Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Grafos eulerianos

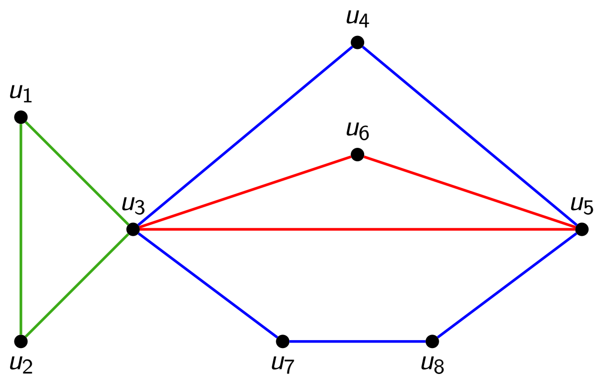
Definiciones:

- Un circuito C en un grafo (o multigrafo) G es un **circuito euleriano** si C pasa por todos las aristas de G una y sólo una vez.
- Un **grafo euleriano** es un grafo que tiene un circuito euleriano (o multigrafo).

Teorema: Un grafo (o multigrafo) conexo es euleriano si y sólo si todos sus nodos tienen grado par.

A partir de la demostración del teorema de Euler se puede escribir un algoritmo para construir un circuito euleriano para un grafo que tiene todos sus nodos de grado par.

Grafos eulerianos



Grafos eulerianos

Entrada: $G = (V, X)$ conexo con todos los nodos de grado par.

`comenzar por cualquier nodo` v `y construir un ciclo` Z
mientras `exista` $e \in X \setminus Z$ **hacer**
    `elegir` w `tal que existe` $(w, u) \in Z$ `y` $(w, z) \in X \setminus Z$
    `desde` w `construir un ciclo` D `con` $D \cap Z = \emptyset$
    $Z :=$ `unir` Z `y` D `por medio de` w
fin mientras
retornar Z

¿Cuál es la complejidad de este algoritmo?

Grafos eulerianos

Definiciones:

- Un **camino euleriano** en un grafo (o multigrafo) G es un camino que pasa por cada arista de G una y sólo una vez.
- Un grafo orientado o digrafo, se dice **euleriano** si tiene un circuito orientado que pasa por cada arco de G una y sólo una vez.

Teorema: Un grafo (o multigrafo) conexo tiene un camino euleriano si y sólo si tiene exactamente dos nodos de grado impar.

Teorema: Un digrafo conexo es euleriano si y sólo si para todo nodo v de G se verfica que $d_{in}(v) = d_{out}(v)$.

Problema del cartero chino (Guan, 1962)

Definición: Dado un grafo $G = (V, X)$ con longitudes asignadas a sus aristas, $l : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, el **problema del cartero chino** consiste en encontrar un circuito que pase por cada arista de G **al menos** una vez de longitud mínima.

- Si G es euleriano, un circuito euleriano es la solución del problema del cartero chino.
- Hay algoritmos polinomiales para el problema del cartero chino cuando G es orientado o no orientado.
- Pero no se conocen algoritmos polinomiales (el problema no está computacionalmente resuelto) si el grafo es mixto (algunas aristas orientados y otros no).

Grafos hamiltonianos

Definiciones:

- Un circuito en un grafo G es un **circuito hamiltoniano** si pasa por cada nodo de G una y sólo una vez.
- Un grafo se dice **hamiltoniano** si tiene un circuito hamiltoniano.

No se conocen buenas caracterizaciones para grafos hamiltonianos.

¿Cómo intentar construir un circuito hamiltoniano?

No se conocen algoritmos polinomiales para decidir si un grafo es hamiltoniano o no.

Grafos hamiltonianos

Teorema (condición necesaria): Sea G un grafo conexo. Si existe $W \subset V$ tal que $G \setminus W$ tiene c componentes conexas con $c > |W|$ entonces G no es hamiltoniano.

¿Es cierta la recíproca de este teorema?

