Interpolação

1

Aplicação

- Necessidade de obter um valor intermediário que não consta de uma tabela.
- Dados experimentais e de funções complexas são exemplos desta situação.

2

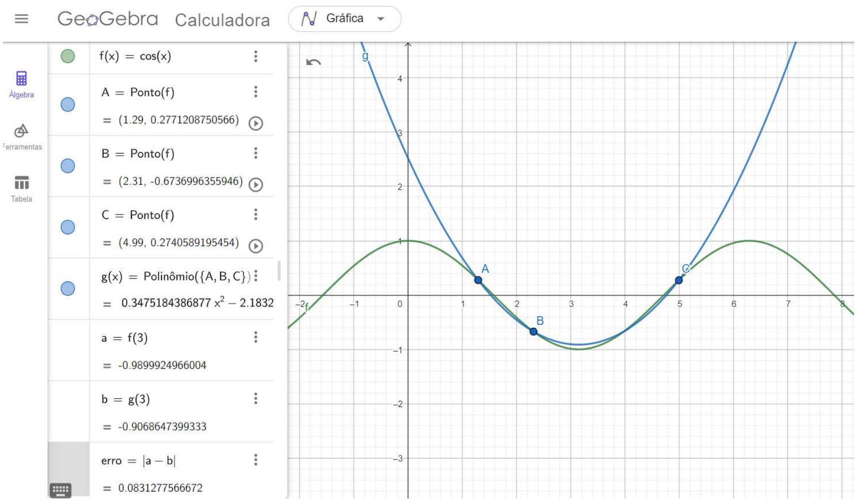
Exemplo

- Uso em funções complexas.
- Para efeito de exemplo usaremos uma função mais simples.

Geogebra - https://geogebra.org/calculator

- Plotar o gráfico da função f(x)=cos x.
- Escolher aleatoriamente 3 pontos na curva.
- Obter um polinômio de grau 2 que interpole os três pontos.
- Obter o valor de f para algum x!

https://www.geogebra.org/calculator/hrzzraua



5

Porque escolher um polinômio para “substituir” f(x).

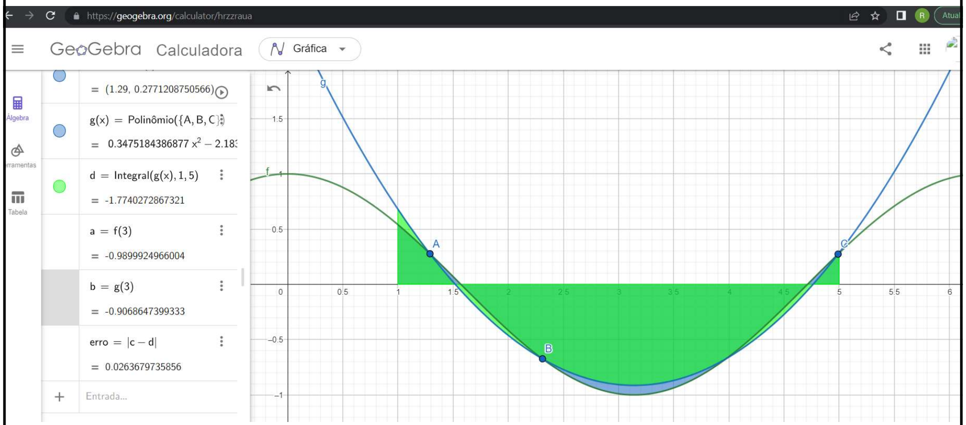
- Calcule:

$$\int_1^5 f(x)$$

$$\int_1^5 g(x)$$

6

https://www.geogebra.org/calculator/emhhzdfr



- Dado um conjunto de dados $\{x_i, f(x_i)\}$ tal como na tabela abaixo:

x_i	0	1,5	3,0	4,5	6,0
$f(x_i)$	0,001	0,016	0,028	0,046	0,057

- Como obter o valor de ***f(x)*** para um valor de ***x*** que não tenha sido medido, como *x=2.0* ?
- Quando se deseja saber o valor de ***f(x)*** para um ***x*** intermediário entre duas medidas, isto é, $x_i<x<x_{i+1}$, pode-se usar as técnicas da interpolação.

