Оглавление

Глава 1

Криволинейный интеграл

1.1. Ориентация кривой

Определение 1. $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \geq 2}$ — разомкнутая кривая.
$\Gamma(a)$ называется началом кривой, $\quad \Gamma(b)$ — концом.
Начало и конец задают ориентацию кривой.

$$a < c_1 < \cdots < c_m < b$$

Точки $\Gamma(a), \Gamma(c_1), \ldots, \Gamma(c_m), \Gamma(b)$ проходятся в соответствии с выбранной ориентацией.

Рассмотрим образ кривой:

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma(a) =: A, \qquad \Gamma(b) =: B, \qquad \Gamma(c_k) =: M_k$$

Точки $A, M_1, \ldots, M_m, B$ проходятся в соотвествии с выбранной ориентацией.

Можно выбрать т. н. обратную ориентацию:

$$\Gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma_1(t) := \Gamma(a + b - t)$$

$$\Gamma_1(a) = \Gamma(b), \qquad \Gamma_1(b) = \Gamma(a)$$

Справедливо следующее топологическое утверждение:

Теорема 1. Если имеется разомкнутая или замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$ (здесь имеется в виду образ), то на ней можно ввести одну из двух ориентаций.

Без доказательства. $\square$

1.1.1. Замкнутая кривая

Для замкнутой кривой всё то же самое.

1.1.2. Длина кривой

При определении длины кривой мы вводили следующие суммы (записанные теперь через образ):

$$\sum_{k=0}^{m} \|M_{k+1} - M_k\|$$

Рассмотрим противоположную ориентацию:

$$M'_k = M_{m+1-k}$$

Поменяем индексы:

$$\sum_{k=0}^{m} \|M_{k+1} - M_k\| = \sum_{k=0}^{m} \|M_{m+1-k} - M_{m-k}\| = \sum_{k=0}^{m} \|M'_{k+1} - M'_k\|$$

Таким образом мы доказали, что

Утверждение 1. Длина кривой не зависит от ориентации.

Другая формулировка. Длина кривой зависит только от её образа.

1.1.3. Криволинейный интеграл

Рассмотрим $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — образ замкнутой кривой.
Пусть даны разбиение $\mathtt{T} = \{\, t_k \,\}$ и оснащение $\mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}$.

$$\Gamma(a) = A, \qquad \Gamma(b) = B, \qquad \Gamma(t_k) = M_k$$

$$A = B, \qquad \Gamma(\tau_j) =: N_j$$

Можно переписать суммы Римана в новых обозначениях:

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) = \sum_{k=1}^{m} f(N_k) l\Big(\Gamma(M_{k-1}, M_k)\Big)$$

Они (при стремелении диаметра разбиения к нулю) стремились к интегралу первого рода.
Аналогично длине кривой, здесь можно поменять индексы определённым образом.
Таким образом верно следующее:

Утверждение 2. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

1.2. Криволинейный интеграл второго рода

Обозначение. Ориентирванную кривую будем обозначать $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b])$ или $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$
Противоположно ориентированную кривую будем обозначать $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}([a,b])$ или $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$

Определение 2.

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} \text{— } C^1\text{-кривая}, \qquad f \in \mathcal{C}\Big(\Gamma\Big)$$

Криволинейным интеграл второго рода по ориентированной криивой функции f называется

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\, \mathrm{d}\, x_j := \int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'\, \mathrm{d}\, t$$

Определение 3.

$$c_0 = a < c_1 < \dots < cm < b = c_{m+1}$$

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}[a,b], \qquad \Gamma([c_{k-1}, c_k]) \text{— } C^1\text{-кривая при } k = 1, \dots, m+1$$

Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\, \mathrm{d}\, x_j := \sum_{k=1}^{m+1} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([c_{k-1}, c_k])} f(M)\, \mathrm{d}\, x_j$$

Определение 4. Γ — C^1-кривая, $\qquad f \in \mathcal{C}\Big(\Gamma\Big), \qquad \mathtt{T} = \{\, t_k \,\}_{k=0}^{m}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_k \,\}_{k=1}^{m}, \qquad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$
Суммой Римана для интеграла второго рода будем называть

$$\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j) = \sum_{k=1}^{m} f\big(\Gamma(\tau_k)\big)\Big(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})\Big)$$

Теорема 2. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ — C^1-кривая

$$\Longrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall\mathtt{T}: t_{k+1}-t_k<\delta \quad \forall\mathtt{P} \quad \left|\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f,\mathtt{T},\mathtt{P},j)-\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right|<\varepsilon$$

