > 0, r \in \mathbb{R} \implies x^r \in C(0, +\infty)$$

$$r > 0, \quad 0^r \overset{\text{def}}{=} 0 \implies x^r \text{ непр. в } 0$$

x^r монотонно возрастает при $x > 0$
Возьмём $\delta : \forall \varepsilon > 0 \quad \delta^r = \varepsilon, \quad \delta = \varepsilon^{1/\delta}$
При $x < \delta \quad 0 < x^r < \delta^r = (\varepsilon^{1/r})^r = \varepsilon$ □

46. Теорема об обращении непрерывной функции в ноль

Теорема 12.

$$f \in C([a, b])$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad (75)$$

$$\implies \exists c \in [a, b] : f(c) = 0$$

Доказательство. Будем определять вложенные промежутки $[a_n, b_n]$

$$a_1 \coloneqq a, \quad b_1 \coloneqq b$$

$$(75) \iff f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$$

$$c_1 \coloneqq \frac{a_1 + b_2}{2} = \frac{a + b}{2}$$

- Если $f(c_1) = 0$, то $c \coloneqq c_1$
- Иначе:

  $$(75) \implies \left[\begin{aligned} &f(a_1) \cdot f(c_1) < 0 \\ &f(c_1) \cdot f(b_1) < 0 \end{aligned}\right.$$

  $[a_2, b_2]$ – тот из $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$, для которого $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$

  $$c_2 \coloneqq \frac{a_2 + b_2}{2}$$

  - Если $f(c_2) = 0$, то $c \coloneqq c_2$
  - Иначе:

    $$(75) \implies \left[\begin{aligned} &f(a_2) \cdot f(c_2) < 0 \\ &f(c_2) \cdot f(b_2) < 0 \end{aligned}\right.$$

    $[a_3, b_3]$ – тот из $[a_2, c_2], [c_2, b_2]$, для которого $f(a_3) \cdot f(b_3) < 0$

. . . .

$[a_n, b_n]$ – тот из $[a_{n-1}, c_{n-1}], [c_{n-1}, b_{n-1}]$, для которого $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

$$c_n \coloneqq \frac{a_n + b_n}{2}$$

* Если $f(c_n) = 0$, то $c \coloneqq c_n$
* Иначе:

$$(75) \implies \left[\begin{aligned} &f(a_n) \cdot f(c_n) < 0 \\ &f(c_n) \cdot f(b_n) < 0 \end{aligned}\right.$$

Индукционный переход: $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ – тот из $[a_n, c_n]$, для которого $f(a_{n+1}) \cdot f(b_{n+1}) < 0$
Пусть такое n не нашлось, то есть:

$$\forall n \begin{cases} c_n = \dfrac{a_{n+1}, b_{n+1}}{2} \\ f(c_n) \neq 0 \\ f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \end{cases}$$

Тогда, по построению:

$$\left.\begin{aligned} &b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \\ &\forall n \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset [a_n, b_n] \end{aligned}\right\} \implies \forall n \ \exists c \in [a_n, b_n] \text{ (по т. о вложенных промежутках)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &\to c \\ b_n &\to c \\ f \in C([a,b]) \implies f &\text{ непр. в } c \end{aligned}\right\} \implies \begin{Bmatrix} f(a_n) \to f(c) \\ f(b_n) \to f(c) \end{Bmatrix} \implies f(a_n) \cdot f(b_n) \to f^2(c) \qquad (76)$$

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \implies \lim_{n \to 0} (f(a_n) \cdot f(b_n)) \leq 0 \underset{(76)}{\implies} f^2(c) \leq 0 \implies f(c) = 0$$

□

47. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции

Теорема 13. $f \in C([a,b]), \quad f(a) = p, \quad f(b) = q, \quad p \neq q$

$$\min(p,q) < r < \max(p,q) \implies \exists c \in (a,b) : f(c) = r \qquad (77)$$

Доказательство. Возьмём $g(x) = f(x) - r$

$$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - r) \cdot (f(b) - r) = (p - q)(q - r) < 0 \xRightarrow[\text{по т. об обр. непр. функции в ноль}]{} \implies \exists c \in (a,b) : g(c) = 0$$

$$f(c) - r = 0 \implies (77)$$

□

48. Классификация точек разрыва; точки разрыва монотонной функции

Утверждение 11. $E \subset \mathbb{R}, \quad a \in E, \quad a$ – т. сг. E
$f : E \to \mathbb{R}, \quad f$ не непр. в a – т. разрыва

1. Устранимая точка разрыва:
   $a \in (p,q), \quad f : (p,q) \to \mathbb{R}$
   $$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \in \mathbb{R} \\ \exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \neq f(a) \iff a \text{ – устранимая точка разрыва}$$

2. Разрыв I рода (скачок)

   (a) $a \in (p, q)$
   $$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \in \mathbb{R} \\ \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \end{cases}$$

   (b) $f : [a, q) \to \mathbb{R}, \quad \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$

   (c) $f : (p, a] \to \mathbb{R}, \quad \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq f(a)$

3. Разрыв II рода
   По крайней мере $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен

Теорема 14 (о множестве разрывов монотонной функции).

$$f : [a, b] \text{ – монотонна} \implies \forall x_0 \in [a, b] \left[\begin{array}{l} f \text{ непрерывна в } x_0 \\ f \text{ имеет разрыв I рода в } x_0 \end{array} \right.$$

Доказательство (для возрастающей). Рассмотрим случай, когда $x_0 \in (a, b)$
Применим теорему о пределе монотонной функции:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (a, x_0) \quad f(x) \leq f(x_0) \implies \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \leq f(x_0) \\ \forall x \in (x_0, b) \quad f(x_0) \leq f(x) \implies \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \geq f(x_0) \end{array}\right\} \iff \lim_{x\to x_0-0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

Значит:

- Либо все эти три значения равны, и f непрерывна в x_0
- Либо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, и x_0 – разрыв I рода

□

49. Теорема об отображении отрезка

Теорема 15. $f : [a, b], \quad f$ монотонна, $\quad f(a) = p, \quad f(b) = q, \quad p \neq q$

$$f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)] \iff f \in C([a, b])$$

Доказательство.

- $\Longleftarrow$
  Возьмём $\forall r \in [\min(p, q), \max(p, q)]$
  По теореме о промежуточном значении непрерывной функции, $\exists c \in (a, b) : f(c) = r$
  В силу прозвольности r:
  $$f([a, b]) \supset [\min(p, q), \max(p, q)] \tag{78}$$
  Поскольку f монотонна,
  $$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \in [\min(p, q), \max(p, q)]$$
  То есть
  $$f([a, b]) \subset [\min(p, q), \max(p, q)] \underset{(78)}{\Longrightarrow} f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)]$$

- $\Longrightarrow$
  $$f([a, b]) = [\min(p, q), \max(p, q)] \tag{79}$$

Предположим, что $f \notin C([a,b])$
По определению, это означает, что $\exists\, x_0 \in [a,b] : f$ разрывна в x_0
Рассмотрим случай, когда $x_0 \in (a,b)$ и f возрастает
По теореме о множестве разрывов монотонной функции, x_0 – разрыв I рода, то есть

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A < B = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

Рассмотрим

$$y_0 \in (A,B), \quad y_0 \neq f(x_0) \tag{80}$$

По теореме о пределе монотонной функции, имеем следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\forall x < x_0 & f(x) \le A \\ \forall x > x_0 & f(x) \ge B\end{array}\right\} \underset{(80)}{\Longrightarrow} \forall \underset{x\neq x_0}{x \in [a,b]} \quad f(x) \neq y_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (80) \implies f(x_0) \neq y_0\end{array}\right\} \implies y_0 \notin f([a,b]) \quad \lightning\ (79)$$