- A interpolação consiste em determinar uma função, que assume valores conhecidos em certos pontos (***nós de interpolação***)

- A classe de funções escolhida para a interpolação é *a priori* arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua.

- Função a ser considerada:
  - **Polinômios ⇒ Interpolação Polinomial**

- Métodos de interpolação são utilizados para aproximar uma função ***f(x)***, principalmente nas seguintes situações:

  - conhece-se valores de ***f(x)*** para um conjunto de pontos x_0, x_1 , x_2 , ... e deseja-se calcular o valor da função em um ponto não tabelado

  - ***f(x)*** é extremamente complicada e de difícil manejo (operações como a diferenciação e a integração são difíceis ou mesmo impossíveis de serem realizadas)

Interpolação Polinomial

- **C**onsiste em se obter um polinômio ***p(x)*** que passe por **todos os pontos** do conjunto de **(*n+1*)** dados **$\{x_i,f(x_i)\}$**, isto é:

$p(x_0)=f(x_0)$

$p(x_1)=f(x_1)$

…

$p(x_n)=f(x_n)$

Interpolação Polinomial

- Polinômio ***p(x)*** - **polinômio interpolador**

Teorema: Existe um único polinômio *p(x)*, de grau menor ou igual a *n*, tal que $p_n(x_k)=f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + \ldots + a_n \cdot x_0^n = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \cdots + a_n \cdot x_1^n = f(x_1)$$

…

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \cdots + a_n \cdot x_n^n = f(x_n)$$

- O conjunto de equações corresponde a um sistema linear de *n+1* equações e *n+1* variáveis
  - As variáveis independentes são a_i

Interpolação Polinomial

- Formas de obter $p_n(x)$
  - Resolução do Sistema Linear
  - Forma de Lagrange
  - Forma de Newton

Exemplo

- Seja a função y = f(x) definida pelos pontos da tabela abaixo. Determinar o valor de f(1).

x	**-1**	**0**	**2**
f(x)	**4**	**1**	**-1**

- $p_2(x) = 1 – 7/3\ x + 2/3\ x^2$
- $p_2(1) = -2/3$

Problema

- Determinar o polinômio interpolador através da resolução de um sistema linear é caro computacionalmente.
- Outros modos de se obter o polinômio:
  - Forma de Lagrange
  - Forma de Newton

Forma de Lagrange

Sejam $x_0, x_1, ..., x_n$, (n+1) pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, ..., n$.

Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola f em $x_0, ..., x_n$. Podemos representar $p_n(x)$ na forma $p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + ... + y_nL_n(x)$, onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n. Para cada i, queremos que a condição $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + ... + y_nL_n(x_i) = y_i.$$

A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases}$ e, para isso, definimos $L_k(x)$ por

Forma de Lagrange

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}$$

É fácil verificar que realmente

$L_k(x_k) = 1$ e

$L_k(x_i) = 0$ se $i \neq k$.

Forma de Lagrange

Como o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma:

$(x - x_i)$, $\quad i = 0, \ldots, n, i \neq k,$

então $L_k(x)$ é um polinômio de grau n e, assim, $p_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Além disso, para $x = x_i$, $i = 0, \ldots, n$ temos:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$$

Forma de Lagrange

Então, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)} .$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}$$

Exemplo – Seja a tabela:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Pela forma de Lagrange, temos que:

$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$, onde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\ (x-2)}{(-1-0)\ (-1-2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\ (x-2)}{(0+1)\ (0-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)\ (x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\ (x-0)}{(2+1)\ (2-0)} = \frac{x^2 + x}{6}.$$

Assim, na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right).$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos que $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$.

