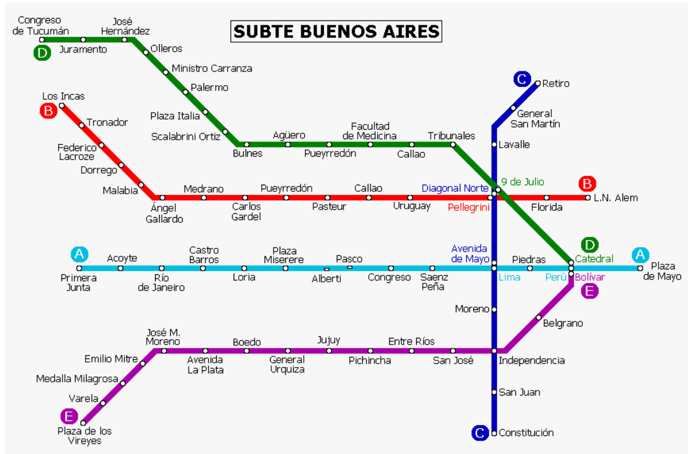
# Grafos

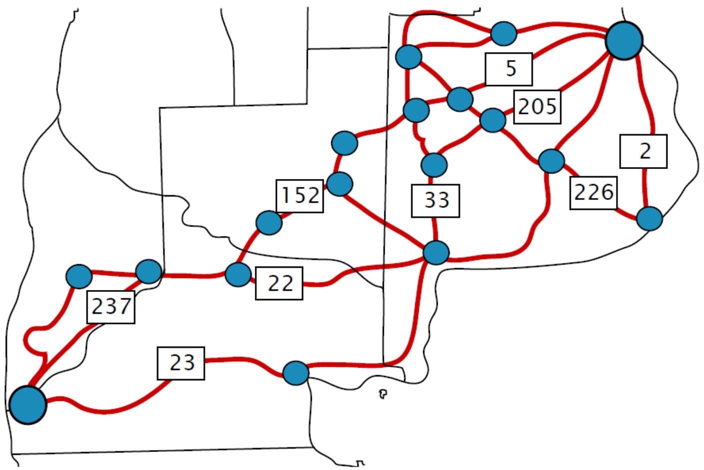
Algoritmos y Estructuras de Datos III

## Grafos todos los días



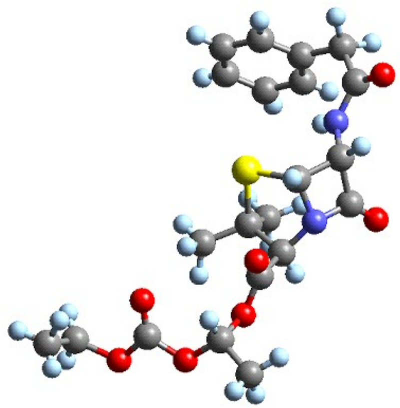

Red de subtes

## Grafos todos los días



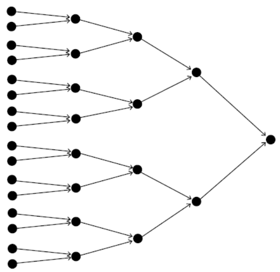

Rutas entre ciudades

## Grafos todos los días



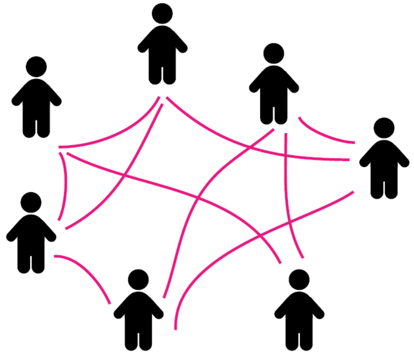
Molécula de penicilina

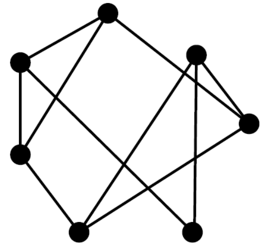
## Grafos todos los días

Torneo

## Grafos todos los días





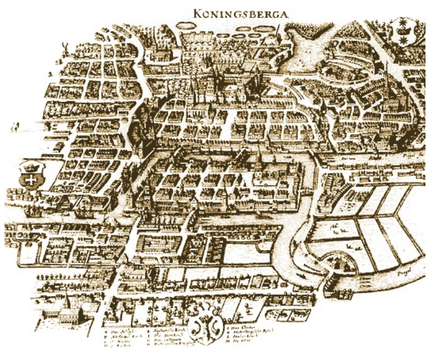
Redes sociales

## El origen: Los puentes de Königsberg

Leonhard Euler (1707–1783)