Значит, наше предположение неверно, и $f \in C([a,b])$

□

50. Существование и непрерывность обратной функции

Теорема 16. $f \in C([a,b]), \quad f$ строго монотонна, $\quad [p,q] = f([a,b])$

$$\implies \exists\, g : [p,q] \to \mathbb{R} : g \in C([p,q])$$

$$\begin{cases}\forall x \in [a,b] & g(f(x)) = x \\ \forall y \in [p,q] & f(g(y)) = y\end{cases} \tag{81}$$

- Если f возрастает, то g возрастает
- Если f убывает, то g убывает

Доказательство (для возрастающей).

$$\forall y \in (p,q) \quad \exists\, x \in (a,b) : f(x) = y \tag{82}$$

f строго возрастает, значит

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x \implies f(x_1) < f(x) = y \\ x_2 > x \implies f(x_2) > f(x) = y\end{array}\right\} \tag{83}$$

$$(82), (83) \implies \forall y\ \exists!\, x : f(x) = y$$

$$\text{Определим } g: \text{ полагаем } g(y) \coloneqq x, \quad f(x) \coloneqq y \tag{84}$$

$$(84) \implies (81)$$

Мы доказали, что у функции f есть обратная
Проверим её непрерывность и монотонность:

- Монотонность:
  Возьмём $y_1 < y_2 \in [p,q]$
  Обозначим $x_1 \coloneqq g(y_1), \quad x_2 \coloneqq g(y_2)$
  Очевидно, что $x_1 \neq x_2$ (в силу (84)). Остаётся $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$
  Допустим, $x_1 > x_2 \implies f(x_1) = y_1 > y_2 = f(x_2)$ – $\lightning$ с (83)
  Тогда $x_1 < x_2 \implies g(y)$ строго возрастает
- Непрерывность:
  Очевидно, что $g([p,q]) \subset [a,b]$ (в силу (84))

Возьмём $\forall x_0 \in [a,b]$
Пусть $y_0 \coloneqq f(x_0)$. Очевидно, что $y_0 \in [p,q]$

$$(84) \implies g(y_0) = x_0 \implies g([p,q]) = [a,b]$$

Применим теорему об отображении отрезка: g отображает $[p,q]$ на $[a,b]$ и g строго монотонна, значит, g непрерывна

$\square$

51. Непрерывность $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

Утверждение 12. $\sin x \in C(\mathbb{R}), \quad \cos x \in C(\mathbb{R})$

Доказательство. Нужно доказать, что $\sin x$ непрерывна при $x = x_0$ и $\cos x$ непрерывна при $x = x_0$. Рассмотрим два случая:

- $x_0 = 0$
  - $\sin x$
  $$\sin x = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \xrightarrow[x \to 0]{} 0, \quad \sin 0 = 0$$
  - $\cos x$
  Воспользуемся правилом двух милиционеров:
  $$1 - |x| \le \sqrt{1 - x^2} \le \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \le 1 \implies \cos x \xrightarrow[x \to 0]{} 0, \quad \cos 0 = 1$$
- $x_0 \ne 0$
  - $\sin x$
  $$\sin x = \sin((x - x_0) + x_0) = \sin(\underbrace{x - x_0}_{\in C(\mathbb{R})}) \cdot \underbrace{\cos x_0}_{\text{const}} + \cos(\underbrace{x - x_0}_{\in C(\mathbb{R})}) \cdot \underbrace{\sin x_0}_{\text{const}}$$
  Мы уже доказали, что $\sin x$, $\cos x$ непрерывны в 0
  Если $x - x_0 = 0$, то $\sin(x - x_0) = 0$
  По теореме о суперпозиции непрерывных функций, $\sin x$ непрерывна при $x = x_0 \ne 0$
  - $\cos x$
  $$\cos x = \cos((x - x_0) + x_0) = \cos(x - x_0) \cdot \cos x_0 - \sin(x - x_0) \cdot \sin x_0$$
  Аналогично получаем, что $\cos x$ непрерывна при $x = x_0 \ne 0$
  $$\implies \sin x, \cos x \in C(\mathbb{R})$$

$\square$

Утверждение 13. $\operatorname{tg} x \in C(\mathbb{R} \setminus \{\, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \,\})$

Доказательство.
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
При $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, знаменатель не обращается в ноль, а, значит, можно применить свойство о частном непрерывных функций $\square$

Утверждение 14. $\operatorname{ctg} x \in C(\mathbb{R} \setminus \{\, \pi n, n \in Z \,\})$

Доказательство.
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
Дальше рассуждение аналогичное $\square$

52. Непрерывность $\arcsin x$, $\arccos x$

Утверждение 15. $\arcsin x, \arccos x \in C([-1, 1])$

Доказательство. Рассмотрим $\sin x\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$. Она строго возрастает
$\sin(-\frac{\pi}{2}) = 1, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
Значит, в силу теоремы об обратной функции, у неё есть обратная функция $\arcsin y, \quad y \in [-1, 1]$, которая тоже строго возрастает и непрерывна
Рассмотрим $\cos x\big|_{[0,\pi]}$. Она строго убывает
Аналогично, существует и непрерывна $\arccos y, \quad y \in [-1, 1]$ □

53. Непрерывность $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$

Утверждение 16. $\operatorname{arctg} x \in C(\mathbb{R})$

Доказательство. Обозначим $a_n := -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}, \quad b_n := \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}, \quad p_n := \operatorname{tg} a_n, \quad q_n := \operatorname{tg} b_n$
Заметим, что

$$\begin{cases} [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] \\ [p_n, q_n] \subset [p_{n+1}, q_{n+1}] \end{cases}$$

Рассмотрим $\operatorname{tg} x\big|_{[a_n, b_n]}$. Она строго возрастает
Значит, по теореме об обратной функции, на $[p_n, q_n]$ существует и непрерывна $\operatorname{arctg} y$
По построению промежутков,

$$\operatorname{arctg} x \in C(\bigcup_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n])$$

Несложно заметить, что

$$\left.\begin{matrix} p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \\ q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{matrix}\right\} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} [p_n, q_n] = \mathbb{R} \implies \operatorname{arctg} x \in C(\mathbb{R})$$

□

Утверждение 17. $\operatorname{arcctg} x \in C(\mathbb{R})$

Доказательство. Доказательство аналогичное □

54. Первая теорема Вейерштрасса

Теорема 17. $f \in C([a, b]) \implies \exists\, M, L : \forall x \in [a, b] \quad L \le f(x) \le M$

Доказательство. Пусть $\nexists\, M : \forall x \in [a, b] \quad f(x) \le M$
Тогда:

$$\left.\begin{matrix} \exists\, x_1 \in [a, b] : f(x_1) > 1 \\ \exists\, x_2 \in [a, b] : f(x_2) > f(x_1) + 2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \exists\, x_n \in [a, b] : f(x_n) > f(x_{n-1}) + n \end{matrix}\right\} \tag{85}$$

$$(85) \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

$$x_n \in [a, b] \tag{86}$$

Применим принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$(86) \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена } \implies \begin{Bmatrix} \exists\, x_* \in [a,b] \\ \exists\, \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \end{Bmatrix} : x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_* \tag{87}$$

$$f \in C([a,b]) \iff f \text{ непрерывна в каждой точке } [a,b], \text{ в частности } f \text{ непрерывна в } x_* \tag{88}$$

По теореме о связи пределов последовательностей с переделом функции:

$$(87),(88) \implies f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_*) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Это означает, что она ограничена, то есть } \exists\, A : \forall k \quad |f(x_{n_k})| \le A \tag{89}$$

$$(85) \implies f(x_{n_k}) > n_k \ge k \tag{90}$$

$$(89),(90) \implies \forall k \quad k < A - \lightning \text{ (т. к. } k \text{ должно пробегать весь натуральный ряд)}$$

Для L доказывается точно так же $\square$

55. Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема 18. $f \in C([a,b]) \implies \begin{Bmatrix} \exists\, x_- \in [a,b] \\ \exists\, x_+ \in [a,b] \end{Bmatrix} : \forall x \in [a,b] \quad f(x_-) \le f(x) \le f(x_+)$

