SPRAWOZDANIE

Zajęcia: Matematyka konkretna

Prowadzący: prof. dr hab. Vasyl Martsenyuk

Laboratorium Nr 01 Data 28-02-2026 Temat: "Analiza macierzowa w informatyce" Wariant 7	Łukasz Pezda Informatyka II stopień, niestacjonarne, 2 semestr

1. Cel sprawozdania

Zadanie dotyczy kompresji obrazu metodą SVD zgodnie z wariantem zadania.

Jaka powinna być użyta liczba wartości singularnych żeby zachować 90% informacji na obrazie.

2. Opis programu opracowanego

Rozkład SVD to jedna z najważniejszych technik faktoryzacji macierzy. Dowolną macierz rzeczywistą A o wymiarach m x n można rozłożyć na iloczyn trzech macierzy:

$$A = U\mathbf{\Sigma}V^T$$

gdzie:

- U – macierz ortogonalna o wymiarach m x m (lewe wektory singularne),
- $\mathbf{\Sigma}$ – macierz diagonalna o wymiarach m x n, zawierająca na głównej przekątnej nieujemne wartości singularne σ_i ułożone malejąco,
- V^T – transponowana macierz ortogonalna o wymiarach n x n (prawe wektory singularne).

W kontekście analizy obrazów, macierz A reprezentuje natężenie pikseli. Ze względu na fakt, że wartości singularne szybko maleją, odrzucenie najmniejszych z nich pozwala na znaczącą redukcję rozmiaru danych przy minimalnej utracie jakości wizualnej.

Podstawowy rozkład SVD i pseudoodwrotność macierzy

W pierwszej fazie ćwiczenia poddano analizie proste macierze numeryczne przy wykorzystaniu biblioteki scipy.linalg oraz numpy. Obliczono macierz pseudoodwrotną korzystając z gotowej funkcji pinv() oraz algorytmu opartego na SVD.

Obliczenie pseudoodwrotności A^+ metodą SVD opiera się na relacji:

$$A^+ = V\mathbf{\Sigma}^+U^T$$

Macierz $\mathbf{\Sigma}^+$ tworzy się poprzez odwrócenie niezerowych wartości singularnych. Wyniki uzyskane z implementacji własnej za pomocą SVD były tożsame z wynikami wbudowanej funkcji pinv(), co dowodzi poprawności zaimplementowanego algorytmu numerycznego.

```
from numpy import array
from scipy.linalg import svd
A = array([[1, 2], [3, 4], [5, 6]])
print(A)
U, s, VT = svd(A)
print(U)
print(s)
print(VT)
```

```
from numpy import array
from numpy.linalg import pinv
A = array([
    [0.1, 0.2],
    [0.3, 0.4],
    [0.5, 0.6],
    [0.7, 0.8]])
print(A)
B = pinv(A)
print(B)
```

Przetwarzanie i kompresja obrazu

Właściwa część zadania polegała na wczytaniu pliku graficznego, konwersji do skali szarości i zastosowaniu algorytmu SVD przy użyciu funkcji np.linalg.svd.

Następnie przeprowadzono rekonstrukcję obrazu z wykorzystaniem jedynie r początkowych wartości singularnych dla progów r = 5, 20, 100 oraz 650. Do rekonstrukcji posłużyło mnożenie obciętych macierzy:

$$A_r = U_r \boldsymbol{\Sigma}_r V_r^T$$

Wyniki wizualne wygenerowane za pomocą biblioteki matplotlib potwierdzają, że dla małych wartości r (np. r=5) obraz jest całkowicie rozmyty i składa się z bazowych bloków (pionowych/poziomych przejść tonalnych). Wraz ze wzrostem r (np. r=100), jakość drastycznie rośnie, stając się trudną do odróżnienia od oryginału dla ludzkiego oka.

```
from matplotlib.image import imread
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import os
plt.rcParams['figure.figsize'] = [16,8]

A = imread('7.webp')

img = plt.imshow(X)
img.set_cmap('gray')
plt.axis('off')
plt.show()

U, S, VT = np.linalg.svd(X,full_matrices=False)
print(S.shape)
S = np.diag(S)
```

```python
j=0
for r in (5,20,100,650):
    Xapprox = U[:,:r]@S[0:r,:r]@VT[:r,:]
    plt.figure(j+1)
    j += 1
    img = plt.imshow(Xapprox)
    img.set_cmap('gray')
    plt.axis('off')
    plt.title('r='+str(r))
    plt.show()
```