Forma de Newton

A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos é a seguinte:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + d_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Os coeficientes d_k acima são diferenças divididas de ordem k entre os pontos $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, 1, \ldots, k$.

Diferenças divididas

Seja $f(x)$ uma função tabelada em $n + 1$ pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Definimos o *operador diferenças divididas* por:

$$f[x0]=f(x0)$$ **Ordem 0**

$$f[x0,x1]=\frac{f[x1]-f[x0]}{x1-x0}=\frac{f(x1)-f(x0)}{x1-x0}$$ **Ordem 1**

$$f[x0,x1,x2]=\frac{f[x1,x2]-f[x0,x1]}{x2-x0}$$ **Ordem 2**

$$f[x0,x1,x2,x3]=\frac{f[x1,x2,x3]-f[x0,x1,x2]}{x3-x0}$$ **Ordem 3**

...

Diferenças divididas

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad \text{(Ordem n)}$$

Dizemos que $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ é a diferença dividida de ordem k da função f(x) sobre os k + 1 pontos: $x_0, x_1, ..., x_k$.

Dada uma função f(x) e conhecidos os valores que f(x) assume nos pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, podemos construir a tabela:

Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	
$f[x0]$			
	$f[x0,x1]$		
$f[x1]$		$f[x0,x1,x2]$	
	$f[x1,x2]$		...
$f[x2]$		$f[x1,x2,x3]$	
	$f[x2,x3]$		
$f[x3]$			
...			
$f[xn]$			

Exemplo

- Calcule a tabela de diferenças divididas para os seguintes valores:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

-1	4		
		- 3/1= -3	
0	1		2/3
		-2/2= -1	
2	-1		

- No polinômio, os valores de d_k são:

$$d_0 = f(x_0)$$
$$d_1 = f[x_0, x_1]$$
$$d_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$
$$\ldots$$
$$d_n = f[x_0, x_1, \ldots x_n]$$

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) +$$
$$f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_0) + \ldots +$$
$$f[x_0, x_1, \ldots x_n](x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \ldots (x - x_0)$$

Exemplo

- Obtenha o polinômio que interpola os pontos da tabela:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
–1	4		
		–3	
0	1		$\frac{2}{3}$
		–1	
2	–1		

$$p_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)\,\frac{2}{3}\,.$$

$$p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

$f[x_0, x_1, ..., x_k]$ é simétrica nos argumentos, ou seja, $f[x_0, x_1,..., x_k] = f[x_{j_0}, x_{j_1},..., x_{j_k}]$ onde $j_0, j_1, ... j_k$ é qualquer permutação de 0, 1, ..., k.

Por exemplo,

$$f[x_0\,, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1\,, x_0]\,.$$

Para k = 2 teremos

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0].$$

FORMA DE NEWTON PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

Seja f(x) contínua e com tantas derivadas contínuas quantas necessárias num intervalo [a, b].

Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, (n + 1) pontos.

Construiremos o polinômio $p_n(x)$ que interpola f(x) em $x_0, x_1, \dots, x_n$. Iniciaremos a construção obtendo $p_0(x)$ que interpola f(x) em $x = x_0$. E assim, sucessivamente, construiremos $p_k(x)$ que interpola f(x) em $x_0, x_1, \dots, x_k$, k = 0, 1,..., n.

Seja $p_0(x)$ o polinômio de grau 0 que interpola f(x) em $x = x_0$. Então, $p_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$.

Temos que, para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0)f[x_0, x] = f(x) - f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)\, f[x_0, x]}_{E_0(x)}$$

$$\Rightarrow E_0(x) = f(x) - p_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x].$$

$E_0(x) = f(x) - p_0(x)$ é o erro cometido ao se aproximar f(x) por $p_0(x)$.

Seja agora construir $p_1(x)$, o polinômio de grau ≤ 1 que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1.