Доказательство. Пусть $\nexists\, x_+ \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \quad f(x) \le f(x_+)$
Рассмотрим $E = f([a,b])$
По первой теореме Вейерштрасса, $\exists\, M : \forall x \in [a,b] \quad f(x) \le M \implies E$ ограничено сверху
Это значит, что у него есть супремум. Обозначим его

$$y_0 \coloneqq \sup E \tag{91}$$

$$(91) \implies \forall x \in [a,b] \quad f(x) \le y_0$$

Если бы $\exists\, x_+$, то $f(x_+) = y_0$. Однако, мы предположили, что $\nexists\, x_+$. Значит, $f(x_+) \ne y_0$ и:

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) < y_0 \tag{92}$$

Рассмотрим $\varphi(x) \coloneqq y_0 - f(x)$

$$\left.\begin{aligned} &(92) \implies \forall x \in [a,b] \quad \varphi(x) > 0 \\ &\varphi \overset{\text{def}}{\in} C([a,b]) \end{aligned}\right\} \implies \frac{1}{\varphi} \in C([a,b])$$

Тогда можно применить к $\frac{1}{\varphi}$ первую теорему Вейерштрасса:

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, Q : \frac{1}{\varphi(x)} \le Q \iff \frac{1}{Q} \le y_0 - f(x) \iff f(x) \le y_0 - \frac{1}{Q} \iff$$

$$\iff y_0 - \frac{1}{Q} - \text{верхняя граница } E \lightning (91)$$

$\square$

56. Теорема Кантора

Теорема 19. $f \in C([a,b]) \implies f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$

Доказательство. Пусть f не равномерно непрерывна на $[a,b]$, то есть

$$\exists\, \varepsilon_0 : \forall \delta > 0\ \exists\, x_{1\delta}, x_{2\delta} \in [a,b] : \begin{cases} |x_{2\delta} - x_{1\delta}| < \delta \\ |f(x_{2\delta}) - f(x_{1\delta})| \geq \varepsilon_0 \end{cases} \tag{93}$$

Возьмём $\delta_n \coloneqq \frac{1}{n}, \quad x'_{1n} \coloneqq x_{1,1/n}, \quad x'_{2n} \coloneqq x_{2,1/n}$

$$(93) \implies \begin{cases} |x'_{2n} - x'_{1n}| < \frac{1}{n} \\ |f(x'_{2n}) - f(x'_{1n})| \geq \varepsilon_0 \end{cases} \tag{94}$$

$\forall n \quad x'_{1n} \overset{\text{def}}{\in} [a,b]$, значит к ней можно применить принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \begin{Bmatrix} x_* \in [a,b] \\ \{x'_{1n_k}\}_{k=1}^{\infty} \end{Bmatrix} : x'_{1n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_* \tag{95}$$

Определим $y_n \coloneqq x'_{2n} - x'_{1n}$

$$(94) \implies y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies y_{n_k} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \underset{(95)}{\implies} x'_{2n_k} = x'_{1n_k} + y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_* \tag{96}$$

$$f \in C([a,b]),\ \text{в частности, } f \text{ непрерывна в } x_* \tag{97}$$

Применим теорему о связи пределов последовательностей с пределом функции:

$$(95),(96),(97) \implies \begin{Bmatrix} f(x'_{1n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_*) \\ f(x'_{2n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_*) \end{Bmatrix} \iff \begin{cases} \exists\, N_1 : \forall k > N_1 \quad |f(x'_{1n_k}) - f(x_*)| < \varepsilon \\ \exists\, N_2 : \forall k > N_2 \quad |f(x'_{2n_k}) - f(x_*)| < \varepsilon \end{cases} \tag{98}$$

Возьмём $k_0 :> N_1 + N_2$. Тогда

$$|f(x'_{2n_{k_0}}) - f(x'_{1n_{k_0}})| \underset{\text{нер-во } \Delta}{\leq} |f(x'_{2n_{k_0}}) - f(x_*)| + |f(x_*) - f(x'_{1n_{k_0}})| \underset{(98)}{<} \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon \tag{99}$$

Вспомним, что, по (94), $|f(x'_{2n}) - f(x'_{1n})| \geq \varepsilon_0$. В частности,

$$|f(x'_{2n_{k_0}}) - f(x'_{2n_{k_0}})| \geq \varepsilon_0 \tag{100}$$

Возьмём $\varepsilon \coloneqq \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. Тогда

$$(99) \implies |f(x'_{2n_{k_0}}) - f(x'_{1n_{k_0}})| < \varepsilon_0 - \lightning\ (100)$$

$\square$

57. Определение производной; дифференцируемости

Определение 19.

- $f : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in (a,b)$

$$f \text{ имеет производную в } x_0 \iff \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

- $f : [a,b) \to \mathbb{R}$

$$f \text{ имеет правую производную в } a \iff \exists \lim_{h\to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

- $f : (a,b] \to \mathbb{R}$

$$f \text{ имеет левую производную в } b \iff \exists \lim_{h\to -0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \in \mathbb{R}$$

Определение 20. $f:(a,b)\to\mathbb{R},\quad x_0\in(a,b)$

$$f \text{ дифференцируема в } x_0 \iff \exists \left\{\begin{matrix} A\in\mathbb{R} \\ r:(a,b)\to\mathbb{R}\end{matrix}\right\}:\begin{cases} f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+r(x) \\ \frac{r(x)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{}0\end{cases}$$

Примечание. Определение дифференцируемости можно переписать так:

$$f \text{ дифференцируема в } x_0 \iff \exists \left\{\begin{matrix} A\in\mathbb{R} \\ \omega(0) \\ \rho(h):\omega(0)\to\mathbb{R}\end{matrix}\right\}:\begin{cases} f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\rho(h) \\ \frac{\rho(h)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}0\end{cases}$$

58. Теорема о связи производной и дифференцируемости

Теорема 20. f дифференцируема в $x_0 \iff \exists\, f'(x_0)$
При этом, для A из определения дифференцируемости имеем $A=f'(x_0)$

Доказательство.

- $\Longleftarrow$
  Пусть $\exists\, f'(x_0)$. Это значит, что

$$\delta(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\xrightarrow[x\to 0]{}0 \tag{101}$$

$$\text{Положим } \rho(h):=h\delta(h) \tag{102}$$

  Умножим (101) на h:

$$(101),(102) \implies f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h=h\delta(h)=\rho(h) \tag{103}$$

$$(103) \iff f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\rho(h),\quad \frac{\rho(h)}{h}=\delta(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0 \tag{104}$$

  Можно взять $A:=f'(x_0)$

- $\Longrightarrow$
  Пусть f дифференцируема в x_0. Тогда, по "альтернативному" определению дифференцируемости,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\rho(h) \iff \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A+\frac{\rho(h)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{\text{def}}A\in\mathbb{R}$$

  То есть, $\exists\, f'(x_0)=A$

□

59. Свойства производных для $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$

Свойства. $f,g:(a,b)\to\mathbb{R},\quad x_0\in(a,b),\quad f,g$ дифферницируемы в x_0

1. $(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$

   Доказательство.

$$\frac{cf(x_0+h)-cf(x_0)}{h}=c\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}cf'(x_0)$$

   □

2. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Доказательство.

$$\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \to f'(x_0)+g'(x_0)$$

□

3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Доказательство.