Доказательство. $\gamma'_\nu \in \mathcal{C}\Big([a,b]\Big)$

$$c_1>0 \quad |\gamma'_n(t)|\le c_1 \quad \forall t\in[a,b], \quad \nu=1,\dots,n \tag{1.1}$$

$$\int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\Gamma(t)\big)\,\mathrm{d}\,t \tag{1.2}$$

$$\Longrightarrow \mathtt{S}(\dots)-\int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t \xlongequal{\text{def }\mathtt{S}}$$
$$=\sum_{k=1}^m\left(f\big(\Gamma(\tau_k)\big)\big(\gamma_j(t_k)-\gamma_j(t_k)\big)-\int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\Gamma(t)\big)\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\xlongequal[\text{ф. Ньютона–Лейбница}]{}$$
$$=\sum_{k=1}^m\left(f\big(\Gamma(\tau_k)\big)\int_{t_{k-1}}^{t_k}\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t-\int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\Gamma(t)\big)\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\xlongequal[\substack{\text{в первом слагаемом вносим константу}\\ \text{разность интегралов как интеграл разности}}]{}$$
$$=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(f\big(\Gamma(\tau_k)\big)-f\big(\Gamma(t)\big)\Big)\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{1.3}$$

По теореме Кантора f равномерно непрерывна на Γ:

$$\exists\lambda>0: \quad \forall M',M''\in\Gamma \quad \Big(\|M''-M'\|<\lambda \implies |f(M'')-f(M')|<\varepsilon\Big) \tag{1.4}$$

В конце прошлой лекции мы выяснили, что

$$|t''-t'|<\delta \implies \|\Gamma(t'')-\Gamma(t')\|\le c_1\sqrt{n}\delta \tag{1.5}$$

c_1 играло ту же роль, что сейчас ε.
Выберем δ так, чтобы выполнялось

$$c_1\sqrt{n}\delta=\lambda \tag{1.6}$$

Если $t_k-t_{k-1}<0$, то при $t\in[t_{k-1},t_k], \quad \tau\in[t_{k-1},t_k]$ выполнено

$$|t-\tau|<\delta, \qquad k=1,\dots,m$$

Тогда

$$(1.4),(1.5),(1.6) \implies \Big|f\big(\Gamma(\tau_k)\big)-f\big(\Gamma(t)\big)\Big|<\varepsilon \tag{1.7}$$

$$\xRightarrow[(1.3)]{}\left|\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(\dots)-\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right| \overset{\triangle}{\le} \sum_{k=1}^m\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(f\big(\Gamma(\tau_k)\big)-f\big(\Gamma(t)\big)\Big)\gamma'_j\,\mathrm{d}\,t\right|\le$$
$$\le\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big|f\big(\Gamma(\tau_k)\big)-f\big(\Gamma(t)\big)\Big|\cdot|\gamma'_j|\,\mathrm{d}\,t<\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varepsilon|\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t=$$
$$=\varepsilon\int_a^b|\gamma'_j(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{|\gamma'_j(t)|\le\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n}{\le} \varepsilon\int_a^b\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t=\varepsilon l(\Gamma)$$

□

Следствие.

$$\Gamma(t_k) =: M_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}, \qquad \Gamma(\tau_k) =: N_k$$

$$\implies x_{jk} = \gamma_j(t_k)$$

$$\implies \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j) = \sum_{k=1}^{m} f(N_k)(x_{jk} - x_{j\ k-1})$$

N_k лежит на дуге $\Gamma(M_{k-1}, M_k)$
В этой формуле нет отображения. Есть только образ и ориентация.
Значит, криволинейный интеграл второго рода зависит только от образа и ориентации кривой.

1.2.1. Важное свойство сумм Римана

Свойство. Определим $t'_\nu := t_{m-\nu}, \quad \tau'_\nu := \tau_{m-\nu+1}$

$$\mathtt{T}' := \{\, t_k \,\}_{k=0}^{m}, \qquad \mathtt{P}' := \{\, \tau_k \,\}_{m=1}^{m}, \qquad M'_\nu = M_{m-\nu}, \qquad N'_\nu = N_{m-\nu+1}$$