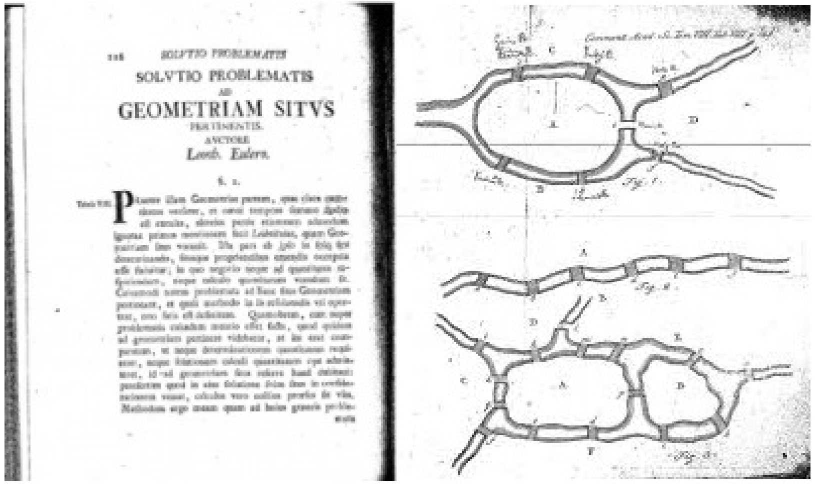
## El origen: Los puentes de Königsberg

- La ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) tenía en el siglo XVIII siete puentes.
- Euler (1735) planteó (y resolvió) el problema de cruzar por todos ellos exactamente una vez y volver al punto de partida.



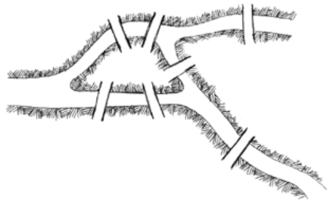
## El origen: Los puentes de Königsberg

- L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (26 de Agosto de 1735) [E53].



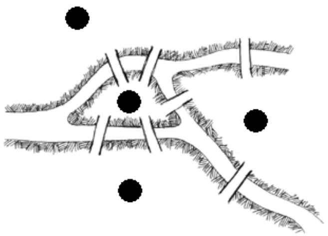

## El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema no tiene solución y dio una condición necesaria para el caso general.
- Carl Hierholzer (1840-1871) mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.



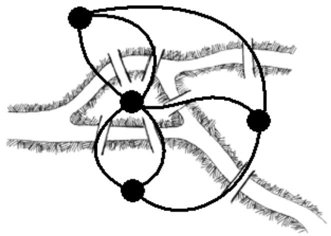
## El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema no tiene solución y dio una condición necesaria para el caso general.
- Carl Hierholzer (1840-1871) mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.



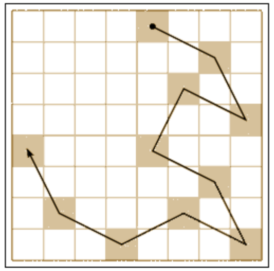
## El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema no tiene solución y dio una condición necesaria para el caso general.
- Carl Hierholzer (1840-1871) mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.



## Segundo acto: El problema del caballo

**Definición.** Un caballo de ajedrez debe visitar todas las casillas pasando exactamente una vez por cada una.

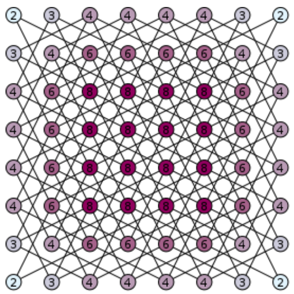


## Segundo acto: El problema del caballo

- La referencia más temprana a este problema es del siglo IX.
- Alexandre-Theophile Vandermonde (1735–1796) estudió este problema, pero no encontró una solución.
  - A. Vandermonde, *Remarques sur des problèmes de situation*. Académie des Sciences (1771).
- El primer algoritmo (heurístico!) fue presentado en 1823. En términos modernos, es una heurística golosa que en cada paso se mueve al vecino de menor grado.
  - C. H. von Warnsdorf, *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung* (1823).