Teorema (Dirac) (condición suficiente): Sea G un grafo con $n \geq 3$ y tal que para todo $v \in V$ se verifica que $d(v) \geq n/2$ entonces G es hamiltoniano.

¿Es cierta la recíproca de este teorema?

Metaheurísticas

- Heurísticas clásicas.
- Metaheurísticas o heurísticas "modernas".

¿Cuándo usarlas?

- Problemas para los cuales no se conocen buenos algoritmos exactos.
- Problemas difíciles de modelar.

¿Cómo se evalúan?

- Problemas test.
- Problemas reales.
- Problemas generados al azar.
- Cotas.

Problema del viajante de comercio (TSP)

Definición: Dado un grafo $G = (V, X)$ con longitudes asignadas a las aristas, $l : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, queremos determinar un circuito hamiltoniano de longitud mínima.

- No se conocen algoritmos polinomiales para resolver el problema del viajante de comercio.
- Tampoco se conocen algoritmos ϵ-aproximados polinomiales para el TSP general (si se conocen cuando las distancias son euclideanas).
- Es **el** problema de optimización combinatoria más estudiado.

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP

Heurística del vecino más cercano

elegir un nodo v
$orden(v) := 0$
$S := \{v\}$
$i := 0$
mientras $S \neq V$ **hacer**
    $i := i + 1$
    elegir la arista (v, w) *más barata* con $w \notin S$
    $orden(w) := i$
    $S := S \cup \{w\}$
    $v := w$
fin mientras
retornar *orden*

¿Cuál es la complejidad de este algoritmo?

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP

Heurísticas de inserción

$C :=$ un circuito de longitud 3
$S := \{$nodos de $C\}$
mientras $S \neq V$ **hacer**
    ELEGIR un nodo $v \notin S$
    $S := S \cup \{v\}$
    INSERTAR v en C
fin mientras
retornar C

¿Cómo ELEGIR?
$\rightsquigarrow$ **variantes de la heurística de inserción**
¿Cómo INSERTAR?

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP
Heurísticas de inserción

Para INSERTAR el nodo v elegido:

- Sea $c_{v_i v_j}$ es el costo o la longitud de la arista (v_i, v_j).
- Elegimos dos nodos consecutivos en el circuito v_i, v_{i+1} tal que

$$c_{v_i v} + c_{v v_{i+1}} - c_{v_i v_{i+1}}$$

  sea mínimo.
- Insertamos v entre v_i y v_{i+1}.

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP
Heurísticas de inserción

Podemos ELEGIR el nuevo nodo v para agregar al circuito tal que:

- v sea el nodo más próximo a un nodo que ya está en el circuito.
- v sea el nodo más lejano a un nodo que ya está en el circuito.
- v sea el nodo *más barato*, o sea el que hace crecer menos la longitud del circuito.
- v se elige al azar.

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP
Heurísticas de inserción

En el caso de grafos euclideanos (por ejemplo grafos en el plano $\mathbb{R}^2$), se puede implementar un algoritmo de inserción:

- Usando la cápsula convexa de los nodos como circuito inicial.
- Insertando en cada paso un nodo v tal que el ángulo formado por las aristas (w, v) y (v, z), con w y z consecutivos en el circuito ya construido, sea máximo.

Hay muchas variantes sobre estas ideas.

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP
Algoritmo del árbol generador mínimo (G grafo completo)

`encontrar un árbol generador mínimo` T `de` G

`construir` T' `duplicando las aristas de` T

`recorrer` T' `usando` **DFS** `y armar un circuito hamiltoniano de` G

¿Cuál es la complejidad de este algoritmo?

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP

Algoritmo del árbol generador mínimo

Teorema: Si las distancias del grafo G cumplen la desigualdad triangular, la heurística del árbol generador mínimo es un algoritmo aproximado con una perfomance en el peor caso dada por

$$l(C^H)/l(C^*) = X^H(G)/X^*(G) \leq 2$$

O sea, si las distancias son euclideanas hay algoritmos polinomiales para el problema del TSP aproximado.