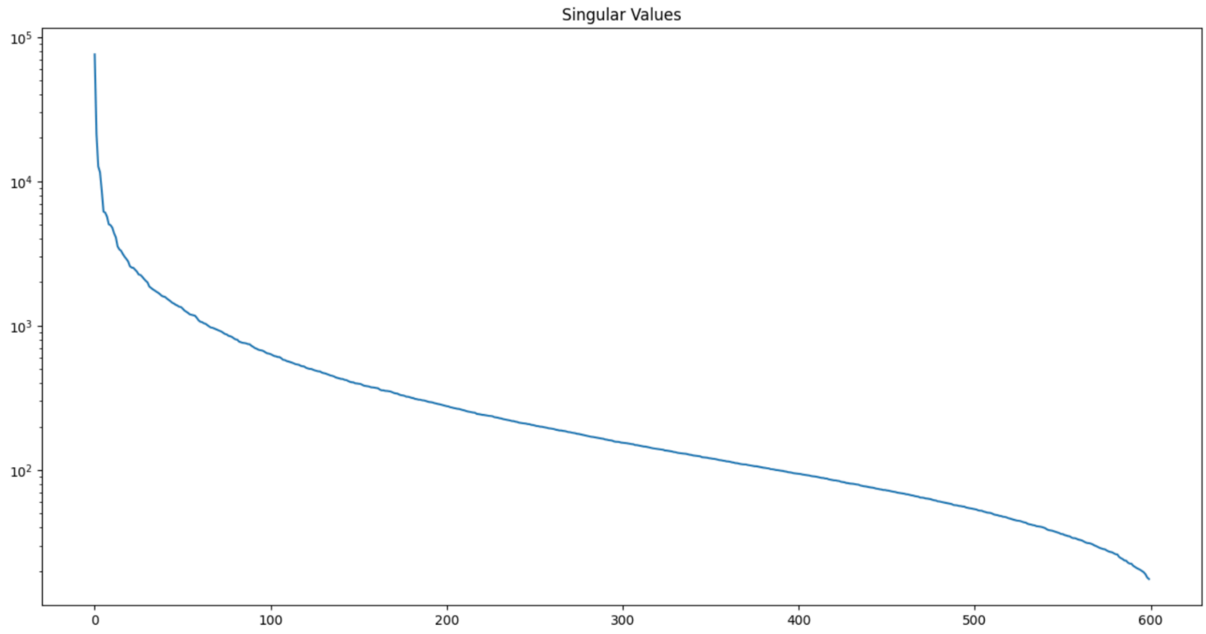
Wykonanie wariantu zadania: Zachowanie 90% informacji

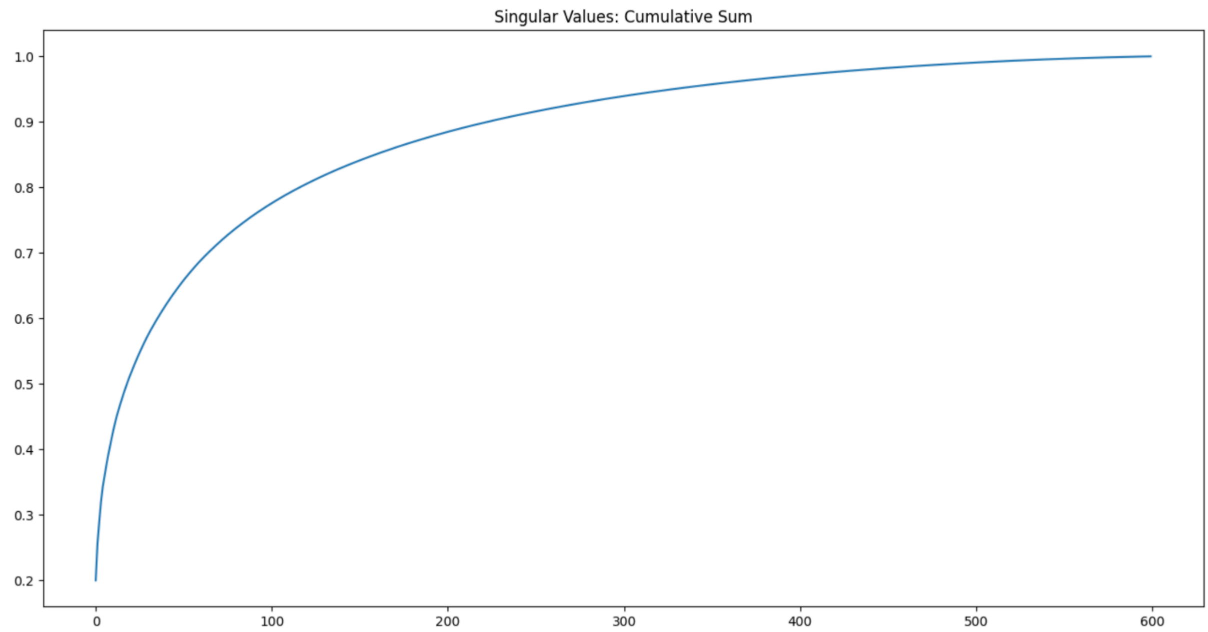
Aby rozwiązać główny problem badawczy – znalezienie liczby r pozwalającej zachować 90% informacji – wykorzystano własności macierzy \Sigma. Ilość "energii" lub informacji w obrazie jest wprost proporcjonalna do sumy wartości singularnych.

Aby to wyznaczyć programistycznie, przebieg zmienności zachowanej informacji w stosunku do liczby użytych wartości singularnych przedstawiono na wykresie skumulowanej sumy. W kodzie zrealizowano to za pomocą algorytmu

```python
info_ratio = np.cumsum(np.diag(S)) / np.sum(np.diag(S))
r_90 = np.argmax(info_ratio >= 0.90) + 1
```

Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych wynika, że aby zachować 90% sumy wartości singularnych badanego obrazu, należy zrekonstruować go za pomocą r = 224 wartości singularnych.


Singular Values
10^5
10^4
10^3
10^2
0
100
200
300
400
500
600


Singular Values: Cumulative Sum
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0
100
200
300
400
500
600

3. Wnioski

Metoda SVD jest niezwykle skutecznym narzędziem do redukcji wymiarowości i kompresji danych obrazowych.

Jak dowiódł wygenerowany w programie wykres półlogarytmiczny spadku wartości singularnych, kluczowe cechy obrazu reprezentowane są przez bardzo małą część pierwszych, największych wartości singularnych. Większość z nich odpowiada za szum wizualny i subtelne detale.

SVD stanowi stabilną numerycznie i uniwersalną metodę poszukiwania pseudoodwrotności Moore'a-Penrose'a dla macierzy prostokątnych, co ma zastosowanie w rozwiązywaniu nadokreślonych układów równań

Pomimo wysokiej skuteczności, sam rozkład SVD jest dość kosztowny obliczeniowo dla macierzy o dużych wymiarach