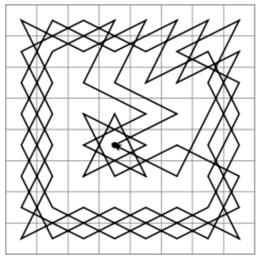
## Segundo acto: El problema del caballo

Este problema corresponde a encontrar un circuito Hamiltoniano en el siguiente grafo:



## Segundo acto: El problema del caballo

Una solución para el caso de $8 \times 8$:

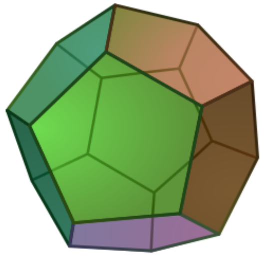


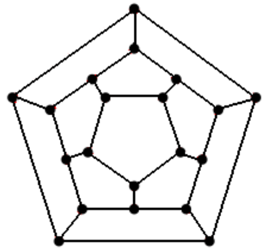
## Tercer acto: Más sobre grafos Hamiltonianos

Sir William Hamilton (1805–1865)

## Tercer acto: Más sobre grafos Hamiltonianos

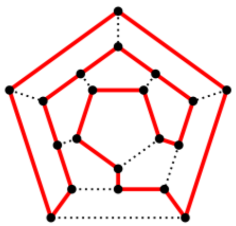
- Hamilton (1857) inventó el juego icosiano, que consiste en encontrar un camino que pase por todos los vértices de un dodecaedro y que retorne al punto de partida.



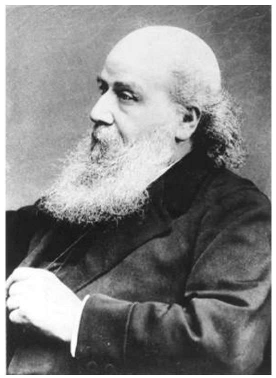


## Tercer acto: Más sobre grafos Hamiltonianos

- Un recorrido con estas propiedades se llama actualmente circuito hamiltoniano, y para este caso particular se puede encontrar una solución.



## La partida de nacimiento: Sylvester



James Sylvester (1814–1897)

El término grafo (graph) fue introducido en 1887 por Sylvester, en el contexto de análisis algebraico de estructuras moleculares.

## El desafío: La conjetura de los cuatro colores

**Conjetura.** Todo mapa se puede colorear usando 4 colores, de modo tal que regiones adyacentes usen colores distintos.

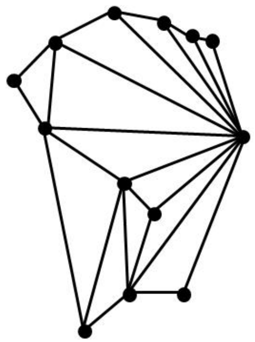
- Las regiones deben ser contiguas.
- Dos regiones no se consideran adyacentes si sólo se intersecan en un punto.

## El desafío: La conjetura de los cuatro colores

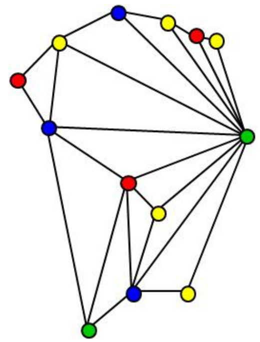

## El desafío: La conjetura de los cuatro colores


## El desafío: La conjetura de los cuatro colores

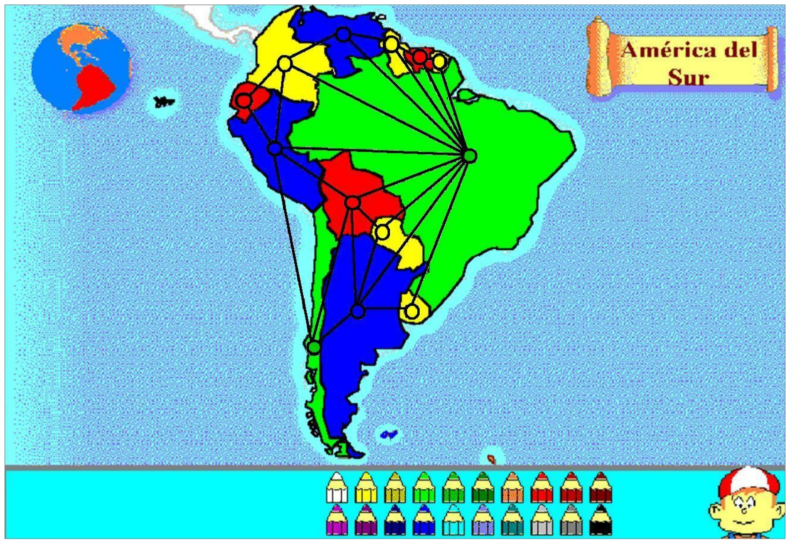
## El desafío: La conjetura de los cuatro colores