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP

Perfomance de otros algoritmos aproximados en el peor caso

Si las distancias de G son euclideanas se puede probar que valen las siguientes cotas para la perfomance en el peor caso:

Vecino más próximo	$X^H(G)/X^*(G) \leq 1/2(\lceil \log n \rceil + 1)$
Inserción del más próximo	$X^H(G)/X^*(G) \leq 2$
Inserción del más lejano	$X^H(G)/X^*(G) \leq 2 \log n + 0{,}16$
Inserción del más barato	$X^H(G)/X^*(G) \leq 2$

D.J.Rosenkrantz, R.E. Stearns and P.M. Lewis, *An analysis of several heuristics for the travelling salesman problem*, Siam J. Comput 6, 563-581 (1977).

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP

Heurísticas de mejoramiento - Algoritmos de búsqueda local

¿Cómo podemos mejorar la solución obtenida por alguna heurística constructiva como las anteriores?

Heurística 2-opt de Lin y Kernighan

obtener una solución inicial H
  por ejemplo con alguna de las heurísticas anteriores
mientras sea posible **hacer**
  elegir (u_i, u_{i+1}) y $(u_k, u_{k+1}) \in H$ tal que
    $c_{u_i u_{i+1}} + c_{u_k u_{k+1}} > c_{u_i u_k} + c_{u_{i+1} u_{k+1}}$
  $H := H \setminus \{(u_i, u_{i+1}), (u_k, u_{k+1})\} \cup \{(u_i, u_k), (u_{i+1}, u_{k+1})\}$
fin mientras

¿Cuándo para este algoritmo? ¿Se obtiene la solución óptima del TSP de este modo?

Heurísticas y algoritmos aproximados para el TSP

Heurísticas de mejoramiento - Algoritmos de búsqueda local

- En vez de elegir para sacar de H un par de aristas cualquiera que nos lleve a obtener un circuito de menor longitud podemos elegir, entre todos los pares posibles, el par que nos hace obtener el menor circuito (más trabajo computacional).
- Esta idea se extiende en las heurísticas k-opt donde se hacen intercambios de k aristas. Es decir, en vez de sacar dos aristas, sacamos k aristas de H y vemos cual es la mejor forma de reconstruir el circuito. En la práctica se usa sólo 2-opt o 3-opt.

Algoritmos de descenso o búsqueda local

Esquema general

$S =$ conjunto de soluciones
$N(s) =$ soluciones "vecinas" de la solución s
$f(s) =$ valor de la solución s

`elegir una solución inicial` $s^* \in S$
repetir
  `elegir` $s \in N(s^*)$ `tal que` $f(s) < f(s^*)$
  `reemplazar` s^* `por` s
hasta que $f(s) > f(s^*)$ `para todos los` $s \in N(s^*)$

Algoritmos de descenso o búsqueda local

- ¿Cómo determinar las soluciones vecinas de una solución s dada?
- ¿Qué se obtiene con este procedimiento? ¿Sirve?
- Óptimos locales y globales
- Espacio de búsqueda

Algoritmos de descenso o búsqueda local

Ejemplo

- Tenemos que asignar n tareas a un sola máquina.
- Cada trabajo j tiene un tiempo de procesamiento p_j y una fecha prometida de entrega d_j.
- El objetivo es minimizar

$$T = \sum_{j=1}^{n} \text{máx}\{(C_j - d_j), 0\}$$

donde C_j es el momento en que se completa el trabajo j.

Algoritmos de descenso o búsqueda local

Ejemplo

- **Cómo elegir las soluciones iniciales:** Se podría tomar cualquier permutación de las tareas.
- **Determinación de los vecinos de una solución dada:** Podemos tomar las que se obtengan de la solución actual cambiando la posición de un trabajo con otro.

