Stable roommates problem

Kratek opis problema in načrt za nadaljnje delo

Martin Pezdir Žiga Potrebuješ

5. januar 2017

Kazalo

1 Uvod

Najin projekt govori o problemu stabilnih sostanovalcev(angleško ime je stable roommates problem). Ta problem je podoben problemu "stabilne poroke", zato si najprej oglejmo ta problem. Problem stabilne poroke sta predstavila David Gale in Lloyd Shapley, kot problem dodeljevanja kanditatov in kanditatk na fakse ob upoštevanju njihovih želja ter želja faksov. V osnovni obliki tega problema imamo dve disjunktne množice z močjo n, v eni so ženske in v drugi moški. Vsak član ene izmed množič ima določeno lastno rangiranje n članov nasprotnega spola od najbolj do najmanj zaželjenega partnerja. Iščemo stabilno prirejanje. Prirejanje je stabilno, če v naši razporeditvi ni nobenega moškega in ženske , v katerem oba preferirata drug drugega bolj, kot pa njuna dodeljena partnerja. Izkaže se, da vedno obstaja vsaj eno stabilno prirejanje.

Problem stabilnih sostanovalcev je verzija problema stabilne poroke, kjer imamo samo eno množico. Vsaka oseba v množici, ki ima sodo kardinalnost n (torej n je sodo število) razvrsti ostalih $n-1$ oseb v zaporedje glede na njihove preference. Naš cilj je poiskati stabilno prirejanje oziroma razdelitev naše množice v množico $n/2$ parov sostanovalcev tako, da ne obstajati dve osebi, ki nista sostanovalca/sostanovalki, ki preferirata drug drugega bolj, kot pa svoja sostanovalca določena v prirejanju. Gale in Shapley sta pokazala, da obstajajo primeri, v katerih ne moremo določiti stabilnega prirejanja v problemu stabilnih sostanovalcev.

2 Opis algoritma

Algoritem, ki reši zgornji problem je podal Robert W. Irving leta 1985. Algoritem določi, če obstaja rešitev problema sostanovalcev in če res obstaja, tudi poiskal ustrezno prirejanje. Algoritem poteka v dveh fazah. V prvi fazi posamezniki iz množice "zasnubijo" drug drugega. Vsak član razvrsti ostale v nek vrstni red, katerega določajo posameznikove preference in sicer po naslednjih pravilih:

- Če posameznik x prejme snubitev od y potem:
    1. To snubitev takoj zavrne, če že ima drugo, boljšo snubitev(torej snubitev od nekega z, ki je v njegovem seznamu preferenc pred y).
    2. Če je ta snubitev boljša od sedanje, to snubitev zadrži v premislek in zavrne slabšo snubitev, ki jo je zadrževal do sedaj.
- Posameznik x zasnubi vse ostale in sicer v vrstnem redu, v katerem se pojavijo v njegovem seznamu preferenc. Pri nekem potencialnem sostanovalcu se ustavi, ko dobi neko obljubo o premisleku za potencialnega sostanovalca in nadaljuje z naslednjim v njegovem seznamu preferenc, ko se pojavi zavrnitev od nekega drugega sostanovalca, s katerim je do sedaj imel oblikovano obljubo o snubitvi.

Posamezniki začnejo snubljenje eden in po eden in v splošnem bo vsako snubljenje posameznika x vodilo k vrsti snubljenj ter zavrnitev. Če se zgodi, da je katerikoli izmed posameznikov v tej fazi zavrnjen od vseh ostalih, nam to pove, da ne obstaja stabilno prirejanje tega problema. V nasprotnem primeru se bo prva faza končala tako, da bo vsak posameznik držal snubitev z nekim drugim posameznikom.
Sedaj lahko naredimo reducirano tabelo snubitev. Če imamo dva posameznika q in p in q obdrži snubitev od p-ja, potem lahko iz zaporedja preferenc posameznika q odstranimo vse posameznike x, ki so rangirani slabše od p, torej x, ki so v seznamu preferenc q za posameznikom p. Simetrično, za vsakega posameznika x odstranimo q is seznama preferenc od x. Tako dobljena reducirana množica se imenuje tabela Faze 1. Če se slučajno zgodi, da je kakšen reduciran seznam preferenc prazen, potem ne obstaja stabilno prirejanje. V nasprotnem primeru se tabela Faze 1 imenuje stabilna tabela.

Pred opisom druge faze je potrebno opisati še kaj je to rotacija v stabilni tabeli T. To je zaporedje $(x_0, y_0), \dots (x_{k-1}, y_{k-1})$, v katerem so x_i različni in y_i je prvi na x_i-tem reduciranem seznamu preferenc, y_{i+1} drugi na x_i-tem reduciranem seznamu preferenc za $i = 0, \dots, k-1$, kjer so indeksi vzeti modulo k.

Drugo fazo lahko v grobem opišem z naslednjo psevdo kodo:

T=tabela Faze 1;
while(TRUE) do:
identificiramo rotacijo r v T;
odstranimo r iz T;
if nek seznam v T postane prazen do:
return null; (ne obstaja stabilno prirejanje)
else if (vsak reduciran seznam v T je velikosti 1)
return prirejanje $M = \{\{x, y\}|$ x in y sta vsebovana v seznamih drug drugega v T $\}$ (to je stabilno prirejanje)
}
Izkaže se, da algoritem za računanje stabilnega problema porabi $O(n^2)$ operacij.

3 Načrt za nadaljnje delo

Cilj najnega projekta je sprogramirati program, ki bo določil ali obstaja stabilno prirejanje v problemu stabilnih sostanovalcev in nato analizirati, kako pogosto se zgodi, da obstaja rešitev. V mislih imava programiranje s pomočjo celoštevilkega linearnega programa, ogledala pa si bova tudi algoritem, ki deluje v polinomskem času. Najverjetnejo bova programirala v R-u, zna pa se zgoditi, da bova uporabljala tudi Python.