## El desafío: La conjetura de los cuatro colores



## El desafío: La conjetura de los cuatro colores




## El desafío: La conjetura de los cuatro colores

- August Möbius (1790–1868) conocía este problema, aunque es posible que no sea él mismo quien lo haya propuesto por primera vez.
- Francis Guthrie (1831–1899) redescubrió la conjetura mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, y su hermano la comunicó a Augustus De Morgan (1806–1871).
- Alfred Kempe (1849–1922) dio una demostración en 1879, pero Percy Heawood (1861–1955) encontró en 1890 un error. Al mismo tiempo, demostró el teorema de los cinco colores.
- Oystein Ore (1899–1968) y Joel Stemple mostraron en 1969 que la conjetura es cierta para todos los mapas de hasta 40 regiones.
- Kenneth May, *The origin of the four-color conjecture*. Isis 56 (1965) 346–348.

## El desafío: La conjetura de los cuatro colores

- La primera demostración fue dada en 1976 por Kenneth Appel (1932–) y Wolfgang Haken (1928–).
- Appel y Haken redujeron todos los contraejemplos posibles a 1936 contrajemplos minimales.
- Utilizando un programa de computadora, verificaron que todos esos posibles contraejemplos se pueden colorear con cuatro colores.
- **Estado actual:** Algoritmo $O(n^2)$ para colorear un mapa con 4 colores (N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour y R. Thomas, 1996).
- Demostración simplificada con 633 configuraciones minimales.

## Grafos

**Definiciones:**

- Un **grafo** $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde $V$ es un conjunto de **puntos** o **nodos** o **vértices** y $X$ es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de $V$.
- Los elementos de $X$ se llaman **aristas**, **ejes** o **arcos**.
- Dados $v$ y $w \in V$, si $e = (v, w) \in X$ se dice que $v$ y $w$ son **adyacentes** y que $e$ es **incidente** a $v$ y $w$.

Notación: $n = |V|$ y $m = |X|$

## Multigrafos y seudografos

**Definiciones:**

- Un **multigrafo** es un grafo en el que puede haber varias aristas entre el mismo par de nodos distintos.
- Un **seudografo** es un grafo en el que puede haber varias aristas entre cada par de nodos y también puede haber aritas (*loops*) que unan a un nodo con sí mismo.

Definiciones de acuerdo a la nomenclatura del libro de Harary.

## Grafos

**Definiciones:**

- El **grado** de un nodo $v$ es la cantidad de aristas incidentes a $v$.

  Notación: $d(v)$ es el grado de $v$.

**Teorema:**

La suma de los grados de los nodos de un grafo es igual a 2 veces el número de aristas, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

## Grafos

**Definiciones:**

- Un grafo se dice **completo** si todos los nodos son adyacentes entre sí.

  Notación: $K_n$ es el grafo completo de $n$ nodos.

- Dado un grafo $G = (V, X)$, el grafo **complemento** tiene el mismo conjunto de nodos y un par de nodos son adyacente si y solo si no son adyacentes en $G$.

  Notación: $\bar{G}$ es el grafo complemento de $G$.

¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de $n$ nodos?

Si $G$ tiene $n$ nodos y $m$ aristas, ¿cuántas aristas tiene $\bar{G}$?

## Caminos y circuitos

**Definiciones:**

- Un **camino** en un grafo es una sucesión de aristas $e_1 e_2 \dots e_k$ tal que un extremo de $e_i$ coincide con uno de $e_{i-1}$ y el otro con uno de $e_{i+1}$ para $i = 2, \dots, k-1$.

  Hay otras formas de definir un camino...

- Un **camino simple** es un camino que no pasa dos veces por el mismo nodo.

- Un **circuito** es un camino que empieza y termina en el mismo nodo.

- Un **circuito simple** es un circuito de 3 o más nodos que no pasa dos veces por el mismo nodo.

## Distancia

**Definiciones:**

- La **longitud** de un camino es la cantidad de aristas que tiene ese camino.

- La **distancia** entre dos nodos $v$ y $w$ de un grafo se define como la longitud del camino más corto entre $v$ y $w$.

  Notación: $d(v, w)$ denota la distancia entre $v$ y $w$.

- Para todo nodo $v$, $d(v, v) = 0$.

- Si no existe camino entre $v$ y $w$ se dice que $d(v, w) = \infty$.