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ = \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ = \frac{\Big(f(x_0+h)-f(x_0)\Big)\cdot g(x_0+h)}{h} + \frac{f(x_0)\cdot\Big(g(x_0+h)-g(x_0)\Big)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \to f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

□

60. Свойства производных для $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{g(x)}{f(x)}$

Свойства. $f(x)\neq 0$ при $x\in(a,b)$

1. $({}^1\!/\!_f)'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

Доказательство.

$$\frac{\dfrac{1}{f(x_0+h)}-\dfrac{1}{f(x_0)}}{h} = \frac{\dfrac{f(x_0)-f(x_0+h)}{f(x_0+h)f(x_0)}}{h} = \\ = -\frac{1}{f(x_0)}\cdot\frac{1}{f(x_0+h)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

□

2. $({}^g\!/\!_f)'(x_0) = \dfrac{g'(x_0)f(x_0)-g(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

Доказательство. Используем свойства о произведении и ${}^1\!/\!_f$:

$$({}^g\!/\!_f)'(x_0) = \left(g\cdot\frac{1}{f}\right)'(x_0) = g'(x_0)\cdot\frac{1}{f(x_0)} + g(x_0)\cdot\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0)}{f(x_0)} - \frac{g(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)} = \\ = \frac{g'(x_0)f(x_0)-g(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

□

61. Производная суперпозиции функций

Свойство. $f:(a,b)\to\mathbb{R},\quad f(x)\in(p,q),\quad x\in(a,b)$
$g:(p,q)\to\mathbb{R},\quad x_0\in(a,b),\quad f(x_0)\coloneqq y_0\in(p,q)$
$\varphi(x) = g(f(x))$
$\exists\, f'(x_0), g'(x_0) \implies \varphi'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$

Доказательство. Воспользуемся тем, что g дифференцируема:

$$g(y_0 + l) = g(y_0) + g'(y_0)l + g(l), \qquad \frac{g(l)}{l} \xrightarrow[l \to 0]{} 0 \tag{105}$$

Возьмём $\omega(0)$ – окрестность, фигурирующая в “альтернативном” определении дифференцируемости для функции g

Положим $\delta(l) := \frac{g(l)}{l}$, $l \in \omega(0) \setminus \{0\}$. Положим $\delta(0) := 0$. Тогда функция $g(l)$ определена в $\omega(0)$ и непрерывна в 0

Возьмём теперь $h : \neq 0$ и

$$l := f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h) - y_0$$

Подставим это в (105):

$$g(y_0 + l) = g(y_0) + g'(y_0)l + g(l) = g(y_0) + g'(y_0)\Big(f(x_0 + h) - y_0\Big) + g\Big(f(x_0 + h) - y_0\Big) \tag{106}$$

Теперь воспользуемся дифференцируемостью f:

$$\varphi(x_0 + h) = g(f(x_0 + h)) = g\Big(f(x_0) + f'(x_0)h + \widetilde{g}(h)\Big), \qquad \frac{\widetilde{g}(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Пусть $q := f'(x_0)h + \widetilde{g}(h)$

$$\varphi(x_0 + h) = g(f(x_0) + q) = g(y_0 + q) \underset{(105)}{=} g(y_0) + g'(y_0)q + q\delta(q) =$$

$$= \varphi(x_0) + g'(y_0)\Big(f'(x_0)h + \underbrace{\widetilde{g}(h)\Big) + \Big(g'(x_0)h + \widetilde{g}(x)\Big)\delta\Big(f'(x_0)h + \widetilde{g}(h)\Big)}_{:=R(h)} = \varphi(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)h + R(h)$$

При этом, $R(h) := g'(y_0)\widetilde{g}(h) + f'(x_0)h\delta\Big(f'(x_0)h + \widetilde{g}(h)\Big) + \widetilde{g}(h)\delta\Big(f'(x_0)h + \widetilde{g}(h)\Big)$

При $h \to 0$ имеем $f'(x_0)h + \widetilde{g}(h) \to 0$, поэтому

$$\frac{R(h)}{h} = g'(y_0) \cdot \frac{\widetilde{g}(h)}{h} + f'(x_0)\delta\Big(f'(x_0)h + \widetilde{g}(h)\Big) + \frac{\widetilde{g}(h)}{h}\delta\Big(f'(x_0)h + \widetilde{g}(h)\Big) \xrightarrow[h \to 0]{} g'(y_0) \cdot 0 + f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

□

62. Производная обратной функции

Свойство. $f \in C([a, b])$, строго монотонна

g – обратная к f функция

$\exists\, f'(x_0) \neq 0, \qquad y_0 := f(x_0)$

$$\implies \exists\, g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Возьмём последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} : \begin{cases} \forall n \quad h_n \neq 0 \\ h_n \to 0 \end{cases}$

Положим $l_n := f(x_0 + h_n) - f(x_0)$

В силу строгой монотонности функции f и её непрерывности имеем $\begin{cases} \forall n \quad l_n \neq 0 \\ h_n \to 0 \end{cases}$

Также, l_n и h_n связаны соотношением

$$f(x_0 + h_n) = f(x_0) + l_n = y_0 + l_n$$

$$g\Big(f(x_0 + h_n)\Big) = g(y_0 + l_n)$$

В силу того, что g – обратная к f функция:

$$x_0 + h_n = g(y_0 + l_n)$$
$$h_n = g(y_0 + l_n) - x = g(y_0 + l_n) - g(y_0) \tag{107}$$

Это соотношение показывает, что мы можем произвольно задать l_n : $\begin{cases} \forall n \quad l_n \neq 0 \\ l_n \to 0 \end{cases}$, и получим $\begin{cases} \forall n \quad h_n \neq 0 \\ h_n \to 0 \end{cases}$

$$\frac{g(y_0 + l_n) - g(y_0)}{l_n} \underset{(107)}{=} \frac{h_n}{l_n} = \frac{h_n}{f(x_0 + h_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

В силу произвольности $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$, получаем $g'(y_n) = \frac{1}{f'(x_0)}$ □

63. Производные e^x, x^n, x^r, $\ln x$

Утверждения.

1. $(e^x)' \overset{\text{def}}{=} \lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim \frac{e^h - 1}{h} = e^x$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

   Доказательство. Индукция по n
   База: $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 2x$
   Переход $n \to n+1$: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)x^n$ □

3. $(\ln x)' \overset{\text{def}}{=} \lim \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim \frac{\ln \frac{x+h}{h}}{h} = \lim \frac{\ln(1 + {}^{h}\!/_{x})}{h} = \frac{1}{x} \cdot \lim \frac{\ln(1 + {}^{h}\!/_{x})}{{}^{h}\!/_{x}} = \frac{1}{x}$
4. $(x^r)' = (e^{r \ln x})' \underset{\text{суперпозиция}}{=} (e^{r \ln x})' \cdot (r \ln x)' = e^{r \ln x} \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$

64. Производные $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

Утверждения.

1. $(\sin x)' \overset{\text{def}}{=} \lim \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \underset{\left(\substack{\text{разность} \\ \text{синусов}}\right)}{=} \lim \frac{2 \sin {}^{h}\!/_{2} \cdot \cos(x + {}^{h}\!/_{2})}{h} = \lim \cos(x + {}^{h}\!/_{2}) \cdot \lim \frac{\sin {}^{h}\!/_{2}}{{}^{h}\!/_{2}} = \cos x$
2. $(\cos x)' \underset{\cos x = \sin(x + {}^{\pi}\!/_{2})}{=} \left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x$
3. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin^x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

65. Производные $\arcsin x$, $\arccos x$

Пользуемся формулой производной обратной функции

Утверждения.

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Доказательство. $\arcsin x : (-1, 1), \qquad f(x) = \arcsin x, \qquad g(y) = \sin y\big|_{[-\pi/2, \pi/2]}$

$$\left.\begin{aligned} x \in (-1, 1) \\ \arcsin x = y \end{aligned}\right\} \iff x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Доказательство. $\arccos x : (-1, 1), \qquad f(x) = \arccos x, \qquad g(y) = \cos y\big|_{[0, \pi]}$

$$\left.\begin{aligned} x \in (-1, 1) \\ y = \arccos x \end{aligned}\right\} \iff x = \cos y$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

66. Производные $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$

Пользуемся формулой производной обратной функции

Утверждения.

1. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Доказательство. $f(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad \operatorname{tg} y\big|_{(-\pi/2, \pi/2)}$

$$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1 = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} \implies \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

□

2. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Доказательство. $f(x) = \operatorname{arcctg} x, \qquad g(y) = \operatorname{ctg} y\big|_{(0,\pi)}$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y$$

$$x^2 + 1 = \operatorname{ctg}^2 y + 1 = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} + 1 = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\sin^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y} \implies \sin^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

□

67. Теорема Ферма

Теорема 21. $f : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in (a,b), \quad x_0$ – локальный экстремум $f, \quad \exists\, f'(x_0)$

$$\implies f'(x_0) = 0 \tag{108}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

- x_0 – локальный максимум f
  По определению локального максимума:

  $$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (a,b) \qquad f(x) \leq f(x_0) \tag{109}$$

  Будем рассматривать такие ε, при которых $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$
  Рассмотрим h:

  - $0 < h < \varepsilon$

    $$(109) \implies f(x_0 + h) \leq f(x_0) \implies \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \implies \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{110}$$

  - $-\varepsilon < h < 0$

    $$(109) \implies f(x_0 + h) \leq f(x_0) \implies \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \implies \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \tag{111}$$

  $$(110), (111) \implies (108)$$

- x_0 – локальный минимум f
  Рассмотрим $g(x) := -f(x)$

  $$f(x) \geq f(x_0) \iff -f(x) \leq -f(x_0) \iff g(x) \leq g(x_0)$$

  То есть, x_0 – локальный максимум g
  По свойствам производных, $\exists\, g'(x_0) = -f'(x_0)$
  По только что доказанному, $g'(x_0) = 0 \implies f'(x_0) = -g'(x_0) = 0$

□

68. Теорема Ролля

Теорема 22. $f \in C([a,b]), \qquad \forall x \in (a,b)\ \exists\, f'(x), \qquad f(a) = f(b) \qquad \implies \exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$

Доказательство. Существует несколько случаев:

1. $f(x) \equiv \mathrm{const} \implies \forall x \in (a,b) \quad f'(x) = 0$

2. $f(x) \not\equiv \text{const} \implies \exists x_1 \in (a,b) : f(x_1) \neq f(a)$

   (a) $f(x_1) > f(a)$

   (b) $f(x_1) < f(a)$

Случаи аналогичные, поэтому рассотрим только 2b
Вспомним вторую теорему Вейерштрасса:

$$f \in C([a,b]) \implies \exists x_0 \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0)$$

То есть, f имеет в точке x_0 локальный максимум, а значит, по теореме Ферма

$$\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$$

□

69. Теорема Лагранжа

Теорема 23. $f \in C([a,b]), \qquad \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x)$

$$\implies \exists x_0 \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a) \tag{112}$$

Доказательство. Положим $g(x) := \Big(f(x) - f(a)\Big)(b-a) - \Big(f(b) - f(a)\Big)(x-a)$
Очевидно, что $g \in C([a,b])$, а также $\forall x \in (a,b)\ \exists g'(x)$
Продифференцируем:

$$g'(x) = (b-a) \cdot f'(x) - \Big(f(b) - f(a)\Big) \cdot (x-a)' = (b-a) \cdot f'(x) - \Big(f(b) - f(a)\Big) \tag{113}$$

Подставим a и b:

$$\begin{cases} g(a) = \Big(f(a) - f(a)\Big)(b-a) - \Big(f(b) - f(a)\Big)(a-a) = 0 \\ g(b) = \Big(f(b) - f(a)\Big)(b-a) - \Big(f(b) - f(a)\Big)(b-a) = 0 \end{cases}$$

Значит, можно применить теорему Ролля:

$$\exists x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$$

Подставим g' из (113):

$$g'(x_0) = (b-a)f'(x_0) - \Big(f(b) - f(a)\Big) = 0 \implies (112)$$

□

70. Теорема Коши

Теорема 24. $f \in C([a,b]), \qquad g \in C([a,b]), \qquad \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x), g'(x), \qquad \forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0$

$$\implies \exists x_0 \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \tag{114}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию h:

$$h(x) := \Big(g(x) - g(a)\Big)\Big(f(b) - f(a)\Big) - \Big(f(x) - f(a)\Big)\Big(g(b) - g(a)\Big)$$

Очевидно, что $h \in C([a,b])$ и $\forall x \in (a,b)\ \exists h'(x)$

Продифференцируем:

$$h'(x) = \Big(f(b) - f(a)\Big)g'(x) - \Big(g(b) - g(a)\Big)f'(x) \tag{115}$$

Подставим a и b:

$$\begin{cases} h(a) = \Big(g(a) - g(a)\Big)\Big(f(b) - f(a)\Big) - \Big(f(a) - f(a)\Big)\Big(g(b) - g(a)\Big) = 0 \\ h(b) = \Big(g(b) - g(a)\Big)\Big(f(b) - f(a)\Big) - \Big(f(b) - f(a)\Big)\Big(g(b) - g(a)\Big) = 0 \end{cases}$$

Значит, по теореме Ролля, $\exists\, x_0 \in (a, b) : h'(x_0) = 0$
Подставим h' из (115):

$$h'(x_0) = \Big(f(b) - f(a)\Big)g'(x) - \Big(g(b) - g(a)\Big)f'(x) = 0 \iff (114)$$

□

71. Правило Лопиталя с $f(a) = g(a) = 0$

Теорема 25. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \xrightarrow[x\to a+0]{} 0, \quad g(x) \xrightarrow[x\to a+0]{} 0$

$$\forall x \in (a, b) \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \exists\, f'(x), g'(x) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x\to a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}} \tag{116}$$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to a+0]{} A \tag{117}$$

Доказательство. Положим $f(a) := 0$ и $g(a) := 0$
Тогда $f, g \in C\big([a, b)\big)$
Возьмём $b > x > a$, и к $[a, x]$ применим теорему Коши:

$$\exists\, c \in (a, x) : \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \tag{118}$$

Поскольку мы положили $f(a)$ и $g(a)$ равными нулю, то

$$(118) \implies \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \tag{119}$$

$$(116) \implies \frac{g(x)}{f(x)} \to A \underset{(119)}{\iff} \frac{g'(x)}{f'(x)} \to A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \omega(A)\ \exists\, \delta > 0 : \forall y \in (a, a + \delta) \quad \frac{g'(y)}{f'(y)} \in \omega(A) \tag{120}$$

Возьмём $x \in (a, a + \delta)$:

$$c \in (a, x) \implies c \in (a, a + \delta)$$

При таких c:

$$(120) \implies \frac{g'(c)}{f'(c)} \in \omega(A) \underset{(119)}{\iff} \frac{g(c)}{f(c)} \in \omega(A) \implies (117)$$

□

Теорема 26. $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$, $\quad g(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$, $\quad \exists \lim\limits_{x \to a+0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\forall x \in (a, b) \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \exists\, f'(x), g'(x) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to b-0]{} A$$

Доказательство. Совершенно аналогично □

72. Правило Лопиталя с $g(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

Теорема 27. $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$

$$\forall x \in (a, \infty) \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \exists\, f'(x), g'(x) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} A \tag{121}$$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} A \tag{122}$$

Доказательство.

$$(121) \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists\, L_1 : \forall x > L_1 \quad \frac{g'(x)}{f'(x)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \tag{123}$$

Возьмём $x > x_0 > L_1$ и применим теорему Коши к $[x_0, x]$:

$$\exists\, c \in (x_0, x) : \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g'(c)}{f'(c)} \tag{124}$$

В силу выбора x и x_0 получаем $c > L_1$, то есть

$$(123) \implies \frac{g'(c)}{f'(c)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \tag{125}$$

Поделим левую часть (124) на $f(x)$:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{g(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \tag{126}$$

Получаем:

$$\frac{\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{g(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \underset{(126)}{=} \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \underset{(124)}{=} \frac{g'(c)}{f'(c)} \underset{(125)}{\in} (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \tag{127}$$

Возьмём $L_2 \geq L_1$, такое, что:

$$\forall x > L_2 \quad \begin{cases} \left|\frac{g(x_0)}{f(x)}\right| < \varepsilon & (128) \\ \left|\frac{f(x_0)}{f(x)}\right| < \varepsilon & (129) \end{cases}$$

