

Flujo en Redes

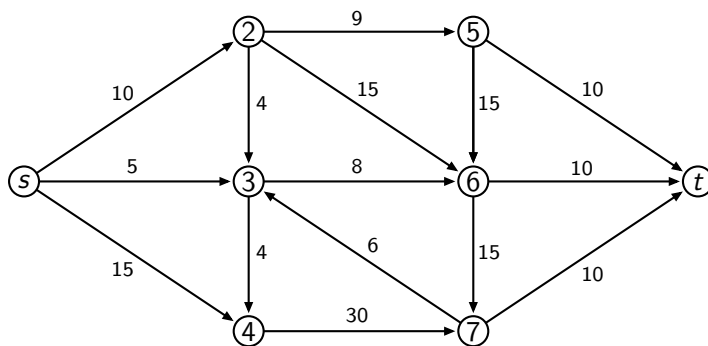
Algoritmos y Estructuras de Datos III

Flujo en Redes

Definiciones:

- Una red $N = (V, X)$ es un grafo orientado conexo que tiene dos nodos distinguidos una fuente s , con grado de salida positivo y un sumidero t , con grado de entrada positivo.
- Una función de capacidades en la red es una función $c : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Flujo en Redes



Flujo en Redes

Definiciones:

- Un **flujo factible** en una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c , es una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ que verifica:
 1. $0 \leq f(e) \leq c(e)$ para todo arco $e \in X$.
 2. Ley de conservación de flujo:

$$\sum_{e \in In(v)} f(e) = \sum_{e \in Out(v)} f(e)$$

para todo nodo $v \in V \setminus \{s, t\}$, donde

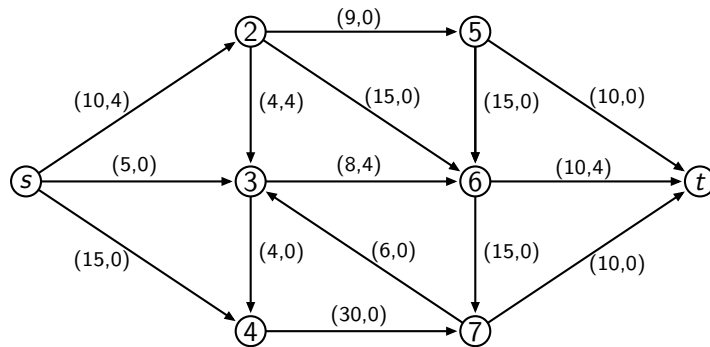
$$In(v) = \{e \in X, e = (w \rightarrow v), w \in V\}$$

$$Out(v) = \{e \in X, e = (v \rightarrow w), w \in V\}$$

- El **valor del flujo** es $F = \sum_{e \in In(t)} f(e) - \sum_{e \in Out(t)} f(e)$.

Flujo en Redes

$$F = 4$$



Flujo en Redes

Problema: Determinar el flujo de valor máximo F que se puede definir en una red $N = (V, X)$.

Definiciones:

- Un **corte** en la red $N = (V, X)$ es un subconjunto $S \subseteq V \setminus \{t\}$, tal que $s \in S$.
- Dados $S, T \subseteq V$, $ST = \{(u \rightarrow v) \in X : u \in S \text{ y } v \in T\}$

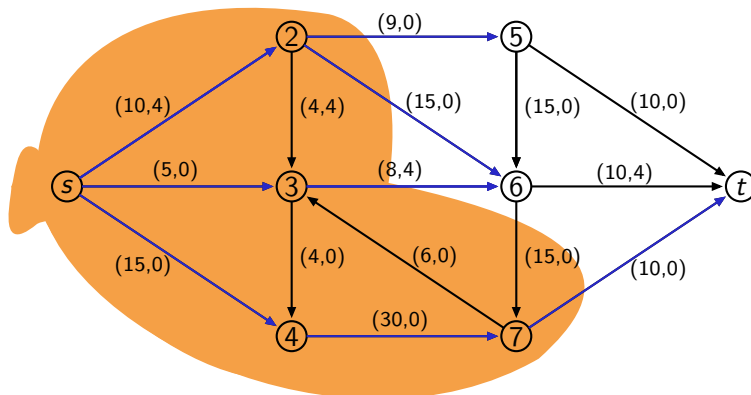
Proposición: Sea f un flujo definido en una red $N = (V, X)$ y sea S un corte, entonces

$$F = \sum_{e \in S\bar{S}} f(e) - \sum_{e \in \bar{S}S} f(e)$$

donde $\bar{S} = V \setminus S$.