Temos que

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_1)\ (x - x_0)}$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\ f[x_1, x_0]}{(x - x_0)\ (x - x_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)\ f[x_1, x_0]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)\ (x - x_1)\ f[x_0, x_1, x]}_{E_1(x)}.$$

Assim,

$$p_1(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)\ f[x_0, x_1]}_{q_1(x)} \text{ e}$$

$$E_1(x) = (x - x_0)\ (x - x_1)\ f[x_0, x_1, x].$$

Verificação:

$p_1(x)$ interpola $f(x)$ em x_0 e em x_1?

$p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)\ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1).$$

Seja agora construir $p_2(x)$, o polinômio de grau ≤ 2 que interpola $f(x)$ em x_0, x_1, x_2.

Temos que:

$$f[x_0, x_1, x_2, x] = f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] - (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_0)\ (x - x_1)\ (x - x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x].$$

Então,

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}_{q_2(x)} \text{ e}$$

$$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x].$$

Observamos que, assim como para $p_1(x)$ e $p_2(x)$, $p_k(x) = p_{k-1}(x) + q_k(x)$, onde $q_k(x)$ é um polinômio de grau k.

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio para

x_0, x_1, x_2, x_3;
x_0, x_1, x_2, x_3, x_4;
.
.
.
$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$,

teremos a forma de Newton para o polinômio de grau $\leq$ n que interpola f(x) em $x_0, \dots, x_n$:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots$$
$$+ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

e o erro é dado por

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

De fato, $p_n(x)$ interpola f(x) em $x_0, x_1, \dots, x_n$, pois sendo

$f(x) = p_n(x) + E_n(x)$, então, para todo nó x_k, $k = 0, \dots, n$, temos

$$f(x_k) = p_n(x_k) + \underbrace{E_n(x_k)}_{=0} = p_n(x_k).$$

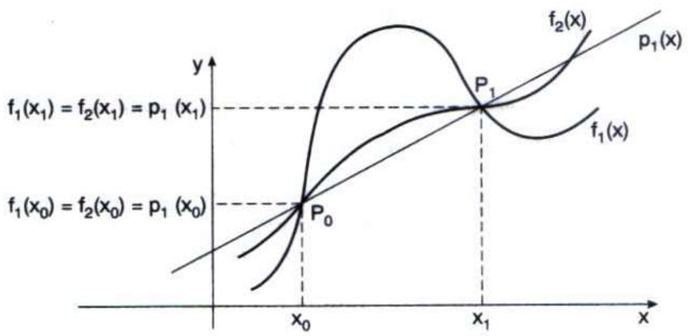
Erro na Interpolação

Ao se aproximar uma função f(x) por um polinômio interpolador de grau menor ou igual a n comete-se um erro.

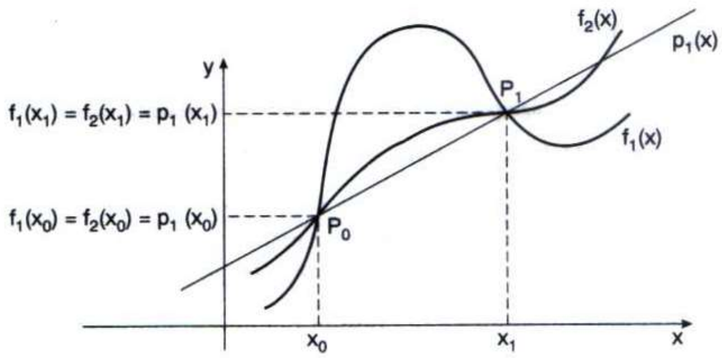
$$E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

para todo x no intervalo $[x_0, x_n]$.

Exemplo – A figura abaixo ilustra o erro cometido no caso da interpolação linear. O mesmo polinômio interpola f_1 e f_2 nos pontos x_0 e x_1.



Neste caso, o erro cometido é maior em f_1. Observa-se que o erro depende da concavidade das curvas.



O erro cometido ao se aproximar f(x) por um polinômio de interpolação de grau menor ou igual a n, está relacionado com a derivada de ordem (n+1) de f(x).

