Ejercicio X2: inducción en árboles

1. Enunciado

Dado un grafo G, un matching en G es un subconjunto de ejes que no comparten vértices. Un matching es perfecto si todo vértice de G es extremo de algún eje del matching. Demostrar que un árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.

2. Propiedades vistas en clase que nos serán útiles

Enumeradas aquí por simplicidad simplemente como A,B,C: Basta con citar correctamente su enunciado para utilizarlas.

A Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

B Si T es un bosque no trivial, y v un vértice de T entonces $T - v$ es un bosque.

C Si T es un árbol y h es una hoja de T, entonces $T - h$ es un árbol.

3. Demostración (por inducción)

Sea $P(n) \equiv (\forall T$ árbol de n nodos$)(T$ tiene a lo sumo un matching perfecto$)$.
Se nos pide demostrar $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$. Lo haremos por inducción global en n, la cantidad de nodos del árbol.

3.1. Caso base: $n = 1$

$P(1) \equiv$ todo árbol de 1 nodo tiene a lo sumo un matching perfecto
Existe un único árbol de un nodo, el grafo trivial. Como no existe ningún matching perfecto en este caso, porque no hay arista que pueda cubrir el vértice, hay $0 \leq 1$ matchings perfectos, y se verifica $P(1)$.

3.2. Caso base: $n = 2$

$P(2) \equiv$ todo árbol de 2 nodos tiene a lo sumo un matching perfecto
Existen solo dos grafos de 2 nodos (según exista o no la arista que los une). De ellos, solo uno es árbol, y el único conjunto de aristas que funciona como matching perfecto es el que contiene a la única arista del grafo. Luego hay exactamente un matching perfecto, y también se verifica $P(2)$.

3.3. Paso inductivo

Sea $n \geq 3$. Sabiendo que $(\forall\ 1 \leq n' < n)P(n')$, tenemos que demostrar $P(n)$, es decir, que todo árbol de n nodos tiene a lo sumo un matching perfecto, asumiendo que los árboles de menos de n nodos lo cumplen.
Sea entonces T un árbol cualquiera de $n \geq 3$ nodos. Como tenemos que demostrar que tiene a lo sumo un matching perfecto, lo que demostraremos será que si tiene uno, entonces este es único.

Supongamos entonces que existe un matching perfecto de T. Sea $M \subseteq E(T)$ un matching perfecto cualquiera de T. Tenemos que ver que M es único.

Sea $h \in V(T)$ una hoja de T, que existe por propiedad A al ser T no trivial. Como $d(h) = 1$, tiene exactamente un vecino en T, que llamaremos u. Llamaremos además e a la arista que une h con u. Como M es matching perfecto, debe contener una arista incidente a h, pero $d(h) = 1$ y la única arista que incide en él es e. Luego debe ser $e \in M$.

Además, consideramos las demás aristas incidentes a u que no son e: $e_1, e_2, \cdots, e_l$ con $l = d(u) - 1$. Necesariamente $e_i \notin M$ para todo i, ya que como e incide en u y $e \in M$, si alguna de estas estuviera en M, compartiría el vértice u con e, y M no sería matching. Luego sabemos que de todas las aristas de T incidentes en u o en h, la única que está en M es e.

Definimos ahora $T_1, T_2, \cdots, T_k$ como las componentes conexas de $T - h - u$ (notar que podemos quitar dos vértices y obtener un grafo, ya que $n \geq 3$. Este es el motivo por el que tomamos dos casos base.). Notar que por ser componentes conexas, en $T - h - u$ no hay ninguna arista que tenga un extremo en T_i y otro en T_j para $i \neq j$, es decir toda arista de $T - h - u$ está en algún T_i.

A su vez, definimos para cada $1 \leq i \leq k$ a M_i como el conjunto de aristas de M que están en T_i, es decir, $M_i = M \cap E(T_i)$.

Como las aristas de $T - h - u$ son todas las de T salvo e y las $e_1, e_2, \cdots, e_l$ ya analizadas, de esto y lo anterior resulta que $M = \{e\} \cup M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$. Veamos ahora que los M_i son correspondencias perfectas de los T_i.

Sea $1 \leq i \leq k$. $M_i \subseteq M$, luego como M es correspondencia, no puede tener dos aristas que compartan un vértice, y entonces tampoco puede ocurrir en M_i, luego M_i es correspondencia. Además, dado un vértice cualquiera $v \in V(T_i)$, existe una arista $e_v \in M$ que incide en v, porque M era correspondencia perfecta de todo T. Pero esa arista e_v debe estar en T_i al incidir en un vértice de T_i: Luego $e_v \in M \cap E(T_i) \Rightarrow e_v \in M_i$. Por lo tanto M_i contiene una arista incidente a cualquier vértice v de T_i, y por lo tanto es correspondencia perfecta de T_i.

Entonces tenemos correspondencias perfectas de los subgrafos T_i, que tienen menos nodos que T. Para aplicarles la hipótesis inductiva, necesitamos que esos subgrafos sean árboles. Pero aquí es donde podemos aplicar las propiedades: Como h es hoja, de la propiedad C tenemos que $T - h$ es un árbol. Además, al ser $T - h$ un árbol no trivial (porque tiene $n - 1 \geq 2$ nodos) podemos aplicar la propiedad B y concluir que $T - h - u$ es un bosque. Luego cada una de sus componentes conexas, $T_1, T_2, \cdots, T_k$ resulta ser un árbol. Por hipótesis inductiva entonces, cada uno de los T_i tiene a lo sumo una correspondencia perfecta. Pero como ya hemos probado que M_i es correspondencia perfecta de T_i, podemos afirmar que cada T_i tiene entonces exactamente una correspondencia perfecta, que notaremos $m(T_i)$.

Finalmente recordando la expresión de M tenemos

$$M = \{e\} \cup M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k = \{e\} \cup m(T_1) \cup m(T_2) \cup \cdots \cup m(T_k)$$

Pero la expresión de la derecha no depende de M, sino que está determinada en forma unívoca por la arista e y los únicos matchings $m(T_1), \cdots, m(T_k)$. Por lo tanto, hemos probado que cualquier matching perfecto M de T tiene exactamente esas aristas, con lo cual M es único. $\square$