Flujo en Redes

$$F = 4$$



Flujo en Redes

Definición: La capacidad de un corte S se define como

$$c(S) = \sum_{e \in S\bar{S}} c(e).$$

Lema: Si f es una función de flujo con valor F y S es un corte en N , entonces

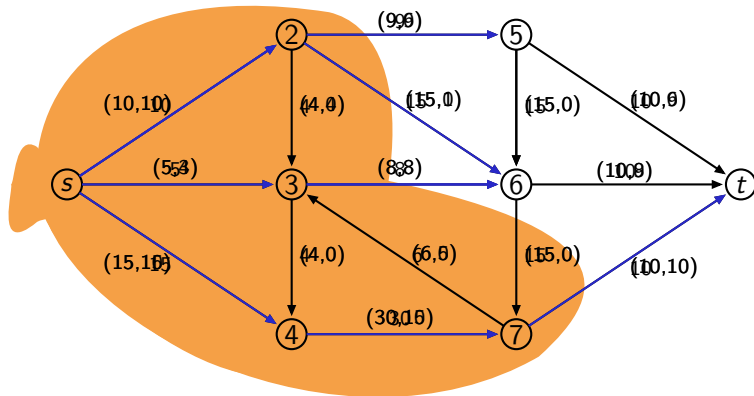
$$F \leq c(S).$$

Corolario (certificado de optimalidad): Si F es el valor de un flujo f y S un corte en N tal que $F = c(S)$ entonces f define un flujo máximo y S un corte de capacidad mínima.

Flujo en Redes

$$C = 00$$

$$F = 28$$



Flujo en Redes - Camino de Aumento

Definiciones: Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c y un flujo factible f ,

- Definimos la **red residual**, $R(N, f) = (V, X_R)$ donde

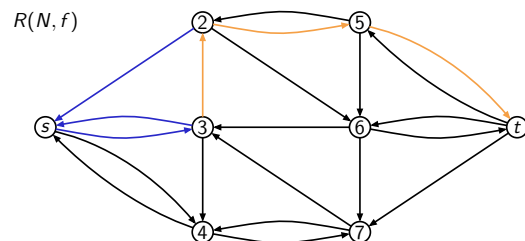
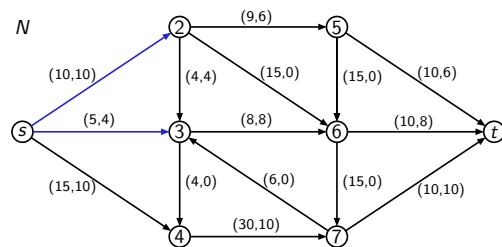
$$\forall (v \rightarrow w) \in X,$$

$$(v \rightarrow w) \in X_R \quad \text{si} \quad f((v \rightarrow w)) < c((v \rightarrow w))$$

$$(w \rightarrow v) \in X_R \quad \text{si} \quad f((v \rightarrow w)) > 0.$$

- Un **camino de aumento** es un camino orientado P de s a t en $R(N, f)$.

Flujo en Redes - Camino de Aumento



Flujo en Redes - Camino de Aumento

Definiciones: Dada una red $N = (V, X)$ con función de capacidad c y un flujo factible f ,

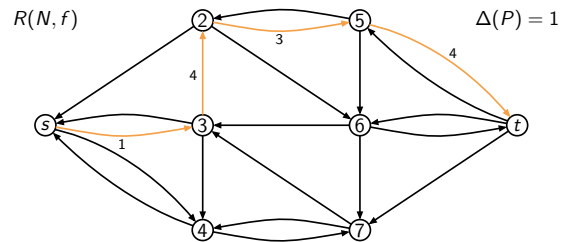
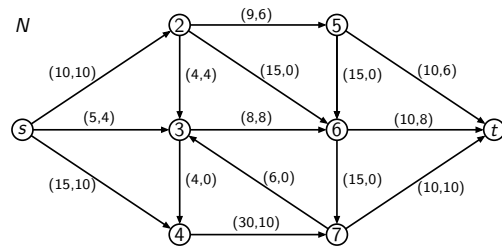
- Para cada arco $(v \rightarrow w)$ en el camino de aumento P , definimos

$$\Delta((v \rightarrow w)) = \begin{cases} c((v \rightarrow w)) - f((v \rightarrow w)) & \text{si } (v \rightarrow w) \in X \\ f((w \rightarrow v)) & \text{si } (w \rightarrow v) \in X \end{cases}$$

- Y

$$\Delta(P) = \min_{e \in P} \{\Delta(e)\}$$

Flujo en Redes - Camino de Aumento



Flujo en Redes - Algoritmo de camino de aumento

Entrada: Dada una red N con función de flujo f , la red residual $R(N, f) = (V, X_R)$.

$S := \{s\}$

mientras $t \notin S$ **y** $\exists (v \rightarrow w) \in X_R$ **y** $v \in S$ **y** $w \notin S$ **hacer**
 $ant(w) := v$
 $S := S \cup \{w\}$

fin mientras

si $t \notin S$ **entonces**

retornar S corte de V

si no

reconstruir P entre s y t usando ant a partir de t
 retornar P camino de aumento

fin si

Flujo en Redes - Algoritmo de camino de aumento

Proposición: El algoritmo de camino de aumento determina un camino de aumento si existe, y si no llega a incorporar a t en S es porque no hay camino de aumento.

