Algoritmo de Dijkstra

Alejandro Strejilevich de Loma

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Septiembre de 2015

Introducción

- Problemas de camino mínimo:
  - uno a uno;
  - uno a todos;
  - todos a todos;
  - todos a uno;
  - ...
- Representación de grafos:
  - listas de adyacentes/sucesores;
  - matriz de adyacencia;
  - ...

Dijkstra - Características

- ¿Qué problema de camino mínimo resuelve?
  Desde un vértice dado a todos los vértices (uno a todos).
- ¿Sirve desde un vértice dado a otro específico (uno a uno)? SÍ. $\surd$
  Se puede interrumpir el algoritmo cuando se calcula el vértice deseado.
- ¿Sirve entre todo par de vértices (todos a todos)? SÍ. $\surd$
  Se corre el algoritmo empezando desde cada vértice.
- ¿Sirve para grafos no dirigidos? SÍ. $\surd$
- ¿Sirve para grafos dirigidos? SÍ. $\surd$
- ¿Sirve para grafos con circuitos negativos? NO. $\times$
  No existe camino mínimo para los vértices del circuito.
- ¿Sirve para grafos con ejes negativos? NO. $\times$
  El algoritmo puede dar resultados incorrectos.

Dijkstra - Funcionamiento (ejercicio) y complejidad

- Bases: Alien (A), Barbarella (B), Challenger (C), Duran-Duran (D) y Enterprise (E).
- Dispositivos robóticos: R1 y R2.
- R1 debe ir a reparar a R2.
- Distancias:

	B	C	D	E	R1	R2
A	1	1	2	4	1	7
B		1	2	5	4	6
C			2	3	5	5
D				2	3	6
E					5	3
R1						14

- R1 consume:
  - 2 unidades de energía por unidad de distancia recorrida;
  - 1 unidad de energía cada vez que ingresa o egresa de una base;
  - 0 unidades de energía mientras está dentro de alguna base.
- Determinar el recorrido que debe seguir R1 para minimizar su consumo de energía.

$G = (V, E)$; $n = \lvert V \rvert$; $m = \lvert E \rvert$ $\ell : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (longitud ejes)	G: listas de adyacentes/sucesores S: vector de bool; ant: vector	
Dijkstra(G, v)	$\pi()$ vector	$\pi()$ heap
$\pi() \leftarrow +\infty$; $\pi(v) \leftarrow 0$	$O(n)$	
$S \leftarrow \emptyset$; $ant() \leftarrow$ **nil**	$O(n)$	
para $i \leftarrow 1, 2, \dots n$		
$w^* \leftarrow \operatorname{argmin}_{w \in V-S} \pi(w)$	$O(n) \xrightarrow{n} O(n^2)$	
$S \leftarrow S \cup \{w^*\}$	$O(1) \xrightarrow{n} O(n)$	
para $w \in \Gamma(w^*) \cap (V - S)$		
$x \leftarrow \pi(w^*) + \ell(w^*, w)$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	
si $\pi(w) > x$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	
$\pi(w) \leftarrow x$; $ant(w) = w^*$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	
fin si		
fin para		
fin para		
devolver $\pi()$, $ant()$		
TOTAL	$O(n^2)$	

$G = (V, E)$; $n = \lvert V \rvert$; $m = \lvert E \rvert$ $\ell : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (longitud ejes)	G: listas de adyacentes/sucesores S: vector de bool; *ant*: vector	
Dijkstra(G, v)	$\pi()$ vector	$\pi()$ heap
$\pi() \leftarrow +\infty$; $\pi(v) \leftarrow 0$	$O(n)$	$O(n)$
$S \leftarrow \emptyset$; $ant() \leftarrow$ **nil**	$O(n)$	$O(n)$
para $i \leftarrow 1, 2, \dots n$		
$w^* \leftarrow \operatorname{argmin}_{w \in V-S} \pi(w)$	$O(n) \xrightarrow{n} O(n^2)$	$O(\lg n) \xrightarrow{n} O(n \lg n)$
$S \leftarrow S \cup \{w^*\}$	$O(1) \xrightarrow{n} O(n)$	$O(1) \xrightarrow{n} O(n)$
para $w \in \Gamma(w^*) \cap (V - S)$		
$x \leftarrow \pi(w^*) + \ell(w^*, w)$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$
si $\pi(w) > x$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	(¡!) $O(1) \xrightarrow{m} O(m)$
$\pi(w) \leftarrow x$; $ant(w) = w^*$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	$O(\lg n) \xrightarrow{m} O(m \lg n)$
fin si		
fin para		
fin para		
devolver $\pi()$, $ant()$		
TOTAL	$O(n^2)$	$O((m + n) \lg n)$

$G = (V, E)$; $n = |V|$; $m = |E|$ — G: listas de adyacentes/sucesores

$\ell : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (longitud ejes) — S: vector de bool; ant: vector

Prim(G, v)	$\pi()$ vector	$\pi()$ heap
$\pi() \leftarrow +\infty$; $\pi(v) \leftarrow 0$	$O(n)$	$O(n)$
$S \leftarrow \emptyset$; $ant() \leftarrow$ **nil**	$O(n)$	$O(n)$
para $i \leftarrow 1, 2, \ldots n$		
$w^* \leftarrow \operatorname{argmin}_{w \in V-S} \pi(w)$	$O(n) \xrightarrow{n} O(n^2)$	$O(\lg n) \xrightarrow{n} O(n \lg n)$
$S \leftarrow S \cup \{w^*\}$	$O(1) \xrightarrow{n} O(n)$	$O(1) \xrightarrow{n} O(n)$
para $w \in \Gamma(w^*) \cap (V - S)$		
$x \leftarrow \cancel{\pi(w^*) +} \ell(w^*, w)$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$
si $\pi(w) > x$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	(¡!) $O(1) \xrightarrow{m} O(m)$
$\pi(w) \leftarrow x$; $ant(w) = w^*$	$O(1) \xrightarrow{m} O(m)$	$O(\lg n) \xrightarrow{m} O(m \lg n)$
fin si		
fin para		
fin para		
devolver $\pi()$, $ant()$		
TOTAL	$O(n^2)$	$O((m+n) \lg n)$