**Proposición:** Si un camino $P$ entre $v$ y $w$ tiene longitud $d(v, w)$, $P$ debe ser un camino simple.

## Distancia

**Proposición:**

La función de distancia cumple las siguientes propiedades para todo $u$, $v$, $w$ pertenecientes a $V$:

- $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.

- $d(u, v) = d(v, u)$.

- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

## Subgrafos

**Definiciones:**

- Un grafo se dice **conexo** si existe un camino entre todo par de nodos.
- Dado un grafo $G = (V, X)$, un **subgrafo** de $G$ es un grafo $H = (V', X')$ tal que $V' \subseteq V$ y $X' \subseteq X \cap (V' \times V')$.
- Un subgrafo $H = (V', X')$ de $G = (V, X)$, es un **subgrafo inducido** si para todo par de nodos $u$, $v \in V'$, $(u, v) \in X \iff (u, v) \in X'$.
- Una **componente conexa** de un grafo $G$ es un subgrafo conexo maximal de $G$.

## Grafos bipartitos

**Definiciones:**

- Un grafo $G = (V, X)$ se dice **bipartito** si existe una partición $V_1, V_2$ del conjunto de nodos $V$ tal que:

$$V = V_1 \cup V_2, \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset, \qquad V_1 \neq \emptyset, \qquad V_2 \neq \emptyset$$

  y tal que todas las aristas de $G$ tienen un extremo en $V_1$ y otro en $V_2$.

- Un grafo bipartito con partición $V_1, V_2$, es **biparito completo** si todo nodo en $V_1$ es adyacente a todo nodo en $V_2$.

**Teorema:**

Un grafo $G$ con 2 o más nodos es bipartito si y sólo si no tiene circuitos simples de longitud impar.

## Isomorfismo

**Definiciones:**

- Dados dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ se dicen **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : V \to V'$ tal que para todo $v$, $w \in V$:

$$(v, w) \in X \iff (f(v), f(w)) \in X'.$$

## Isomorfismo

**Proposición:**

Si dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ son isomorfos, entonces

- tienen el mismo número de nodos,
- tienen el mismo número de aristas,
- para todo $k$, $0 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de nodos de grado $k$,
- tienen el mismo número de componentes conexas,
- para todo $k$, $1 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud $k$.

## Isomorfismo

¿Es cierta la recíproca de esta propiedad?

¿Hay condiciones necesarias y suficientes fácilmente verificables para ver si dos grafos son isomorfos?

## Representación de grafos

**Representación de grafos en la computadora**

- Matrices
- Listas

## Representación de grafos

**Matriz de adyacencia de un grafo**

$A \in R^{n \times n}$, donde los elementos $a_{ij}$ de $A$ se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene una aristas entre los nodos } i \text{ y } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

## Representación de grafos

**Matriz de incidencia de un grafo**

$B \in R^{m \times n}$, donde los elementos $b_{ij}$ de $B$ se definen como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la aristas } i \text{ es incidente al nodo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

## Representación de grafos

**Teorema:**

Si $A$ es la matriz de adyacencia del grafo $G$, el elemento $a_{ij}^k$ de $A^k$ es igual a la cantidad de caminos de longitud $k$ entre $i$ y $j$.

**Corolario:**

$$a_{ii}^2 = d(v_i).$$

## Digrafos

**Definiciones:**

- Un **grafo orientado** o **digrafo** $G = (V, X)$ es un par de conjuntos $V$ y $X$ donde $V$ es el conjunto de puntos, nodos o vértices y $X$ es un subconjunto del conjunto de los pares **ordenados** de elementos distintos de $V$.
- El **grado de entrada** $d_{in}(v)$ de un nodo $v$ de un grafo orientado es la cantidad de arcos que *llegan* a $v$. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a $v$ como segundo elemento.
- El **grado de salida** $d_{out}(v)$ de un nodo $v$ de un grafo orientado es la cantidad de arcos que *salen* de $v$. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a $v$ como primer elemento.

## Digrafos

**Definiciones:**

- Un **camino orientado** en un grafo orientado es una sucesión de arcos $e_1 e_2 \dots e_k$ tal que el primer elemento del par $e_i$ coincide con el segundo de $e_{i-1}$ y el segundo elemento de $e_i$ con el primero de $e_{i+1}$ $i = 2, \dots, k-1$.
- Un **cicuito orientado** en un grafo orientado es un camino orientado que comienza y termina en el mismo nodo.
- Un digrafo se dice **fuertemente conexo** si para todo par de nodos $u$, $v$ existe un camino orientado de $u$ a $v$ y otro de $v$ a $u$.