Teorema

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, (n + 1) pontos.

Seja f(x) com derivadas até ordem (n+1) para todo x pertencente ao intervalo $[x_0, x_n]$.

Seja $p_n(x)$ o polinômio interpolador de f(x) nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$.

Então, em qualquer ponto x pertencente ao intervalo $[x_0, x_n]$, o erro é dado por

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Teorema

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad x \in (x_0, x_n) \text{ e } \xi_x \in (x_0, x_n).$$

Na forma de Newton

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0,x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \ldots$$
$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

e o erro é dado por

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$$

Limitante para o erro

A fórmula para o erro dada no teorema tem uso limitado na prática pois raramente se conhece $f^{n+1}(x)$ e o ponto ξ_x nunca é conhecido.
Sua importância é teórica uma vez que é utilizada na obtenção de estimativas do erro.

COROLÁRIO 1

Sob as hipóteses do Teorema, se $f^{(n+1)}(x)$ for contínua em $I = [x_0, x_n]$, podemos escrever a seguinte relação:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

onde $M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$.

Se a função f(x) é dada na forma de tabela, o valor absoluto do erro só pode ser estimado.

Construindo a tabela de diferenças divididas até ordem n+1, pode-se usar o maior valor (em módulo) destas diferenças como uma aproximação para $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$

no intervalo $[x_0, x_n]$. E neste caso,

$$|E_n(x)| \approx |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| (\text{máx } |\text{diferenças divididas de ordem } n+1|).$$

Exemplo

Seja f(x) dada na forma:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f(x)	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obter f(0.47) usando um polinômio de grau 2.

b) Dar uma estimativa para o erro.

TABELA DE DIFERENÇAS

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.4286		
0.34	0.22		2.0235	
		0.8333		–17.8963
$x_0 = 0.4$	0.27		–3.7033	
		0.1667		18.2494
$x_1 = 0.52$	0.29		1.0415	
		0.375		–2.6031
$x_2 = 0.6$	0.32		0.2085	
		0.4167		
0.72	0.37			

Deve-se escolher três pontos de interpolação. Como $0.47 \in (0.4, 0.52)$, dois pontos deverão ser 0.4 e 0.52. O outro tanto pode ser 0.34 como 0.6. Escolheremos $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.52$ e $x_2 = 0.6$.

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]$$
$$= 0.27 + (x - 0.4)0.1667 + (x - 0.4)\,(x - 0.52)\,(1.0415).$$

a) $p_2(0.47) = 0.2780 \approx f(0.47)$

b) $|E(0.47)| \approx |(0.47 - 0.4)(0.47 - 0.52)(0.47 - 0.6)|\ |18.2492|$

$\approx 8.303 \times 10^{-3}$.

Escolha do grau do polinômio interpolador

Construindo a tabela de diferenças divididas e observando as diferenças divididas da função na vizinhança do ponto de interesse, as diferenças divididas de ordem k praticamente constantes ou as diferenças divididas de ordem k+1 variando em torno de zero, indicam que um polinômio interpolador de grau k será o que melhor aproximará a função na região considerada na tabela.

Exemplo

Considere f(x) tabelada abaixo.

x	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$f(x) = \sqrt{x}$	1	1.005	1.01	1.0149	1.0198	1.0247

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		–0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247	↑ constantes	

Assim, no intervalo [1, 1.05] dizemos que um polinômio de grau 1 é uma boa aproximação para $f(x) = \sqrt{x}$.

Alguns comentários sobre Interpolação

1) Ao interpolarmos um polinômio de grau n por um polinômio de grau maior ou igual a n obteremos o polinômio original.

2) Se formos usar k+1 pontos de interpolação (polinômio de grau menor ou igual a k) e se tivermos possibilidade de escolha destes pontos, dados "x", devemos escolher x_0, x_1, ..., x_k de tal forma que "x" fique o mais central possível no intervalo $[x_0, x_n]$.