El algoritmo de camino de aumento no dice en que orden deben incorporarse los nodos a S .

Flujo en Redes

Proposición: Sea f un flujo definido sobre una red N con valor F y sea P un camino de aumento en $R(N, f)$. Entonces el flujo \bar{f} , definido por

$$\bar{f}((v \rightarrow w)) = \begin{cases} f((v \rightarrow w)) & \text{si } (v \rightarrow w) \notin P \\ f((v \rightarrow w)) + \Delta(P) & \text{si } (v \rightarrow w) \in P \\ f((v \rightarrow w)) - \Delta(P) & \text{si } (w \rightarrow v) \in P \end{cases}$$

es un flujo factible sobre N con valor $\bar{F} = F + \Delta(P)$.

Teorema: Sea f un flujo definido sobre una red N . Entonces f es un flujo máximo \iff no existe camino de aumento en $R(N, f)$.

Teorema: Dada una red N , el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson

Entrada: Red $N = (X, V)$ con función de capacidad $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$.

definir un flujo inicial en N

(por ejemplo $f(e) := 0$ para todo $e \in X$)

mientras exista $P :=$ camino de aumento en $R(N, f)$ **hacer**

para cada arco $(v \rightarrow w)$ de P **hacer**

si $(v \rightarrow w) \in X$ **entonces**

$f((v \rightarrow w)) := f((v \rightarrow w)) + \Delta(P)$

si no $((w \rightarrow v) \in X)$

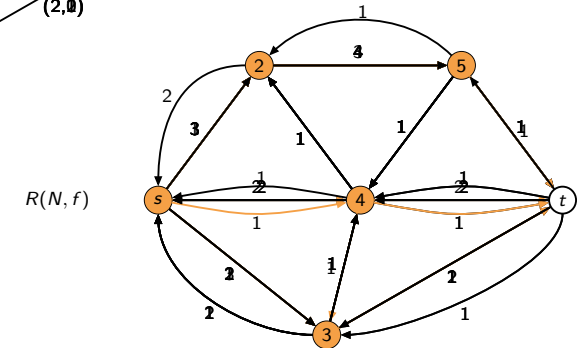
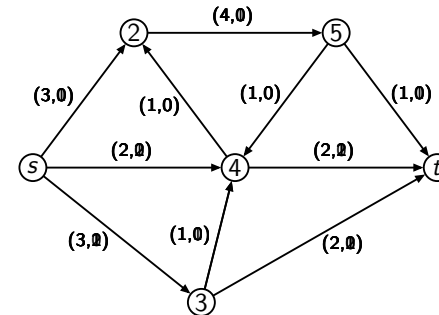
$f((w \rightarrow v)) := f((w \rightarrow v)) - \Delta(P)$

fin si

fin para

fin mientras

Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson



Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson

Teorema: Si las capacidades de los arcos de la red son enteras el problema de flujo máximo tiene un flujo máximo entero.

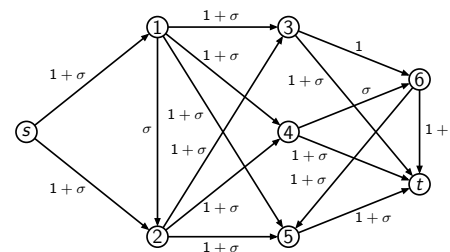
Teorema: Si los valores del flujo inicial y las capacidades de los arcos de la red son enteras el método de Ford y Fulkerson realiza a lo sumo nU iteraciones, siendo entonces $\mathcal{O}(nmU)$, donde U es una cota superior finita para el valor de las capacidades.

Si las capacidades o el flujo inicial son números irracionales, el método de Ford y Fulkerson puede no parar (realizar un número infinito de pasos).

Si no se especifica el orden en el que se eligen los arcos y nodos a marcar en el algoritmo de camino de aumento, el número de iteraciones puede ser no polinomial respecto del tamaño del problema.

Flujo en Redes - Algoritmo de Ford y Fulkerson

$$\sigma = (\sqrt{5} - 1)/2$$



Iteración	Camino de aumento
$6k + 1$	$s, 1, 2, 3, 6, t$
$6k + 2$	$s, 2, 1, 3, 6, 5, t$
$6k + 3$	$s, 1, 2, 4, 6, t$
$6k + 4$	$s, 2, 1, 4, 6, 3, t$
$6k + 5$	$s, 1, 2, 5, 6, t$
$6k + 6$	$s, 2, 1, 5, 6, 4, t$

Flujo en Redes - Modificación de Edmonds y Karp

- ▶ Usa BFS en el algoritmo de camino de aumento para marcar nodos.
- ▶ La complejidad del algoritmo es $\mathcal{O}(m^2n)$.
- ▶ Hay otros algoritmos más eficientes (más complicados).