В соответствии с выбранной ориентацией проходились точки $M_0, \ldots, M_m$
Точки $M'_0, \ldots, M'_m$ — это те же самые точки, проходимые в обратном порядке. То есть мы имеем дело с противоположной ориентацией $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$

$$x'_{j\nu} = x_{j\ m-\nu}$$

$$\widetilde{\mathtt{S}} = \sum_{k=1}^{m} f(N'_k)(x'_{jk} - x'_{j\ k-1}) = \boxed{\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}', \mathtt{P}', j)} = \sum_{k=1}^{m} f(N_{m-k+1})(x_{j\ m-k} - x_{j\ m-k+1}) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} f(N_{m-k+1})(x_{j\ m-k+1} - x_{j\ m-k}) \xlongequal[m-k+1=:\nu]{} -\sum_{\nu=m}^{1} f(N_\nu)(x_{j\nu} - x_{j\ \nu-1}) \xlongequal[k:=\nu]{} \boxed{-\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j)}$$

1.2.2. Свойства криволинейных интегралов второго рода

Свойства.

1. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j$ — C^1-кривая, $\qquad f \in \mathcal{C}\Big(\Gamma\Big)$

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j$$

Доказательство.

- Докажем для C^1-кривой (не кусочной):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} \quad \forall \mathtt{P} : t_k - t_{k-1} < \delta \quad \left| \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j) - \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j \right| < \varepsilon$$

  В силу важного свойства,

$$\left| \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}', \mathtt{P}', j) - \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j \right| = \\ &\quad = \left| \left(\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j) \right) + \left(\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}', \mathtt{P}', j) \right) \right| \overset{\triangle}{\leq} \\ &\quad \leq \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j) \right| + \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}', \mathtt{P}', j) \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

- Общий случай:

$$\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu \quad \Longleftrightarrow \quad \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{l} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j = \sum_{\nu=1}^{l} \left(- \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j \right) = \\ &\qquad = - \sum_{\nu=1}^{l} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M) \, \mathrm{d}\, x_j \end{aligned}$$

$\square$

2. $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \Gamma(t) \in \mathcal{C}\Big([a, b]\Big), \qquad c \in \mathbb{R}$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{[a,b]}} c \, \mathrm{d}\, x_j = c\big(\gamma_j(b) - \gamma_j(a)\big)$$

В частности, если $\Gamma(a) = \Gamma(b)$, то

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} = \mathrm{d}\, x_j 0$$

Доказательство.

- C^1-кривая

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\, x_j \int_a^b c\gamma_j'(t)\ \mathrm{d}\, t \xlongequal[\text{ф. Ньютона–Лейбница}]{} c\big(\gamma_j(b) - \gamma_j(a)\big)$$

- $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}, \qquad \Gamma([t_{k-1}, t_k])$ — C^1-кривая

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} c\ \mathrm{d}\, x_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{l} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}\,[t_{\nu-1}, t_{\nu}]} = \mathrm{d}\, x_j \sum_{\nu=1}^{l} c\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big) = c\big(\gamma(t_l) - \gamma(t_0)\big) \xlongequal{\text{def } t_0, t_l} c\big(\gamma(b) - \gamma(a)\big)$$

$\square$

3. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}, \qquad f \in \mathcal{C}\Big(\Gamma\Big)$

$$\Bigg|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\, x_j\Bigg| \leq \int\limits_{\Gamma} |f(M)|\ \mathrm{d}\, l(M)$$

Доказательство.

- $\Gamma \in C^1$

$$\Bigg|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\, x_j\Bigg| \overset{\text{def}}{=} \Bigg|\int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'(t)\ \mathrm{d}\, t\Bigg| \leq \int_a^b |f|\big(\Gamma(t)\big)| \cdot |\gamma_j'(t)|\ \mathrm{d}\, t \leq \int_a^b \big|f\big(\Gamma(t)\big)\big|\ \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n\ \mathrm{d}\, t \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Gamma} f(M)\ \mathrm{d}$$

- $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}$ — C^1-кривая

$$\Bigg|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\, x_j\Bigg| \overset{\text{def}}{=} \Bigg|\sum_{\nu=1}^{l} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}} f(M)\ \mathrm{d}\, x_j\Bigg| \leq \sum_{\nu=1}^{l} \Bigg|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}} f(M)\ \mathrm{d}\, x_j\Bigg| \overset{\triangle}{\leq} \sum_{\nu=1}^{l} \int\limits_{\Gamma_{\nu}} |f(M)|\ \mathrm{d}\, l(M) = \int\limits_{\Gamma} f(M)\ \mathrm{d}\, l(M)$$

$\square$