НУО[a] возьмём $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$$(128),(129) \implies \forall x > L_2 \qquad -2\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{2}} < \frac{\frac{g(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} < \frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{2}} = 2\varepsilon$$

Прибавим к этому неравенству (127):

$$A - \varepsilon - 2\varepsilon < \frac{\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{g(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} + \frac{\frac{g(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} < A + \varepsilon + 2\varepsilon$$

$$A - 3\varepsilon < \frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} - \frac{\frac{g(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} + \frac{\frac{g(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} < A + 3\varepsilon$$

$$A - 3\varepsilon < \frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} < A + 3\varepsilon$$

Возьмём правое неравенство и домножим на знаменатель:

$$\frac{g(x)}{f(x)} < (A+3\varepsilon)\left(1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\right) \underset{(128)}{<} (A+3\varepsilon)(1+\varepsilon) = A + (A+3)\varepsilon + 3\varepsilon^2$$

Проделаем то же самое с левым неравенством:

$$\frac{g(x)}{f(x)} > (A-3\varepsilon)\left(1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\right) \underset{(128)}{<} (A-3\varepsilon)(1+\varepsilon) = A - (A+3)\varepsilon + 3\varepsilon^2$$

В силу произвольности ε получаем $\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} A$, что и требовалось доказать ☐

[a]всё равно нужно брать произвольно малый

73. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

Утверждение 18. $x > 1, \qquad r > 0 \implies \frac{\ln x}{x^r} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Доказательство. Возьмём $g(x) = \ln x$ и $f(x) = x^r$

Очевидно, что $g'(x) = \frac{1}{x}$ и $f'(x) = rx^{r-1}$

Применим правило Лопиталя для $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$:

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{rx^{r-1}} = \frac{1}{rx^r} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \implies \frac{\ln x}{x^r} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

☐

74. Определение $f^{(n)}(x)$, $n \geq 2$; свойства

Определение 21. $f : (a,b) \to \mathbb{R}, \qquad \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x), \qquad x_0 \in (a,b), \qquad f' : (a,b) \to \mathbb{R}$

Пусть $\exists\,(f')'(x_0)$. Тогда говорят, что существует вторая производная функции f:

$$\exists\, f''(x_0) \coloneqq (f')'(x_0)$$

Пусть $\forall x \in (a,b)\ \exists\, f''(x)$. Тогда получаем функцию $f'' : (a,b) \to \mathbb{R}$. Если существует её производная, то говорят, что f имеет третью производную:

$$f'''(x_0) \coloneqq (f'')'(x_0)$$

Обозначение.

$$\begin{gathered} f^{(1)}(x) \coloneqq f'(x) \\ f^{(2)}(x) \coloneqq f''(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) \end{gathered}$$

Свойство (Аддитивность). $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in (a,b) \begin{cases} \exists\, f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x) \\ \exists\, g'(x), g''(x), ..., g^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

$$\exists\, x_0 \in (a,b) : \begin{cases} \exists\, f^{(n)}(x_0) \\ \exists\, g^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

$$\implies \exists\,(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$$

Доказательство. **Индукция** по n:

- **База.** $n = 1$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- **Переход.** Пусть $(f+g)^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x), \qquad x \in (a,b)$

$$(f+g)^{(n+1)} = \left((f+g)^{(n)}\right)'(x_0) = \left(f^{(n)} + g^{(n)}\right)'(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0) + \left(g^{(n)}\right)'(x_0) = \\ = f^{(n+1)}(x_0) + g^{(n+1)}(x_0)$$

□

Свойство (Линейность). $f : (a,b) \to \mathbb{R}, \qquad \forall x \in (a,b)\ \exists\, f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x)$
$\exists\, x_0 \in (a,b) : \exists\, f^{(n)}(x_0), \qquad c \in \mathbb{R}$

$$\implies \exists\,(cf)^{(n)}(x_0) = cf^{(n)}$$

Доказательство. **Индукция** по n:

- **База.** $n = 1$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

- **Переход.** Пусть $(cf)^{(n)}(x) = cf^{(n)}(x), \qquad x \in (a,b)$

$$(cf)^{(n+1)}(x_0) = \left((cf)^{(n)}\right)'(x_0) = \left(cf^{(n)}\right)'(x_0) = c\left(f^{(n)}\right)'(x_0) = cf^{(n+1)}(x_0)$$

□

75. Вычисление $\left((x-a)^m\right)^{(n)}$

- $m \notin \mathbb{N}$:

– Если $m \notin \mathbb{Z}$, то $x > -a$
– Если $m \in \mathbb{Z}$, то $x \neq -a$

$$\Big((x+a)^m\Big)' = m(x+a)^{m-1}$$

$$\Big((x+a)^m)\Big)'' = \Big(m(x+a)^{m-1}\Big)' = m(m-1)(x-a)^{m-2}$$

$$\Big((x+a)^m\Big)''' = \Big(m(m-1)(x+a)^{m-2}\Big)' = m(m-1)(m-2)(x+a)^{m-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m \neq 1, \quad m \neq 2: \qquad \Big((x+a)^m\Big)^{(n)} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(x+a)^{m-n}$$

При этом, ни один из множителей не равен нулю, то есть $m \neq n-1$

- $m \in \mathbb{N}$
  – $m = 1$

$$(x+a)' = 1$$

$$(x+a)'' = 1' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x+a)^{(n)} = 0, \qquad n \geq 2$$

  – $m = 2$

$$\Big((x+a)^2\Big)' = 2(x+a)$$

$$\Big((x+a)^2\Big)'' = \Big(2(x+a)\Big)' = 2$$

$$\Big((x+a)^2\Big)''' = 2' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Big((x+a)^2\Big)^{(n)} = 0, \qquad n \geq 3$$

  – $m \geq 3$

$$\Big((x+a)^m\Big)' = m(x+a)^{m-1}$$

$$\Big((x+a)^m\Big)'' = \Big(m(x+a)^{m-1}\Big)' = m(m-1)(x+a)^{m-2}$$

$$\Big((x+a)^m\Big)''' = \Big(m(m-1)(x+a)^{m-2}\Big)' = m(m-1)(m-2)(x+a)^{m-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l < k-1: \qquad \Big((x+a)^m\Big)^{(n)} = m(m-1)...(m-n+1)(x+a)^{m-n}$$

$$\Big((x+a)^m\Big)^{(m-n)} = m(m-1)...\cdot 2(x+a)$$

$$\Big((x+a)^m\Big)^{(m)} = m!(x+a)' = m!$$

$$\Big((x+a)^m\Big)^{(m+1)} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Big((x+a)^m\Big)^{(n)} = 0, \qquad n \geq m+1$$

– $x = -a$

   * $n < m$

$$\Big((x+a)^m\Big)^{(n)}\Big|_{x=-a} = 0$$

   * $n > m$

$$\Big((x+a)^m\Big)^{(n)}\Big|_{x=-a} = 0$$

76. Формула Тейлора для $P(x)$

Мы *только что* вывели, что

$$\begin{cases} \Big((x+a)^k\Big)^{(l)} = 0, & k \neq l \\ \Big((x+a)^k\Big)^{(k)} = k! \end{cases}$$

То есть:

$$\left(\frac{1}{k!}(x-a)^k\right)^{(l)}\Big|_{x=-a} = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k \end{cases}$$

Пусть заданы $b_0, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$

Возьмём многочлен $P(x) \coloneqq b_0 + b_1(x-a) + \frac{b_2}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{b_n}{n!}(x-a)^n$

Очевидно, что. $P(a) = b_0, \qquad P'(a) = b_0' + \Big(b_1(x-a)'\Big)\Big|_{x=a} + ... + \left(\frac{b_n}{n!}((x-a)^n)'\right)\Big|_{x=a} = b_1$