En un problema con 4 trabajos, los vecinos de $s = (1, 2, 3, 4)$ serán:

$$N(s) = \{(1,3,2,4), (3,2,1,4), (1,2,4,3), (1,4,3,2), (2,1,3,4), (4,2,3,1)\}$$

GRASP
Esquema general

Feo, T.,Resende, M.,"Greedy randomized adaptive search procedures", Journal of Global Optimization, 1995, pp 1, 27.

mientras `no se verifique el criterio de parada` **hacer**

```
    solución:=construirGreedyRandomizedSolución
    mejorSolución:=búsquedaLocal(solución)
    actualizarSolución(solución,mejorSolución)
```

GRASP
Esquema general

- **Algoritmo construirGreedyRandomizedSolución**: En vez de usar un algoritmo goloso que elija el elemento más prometedor, según una función "adaptativa", para agregar a la solución, en cada iteración se elige al azar entre los que cumplen que no pasan de un porcentaje α del valor del mejor elemento. Se puede limitar el tamaño de la lista de estos elementos.
- **Algoritmo búsquedaLocal**: Definición de intercambios.

GRASP
Ejemplo: Cubrimiento de conjuntos

- Dados n conjuntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
- Sea $I = \cup_i P_i$ y $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Un subconjunto J^* de J es un **cubrimiento** si $\cup_{i \in J^*} P_i = I$.
- El problema de **cubrimiento mínimo** (set covering problem) consiste en determinar un cubrimiento de I de cardinal mínimo (con la mínima cantidad de conjuntos P_i).

GRASP
Ejemplo: Cubrimiento de conjuntos

Dados $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{1, 3\}$, $P_3 = \{2\}$, $P_4 = \{3\}$

$$I = \{1, 2, 3\} \qquad J = \{1, 2, 3, 4\}$$

Los cubrimientos mínimos tienen cardinal 2 y son:

$$\{P_1, P_2\} \qquad \{P_1, P_4\} \qquad \{P_2, P_3\}$$

GRASP

Ejemplo: Cubrimiento de conjuntos

Primer paso:
`solución:=ConstruirGreedyRandomizedSolución`

Un algoritmo goloso podría ser agregar al cubrimiento el conjunto que cubre la mayor cantidad de elementos de I **todavía** sin cubrir.

En este caso para la parte del algoritmo `GreedyRandomized` consideramos como conjuntos candidatos a los que cubren al menos un porcentaje α del número cubierto por el conjunto determinado por el algoritmo goloso.

También se puede limitar el tamaño de la lista de candidatos a tener a lo sumo β elementos.

Dentro de esta lista de conjuntos se elige uno al azar.

GRASP

Ejemplo: Cubrimiento de conjuntos

Segundo paso: `mejorSolcuión:=búsquedaLocal(solución)`

Para el algoritmo de descenso (de búsqueda local) podemos definir los vecinos de una solución usando el siguiente procedimiento de intercambios:

Un k, p-intercambio, con $p < k$, consiste en cambiar, si es posible, k-uplas del cubrimiento por p-uplas que no pertenezcan al mismo.

GRASP

Ejemplo: Cubrimiento de conjuntos

- $P_1 = \{3, 4\}$, $P_2 = \{3\}$, $P_3 = \{2\}$, $P_4 = \{2, 3, 4\}$, $P_5 = \{3, 4, 5\}$, $P_6 = \{1, 4, 5\}$, $P_7 = \{2, 3\}$, $P_8 = \{4\}$
- Tomamos $\alpha = 40\,\%$.
- En la primer iteración la lista de candidatos es $\{P_1, P_4, P_5, P_6, P_7\}$. Supongamos que elegimos P_5 al azar.
- En la segundo iteración, la lista de candidatos es $\{P_3, P_4, P_6, P_7\}$. Si resultara elegido P_3 tendríamos, después de la tercera iteración, el cubrimiento $\{P_3, P_5, P_6\}$ que no es óptimo y podríamos pasar al algoritmo de búsqueda local.
- Si en primer lugar hubiera resultado elegido P_6 y después P_4, hubiéramos obtenido la solución óptima $\{P_4, P_6\}$.