Также,

Очевидно, что. При $1 \le k \le n$:

$$P^{(k)}(a) = b_0^{(k)} + \Big(b(x-a)^{(k)}\Big)\Big|_{x=a} + ... + \left(\frac{b_k}{k!}((x-a)^k)^{(k)}\right)\Big|_{x=a} + ... + \left(\frac{b_n}{n!}((x-a)^n)^{(k)}\right)\Big|_{x=a} = b_k$$

Утверждение 19. $P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + ... + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

77. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Лемма 3. $g \in C((p,q))$

- Если $n = 1$, то $g'(a) = 0, \quad g(a) = 0$
- Если $n > 1$, то $\forall x \in (p,q)\ \exists g^{(n-1)}(x)$ и $\exists g^{(n)}(a)$. При этом, $g(a) = 0, g'(a) = 0, ..., g^{(n-1)}(a) = 0, g^{(n)}(a) = 0$

$$\implies \frac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Доказательство. Индукция по n

- **База.** $n = 1$
  Поскольку существует $g'(a)$, то g дифференцируема в точке a:

$$g(x) = \underbrace{g(a)}_{=0} + \underbrace{g'(a)}_{=0}(x-a) + r(x) = r(x)$$

  При этом $\frac{r(x)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} 0$, то есть $\frac{g(x)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

- **Переход.** Пусть утверждение леммы верно при некотором $n - 1 \ge 1$, то есть, если мы имеем функцию $h : h(a) = 0, ..., h^{(n-1)} = 0$ и $\forall x \in (p, q)\ \exists h^{(n-2)}(x)$, то

$$\frac{h(x)}{(x-a)^{n-1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \tag{130}$$

Возьмём $h(x) \coloneqq g'(x)$

Определим функцию $\delta(x) \coloneqq \dfrac{g'(x)}{(x-a)^{n-1}}, \quad \delta(a) \coloneqq 0$

Тогда, в новых обозначениях,

$$(130) \iff \delta(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Очевидно, что. $g(x) = g(x) - g(a)$

Применим к $g(x)$ теорему Лагранжа:

$$\exists\, c \in (x, a) : g(x) = g(x) - g(a) = g'(c)(x-a) \tag{131}$$

Очевидно, что. $g'(x) \overset{\text{def}}{=} \delta(x) \cdot (x-a)^{n-1}$

Подставим это в (131):

$$g(x) = \delta(c) \cdot (c-a)^{n-1}(x-a)$$

То есть,

$$\frac{g(x)}{(x-a)^n} = \delta(c) \cdot \frac{(c-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}$$

При этом, $|c-a| \overset{\text{def}}{<} |x-a|$ (т. к. $c \in (x, a)$)

Тогда $\dfrac{(c-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}} < 1$ и

$$\left|\frac{g(x)}{(x-a)^n}\right| \leq |\delta(c)| \tag{132}$$

(равенство достигается при $\delta(x) = 0$, то есть при $x = a$)

Поскольку $c \overset{\text{def}}{\in} (x, a)$, то $c \xrightarrow[x \to a]{} a$, а δ непрерывна в a (мы её так доопределили)

Получается (применяя суперпозицию непрерывных функций), что $|\delta(c)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, что (по определению δ) эквивалентно $\dfrac{g'(x)}{(x-a)^{n-1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0$, то есть (по (132)) $\dfrac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ $\square$

Теорема 28. $f \in C((p, q)), \qquad a \in (p, q)$

- Если $n = 1$, то $\exists\, f'(a)$
- Если $n > 1$, то $\forall x \in (p, q)\ \exists\, f^{(n-1)}(x)$ и $\exists\, f^{(n)}(a)$

$$\implies f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x) \tag{133}$$

$$\frac{r(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \tag{134}$$

Доказательство. Рассмотрим полином $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Очевидно, что.

$$\begin{cases} P(a) = f(a) \\ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \end{cases} \tag{135}$$

Положим $g(x) \coloneqq f(x) - P(x)$

По одному из свойств производных, $\forall x \in (p, q)\ \exists\, g^{(n-1)}(x), \exists\, g^{(n)}(a)$

Очевидно, что. По определению $g(x)$, (135) $\implies g(a) = 0, g'(a) = 0, ..., g^{(n)} = 0$

По лемме получаем $\dfrac{g(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0$

При этом, по (133) $f(x) = P(x) + r(x)$, то есть $r(x) \equiv g(x)$ $\square$

78. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Теорема 29. $f : (p,q) \to \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1 \quad \forall x \in (p,q)\ \exists\, f^{(n+1)}(x), \quad a \in (p,q), \quad x \in (p,q), \quad x \neq a$

$$\implies \exists\, c \in \Big(\min(a,x), \max(a,x)\Big) : f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{a+1} \tag{136}$$

Доказательство. Зафиксируем x и рассмотрим функцию от y:

$$\varphi(y) \coloneqq f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) - \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n \tag{137}$$

Очевидно, что. $\forall y \in (p,q)\ \exists\, \varphi'(y)$

Рассмотрим производную **по $\boldsymbol{y}$**:

$$\varphi'(y) \overset{\text{def}}{=} \Big(f(x)\Big)' - f'(y) - \underbrace{\Big(f'(y)(x-y)\Big)'}_{\text{производная произведения}} - \Big(\frac{f''(y)}{2!}\underbrace{(x-y)^2}_{\text{суперпозиция}}\Big)' - \ldots - \Big(\frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n\Big)' =$$

$$= 0 - \cancel{f'(y)} - \Big(\cancel{f''(y)(x-y)} - \cancel{f'(y)\cdot 1}\Big) - \Big(\cancel{\frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2} - 2\cdot\cancel{\frac{f''(y)}{2!}(x-y)}\Big) - \ldots -$$

$$- \Big(\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \cancel{\frac{n}{n!}f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1}}\Big) \underset{n/n! = 1/(n-1)!}{=} -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \tag{138}$$

Очевидно, что. $\varphi(x) = 0$

Положим $r \coloneqq \varphi(a)$

Рассмотрим функцию $\psi(y) \coloneqq (x-y)^{n+1}, \qquad y \in [\min(a,x), \max(a,x)]$

Очевидно, что. $\psi(x) = 0, \qquad \psi(a) = \psi(x-a)^{n+1}$

Очевидно, что. $\psi'(y) = -(n+1)(x-y)^n, \qquad \forall y \in (\min(a,x), \max(a,x)) \quad \psi'(y) \neq 0$

Применим теорему Коши:

$$\exists\, c \in (\min(a,x), \max(a,x)) : \frac{\varphi(a) - \varphi(x)}{\psi(a) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \tag{139}$$

Вычислим левую часть: $\dfrac{\varphi(a) - \varphi(x)}{\psi(a) - \psi(x)} = \dfrac{r - 0}{(x-a)^{n+1} - 0} = \dfrac{r}{(x-a)^{n+1}}$

Вычислим правую часть: $\dfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \dfrac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!(n+1)} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$

Перенесём знаменатель из правой части в левую: $r = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Подставим $y = a$ в (137):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\varphi(a)}_{\overset{\text{def}}{=} r} =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$\square$

79. Применение формулы Тейлора к e^x, $\cos x$, $\sin x$

Будем пользоваться формулой Тейлора **с остатком в форме Лагранжа** при $a = 0$
Будем обозначать $\overset{T}{=}$ – "по формуле Тейлора"
c везде из теоремы Тейлора, $c \in \Big(\min(0, x), \max(0, x)\Big)$

Утверждения.

1. $e^x \overset{T}{=} e^0 + (e^0)'(x-0) + ... + \frac{(e^0)^{(n)}}{n!}(x-0)^n + \frac{(e^c)^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

2. $\sin x$

   Очевидно, что. $(\sin x)^{(2n)}\big|_{x=0} = \sin 0 = 0$

   Очевидно, что. $(\sin x)^{(2n-1)}\big|_{x=0} = (-1)^{n-1} \cdot \cos 0 = (-1)^{n-1}$

$$\sin x \overset{T}{=} \sin 0 + (\sin 0)'(x-0) + ... + \frac{(\sin 0)^{(n)}}{n!}(x-0)^n + \frac{(\sin c)^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3. $\cos x$

   Очевидно, что. $(\cos x)^{(2n-1)}\big|_{x=0} = \sin 0 = 0$

   Очевидно, что. $(\cos x)^{(2n)}\big|_{x=0} = (-1)^n \cdot \cos 0 = (-1)^n$

$$\cos x \overset{T}{=} \cos 0 + (\cos 0)'(x-0) + ... + \frac{(\cos 0)^{(n)}}{n!}(x-0)^n + \frac{(\cos c)^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

80. Применение формулы Тейлора к $(1+x)^r$, $\ln(1+x)$

Будем пользоваться формулой Тейлора **с остатком в форме Лагранжа** при $a = 0$
Будем обозначать $\overset{T}{=}$ – "по формуле Тейлора"
c везде из теоремы Тейлора, $c \in \Big(\min(0, x), \max(0, x)\Big)$

- $(1+x)^r$

  Очевидно, что. $\Big((1+x)^r\Big)^{(n)}\Big|_{x=0} = r(r-1)...(r-n+1)$

$$(1+x)^r \overset{T}{=} (1+0)^r + \Big((1+0)^r\Big)'(x-0) + ... + \frac{\Big((1+0)^r\Big)^{(n)}}{n!}(x-0)^n + \frac{\Big((1+c)^r\Big)^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} =$$
$$= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{r(r-1)...(r-n+1)}{n!}x^n + \frac{r(r-1)...(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!}(1+c)^{r-n-1}x^{n+1}$$

- $\ln(1+x)$

Очевидно, что. $\Big(\ln(1+x)\Big)'\Big|_{x=0} = 1 \cdot \dfrac{1}{1+0} = 1$

Очевидно, что. $\forall n \geq 2 \quad \Big(\ln(1+x)\Big)^{(n)}\Big|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+0)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Вспомним, что $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

$$\ln(1+x) \overset{T}{=} \ln(1+0) + \Big(\ln(1+0)\Big)'(x-0) + \ldots + \frac{\Big(\ln(1+0)\Big)^{(n)}}{n!}(x-0)^n + \frac{\Big(\ln(1+c)\Big)^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (1+c)^{-n-1} \cdot x^{n+1}$$

81. Достаточное условие экстремума с применением $f''(x)$

Теорема 30. $f : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x), \quad x_0 \in (a,b), \quad \exists f''(x_0), \quad f'(x_0) = 0$

- $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ – строгий локальный минимум f
- $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ – строгий локальный максимум f

Доказательство (для максимума). Применим формулу Тейлора с остатком в форме Пеано (до второго члена):

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + r(x) & (140) \\ \dfrac{r(x)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 & (141) \end{cases}$$

По условию, $f'(x_0) = 0$, а значит,

$$(140) \iff f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + r(x) \qquad (142)$$

$$(141) \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon\ \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \quad \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^2}\right| < \varepsilon$$

Возьмём $\varepsilon := \frac{1}{4}f''(x_0)$. Теперь

$$(141) \overset{\text{def}}{\iff} \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \quad \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^2}\right| < \varepsilon = \frac{1}{4}f''(x_0) \qquad (143)$$

Очевидно, что. $(142) \iff f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 - |r(x)|$ (равенство достигается при неположительных $r(x)$)

Очевидно, что. $(143) \iff |r(x)| < \frac{1}{4}f''(x_0)(x-x_0)^2$

Подставим второе в первое:

$$\forall \underset{x \neq x_0}{x \in \omega(x_0)} \quad f(x) > f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 - \frac{1}{4}f''(x_0)(x-x_0)^2 = f(x_0) + \frac{1}{4}\underbrace{f''(x_0)}_{>0}(x-x_0)^2 > f(x_0)$$

□

82. Изучение наличия локального экстремума с применением $f^{(n)}(x), n \geq 3$

Теорема 31 (достаточное условие существования локального экструмума чётной производной).
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in (a,b) \begin{cases} \exists\, f'(x), f''(x), ..., f^{(2n-1)}(x) \\ \exists\, f^{(2n)}(x_0) \end{cases}$$

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, ..., f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(2n)}(x_0) \neq= 0$

- Если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 – строгий локальный минимум
- Если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 – строгий локальный максимум

Доказательство. Применим формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} + r(x) & (144) \\ \frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n}} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 & (145) \end{cases}$$

По условию, все производные от x_0, кроме $2n$-ной, равны нулю, а значит:

$$(144) \iff f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(2n!)}f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} + r(x) \tag{146}$$

$$(145) \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon\ \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \quad \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n}}\right| < \varepsilon$$

В том числе, при $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0)$:

$$(145) \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon\ \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \quad \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n}}\right| < \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0) \tag{147}$$

Очевидно, что. $(146) \iff f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} - |r(x)|$

Очевидно, что. $(147) \iff |r(x)| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^2$

Подставим второе в первое:

$$f(x) > f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n!)}(x-x_0)^{2n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} = f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n} > f(x_0)$$

□

Теорема 32 (достаточное условие отсутсвия локального экструмума нечётной производной).
$f : (a,b) \to \mathbb{R}, \qquad x_0 \in (a,b)$

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in (a,b) \begin{cases} \exists\, f'(x), f''(x), ..., f^{(2n)}(x) \\ \exists\, f^{(2n+1)}(x_0) \end{cases}$$

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, ..., f^{(2n)}(x_0) = 0, \qquad f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано (учитывая, что, по условию, почти все производные от x_0 равны нулю):

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} + r(x) & (148) \\ \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n+1}}\right| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \iff \forall \varepsilon\ \exists \omega(x_0) : \forall x \in \omega(x_0) \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n+1}}\right| < \varepsilon & (149) \end{cases}$$

Положим $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)|$:

$$(149) \iff \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^{2n+1}}\right| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)| \tag{150}$$

$$(150) \iff |r(x)| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}| \iff$$
$$\iff -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}| < r(x) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}|$$

Подставим это в (148):

$$f(x_0) + \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}| < f(x) <$$
$$< f(x_0) + \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}|$$

Пусть $f^{(2n+1)} > 0$ (иначе рассуждения аналогичные)
Рассмотрим два случая:

- $x > x_0$:

  Очевидно, что. $(x-x_0)^{2n+1} > 0$

  $$f(x) > f(x_0) + \frac{1}{(2n+1)!}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} =$$
  $$= f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} > f(x_0)$$

- $x < x_0$:

  Очевидно, что. $(x-x_0)^{2n+1} < 0$

  $$f(x) < f(x_0) + \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} f^{2n+1}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} =$$
  $$= f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1} < f(x_0)$$

□

83. Правило Бернулли-Лопиталя с использованием $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$

Теорема 33. $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in (a,b)$, $\quad \forall n \geq 2 \quad x \neq x_0 \implies f(x) \neq 0$

$$\forall x \in (a,b) \begin{cases} \exists\, f'(x), ..., f^{(n-1)}(x) \\ \exists\, g'(x), ..., g^{(n-1)}(x) \\ \exists\, f^{(n)}(x_0), \quad f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

$f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad g(x_0) = g'(x_0) = ... = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)} \neq 0$

$$\implies \frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{g^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)}$$

Доказательство. Применим формулу Тейлора с остатком в форме Пеано, учитывая, что почти все производные равны нулю:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_1(x)}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_2(x)} = \frac{g^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + n!r_1(x)}{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + n!r_2(x)} = \frac{g^{(n)}(x_0) + n! \cdot \overbrace{\frac{r_1(x)}{(x-x_0)^n 2}}^{\to 0}}{f^{(n)}(x_0) + n! \cdot \underbrace{\frac{r_2(x)}{(x-x_0)^n}}_{\to 0}} \xrightarrow[x\to x_0]{}$$

$$\to \frac{g^{(n)}(x_0)+0}{f^{(n)}(x_0)+0} = \frac{g^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)}$$

□